1. Introducere în problematica optimizării sistemelor

În cele mai multe ramuri ale ştiinţelor tehnice proiectarea unui anumit reper, dispozitiv sau instalaţie poate fi făcută în mai multe alternative, în funcţie de criteriile care stau la bazele proiectării. Oricare ar fi aceste criterii, rezultatul proiectării conduce la alegerea unor valori pentru variabilele de proiectare care pot fi mărimi de natură fizică diferită (lungimi, presiuni, temperaturi, curenţi etc.), valori pentru anumite proporţii între aceste mărimi sau valori pentru orice alte funcţii, dependente de mai multe variabile, particulare problematicii puse. În munca proiectantului apare aspectul proiectării optime, deoarece aceste valori pot fi alese într-o gamă largă, cu condiţia satisfacerii unor limitări şi restricţii. Vom considera soluţia optimă a problemei de proiectare, acea soluţie care conduce la cea mai bună alegere a valorilor variabilelor în condiţiile îndeplinirii tuturor limitărilor şi restricţiilor puse. Metodele care vor fi examinate fac apel la calcule numerice, în consecinţă aplicarea lor practică este legată direct de utilizarea calculatoarelor. Aceste metode nu permit în general obţinerea unei soluţii calitativ diferite pentru problema în studiu, ci conduc la alegerea celor mai bune valori, adică optimizează soluţia în concepţia de proiectare a utilizatorului.

Metodele şi tehnicile aplicate pentru determinarea soluţiei optime sunt cele dezvoltate în programarea matematică. Programarea matematică este o ramură a cercetării operaţionale care se ocupă cu problemele generale ale optimizării. În formularea problemelor de programare matematică obiectivul asupra căruia este concentrată atenţia apare sub forma unei funcţii ale cărei valori maxime sau minime le căutăm şi care este denumită *funcţie obiectiv*. În acest capitol vor fi descrise cele trei aspecte de bază ale problemelor de optimizare şi anume variabilele de proiectare, funcţia obiectiv şi restricţiile, care împreună conduc la formularea modelului matematic pentru orice problemă de programare matematică.

1.1. Formularea unor probleme de optimizare în tehnică

În cele ce urmează se vor prezenta câteva exemple practice care conduc la formularea unor probleme de optimizare; acestea conduc la găsirea extremului unei funcţii de mai multe variabile în condiţiile existenţei unor restricţii de tip egalitate şi/sau inegalitate asupra domeniilor de variaţie ale variabilelor respective.

1.1.1. Proiectarea optimă a unui zid de separaţie şi a unui rezervor prismatic

Se pune problema proiectării unui zid de împrejmuire, de grosime şi înălţime constantă, care trebuie să includă în interior o suprafaţă dreptunghiulară, laturile dreptunghiului reprezentând variabilele care trebuie optimizate.

Optimizarea are ca obiectiv să asigure o valoare maximă a suprafeţei împrejmuite în condiţiile unei lungimi date p a zidului, deci în condiţiile unor cantităţi date de materiale pentru construcţie (având în vedere faptul că grosimea şi înălţimea zidului sunt constante).

Problema se reduce deci la găsirea dreptunghiului de arie maximă dintre toate dreptunghiurile de perimetru dat, problemă elementară în geometrie.

Notând cu x şi y laturile dreptunghiului, funcţia care trebuie maximizată este aria f, respectiv

$$f = x\,y \tag{1.1}$$

în condiţiile perimetrului p constant, de exemplu, egal cu $4C$, deci cu satisfacerea relaţiei

$$p = 2(x + y) = 4C, \tag{1.2}$$

respectiv

$$x + y = 2C. \tag{1.3}$$

Relația (1.3) constituie o restricție pentru variabilele x şi y. Restricția (1.3) reprezintă o restricție de tip egalitate.

De fapt, în acest caz intervin şi restricții de tip inegalitate, întrucât laturile x şi y trebuie să fie pozitive, deci trebuie respectate şi condițiile:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{1.4}$$

Problema se rezolvă simplu, întrucât din (1.3) se obține

$$y = 2C - x \tag{1.5}$$

şi înlocuind (1.5) în (1.1) rezultă:

$$f = 2Cx - x^2. \tag{1.6}$$

Derivând (1.6) în raport cu x şi anulând derivata, se obține

$$\frac{d\,f}{d\,x} = 2C - 2x = 0, \tag{1.7}$$

deci rezultă valoarea optimă x_{opt}:

$$x_{opt} = C, \tag{1.8}$$

întrucât pentru x_{opt} funcția f atinge un extrem, respectiv un maxim (deoarece din (1.7) rezultă $d^2 f / dx^2 = -2 < 0$).

Din (1.5) şi (1.8) se obține valoarea y_{opt}:

$$y_{opt} = 2C - x_{opt} = C = x_{opt}, \tag{1.9}$$

rezultând soluția cunoscută: dintre toate dreptunghiurile de perimetru constant aria maximă o are pătratul cu perimetrul dat, valoarea f_{max} a acestei arii fiind

$$f_{\max} = x_{opt} y_{opt} = C^2. \tag{1.10}$$

De fapt, însăşi condiția ca zidul să aibă forma unui dreptunghi constituie, de asemenea, o restricție. Astfel, dacă această condiție nu ar fi impusă şi zidul de împrejmuire ar putea avea o formă circulară, cu lungimea cercului egală cu perimetrul $p = 4C$ din (1.2), atunci se obține o suprafață împrejmuită mai mare, întrucât rezultă raza r a cercului

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{4C}{2\pi} = \frac{2C}{\pi}$$

şi suprafața circulară împrejmuită S_c are valoarea:

$$S_c = \pi r^2 = \pi \frac{4C^2}{\pi^2} = \frac{4}{\pi} C^2.$$

Comparând această suprafață cu valoarea $f_{\max}$ din (1.10) se constată că $S_c > f_{\max}$, deci, o împrejmuire circulară ar fi mai avantajoasă decât una pătrată din punct de vedere al suprafeței obținute.

