Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas
Universidad de La Laguna

ORDENACIÓN

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN

   Inserción, Selección, Intercambio

2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN

   HeapSort, QuickSort, MergeSort

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

   Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Ordenar

- **Ordenar:**

  *reorganizar un conjunto de objetos en una secuencia especificada por una **clave**.*

- **Objetivo** básico de la ordenación:

  *facilitar la **búsqueda** de un elemento dado por su **clave**.*

- La ordenación están presentes en **cualquier** contexto;

  *se **aprende** antes a ordenar que a contar.*

- Los métodos se describen para ordenación **ascendente**;

  de menor a mayor clave.

Clasificación de los métodos.

Según el dispositivo de almacenamiento:

- Los métodos de **ordenación externa:**
  los datos se almacenan en memoria **secundaria**.
- Los métodos de **ordenación interna:**
  los datos se almacenan en memoria **principal**.

Según la forma de abordar la tarea:

- Método de **ordenación directa:**
  el método trabaja directamente con los elementos.
- Método de **ordenación por descomposición:**
  el método trabaja con partes de la secuencia.

- Método **estable:** no altera el orden ***previo*** de los elementos de la secuencia que tienen ***igual*** valor de la clave.

Los mejores métodos de ordenación

Calidad de los métodos de ordenación:

se mide por la **complejidad** algorítmica.

Clasificación:

- **Algoritmos Cuadráticos:** métodos **sencillos** que son $O(n^2)$ en tiempo de ejecución.
- **Algoritmos Logarítimicos:** métodos **complejos** que son $O(n \log_2 n)$ en tiempo de ejecución.
- **Otros algoritmos:** métodos mejorados que alcanzan tiempos de ejecución $O(n^p)$ con $p \downarrow 1$

(n es el número de elementos de la secuencia)

ORDENACIÓN CUADRÁTICA

1. **ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN**
   - **Método de Ordenación por Inserción**
   - **Método de Ordenación por Selección**
   - **Método de Ordenación por Intercambio**

2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN

   HeapSort, QuickSort, MergeSort

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

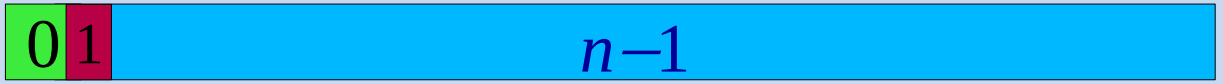
   Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Ordenación por inserción

Se considera la secuencia de elementos a ordenar **dividida** en dos partes:

- Los *i* primeros elementos que **ya** están ordenados
- los *n*–*i* últimos que **no** lo están.

Se **comienza** desde $i = 1$.



En cada iteración:

se toma el elemento que ocupa la **posición** *i* y
se **inserta** en la posición (*j*) adecuada entre los *i* primeros;

Ejemplo:

Desde la secuencia

```
0  1          j-1  j   j+1              i-1   i          n-1
5  7  ...    12   42   44   55  ...  94     18 ...06   67
```

se obtiene la situación:

```
0  1          j-1  j   j+1              i-1   i          n-1
5  7  ...    12   18   42   44  55       ...  94   ...06  67
```

Ejecución, paso a paso

i=1	44	**55**	12	42	94	18	06	67	j=1
i=2	44	55	**12**	42	94	18	06	67	j=0
i=3	12	44	55	**42**	94	18	06	67	j=1
i=4	12	42	44	55	**94**	18	06	67	j=4
i=5	12	42	44	55	94	**18**	06	67	j=1
i=6	12	18	42	44	55	94	**06**	67	j=0
i=7	06	12	18	42	44	55	94	**67**	j=6
i=8	06	12	18	42	44	55	67	94	

Secuencia Ordenada

El código

El código del método de ordenación por inserción puede ser sólo:

```
for (int i = 1; i < n; i++)
    insertar(sec,i,x);
```

El procedimiento:

```
insertar(sec,i,x)
```

deberá insertar en la posición adecuada
de la secuencia de tamaño **i**
el nuevo elemento **x**.

La posición de inserción

Para determinar la posición **`j`** de inserción,
se **recorre** la parte ya ordenada de la secuencia
comparando la clave del objeto a insertar
con la clave de los elementos de la secuencia.

- De forma ascendente desde el principio de la secuencia:

```
j = 0 ;
while ( x > sec[j] )
    j++ ;
```

- De forma descendente desde el índice *i*,

```
j = i - 1 ;
while ( x < sec[j] )
    j-- ;
```

El centinela

Hay que contemplar la posibilidad de llegar al final sin que se de la condición, por lo que debe imponerse una doble condición:

```
j = i - 1 ;
while ( (x < sec[j]) && (j > 0) )
    j-- ;
```

La técnica del **centinela** evita la doble condición de parada:
*Se coloca como centinela una copia del elemento a insertar antes de la **primera** posición para que el recorrido se detenga al encontrarla.*

```
sec[-1] = x ;
j = i - 1 ;
while x < sec[j]
    j-- ;
```

La Inserción

- Una vez determinada la posición *j* de inserción, es necesario desplazar la parte de la secuencia entre los índices *i* y *j* para dejar *hueco* al objeto a insertar.

```
for (int k = i-1; k >= j; k--)
    sec[k+1] = sec[k] ;
sec[j] = x ;
```

Las operaciones de búsqueda descendente de la posición de inserción y la propia inserción ***se pueden realizar a la vez.***

Procedimiento conjunto

```
void inserta(Tvector &sec, int i, Tdef x){
  sec[-1] = x ;
  j = i - 1 ;
  while ( x < sec[j] ){
    sec[j+1] = sec[j] ;
    j-- ;
  }
  sec[j+1] = x ;
}
```

Inserción con centinela

```
for (int i = 1; i < n; i++ ){
    j = i ;
    x = sec[i] ;
    sec[-1] = x ;
    while ( x < sec[j-1] ){
        sec[j] = sec[j-1] ;
        j-- ;
    }
    sec[j] = x ;
}
```

Análisis de la complejidad

Se trata de un algoritmo de complejidad $O(n^2)$.

Hay que realizar n veces

la búsqueda de la posición de inserción, que es O(n).

Una **mejora** significativa se obtendría al realizar una **búsqueda binaria** de la posición de inserción.

- *Se compara la clave del elemento a insertar con la del elemento **medio** de la secuencia de búsqueda.*
- *Según que la clave del elemento a insertar sea mayor o menor que la del elemento medio, la secuencia de búsqueda pasa a ser la mitad superior o la inferior de la anterior.*

Al procedimiento resultante se le llama ***BinSort***

Procedimiento BinSort

```
for (int i = 1; i < n; i++ ) {
    j = i ;
    x = sec[i] ;
    ini = 0 ; fin = i-1;
    while ( ini <= fin ) {
        med = (ini+fin)/2;
        if (v[med] < x)
            ini = med+1;
        else
            fin = med-1;
    }
    for (int j = i-1; j >= ini; j--)
        sec[j+1] = sec[j] ;
    sec[ini] = x ;
}
```

Ejemplo:

Partiendo de la situación intermedia del ejemplo anterior con el estado de la secuencia parcialmente ordenada siguiente.

12 42 44 55 94 18 06 67

La secuencia de los pasos que sigue el método es la siguiente:

Espacio de búsqueda	x	ini	fin	med
12 42 44 55 94	**18**	0	4	2
12 42	**18**	0	1	0
42	**18**	1	1	1
12 18 42 44 55 94	**06**	0	5	2
12 18	**06**	0	1	0
12	**06**	0	0	0
06 12 18 42 44 55 94	**67**	0	6	3
44 55 94	**67**	4	6	5
94	**67**	6	6	6

Complejidad de BinSort

- Si la ***búsqueda* binaria** en la secuencia de tamaño n
  emplea un tiempo $O(\log n)$
  y se realiza una búsqueda binaria
  en la parte de la secuencia ordenada,
  el algoritmo BinSort es $O(n \log n)$.
- Sin embargo, un análisis *cuidadoso* de la implementación anterior muestra que este algoritmo es $O(n^2)$.
- Observando el procedimiento de la ordenación **BinSort** anterior se deduce que,
  aunque la **búsqueda binaria** es $O(\log n)$,
  se aplica un procedimiento $O(n)$
  para **dejar hueco** al elemento a insertar.

El análisis detallado

En particular, un análisis detallado del bucle **`while`** interno muestra que el número de divisiones (y comparaciones) máximo en la iteración i es $\log i = O(\log n)$.

A continuación se ejecuta un bucle **`for`** en el que el número de asignaciones máximo en la iteración i es $i = O(n)$.

Por tanto el número máximo total de divisiones y comparaciones es:

$$n\ O(\log n) = O(n \log n),$$

pero el número máximo total de asignaciones realizadas es: $\boldsymbol{O(n^2)}$.

Implementación óptima de BinSort

- Con la secuencia representada por una lista enlazada, como la descrita anteriormente, se evita el bucle **`for`** y el número de asignaciones también sería $O(n \log n)$.

- Sin embargo, la búsqueda binaria tal como se ha expuesto aquí, está implementada para una secuencia representada por **`array`** lo que permite acceder en tiempo $O(1)$ al elemento medio, lo que no puede realizarse con la lista.

- Para obtener una implementación del algoritmo de ordenación por inserción de complejidad $O(n \log n)$ debe hacerse uso de un ***árbol binario de búsqueda*** para mantener la parte ordenada de la secuencia.

