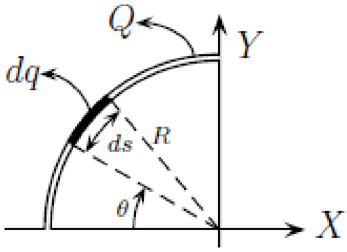
Planteamiento A:

En la figura adjunta se muestra un alambre en forma de un arco de circunferencia, cuyo radio es R. El alambre tiene una carga Q distribuida en todo el alambre, pero no necesariamente uniforme. Considere que la posición angular θ, definida como positiva, es medida respecto al semieje horizontal negativo según lo indicado en la figura. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:



(1a) La densidad lineal media del alambre viene dada por:

La densidad lineal media es $\langle\lambda\rangle = \frac{Q}{s}$. Para calcular la longitud del arco de circunferencia L_s, nos fijamos en el hecho que dicho arco corresponde a un cuarto de la longitud de la circunferencia completa. De esta forma:

$$L_s = \frac{L_c}{4} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$$

Luego,

$$\langle\lambda\rangle = \frac{Q}{L_s} = \frac{Q}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2Q}{\pi R} \quad \therefore \quad \boxed{\langle\lambda\rangle = \frac{2Q}{\pi R}}$$

(1b) Si la carga se distribuye de manera uniforme sobre el alambre, la carga contenida en el alambre hasta un ángulo θ viene dada por:

Basta recordar que un segmento s de arco puede escribirse en términos del radio R y del ángulo θ necesario para construirlo, esto es $s = R\theta$. Además, cuando se trata de un elemento infinitesimal $\mathrm{d}s$, entonces su valor corresponde a $ds = R\mathrm{d}\theta$. Ahora, calculamos la densidad de carga lineal local:

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}q}{R\mathrm{d}\theta}$$

También hay que recordar que, cuando la carga se distribuye uniformemente sobre el espacio que la contiene, el valor de la distribución de carga local coincide con el de la carga media. Así, pues:

$$\lambda = \langle\lambda\rangle \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}q}{\cancel{R}\mathrm{d}\theta} = \frac{2Q}{\pi\cancel{R}} \quad \therefore \quad \mathrm{d}q = \frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

Finalmente, integramos ambos miembros de la ecuación definiendo adecuadamente los límites de integración:

$$\int_0^{Q_\theta} \mathrm{d}q = \int_0^{\theta} \frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \boxed{Q_\theta = \frac{2Q}{\pi}\theta}$$

Observación: Los valores de carga Q y Q_θ son los mismos, pero para efectos de la solución del ejercicio se denotan diferente.

(1c) Si la carga se distribuye de forma tal que la densidad lineal local varía proporcionalmente según el $\sin\theta$, entonces, dicha densidad como función del ángulo θ viene por:

Tenemos que $\lambda(s) \propto \sin\theta \therefore \lambda(s) = \lambda_0 \sin\theta$. Por regla de la cadena, podemos poner a la cantidad $\lambda(s)$ en función de θ, de esta forma:

$$\lambda(s) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{R} \Longrightarrow \mathrm{d}Q = R\lambda(s)\mathrm{d}\theta$$

En donde usamos el hecho que $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta \implies \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}$. Ahora, imponemos que la carga se distribuye por todo el ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e integramos definiendo adecuadamente los límites de integración:

$$\int_0^Q \mathrm{d}Q = \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} R\lambda(s)\mathrm{d}\theta \implies Q = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda_0 \sin\theta \mathrm{d}\theta = R\lambda_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta = -R\lambda_0 \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$$

$$= -R\lambda_0[-1] = R\lambda_0 \implies Q = R\lambda_0 \quad \therefore \quad \lambda_0 = \frac{Q}{R}$$

Por último,

$$\boxed{\lambda(s(\theta)) = \frac{Q}{R}\sin\theta}$$

(1d) Si la carga se distribuye de forma tal que ésta varia proporcionalmente según el $\sin\theta$, la densidad local de carga como función del ángulo θ viene por:

