第 1 章

微分方程式序論

1.1 微分方程式とは

一般に関数が未知である方程式を関数方程式というが, その中でも導関数が未知関数として含まれている方程式を**微分方程式**という. そもそも微分とは簡単に言えば平均変化率 (俗にいう変化の割合) の極限値で定義されており, 直感的なイメージとしては接線の傾きである. つまり導関数とはあるポイントでの瞬間の変化率を求める関数というのが最もわかりやすいだろう. ではそんな導関数を未知関数として含む微分方程式には一体どんな意味があるのだろうか. 微分方程式とやらに馴染むためにもいくつかの具体的な例を考えていきたい.

微分方程式

例 1. 今, あるシャーレの中に一定速度で分裂を繰り返して増殖していく大腸菌が存在するとする. 時刻 t における大腸菌の数を $x(t)$ で表すとしよう. 任意の時間変化 Δt の間の大腸菌の増殖数は $x(t+\Delta t)-x(t)$ と表すことができる. では今,Δt の間にその数が 2 倍になるとする. すると,

$$x(t+\Delta t)-x(t)=x(t) \tag{1.1}$$

と記述できる. だが, 一般的には, Δt の間にその数が 2 倍になるとは限らないであろう. 大腸菌はその元の数が多ければ多いほどその増加量は大きくなるに違いない. 換言すれば,$x(t+\Delta t)-x(t)$ が $x(t)$ に比例するのである. すなわち, 任意の正定数 a を用いれば,

$$x(t+\Delta t)-x(t)=a\Delta t\cdot x(t) \tag{1.2}$$

が成立する. 両辺を Δt で割れば,

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=ax(t) \tag{1.3}$$

と表すことができ, $\Delta t\to 0$ の極限を考えればこれはまさしく微分の定義であり, 慣習に従えば,

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t) \tag{1.4}$$

という方程式が得られる. これこそが大腸菌の増殖をモデル化した微分方程式である.

では次に物理学でよく知られた方程式である運動方程式の例を考えてみよう.

例 2. 運動方程式はニュートンの運動法則の第二法則「物体の運動の時間変化は物体に働く力に比例し, その力の方向に起こる」というものであった. 質量 m の物体に力 $F(t)$ を加えるとすると運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \tag{1.5}$$

という未知変数を $x(t)$ とした微分方程式となる.
ここで, 現実のバネの運動を考えたい. 理想的なバネの挙動 (つまり調和振動のことであるが) が永遠に振動を続けるのに対し, 現実世界のバネは次第に振幅が小さくなり, いつかは完全に停止する. このような状況を記述するためにバネ定数 k のバネに $-2hv$ の粘性抵抗が働く場合を考えてみよう. この場合の運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2h\frac{dx}{dt} \tag{1.6}$$

両辺を m で割り, 整理すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1.7}$$

という微分方程式が得られた. これが現実のバネに取り付けられた質点の運動を記述する運動方程式である.

ここで今得られた微分方程式と先の大腸菌の増殖モデルを表した微分方程式を比較してみると, 大腸菌の増殖モデルを表す微分方程式が未知関数の 1 階微分しか含まれていないのに対し, 振動減少を表す微分方程式には未知関数 $x(t)$ の 2 階微分が含まれている.

1 階の微分方程式

2 階の微分方程式

この意味において未知関数の 1 階微分しか含まれていない (2 階微分以上が含まれていない) ような微分方程式を ***1* 階の微分方程式**といい, 対して未知関数の 2 階微分以上が含まれていないような微分方程式を ***2* 階の微分方程式**という. これはもちろん n 階微分についても同じようなことが言える.

さて, 以上の 2 つの具体的な微分方程式の例を考えることで「微分方程式とは何か」という問いに対してある程度その答えの予想ができた者も多いだろう. あくまである一つの解釈を与えておくとすれば, 「微分方程式とはある時刻の状態と状態の変化率との関係を示す方程式」と言えるだろう. かつてヘラクレイトスが万物流転と言ったように, 我々の住む世界はあらゆるものが絶えず変化している. 多くの現象は先に示した例のようにある時点 (例えば現在) の状態をもとにして状態の変化率が決まる. すなわち多くの現象は微分方程式を用いて記述できるのである[*1].

このようなことを踏まえると, 微分方程式を学ぶ意義を少しは感じることができるのではなかろうか.

1.2 微分方程式の基礎

ではここから本格的数学的な議論に移っていく.

[*1] 実際, 他の身近な例を示すと, エアコンによる部屋の温度変化や, 天気予報, さらには交通渋滞なども微分方程式で記述できる.

A)　常微分方程式と偏微分方程式

x の 1 変数関数 $y(x)$ に関する微分方程式は一般に次のように書くことができる.

$$F(x, y, y', y", ..., y^{(k)}) = 0 \tag{1.8}$$

ただし,

$$y^{(k)} := \frac{d^k y}{dx^k} \tag{1.9}$$

とした．このような 1 変数関数に関する微分方程式を**常微分方程式**という．これに対し, 未知変数 z が多変数関数の時, すなわち $z = z(x, y, ...)$ のような時, x, y, z や偏導関数 $z_x, z_y, ..., z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ...$ との間に成り立つ関係式

常微分方程式

$$G(z_x, z_y, ..., z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ...) = 0 \tag{1.10}$$

を**偏微分方程式**という．なお,

偏微分方程式

$$z_x := \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_{xy} := \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

というようにした.