ORDENACIÓN CUADRÁTICA

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN

- √ Método de Ordenación por Inserción
- ➢ **Método de Ordenación por Selección**
- ● Método de Ordenación por Intercambio

2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN

HeapSort, QuickSort, MergeSort

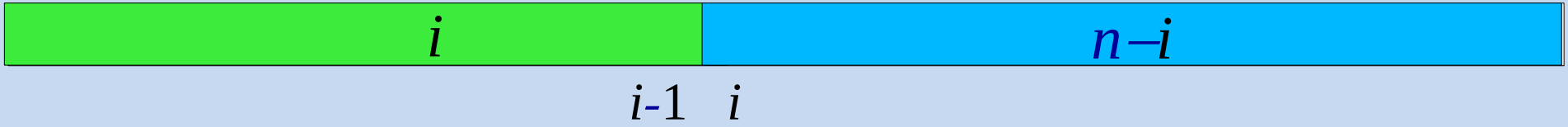
3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Ordenación por selección

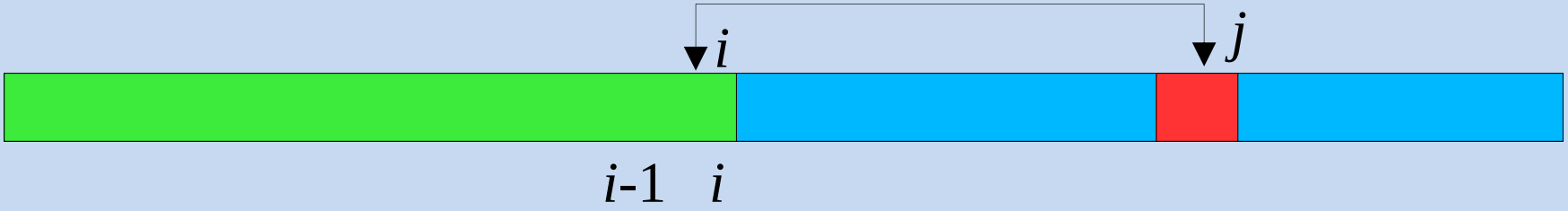
En el método de **ordenación por selección**,
(*igual que en el método de ordenación por inserción*)
se considera que, en una situación intermedia

- los *i* primeros elementos **ya** están ordenados y
- los *n*–*i* últimos **no** están ordenados.



Sin embargo, en la iteración *i*,

- se **selecciona** la posición *j* del elemento de **menor** clave,
(entre los elementos que están de la posición *i* a la *n*–1)
- se intercambian los elementos que están en las posiciones *j* e *i*.

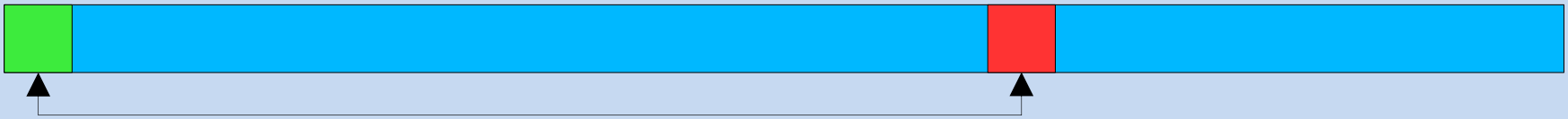


Ordenación por selección

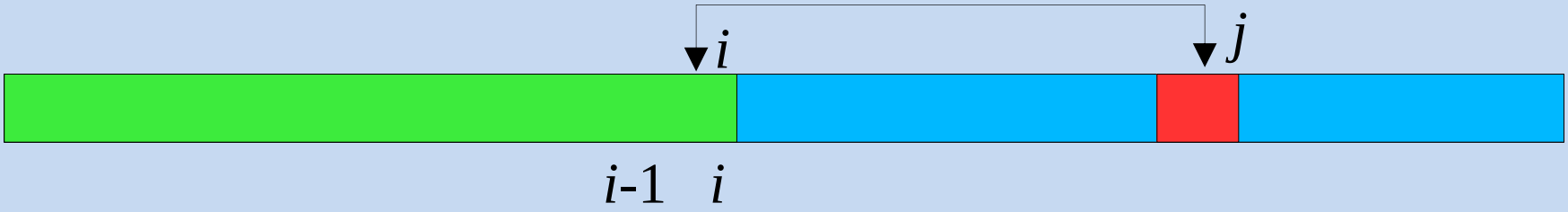
En la situación de partida:

- no se asume la ordenación de ningún trozo; $i = 0$.

En la primera iteración se selecciona el menor de toda la secuencia



Se selecciona siempre el elemento de **menor** clave de los no ordenados;



- por tanto, en la iteración i, los primeros i elementos, además de estar ordenados, ...

..... son los *i* elementos de menor clave.

Ejemplo numérico:

La ejecución de un paso:

De la situación:

0	1	...	i-1	i		j		n-1
6	**12**	...	**18**	**44**	55 ... 94	**42**	67 ... 84	87

se pasa a la situación:

0	1	...	i-1	i		j		n-1
6	**12**	...	**18**	**42**	55 ... 94	**44**	67 ... 84	87

El código

- Similar al de ordenación por inserción, ***reemplazando*** el procedimiento de inserción por uno de selección:

```
for (int i = 0; i < n-1; i++)
   selecciona(sec,i);
```

- El procedimiento de selección tiene que elegir el elemento de **menor** clave de la parte no ordenada de la secuencia (desde la posición *i* hasta el final) e **intercambiarlos**.

```
for (int i = 0; i < n-1; i++){
   min = i ;
   for (int j = i+1; j < n; j++)
      if sec[j] < sec[min]
         min = j ;
   x = sec[min] ;
   sec[min] = sec[i] ;
   sec[i] = x ;
}
```

Análisis del algoritmo

- Tiene dos bucles **`for`** anidados: se trata de un algoritmo $O(n^2)$.
- Paralelamente al método de ordenación por inserción, se toma un elemento de la parte no ordenada y se añade a la parte ordenada.
- Sin embargo, en el método de ordenación por inserción, la selección del elemento a incorporar es trivial mientras que el proceso inteligente es el de búsqueda de la posición de inserción.
- En el método de selección, la posición de inserción en la parte ordenada se obtiene directamente y el esfuerzo computacional se hace en el proceso de selección del elemento a insertar.

ORDENACIÓN CUADRÁTICA

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN

- √ Método de Ordenación por Inserción
- √ Método de Ordenación por Selección
- ➢ **Método de Ordenación por Intercambio**

2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN

HeapSort, QuickSort, MergeSort

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Ordenación por Intercambio

- **Método de la Burbuja**

  BubbleSort

- **Método de la Sacudida**

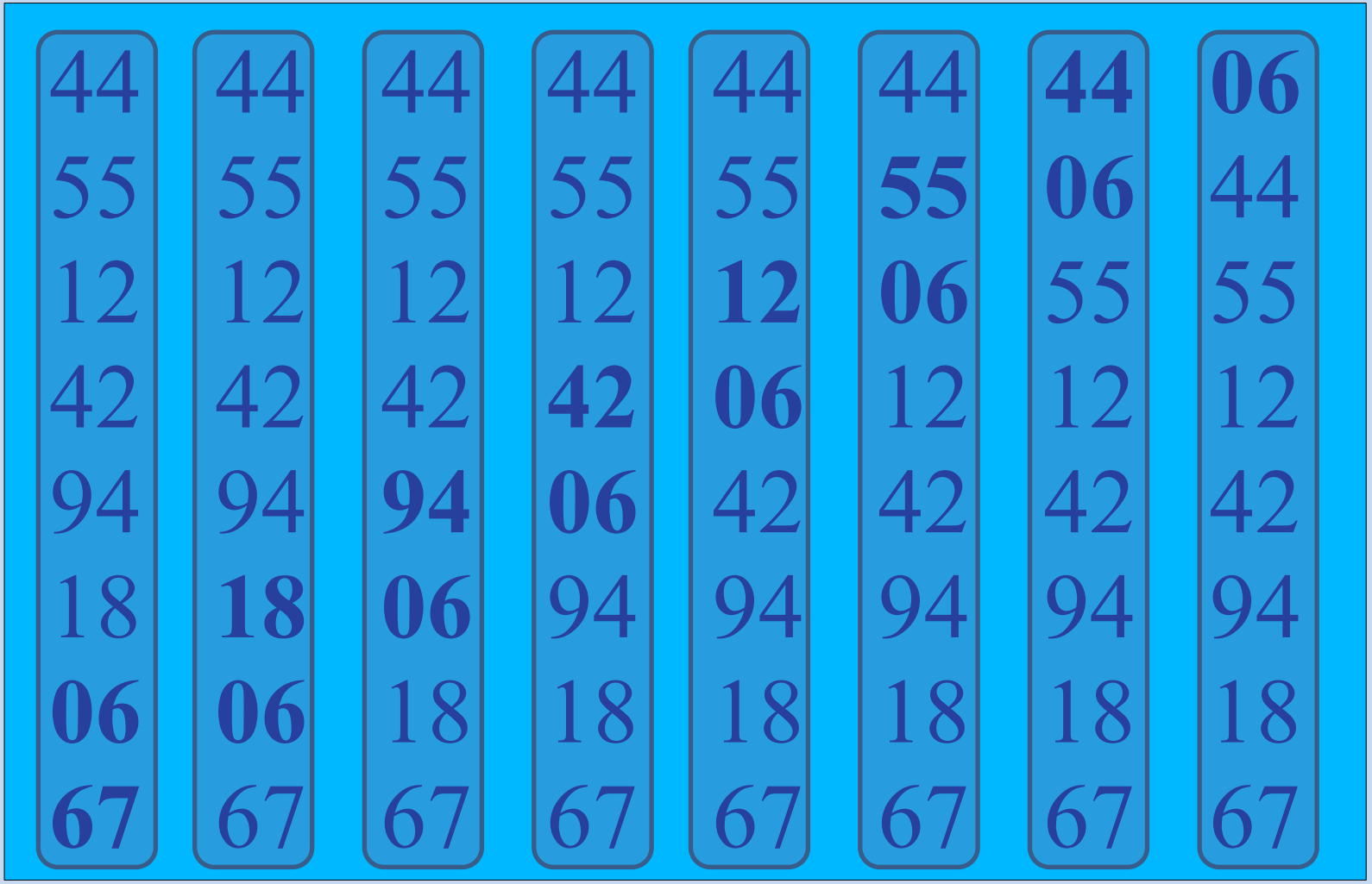
  ShakeSort

Ordenación por intercambio

- En el método de **ordenación por intercambio** se recorre sucesivamente la secuencia **intercambiando** pares de elementos consecutivos desordenados.
- Se van comparando los pares consecutivos de elementos *desde el final hacia el principio*.
- Al proceso desde la comparación de los dos últimos elementos hasta los dos primeros se le llama **pasada**.
- La secuencia se suele representar verticalmente y se denomina método de la **burbuja** porque parece que hay un elemento que sube como una burbuja.

Ejemplo:

En la primera pasada, que aquí mostramos con la secuencia orientada en vertical, el elemento burbuja es el 06:



Criterios de Parada

- Si el elemento ***burbuja*** topa con uno de menor clave, éste elemento pasa a ser el nuevo elemento burbuja (que puede continuar subiendo) y su posición queda ocupada por el anterior.

- En cada pasada del método queda **colocado** el último elemento burbuja.

- El método se **termina** cuando en una pasada no se modifica la secuencia.

