第 2 章

求積法

求積法

微分方程式は世の中の現象をモデル化したものであること, 微分方程式を解くことで現象を解析できることは前章で理解できたであろう. ここからの章では微分方程式の具体的な解を考えていく. 四則演算や有限回の不定積分を用いることで解を求めることになるが, そのような方法を**求積法**という.

2.1 1 階常備分方程式 (変数分離形, 同次形)

まず考えやすい 1 階の微分方程式について議論していく.

A) 変数分離型

変数分離型

次のような形の微分方程式を**変数分離型**の微分方程式という.

【変数分離型】

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

変数分離型の解法[*1]は次のようになる.

【解法】

$$f(x)dx = \frac{1}{g(y)}dy \tag{2.2}$$

両辺積分して,

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)}dy + C \tag{2.3}$$

となる. ただし, 積分定数を C とする.

さて, では変数分離型の簡単な例題を考えてみよう.

[*1] この解放は非常に簡単で単純なものと感じるものも多いであろうが, 解の存在定理等の議論の際に変数分離型の補助方程式が活躍することになるの.

例 1 次の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} = 4xy^2 \tag{2.4}$$

解 与式を

$$\frac{dy}{y^2} = 4xdx \tag{2.5}$$

と変数分離して, 両辺を積分すると,

$$-\frac{1}{y} = 2x^2 + C_0 \tag{2.6}$$

となるので, C_0 が任意定数であることに注意して,

$$y = \frac{1}{C - 2x^2} \tag{2.7}$$

ただし, C は任意定数とする. □

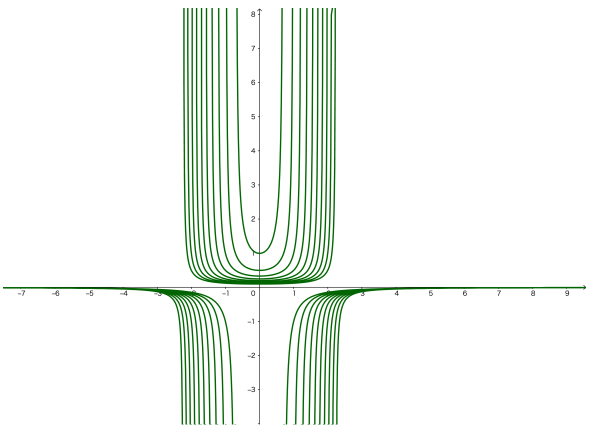

図 2.1　例 1 の解のグラフ ($0 \leq c \leq 10$) である.

ここで, 例 1 の微分方程式の解のグラフを示す.
このように, 一般解は無数の**曲線群**を表す。これを**解曲線**という。このうちの一つの曲線が特殊解となる.

曲線群

解曲線

　さて, 例 1 の微分方程式は明らかに $y = 0$ という定数関数も解であるが, 一般解で任意定数をどのように取っても現れてこない. ならば, 「特異解として解答に記述するべきではないか」と考えたものも多いだろう. しかし, 結論から言えば定数関数 $y = 0$ をわざわざ書く必要はない. これは $C \to \infty$ という極限状態に対応する解であるからである. 例えば, 任意定数を入れ替えて,

$$y = \frac{C}{1 - 2Cx^2} \tag{2.8}$$

のように一般解を表現すれば, $C = 0$ で $y = 0$ が表現でできるが, 今度は逆に $y = -\frac{1}{2x^2}$ が表現できなくなる. 簡単に言えば, 任意定数は実数直線を無限遠点で 1 つに繋いだ 1 次元多様体[*2]上に存在しているのである. このような背景のもとで, 任意定数が ∞ のときの解は例外扱いせず, わざわざ書き添えないことの方が多い.

[*2] 複素数まで拡張すれば,Riemann 曲面ともいえる.

B)　同次型

同次形

次のような形の微分方程式を**同次形**の微分方程式という.

【同次形】

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.9}$$

同次形の微分方程式の解き方は次のようである.

【解法】

$y = xu$ とおけば,

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \tag{2.10}$$

すなわち,

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u) \tag{2.11}$$

よって,

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{2.12}$$

と変数分離形に帰着することができるので, あとは変数分離形の解き方に従って解いていけば良い.

では, 変数分離形の簡単な例題を考えてみよう.