Trecând la cazul tridimensional, respectiv la volumul maxim f care poate fi obținut pentru un paralelipiped dreptunghic de suprafață totală S_0 dată, se va constata că în cazul dimensiunilor optime paralelipipedul devine un cub. Dacă deci se notează laturile cu x, y, z, problema constă în determinarea valorilor x_{opt}, y_{opt}, z_{opt} care maximizează volumul

$$f = x\,y\,z \tag{1.11}$$

în condițiile restricției

$$S = 2xy + 2(x + y)z = S_0 \tag{1.12}$$

suprafaţa totală S fiind formată din suprafeţele celor două baze - termenul $2xy$ din (1.12) - şi suprafaţa laterală, respectiv termenul $2(x+y)z$ din (1.12). Sunt, de asemenea, valabile următoarele restricţii de tip inegalitate

$$x \geq 0\,,\quad y \geq 0\,,\quad z \geq 0 \qquad (1.13)$$

referitoare la pozitivitatea laturilor.

În [Căl79] soluţia optimă

$$x_{opt} = y_{opt} = z_{opt}$$

- care atestă că rezultă un cub - este obţinută prin intermediul metodei multiplicatorilor Lagrange, ilustrată în paragraful 3.1.

În practică, această problemă - asemănătoare cu cea din exemplul următor - are importanţă economică, permiţând, de exemplu, ca dintr-o suprafaţă dată de tablă să se construiască rezervorul de volum maxim posibil.

Pe o cale analoagă cu cea folosită la cazul bidimensional se poate constata că dacă nu se impune restricţia ca forma rezervorului să fie un paralelipiped dreptunghic, atunci cu o aceiaşi suprafaţă de tablă S_0 se poate obţine un volum interior mai mare decât în cazul cubului dacă se adoptă forma sferică pentru rezervor.

1.1.2. Proiectarea optimă a unui rezervor cilindric

Exemplul este analog cu cel anterior, de data aceasta punându-se problema găsirii dimensiunilor optime (care asigură un volum maxim) pentru un rezervor cilindric, în condiţiile respectării unei suprafeţe totale impuse S_0, suprafaţa totală S fiind formată din suprafaţa laterală plus suprafeţele circulare ale bazelor inferioară şi superioară.

Optimizarea permite şi în acest caz ca o anumită cantitate de tablă să fie utilizată în condiţii de eficienţă maximă.

Notând cu h înălţimea rezervorului, cu r raza suprafeţelor circulare ale bazelor, şi cu f volumul rezervorului, problema constă în a găsi valorile optime h_{opt} şi r_{opt}, care maximizează funcţia

$$f = \pi r^2 h \qquad (1.14)$$

respectând restricţia tip egalitate

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = S_0\,, \qquad (1.15)$$

şi restricţiile de pozitivitate, de tip inegalitate

$$r \geq 0\,,\quad h \geq 0\,. \qquad (1.16)$$

Soluţia problemei, prezentată în paragraful 3.1, arată că optimul se obţine dacă înălţimea cilindrului este egală cu diametrul bazei, existând deci relaţia:

$$h_{opt} = 2r_{opt} \qquad (1.17)$$

1.1.3. Optimizarea costului ambalajelor şi transportului unor produse

În acest exemplu, funcţia f care trebuie minimizată are mai multe componente, referitoare la costul ambalajelor unor produse şi la costul transportului acestor produse [Căl79]. Astfel, produsele respective, în volum de 1000 m^3/lună, trebuie transportate în cutii de forma unor paralelipipede dreptunghiulare, ale căror dimensiuni x, y, z trebuie optimizate în sensul minimizării costului total al ambalajelor şi transportului.

Se presupune că doi dintre pereţii laterali şi fundul fiecărei cutii pot fi construiţi din deşeuri recuperate, care nu necesită cheltuieli, dar lunar suprafaţa de deşeuri disponibilă pentru fiecare cutie este de numai 10 m^2. Ceilalţi doi pereţi laterali sunt realizaţi dintr-un material care costă 20 lei/m^2, capacul este confecționat dintr-un material care costă 30 lei/m^2, iar transportul fiecărei cutii costă 2 lei.

Costul total (ambalaje plus transport) va fi o funcție de dimensiunile cutiei, aceste dimensiuni determinând şi numărul total necesar de cutii pentru ambalarea cantității de 1000 m^3/lună produse transportate.

Notând cu x, y dimensiunile capacului şi fundului şi cu z înălțimea cutiei (în metri), rezultă că lunar va fi necesar un număr de n cutii, definit de relația:

$$n = \frac{1000}{xyz} \tag{1.18}$$

Considerând că cei doi pereți laterali confecționați din material nou au dimensiunile y, z rezultă costul lunar al acestor pereți

$$C_1 = 2 \cdot 20 \cdot yzn\,, \tag{1.19}$$

costul lunar al capacelor are expresia

$$C_2 = 30 \cdot xyn\,, \tag{1.20}$$

iar pentru costul lunar al transportului se obține

$$C_3 = 2n. \tag{1.21}$$

Însumând costurile menționate, se obține costul lunar total f:

$$f = C_1 + C_2 + C_3 = 40 \cdot yzn + 30 \cdot xyn + 2n \tag{1.22}$$

Înlocuind (1.18) în (1.22) rezultă funcția care trebuie minimizată

$$f = 40\,yz\frac{1000}{xyz} + 30\,xy\frac{1000}{xyz} + 2\frac{1000}{xyz} = \frac{40\,000}{x} + \frac{30\,000}{z} + \frac{2\,000}{xyz}, \tag{1.23}$$

valoarea minimă a funcției fiind asigurată de valorile optime x_{opt}, y_{opt}, z_{opt} ale dimensiunilor cutiilor.

