

COMPOSITION DU SECOND SEMESTRE

Matière : MATHEMATIQUES

Durée : 3 H

Spécialité : TC INDUSTRIEL

Niveau : 1

Enseignant :

EXERCICE 1 Calcul des intégrales

/8points

A- Calculer les nombres suivants

2pts

$$A = \int_0^1 (x+2)e^x dx ; \quad B = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}} dx \text{ en posant } u = \sqrt{x+1}$$

B- On considère la fonction f donnée par $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . 0,5pt
2. Montrer que f est impaire. 1pt
3. Déterminer la dérivée de F 1pt
4. En déduire ses variations. 1pt
5. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine. 1pt

C- Calculer l'intégrale suivante

1,5pt $I = \iint_D \sin(x+y) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq \pi\}$

EXERCICE 2 Equations différentielles

/6points

a) Résoudre les équations différentielles de premier ordre suivantes

3pts

$y'(x) - 2xy(x) = \sinh x - 2x \cosh x$ avec $y(0) = 2$

$y'(x) - y(x) = (x+1)e^x$ avec $y(0) = 1$

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle (solutions réelles) :

$my''(x) - (1+m^2)y'(x) + my(x) = xe^x$

NB : On suppose $m \neq 0$.

- 1^{er} cas résoudre l'équation pour $m = 1$

1,5pt

- 2^e cas résoudre l'équation pour $m \neq 1$

1,5pt

EXERCICE 3

/6points

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E) : $y'' + \frac{1}{2x^2} y = 0$.

1. Soit y une solution du problème. On pose pour tout $t \in \mathbb{R} : z(t) = y(e^t) e^{-\frac{t}{2}}$.

1.1 Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour tout $x > 0$.

1pt

1.2 En déduire que la fonction $t \rightarrow z(t)$ vérifie sur \mathbb{R} une équation (E') d'ordre 2 à coefficients constants.

1.3 Résoudre E'.

1pt

2. Résoudre (E).

2pts

2pts