例 1 次の微分方程式を解け.

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.13}$$

解 与式の両辺を x で割ると,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{2.14}$$

となり, これは同次形である.$y = ux$ とおくと, 先の解法に従えば,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{x} \tag{2.15}$$

これは変数分離形であるので,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \frac{1}{x}dx \tag{2.16}$$

と変数分離して, 任意定数 C_0 を用いれば,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}du = \log|x| + C_0 \tag{2.17}$$

よって,

$$\log\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \log|x| + C_0 \tag{2.18}$$

従って, 任意定数 C を用いて,

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx \tag{2.19}$$

ゆえに,

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 \tag{2.20}$$

□

ここで, この例 1 の解が $y =$ のように y について解くことができないことに注意されたい. このように微分方程式の解は必ずしも y について整理することができないことが多々あることは後々の議論のためにも念頭に置いておいてほしい.

さて, では同次形の微分方程式の応用をいくつか考えてみよう.

【同次形の応用１】

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) \tag{2.21}$$

この同次形の微分方程式の応用については以下のようにして解くことができる.

【解法】

f の括弧内の分母, 分子を x で割ることにより,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right) \tag{2.22}$$

と変形すれば, 同次形に帰着することができる.

ここで, f の引数の分母・分子が x,y の 2 次以上の同じ次数の同次多項式の場合でも同様に変形することで同次形に帰着できることに注意されたい.

では, 次の場合はどうであろうか.

【同次形の応用２】

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2.23}$$

この同次形の微分方程式の応用については以下のようにして解くことができる.

【解法１】(連立方程式の解が存在する時)

連立一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad , \quad a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{2.24}$$

の解が存在するときそれらを x_0, y_0 とすると,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)}{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)}\right) \tag{2.25}$$

と変形することができて, $X := x - x_0$, $Y := y - y_0$ とすれば,

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) \tag{2.26}$$

と同次形に帰着することができる.

【解法２】(連立方程式の解が存在しない時)
連立一次方程式

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \tag{2.27}$$

の解が存在しないときは, $a_1 x + b_1 y$ と,$a_2 x + b_2 y$ が比例関係にあるということ.
すなわち比例定数を k としたときに

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \tag{2.28}$$

が成立し,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{2.29}$$

となる. ここで, $z = a_2 x + b_2 y$ とおくと,

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx} \tag{2.30}$$

となり, もとの微分方程式は

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right) \tag{2.31}$$

と変数分離形に帰着することができる.

なお, 上記の解法は $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ の形の微分方程式の解法にもなることは明らかである.

このように一見, 多少複雑にも見える方程式も適切な変数変換を用いて, 変数分離形や同次形に帰着させて解くことができる.

では, 同次形の応用に関する簡単な例題を考えていこう.

例 1　次の微分方程式を解け.

$$(2x - y - 1)\frac{dy}{dx} = 4x - 2y + 1 \tag{2.32}$$

解 与式より,2 直線 $2x - y - 1$, $4x - 2y + 1$ は平行であるので, 連立方程式の解は存在しない. ゆえに, 先の解法より,$z = 2x - y$ と変数変換を行えば,

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} \tag{2.33}$$

となるので,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-3}{z - 1} \tag{2.34}$$

が得られる. これは変数分離形なので,

$$(z-1)dz = -3dx \tag{2.35}$$

両辺積分をして,

$$\int (z-1)dz = \int -3dx$$
$$\frac{(z-1)^2}{2} = -3x + C_0 \tag{2.36}$$

$z = 2x - y$ を代入すれば,

$$\frac{(2x-y-1)^2}{2} = -3x + C_0$$
$$(2x-y)^2 - 2(2x-y) + 6x = C. \tag{2.37}$$

ただし, C_0 および C は任意定数とする.

□

例 2　次の微分方程式を解け.

$$x\frac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}} \tag{2.38}$$

解 (省略)

C)　1 階線形微分方程式

前節ではどちらかと言えば具体的な微分方程式についてその解き方を考えた. さてここからはより抽象度の高い微分方程式を扱っていく.

次のような方程式が未知関数について 1 次式となっているものを *1* **階線形微分方程式**という.

1 **階線形微分方程式**

【1 階線形微分方程式】

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.39}$$

1 階線形微分方程式には, 大きく分けて 2 つの解き方が存在する. まず, よく用いられる**定数変化法**と呼ばれる解法について考えていく.