Las pasadas del ejemplo:

En la segunda pasada del ejemplo, el elemento burbuja es inicialmente el elemento con clave 18 pero acaba siendo el elemento de clave 12.

En la tercera pasada el elemento burbuja es el de clave 42

Las siguientes pasadas (en horizontal) son:

06	44	55	**12**	42	94	18	67	
06	**12**	44	55	**18**	42	94	67	
06	12	**18**	44	55	**42**	67	94	
06	12	18	**42**	**44**	55	67	94	
06	12	18	42	**44**	**55**	67	94	no cambia
06	12	18	42	44	**55**	**67**	94	
06	12	18	42	44	55	**67**	**94**	
06	12	18	42	44	55	67	**94**	

El código

```
for (int i = 1; i < n; i++){
    for (int j = n-1; j >= i; j--)
        if (sec[j] < sec[j-1]){
            swap(sec[j-1],sec[j]) ;
        }
}
```

¿Podríamos ahorrar comprobaciones si en una pasada completa no se produce ningún intercambio de elementos?

Elementos pesados

- Si al aplicar el método de la burbuja,

  sólo está mal colocado un elemento **ligero**,

  el método acaba rápidamente,

  aunque esté muy profundo.

- Sin embargo,

  si sólo está mal colocado un elemento **pesado,**

  éste se hunde muy lentamente.

Burbujas y Piedras

El único elemento ligero mal colocado (el 02) sube en una pasada.

06	44	55	12	42	94	18	67	**02**
02	06	44	55	12	42	94	18	67

El elemento pesado (el 97) necesita 8 pasadas para colocarse:

97	06	44	55	12	42	94	18	67
06	**97**	12	44	55	18	42	94	67
06	12	**97**	18	44	55	42	67	94
06	12	18	**97**	42	44	55	67	94
06	12	18	42	**97**	44	55	67	94
06	12	18	42	44	**97**	55	67	94
06	12	18	42	44	55	**97**	67	94
06	12	18	42	44	55	67	**97**	94
06	12	18	42	44	55	67	94	**97**

El método de La Sacudida

- Por tanto, este caso se resolvería fácilmente realizando el recorrido en sentido descendente; como una piedra que se hunde en el agua.
- El método de la **sacudida** evita este fenómeno haciendo recorridos ascendente y descendentes, **alternativamente**.
- Además, los recorridos pueden empezar debajo del último elemento burbuja y encima del último elemento hundido, acortándose el recorrido.
- A pesar de ello, el algoritmo de la burbuja y el de la sacudida son $O(n^2)$.

Ejemplo de la Sacudida

La sacudida aplicado al ejemplo anterior acaba en 4 pasadas.

	44	55	12	42	94	18	**06**	67
→	**06**	44	55	12	42	**94**	18	67
←	06	44	**12**	42	55	18	67	**94**
→	06	**12**	44	18	42	55	67	94
←	06	12	18	42	**44**	**55**	**67**	94
	06	12	18	42	44	55	67	94

El código del método de la sacudida

```
ini = 1 ;
fin = n-1 ;
cam = n ;
while (ini < fin){
   for (int j = fin; j >= ini; j--)
       if (sec[j] < sec[j-1]) {
          swap(sec[j-1],sec[j]) ;
          cam = j ;
       }
   ini = cam + 1 ;
   for (int j = ini; j <= fin; j++)
       if (sec[j] < sec[j-1]) {
          swap(sec[j-1],sec[j]) ;
          cam = j;
       }
  fin = cam - 1 ;
}
```

ORDENACIÓN LOGARÍTMICA

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio

2. **ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN**
   - ➢ **Algoritmo de ordenación HeapSort**
   - ● **Algoritmo de ordenación QuickSort**
   - ● **Algoritmo de ordenación MergeSort**

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

   Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Algoritmo HeapSort

- Ordenación por selección

  SelSort

- Estructura de datos muy eficiente:

  ***Heap* o montón**

- Ordenación por selección con Heap

  HeapSort

Mejorando el algoritmo SelSort

En el algoritmo de ordenación por selección:

- En la iteración $i = 0, 1, \ldots, n-2$: se **selecciona** la posición j del elemento con **menor** clave, entre los elementos que están de la posición $i+1$ a la $n-1$, y se intercambian los elementos que están en las posiciones j e $i+1$.

Es de esperar que, si se utiliza un método inteligente de selección del menor elemento de la parte no ordenada que resulte más eficiente se podría mejorar la complejidad del método de ordenación.

Esta **mejora** significativa se consigue si la secuencia de elementos no ordenados se introducen previamente en un **montón**, **montículo** o **Heap** del que posteriormente se van extrayendo ordenadamente.

Esto da lugar al denominado algoritmo **HeapSort**

que es **O(n log n).**

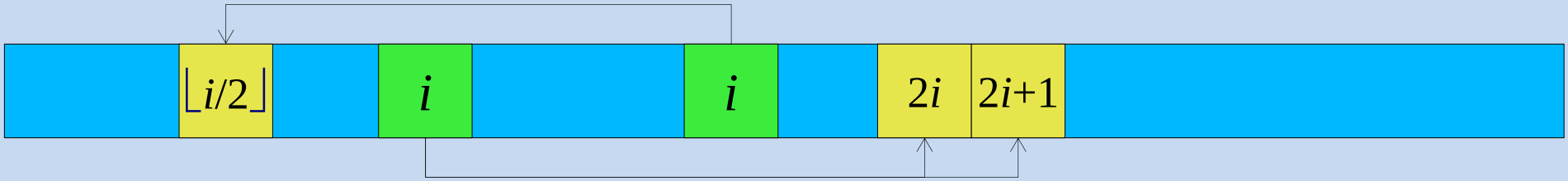
Concepto de motón o *Heap*

Se puede implementar de forma más natural con un árbol.

La formalización de ***Williams*** se implementa en un array que empieza en 1 en lugar de en 0

Es una estructura de datos basada en la relación **padre/hijo**:

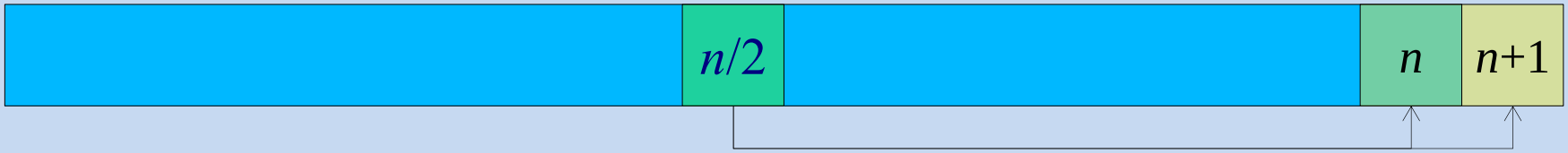
- Los **hijos** del elemento i son los elementos $2i$ y $2i+1$ (si están presentes en el montón).
- El **padre** del elemento i es $\lfloor i/2 \rfloor = i \,/\, 2$, si no es nulo. (el primer elemento es el único que no tiene padre)



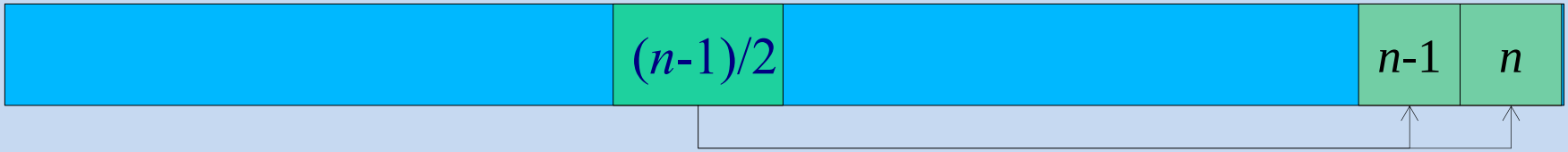
Limites del motón o *Heap*

Los elementos posteriores a $\lfloor n/2 \rfloor$ no tienen hijos:

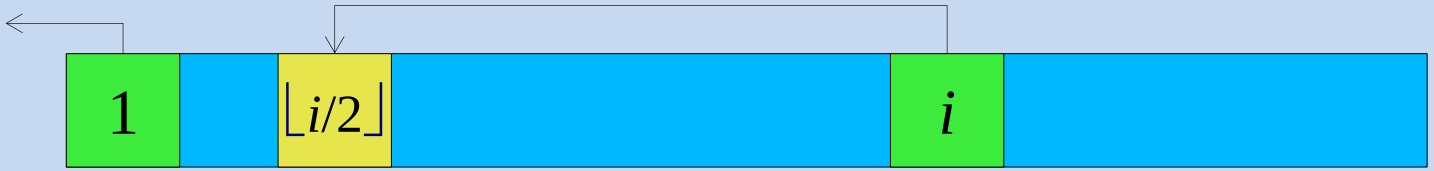
- Si n es par, el elemento $\lfloor n/2 \rfloor$ tiene un sólo hijo; el elemento n.



- Si n es impar, los hijos de $\lfloor n/2 \rfloor$ son los elementos $n-1$ y n.



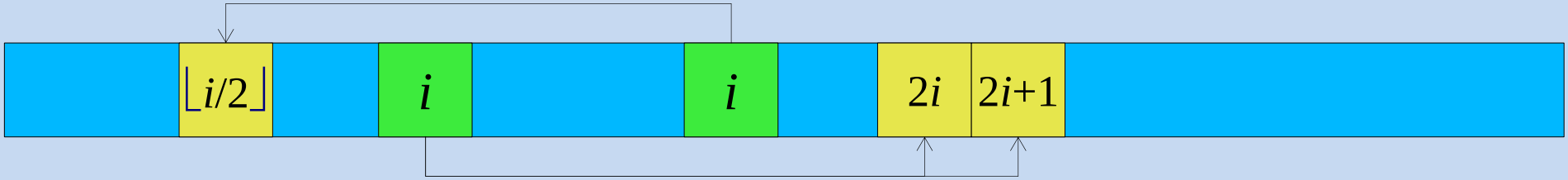
- El único elemento que no tiene padre es el primero



Heap ordenado

La noción de ordenación en la secuencia organizada cómo un montón o heap es menos exigente que la noción estándar.

- Decimos que el montón está ***ordenado*** si ningún elemento tiene menor clave que su padre.

