

## 第2章

# 1次元の流れ

第1章では振り子を例に力学系を導入した。振り子は2階の微分方程式であるから、2階の系である。これを拡張すると一般の系は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

これは  $n$  階の系 ( $n$  次元) である。この章では、最も簡単で理解しやすい  $n = 1$  の場合について具体例を交えながら幾何学的に力学系を扱う方法について理解していく。

## 2.1 直線上の流れ

### 2.1.1 流れの導入

非線形系を解析する際、図を用いると簡単になる場合が多い。ここでは、解析的にも図を用いた幾何的方法でも解くことのできる非線形系の具体例を与え、それぞれの手法を対比することから始めることとする。それでは、さっそく以下の系を考えてみよう。

$$\dot{x} = \sin x\tag{2.2}$$

まず、解析的に考えていく。変数分離をして両辺を積分すると

$$dt = \frac{1}{\sin x} dx\tag{2.3}$$

より

$$\begin{aligned}t &= \int \csc x dx \\ &= -\ln |\csc x + \cot x| + C\end{aligned}\tag{2.4}$$

となる。<sup>[\*1]</sup>ここではまだ定数  $C$  だけの自由度があるので、初期条件として  $t = 0$  で  $x = x_0$  であったとすると

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right|\tag{2.5}$$

である。

では、解の動きを考えてみることにしよう。

[1] 解析的に得られた  $\dot{x} = \sin x$  の解 (2.5) をもとに以下の問いに答えよ。

1.  $x_0 = \pi/4$  とする。 $t > 0$  の任意の解の特徴について定性的に述べよ。また、 $t \rightarrow \infty$  での解の挙動はどのようなになるだろうか。

---

<sup>\*1</sup>  $\csc x = 1/\sin x, \cot x = 1/\tan x$  である。

2. 任意の初期条件  $x_0$  に対して、 $t \rightarrow \infty$  での解の挙動はどのようなになるだろうか。

さて、上の問題は非常に答えづらいものであっただろう。これが解析的に非線形系を扱うことの難しさの一つである。では、図を用いた幾何的な解析手法を用いるとどうなるのだろうか。

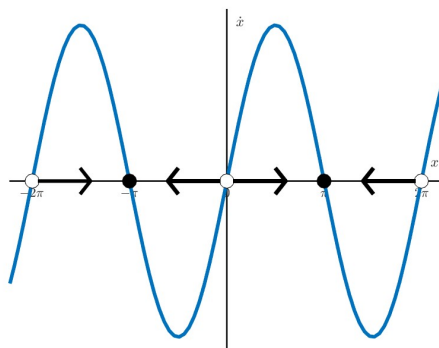


図 2.1 図を用いた非線形系の解析例

図 (2.1) を見てほしい。これは横軸に実直線に沿って動く仮想的な粒子の位置を  $x$ 、縦軸にその粒子の速度  $\dot{x}$  を取ったものである。すると、微分方程式  $\dot{x} = \sin x$  はこの直線上のベクトル場を表し、各点における速度ベクトルを定義する。図中の矢印は、各点での速度ベクトルに対応する。なお、 $\dot{x} > 0$  なら右向き、 $\dot{x} < 0$  なら左向きとした。

ここでのベクトル場の物理的な考え方を簡単に紹介しておこう。 $x$  軸に沿って速度  $\dot{x}$  で流れる流体の気持ちになってみよう。この時速度  $\dot{x}$  は場所ごとによって変化し、この変化の法則は  $\dot{x} = \sin x$  によって規定される。先ほど述べたように、この流体の**流れ (flow)** は  $\dot{x} > 0$  なら右向き、 $\dot{x} < 0$  なら左向きであり、 $\dot{x} = 0$  であれば流れはない。このように流体が**固定**される点を**固定点 (不動点) (fixed point)** と呼ぶ。図 (2.1) を見ると、固定点にも2種類あることが分かるであろう。黒丸は**安定 (stable)** な固定点を表し、白丸は**不安定 (unstable)** な点を表す。'stable' な固定点はその間に流体が流れ込むためしばしば**シンク (sink)**(沈点) と呼ばれ、'unstable' な固定点は流体がそこから湧き出すように見えるので**ソース (source)**(湧点) と呼ばれる。

ではここで改めて [1] の問いに答えることにしよう。

[1] (再掲) 解析的に得られた  $\dot{x} = \sin x$  の解 (2.5) をもとに以下の問いに答えよ。

1.  $x_0 = \pi/4$  とする。 $t > 0$  の任意の解の特徴について定性的に述べよ。また、 $t \rightarrow \infty$  での解の挙動はどのようなになるだろうか。
2. 任意の初期条件  $x_0$  に対して、 $t \rightarrow \infty$  での解の挙動はどのようなになるだろうか。

