MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ISSTECOA BAFOUSSAM

……………………………

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

………………………

EXAMEN DE MATHEMATIQUES

ENSEIGNANT : TCHOUDO EDDY

SPECIALITES : TOUTES LES SPECIALITES INDUSTRIELLES

NIVEAU : BTS 1

DUREE : 3H

EXERCICE 1 (3 Points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) a) Calculer u_0

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$

   b) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^k u_{n+1}$

3) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.

EXERCICE 2 (6pts)

Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{2+\ln(x)}$ une fonction d'une variable réelle x.

1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction et calculer les limites à ses bornes.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0^+$ et étudier la dérivabilité en ce point.
3) Calculer la dérivée de f, étudier ses variations et dresser son tableau de variation.
4) Montrer que la fonction f admet un point d'inflexion que l'on déterminera.
5) Tracer la courbe représentative de f.

<u>EXERCICE 3</u> (6pts)

<u>PARTIE A</u>

Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

1) $f(x)=(1+2\arctan x)(2e^{x}-\sin x)$ à l'ordre 3

2) $f(x)=\dfrac{2+\arctan x}{\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 4

<u>PARTIE B</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$$

1. Déterminer le développement limité la fonction g définie par $g(X)=\ln\left(1+\sqrt{1+X}\right)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0.
2. Montrer que $f(x)=x+\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$, à l'aide de la question 1. montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, on déterminera la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

<u>PARTIE C</u>

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1-x}{\sin^2(x)}$

2. Simplifier l'expression $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}(2x)}{x-\ln(\operatorname{ch}x)-\ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

<u>EXERCICE 4</u> (5pts)

<u>PARTIE A:</u> résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction C est solution de l'équation différentielle : (E) : $y'+0,3y=36$

1) Résoudre l'équation différentielle : (E_1) : $y'+0,3y=0$
2) Déterminer la solution constante de l'équation différentielle (E).
3) En déduire les solutions de (E) et donner la fonction C solution qui vérifie C(0)=0.

<u>PARTIE B :</u> étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=120\left(1-e^{-0,36.t}\right)$.

a) Chercher les variations de f sur $[0;+\infty[$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$; que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?
c) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal (unité : 1,5 cm pour une unité en abscisse et 1mm pour une unité en ordonnée).
d) Calculer la valeur moyenne de f sur $[2;12]$ et en donner une valeur approchée à une unité près.

Si tu ne poursuis pas ce que tu désires, tu ne l'obtiendras jamais.