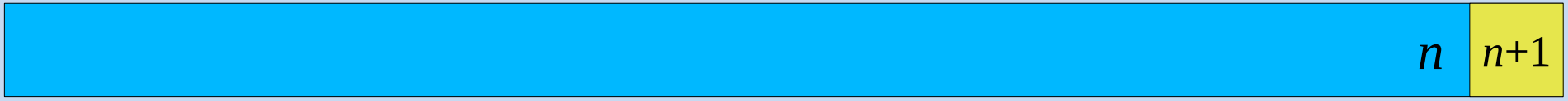


- Equivalentemente, el montón está ordenado si ningún elemento tiene mayor clave que ninguno de sus dos hijos.

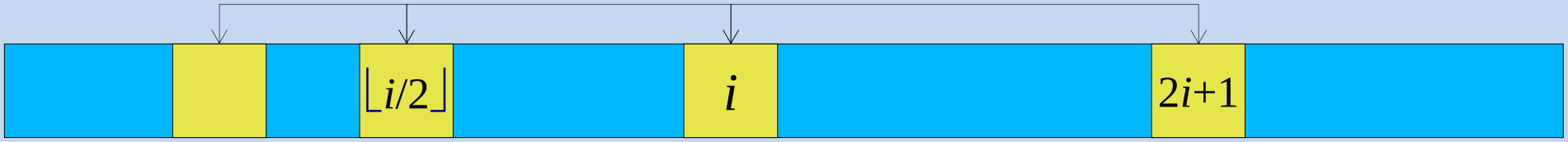
Una vez que se tiene una secuencia ya ordenada según un montón hasta la posición *n*, se **inserta** un nuevo elemento o se **elimina** un elemento del montón, manteniendo la ordenación.

Insertar un elemento

El nuevo elemento se **inserta** siempre en la posición n+1 y si hace falta se sube para mantenerlo ordenado.



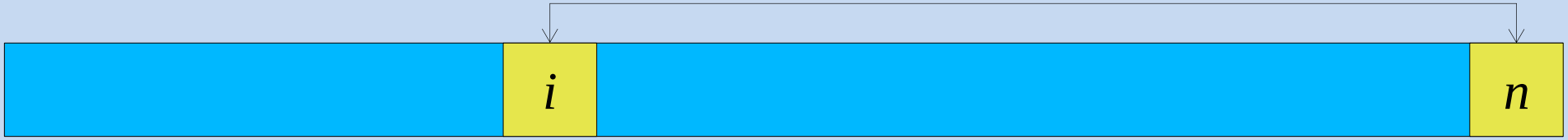
Si el elemento queda mal colocado se **sube** intercambiándolo recursivamente con su padre, mientras haga falta (mientras tenga menor clave que su padre o se llegue a la raíz).



La inserción de elementos implica **actualizar** el tamaño n del montón; $n = n + 1$

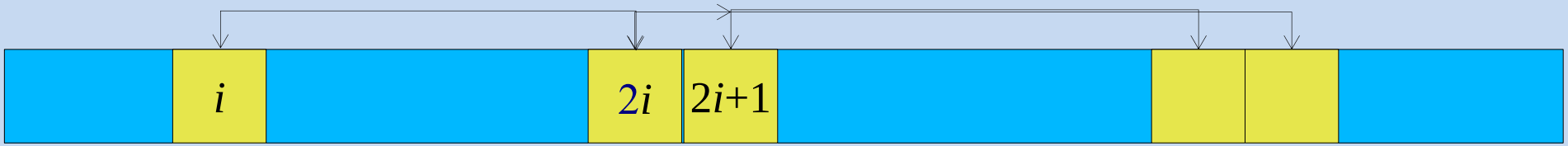
Eliminar un elemento

Para **eliminar** un elemento de un montón ordenado, se intercambia con el último elemento; y



si éste queda mal colocado se sube o se baja, según haga falta (es decir, hasta que no tenga hijos o de tenerlos, ninguno tenga menor clave).

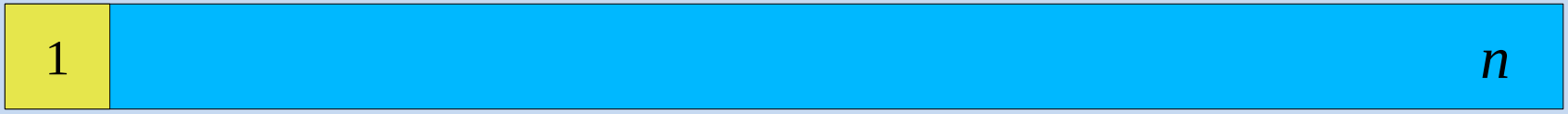
Para **bajar** un elemento mal colocado se intercambia recursivamente con el hijo de menor clave, mientras haga falta.



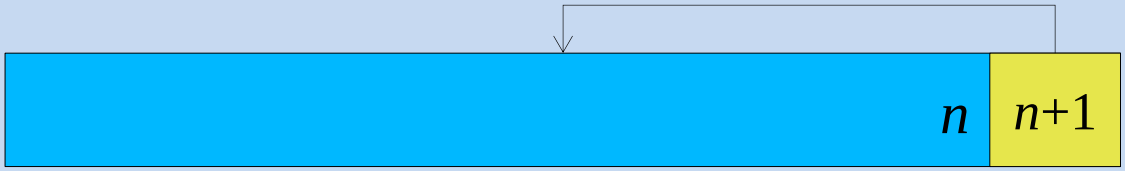
La eliminación de elementos implica **actualizar** el tamaño n del montón. $n = n - 1$

Ordenar un *Heap*

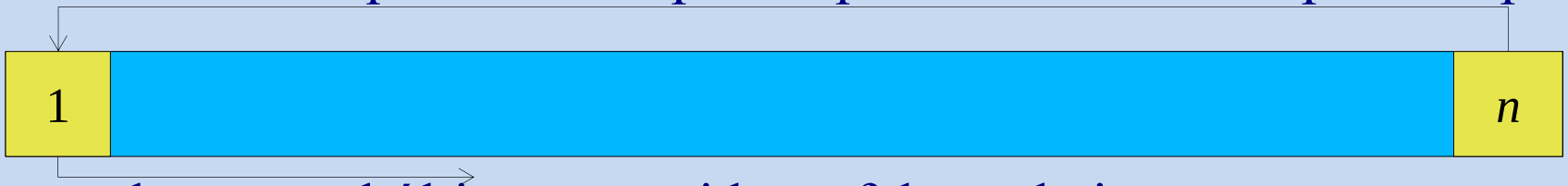
En un montón ordenado el elemento **mínimo** (el de menor clave) está siempre en la primera posición.



Para **ordenar** los elementos de una secuencia por el método de ordenación por selección con el uso de un ***heap*** o montón, en una *primera* fase, se ordena la secuencia como un montón incorporando al montón los elementos uno a uno recolocándolo si hace falta.



Luego, en la *segunda* fase, se va seleccionando iterativamente el elemento de menor clave que será siempre el que está en la raíz o primera posición.



Se reemplaza por el último que, si hace falta se baja

Ejemplo

En este ejemplo se muestra, en primer lugar, cómo se realiza la fase de introducción de los elementos en el heap.

Se denota por *m* al elemento que se incorpora al montón y por *p* al padre del elemento *i*.

En la segunda fase de extracción, para sacar los elementos del montón en la secuencia ordenada se va extrayendo el primer elemento de forma iterativa, intercambiándose con el último y, si hace falta, se baja.

Se rebaja el tamaño *n* del montón y se denota por *h* el hijo del elemento *i* de menor clave.

Introducciones

	1	2	3	4	5	6	7	8	
m=1	**44**	55	12	42	94	18	06	67	i=1 p=0 => colocado
m=2	44	**55**	12	42	94	18	06	67	i=2 p=1 55≥44 => colocado
m=3	44	55	**12**	42	94	18	06	67	i=3 p=1 12<44 => sube
	12	55	44	42	94	18	06	67	i=1 p=0 => colocado
m=4	12	55	44	**42**	94	18	06	67	i=4 p=2 42<55 => sube
	12	**42**	44	55	94	18	06	67	i=2 p=1 42≥12 => colocado
m=5	12	42	44	55	**94**	18	06	67	i=5 p=2 94≥42 => colocado
m=6	12	42	44	55	94	**18**	06	67	i=6 p=3 18<44 => sube
	12	42	**18**	55	94	44	06	67	i=3 p=1 18≥12 => colocado
m=7	12	42	18	55	94	44	**06**	67	i=7 p=3 06<18 => sube
	12	42	**06**	55	94	44	18	67	i=3 p=1 06<12 => sube
	06	42	12	55	94	44	18	67	i=1 p=0 => colocado
m=8	06	42	12	55	94	44	18	**67**	i=8 p=4 67≥55 => colocado

Extracciones (I)

	1	2	3	4	5	6	7	8	
n=8	**06**	42	12	55	94	44	18	67	
n=7	**67**	42	12	55	94	44	18	06	i=1 h=2,3 67>12 => baja
	12	42	**67**	55	94	44	18	06	i=3 h=6,7 67>18 => baja
	12	42	18	55	94	44	67	06	i=7 h=∅ (14>n=7) colocado
	12	42	18	55	94	44	67	06	
n=6	**67**	42	18	55	94	44	12	06	i=1 h=2,3 67>18 => baja
	18	42	**67**	55	94	44	12	06	i=3 h=6 67>44 => baja
	18	42	44	55	94	**67**	12	06	i=6 h=∅ (12>n=6) colocado
	18	42	44	55	94	67	12	06	
n=5	**67**	42	44	55	94	18	12	06	i=1 h=2,3 67>42 => baja
	42	**67**	44	55	94	18	12	06	i=2 h=4,5 67>55 => baja
	42	55	44	67	94	18	12	06	i=4 h=∅ (8>n=5) colocado
	42	55	44	67	94	18	12	06	

Extracciones (II)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

42 55 44 67 94 18 12 06

n=4 **94** 55 44 67 42 18 12 06 i=1 h=2,3 94 >44 => baja
44 55 **94** 67 42 18 12 06 i=3 h=∅ (6>n=4) colocado
44 55 94 67 42 18 12 06

n=3 **67** 55 94 44 42 18 12 06 i=1 h=2,3 67>55 => baja
55 67 **94** 44 42 18 12 06 i=3 h=∅ (6>n=3) colocado
55 67 94 44 42 18 12 06

n=2 **94** 67 55 44 42 18 12 06 i=1 h=2 94>67 => baja
67 **94** 55 44 42 18 12 06 i=2 h=∅ (4>n=2) colocado
67 94 55 44 42 18 12 06

n=1 **94** 67 55 44 42 18 12 06 i=1 h=∅ (2>n=1) colocado

Inconvenientes

Inconvenientes que podrían solventarse:

- En primer lugar, la secuencia queda al final ordenada en sentido contrario y hay que invertirla.
  - Esto se soluciona considerando el orden dentro del montón o heap en sentido inverso; de *mayor a menor*.

