UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROFESSOR: ÍTALO AUGUSTO OLIVEIRA DE ALBUQUERQUE

DISCIPLINA: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Lista de Exercícios - Integral de Superfície

1. Identifique a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 1-v^2)$ e encontre a equação da reta normal e do plano tangente a superfície em (0,1).

2. Encontre uma parametrização para as superfícies abaixo:

a. S: parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que fica acima do plano $z=\sqrt{2}$.
b. S: parte do cilindro $x^2+y^2=4$ que fica entre os planos $z=-2$ e $z=2-y$.
c. S: parte do plano $x+y+z=2$ no interior do cilindro $x^2+y^2=1$.
d. S: é o cone gerado pela semireta $z=2y, y \geqslant 0$ girada em torno do eixo z.

3. Calcule a área das superfícies abaixo:

a. S: é a parte do cilindro $x^2+y^2=4$, com $0 \leqslant z \leqslant 5$, delimitada pelos semiplanos $y=2x, y=x$ e $x \geqslant 0$.
b. S: é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ no interior do cone $3z^2=x^2+y^2, z>0$.
c. S: é a parte do cone $z^2=x^2+y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2 \leqslant 2y$ e fora do cilindro $x^2+y^2 \leqslant 1$.
d. S: é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que está entre os planos xy e $2z-y=2$.

4. Calcula a massa de uma lâmina, que tem a forma da parte do plano $z=x$ recortada pelo cilindro $(x-1)^2+y^2=1$ cuja densidade no ponto (x,y,z) é proporcional à distância desse ponto ao plano xy.

5. Abaixo, determine o momento de inércia em relação a superfície S:

a. S: parte do cone $z^2=x^2+y^2$ entre os planos $z=1$ e $z=2$, sendo a densidade constante.
b. S: é a parte do cone $z^2=x^2+y^2, z \geqslant 0$ em relação ao eixo z, de altura h que está no primeiro octante.
c. S: é uma superfície homogênea, de massa M e equação $x^2+y^2=R^2, R>0$, com $0 \leqslant z \leqslant 1$, em torno do eixo z.

5. Calcule o fluxo do campo vetorial pedidos abaixo:

a. $F=(x-y-4, y, z)$ através da semi-esfera superior $x^2+y^2+z^2=1$, com campo de vetores normais $\mathbf{n}$ tal que $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{k}>0$.
b. $F=(0,0,-z)$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ fora do cilindro $x^2+y^2=1$ com $\mathbf{n}$ apontando para fora.

c. $F = (-x, -y, 3y^2z)$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado no primeiro octante entre $z = 0$ e $z = 5 - y$ com orientação normal que aponta para o eixo z.

6. Calcule $\displaystyle\iint_S F \cdot \mathbf{n} dS$, onde:

a. $F = (xze^y, -xze^y, z)$ e S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante com orientação para baixo.
b. $F = (-x, 0, 2z)$ e S é a fronteira com a região limitada por $z = 1$ e $z = x^2 + y^2$, com $\mathbf{n}$ exterior a S.

7. Seja Q uma carga elétrica localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica F exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição X é $\dfrac{\varepsilon q Q}{\|x\|^3} X$, onde ε é uma constante. Considere a força por unidade de carga:

$$E(X) = \frac{1}{q} F(X) = \frac{\varepsilon Q}{\|x\|^3} X = \frac{\varepsilon Q(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

chamada de campo elétrico de Q. Mostre que o fluxo elétrico de E é igual a $4\pi\varepsilon Q$, através de qualquer superfície fechada S que contenha a origem, com normal $\mathbf{n}$ apontando para fora de S. Essa é a Lei de Gauss para uma carga simples.

8.Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\nabla^2 f = x^2 + y^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 1/3$. Calcule $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS$, onde S é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $z = 0$, com a normal apontando para fora de S.

9. Sejam $F = (\dfrac{-cy}{2} + ze^x, \dfrac{cx}{2} - ze^y, xy)$ com $c > 0$, e S uma superfície aberta união do hiperbolóide folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{c}$ com o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0$. Calcule o valor c sabendo que $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n} dS = -6\pi$ com $\mathbf{n}$ apontando para fora de S.

10. Calcule a circulação do campo $F = (y, xz, z^2)$ ao redor da curva C fronteira do triângulo cortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

11. Calcule o trabalho realizado pelo campo $F = (x^x + z^2, y^y + x^2, z^z y^2)$ quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante, na direção anti-horário quando vista por cima.

12. Calcule $\displaystyle\int_C F dr$ onde $F = (-2y + e^{\sin x}, -z + y, x^2 + e^{\sin x})$ e C é a curva interseção da superfície $z = y^2$ com o plano $x + y = 1$, orientada no sentido de crescimento de y.