第 3 章

解の存在定理

この章では, 一般的な微分方程式の性質を調べる上で必要となる理論的な内容について扱っていく．解析学の知識を前提としているが, 簡単な解説は入れているので解析学に不安があるものでも十分に読める内容となっている．ここでの内容は求積法では解くことができない微分方程式の解析に必要となる基礎的な理論であるのでしっかりと理解しておくことが望ましい.

3.1 逐次近似法

逐次近似法

ここでは, **逐次近似法**と呼ばれる求積できない微分方程式の解を近似的に求めていく方法について紹介する.

ここでは微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.1}$$

の区間 $[0, a]$ 上の解 $y = \varphi(x)$ でかつ, 初期条件

$$\varphi(0) = c \tag{3.2}$$

近似列

を満たすものを対象に近似解を考えていく. 近似解の列 (**近似列**という) の最初の元としてまずは初期条件のみを満たすものをとることとし, これを $\varphi_0(x)$ として

$$\varphi_0(x) = c \tag{3.3}$$

を満たすものを選ぶ. ここで列の次の $\varphi_1(x)$ はやや乱暴な書き方をすると

$$\varphi_1(x) \approx f(x, \varphi_0(x))\Delta x + c \tag{3.4}$$

となる．これを繰り返していけば,

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &\approx f(x, \varphi_1(x))\Delta x + c && (3.5)\\
&= f(x, f(x, \varphi_0(x))\Delta x + c)\Delta x + c && (3.6)\\
\varphi_3(x) &\approx f(x, \varphi_2(x))\Delta x + c && (3.7)\\
&\vdots\\
\varphi_{n+1}(x) &\approx f(x, \varphi_n(x))\Delta x + c && (3.8)
\end{aligned}$$

のように解を前進させていくことができる. これを積分形で表すと

$$\varphi_{n+1}(x) = c + \int_0^x f(t, \varphi_n(t))dt \tag{3.9}$$

となる. ここで右辺第 2 項の c は新しい近似解も初期条件を満たすように付け加えた.

逐次近似法

このように前の近似解よりもより精度の高い近似解を作り出していく方法を**逐次近似法**と

いう. また上記の方法を特に **Picard の逐次近似法 (Picard iteration)** という.

ここで, 式 (3.9) を導出する過程は, 以下の **Volterra 積分方程式 (Volterra integral equation)** と呼ばれる式

Volterra 積分方程式

$$\varphi(x) = c + \int_0^x f(t, \varphi(t))dt \tag{3.10}$$

に対する自然な逐次近似解を与えていることに気がつくであろう. さらに式 (3.10) が今考えていた微分方程式および初期条件である式 (3.1), 式 (3.2) と等価であることも即座にわかる. 念の為確認しておくと, 式 (3.10) で $x = 0$ を代入すれば, 初期条件である式 (3.2) が出てくるし, 両辺を x で微分すれば, 元の式 (3.1) が与えられることわかる. このことから, 今後この章で解の存在やその一意性について考えていくわけだが, その際には式 (3.10) について考えていくものとするので注意されたい.

さて, このようにして近似列を作っていくわけだが, これはいわゆる **Cauchy 列**であり, これが必ず有限確定値をもつというのが完備性の公理である. ここからは解の存在が一意かどうかを調べるために関数 $f(x, y)$ にある条件を課して式 (3.9) がある一定の関数に収束するかどうかを考えていく. 次節ではそのために必要な解析学の知識について復習する.

Cauchy 列

3.2　関数の収束性の復習

ここでは関数の**一様収束**を中心に次節で非常に重要な条件を示す際に必要となる解析学の知識の復習を行う. この章のみでも十分に理解できるように配慮したつもりだが, 必要に応じて適宜解析学の教科書を参照してほしい. なお, 次節の証明を追う際に躓いたらこの節に戻り確認することを進める.

一様収束

A)　関数列とその収束

ここではまず関数列の収束を扱う. これはそもそも近似解の列が何らかの関数に収束することを考える上でそもそも関数の列が収束するとはどういうことかを明確にするためである.

E を $\mathbb{R}$ の空ではない部分集合とする. 今, 各自然数 n 対し関数 $f_n : E \to \mathbb{R}$ が与えられたとき,(f_n) を E における**関数列**という.(f_n) が関数列であれば, E の各点 x に対して $(f_n(x))$ は実数列になる. おのおのの $x \in E$ に対し, この数列 $(f_n(x))$ が収束するならば,

関数列

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{3.11}$$

として関数 $f : E \to \mathbb{R}$ が定義される. このとき, 関数列 $f_n(x)$ は E で関数 f に**収束**するという. また, 関数 f を (f_n) の**極限**あるいは**極限関数**という.