解答は次の通りである。

1. 図 (2.2) を見ると分かるように、 $x_0 = \pi/4$  で出発した粒子は、 $\dot{x} > 0$  により速度を増しながら右向きに動いていく。 $x = \pi/2$  で速度は最大となり、その後粒子は減速を始め、安定な固定点  $x = \pi$  に左から近づいていく。 $t \rightarrow \infty$  で  $x \rightarrow \pi$  へと漸近していくことも分かるであろう。
2. 図 (2.3) に任意の初期条件における粒子の挙動を示す。これは適当な初期条件において 1 のケースと同様に考えることで図 (2.3) のような流れを描くことができる。ただ、注意してほしいのは図 (2.3) では流れのごくごく一部しか描いていないということである。初期条件 1 つに対して 1 つの軌道が描けるのであるから、初期条件に制約がない限り相空間は軌道で埋め尽くされることに注意されたい。

以上のように**定性的**な情報を得るには、解析的に解くよりも図を用いた方が簡単であることが分かる。しかし冒頭でも述べたように、**定量的**な情報を得ることは諦めなくてはならない。だが物理現象を考える上で定性的な情報こそが

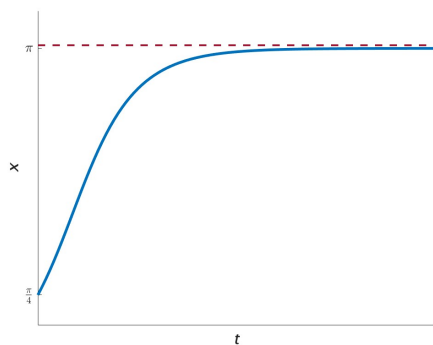


図 2.2 初期条件  $x_0 = \pi/4$  における  $x$  の挙動

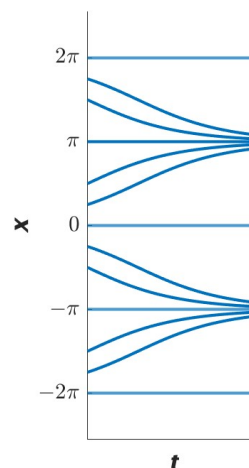


図 2.3 任意の初期条件  $x$  の挙動

我々の求めることである場合が多いため、図を用いた解析は非常に有効な手段と言えるであろう。

[2] 解析的に得られた  $\dot{x} = \sin x$  の厳密解を求めたい。解 (2.5) の逆関数を考えることにより以下の問いに答えよ。

1. ある特定の初期条件  $x_0 = \pi/4$  を与えられたとき、厳密解が

$$x(t) = 2 \tan^{-1} \left( \frac{e^t}{1 + \sqrt{2}} \right) \quad (2.6)$$

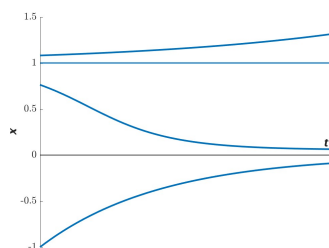
となることを示しなさい。

2. 任意の初期条件  $x_0$  に対して厳密解はどうなるだろうか。

[3] これまでの話を一般の 1 次元系  $\dot{x} = f(x)$  に拡張したい。先と同様に  $f(x)$  のグラフを描き、それを用いて実直線上のベクトル場を描くことで解の定性的な情報を引き出せば良い。このとき、局所的な速度  $f(x)$  で粒子が実直線上を流れている<sup>\*2</sup>と想像することでベクトル場が描けるのであった。このことを踏まえ、以下の方程式の固定点を求め、安定性を分類せよ。また、いくつかの初期条件に対して  $x(t)$  のグラフを描け。

1.  $\dot{x} = x^2 - 1$
2.  $\dot{x} = x - x^3$
3.  $\dot{x} = e^{-x} \sin x$

[4] これまでとは逆の手順を踏みたい。以下の図に矛盾しないような解  $x(t)$  を持つ方程式  $\dot{x} = f(x)$  を求めよ。



\*2 このような仮想的な流体を相流体 (phase fluid) と呼ぶ

### 2.1.2 ロジスティック方程式

ここでは一次元の流れとしてよく扱われるロジスティックモデルについて考える。ロジスティックモデルとは生物の個体数増加を簡便に表したモデルで、1838年に Verhulst によって最初に提案された。これは以下のようなロジスティック方程式で表される。