Como ahora es la carga la que es proporcional al $\sin\theta$, entonces se cumple que $Q(\theta) \propto \sin\theta \therefore Q(\theta) = Q_0 \sin\theta$, donde Q_0 es otra constante a determinar y lo podemos hacer nuevamente imponiendo la misma condición $\theta = \frac{\pi}{2}$ para el valor de Q:

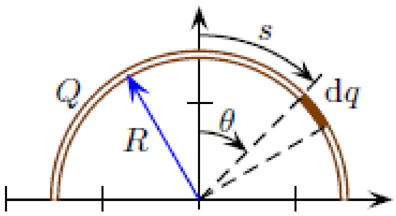
$$Q(\theta = \frac{\pi}{2}) = Q \implies Q_0 \sin\frac{\pi}{2} = Q \implies Q_0 = Q \implies Q(\theta) = Q\sin\theta$$

También cabe recordar que $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta \implies \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}$. Finalmente, por regla de la cadena, la densidad de carga lineal local, escrita en función del segmento de arco s, podemos escribirla a su vez en función de θ:

$$\lambda(s) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \implies \lambda(s(\theta)) = \frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = Q\cos\theta\frac{1}{R} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(s(\theta)) = \frac{Q}{R}\cos\theta}$$

Planteamiento B:

En la figura adjunta se muestra un semi-aro de radio R y con una carga positiva Q distribuida en toda su longitud. Considere que un elemento infinitesimal de carga $\mathrm{d}q$ se encuentra localizado en una ángulo θ, dicho ángulo es medido respecto a la vertical tal como se indica en la figura adjunta. También considere que la longitud de arco s sobre el alambre es medido respecto al eje vertical, tal como se indica. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:



(2a) Si la carga Q se distribuye uniformemente sobre el semi-aro, el valor para la carga contenida hasta la abertura θ viene dada por:

Como la carga se distribuye uniformemente, se cumple que $\lambda = \langle\lambda\rangle$. Esto es:

$$\begin{cases} \langle\lambda\rangle = \dfrac{Q}{L_{arc}} = \dfrac{Q}{\frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}}} = \dfrac{Q}{\pi R} \\ \lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}q}{R\mathrm{d}\theta} \end{cases} \implies \lambda = \langle\lambda\rangle \implies \frac{Q}{\pi \cancel{R}} = \frac{\mathrm{d}q}{\cancel{R}\mathrm{d}\theta} \implies \mathrm{d}q = \frac{Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

Luego, integramos definiendo los límites adecuadamente:

$$\int_0^{Q_\theta} \mathrm{d}q = \int_0^\theta \frac{Q}{\pi}\mathrm{d}\theta \implies \boxed{Q_\theta = \frac{Q}{\pi}\theta}$$

(2b) Si la carga Q se distribuye a lo largo de alambre con una densidad lineal de carga local dada por $\lambda(s) = \lambda_0 \cos\left(\frac{s}{R}\right)$, donde s es la longitud de arco sobre el alambre indicado en la figura. El valor de la constante λ viene dada por:

Dado que la longitud de arco s parte desde el semieje y hasta el semieje x y que la carga Q se distribuye a lo largo de toda la longitud del semiaro, tenemos que la carga se distribuye desde $s_{min} = R\theta_{min} = -\frac{\pi}{2}R$ hasta $s_{max} = R\theta_{max} = \frac{\pi}{2}R$. Esto es porque el ángulo θ, medido desde el semieje y tal y como se indica en la figura adjunta del problema, adquiere esto valores cuando s se encuentra en los extremos del semiaro. Ahora:

$$Q = \int_{s_{min}}^{s_{max}} \lambda(s)\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}R}^{\frac{\pi}{2}R} \lambda_0 \cos\left(\frac{s}{R}\right)\mathrm{d}s = \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}R}^{\frac{\pi}{2}R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)\mathrm{d}s = \lambda_0 R\left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}\cancel{R}}{\cancel{R}}\right) - \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}\cancel{R}}{\cancel{R}}\right)\right]$$

$$= \lambda_0 R\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \Longrightarrow Q = 2\lambda_0 R \quad \therefore \quad \boxed{\lambda_0 = \frac{Q}{2R}}$$