定数変化法

【解法】(定数変化法)

まず, 右辺を 0 とおいた斉次方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2.40}$$

に変数分離形の解法を用いれば, 任意定数 C_0 を用いて

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + C_0 \tag{2.41}$$

$$\therefore \log y = -\int P(x)dx + C_0 \tag{2.42}$$

新たな任意定数 C_1 を用いて

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx} \tag{2.43}$$

次に, この任意定数 C を x の関数, すなわち

$$y = C(x)_1 e^{-\int P(x)dx} \tag{2.44}$$

として, もとの方程式に代入すると,

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dc}{dx} + \left(-Pe^{-\int P(x)dx} + Pe^{-\int P(x)dx}\right)C_1 = Q(x) \tag{2.45}$$

$$\therefore e^{-\int P(x)dx}\frac{dC_1}{dx} = Q(x) \tag{2.46}$$

これにより,　任意定数 C を用いて,

$$C_1 = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C \tag{2.47}$$

と C_1 を求めることができるので, もとの微分方程式の一般解は

$$y = \left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C\right)e^{-\int P(x)dx} \tag{2.48}$$

となる.

同伴方程式

以上の議論より, 1 階線形微分方程式の一般解は特殊解に対応する斉次方程式 (**同伴方程式**という) の一般解を加えたものとなっている. これは後の章で一般化するが, 線形の方程式の特徴である.

積分因子

さて, 1 階線形微分方程式の別の解法を考えたい. **積分因子**と呼ばれる便利な因子をかけることによる解法である.

【解法】(積分因子を用いた解法)
もとの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.49}$$

の両辺に積分因子 $e^{\int P(x)dx}$ をかけると,

$$\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{2.50}$$

となる. ここで左辺に注目すると, 左辺は $ye^{\int P(x)dx}$ を微分した形になっているので, 両辺を積分して

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right) \tag{2.51}$$

と一般解を求めることができる.

なお, 積分因子内の原始関数 $\int P(x)dx$ は適当に一つ選べば良い. これはどの原始関数を選ぼうが一般解の任意定数が変わるだけだからである.

では, 1 階線形微分方程式の例について考えていこう.

例 1　次の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2} \tag{2.52}$$

解 (積分因子による解法) 与式の両辺に積分因子 $e^{\int 2xdx}$ をかけると,

$$\left(\frac{dy}{dx} + 2xy\right)e^{\int 2xdx} = 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx} \tag{2.53}$$

原始関数 $e^{\int 2xdx}$ として, e^{x^2} を選ぶ[*3]と,

$$(ye^{x^2})' = 2xe^{-x^2} \cdot e^{x^2} \tag{2.54}$$

$$ye^{x^2} = \int 2xdx \tag{2.55}$$

$$ye^{x^2} = x^2 + C \tag{2.56}$$

$$\therefore y = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2} \tag{2.57}$$

ただし, C は任意定数とする.

□

解 (定数変化法による解法) 与式の同伴方程式は

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \tag{2.58}$$

である. 変数分離してこの同伴方程式の一般解を求め, 元の方程式の特殊解を足すことで元の方程式の一般解を求めることができる.(以下略)

□

D) Bernoulli 型

ではここで, 1 階線形微分方程式に帰着可能な微分方程式のひとつであるBernoulli(ベルヌーイ)型の微分方程式について考える.

以下のような形の微分方程式を *Bernoulli* **型**の微分方程式という.

Bernoulli **型**

【Bernoulli 型】

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \tag{2.59}$$

Bernoulli 型の微分方程式は以下のようにして解くことができる.

【解法】(Bernoulli 型)

$$u(x) := y^{1-\alpha} \tag{2.60}$$

[*3] 先にも断ったが, ここで原始関数をどのように選ぼうと (積分定数 C をどのようにとろうと) 一般解の任意定数が変わるだけである. よってあくまでも, 考えやすいように $C = 0$ の場合を考えただけである.

とおくと,

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \tag{2.61}$$

なので, 式 (2.59) の両辺を $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ 倍数すると,

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)y^{1-\alpha}P(x) = (1-\alpha)Q(x) \tag{2.62}$$

となるので, u を用いれば,

$$u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x) \tag{2.63}$$

と u に関する 1 階線形微分方程式に帰着することができる.
　なお,$\alpha > 0$ の時は, 定数関数 $y = 0$ も解となることに注意する.

