UFMA

Universidade Federal do Maranhão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

[DEMA0342] Álgebra Linear I – Segunda Avaliação

prof. Cleber Cavalcanti

1,5

1. [2,5] Considere V um espaço vetorial munido de produto interno. Se u, v e w forem vetores quaisquer em V, usando a norma induzida pelo produto interno, demonstre que

$$\|w-u\|^2 + \|w-v\|^2 = \tfrac{1}{2}\,\|u-v\|^2 + 2\,\left\|w - \tfrac{1}{2}(u+v)\right\|^2. \tag{1}$$

2. [2,5] Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. Para quaisquer $p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 = \sum_{k=0}^{2} p_kX^k$ e $q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2 = \sum_{k=0}^{2} q_kX^k$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, demonstre que $\langle p(X), q(X)\rangle := \sum_{k=0}^{2}\sum_{\ell=0}^{2} \dfrac{p_kq_\ell}{1+k+\ell}$ define um produto interno sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

1,0

3. [2,5] Considere os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_N$, e $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

0,7 *i)* Mostre que

$$[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N]^2 \le [a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2]\,[b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_N^2] \tag{2}$$

0,0 *ii)* Se $w_1, w_2, \ldots, w_N$ forem números reais estritamente positivos, mostre que

$$[w_1a_1b_1 + w_2a_2b_2 + \cdots + w_Na_Nb_N]^2 \le [w_1a_1^2 + w_2a_2^2 + \cdots + w_Na_N^2]\,[w_1b_1^2 + w_2b_2^2 + \cdots + w_Nb_N^2]$$

0,3 *iii)* Se $w_1, w_2, \ldots, w_N$ forem números reais estritamente positivos, mostre que

$$[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N]^2 \le [w_1a_1^2 + w_2a_2^2 + \cdots + w_Na_N^2]\left[\tfrac{1}{w_1}b_1^2 + \tfrac{1}{w_2}b_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{w_N}b_N^2\right]$$

0,0

4. [2,5] Uma matriz quadrada $[a_{ij}]$ de ordem n é **antissimétrica** quando $a_{ji} = -a_{ij}$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

0,0 *i)* Considere $\mathbf{K}_3$ o conjunto das matrizes antissimétricas em $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Munindo $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle \mathrm{M}, \mathrm{N}\rangle_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} := \mathrm{M}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{N}$, verifique que a base $\mathscr{B} := \{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3\}$ é um conjunto ortogonal, com

$$\mathrm{M}_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

0,0 *ii)* Determine $\mathbf{K}_3^{\perp}$.

0,0 *iii)* Considere a matriz $\mathrm{M} := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Recordando que $\mathscr{B}$ é uma base ortogonal para $\mathbf{K}_3$, calcule $\mathrm{proj}_{\mathbf{K}_3}(\mathrm{M}) = \mathrm{proj}_{\mathrm{M}_1}(\mathrm{M}) + \mathrm{proj}_{\mathrm{M}_2}(\mathrm{M}) + \mathrm{proj}_{\mathrm{M}_3}(\mathrm{M})$