Optimizarea trebuie realizată în condițiile unor *restricții de tip inegalitate*. Astfel, după cum s-a menționat anterior, disponibilitățile lunare de deşeuri sunt de numai 10 m^2 pentru fundul şi cei doi pereți laterali (cu dimensiunile x, z) ai fiecărei cutii, deci există restricția

$$xy + 2xz \le 10\,. \tag{1.24}$$

Intervin de asemenea, restricțiile de pozitivitate a dimensiunilor, respectiv

$$x \ge 0\,,\ \ y \ge 0\,,\ \ z \ge 0 \tag{1.25}$$

1.1.4. Proiectarea optimă a unei grinzi

În unele cazuri se presupune că tipul de grindă a fost ales şi urmează să se optimizeze numai dimensiunile. Astfel, de exemplu, pentru o grindă rezemată în dublu T, realizată din tablă sudată, de lungime l şi supusă acțiunii unei sarcini concentrate W aplicată la distanța a de reazemul din stânga (Fig. 1.1) [Căl79], optimizarea are ca scop găsirea valorilor optime pentru dimensiunile h, b, g_1, g_2 (Fig. 1.2) ale grinzii. Aceste valori, notate prin h_{opt}, b_{opt}, g_{1opt} şi g_{2opt}, asigură soluția cea mai ieftină, corespunzătoare celei mai mici cantități de material necesar pentru realizarea grinzii, în condițiile satisfacerii tuturor restricțiilor impuse.

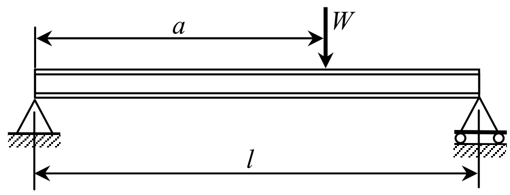

Fig. 1.1

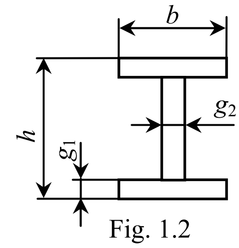

Fig. 1.2

Costul f, în lei pe unitatea de lungime, al materialului necesar pentru realizarea grinzii- reprezentând funcția care urmează să fie minimizată - are expresia:

$$f = [2bg_1 + (h - 2g_1)g_2]\gamma c, \tag{1.26}$$

unde γ este greutatea specifică, iar c este costul specific, în lei/kg.

Restricțiile sunt atât de tip egalitate, cât şi de tip inegalitate.

Una din restricțiile de tip egalitate poate fi obținută pe baza ecuației efortului maxim la încovoiere σ_{max} care rezultă în grindă. Conform relațiilor din rezistența materialelor, acest efort va avea expresia

$$\sigma_{\max} = \frac{W(l-a)a\dfrac{h}{2}}{l\left[\dfrac{2bg_1h^2}{4} + (h-2g_1)^3\dfrac{g_2}{12}\right]}, \tag{1.27}$$

deci rezultă restricția de tip egalitate

$$\sigma_{\max} - \frac{W(l-a)a\dfrac{h}{2}}{l\left[\dfrac{2bg_1h^2}{4} + (h-2g_1)^3\dfrac{g_2}{12}\right]} = 0, \tag{1.28}$$

în membrul din stânga a egalității (1.28) intervenind funcția $\Psi_1(h, b, g_1, g_2, \sigma_{\max})$ dependentă, de dimensiunile care urmează să fie optimizate.

În mod analog, determinând efortul maxim la forfecare $\tau_{\max}$, se obține o restricție de tip egalitate de forma:

$$\Psi_2(h, b, g_1, g_2, \tau_{\max}) = 0 \tag{1.29}$$

Pe aceeaşi cale, determinând efortul în zona sudurii şi săgeata maximă, se obțin alte restricții de tip egalitate.

Restricțiile de tip inegalitate rezultă din limitarea eforturilor maxime la valorile care asigură funcționarea grinzii fără pericol de rupere sau de intrare a materialului în zona de curgere. Astfel, de exemplu, notând cu S efortul de curgere a materialului şi cu N coeficientul de siguranță necesar, efortul $\sigma_{\max}$ trebuie să satisfacă o relație de forma:

$$\sigma_{\min} \leq S/N, \tag{1.30}$$

care reprezintă o restricție de tip inegalitate. În mod analog se obțin şi alte restricții din această categorie.

În alte cazuri, secțiunea grinzii nu este menținută constantă pe toată lungimea. Astfel, în cazul unei grinzi în consolă cu secțiune dreptunghiulară (Fig. 1.3), supusă acțiunii unei sarcini statice uniform distribuite, proiectarea optimă are ca obiectiv determinarea acelei forme a grinzii care asigură o cantitate minimă de material cu respectarea restricțiilor rezultate din condiția de a nu depăşi solicitarea admisibilă şi din condiția ca frecvența naturală să fie superioară unei limite inferioare impuse.

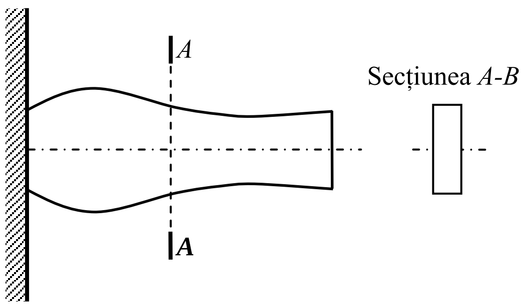

Fig. 1.3

O asemenea problemă de optimizare poate fi rezolvată prin intermediul metodelor de *calcul variațional* [Sid72].