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.7)$$

ここで  $N(t)$  は時刻  $t$  での個体数、 $r > 0$  は増加率、 $K$  は環境収容力 (carrying capacity) である。このモデルは大きく以下の二つの仮定を反映したものと言える。

1. 最も基本的な生物の個体数増加は  $\dot{N} = rN$ 、すなわち  $N = N_0 e^{rt}$  の指数関数的な増加に基づく。
2. しかし、個体群の過密さや資源が有限であることから  $N$  が一定数<sup>\*3</sup>を超えると増加率  $r = \dot{N}/N$  は減少に転じる。

これらの二つの仮定を上手く取り込んだのがロジスティックモデル<sup>\*4</sup>である。では、このロジスティックモデルについても前節と同様に図を用いて定性的な情報を引き出すことにしよう。ここでは個体数を考えているので  $N > 0$  の範囲でベクトル場がどのようにになっているかを調べる (図 (2.4))。固定点 (平衡点) は系が時間変化しない点であるか

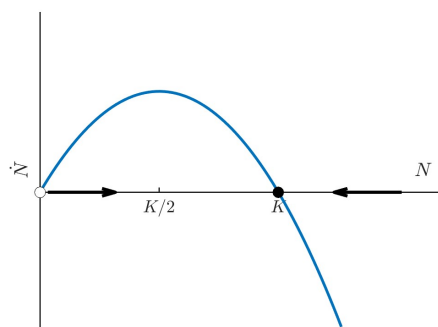


図 2.4 ロジスティックモデルにおけるベクトル場

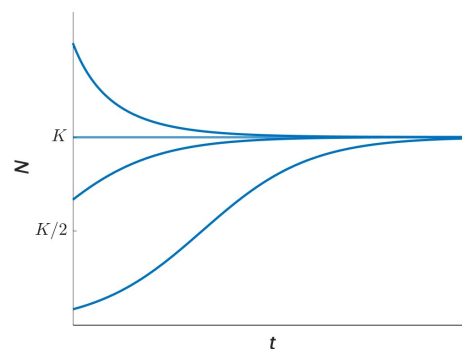


図 2.5 ロジスティック方程式の解  $N(t)$  の挙動

ら  $\dot{N} = 0$  として、 $N$  について解いてみれば分かるように  $N^* = 0$  と  $N^* = K$  に生じている。流れを見ても分かるように  $N^* = 0$  は不安定な固定点で、 $N^* = K$  は安定な固定点であることが分かる。つまり  $N_0 = 0$  の近傍から系の発展が進むと  $N = 0$  から離れていくように、小さな個体群は指数関数的に増大していくことになる。一方で、 $N$  は  $K$  から離れるようなノイズを受けたとしても、ノイズは単調に減少し  $t \rightarrow \infty$  で  $N \rightarrow K$  に落ち着くことになる。

\*3 これが環境収容力である。

\*4 [コラム・議論] ロジスティックモデルは、非常に簡単に生物の個体数増加について解釈を与えることができる。生物学的にも当初は厳密な解釈が提案されており、このモデルは増加の普遍則であると主張されてきた (Pearl 1927)。実際に捕食者がいない環境において、バクテリア、酵母、単純生物のコロニーを成長させる実験において多くの場合シグモイド的な増加曲線を示し、ロジスティック方程式を裏付けるようなデータが観測されている。しかし、ミバエ、コクヌストモドキ、および卵、幼虫、さなぎ、成虫からなる複雑なライフスタイルを持つ生物においては一致しなかった。これらの生物では、環境収容力への漸近は見られず、大きな揺らぎを発生した。よってロジスティック方程式が個体群成長の「普遍則」のように受け止められるのは誤解であると、数理生物学者の James D. Murray や応用数学者の Steven Strogatz は指摘している。

また、系に捕食者がいる環境を考慮した個体増加数を示すモデルとして有名なのがロトカ・ヴォルテラの競争方程式である。この式はアメリカの数学者 Alfred J. Lotka とイタリアの数学者 Vito Volterra によって独立に考案された。これは以下のように記述される。

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \left( \frac{K_1 - x_1 - \beta_{12}x_2}{K_1} \right) x_1 \quad (2.8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \left( \frac{K_2 - x_2 - \beta_{21}x_1}{K_2} \right) x_2 \quad (2.9)$$

ここで、 $r_i$  は各種の増加率、 $K_i$  は各種の環境収容力、 $\beta_{12}, \beta_{21}$  は種間競争係数である。ロトカ・ヴォルテラの競争式では、それぞれの係数の値がある範囲内のときのみ 2 種が共存するが、それ以外の場合にはどちらかの種が絶滅する結果に至る。