- En segundo lugar, la parte que se considera que inicialmente ya está ordenada es sólo la raíz del montón porque no tiene padre.
  - Se puede también empezar suponiendo que los elementos del *final de la secuencia* los que está inicialmente bien ordenados porque no tienen hijos.

Método de *Floyd* (*HeapSort*)

Se parte de que los elementos bien colocados inicialmente son los de **la mitad final** que son padres de elementos que estarían fuera de la secuencia.

El montón se completa incorporando cada vez un elemento a la derecha que es recolocado bajándolo si hace falta. De esta forma, tanto al incorporar como al excluir elementos del montón *nunca es necesario subir un elemento, sólo bajarlo*.

Finalmente, en la segunda fase del método, es siempre un elemento del final del heap (sin hijos) el que se coloca en la primera posición para ser bajado *una y otra vez*. Para solventar esta cuestión no se ha realizado una propuesta satisfactoria.

Heap ordenado para *HeapSort*

- El *Heap* o montón está ***ordenado*** si ningún elemento tiene mayor clave que su padre.
- El *Heap* o montón está ***ordenado*** si ningún elemento tiene menor clave que ninguno de sus dos hijos.

Un elemento mal colocado se recoloca bajándolo o subiéndolo recursivamente mientras haga falta:

- Se **baja** intercambiándolo *recursivamente* con su hijo de mayor clave,
- Se **sube** intercambiándolo *recursivamente* con su padre.

Insertar y Eliminar

Dada la secuencia ya ordenada según un montón desde la posición i+1 hasta la posición n, se **inserta** el nuevo elemento de la posición i y, para mantener la ordenación, se baja *mientras haga falta* (es decir; hasta que no tenga hijos o, de tenerlos, ninguno tenga menor clave).

Para **eliminar** el primer elemento del montón ordenado, se intercambia con el último elemento; y si queda mal colocado se baja *mientras haga falta*..

La eliminación de elementos implica **actualizar** el tamaño n del montón.

Ordenar con *Heap*

Para **ordenar** los elementos de una secuencia por el método de ordenación por selección con el uso de un ***heap***:

En una ***primera*** fase,

- se ordena la secuencia como un montón
- incorporando al montón los elementos uno a uno
- bajándolo si hace falta.

En la ***segunda*** fase,

- se va seleccionando iterativamente
- el elemento de mayor clave
- que será siempre el que está en la raíz o primera posición.

Reordenando el montón tras cada eliminación

Ejemplo del *HeapSort*:

Inserciones:

1	2	3	4	5	6	7	8
44	55	12	42	94	18	06	67
44	55	12	**67**	94	18	06	**42**
44	55	**18**	67	94	**12**	06	42
44	**94**	18	67	**55**	12	06	42
94	**67**	18	**44**	55	12	06	42

Extracciones:

1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
42	67	18	44	55	12	06	**94**	→	**67**	**55**	18	44	**42**	12	06	94
06	55	18	44	42	12	**67**	94	→	**55**	**44**	18	**06**	42	12	67	94
12	44	18	06	42	**55**	67	94	→	**44**	**42**	18	06	**12**	55	67	94
12	42	18	06	**44**	55	67	94	→	**42**	**12**	18	06	44	55	67	94
06	12	18	**42**	44	55	67	94	→	**18**	12	**06**	42	44	55	67	94
06	12	**18**	42	44	55	67	94	→	**12**	**06**	18	42	44	55	67	94
06	**12**	18	42	44	55	67	94	→	06	12	18	42	44	55	67	94

Análisis del Algoritmo

El algoritmo **HeapSort**, que implementa
el método de ordenación por selección con heap o montón
siguiendo la propuesta de Floyd, es **O(*n* log *n*)**.

- Sólo se utiliza el procedimiento baja, que es O(log *n*).

- El número de veces que se baja un elemento en cada fase es;
n/2 en la primera fase y *n* en la segunda fase,
por tanto en O(*n*) veces en total.

El código de *baja (Floyd)*

```
void baja( int i ; Tvector &sec ; int n ) {
   while ( 2*i <= n ){
        h1 = 2*i ;
        h2 = h1 + 1 ;
        if (h1 == n)
           h = h1
        else if (sec[h1] > sec[h2])
                 h = h1
             else h = h2 ;
        if (sec[h] <= sec[i])
            break ;
        else {
           swap(sec[i],sec[h]) ;
           i = h ;
        } ;
   } ;
} ;
```

El código de *HeapSort (Floyd)*

```
void heapsort( Tvector sec ; int n ) {
    for (int i = n/2; i > 0; i--)
        baja(i, sec, n) ;
    for (int i = n; i > 1; i--) {
        swap(sec[1],sec[i]);
        baja(1,sec,i-1) ;
    } ;
}
```

ORDENACIÓN LOGARÍTMICA

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio

2. **ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN**
   - √ Algoritmo de ordenación HeapSort
   - ➢ **Algoritmo de ordenación QuickSort**
   - ● Algoritmo de ordenación MergeSort

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

   Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Ordenación por descomposición

Existen varios métodos de ordenación que se basan en la descomposición del problema para aplicar la técnica denominada ***divide y vencerás***.

Los más importantes son:

- El método de descomposición por pivote denominado **ordenación rápida** o **QuickSort** y
- El método de descomposición por posición denominado **ordenación por mezcla** o **MergeSort**.

AMBOS SON LOGARÍTMICOS $O(n \log_2 n)$

Descomposición por pivote

El algoritmo denominado **QuickSort** es originalmente debido a ***Hoare*** y utiliza una clave **pivote** para descomponer la secuencia.

Se recorre la secuencia desde sus extremos en **ambos sentidos** comparando las claves de los elementos con el pivote.

- El recorrido ascendente se para en el primer elemento con clave **mayor** que el pivote.
- El recorrido descendente se para en el primer elemento con clave **menor** que el pivote.

  Se **intercambian** estos pares de elementos y se **continúan** los recorridos hasta que se encuentren.

En ese momento, la secuencia está dividida entre dos subsecuencias,

- la primera con elementos de clave **menor** que el pivote y
- la segunda con elementos de clave **mayor** que el pivote.

Ejemplo.

44 55 12 42 94 18 06 67 PIV: 42

Los recorridos ascendente y descendente se paran en 44 y 06

44 55 12 42 94 18 06 67

Se intercambian estos elementos:

06 55 12 42 94 18 **44** 67

Se continúan los recorridos hasta que vuelven a detenerse en 55 y 18

06 55 12 42 94 18 44 67

que se intercambian

06 **18** 12 42 94 **55** 44 67

Se continúan los recorridos hasta que se encuentran en 42

06 18 12 42 94 55 44 67

La secuencia queda dividida en dos subsecuencias por la posición de **cruce**, una formada por elementos menores que 42 y la otra formada por elementos mayores que 42

06 18 12 42 94 55 44 67

Recursión

- Con cada una de las dos secuencias en que queda dividida se itera **recursivamente** el proceso.
- Aunque se puede usar como pivote un valor que no coincida con ninguna clave, se suele usar como pivote la **clave** de un elemento, generalmente el primero o el del medio.

Otras propuestas:

- Uno en particular: el primero, el último, el del medio
- Una media: entre el primero y el último, entre el primero, el último y el del medio, ¿ponderada?
- La mediana, la mediana entre varios, ...

Ejemplo:

El proceso es el siguiente:

	(42)	44	55	12	42	94	18	06	67
PIVOTE 42		44	55	12	42	94	18	06	67
posición 3		**06**	55	12	42	94	18	**44**	67
= (0 + 7)/2		06	**18**	12	42	94	**55**	44	67
		06	18	12	42	94	55	44	67

- ***¿qué hacemos cuando nos encontremos justo con el pivote?***
- ***¿qué ocurre si no hay ninguno mayor que el pivote?***

(18) 06 18 12 42 (55) 94 55 44 67
06 12 18 44 55 94 67

(12) 06 12 18 42 44 55 (94) 94 67

- ***¿en qué orden se hacen las divisiones?***

Resultado: 06 12 18 42 44 55 67 94

Revisión - QuickSort

Se utiliza una clave **pivote** para descomponer la secuencia.

Se recorre la secuencia desde sus extremos en **ambos sentidos** comparando las claves de los elementos con el pivote.

- El recorrido ascendente se para en el primer elemento con clave **mayor *o igual*** que el pivote.
- El recorrido descendente se para en el primer elemento con clave **menor *o igual*** que el pivote.

Se **intercambian** estos pares de elementos y se **continúan** los recorridos hasta que se ***crucen***.

En ese momento, la secuencia está dividida entre dos subsecuencias,

- la primera con elementos de clave **menor *o igual*** que el pivote y
- la segunda con elementos de clave **mayor *o igual*** que el pivote.

Mejoras

Una mejora práctica se obtiene al ***estimar*** la mediana (*el valor desconocido que dividiría la secuencia en dos partes del mismo tamaño*), por ejemplo, con la media de las claves extremas y la del medio.

El procedimiento natural que implementa

el método de ordenación rápida o **QuickSort**

es claramente **recursivo**.

El algoritmo resultante es $O(n^2)$ en el peor caso

pero es $O(n \log n)$ en el caso medio.