1.1.5. Proiectarea optimă a unui sistem de iluminat

Fiind date dimensiunile încăperii, limitele impuse pentru iluminare, limitele puterii becurilor disponibile, durata medie de funcționare a becurilor, costul becurilor şi costul energiei electrice, optimizarea are ca scop stabilirea numărului şi puterii becurilor şi a coordonatelor spațiale ale acestor becuri astfel încât iluminarea cerută să fie obținută cu un cost minim pentru un număr precizat, de exemplu 1000 de ore, de funcționare. Rezolvarea unei asemenea probleme este ilustrată în [Sid72].

1.2. Probleme de formulare matematică a metodelor de optimizare

Optimizarea necesită un aparat matematic evoluat. Lucrarea de față, adresată în principal inginerilor, nu are ca scop să fundamenteze sau să demonstreze metodele de calcul folosite în optimizare, ci să pună în evidență posibilitățile de aplicare a acestor metode. Prezentul subcapitol îşi propune să prezinte succint câteva probleme de formulare matematică necesare aplicării metodelor de optimizare utilizate în practică.

1.2.1. Terminologie, definiții şi notații

a. *Funcții criteriu şi restricții*

După cum a rezultat din subcapitolele anterioare, optimizarea include:

- alegerea unui criteriu de optimizare;
- stabilirea restricțiilor de tip egalitate şi inegalitate;
- determinarea valorilor optime ale variabilelor (care intervin în expresia criteriului şi în expresiile restricțiilor), aceste valori asigurând un extrem - maxim sau minim, după caz - al criteriului de optimizare.

Notând variabilele - care intervin în expresiile criteriului şi restricțiilor - prin

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1.31}$$

criteriul de optimizare poate fi notat prin funcția

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{1.32}$$

Această funcție a căpătat mai multe denumiri în literatura tehnică: funcție criteriu, funcție obiectiv, indice de performanță, funcție de cost, funcție de optimizare, funcție scop. Oricare dintre denumiri poate fi utilizată cu egală justificare; în prezenta lucrare va fi utilizată denumirea de *funcție criteriu*.

Restricțiile de tip egalitate pot fi exprimate prin relații de forma

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{1.33}$$

cu i = 1, 2, ..., m, presupunând că sunt impuse m restricții de acest tip. În unele lucrări restricțiile de tip egalitate sunt denumite şi restricții active.

Restricțiile de tip inegalitate pot fi exprimate prin relații de forma generală

$$l_j \le g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le L_j \tag{1.34}$$

(cu j = 1, 2, ..., r, presupunând că intervin r expresii de acest tip), unde l_j şi L_j sunt limita inferioară admisă şi limita superioară admisă.

În unele cazuri, se impune o singură limită, iar uneori aceasta poate fi nulă, rezultând restricții de tip inegalitate de forma

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0 \tag{1.35}$$

sau de forma

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{1.36}$$

În unele lucrări, restricțiile de tip inegalitate sunt denumite şi restricții inactive, iar expresiile care le descriu sunt denumite ecuații limită.

Numărul m al restricțiilor egalitate trebuie să fie mai mic decât numărul n al variabilelor, deci este necesară o relație de forma

$$m < n \tag{1.37}$$

pentru că dacă ar avea loc egalitatea $m = n$, atunci nu mai are rost căutarea unui optim, întrucât pentru respectarea restricțiilor, instalația tehnologică poate funcționa numai cu anumite valori fixe ale variabilelor.

Astfel, considerând un exemplu de optimizare staționară - în care variabilele nu sunt funcții de timp - dacă în cazul $n = 2$ variabile, există $m = 2$ restricții de tip egalitate, atunci în planul celor două variabile (x_1, x_2), cele două ecuații ale restricțiilor $h_1(x_1, x_2) = 0$ şi $h_2(x_1, x_2) = 0$, sunt reprezentate de două curbe; presupunând că aceste curbe se intersectează într-un punct, coordonatele acestui punct reprezintă singura pereche de valori ale variabilelor pentru care ambele restricții sunt satisfăcute, deci nu mai are sens căutarea unui optim.

Dacă numărul restricțiilor de tip egalitate ar fi mai mare decât numărul variabilelor, problema devine în general incompatibilă; astfel, dacă în exemplul anterior, cu $n = 2$, ar interveni $m = 3$ restricții, atunci ar rezulta 3 curbe în plan, care de regulă nu se intersectează în acelaşi punct şi deci nu este posibil un regim de funcționare al instalației tehnologice cu respectarea tuturor restricțiilor impuse.

În cazul restricțiilor de tip inegalitate nu intervin condiții de tipul (1.37), întrucât aceste restricții delimitează anumite domenii şi deci numărul lor poate fi mai mare decât numărul variabilelor.

b. *Programarea matematică liniară, neliniară, pătratică, convexă*

Metodele de calcul folosite în optimizare depind în măsură însemnată de aspectul funcției criteriu f şi al restricțiilor h_i şi g_j. Dacă atât funcția criteriu, cât şi toate restricțiile h_i şi g_j sunt liniare, atunci metodele de calcul au un caracter specific şi formează obiectul unui domeniu denumit *programarea liniară*. Acest domeniu nu este tratat în prezenta lucrare, existând în literatura tehnică numeroase cărți destinate domeniului respectiv [Dan76], [???].

Dacă funcția criteriu f sau unele dintre restricțiile h_i sau g_j nu sunt liniare, atunci metodele de calcul au un aspect deosebit de cel din cazul liniar şi formează obiectul *programării neliniare*, care reprezintă în bună măsură tematica prezentei lucrări.

Programarea liniară împreună cu programarea neliniară pot fi grupate în cadrul *programării matematice*.

Programarea neliniară poate avea anumite aspecte particulare. Astfel, dacă funcția criteriu este pătratică, iar toate restricțiile sunt liniare, atunci programarea neliniară este denumită *programare pătratică* [Dra68].

Dacă funcția criteriu şi restricțiile sunt convexe, atunci problema optimizării devine o problemă de *programare convexă*, domeniu al programării neliniare în care au fost obținute rezultate importante [Dra68], [Sag77].