極限

極限関数

なお, ここで注意してほしいのは, 関数列 (f_n) の解析的性質が極限関数に必ずしも引き継がれるわけではないということである. 解析的性質とは, 連続性, 微分可能性, 積分可能性などを指す.

次のような反例を考えればこれは明らかである.

例 1.　　区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $fn_(x) = x^n$ を考えると, 関数 $f_n(x)$ は収束して収束関数 f は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \quad (3.12) \\ 1 & (x = 1) \quad (3.13) \end{cases}$$

となる. 今 f_n は連続かつ微分可能であるが, f は x=1 において連続ではない.

B)　一様収束

さてここからはこの節のメインである一様収束について復習する.
先に考えた関数列の収束を論理記号を用いて記述すると次のようになる.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \tag{3.14}$$

これは日本語で言えば, 任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $x \in E$ に対し, ある自然数 N_ε が存在し, $n \geq N_\varepsilon$ である全ての自然数 n に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.15}$$

が成立するということである.

ここでは, もちろん N が ε に依存して決まるために N_ε と強調して記述した. しかし,N は本来 ε のみならず, x にも依存する. そうした意味では, N は $N(\varepsilon, x)$ と書くべきなのかもしれない.

一様収束

一様収束とは, 先の $N(\varepsilon, x)$ が ε にのみ依存し,x には無関係にとれる場合を言う. すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad (n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \tag{3.16}$$

で, これは任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N_ε が存在し, $n \geq N_\varepsilon$ である全ての自然数 n および任意の $x \in E$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.17}$$

が成立するということである.

注意すべきなのは, 論理記号において $\forall x$ の位置が異なることである. この位置によってどの段階で x を固定するかが変わってくるのである. 一様収束という名前に関しては先に説明したように, N_ε が x に無関係に (一様に) 取ってくることができる, すなわち関数の収束の速さが x によらない (一様) ということに基づいている. なお, 通常の収束を一様収束と区別して, **点別収束** *(***各点収束***)* ともいう.

点別収束 *(*各点収束*)*

定義を見れば明らかであるが, 一様収束するならば各点収束する. しかし, 各点収束するからといって一様収束するわけではない. このような関数列の具体例として先にあげた $f_n(x) = x^n$ が考えられる. 実際に手を動かして確認してみるとよい.

この一様収束を踏まえて, 関数列の収束を考えたいのだが, 極限が不明の場合はそう簡単にはこれまで扱ったもののみで収束を考えるのは簡単ではなかった.　数列の場合はその数列が **Cauchy 列**であることを言えば良いのであった. ここでは, これを関数列に拡張した**一様 Cauchy 列**を考える.

Cauchy 列

一様 Cauchy 列

【定義 3.1】
区間 E 上の関数列 $f_n(x)$ が一様 Cauchy 列であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N_ε が存在し, $m \geq N_\varepsilon$,$n \geq N_\varepsilon$ を満たす全ての自然数 m, n および全ての $x \in E$ に対して

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{3.18}$$

が成り立つことである.

また,

【定理 3.2】
区間 E 上の関数列 $f_n(x)$ が E において一様収束するための必要十分条件は関数列 $f_n(x)$ が一様 Cauchy 列であることである.

この証明はここでは省略するので, 必要であれば各自解析学の教科書等を参考にされたい.
一様 Cauchy 列の仮定を検証するのは難しそうであるが, 次のような評価で基本的には済ますことができる.

【補題 3.3】
$f_n(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列とし, ある収束する正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ が存在して, この区間で一様に

$$|f_{n+1}-f_n(x)|\leq\varepsilon_n \tag{3.19}$$

が成り立っているとする. このとき, $\{f_n(x)\}$ はここでは一様収束する.

この補題は一様 Cauchy 列の定義を見れば簡単に導くことができるであろう.
ここで, 一様収束の性質から導かれる応用非常に重要ないくつかの性質を見ていくこととしよう.

【定理 3.4】
連続関数列の一様収束極限は連続関数となる.