Código

```
void Qsort( sec, ini, fin) {
    i = ini ; f = fin ;
    p = sec[(i+f)/2] ;
    while (i <= f){
        while (sec[i] < p) i++ ;
        while (sec[f] > p) f-- ;
        if (i <= f) {
            swap(sec[i],sec[f]) ;
            i++ ;
            f-- ;
        } ;
    } ;
    if (ini < f) Qsort(sec, ini, f) ;
    if (i < fin) Qsort(sec, i, fin) ;
} ;
```

Ejemplo (I):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6	Pivote: 5
13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6	i=0; f=9
2	3	4	12	14	10	5	1	8	**13**	7	9	11	6	i=3; f=7
2	3	4	**1**	14	10	5	**12**	8	13	7	9	11	6	i=4; f=6
2	3	4	1	**5**	10	**14**	12	8	13	7	9	11	6	i=5; f=5
2	**3**	**4**	**1**	**5**	10	14	12	8	13	7	9	11	6	Pivote: 4
2	3	**4**	**1**	5	10	14	12	8	13	7	9	11	6	i=2; f=3
2	3	1	4	5	10	14	12	8	13	7	9	11	6	i=3; f=2
2	3	1	4	5	10	14	12	8	13	7	9	11	6	

Ejemplo (II):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6	Pivote: 5
2	**3**	**4**	**1**	**5**	10	14	12	8	13	7	9	11	6	Pivote: 4
2	**3**	**1**	4	5	10	14	12	8	13	7	9	11	6	Pivote: 3
2	**1**	3	4	5	10	14	12	8	13	7	9	11	6	Pivote: 2
1	2	3	**4**	**5**	10	14	12	8	13	7	9	11	6	Pivote; 4
1	2	3	4	5	**10**	**14**	**12**	**8**	**13**	**7**	**9**	**11**	**6**	Pivote: 13
1	2	3	4	5	**10**	**6**	**12**	**8**	**11**	**7**	**9**	13	14	Pivote: 8
1	2	3	4	5	**7**	**6**	**8**	12	11	10	9	13	14	Pivote: 6
1	2	3	4	5	6	**7**	**8**	12	11	10	9	13	14	Pivote: 7
1	2	3	4	5	6	7	8	**12**	**11**	**10**	**9**	13	14	Pivote: 11
1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	**10**	11	12	13	14	Pivote: 9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	**12**	13	14	Pivote: 11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	**14**	Pivote: 13

ORDENACIÓN LOGARÍTMICA

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio

2. **ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN**
   - √ Algoritmo de ordenación HeapSort
   - √ Algoritmo de ordenación QuickSort
   - ➢ **Algoritmo de ordenación MergeSort**

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

   Incrementos decrecientes, Radicales, TimSort

Descomposición por posición

El método de **ordenación por mezcla** o **MergeSort**
se basa en la ***descomposición*** de la secuencia a ordenar en
dos *subsecuencias* que, una vez ordenadas,
se mezclan ordenadamente.

La división se realiza por la **posición media** y
la mezcla se realiza seleccionando
el elemento ***cabecera*** de las dos subsecuencias de ***menor clave***
hasta que una de ellas quede vacía.

Entonces se pega la *cola* de la otra subsecuencia.

Ejemplo.

Sec:	44	55	12	42	94	18	06	67
Div:	**44**	**55**	**12**	**42**	**94**	**18**	**06**	**67**
Div:	**44**	**55**	**12**	**42**	94	18	06	67
Div:	**44**	**55**	12	42	94	18	06	67
Mez:	***44***	***55***	12	42	94	18	06	67
Div:	*44*	*55*	**12**	**42**	94	18	06	67
Mez:	*44*	*55*	***12***	***42***	94	18	06	67
Mez:	***12***	***42***	***44***	***55***	94	18	06	67
Div:	*12*	*42*	*44*	*55*	**94**	**18**	**06**	**67**
Div:	*12*	*42*	*44*	*55*	**94**	**18**	06	67
Mez:	*12*	*42*	*44*	*55*	***18***	***94***	06	67
Div:	*12*	*42*	*44*	*55*	*18*	*94*	**06**	**67**
Mez:	*12*	*42*	*44*	*55*	*18*	*94*	***06***	***67***
Mez:	*12*	*42*	*44*	*55*	***06***	***18***	***67***	***94***
Mez:	***06***	***12***	***18***	***42***	***44***	***55***	***67***	***94***

Detalle de la mezcla:

```
1)                                  |--|-12---42---44---55--
                                    |-06---18---67---94--

2)                            |-06-|-12---42---44---55
                                    |-18---67---94

3)                      |-06-12-|-42---44---55--
                                    |-18---67---94--

4)                |-06-12-18-|-42---44---55
                                    |-67---94

5)           |-06-12-18-42-|-44---55--
                                    |-67---94--

6)      |-06-12-18-42-44-|-55
                                    |-67---94

7)  |-06-12-18-42-44-55-|--
                                    |-67---94--
                                    |--
8)|-06-12-18-42-44-55-67-94-|--_____
```

Implementación de MergeSort

Para la operación de mezcla se necesita un array auxiliar.

El procedimiento es recursivo y el

algoritmo **MergeSort** resultante es O(n log n).

```
void Msort (sec, ini, fin){
   if (ini < fin){
      cen = (ini + fin) / 2 ;
      Msort(sec, ini, cen) ;
      Msort(sec, cen+1, fin) ;
      Mezcla(sec, ini, cen, fin) ;
   } ;
} ;
```

Código de la Mezcla (I)

```
void Mezcla (sec, ini, cen, fin){
    i = ini ; j = cen + 1 ; k = ini ;
    while ((i <= cen) && (j <= fin)){
        if (sec[i] < sec[j]){
            aux[k] = sec[i] ;
            i++ ;
        }
        else{
            aux[k] = sec[j] ;
            j++ ;
        }
    k++ ;
    }
    . . . .
} ;
```

Código de la Mezcla (II)

```
void Mezcla (sec, ini, cen, fin)
{...
   if (i > cen)
      while (j <= fin){
         aux[k] = sec[j] ;
         j++ ; k++ ;
      }
   else
      while (i <= cen){
         aux[k] = sec[i] ;
         i++ ; k++ ;
      } ;
   for (int k = ini; k <= fin; k++)
      sec[k] = aux[k] ;
} ;
```

OTROS ALGORITMOS

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio
2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN
   - √ HeapSort, QuickSort, MergeSort
3. **OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN**
   - ➢ **Ordenación por Incrementos decrecientes**
     - o *ShellSort*
   - **Ordenación por Radicales**
     - o *RadixSort*
   - **Ordenación de Java y Python**
     - o *TimSort*

Ordenación por Incrementos Decrecientes

Inserción con intercambios más alejados

- Shell Sort: dividir por 2.

  $O(n^2)$

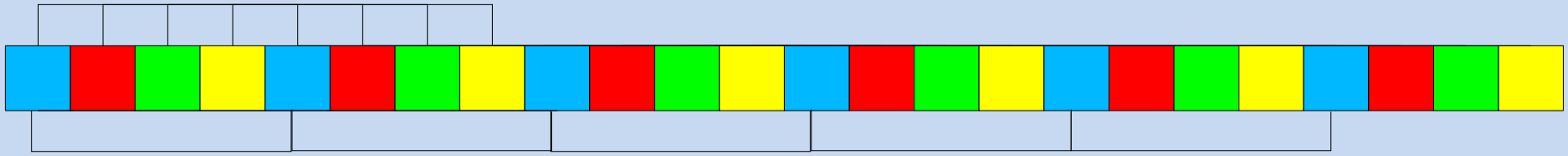
- Mejoras:

  $O(n^{1.5})$, $O(n^{1.3})$ $O(n^{1.15})$

  Hibbard, *Sedgewick*

Ordenación por Incrementos Decrecientes

- En el método de **incrementos decrecientes:**
  se ordenan por inserción los elementos de la secuencia que están entre sí a una **distancia** o ***incremento*** δ, **rebajando** sucesivamente el incremento δ hasta llegar a 1
- Se puede considerar que la secuencia está descompuesta en δ ***subsecuencias***:
- La subsecuencia *k*-ésima ($k = 0,\ldots, \delta-1$) está formada por los elementos en las posiciones k, $k+\delta$, $k+2\delta$, $k+3\delta$, ...
- Se denomina δ-**ordenación** al proceso de ordenación de todas la subsecuencias para cada valor de δ.



Ejemplo (primera pasada).

Tomamos las distancias o incrementos decrecientes $\delta = 4,2,1$:

44 55 12 42 94 18 06 67

Primera pasada $\delta = 4$.

Descomposición	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Subsecuencia 1:	44	----------	----------	----------	94	----------	----------	----------
Subsecuencia 2:	----	55	----------	----------	----------	18	----------	----------
Subsecuencia 3:	----------	----------	12	----------	----------	----------	06	----
Subsecuencia 4:	----------	----------	----------	42	----------	----------	----------	67

4-ordenaciones	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Subsecuencia 1:	44	----------	----------	----------	94	----------	----------	----------
Subsecuencia 2:	----	**18**	----------	----------	----------	**55**	----------	----------
Subsecuencia 3:	----------	----------	**06**	----------	----------	----------	**12**	----
Subsecuencia 4:	----------	----------	----------	42	----------	----------	----------	67

Sec. 4-ordenada 44 18 06 42 94 55 12 67

Ejemplo (otras pasadas)

Segunda pasada $\delta = 2$:

Descomposición

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
44	------	06	------	94	------	12	----
----	18	------	42	------	55	------	67

2-ordenaciones

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
06	------	**12**	------	**44**	------	**94**	----
----	18	------	42	------	55	------	67

2-ordenada

06	18	12	42	44	55	94	67

Tercera pasada $\delta = 1$:

Descomposición

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
06	18	12	42	44	55	94	67

1-ordenaciones

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
06	**12**	**18**	**42**	**44**	**55**	**67**	**94**

Condiciones de los incrementos

- La efectividad del método queda garantizada porque ***termina*** en una 1-ordenación que equivale a la aplicación del método de ordenación por inserción aplicado a toda la secuencia.
- La ventaja consiste en que con incrementos *grandes* se van realizando *grandes* desplazamientos de los elementos muy mal colocados y posteriormente se *refinan* las colocaciones a menor distancia.
- Cualquier sucesión de valores **decrecientes** para los incrementos δ que acabe con $\delta = 1$ puede ser aplicada.
- Conviene no usar sucesiones de incrementos que sean *múltiplos* o que tengan *divisores* comunes porque se repiten comparaciones.

Ejemplo.

Sucesión de incrementos 5,3,1:

	13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6
δ = 5	13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6
	7	3	4	12	14	**10**	5	1	8	2	**13**	9	11	6
	7	**3**	4	12	14	10	**5**	1	8	2	13	**9**	11	6
	7	3	**1**	12	14	10	5	**4**	8	2	13	9	**11**	6
	7	3	1	**6**	14	10	5	4	**8**	2	13	9	11	**12**
	7	3	1	6	**2**	10	5	4	8	**14**	13	9	11	12
δ = 3	7	3	1	6	2	10	5	4	8	14	13	9	11	12
	5	3	1	**6**	2	10	**7**	4	8	**11**	13	9	**14**	12
	5	**2**	1	6	**3**	10	7	**4**	8	11	**12**	9	14	**13**
	5	2	**1**	6	3	**8**	7	4	**9**	11	12	**10**	14	13
δ = 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Notas:
- Se subrayan los elementos de cada una de las subsecuencias
- Se ponen en negrita los elementos una vez ordenados entre si

Implementación basada en la Ordenación por Inserción

En la implementación basada en:

la **ordenación por inserción** de cada subsecuencia,
se realiza un recorrido ***simultáneo*** de todas ellas
y no de forma sucesiva, de forma que
se compara cada objeto de la secuencia
con el que ocupa δ lugares más adelante.