Noțiunea de convexitate este importantă atât pentru mulțimi, cât şi pentru funcții.

c. *Mulțimi convexe şi neconvexe*

O mulțime este convexă dacă unind printr-o dreaptă orice pereche de puncte ale mulțimii, dreaptă aparține în întregime mulțimii respective; în caz contrar, mulțimea este neconvexă.

Pentru ilustrare, în Fig. 1.4 sunt reprezentate exemple de mulțimi convexe în plan, respectiv în spaţiul mărimilor reale cu două dimensiuni, notat cu $\Re^2$, mulţimile fiind constituite de totalitatea punctelor din interiorul (şi de pe graniţa) figurilor geometrice reprezentate, respectiv din zonele nehaşurate. Se constată uşor că dreapta care uneşte orice pereche de puncte (*A-B*, *C-D*, *E-F*) din mulţimile respective este conţinută în mulţime.

Mulţimi convexe pot fi definite şi pe o dreaptă, respectiv în spaţiul mărimilor reale cu o singură dimensiune, notat cu $\Re^1$. Astfel, segmentul dintre punctele x_1 şi x_2 de pe dreapta *D* (Fig. 1.5) - coordonatele respective fiind stabilite în raport cu originea *O* - constituie o mulţime convexă, întrucât dreapta care uneşte orice pereche de puncte din cadrul segmentului este conţinută în segment.

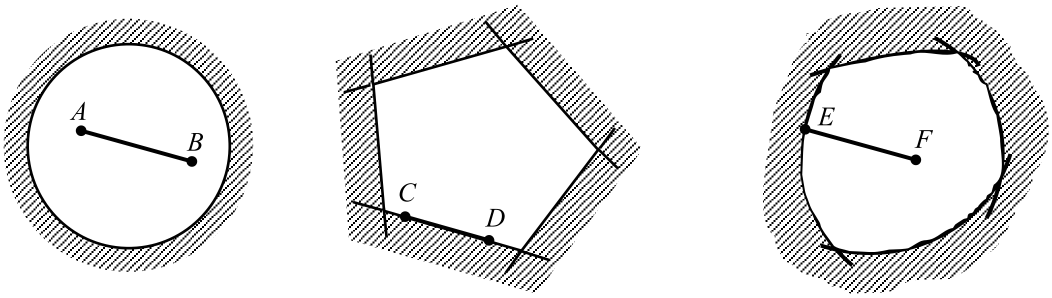

Fig. 1.4

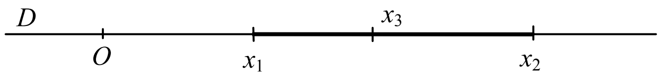

Fig. 1.5

Notând cu x_3 un punct oarecare de pe segmentul respectiv, care deci satisface condiţia

$$x_1 \le x_3 \le x_2 \tag{1.38}$$

se constată că segmentul poate fi definit prin expresia

$$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \tag{1.39}$$

în care valorile scalarului λ satisfac condiţia:

$$0 \le \lambda \le 1. \tag{1.40}$$

Pentru $\lambda = 0$, se obţine $x_3 = x_2$, iar pentru $\lambda = 1$ se obtine $x_3 = x_1$, orice valori intermediare λ, care satisfac relaţia (1.40), conducând la puncte intermediare ale segmentului.

Expresii similare cu (1.39) se obţin pentru definirea unor drepte în spaţii cu *n* dimensiuni, respectiv în $\Re^n$.

În Fig. 1.6 este ilustrat aspectul unei mulţimi neconvexe în $\Re^2$, iar în Fig. 1.7 este prezentat în $\Re^1$ un exemplu de mulţime neconvexă, formată din segmentele dintre punctele x_1 şi x_2 şi dintre punctele x_3 şi x_4. Se constată, că dreptele care unesc punctele *A* şi *B* (în Fig. 1.6) , respectiv *C* şi *D* (în Fig. 1.7), nu sunt conţinute în întregime în mulţimile menţionate.

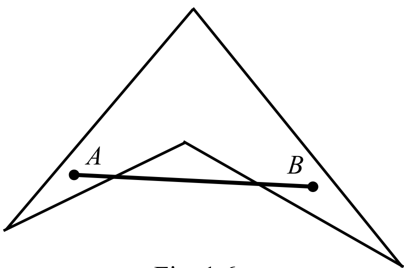

Fig. 1.6

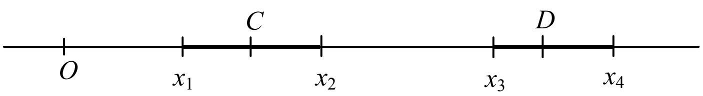

Fig. 1.7

De cele mai multe ori, în practică, fiecare restricție de tip inegalitate - de tipul (1.34), (1.35) sau (1.36) - definește o mulțime convexă; domeniul corespunzător satisfacerii simultane a mai multor restricții de tip inegalitate va fi reprezentat de intersecția mulțimilor aferente, care va fi tot o mulțime convexă, întrucât intersecția unui număr finit de mulțimi convexe este și ea convexă. Acest lucru este ilustrat în Fig. 1.8 prin intersecția I a mulțimilor M_1 și M_2 din spațiul $\Re^2$.

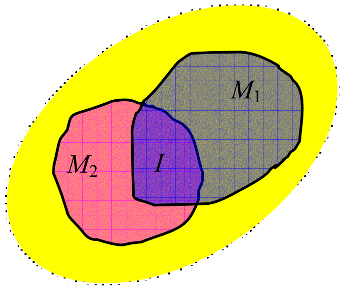

Fig. 1.8

d. *Funcții convexe și concave*

Ilustrarea și definirea funcțiilor convexe și concave este mai simplă pentru funcțiile de una sau două variabile. Astfel, funcția $f(x)$ de o singura variabilă, reprezentată în Fig. 1.9, este o funcție convexă pentru domeniul de variație

$$x_A \le x \le x_B \tag{1.41}$$

al variabilei x (proprietatea de convexitate trebuie precizată pentru un anumit domeniu de definițe al funcției); conform Fig. 1.5, mulțimea de definiție (1.41) a funcției este o mulțime convexă.