この定理に対する証明は以下のように与えられる.
【証明】
$\forall n\geq n_\varepsilon$ について, $z\in[a,b]$ が何であっても,

$$|f_n(z)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3.20}$$

が成り立つようにできる.
このような n を一つ固定すると, f_n の各点 x における連続性の表現より $|x-y|<\delta$ なら $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ となるような $\delta>0$ を選ぶことができる. これにより,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|\\<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

□

【定理 3.5】
. 連続関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に区間 $[a,b]$ 上で一様収束すれば, 極限と積分が順序交換できる. すなわち, $n\to\infty$ のとき,

$$\int_a^b f_n(x)dx \quad \to \int_a^b f(x)dx \tag{3.21}$$

この定理に対する証明は以下のように与えられる.

【証明】

一様収束の定義により,$\forall n \geq n_\varepsilon$ について区間 $[a,b]$ 上に

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{3.22}$$

となるような n_ε を選ぶと, このような n に対して

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

【定理 3.6】(Weierstrass の定理)

C^1 級の関数列 $f_n(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で $f(x)$ に各点収束し, 導関数の列 $f'n(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で $g(x)$ に一様収束すれば, $f(x)$ は C^1 級となり, $f'(x) = g(x)$. すなわち, 極限と積分が順序交換できる.

この定理に対する証明は以下のように与えられる.

【証明】

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt \tag{3.23}$$

に先の定理 3.5 の主張を適用すれば, $n \to \infty$ で

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

□

ここまで, 非常に大雑把に解析学の復習をしたわけであるが, ここで扱った内容は次節で述べる微分方程式において非常に重要な定理を証明するのに用いることになる. 解析学をしっかり学んだものにとっては, もう少し厳密な議論をしたほうがよい箇所も多々あるであろうが, ここでは応用に目をむけわかりやすさを重視した。どうしても気になる者は, 各種教科書を読んで頂きたい。また, 微分積分の具体的な計算は学習したものの, 解析学を学習していない者にとってはここまで少し理解し難い内容であったかもしれない. 特に $\varepsilon - \delta$ 論法などは初めは理解に苦しむだろう. しかし, ある種高校数学で散々と誤魔化されてきた極限が厳密に定義され理解できるという恩恵を考えれば,　理工系の学生としてはぜひ理解しておきたい内容ではあるので, これを機に学習することを推奨する. 次節からは具体的に微分方程式の解の一意存在について証明を行っていく. この節の内容をここぞとなく使っていくので, 証明を追いながらつまづいたらこの節に戻ってくることを奨める.

3.3　Lipschitz 条件と解の一意存在

ここからはこの章のメインである Lipschitz 条件と解の一意存在についていよいよ考えていく. 実は式 (3.10) のような微分方程式の解の初期値問題においては, ある仮定のもとで解は一意存在するという非常に強力な主張が存在する. しかも, 解の存在範囲までわかってしまうという. このような非常にインパクトのある定理は後で紹介するように意外にも簡単に証明できてしまうのだから興味深い. この章では, まず結論となる定理とその定理が必要とする仮定ついて確認した後に, 証明に移っていく.

A) Lipschitz 条件と解の存在定理

まず、解の一意存在をいう上で必要となる仮説である Lipschitz 条件を紹介する.Lipschitz 条件とは以下のように定義される.

Lipschitz 条件

【定義 3.7】(Lipschitz 条件)
関数 $f(x,y)$ が変数 (x,y) のある領域に対して変数 y につき一様 Lipschitz 条件を満たすとは,

定数 K が存在してその領域に属する任意の 2 点 $(x,y),(x,z)$ に対して,

$$|f(x,y)-f(x,z)| \leq K|y-z| \tag{3.24}$$

を満たすことをいう.

以上が Lipschitz 条件の定義である. わかりやすい言い方をすれば, 平均変化率 (変化の割合) が有界であるとでもいったところであろうか. 実は, おそらく誰しもがこれまでにこの Lipschitz 条件の特殊な場合に遭遇しているはずである. それは平均値の定理である. 直感的なイメージを掴むために少し過激なことを言えば, Lipschitz 条件は平均値の定理を一般化したものであると言えよう. そう考えると, Lipschitz 条件は今まで考えてきた関数であれば, 基本的に満たすことがわかるであろう.

さて, Lipschitz 条件を認めることによって, 以下の重要な定理が導かれる.

