MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ISSTECOA BAFOUSSAM

……………………………

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

………………………

EXAMEN DE MATHEMATIQUES 1

ANNEE ACADEMIQUE : 2019/2020

SEMESTRE 1

SPECIALITES : TOUTES LES SPECIALITES INDUSTRIELLES

ENSEIGNANT : TCHOUDO EDDY

NIVEAU : BTS 1

DUREE : 3H

EXERCICE 1 (3 Points)

Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps (t = 0, en secondes) à ce moment-là. Pour tout t de $\mathbb{R}_+$, on note v(t) la vitesse (en m.s^{-1}) du parachutiste à l'instant t. On admet que la résistance de l'air est donnée par: $R = \frac{P.v^2}{25}$, où P est le poids du parachutiste avec son équipement. (P = m.g, g = 10 ms^{-2})

1. Démontrer que v est solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle : $(E): v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right)$ **(0,5pt)**
2. On suppose que v > 5 sur $\mathbb{R}_+$, et on pose sur $\mathbb{R}_+$: $z = \frac{1}{v-5}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$, et la résoudre. **(1pt)**
3. En déduire une expression de v(t) en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$. **(0,75pt)**
4. Donner la courbe de v(t) en fonction du temps et déduire la constante de temps. **(0,75pt)**

EXERCICE 2 (4pts)

PARTIE A (0,5+1+1=2,5pts)

Soit f la fonction de x et y définie par : $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}\ \forall\, x,y > 0$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\frac{\partial f(x,y)}{\partial y};\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$.
3) En utilisant le changement de variables u = x + y et v = x - y, calculer l'intégrale double $K = \iint_{\Delta} e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$

PARTIE B **(0,5+1=1,5pt)**

Soit D le domaine : $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

1) Représenter le domaine D.

2) Calculer sur D l'intégrale $D = \iiint x.y.z.dxdydz$

EXERCICE 3 **(8pts)**

PARTIE A **(1+1=2pts)**

Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

1) $f(x) = (1+2\arctan x)(2e^x - \sin x)$ à l'ordre 3

2) $f(x) = \dfrac{2+\arctan x}{\operatorname{ch} x}$ à l'ordre 4

PARTIE B **(1+2= 3pts)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right)$$

1. Déterminer le développement limité la fonction g définie par $g(X) = \ln\left(1+\sqrt{1+X}\right)$ à l'ordre 1, au voisinage de 0.
2. Montrer que $f(x) = x + \ln\left(1+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$, à l'aide de la question 1. montrer que f admet une asymptote oblique en $+\infty$, on déterminera la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

PARTIE C **(1+1=2pts)**

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+2} - x\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)}$

2. Simplifier l'expression $\dfrac{2\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(2x)}{x - \ln(\operatorname{ch} x) - \ln 2}$ et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

EXERCICE 4 **(0,5+1+1+1+1+1,5=6pts)**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ?
   Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
5. Dresser le tableau de variation de f
6. Tracer son graphe sur trois périodes

Si tu ne poursuis pas ce que tu désires, tu ne l'obtiendras jamais.