　さて, ここで注意したいのは別に α は整数でなくても良いということである. これは具体的な計算を追えばすぐにわかるであろう.
では, Bernoulli 型の微分方程式の例題を考えていこう.

例 1　次の微分方程式を解け.

$$y' + \frac{y}{x} = x^2y^3 \tag{2.64}$$

解　典型的な Bernoulli 型の微分方程式で,$\alpha = 3$ のときなので,(以下省略)

例 2　次の微分方程式を解け.

$$xy' + y = x\sqrt{y} \tag{2.65}$$

解　典型的な Bernoulli 型の微分方程式で,$\alpha = \frac{1}{2}$ のときなので,(以下省略)

E)　完全微分形

　さて, ここからは完全微分形と呼ばれる微分方程式に関して議論を進めていく.
一般に正規形の方程式 $y' = f(x,y)$ は形式上

$$f(x,y)dx - dy = 0 \tag{2.66}$$

全微分方程式

と表すことができる. これをより一般化した以下のような方程式を**全微分方程式**という.

【全微分方程式】

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.67}$$

　さて, その中でも

$$P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{2.68}$$

完全微分形
完全微分方程式

の形をしているものを**完全微分形**または**完全微分方程式**という.

ここで, 完全微分形の一般解は

$$F(x,y)=C \tag{2.69}$$

と表現できることが知られている. ただし, C を任意定数とする.

いきなり一般解がこのように記述できると言われて困惑するかもしれないが, 直感的イメージを掴むのは容易い. 今, 全微分形式で関数 $F(x,y)$ を表現すれば,

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy \tag{2.70}$$

となることはすでに解析学で学習済みであろう[*4]. さて, 完全微分形とは,

$$P(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\qquad Q(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{2.71}$$

が成立するような微分方程式であるので, 全微分方程式の定義式と比較すれば,

$$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2.72}$$

より, 完全微分形の一般解は

$$F(x,y)=C \tag{2.73}$$

となることがわかる.

さてここで, 次の重要な定理を考えたい.

> 定理 2.1 【完全微分形の判定条件】
>
> $$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \text{ が完全微分形である} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{2.74}$$

重要な定理といったものの, これは先に提示した完全微分形の条件

$$P(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\qquad Q(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{2.75}$$

と必要十分条件である.$P(x,y)$ を y で偏微分, $Q(x,y)$ を x で偏微分すれば定理 2.1 が導出できる. ここで注意したいのは偏微分の順序交換を認めているということである. これは関数 $F(x,y)$ が C^2 級であることから十分条件と認められる.

もう少し定理 2.1 に関して考えていきたい. 定理 2.1 は完全微分形の判定条件であったが, 逆にこの条件が成立すれば,

$$F(x,y)=\int_C (P(x,y)dx+Q(x,y)dy) \tag{2.76}$$

によって, 局所的に積分 $F(x,y)$ が確定することとなる. ここで, C は定点 (a,b) と (x,y) を結ぶ任意の積分路であり, 定理 2.1 はこの値が積分路の選び方に依存しないことを保証するものである. 例えば, 異なる 2 つの積分路 C_1, C_2 に対して, 行きは C_1 で帰りは C_2 を通るような閉路 C_1-C_2 を考え, 閉路が囲む領域を D とすれば,*Green* **の定理**[*5] より

Green の定理

[*4] 不安な読者はいま一度, 解析学の教科書を参照するしてほしい. なお, 個人的な解析学のおすすめの図書としては, 松坂和夫先生の解析入門シリーズ, 杉浦光夫先生の解析入門を紹介したい. 著者自身の野望としては, 本資料 (微分方程式) の作成がある程度終わったら, 次は解析学の資料を作成していこうと考えているので, そちらも完成次第適宜参照してほしい.