解の一意存在

【定理 3.8】(解の一意存在)
$f(x,y)$ は閉長方形 $\{(x,y);|x|<a,|y-c|\leq b\}$ で連続で, $|f(x,y)|\leq M$ かつ, そこで y について一様 Lipschitz 条件を満たすものとする. このとき, 微分方程式の初期値問題 (3.1)-(3.2) は $|x|\leq min\{a,b/M\}$ でただ一つの解をもつ. さらに, $|\varphi_0(x)-c|\leq b$ を満たす任意の $\varphi_0(x)$ から出発し, 式 (3.9) で定めれる逐次近似列は上の区間で一様収束する.

文字ばかりでわかりづらいと思うかもしれないので, 定理の主張を少し整理しておこう. この定理は大きく分けて 3 つの主張から構成される.

① 式 (3.1)-(3.2) のような初期値問題の解は存在する.

②そのような解はただ一意に存在する.

③解の存在範囲は $|x|\leq min\{a,b/M\}$ に収まる.

これらだけの主張をある種制約としては緩い Lipschitz 条件を仮定するだけで, 導けてしまうのである.

次節では, これらの内容について順に証明していく.

B) 定理 3.8 の証明

まずは, 初期値問題の解の存在について証明する.
式 (3.9) より, $\varphi_{n+1}(x)$ と $\varphi_n(x)$ の差は

$$\varphi_{n+!}(x)-\varphi_n(x)=\int_0^x (f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi_{n-1}(t))dt \tag{3.25}$$

となる.　これを一様 Lipschitz 条件を用いて評価すれば,

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \int_0^x |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi_{n-1}(t))| dt \tag{3.26}$$

$$\leq K \int_0^x |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| dt \tag{3.27}$$

となる. ここで, 有界区間上での最大値定理により

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq C \tag{3.28}$$

なる C が存在するので, 先の評価式を繰り返し用いれば,

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq K \int_0^x |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| dt \leq CKx \tag{3.29}$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \leq K \int_0^x |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| dt \leq C\frac{K^2 x^2}{2!} \tag{3.30}$$

$$\vdots$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq K \int_0^x |\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| dt \leq C\frac{K^n x^n}{n!} \tag{3.31}$$

となる.　従って, $|x| \leq a$ として, $\varepsilon_n = C\frac{K^n a^n}{n!}$ と取れば, 補題 3.3 になり, $\varphi_n(x)$ は一様収束する.

一様 Lipschitz 連続性より得られる評価式

$$|f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \leq K|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \tag{3.32}$$

により, $f(x, \varphi_n(x))$ も $f(x, \varphi(x))$ に一様収束する. これにより, 定理 3.6 により極限と積分の順序交換が可能であり, 式 (3.9) で $n \to \infty$ とすれば, $\varphi(x)$ が式 (3.10)

$$\varphi(x) = c + \int_0^x f(t, \varphi(t)) dt$$

を満たすことがわかる. これはすなわち初期値問題の解の存在を示す結果となっている.

では次に, 解の一意性について考えてみよう. 解が一意に定まることを言うには, 解が二つ存在すると仮定してそれらが結局一致することを示せば良い.

今, 積分方程式 (3.10) の解が $y = \varphi(x)$ と $y = \psi(x)$ の二つが存在したとする. それぞれの積分方程式の差を考えると,

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_0^x \{\varphi(t) - \psi(t)\} dt \tag{3.33}$$

であるので,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \tag{3.34}$$

という評価式がすぐに得られ, これにより $x = 0$ のある近傍[*1]で, $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq C$ を仮定して, 先と同様の手順を踏めば, 評価式

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq C\frac{K^n |x|^n}{n!} \tag{3.35}$$

[*1] 近傍という言葉の用法について少し注意書きを加えたい.

が得られる．そもそもの逐次法を思い出せば,n は任意であり, かつ式 (3.35) の左辺は n によらないので,$n \to \infty$ とすれば

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = 0 \tag{3.36}$$

となり, 結局 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ が一致する, すなわち解の一意性を示すことができた.