Funcția $f(x)$ din Fig. 1.9 este convexă pentru că satisface condiția ca segmentul de dreaptă care unește orice pereche de puncte de pe graficul funcției (corespunzătoare valorilor x din domeniul considerat) să nu se găsească sub graficul funcției [Căl79].

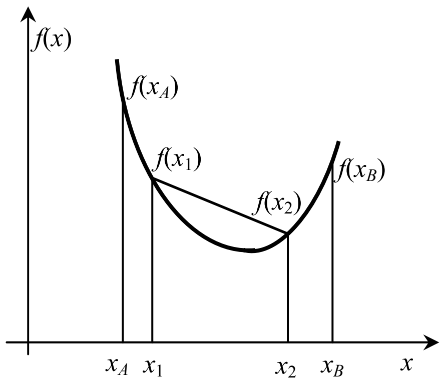

Fig. 1.9

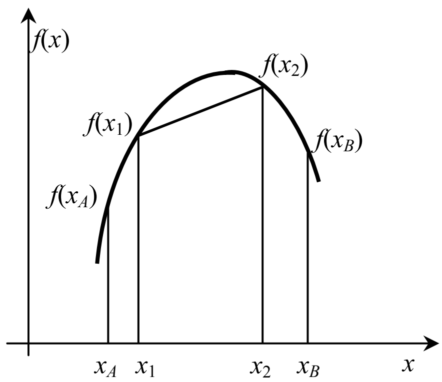

Fig. 1.10

Astfel, segmentul de dreaptă care unește punctele $f(x_1)$ și $f(x_2)$ se găsește deasupra graficului funcției, ca și orice alt segment care ar uni o pereche oarecare de puncte ale graficului cuprinse între $f(x_A)$ și $f(x_B)$.

Condiția de convexitate poate fi ușor exprimată matematic. Astfel, segmentul axei absciselor dintre x_1 și x_2 poate fi definit, conform cu (1.39), prin relația

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \tag{1.42}$$

cu $0 \le \lambda \le 1$. În consecință, porțiunea funcției $f(x)$ dintre $f(x_1)$ și $f(x_2)$ este definită de relația:

$$f(x) = f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\big). \tag{1.43}$$

Pe de altă parte, tot conform cu (1.39), segmentul de dreaptă care unește punctele $f(x_1)$ și $f(x_2)$ este definit prin relația

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{1.44}$$

cu $0 \le \lambda \le 1$.

Condiția ca segmentul să nu se găsească sub grafic se exprimă deci prin relația

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{1.45}$$

conform cu (1.43) şi (1.44), relație care trebuie satisfacută pentru tot domeniul din (1.41).

Dacă în (1.45) inegalitatea este strictă, atunci funcția este strict convexă.

O funcție este concavă dacă segmentul de dreaptă care uneşte punctele $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ nu se găseşte niciodată deasupra graficului funcției; funcția din Fig. 1.10, definită tot pe mulțimea convexă (1.41), este concavă.

Condiția de concavitate a unei funcții se exprimă deci prin relația

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{1.46}$$

valabilă pentru orice pereche de puncte din cadrul domeniului (1.41); dacă în (1.46) inegalitatea este strictă, atunci funcția este strict concavă.

Se constată, uşor că dacă o funcție $f(x)$ este convexă, atunci $-f(x)$ este concavă, iar dacă $f(x)$ este concavă, atunci $-f(x)$ este convexă.

Programarea neliniară studiază găsirea maximelor funcțiilor concave şi găsirea minimelor funcțiilor convexe; conform celor menționate mai sus, găsirea maximului unei funcții concave $f(x)$ asigură implicit găsirea minimului funcției convexe $-f(x)$.

Unele funcții nu sunt nici concave, nici convexe cum este funcția reprezentată în Fig. 1.11 [Căl79], care în domeniul $x_A \le x \le x_B$ prezintă două puncte de maxim local M_1 şi M_2, punctul M_2 fiind un maxim global, întrucât în M_2 funcția are o valoare mai mare decât în M_1.

În practica optimizării, cazul funcțiilor criteriu convexe sau concave este deosebit de important, întrucât optimul determinat va fi sigur un optim global, neexistând pericolul ca algoritmul de optimizare să conducă la un optim local, inferior celui global (cum ar fi optimul local M_1 din Fig. 1.11), pericol care apare în cazul funcțiilor criteriu care nu sunt nici convexe, nici concave, obținerea optimului global fiind complicată în aceste cazuri.

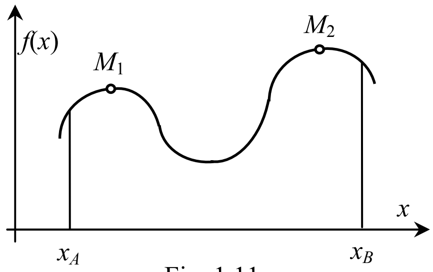

Fig. 1.11

1.2.2. Formularea optimizării prin intermediul spațiilor vectoriale

Un spațiu S poate fi considerat ca o colecție de elemente. De exemplu, spațiile $\Re^1$ şi $\Re^2$, considerate în paragraful anterior, au ca elemente punctele de pe o dreptă, respectiv punctele dintr-un plan; în $\Re^2$, fiecare punct este definit de două coordonate, care formează un vector. Astfel, pentru punctele x şi y se obține

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

Într-un spațiu real cu n dimensiuni $\Re^n$, fiecare punct este definit de n coordonate, respectiv de vectori n-dimensionali de forma:

$$x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^T, \quad y = [y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; y_n]^T \tag{1.48}$$

Un spațiu S este liniar dacă x şi y fiind elemente ale spațiului S, respectiv $x \in$ S, $y \in$ S, combinația liniară $ax + by$ este de asemenea un element al aceluiaşi spațiu - respectiv $(ax + by) \in$ S, a şi b fiind constante scalare.