(2c) Si la carga Q se distribuye a lo largo de la mitad del alambre (ubicado en el II cuadrante), con una densidad lineal de carga local dada por $\lambda(s) = \lambda_0 \sin(\theta)$, donde θ es la coordenada angular indicada en la figura. El valor de la constante λ_0 viene dada por:

Por regla de la cadena, nos queda que:

$$\lambda(s) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{R} \Longrightarrow \mathrm{d}Q = R\lambda(s)\mathrm{d}\theta$$

Imponemos la condición de que la carga se distribuye a lo largo de la mitad del alambre, integramos ambos miembros y despejamos λ_0:

$$\int_0^Q \mathrm{d}Q = \int_0^{\theta=\frac{\pi}{2}} R\lambda(s)\mathrm{d}\theta \Longrightarrow Q = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda_0 \sin\theta\mathrm{d}\theta = R\lambda_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\mathrm{d}\theta = -R\lambda_0\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$$

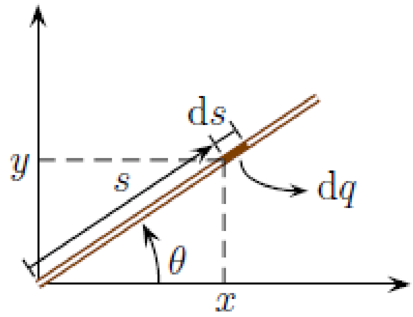
$$= -R\lambda_0[-1] = R\lambda_0 \Longrightarrow Q = R\lambda_0 \quad \therefore \quad \boxed{\lambda_0 = \frac{Q}{R}}$$

(2d) Determine la densidad de carga local $\lambda^*(\theta) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\theta}$, suponiendo que la carga Q se distribuye de acuerdo a la densidad local de carga lineal $\lambda(s) = \lambda_0 \cos\left(\frac{s}{R}\right)$, siendo s y θ la longitud de arco y la abertura que se indican en la figura.

Por regla de la cadena, podemos calcular el valor de la densidad local solicitada:

$$\lambda^*(\theta) = \lambda(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \lambda_0 \cos\left(\frac{s}{R}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \lambda_0 \cos(\theta)\, R = R\lambda_0 \cos(\theta) \quad \therefore \quad \boxed{\lambda^*(\theta) R\lambda_0 \cos(\theta)}$$

Planteamiento C:



En la figura adjunta se muestra una barra de longitud L, cuya carga se distribuye a lo largo de su longitud con una densidad lineal de carga dada por $\lambda(s) = \frac{Q_0}{L^2}y$ y, donde Q_0 es una constante positiva con dimensiones de carga y $s = s(y)$ es la longitud de arco sobre la barra expresado en términos de la coordenada vertical y. Mientras que las coordenadas coordenadas cartesianas son denotadas como (x, y). Suponga que un extremo de la barra se encuentra en el origen, además la barra está inclinada formando un ángulo θ respecto a la horizontal; tal como se indica en la figura adjunta. También considere que la proporción p de carga distribuida en la longitud s viene dada por la razón de la longitud de arco con la longitud de la barra, es decir, $p = \frac{s}{L}$. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:

(3a) Seleccione todos los elementos infinitesimales de longitud de arco asociados a la longitud de la barra.