最後に解の定義域について考えたい.
$\varphi_n(x)$ を $f(x, y)$ に代入して $\varphi_{n+1}(x)$ を定めるためには, $\varphi_n(x)$ の値域が $f(x, y)$ の定義域の変数 y について収まっていなければならない. すなわち,

$$|\varphi_n(x) - c| \leq b \tag{3.37}$$

である. これは, 逐次近似法の具体的な手順を思い出せばイメージがつきやすいだろうし, 容易に理解できる. これより, 式 (3.9) から,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - c| &= \left| \int_0^x f(t, \varphi_n(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x |f(t, \varphi_n(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x M dx \right| = M|x| \end{aligned} \tag{3.38}$$

となるので, この最後の量 $M|x|$ が b を越えなければ, 代入を続けることができる. よって,

$$M|x| \leq b \iff |x| \leq \frac{M}{b} \tag{3.39}$$

となり, 解の存在範囲が少なくとも,

$$|x| \leq min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \tag{3.40}$$

で保証されることとなる.

このようにして定理 3.8 すなわち, 初期値問題の解の一意存在を証明することができた. 実際に証明を追ってみると実は非常に理解しやすいものであったであろう. 微分方程式において解が存在するか否かの情報が手に入ることは非常に嬉しいことである. そういった意味でもここで扱った定理は非常に重要なものになるのではないだろうか.

次節では, ここまで扱った逐次近似の原理を抽象化していく. そのためにもまずはここまでの内容をよく理解する必要があるので一度再読することを推奨する.

3.4　縮小写像と不動点

ここまで, 逐次近似法に始まり, 解の一意存在まで議論してきた. この節では, これまでの内容をより抽象化して扱うことを目標とし議論を進めていく. 結論から言ってしまえば, ノルムもしくは距離の概念を用いていくことになるのだが, それは以下のような考えに基づくものである.

先の証明においては, **最大値ノルム**と呼ばれる

最大値ノルム

$$||f||_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \tag{3.41}$$

に関する収束を用いた. これを用いれば, 連続な関数列 f_n が区間 $[a, b]$ 上で f に一様収束することは,

$$||f_n - f||_\infty \to 0 \tag{3.42}$$

で表すことができる.　実際, 一様収束の定義式の結論部分

$$\forall x \text{ について}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.43}$$

は, x について最大値となる時に成り立つということと同値である. このような解釈をすれば, 結論部分は

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon \tag{3.44}$$

と表現できる. このように, ノルムもしくは距離の概念を取り込むことによって関数列の収束が $\mathbb{R}^n$ の点列と全く同じように表現することができる.

このことを踏まえると, 前節までの議論は完備な距離空間 X とそこに働く写像 T について, T に対するある仮定のもとでの方程式 $Tx = x$ の解の存在定理の問題に帰着することができる.

この章では, まずノルム, 距離の概念を整理し, 写像 T に課せれる仮定について議論した後に, 解の存在に関して前節までよりも抽象化して考えていくというような流れで進めていく.

A)　距離とノルム

Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ において, 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.45}$$

距離関数, 距離

で与えられるのであった. このことを一般化すると距離とは以下のように定義できる.

【定義 3.9】
X を 1 つの集合とする. 写像 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ が, 次の公理 **Dis1-Dis3** 満たすとき, d を X 上の**距離関数**もしくは**距離**という.

Dis1　$d(x, y) \geq 0$, また $d(x, y) = 0 \iff x = y$　(正値性)　(3.46)
Dis2　$d(x, y) = d(y, x)$　(対称性)　(3.47)
Dis3　$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$　(三角不等式)　(3.48)

Euclid 距離関数

ノルム

なお, 先に示した Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ における距離関数 (3.45) は詳しくは, **Euclid 距離関数**という.

さて, X がベクトル空間である場合は, 距離は**ノルム**を用いて定義することができる. ノルムは以下のように定義される.

【定義 3.10】
ベクトル空間 X 上で定義された実数値関数 $N : V \to \mathbf{R}$ が次の **N1-N-3** を満たすとき, N を X 上の ノルムという.

N1　$N(x) \geq 0$, また $N(x) = 0 \iff x = 0$　(3.49)
N2　$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$　(3.50)
N3　$N(x) + N(y) \geq N(x + y)$　(3.51)

なお, 通常ノルムは $||\cdot||$ の記号を用いることが多いので, $N(x)$ の代わりに $||x||$ と書くことにすると, **N1-N-3** は

$$\textbf{N1}\quad ||x|| \geq 0, \text{また } ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{3.52}$$

$$\textbf{N2}\quad ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| \tag{3.53}$$

$$\textbf{N3}\quad ||x|| + ||y|| \geq ||x+y|| \tag{3.54}$$

と表すことができる. なお, ノルムは Euclid 空間ではちょうど原点から x までの距離に対応する.

ここでよく使われる $\mathbf{R}^n$ 上のノルムの例をいくつか挙げておこう.