Un spațiu este complet dacă orice şir Cauchy format cu elemente ale spațiului are limita şirului în spațiul respectiv.

Un spațiu are un produs scalar dacă în spațiul respectiv este definită o operație care atribuie un număr real fiecărei perechi de elemente ale spațiului. Considerând vectorii din

(1.48) şi notând prin x^T vectorul x transpus, deci $x^T = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]$, se constată că produsul

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (1.49)$$

atribuie un număr real unei perechi de elemente din $\Re^n$ (întrucât $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ este un număr real), deci reprezintă un produs scalar.

Produsul scalar a doi vectori, denumit şi *produs intern*, se notează prin

$$< x, y > \qquad (1.50)$$

Produsul

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \;\; y_2 \;\; \cdots \;\; y_n] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

se numeşte *produs extern* (uneori este denumit şi produs diadic) şi se notează prin

$$> x, y < \qquad (1.51)$$

În problemele de optimizare sunt utilizarte frecvent spaţiile Hilbert. Un spaţiu Hilbert este un spaţiu liniar, complet şi având un produs scalar; exemple de spaţii Hilbert sunt spaţiile reale $\Re^1, \ldots, \Re^n$, dar şi spaţiul funcţiilor de pătrat integrabil. Folosirea spaţiilor Hilbert pentru rezolvarea problemelor de optimizare este justificată de următoarele considerente, expuse în ipoteza că optimizarea urmăreşte minimizarea funcţiei criteriu (după cum a rezultat din paragraful anterior minimizarea unei funcţii convexe $f(x)$ corespunde maximizării funcţiei concave $-f(x)$, deci ipoteza minimizării nu limitează generalitatea concluziilor).

Considerând că variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din funcţia criteriu (1.32) sunt coordonatele unui vector x în $\Re^n$, optimizarea constă în a găsi acel vector x^* pentru care funcţia are un minim, deci pentru care rezultă

$$f(x^*) \le f(x) \qquad (1.52)$$

pentru orice x din vecinătatea lui x^*.

După cum va rezulta şi din capitolele ulterioare, metodele numerice de optimizare, care permit utilizarea calculatoarelor numerice, prevăd construirea unei secvenţe (unui şir) de vectori[1]: x^0, x^1, x^2, ... ([1] Întrucât componentele unui vector x au fost notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diferiţii vectori x sunt notaţi cu x^0, x^1, x^2, ... Când nu va interveni un pericol de confuzie, diferiţii vectori vor fi notaţi cu indici inferiori.) astfel încât să se obţină

$$f(x^{i+1}) < f(x^i) \qquad (1.53)$$

Construirea şirului continuă fie până când nu mai poate fi găsit un vector x^{i+1} care să satisfacă relaţia (1.53), şi atunci $x^i = x^*$, fie până când şirul de vectori se apropie de o limită, această limită fiind chiar x^*.

În practică şirul de vectori este obţinut printr-o relaţie iterativă de forma [Căl79]

$$x^{i+1} = x^i + \alpha_i p^i, \qquad (1.54)$$

unde α_i este un scalar, iar p^i este un vector din acelaşi spaţiu cu x^* (vectorul p^i determină direcţia căutării optimului, iar scalarul α_i asigură pasul căutării).

Avantajele utilizării spaţiilor Hilbert pentru optimizare apar acum evidente. Astfel, spaţiul Hilbert fiind liniar, din (1.54) rezultă că x^{i+1} va fi un element al spaţiului din care fac parte x^* şi p^i - întrucât x^{i+1} reprezintă o combinaţie liniară a vectorilor x^* şi p^i - deci întregul şir de vectori va fi conţinut în spaţiul respectiv.

Pe de altă parte, spaţiul Hilbert fiind complet, limita şirului de vectori construit se va găsi în spaţiul respectiv, ceea ce este evident de dorit.

În sfârşit, faptul că în spaţiul Hilbert este definit un produs scalar are o importanţă deosebită pentru determinarea vectorului p^i din (1.54), care asigură direcţia căutării optimului. Produsul scalar permite definirea *conceptului de ortogonalitate*, doi vectori x şi y fiind ortogonali dacă produsul lor scalar este nul, deci dacă este indeplinită condiţia

$$< x, y > = 0. \qquad (1.55)$$

Conceptul de ortogonalitate este deosebit de important. Astfel, dacă este intuitiv evident ca distanţa minimă de la un punct la o dreaptă (dreapta reprezentând un spaţiu $\Re^1$) şi de la un punct la un plan (reprezentând un spaţiu $\Re^2$) este obţinută prin perpendiculara de la punct la dreaptă şi de la punct la plan, prin generalizare, se poate presupune că într-un spaţiu cu mai multe dimensiuni, vectorul de lungime minimă de la un punct la un anumit subspaţiu din $\Re^n$ va fi ortogonal pe subspaţiul respectiv.

Produsul scalar permite şi definirea unei *norme*, respectiv a unei măsuri a lungimii unui element (vector) al spaţiului, introducând astfel o metrică a spaţiului şi obţinându-se un spaţiu metric. Notând cu $\| x \|$ norma unui vector, aceasta este definită de relaţia:

$$\| x \| = \sqrt{< x, y >} . \qquad (1.56)$$

În cazul spaţiului $\Re^n$, rezultă deci

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i} . \qquad (1.57)$$

Folosirea spaţiilor vectoriale Hilbert permite elaborarea unor importante metode de optimizare; însăşi problema optimizării poate fi riguros formulată.