[*5] 【Green の定理】
閉曲線 C と閉曲線で囲まれた領域 D を考える.D 上で C^1 級の任意の関数 (P(x,y), Q(x,y)) に関して以下が成立する.

$$\oint (P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)-\int_{C_2}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)\\
&\quad=\oint_{C_1-C_2}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=0 \qquad (2.78)
\end{aligned}$$

となる. また, 定点 (a,b) と (x,y) を結ぶ正方形状の積分路 C_1, C_2 に沿う線積分を考えると,

$$F(x,y)=\int_a^x P(t,b)dt+\int_b^y Q(x,t)dt \tag{2.79}$$

$$F(x,y)=\int_b^y Q(a,t)dt+\int_a^x P(t,y)dt \tag{2.80}$$

をそれぞれ x, y で偏微分すると, 完全微分形の定義で用いた式

$$P(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\qquad Q(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \tag{2.81}$$

がそれぞれ得られる. ここで, (a,b) は定義域内から例えば,(c,d) のような別の点に変えても F は定数

$$\int_{(a,b)}^{(c,d)} Pdx+Qdy \tag{2.82}$$

だけ変わるのみで, これは完全微分形の微分方程式を解く際には任意定数 C に吸収される. すなわち, 積分の始点は我々にとって都合の良いように選ぶことができる. 定義域内に原点が含まれる場合は原点を始点とすることが多い.

少し冗長になってしまったがここで完全微分形の微分方程式の例題を考えていこう.

例 1　次の微分方程式を解け.

$$(2xy+3y^2)\frac{dy}{dx}+2x=-y^2 \tag{2.83}$$

解 与式を変形して,

$$(2x+y^2)dx+(2xy+3y^2)dy=0 \tag{2.84}$$

となる. ここで,

$$P(x,y)=(2x+y^2),\qquad Q(x,y)=(2xy+3y^2) \tag{2.85}$$

とすれば,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2y \tag{2.86}$$

となるので,　この微分方程式は完全微分形である. よって,

$$F(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy \tag{2.87}$$

より,

$$\begin{aligned}
F(x,y)&=\int_0^x 2xdx+\int_0^y (2xy+3y^2)dy\\
&=x^2+xy^2+y^3+C_0 \qquad (2.88)
\end{aligned}$$

よって, 一般解は任意定数を C として

$$x^2+xy^2+y^3=C \tag{2.89}$$

□

例 2 次の微分方程式を解け.

$$(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0 \tag{2.90}$$

解 与式で

$$P(x,y) = (y + e^x \sin y), \qquad Q(x,y) = (x + e^x \cos y) \tag{2.91}$$

とすれば,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1 + e^x \cos y \tag{2.92}$$

となるので, この微分方程式は完全微分形である. よって,

$$F(x,y) = \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy \tag{2.93}$$

より,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x 0dx + \int_0^y (x + e^x \cos y)dy \\ &= xy - e^x \sin y + C_0 \end{aligned} \tag{2.94}$$

よって, 一般解は任意定数を C として

$$xy - e^x \sin y = C \tag{2.95}$$

□

さて, 完全微分方程式においてそれ自体は完全微分形ではないが, 適当な関数 $\mu(x,y)$ をかけることにより,

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{2.96}$$

が完全微分形になることがある. このような関数 $\mu(x,y)$ を**積分因子**という. 積分因子であるための条件は **積分因子**

定理 2.2 【積分因子の判定条件】

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)P(x,y)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right)}{\partial x} \tag{2.97}$$

この関係式より,μ を求めることは, もとの方程式を解くよりも難しくなるが, 特別な形の積分因子が存在する時には, 解法の手段になりうる.

例えば, 1 変数 x だけの積分因子 $\mu(x)$ が存在する条件は

$$\mu(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \mu(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\mu'(x) \tag{2.98}$$

従って,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} \tag{2.99}$$

の右辺が x のみの関数となればよい.1 階線形微分方程式で用いた積分因子はこれの特別な場合だった.　積分因子に関する例題を考えていこう.