Se compara, de *izquierda a derecha*,

cada elemento con el que está δ posiciones más adelante

intercambiándolos *si es necesario*,

hasta que *no debe adelantarse más*.

Detalles: δ = 5

Sucesión de incrementos 5,3,1:

Secuencia	13	3	4	12	14	10	5	1	8	2	7	9	11	6
δ = 5	**13**	3	4	12	14	**10**	5	1	8	2	7	9	11	6
	10	**3**	4	12	14	13	**5**	1	8	2	7	9	11	6
	10	3	**4**	12	14	13	5	**1**	8	2	7	9	11	6
	10	3	1	**12**	14	13	5	4	**8**	2	7	9	11	6
	10	3	1	8	**14**	13	5	4	12	**2**	7	9	11	6
	10	3	1	8	2	**13**	5	4	12	14	**7**	9	11	6
	7	**3**	1	8	2	10	**5**	4	12	14	13	**9**	11	6
	7	3	**1**	8	2	10	5	**4**	12	14	13	9	**11**	6
	7	3	1	**8**	2	10	5	4	**12**	14	13	9	11	**6**
5 orden:	7	3	1	6	2	10	5	4	8	14	13	9	11	12

Notas:
- Se subrayan los elementos que ya están δ (= 5) ordenados
- En negrita están los elementos afectados por cada δ inserción

Detalles: δ = 3

Sucesión de incrementos 5,3,1:

5 orden: 7 3 1 6 2 10 5 4 8 14 13 9 11 12

δ = 3

7	3	1	**6**	2	10	5	4	8	14	13	9	11	12
6	**3**	1	7	**2**	10	5	4	8	14	13	9	11	12
6	2	**1**	7	3	**10**	5	4	8	14	13	9	11	12
6	2	1	**7**	3	10	**5**	4	8	14	13	9	11	12
5	**2**	1	6	**3**	10	7	**4**	8	14	13	9	11	12
5	2	**1**	6	3	**10**	7	4	**8**	14	13	9	11	12
5	2	1	**6**	3	8	**7**	4	10	**14**	13	9	11	12
5	**2**	1	6	**3**	8	7	**4**	10	14	**13**	9	11	12
5	2	**1**	6	3	**8**	7	4	**10**	14	13	**9**	11	12
5	2	1	**6**	3	8	**7**	4	9	**14**	13	10	**11**	12
5	**2**	1	6	**3**	8	7	**4**	9	11	**13**	10	14	**12**
5	2	1	6	3	8	7	4	9	11	12	10	14	13

3 orden: 5 2 1 6 3 8 7 4 9 11 12 10 14 13

Detalles: δ = 1

Sucesión de incrementos 5,3,1:

3 orden:	5	2	1	6	3	8	7	4	9	11	12	10	14	13
δ = 1	5	**2**	1	6	3	8	7	4	9	11	12	10	14	13
	2	5	**1**	6	3	8	7	4	9	11	12	10	14	13
	1	2	5	**6**	3	8	7	4	9	11	12	10	14	13
	1	2	5	6	**3**	8	7	4	9	11	12	10	14	13
	1	2	3	5	6	**8**	7	4	9	11	12	10	14	13
	1	2	3	5	6	8	**7**	4	9	11	12	10	14	13
	1	2	3	5	6	7	8	**4**	9	11	12	10	14	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	11	12	10	14	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**11**	12	10	14	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	**12**	10	14	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	**10**	14	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**14**	13
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	**13**
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1 orden:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Reducción de los incrementos

La *propuesta de Shell* para una secuencia de tamaño n consiste en:

- iniciar las δ-ordenaciones con $\delta = \lfloor n/2 \rfloor$, y
- continuar con $\delta \leftarrow \lfloor \delta\, n/2 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x)
- hasta que $\delta = 1$,

Se han realizado **propuestas** similares para:

- iniciar los incrementos con $\delta = \lfloor n \cdot a \rfloor$, y
- seguir con $\delta \leftarrow \lfloor \delta \cdot a \rfloor$ ($0 < a < 1$)
- hasta $\delta = 1$.

Una de las sucesiones que *mejores* resultados proporciona es la consistente en usar los valores $a = 1/3$ ó $a = 0.45454$.

Esta última posibilidad es equivalente a aplicar:

la ***fórmula*** $\delta \leftarrow \lfloor (5\delta - 1)/11 \rfloor$.

El código ShellSort:

```
del = n ;
while (del > 1){
   del = del / 2 ;
   deltasort(del,sec, n) ;
} ;
void deltasort( int d ; TVector Sec ; int n ) {
   for (int i = d; i < n; i++){
      x = sec[i] ;
      j = i ;
      while ((j >= d) && (x < sec[j-d])){
         sec[j] = sec[j-d] ;
         j = j - d ;
      } ;
   sec[j] = x ;
   } ;
} ;
```

Sucesiones de Incrementos

Varios **autores** proponen: *sucesiones de incrementos δ_k que se construyen en orden creciente, con $\delta_0 = 1$*, aunque se utilizan en orden decreciente desde el mayor incremento que es menor que el tamaño *n* de la secuencia.

- La fórmula propuesta por ***Hibbard*** $\delta_k = \mathbf{2^k - 1}$ da lugar a la sucesión:
  { 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ... }
- Entre los **mejores** resultados empíricos con estas sucesiones están los de la sucesión {1, 4, 13, 40, 121, 364, 1093, ... }
  obtenida con la fórmula $\delta_k = \mathbf{(3^k - 1)/2}$ ó con $\delta \leftarrow \mathbf{3}\delta + \mathbf{1}$.
- La propuesta de ***Sedgewick*** es usar la fórmula $\delta_k = \mathbf{(4^{k+1} + 3 \cdot 2^k + 1)}$ para obtener la sucesión {1, 8, 23, 77, 281, 1073, ... }
- Entre diversas propuestas similares de ***Sedgewick***, la que da mejores resultados es la de usar *conjuntamente* los incrementos de
  $\delta_k = \mathbf{(4^k - 3 \cdot 2^k + 1)}$ y $\delta_k = \mathbf{(9 \cdot 4^k - 9 \cdot 2^k + 1)}$;
  que da lugar a la sucesión: {1, 5, 19, 41, 209, 233, 505, 921... }.

Aplicación de una sucesión de Incrementos

Para iniciar las δ-ordenaciones,
se busca el **mayor valor** de la sucesión de incrementos
que es **menor** que el tamaño de la secuencia.

En las implementaciones se *recomienda* utilizar los valores de la sucesión de incrementos dados **explícitamente** como datos, sin necesidad de aplicar ninguna *fórmula* para calcularlos.

Análisis del Algoritmo

El tiempo de ejecución del método **depende** de la elección de la ***sucesión de incrementos***.

Se han probado multitud de *sucesiones explícitas* u obtenidas mediante diferentes **fórmulas**.

- Con la sucesión **propuesta *por*** *Shell* es un algoritmo $\underline{\Theta(n^2)}$.
- Con la fórmula $\delta_k = \mathbf{2^k - 1}$ propuesta por *Hibbard* es un algoritmo: $\underline{\Theta(n^{3/2})}$ en el *peor* caso y se cree que es $\underline{O(n^{5/4})}$ en el caso *medio*.
- Con la sucesión $\delta_k = \mathbf{(4^{k+1} + 3 \cdot 2^k + 1)}$, propuesta por *Sedgewick*, resulta un algoritmo: $\underline{O(n^{4/3})}$ en el *peor* caso y parece que es $\underline{O(n^{7/6})}$ en el caso *medio*.

OTROS ALGORITMOS

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio
2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN
   - √ HeapSort, QuickSort, MergeSort

3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

- √ Ordenación por Incrementos decrecientes o *ShellSort*
- ➢ **Ordenación por Radicales** o *RadixSort*
- • Ordenación de Java y Python o *TimSort*

La ordenación por radicales

- La ordenación por radicales de la que se deriva el método RadixSort parte de la idea de que para los números de una secuencia se pueden ordenar ***sucesivamente*** por cada uno de sus ***dígitos*** desde el último al primero manteniendo la ordenación previa en caso de empate.

  En este ejemplo se ordenan 9 números de 3 cifras:

  Secuencia original

  516 223 323 413 416 723 813 626 616

  Ordenada por el último dígito

  223 323 413 723 813 516 416 626 616

  Ordenada por el segundo dígito

  413 813 516 416 616 223 323 723 626

  Ordenada por el primer dígito

  223 323 413 416 516 616 626 723 813

Ordenación por apilamiento

- El método básico **(RadixSort)** utiliza la **expresión decimal** de una clave entera.
- La ordenación por **apilamiento** o por **cubetas** consiste en **repartir** en sucesivas pasadas los elementos en pilas o cubetas según cada dígito desde el último al primero.
- Se tienen **10 cubetas** con los números del 0 al 9.
- Se **apilan** desde la secuencia dada cada elemento según el **dígito** *i*-esimo y luego se **recogen** ordenadamente, variando *i* desde el **último** al **primero**.
- Si el número de dígitos se considera ***constante***, entonces **el algoritmo es $O(n)$** ya que se realiza una pasada por cada dígito en la que son necesarias $O(n)$ operaciones.