例 1. よく用いられるノルム

$$(1) L_1 \text{ノルム}\qquad ||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \tag{3.55}$$

$$(2) L_2 \text{ノルム}\qquad ||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{3.56}$$

$$(3) L_\infty \text{ノルム}\qquad ||x||_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \tag{3.57}$$

例 2. 先に登場した 3 つのノルム L_1, L_2, L_∞ を一般化して統合すると,

$$L_p \text{ノルム}\qquad ||x||_p = (|x_1|^p + \cdots |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{3.58}$$

と表すことができる.

実際, 式 (3.58) で $p = 1, 2$ とすれば例 1 の (1),(2) の L_1, L_2 ノルムが出てくるし, $p \to \infty$ とすれば, (3) の L_∞ ノルムが出てくる.

なお, 先に挙げた連続関数に対する最大値ノルムは, Euclid 空間のノルム $||x||_\infty$ の無限次元化とみなせることに注意したい.

B)　完備性

ここでは距離空間が完備であるとはどういうことか, その定義を確認したい.

一般に距離空間では Cauchy 列の概念が成り立つ.

Cauchy 列

収束列

【定義 3.11】(Cauchy 列と収束列)

X の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**とは,

$$n, m \to \infty \text{ のとき,}\qquad d(x_n, x_m) \to 0 \tag{3.59}$$

となること, すなわち

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon > 0 \quad s.t \quad n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{3.60}$$

となることをいう. 一方で, $\{x_n\}$ が**収束列**とは

$$\exists x \in X, \qquad d(x_n, x) \to 0 \tag{3.61}$$

すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon > 0 \quad s.t \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \tag{3.62}$$

となることをいう.

上記の Cauvhy 列の概念に対して注意したいのは, まず x は点列 $\{x_n\}$ の極限であり, この極限値が求まっていなければ, $\{x_n\}$ が収束列か否かの議論はできないということである. これに対し, $\{x_n\}$ が Cauchy 列であるか否かは点列 $\{x_n\}$ だけで判断できる. この違いは十分に理解していただきたい. そして, Cauchy 列が必ず収束列となるような距離空間は**完備**であるという. 完備な空間の例として大切になるのは, 区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $C[a, b]$ などが挙げれる. また, 完備な距離空間 X に対してその閉部分集合 Y も完備な距離空間になることにも注意したい.

完備

C) 縮小写像の不動点定理

この節ではいよいよこれまで考えてきた微分方程式の解の存在の問題についてより抽象化して考えていく. そのためにまず, 縮小写像と不動点という概念を導入する.

【定義 3.12】(縮小写像)
距離空間 X からそれ自身への写像 $T : X \to X$ が**縮小写像**であるとは, ある正定数 $\lambda < 1$ が存在して

$$\forall x\,, y \in X \text{ に対し}, \qquad d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \tag{3.63}$$

が成り立つことをいう.

縮小写像の定義を見れば明らかであるが, 一様連続である. なお, 上の写像 T は式 (3.9) の積分作用素を一般化し, さらに仮定を強めた形となっていることは理解しておきたい.

不動点

さて, ここで不動点の概念を導入しておこう.

【定義 3.13】(不動点)

$$x = Tx \tag{3.64}$$

の解を写像 T の**不動点**という.

写像 T は積分作用素を一般化したものであった. すなわち不動点とは積分方程式 (3.10) の解を一般化した概念といえよう. 実は, 完備な距離空間の縮小写像には不動点がひとつしかないことが知られている.

【定理 3.14】(縮小写像の不動点定理)
完備距離空間の縮小写像はただひとつ存在する.

【証明】
x_0 を勝手に選び, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = Tx_n \tag{3.65}$$

で定義していくものとする. 定理の主張を証明するには, これが X 内のある点に収束することを述べればよく, 今, 完備性を仮定しているので, 点列 $\{x_n\}$ が Cauchy 列であることを示

せば良い. $m > n$ として三角不等式を用いれば,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(T^m x_0, T^n x_0) \\ &\leq d(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + d(T^{m-1} x_0, T^{m-2} x_0) + \cdots + d(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \end{aligned} \tag{3.66}$$

ここで, T が縮小写像であることにより,

$$d(T^k x, T^k y) \leq \lambda\, d(T^{k-1} x, T^{k-1} y) \leq \cdots \lambda^k d(x, y) \tag{3.67}$$

が成り立つので,

$$d(x_m, x_n) \leq (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(Tx_0, x_0) \tag{3.68}$$

が得られる. 上の式左辺の括弧の中身は収束する級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ の部分和であるので, 右辺は 0 に収束する. すなわち, 点列 $\{x_n\}$ は距離 d について Cauchy 列となっていることがわかる.