> 例 1　次の微分方程式を解け.
>
> $$(3xy^2 + x^2)\frac{dy}{dx} + 4xy + 3y^2 = 0 \tag{2.100}$$

解 与式で

$$P(x, y) = (4xy + 3y^2), \qquad Q(x, y) = (3xy^2 + x^2) \tag{2.101}$$

として, これに積分因子 $\mu(x)$ をかけると, 完全微分形の条件は

$$\frac{\partial \mu(x)P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x)Q(x, y)}{\partial x} \tag{2.102}$$

より,

$$(3xy^2 + x^2)\mu' + (3y^2 + 2x)\mu = (4x + 9y^2)\mu \tag{2.103}$$

よって,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x} \tag{2.104}$$

となるので,

$$\log \mu = 2 \log x \tag{2.105}$$

$$\therefore \mu = x^2 \tag{2.106}$$

が積分因子の一つであると分かる. よって, 一般解は完全微分形の解法に基けば,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x \mu(x)P(x, 0)dx + \int_0^y \mu(x)Q(x, y)dy \\ &= \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2(3xy^2 + x^2)dy \\ &= x^3y^3 + x^4y + C \end{aligned} \tag{2.107}$$

ただし, 積分定数を C とする.

□

F)　微分求積法

そのままでは求積できないが, $p = \frac{dy}{dx}$ を独立変数とみなし, 従属変数 x について解くことで解を求めることができるものが存在する. このような変数変換を**接触変換**という. また, 独立変数 p の方程式を解く際に, 両辺で x で微分するので, この解法を**微分求積法**という. 微分求積法の中でも代表的な 2 つの方程式を紹介する.

接触変換

微分求積法

まず紹介するのは *Lagrange* **型の方程式**である. この方程式は接触変換によってうまく解くことのできる方程式の代表例となっている.

Lagrange **型の方程式**

以下のような形の微分方程式を *Lagrange* **型の方程式**という.

【Lagrange 型の方程式】

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{2.108}$$

Lagrange 型の微分方程式は以下のようにして解くことができる.

【解法】(Lagrange 型の方程式)
　Lagrange 型の方程式は接触変換 $p = \frac{dy}{dx}$ を用いることでうまく解くことができる.
先の式の両辺を x で微分すると,

$$p = f(p) + (xf'(p) + g'(p))\frac{dp}{dx} \tag{2.109}$$

従って,

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + f'(p)x = -g(p) \tag{2.110}$$

と p を独立変数とする x の 1 階線形微分方程式に帰着することができる.

次にこの Lagrange 型の方程式の特別な場合である *Clairaut* **型の微分方程式**を紹介する. 以下のような形の微分方程式を Clairaut 型の微分方程式という.

Clairaut **型の微分方程式**

【Clairaut 型の方程式】

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{2.111}$$

Clairaut 型の微分方程式は以下のようにして解くことができる.

【解法】(Clairaut 型の方程式)
Clairaut 型の方程式は接触変換 $p = \frac{dy}{dx}$ を用いることでうまく解くことができる.
先の式の両辺を x で微分すると,

$$p = p + xp' + f'(p)p' \tag{2.112}$$

従って,

$$(x + f'(p))p' = 0 \tag{2.113}$$

で一般解は $p' = 0$ から得られる $p = C$ をもとの方程式に代入して得られる直線属 $y = Cx + f(C)$ となる.

G)　Riccati の方程式

　この章では「求積法」という題名のもとで, 求積できる方程式のみを扱ってきた. その解き方は多種多様で, 一般的な解法が存在しないことがそれとなく伝わってきたであろう. 実は, 求積できない方程式の方が遥かに多いのである. ここでは, 求積できない方程式の代表例とし

Riccati **の方程式**

て,*Riccati* **の方程式**を扱っていく.

以下のような形の微分方程式を *Riccati* **の方程式**という.

【Riccati の方程式】

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{2.114}$$

Riccati の微分方程式は以下のようにして解くことができる.

【解法】(Riccati の方程式)

Riccati の方程式は求積法で解くことができないが, 特殊解が一つ分かれば解くことができる.

解の 1 つが $y = \eta(x)$ だったとすると,Riccati の方程式は

$$\begin{aligned}(y-\eta)' + &P(x)(y-\eta) + Q(x)(y^2-\eta^2) = 0\\ &\iff (y-\eta)' + P(x)(y-\eta) + Q(x)((y-\eta)^2 + 2y\eta - 2\eta^2) = 0\\ &\iff (y-\eta)' + (P(x) + 2Q(x)\eta)(y-\eta) = -Q(y-\eta)^2 \end{aligned} \tag{2.115}$$

となり, $(y-\eta)$ に関する Bernoulli 型である.

$$u(y) = (y-\eta)^{-1} \tag{2.116}$$

と置くと,

$$\frac{du}{dy} = -(y-\eta)^{-2}(y-\eta)' \tag{2.117}$$

であるので, 先の方程式に対して, 両辺 $-(y-\eta)^{-2}$ すれば,

$$u' - (P + 2Q\eta)u = Q \tag{2.118}$$

と 1 階線形に帰着することができる.