実際に図 2.4 を見ると分かるようにある 1 つの場合を除いて、どの  $N_0 > 0$  から出発しても  $N = K$  に近づいていくことが分かる。つまり個体数は常に環境収容力に近づく。しかしながら唯一の例外は  $N_0 = 0$  の場合である。この時は繁殖を始める個体自体が存在しないので個体数は増えることはない ( $N = 0$  のまま！)。

また、図 2.4 により解の定性的な形を推定することができる (図 2.5)。初期条件  $N_0$  が  $N_0 < K/2$  と  $K/2 < N_0$  の場合で解の挙動が違うことに注意したい。特に  $N_0 < K/2$  の場合のように初期には加速度的に増加し、 $N(t)$  のグラフが下に凸となり、 $N = K/2$  を過ぎてからは  $N(t)$  のグラフが上に凸になるようなグラフは、*S* 字的、もしくは**シグモイド** (sigmoid) であるという。

[5] ロジスティック方程式  $\dot{N} = rN(1 - N/K)$  の厳密解を求めたい。変数分離を行い、部分分数分解を用いてこれを求めよ。なお  $N(0) = N_0$  とする。

[6] (アリー効果) ある種の生物では、実効的な増加率  $\dot{N}/N$  は中程度の  $N$  において最大となる。これをアリー効果 (Allee effect) と呼ぶ。例えば、 $N$  が非常に小さい時には配偶者を探すのが難しすぎ、 $N$  が大きい時には食物や資源に対する競争が激しすぎるような状況を想像せよ。

1. パラメータ  $r, a, b$  がいくつかの拘束条件を満たすとき、 $\dot{N}/N = r - a(N - b)^2$  がアリー効果の例を与えることを示せ。
2. 系の全ての固定点 (平衡点) を求め、安定性を分類せよ。
3. いくつかの異なる初期条件に対して解  $N(t)$  を描け。
4. 解  $N(t)$  をロジスティック方程式のものと比較せよ。もしあるとすれば、定性的な違いは何であるか。

### 2.1.3 近似線形化

これまで、固定点の安定性解析のために図に頼った方法を用いてきた。しかし、安定性に関するもっと定量的な情報が知りたいこともしばしばある (例えば、安定固定点への減衰率など)。このような情報は固定点の近傍において**近似線形化**を用いることで得ることができる。

$x^*$  を固定点 (平衡点) として、 $\Delta x = x(t) - x^*$  を  $x^*$  からの小さな摂動とする。摂動の成長するか、減衰するかの時間変化を考えたいので、時間  $t$  で微分すると

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) = \dot{x} \quad (2.10)$$

であるので、 $\dot{\Delta x} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \Delta x)$  が成り立ち、これを Taylor 展開すると

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.11)$$

が得られる。ここで、 $O(\Delta x^2)$  は  $\Delta x$  の 2 次微小項を表す。<sup>\*5</sup> また、 $x^*$  は固定点であるから  $f(x^*) = 0$  であることに注意すると、

$$\dot{\Delta x} = f'(x^*)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.14)$$

<sup>\*5</sup> [補足] ここで用いられる  $O(\cdot)$  は**ランダウの記号**と呼ばれるものである。重要であるが意外に知らないこともあるので簡単に定義を確認しておこう。

【定義】 (ランダウの記号)  $-\infty \leq a \leq \infty$  とし、 $f(x), g(x)$  が  $a$  の近傍で定義されている関数とする。 $a$  の十分近くである  $M > 0$  が存在して

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad (2.12)$$

となる時、 $f(x) = O(g(x))(x \rightarrow a)$  と書く。また、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0 \quad (2.13)$$

となるとき、 $f(x) = o(g(x))(x \rightarrow a)$  と書く。このとき、記号  $O(\cdot), o(\cdot)$  をランダウの記号という。

参照: <https://mathlandscape.com/landau-o/>

である。もし、 $f'(x^*) \neq 0$  であるとすれば、微小項は無視できて

$$\dot{\Delta x} \approx f'(x^*)\Delta x \quad (2.15)$$

と書くことができる。これは  $\Delta x$  についての線形微分方程式である。またこの方程式より、 $f'(x^*) > 0$  であるならば、摂動  $\Delta x$  は指数関数的に増大し、 $f'(x^*) < 0$  であるならば、摂動  $\Delta x$  は指数関数的に減少することが分かる。すなわち、固定点での安定性解析において重要なのは傾き  $f'(x^*)$  の符号の情報であるということである。また、 $f'(x^*)$  の大きさが大きいほど、摂動の成長、減少の速度が決まる。傾きの逆数  $1/|f'(x^*)|$  を特徴的な時間スケールとして定義してやれば、どのくらい固定点が安定であるかを測る指標を得ることができるのである。