Ejemplo. (Fase I)

```
345  721  425  572  836  467  672  194  365
236  891  746  431  834  247  529  216  389   ==>

                                  216
     431                     365  746
     891  672           834  425  236  247        389
____ 721  572 ____      194  345  836  467  ____  529
  0   1    2    3       4    5    6    7    8     9
```

```
==>  721  891  431  572  672  194  834  345  425
     365  836  236  746  216  467  247  529  389
```

Ejemplo (Fase II):

```
721 891 431 572 672 194 834 345 425

365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>

                    236
              529   836   247
              425   834   746         467   672         194
      216     721   431   345   ___   365   572   389   891
 ___   1       2     3     4     5     6     7     8     9
  0
```

```
==>  216 721 425 529 431 834 836 236 345

     746 247 365 467 572 672 389 891 194
```

Ejemplo (Fase III):

```
216 721 425 529 431 834 836 236 245

746 247 365 467 572 672 389 891 194  ==>


          247  389  467                 891
          236  365  431  572       746  836
 ___  194  216  345  425  529  672  721  834  ___
  0    1    2    3    4    5    6    7    8    9

=>   194 216 236 247 345 365 389 425 431

     467 529 572 672 721 746 834 836 891
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
721 891 431 572 672 194 834 345 425

365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
     891 431 572 672 194 834 345 425
365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>
```

```
          721
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
 0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

431 572 672 194 834 345 425

365 836 236 746 216 467 247 529 389 ==>

		721							891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

572 672 194 834 345 425

365 836 236 746 216 467 247 529 389 ==>

		721	431						891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

672 194 834 345 425

365 836 236 746 216 467 247 529 389 ==>

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		721	431				572		891

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                        194 834 345 425
365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>

                                          672
          721  431                        572       891
____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
 0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                                  834 345 425
365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		721	431				672 572		194 891

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                                    345 425
365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>

                  834                   672       194
          721     431                   572       891
 ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
   0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                                                        425
365  836  236  746  216  467  247  529  389    ==>



            834                            672         194
      721   431   345                      572         891
____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
 0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
365 836 236 746 216 467 247 529 389  ==>

                425  834                 672        194
                721  431  345            572        891
____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
  0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
836 236 746 216 467 247 529 389  ==>

          425  834                672        194
          721  431  345      365  572        891
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
 0    1    2    3    4    5    6    7    8    9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
236 746 216 467 247 529 389  ==>

                836
          425   834                 672         194
          721   431   345     365   572         891
 ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
   0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                746 216 467 247 529 389  ==>

                    236
                    836
              425   834                    672         194
              721   431   345        365   572         891
 ____   ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
   0      1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                    216 467 247 529 389  ==>

                236
                836
          425   834   746           672         194
          721   431   345     365   572         891
 ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
   0     1     2     3     4     5     6     7     8     9
```

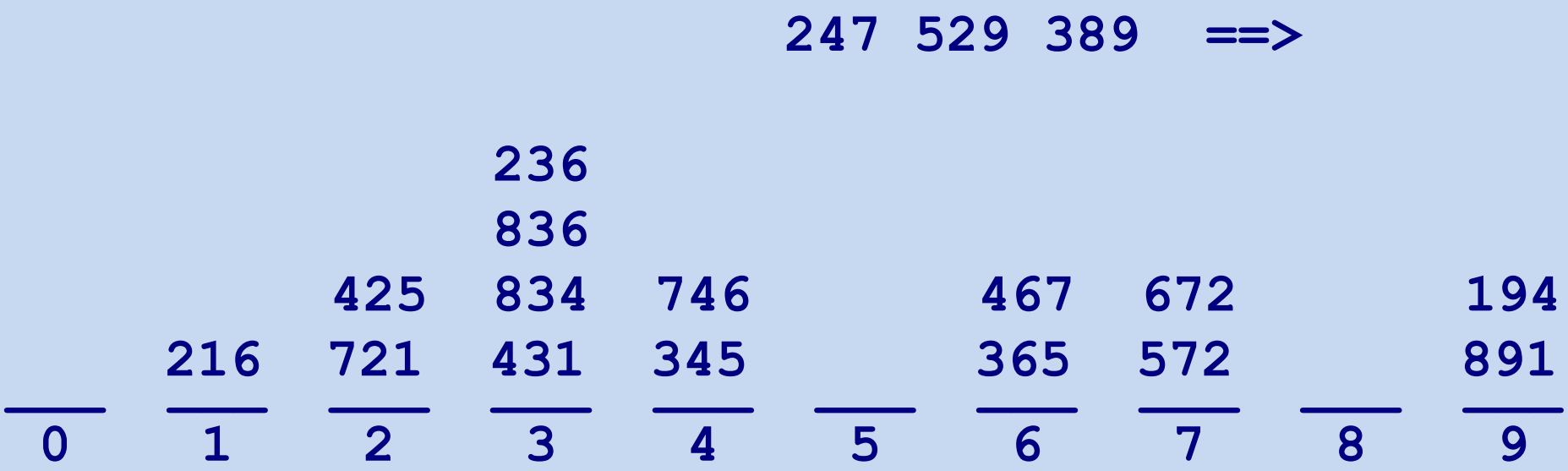
Departamento de Ingeniería
Informática y de Sistemas
Universidad de La Laguna

Ejemplo (Fase II): Detalles

467 247 529 389 ==>

			236						
			836						
		425	834	746			672		194
	216	721	431	345		365	572		891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles



Ejemplo (Fase II): Detalles

529 389 ==>

			236						
			836	247					
		425	834	746		467	672		194
	216	721	431	345		365	572		891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

389 ==>

			236						
		529	836	247					
		425	834	746		467	672		194
	216	721	431	345		365	572		891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

==>

			236						
		529	836	247					
		425	834	746		467	672		194
	216	721	431	345		365	572	389	891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

==>

			236						
		529	836	247					
		425	834	746		467	672		194
	216	721	431	345		365	572	389	891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                236
        529     836     247
        425     834     746             467     672             194
        721     431     345             365     572     389     891
 ____    ____    ____    ____    ____    ____    ____    ____    ____
  0       1       2       3       4       5       6       7       8       9

==>  216
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                  236
                  836   247
                  834   746         467   672         194
                  431   345         365   572   389   891
____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
 0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

==>  216 721 425 529
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

				247					
				746		467	672		194
				345		365	572	389	891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

==> 216 721 425 529 431 834 836 236

Ejemplo (Fase II): Detalles

						467	672		194
						365	572	389	891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

==> 216 721 425 529 431 834 836 236 345

746 247

Ejemplo (Fase II): Detalles

```
                                        672         194
                                        572   389   891
 ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____  ____
  0     1     2     3     4     5     6     7     8     9

==>  216 721 425 529 431 834 836 236 345
     746 247 365 467
```

Ejemplo (Fase II): Detalles

								389	194 891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

==> 216 721 425 529 431 834 836 236 345

746 247 365 467 572 672

Ejemplo (Fase II): Detalles

									194
									891
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

==> 216 721 425 529 431 834 836 236 345

746 247 365 467 572 672 389

Ejemplo (Fase II): Detalles

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
==>	216	721	425	529	431	834	836	236	345
	746	247	365	467	572	672	389	891	194

ALGORITMOS DE ORDENACIÓN

1. ALGORITMOS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio
2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN
   - √ HeapSort, QuickSort, MergeSort
3. OTROS ALGORITMOS DE ORDENACIÓN
   - √ Ordenación por Incrementos decrecientes; *ShellSort*
   - √ Ordenación por Radicales; *RadixSort*
   - ➢ Ordenación de Python y Java; *TimSort*

El método TimSort

- El **TimSort** es el método de ordenación propuesto por Tim Peters en 2002 que se usa en **Python** y **Java** para ordenar con la función ***sort***; así como en la plataforma ***Android*** y en el GNU ***Octave***
- Es un método pensado para funcionar bien en **datos reales** que frecuentemente tienen algunas partes ***ya ordenadas***
- El método TimSort combina los métodos de ordenación por **mezcla** y por **inserción** pero significativamente mejorados
- El algoritmo primero busca **rachas** (trozos) de la secuencia que ya estén ordenados para ser **mezcladas** eficientemente.
- Las rachas **crecientes** o **decrecientes** de elementos se identifican con una pasada sobre la secuencia a ordenar; las decrecientes se **invierten**
- Si las rachas son demasiado pequeñas, se le van añadiendo elementos por el método de **inserción** hasta que lleguen a un ***tamaño mínimo***, que depende del tamaño inicial y está entre $32 = 2^5$ y $65 = 2^6+1$

La pila de rachas

- Las rachas que alcancen el **tamaño mínimo** se van almacenando una pila hasta que se haya recorrido todo el vector a ordenar
- Una vez que se tiene la **pila de rachas**, se van mezclando las que están en la cabecera de la pila que serán rachas consecutivas
- La mezcla de rachas **consecutivas** ya ordenadas es más ***eficiente*** si las rachas están aproximadamente equilibradas en tamaño
- Para conseguir que las rachas a mezclar tengan **tamaños similares** se monitoriza el tamaño de las rachas del tope de la pila.
- Se controla el tamaño de las **tres primeras rachas** de la pila, denominadas R_1, R_2 y R_3, de forma que el tamaño de la segunda sea mayor que el de la primera ($|R_2| > |R_1|$) y el de la tercera sea mayor que la suma de los tamaños de las dos primeras ($|R_3| > |R_1| + |R_2|$)
- Si esto ***no se cumple***, la segunda racha R_2 se mezcla con la más pequeña de las otras dos R_1 o R_3
- Si esto ***se cumple*** se mezclan las dos primeras rachas R_1 y R_2.

Mezcla de TimSort

- Al mezclar dos rachas consecutivas se copia en el vector **auxiliar** la más **pequeña** de ellas y la mezcla se va colocando en la secuencia original; por la derecha o por la izquierda, según corresponda
- La mezcla de las dos **rachas consecutivas** R_1 y R_2 de TimSort se realiza de la siguiente forma:
- Primero se aplica dos **búsquedas binarias** para encontrar:
  - La posición i_1 de inserción del **primer** elemento de la **segunda** racha R_2 en la **primera** racha R_1, y
  - La posición i_2 de inserción del **último** elemento de la **primera** R_1 racha en la **segunda** racha R_2
- El trozo de R_1 delante de i_1 y el trozo de R_2 detrás de i_2 no necesitan ser comparados porque están ya bien **colocados**
- La búsqueda binaria se sustituye por una **búsqueda exponencial** que busca primero entre que dos potencias de 2 se encuentra el valor a insertar y en ellos se realiza la búsqueda binaria

ORDENACIÓN

1. MÉTODOSS CUADRÁTICOS DE ORDENACIÓN
   - √ Inserción, Selección, por Intercambio
2. ALGORITMOS LOGARÍTMICOS DE ORDENACIÓN
   - √ HeapSort, QuickSort, MergeSort
3. OTROS PROCEDIMIENTOS DE ORDENACIÓN
   - √ Ordenación por Incrementos decrecientes; *ShellSort*
   - √ Ordenación por Radicales; *RadixSort*
   - √ Ordenación de Python y Java; *TimSort*