第 1 章

準備

1.1 ダイナミクス

ダイナミクスとは時間発展を伴う系を扱う学問分野である。時間発展、すなわち変化を扱う学問分野であるから、ダイナミクスは主に**微分方程式**によって記述される。しかし後半で登場するようなカオスを示すものとして**反復写像**(いわゆる差分方程式) もダイナミクスを記述するツールとして存在する。詳しくは必要となった時に説明するが、連続的な時間変化を微分方程式が表すのに対し、反復写像は離散的な時間変化を表現するものである。さて、ダイナミクスを与えるのは微分方程式であると述べたが、微分方程式は以下のような 2 種類のものに大別できるのだった。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dx}{dt} + \omega_n^2x = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

前者を常微分方程式、後者[*1]を偏微分方程式というのであったが、前者では独立変数が時間 t のみであるのに対し、後者は時間 t だけではなく位置 x も独立変数となっている。本資料では、主に時間のみに依存する現象を対象として扱っていくためほとんどが常微分方程式で記述されることになる。

では、そのような常微分方程式も解析しやすさに最も直結するであろう特徴によって 2 分することができる。線形常微分方程式と非線形常微分方程式である。未知関数とその導関数がすべて 1 次式である微分方程式を**線形**であるといい, そうでないものを**非線形**という. [*2] 例えば、振り子の運動は、x を振り子の鉛直方向からの振れ角,g を重力加速度、L を振り子の長さとして

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}\sin x = 0 \tag{1.7}$$

で記述される。これと等価な系は

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.8}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L}\sin x_1 \tag{1.9}$$

であり、非線形系である。非線形系の代表例としてよく用いられる振り子の運動であるが、常套的手段として $x \ll 1$ において $\sin x \approx x$ とする微小角近似を用いる方法である。これにより、問題は線形となるため解析が容易になる。

[*1] 熱方程式などと呼ばれる

[*2] 線形微分方程式と非線形微分方程式の例をいくつか挙げておこう.

例 1. 次の微分方程式は線形である.

$$y' = x + 2y - 1 \tag{1.3}$$

$$x^2y'' + 3xy' - 6y = 0 \tag{1.4}$$

例 2. 次の微分方程式は非線形である.

$$(y'')^3 + y' - x = 0 \tag{1.5}$$

$$yy' - xy - 3x^2 = 1 \tag{1.6}$$

しかし、微小角近似を用いるということは本来の振り子の物理現象の一部のみしか考えていないということである。例えば、振り子が高いエネルギーを持っている時、頂点を超えて回転するような運動するが、これは微小角近似を用いると表現できない。解析のしやすさと、系からえれれる情報量のトレードオフとなっているのである。もちろん、上の非線形系は楕円関数を用いれば解析的に解くことができるが、もっと単純な方法はないのだろうか。このモチベーションこそがダイナミクスを考える上で非常に重要になる。

このモチベーションに答えるひとつのアイデアのコンセプトは次のようなものである。ある初期条件に対する振り子の解がたまたま得られるとする。この解は振り子の位置 $x_1(t)$ と速度 $x_2(t)$ の組で与えられる。そこで (x_1, x_2) を座標に持つような空間を考えると、解 $(x_1(t), x_2(t))$ は空間内の 1 本の曲線に沿って動く点に対応することになる。この曲線を解の**軌道** *(trajectory)*、空間を系の**相空間** *(phase space)* と呼ぶ。相空間内の点は全て初期値になり得るので、相空間は解の軌道によって埋め尽くされることになる。では、この議論を**逆に**行うとどうなるのだろうか？すなわち、与えられた系に対してその軌道を描き、そこから解に関する情報を引き出すということである。もしこれが可能であるならば、**系の方程式を解かずとも**、解の情報が得られるのだ。これは非常に嬉しいことである (特殊関数を使って解析していくのとどっちが分かりやすいだろうか？)。そして多くの場合はそれは可能であることをこれから様々な例を通して確認していく。

1.2 非線形の難しさ

さて、非線形系に対する処方箋を上では与えたわけであるが、非線形系の難しさは何なのであろうか。逆に言えば、なぜ線形系は解析が容易であるのだろうか。それは線形系はその部分系へと分解して扱えるという違いによるものである。複雑な系でも線形系であれば、部分系へと分解しそれらを個別に解き、最後の組み合わせることで結果として系全体を解くことになる。このような考え方によって、線形系では複雑な系を劇的に扱いやすくしているのである。しかし、自然界の多くは線形系ではない。多くの物が干渉しあい、非線形な関係を少なからず含んでいる。我々は先に述べたように、情報量を切り落として分解のできる線形系へ落とし込んで対処することが多いが、現象の本質を見落としてしまう可能性がある。そのため、複雑で解析がしづらいとされてきた非線形系を情報量を落とすことなく扱う必要がありその意義は大きい。