B)　線形性と正規形

未知関数とその導関数がすべて 1 次式である微分方程式を**線形**であるといい, そうでないものを非線形という.

線形

線形微分方程式と非線形微分方程式の例をいくつか挙げておこう.

例 1. 次の微分方程式は線形である.

$$y' = x + 2y - 1 \tag{1.11}$$

$$x^2 y'' + 3xy' - 6y = 0 \tag{1.12}$$

例 2. 次の微分方程式は非線形である.

$$(y")^3 + y' - x = 0 \tag{1.13}$$

$$yy' - xy - 3x^2 = 1 \tag{1.14}$$

これらの例についてなぜ線形 (非線形) なのかその理由を明確に言えるようにしてほしい.

次に, 正規形の方程式という概念に移る.
n 階の常微分方程式は一般に

$$F(x, y, y', y", ..., y^{(k)}) = 0 \tag{1.15}$$

と表されるのであった. これを $y^{(k)}$ について変形して,

$$y^{(k)} = f(x, y, y', y", ..., y^{(k-1)}) \tag{1.16}$$

の形で表されるとき, これを**正規形**といい, このような形で表せないものを**非正規形**という.

例 3. 先に例に挙げた大腸菌の自己増殖モデル

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \tag{1.17}$$

も未知関数の導関数について解かれた形になっているので正規形の方程式の一つである.

C)　微分方程式の解

微分方程式の解

微分方程式を解く

与えられた微分方程式を満たす関数, すなわち微分方程式の未知関数の部分に代入すると方程式が成立するような関数のことを**微分方程式の解**といい, その解を求めることを**微分方程式を解く**という.
ここで,

一般に　n 階常微分方程式には n 個の任意定数を持つ解が存在する[*2].

一般解

特殊解

特異解

ことが知られている. このような解をその方程式の**一般解**という. また, 一般解の n 個の任意定数に適当な値を代入することによって得られる解を**特殊解**という.

これに対し, 一般解に含まれないような解が存在する場合もある. このような解を**特異解**という.

例 1. 2 階の常微分方程式　$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$　において任意定数 A, B を用いて, 一般解は

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.18}$$

で表される. 例えば,$A = 1, B = 4$ とおいた

$$x = \cos\omega t + 4\sin\omega t \tag{1.19}$$

は特殊解である.

例 2. 常微分方程式 $(y')^2 + y^2 = 1$ の一般解は C を任意定数として,

$$y = \sin(x + C) \tag{1.20}$$

で表されるが, 一方で $y = 1$ も明らかに微分方程式の解となっている. しかし, これは任意定数をどのように取ってもこの解を得ることはできない. よって $y = 1$ は特異解である.

なお, 先の例 2 では $y = 1$ が特異解であると述べたが, ここでの $y = 1$ は定数関数であることに注意されたい. すなわち, 定義区間 I で y は常に 1 であるということだ.[*3]

[*2] 直感的なイメージを与えるとすれば, 未知関数の導関数を含まない形まで持っていくには,n 回微分をする必要があり, その分任意定数も n 個出てくるといったところであろうか.

[*3] 定数関数の記述法としては $y \equiv 1$ のように書かれることも多い. 本書では, 特異解においては $y = 1$ のように定数関数を記述するが, 定数関数という言葉を書かないとするならば,$y \equiv 1$ のような表記法の方が親切であろ

D)　初期値問題, 境界条件

常微分方程式に対して, 独立変数のある 1 つの値に対して未知関数のとる値が定まっているという条件を**初期条件**という.
これをより一般化して記述するとすれば, 次のようになる.

$$n \text{ 階常微分方程式 } F(x, y, y' ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.21}$$

において, 一点 (x_0, y_0) における条件

$$x = x_0, y = y_0, y' = y_1, y" = y_2... \tag{1.22}$$

のもとで解けば, 一つの特殊解が得られる. この条件を**初期条件**という. **初期条件**

これに対して, 有界な区間 I での関数の挙動に関して, 区間の両端における未知関数およびその導関数の値に関する条件を**境界条件**[*4]という. **境界条件**

う. しかし本書ではより丁寧な説明を心がけ, 定数関数 $y = 1$ のように記述する. 記述法については各人が明確な意図を持って好みのものを用いると良いであろう.

[*4] 境界条件のわかりやすい例としては, 2 階の常微分方程式が挙げられる. 2 階の常微分方程式の一般解が

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0 \tag{1.23}$$

の時, 条件

$$x = x_0 \text{の時}, y = y_0 . x = x_1 \text{の時}, y = y_1 \tag{1.24}$$

を満たす特殊解が $F(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0, F(x_1, x_2, C_1, C_2) = 0$ より C_1, C_2 を求めて,$C_1 = a, C_2 = b$ が得られたとすれば,$F(x, y, a, b) = 0$ が求める解となり, 条件 $x = x_0$の時, $y = y_0 . x = x_1$の時, $y = y_1$ が**境界条件**となる.