En base a la imagen adjunta, es posible, mediante consideraciones geométricas hallar las relaciones entre los elementos de longitud de la barra y s. Estos serían: la proyección de s en el eje x, la proyección de s en el eje y y la relación $p = \frac{s}{L}$. De este modo:

$$x = s\cos\theta \Longrightarrow s = \frac{x}{\cos\theta}, \qquad y = s\sin\theta \Longrightarrow s = \frac{y}{\sin\theta}, \qquad p = \frac{s}{L} \Longrightarrow s = pL$$

Considerando que cuando varía el segmento s, cambian consigo los valores de x, y y p, las cantidades infinitesimales de cada relación corresponden a:

$$\boxed{\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta}}, \qquad \boxed{\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}y}{\sin\theta}}, \qquad \boxed{\mathrm{d}s = L\mathrm{d}p}$$

Por regla de la cadena, y teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{cos\theta}$$

Se tiene que:

$$\lambda(x) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \lambda(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{Q_0}{L^2}y\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{Q_0}{L^2}y\frac{1}{cos\theta} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(x) = \frac{Q_0}{L^2\cos\theta}y}$$

(3c) La densidad lineal de carga que la distribuye a lo largo de la longitud vertical, esto es, $\lambda(y)$.

Por regla de la cadena, y teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}y}{\sin\theta} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{sin\theta}$$

Se tiene que:

$$\lambda(y) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \lambda(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{Q_0}{L^2}y\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{Q_0}{L^2}y\frac{1}{sin\theta} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(y) = \frac{Q_0}{L^2\sin\theta}y}$$

(3d) Seleccione la densidad lineal de carga que la distribuye a lo largo de la longitud de la barra en una proporción p, esto es, $\lambda^*(p)$.

Por regla de la cadena, y teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{d}s = L\mathrm{p} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = L, \qquad \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} \Longrightarrow y = x\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Longrightarrow y = x\tan\theta, \qquad \frac{y}{\sin\theta} = pL \Longrightarrow y = pL\sin\theta$$

Se tiene que:

$$\lambda(p) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = \lambda(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = \frac{Q_0}{L^2}y\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}p} = \frac{Q_0}{L^{\cancel{2}}}y\cancel{L} = \frac{Q_0}{L}y \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(p) = \frac{Q_0}{L}y}$$

Por otro lado:

$$\lambda(p) = \frac{Q_0}{L}y = \frac{Q_0}{L}x\tan\theta \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(p) = \frac{Q_0}{L}x\tan\theta}$$

Y, finalmente:

$$\lambda(p) = \frac{Q_0}{L}y = \frac{Q_0}{\cancel{L}}p\cancel{L}\sin\theta = Q_0 p\sin\theta \quad \therefore \quad \boxed{\lambda(p) = Q_0 p\sin\theta}$$

(3e) La carga contenida en todo la barra viene dada por:

Simplemente integramos cualquiera de las expresiones de *lambda* que conseguimos en las tres últimas partes anteriores respecto a la variable correspondiente y con los límites de integración adecuados en cada caso:

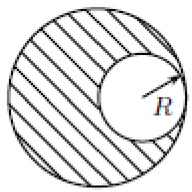
$$Q = \int_0^L \lambda(s)ds = \int_0^{L\cos\theta} \lambda(x)dx = \int_0^{L\sin\theta} \lambda(y)dy = \int_0^1 \lambda(p)dp$$

Por último:

$$Q = \int_0^L \lambda(s)\mathrm{d}s = \int_0^L \frac{Q_0}{L^2}y\mathrm{d} = \int_0^L \frac{Q_0}{L^2}s\sin\theta\mathrm{d}s = \frac{Q_0}{L^2}\sin\theta\int_0^L s\mathrm{d}s = \frac{Q_0}{\cancel{L^2}}\sin\theta\frac{\cancel{L^2}}{2} \quad \therefore \quad \boxed{Q = \frac{Q_0}{2}\sin\theta}$$

Planteamiento D:

En la figura adjunta se muestra un disco al cual se le hace una perforación circular de radio R, considere que el diámetro del hueco coincide con el radio del disco. El disco perforado presenta una carga positiva Q distribuida uniformemente. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:



(5a) La cantidad de carga necesaria para rellenar la perforación viene dada por:

Por geometría de la figura, queda claro que:

$$R = D_h = 2R_h \Longrightarrow R_h = \frac{R}{2} \quad \therefore \quad A_h = \pi R_h^2 = \pi\frac{R^2}{4}$$

Como la carga se distribuye uniformemente a lo largo de la superficie del disco, entonces la densidad de carga superficial media del disco con el hueco corresponde a la misma densidad de carga superficial media del hueco si suponemos que este es un disco imaginario de mismo radio del hueco y con la misma propiedad de carga uniformemente distribuida sobre su superficie, de esta forma:

$$\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_h\rangle \Longrightarrow \frac{Q}{A - Ah} = \frac{Q_h}{A_h} \Longrightarrow \frac{Q}{\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}} = \frac{Q_h}{\pi\frac{R^2}{4}} \Longrightarrow \frac{Q}{3\pi\frac{R^2}{4}} = \frac{Q_h}{\pi\frac{R^2}{4}} \quad \therefore \quad \boxed{Q_h = \frac{Q}{3}}$$

(5a) La cantidad de carga que tiene el disco sin perforar viene dada por:

Sumamos la carga del disco perforado con la del hueco del disco:

$$Q_T = Q + \frac{Q}{3} = \frac{4}{3}Q \quad \therefore \quad \boxed{Q_T = \frac{4}{3}Q}$$

<u>Planteamiento E:</u>

Considere un semicírculo, de radio R, cuya densidad de carga superficial viene dada por $\sigma = \sigma_0 \frac{r^2}{R^2}$ con $r \leq R$; donde σ_0 es una constante positiva con dimensiones de densidad superficial y r es la distancia radial medida desde el centro del semicírculo.

(5a) El elemento infinitesimal de área que se debe tomar para evitar una integral doble es:

Como σ no depende del desplazamiento angular θ que tenga la distancia radial r, sino solamente de este último, entonces el elemento infinitesimal de área del semicírculo podemos escribirlo como:

$$\mathrm{d}A = r\theta \mathrm{d}r = r\pi \mathrm{d}r$$

Esto, porque un semicírculo describe un ángulo de π radianes desde los extremos radiales de su superficie.

$$\therefore \quad \boxed{\mathrm{d}A = \pi r \mathrm{d}r}$$

(5b) La densidad superficial de carga media contenida en el semicírculo viene dada por:

Primero debemos hallar la cantidad de carga distribuida por la superficie del semicírculo, esto es:

$$Q = \int_0^A \sigma \mathrm{d}A = \int_0^R \sigma_0 \frac{r^2}{R^2} \pi r \mathrm{d}r = \sigma_0 \frac{\pi}{R^2} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \sigma_0 \frac{\pi}{R^2} \left[\frac{R^4}{4} \right] = \sigma_0 \frac{\pi R^2}{4}$$

Finalmente, calculamos la densidad de carga superficial media:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{\sigma_0 \frac{\pi R^2}{4}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{\sigma_0 \frac{\cancel{\pi R^2}}{4}}{\frac{\cancel{\pi R^2}}{2}} = \frac{\sigma_0}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\langle \sigma \rangle = \frac{\sigma_0}{2}}$$

(5b) La carga contenida hasta una distancia radial $r \leq R$ viene dada por la expresión

Mismo procedimiento para calcular la carga en la pregunta anterior, pero esta vez para la condición $r \leq R$:

$$Q = \int_0^A \sigma \mathrm{d}A = \int_0^r \sigma_0 \frac{r'^2}{R^2} \pi r' \mathrm{d}r' = \sigma_0 \frac{\pi}{R^2} \int_0^r r'^3 \mathrm{d}r' = \sigma_0 \frac{\pi}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right] = \sigma_0 \frac{\pi r^4}{4R^2} \quad \therefore \quad \boxed{Q = \sigma_0 \frac{\pi r^4}{4R^2}}$$