よって,

$$x_n \to \exists x \in X \tag{3.69}$$

となる. ここで, 縮小写像は連続写像であるので, 式 (3.77) において, $n \to \infty$ とすれば, 式 (3.65) が現れてくる.

すなわち, T の不動点がひとつ見つかったと言える.

では, 次に不動点の一意性, すなわち不動点がただ一つに限られることを見てみよう.

不動点 x の他に不動点 y が見つかったとすれば,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x.y) \tag{3.70}$$

$\lambda < 1$ であることに注意すれば,

$$d(x, y) = 0 \tag{3.71}$$

従って, $x = y$.　すなわち不動点はただ一つ存在する.

□

さらに, 上の定理により得られた不動点は初期値 x_0 を用いてある程度評価することができる.

【系 3.15】
上の定理により得られた不動点は初期値 x_0 を用いて

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-\lambda}\, d(Tx_0, x_0) \tag{3.72}$$

と評価できる.

【証明】

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) = d(T^n x_0, x_0) &\leq \sum_{k=1}^{n} d(T^k x_0, T^{k-1} x_0) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} d(Tx_0, x_0) \\ &= \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\, d(Tx_0, x_0) \end{aligned} \tag{3.73}$$

が得られるので, 両辺で $n \to \infty$ とすれば,

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-\lambda}\, d(Tx_0, x_0)$$

□

D)　解の存在証明の抽象化

さて, 前節では積分作用素を一般化した縮小写像を導入し, さらに積分方程式の解を一般化した不動点が完備距離空間においてはただ一つに限られることをみた. この節では, この章の初めに議論した積分方程式 (3.10) の解の存在を不動点定理を用いて抽象化して証明することを目標としていく.

まず, 距離空間として先に紹介した区間 $[-a, a]$ 上の連続関数の空間 $C[-a, a]$ に最大値ノルムから定まる距離を導入したものをとる. $C[-a, a]$ は完備距離空間であるので, 閉部分集合

$$X := \{\varphi(x) \in C[-a, a]; |\varphi(x) - c| \leq b\} \tag{3.74}$$

も同じ距離で完備距離空間になることは明らかである.　ここでは簡単のために,$b \leq Ma$ と仮定しておくが, これを用いると

$$X := \{\varphi(x) \in C[-a, a]; |\varphi(x) - c| \leq M|x|\} \tag{3.75}$$

と書いた方がより自然かもしれない. いずれにせよこれらは $C[-a, a]$ の閉部分集合であることに変わりはない.

積分方程式 (3.10) の解の存在について議論するには, 写像 T として

$$T\varphi(x) := c + \int_0^x f(t.\varphi(t))dt \tag{3.76}$$

を取れば良いことは, これまでの議論を遡れば至極当然であろう.$f(x, y)$ に対して, 定理 (3.8) と同様に $|f(x, y)| \leq M$ を仮定すれば, T が先に定めた X からそれ自身への写像であることはわかるであろう. しかし, 現段階ではこの T が縮小写像かどうかは判別できないため, これを示すためにはなんらかの工夫が必要となってくる. この工夫の仕方にはいくつか種類があるが, ここでは区間幅を小さくとる, すなわち a を小さくとるという方法を紹介したい.

具体的には, $a < 1/K$ であれば

$$\begin{aligned}
d(T\varphi, T\psi) &= \max_{|x| \leq a} \left| \int_0^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt \right| \\
&\leq \max_{|x| \leq a} \left| \int_0^x K|\varphi(t) - \psi(t)| dt \right. \\
&\leq aK \max_{|t| \leq a} |\varphi(t) - \psi(t)| = aK\, d(\varphi, \psi)
\end{aligned}$$

となり, T が縮小写像であることがわかる. これにより, 定理 3.14 の不動点定理により, この区間における解の一意存在が言える.

ここで疑問になってくるのが, 解の存在を調べたい区間 $[-a, a]$ がこれより大きなものであった時にどうしたら良いかということである. 結論から言ってしまえば, 解の存在が確認できるような微小区間を作り, それを繋ぎ合わせていくことによって区間全体として解の存在について調べることができるのである.

