INSTITUT SUPERIEUR DES SCIENCES DE TECHNOLOGIE DE COMMERCE ET D'AGRICULTURE

Composition de	Session de	Niveau	Filières	Durée	Crédit
MATHEMATIQUES	**Février 2021**	**2**	**Industrielles**	**03 h**	**03**

<u>Exercice 1</u> : Analyse I $(\mathbf{1,5+1,5+1})\boldsymbol{pts}=\mathbf{4}\boldsymbol{pts})$

1. Etudier les variations de la fonctions f, définie par : $\boldsymbol{f(x)=xe^{\frac{1}{x}}}$.
2. Construire soigneusement $(\boldsymbol{C_f})$, ainsi que ses différentes asymptotes.
3. Déduire sur le même graphe la construction de la fonction $\boldsymbol{h(x)=|f(-x)|}$, après avoir expliqué brièvement comment obtenir $(\boldsymbol{C_h})$ à partir de $(\boldsymbol{C_f})$.

<u>Exercice 2</u> : Algèbre linéaire $(\mathbf{0,5+1+1+1+1,5})\boldsymbol{pts}=\mathbf{5}\boldsymbol{pts})$

On désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ On pose $a=\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3$, $b=2\mathrm{e}_1-\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3$, $c=2\mathrm{e}_1-2\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\boldsymbol{B}=\{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique vers la base $\boldsymbol{B}$ et calculer $\boldsymbol{P}^{-1}$.
3. Déterminer la matrice $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{f}$ dans la base $\boldsymbol{B}$.
4. Calculer $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ en fonction de $\boldsymbol{M}$.
5. Calculer $\boldsymbol{M}^4$ et déduire $\boldsymbol{A}^{4\mathrm{n}}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

<u>Exercice 3</u> : Analyse II $(\mathbf{1+2+1+1+1+0,5})\boldsymbol{pts}=\mathbf{6,5}\boldsymbol{pts})$

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(\boldsymbol{E_1})$: $\boldsymbol{y'+2y=3y^3}$ (On utilisera le changement de variable $\boldsymbol{y=\frac{1}{z^2}}$).

$(\boldsymbol{E_2})$: $\boldsymbol{y''+2y'+2y=(3e^{2x}+5\cos 2x)\mu(t)}$ **(**on utilisera la transformation de Laplace**).**

2. On considère l'équation $(\boldsymbol{E}): (\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{y}=-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$**, avec** $\boldsymbol{y}(\mathbf{0})=\mathbf{2}$**.**

- **a.** En admettant que $(\boldsymbol{E})$ admet une solution développable en série entière, $\boldsymbol{y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\boldsymbol{a_n x^n}$**,** trouver une relation récurrente mettant en relation $\boldsymbol{a_n}$ **et** $\boldsymbol{a_{n+1}}$**.**
- **b.** Déduire en se servant d'un raisonnement par récurrence, que $\boldsymbol{a_n}=\mathbf{2}(-\mathbf{2})^{\boldsymbol{n}}$**.**
- **c.** Déduire la somme de la série entière $\boldsymbol{y}$ obtenue après avoir déterminé son domaine de convergence.
- **d.** Déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}}$**.**

<u>Exercice 4</u> : Analyse II $(\mathbf{0,5+1+0,5+0,5+2})\boldsymbol{pts}=\mathbf{4,5}\boldsymbol{pts}$

On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ **–** périodique définie sur $[-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}]$ par : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$**.**

1. Représenter $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbf{03}$ périodes.

2. Calculer les coefficients de Fourier associés à $\boldsymbol{f}$**.**

3. $\boldsymbol{f}$ Respecte – elle les conditions du théorème de Dirichlet ? Justifier.

4. Déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ ;\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ ;\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}\ \ et\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$