ここからは Riccati の方程式の例題を考えていく.

例 1　次の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} + 2y^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \tag{2.119}$$

解　$y = \frac{1}{x^2}$ が解であることを用いれば, Riccati 型の方程式として 1 階線形の微分方程式に帰着させていく.(以後省略)

2.2　2 階線形微分方程式

2 階線形微分方程式とは, 未知関数の導関数を 2 階まで含みかつ, それらについて線形である以下のような方程式を指す.

【2 階線形微分方程式】

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x) \tag{2.120}$$

なんとなくイメージはできるだろうが, 2 階の微分方程式は 1 階の場合に比べて求積できるものは減ってくる. ここでは, 数少ない求積可能な 2 階の線形微分方程式について扱っていく.

まず, 具体的な求積法の前に 2 階線形微分方程式の一般的なことを考えたい.[*6]2 階線形微分方程式は, もし一般解が求まるのであれば, 一般に 2 つの任意定数を含む. これは 1 階の場合にも述べたように, 直感的には一般解を求めるまでに 2 回積分することが必要となってくることから理解できるだろう. 特に線形の場合には通常, 一般解は以下のような形で与えられる.

$$y=c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)+\phi(x) \tag{2.121}$$

ここで, c_1, c_2 は任意定数, $\phi(x)$ は式 (2.120) の特殊解で, $\psi_1(x), \psi_2(x)$ は対応する斉次 (同次) 方程式[*7]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0 \tag{2.122}$$

の 1 次独立な特殊解である. ここでの 1 次独立はもちろん線形代数と同様な意味で用いており,$c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)$ が恒等的に 0 となるような定数 c_1, c_2 が存在しないことを示すものである.[*8]

ここからは具体的な求積法に移ろう.
必ず求積できるものとして係数が全て定数である

$$y''+ay'+by=0 \tag{2.123}$$

が挙げられる. この方程式の具体的な解法としては, 指数関数 $y=e^{\lambda x}$ の解の形を仮定するものである. 解の形を仮定するなんて無茶苦茶ではないかと感じる者もいるかもしれないが, これは後に詳しく説明するが, さして問題はない, というよりむしろ一般的な微分方程式としては, オーソドックスな解き方である. 長くなりそうなので詳しくはこの章の最後に回そう.

さて, 潔く指数関数 $y=e^{\lambda x}$ を式 (2.123) の左辺に代入してみると,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+a\frac{d}{dx}+b\right)e^{\lambda x}=(\lambda^2+a\lambda+b)e^{\lambda} \tag{2.124}$$

が得られる. これが 0 となることから,

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{2.125}$$

となる. これを式 (2.123) の**特性方程式**という. なお, これを λ の関数とみた　**特性方程式**

$$\Psi(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b \tag{2.126}$$

を式 (2.123) の**特性多項式**という.　**特性多項式**

さて, これらより $e^{\lambda x}$ が式 (2.123) の解となるためには λ が特性方程式 (2.125) であること

[*6] もちろん後の章では今から述べるようなことを n 階の微分方程式の場合に拡張して示す.

[*7] もとの微分方程式で非斉次項 $f(x)$ を 0 とした方程式のこと.

[*8] このような解は解空間の基底をなすと言う. また,$\psi_1(x), \psi_2(x)$ が式 (2.122) の解であるならば, それらの線形和は再び式 (2.122) の解となることは線形性から瞬時に理解することができる. 逆に, 式 (2.122) の任意解がそのように表されると言うことはその解空間が 2 次元であることを意味する.

が必要かつ十分であることが容易にわかるであろう. ならば,2 根の状態により解が変わってくるのも想像に難くない.
実際、解の基底 (基本解) は

(1)　特性根 α, β が実数かつ相異なるとき,

$$e^{\alpha x}, e^{\beta x} \tag{2.127}$$

(2)　特性根が重解 α のとき,

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x} \tag{2.128}$$

(3)　特性根が共役複素根 $\alpha \pm i\beta$ のとき,

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{2.129}$$

となる.