Astfel, pentru a compara valorile funcţiei criteriu $f(x)$ pentru diferiţi vectori x^i, comparaţie necesară pentru optimizare, conform relaţiei (1.53), trebuie ca această funcţie să ia valori în $\Re^1$, deci fiecărui vector x din spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$ îi va corespunde o valoare numerică a funcţiei $f(x^i)$ în $\Re^1$, funcţia f fiind deci o funcţională; întrucât în terminologia spaţiilor vectoriale o relaţie (corespondenţă) între elementele a două spaţii este denumită operator (sau transformare), funcţia f este un operator de la un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$ n-dimensional la $\Re^1$ şi poate fi reprezentată simbolic ca în Fig. 1.12.

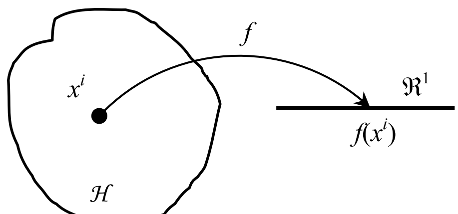

Fig. 1.12

Prin intermediul comparaţiei din (1.53) pot fi clasificate elementele x ale spaţiului $\mathcal{H}$ - din punct de vedere al apropierii (sau depărtării) de optim - şi deci funcţionala f reprezintă un instrument pentru ordonarea elementelor spaţiului $\mathcal{H}$.

1.2.3. Transformări ale problemelor de optimizare

În teoria şi tehnica optimizării se folosesc frecvent transformări ale unor probleme date, în scopul obţinerii soluţiilor pe o cale mai simplă, cu un efort de calcul mai redus.

Transformările problemelor de optimizare sunt de mai multe tipuri [Căl79].

a. O primă categorie este reprezentată de transformările prin descompunere (TD), care presupun descompunerea unei probleme de optimizare a unor sisteme sau instalaţii tehnologice complexe în probleme de optimizare a unor subansamble cu structură mai simplă.

O astfel de descompunere (decompoziție) poate prezenta avantaje importante pentru obținerea soluțiilor optimizării, întrucât problemele de optim ale subsistemelor se rezolvă mai uşor, datorită numărului redus de variabile care intervin în fiecare subsistem; pentru obținerea unui optim pe ansamblu, pe lângă optimizarea funcționării fiecărui subsistem este necesară şi o acțiune de coordonare centrală pentru coordonarea şi compensarea interacțiunilor dintre subsisteme. Se obține astfel o structură ierarhizată cu două sau mai multe nivele. În cazul a două nivele, la nivelul inferior are loc optimizarea funcționării fiecărui subsistem, iar la nivelul superior se efectuează acțiunea de coordonare pentru obținerea optimului pe ansamblu.

b. O a doua categorie este reprezentată de transformările primal-duale (TPD), prin intermediul cărora o problemă de optimizare dată inițial (considerată problemă primală) este înlocuită prin altă problemă, mai simplu de rezolvat (considerată problemă duală) care conduce însă la rezultatul urmărit prin problema inițială. Printre diferitele TPD folosite în optimizare se numără şi cele care transformă o problemă exprimată în funcție de vectorii dintr-un spațiu multidimensional, într-o problemă exprimată în funcție de hiperplanele din spațiul respectiv.

Pentru a ilustra acest tip de TPD, în Fig. 1.13 este reprezentată simbolic mulțimea convexă M şi punctul P [Căl79]. Conform generalizării făcute în paragraful anterior, distanța minimă de la punctul P la mulțimea M se va obține prin norma vectorului v ortogonal pe mulțime, notată $\| v \|$. Dar această distanță minimă este în acelaşi timp distanța maximă dintre punctul P şi orice hiperplan care separă punctul P de mulțimea M. Astfel, din figurile 1.14, 1.15 şi 1.16 (în care hiperplanele au fost reprezentate simbolic prin dreptele H_1, H_2, H_3) se constată, că distanțele D_1, D_2 - de la punct la hiperplanele H_1, H_2, distanțe stabilite prin ortogonalitate - sunt mai mici decât distanța de la punct la mulțime, iar într-un singur caz, al hiperplanului H_3, pe care vectorul v este ortogonal, distanța D_3 de la punctul P la H_3 devine egală cu distanța de la punctul P la mulțimea M, rezultând deci un maxim al distanței de la punct la orice hiperplan care separă punctul de mulțimea M. În acest mod problema primală de minimizare este transformată într-o problemă duală de maximizare.

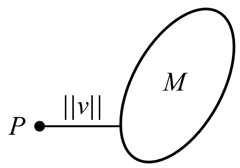

Fig. 1.13

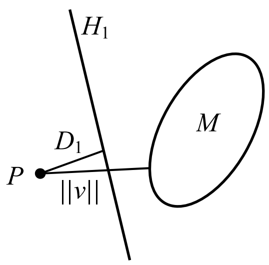

Fig. 1.14

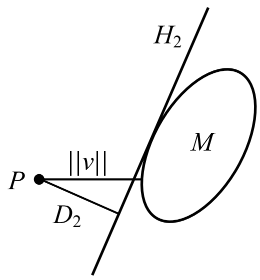

Fig. 1.15

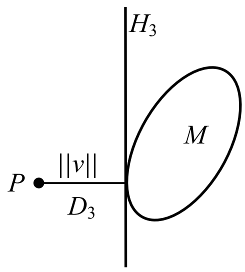

Fig. 1.16

c. O a treia categorie de transformări se referă la transformările problemelor de optimizare cu restricții (TR) pentru a fi rezolvate prin metodele folosite la problemele fără restricții. În acest caz se deosebesc transformări ale problemelor cu restricții de tip egalitate (TRE) şi transformări ale problemelor cu restricții de tip inegalitate (TRI), ambele tipuri fiind ilustrate în capitolul 3.