Lipschitz 定数が一定であれば, $\delta < 1/K$ を取るとき, 区間 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ がこの区間 $[-a, a]$ のどこであっても, 初期値 y_0 に対して m

$$|y_0 - c| \leq M|x_0| \quad \wedge \quad |x_0| + \delta \leq a \tag{3.77}$$

である限りは小長方形領域

$$\{(x,y); |x-x_0| \leq \delta,\ |y-y_0| \leq M\delta\} \tag{3.78}$$

が f の元々の定義域

$$|x| \leq a,\ |y-c| \leq b \tag{3.79}$$

に含まれることが三角不等式を用いて

$$|y-c| \leq |y-y_0| + |y_0-c| \leq M\delta + M|x_0| \leq Ma \leq b \tag{3.80}$$

と評価できることからわかるので, 不動点定理が適用でき, 区間 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上で一意な解を得ることができる. そこで, $x=0$ において最初の初期値 c を用いて解いた解から出発して, 得られた区間 $[-\delta,\delta]$ 上の解の区間の端点 $x_0=\delta$ における値 $y_0=y(\delta)$ を次の区間における初期値として, 初期値問題を解き, これを繰り返して次々に解を繋げていく. もちろん解の一意性があるので, 新しく作った解もそ区間上ですでに構成された解と一致することに注意する.

このような操作を**解の延長**という.*2 **解の延長**

このとき, 得られる解は

$$|y-y_0| \leq M|x-x_0| \tag{3.81}$$

を満たすので, 例えば $x \geq 0$ 方向への延長を考えると,$x \geq x_0 \geq 0$ とすれば,

$$|y-c| \geq |y-y_0| + |y_0-c| \geq M(x-x_0) + M(x_0) = Mx \tag{3.82}$$

となり, 次の初期値となるべき端での値が再び定義域に関する条件式 (3.77) を満たすので, このような操作を続けることができる. 高々,a/δ 回この操作を繰り返せば,

$$x \leq \min\{a, \frac{b}{M}\} \tag{3.83}$$

まで解を延長することができる.

$x<0$ の方向に解を延長していくときも同様にして考えることができるので, 結局

$$|x| \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \tag{3.84}$$

全体で定義された解を得ることができる.

このようにして縮小写像と不動点定理を用いて微分方程式の解の一意存在を抽象化して証明することができた. 先に述べたように, T が縮小写像であることを述べるための工夫の仕方は何通りか存在する. 上で取り上げた方法を今回扱った理由としては, 解の延長という概念を知っておいて欲しかったことにある. 理論的にまとまっている別の方法として考えられるものを演習問題として下に載せておくので参考にしてほしい.

---

*2 解をどこまで延長すれば良いのかという問題も生じてくるだろうが, これ以上延長できない解という意味で延長不能解という言葉を用いることが多い. しかし延長不能解は単に定義域がこれ以上拡張されない解というわけではない. 連続性に着目するのであるが, 今回は詳しい議論は省略する. 今後, この資料は順次内容を補って更新していく予定であるので, その際に延長不能解についても本文, もしくは注釈の中で詳しく解説したいと考えている. 気になる読者は常微分方程式論の教科書等を用いて各自調べてほしい.

演習問題 3

3.1　与えられた区間で一度に不動点定理を適用できれば, T が縮小写像であることは上の例と比べて簡単に言うことができるであろう．そのためには距離を再定義すればよい．そこで $L \geq K$ を選んで, 距離を

$$d'(\varphi, \psi) := \max_{x \in [-a,a]} |\varphi(x) - \psi(x)| e^{-L|x|} \tag{3.85}$$

によって定義したとき, T が縮小写像となること示しなさい.

3.2　また別の工夫として不動点定理自体を拡張するという手法が取れる. 不動点定理を以下のように, 拡張したい.

X を完備距離空間, T をその空間上の写像とする．もし, 正数の列 $\{\lambda_n\}$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ かつ, $\forall x, y \in X$ に対して, $d(T^n x, T^n y) \leq \lambda_n d(x, y)$ を満たすようなものが存在すれば, T はただ 1 つの不動点を有する.

このことを証明せよ．また, この不動点 x は初期値 x_0 により

$$d(x, x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n d(Tx_0, x_0) \tag{3.86}$$

という評価式を満たすことも示しなさい.

参考文献

[1] ...