(1) の場合は特に問題はないだろうが, (2),(3) の場合について少し補足をしたい.

まず, (2) の場合についてだが,(1) の場合と同様にして単純に α を求めて基本解を $e^{\alpha x}$ のみとしてしまうと 2 階微分方程式の解の自由度を考えれば 1 つ基本解が不足していることがわかる. そこで, 方程式の係数をほんの少しだけ変化させて重根を持たないものとした上で, その解の基底を

$$e^{\alpha x}, \quad \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{\beta - \alpha} \tag{2.130}$$

のように選び,$\beta \to \alpha$ の極限を考えてやれば,

$$\frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\alpha x}(e^{(\beta-\alpha)x} - 1)}{\beta - \alpha} \longrightarrow xe^{\lambda x} \tag{2.131}$$

と, もう一つの基本解を求めることができる.

(3) の場合については,

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x) \tag{2.132}$$

をそれぞれそのまま基本解として用いてもよかったのだが, そのためには解空間の係数体を複素数体にまで拡張する必要があり, 複素数値解まで考慮せねばならず、非常にめんどくさい. そこで, 適当な 1 次結合を考えることで $\mathbb{R}$ 上 1 次独立となるような関数を探し出してきたと言うわけである.

以上の議論より定数係数の 2 階線形微分方程式の解き方は以下のようにまとめることができる.

【解法】(定数係数の 2 階線形微分方程式)
定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.133}$$

の特性方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{2.134}$$

の解, すなわち特性根を α, β とすると, 一般解は

(1)　特性根 α, β が実数かつ相異なるとき,

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{\beta x} \tag{2.135}$$

(2)　特性根が重解 α のとき,

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\alpha x} \tag{2.136}$$

(3)　特性根が共役複素根 $\alpha \pm i\beta$ のとき,

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{2.137}$$

で表される.

さて, 定数係数の 2 階線形微分方程式は解の形として $e^{\lambda x}$ を仮定して解き進めていくと不思議なことにうまく解けてしまうというものであった. 前述したが, 解の形を仮定するなどなんてやや乱暴に思えるかもしれないものでも, ある意味微分方程式のオーソドックスな解法であるとはいったいどういうことであろうか. 微分方程式を解くということについて少し考えたい.

一般に微分方程式が与えられた時にその解を見つける作業は非常に難しい. この求積法の章で扱ったタイプの微分方程式は解き方がある程度体系的にまとめられているが, このような微分方程式は非常に稀であり, 解を見つけるための一般的な方法論があるわけでもない. なんなら解が見つからないこともよくあるものだ.

これに対して, もし解の候補が見つかった時, それが解であるかどうかは誰でも容易に確かめることができる. その解の候補を微分方程式に実際代入してみて, 全ての変数の値に対してその方程式が成立するかどうかを確認すれば良い. この作業は微分さえ実行できれば, 誰でも機械的に行うことができる. 与えられた微分方程式を解けというような問題に対して, 自分が出した解があっているかどうかは代入によって確認することができる. 言い換えれば, 誤った答えを書いて満足することはありえない (そもそも解けないものは仕方ないが) のである.

以上のことを考えれば, 微分方程式の解き方として以下のようなことが考えられる.

(1)　まず微分方程式を眺めて, 直感的に解になりそうなものを考え, 解の候補を作る
(2)　その解の候補を代入することで本当にそれが解になっているか確かめる.

多くの場合は上手くいかないだろうが, 何回か試すうちにもしかしたら本当に解が出てくるかもしれない.　これは一般的な解法が存在しない微分方程式において非常に強力な解くための手法であると言えよう.

このような考えのもとで先の場合は解の形を仮定して解き進めたのである. なぜ, $e^{\lambda x}$ と仮定したか, それは指数関数 $e^{\lambda x}$ の特徴的な性質

$$\frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \tag{2.138}$$

に尽きるであろう.

また, 解の候補を考える時にはいくつかの未知定数を含んでおくようにするとよい.　いくつかの未知定数を含んでおくことで, 未知定数を調節することにより本当の解に辿りつく可能性を高くすることができる.

微分方程式の解き方を公式のように暗記しても全く面白くない. 自分の直感を研ぎすますことで, 解を見つけ出していってほしい.