[7] (線形安定性解析) ロジスティック方程式 (2.7) の固定点を線形安定性解析を用いて分類し、それぞれの場合において特徴的な時間スケールを求めよ。

[略解]

$f(N) = rN(1 - N/K)$  であるので固定点は  $N^* = 0, K$ 。また、

$$f'(N) = r \left( 1 - \frac{2N}{K} \right) \quad (2.16)$$

より  $f'(0) = r$ 、 $f'(K) = -r$  なので、 $N^* = 0$  で不安定で、 $N^* = K$  で安定。また、特徴的な時間スケール  $\tau$  はいずれの場合においても  $\tau = 1/|f'(x^*)| = 1/r$  である。

[8] (臨界減速) 統計力学において臨界減速は 2 次相転移の兆候である。転移点においては、系は通常に比べて非常にゆっくりと固定点に緩和する。

1. 任意の初期条件  $x_0$  に対して  $\dot{x} = -x^3$  の解析解を求めよ。 $t \rightarrow \infty$  で  $x(t) \rightarrow 0$  だが、この減衰は指数関数的でないことを示せ。
2. 減衰の遅さを直感的に理解したい。初期条件  $x_0 = 10$  について、 $0 \leq t \leq 10$  の範囲の解をプロットせよ。また、同グラフ上に同じ初期条件からの  $\dot{x} = -x$  の解をプロットせよ。

[略解]

1. 変数分離をして、初期条件を課すと

$$x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{x_0^2}}} \quad (2.17)$$

2. 省略

## 2.1.4 ポテンシャル

1 次元系  $\dot{x} = f(x)$  のダイナミクスを可視化する方法として流れを見てきたが、別の方法を考えてみよう。これはポテンシャルエネルギーによるものである。どちらかというと流れよりもこちらの方が馴染み深い考え方なのではないだろうか。念の為考え方を確認しておく。<sup>\*6</sup>

ポテンシャルの井戸の壁を滑り降りる粒子を想像しよう。ポテンシャル (potential)  $V(x)$  は

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \quad (2.18)$$

<sup>\*6</sup>  $f(x)$  という表記が力 (force) を想起させるがこの場合は異なることに注意する。そのため、ポテンシャルの定義に違和感を覚えるかもしれない。

により定義される。この式からも分かるように粒子は運動を進む際に坂を下って動く。これは

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} \\ &= -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

であるので、粒子はいつもポテンシャルの低い方へ向かって動くことから理解できる。

[9] 系  $\dot{x} = x - x^3$  のポテンシャルをグラフに描き、全ての平衡点を求めよ。

[略解]

$-dV/dx = x - x^3$  より

$$V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad (2.20)$$

である (積分定数  $C = 0$  とした)。これは図 2.6 のような概形になる。図より固定点 (平衡点) は  $x = \pm 1$  および  $x = 0$

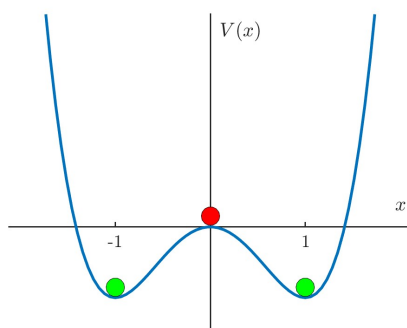


図 2.6  $\dot{x} = x - x^3$  のポテンシャルの概形

であり、 $x = \pm 1$  はノイズを与えても摂動が収束するため安定な固定点、一方で  $x = 0$  ではノイズを与えると左右のどちらかに動いてしまい  $x = 0$  には戻ってこない、すなわち摂動が成長するので不安定な固定点と分類することができる。<sup>[7]</sup>

[10] 1次元系のダイナミクスでは、軌道は全て固定点に漸近するか、 $\pm\infty$  に発散するかのいずれかであった。これは軌道が単調に増加、減少することあるいは一定に留まることを強制されているからである。つまり、1次元系では行き過ぎや減衰振動は絶対に起こらない。また同様の理由で減衰しない振動も不可能である。よって  $\dot{x} = f(x)$  に周期解は存在しない。このことを以下の2通りの方法によって証明せよ。

1.  $x(t)$  が非自明な周期解、すなわちある  $T > 0$  に対して  $x(t) = x(t+T)$  ですべての  $0 < s < T$  に対して  $x(t) \neq x(t+s)$  だと仮定する。 $\int_t^{t+T} f(x)(dx/dt)dt$  を考えることにより、直線上のベクトル場において周期解が不可能であることを背理法を用いて示せ。
2.  $\dot{x} = f(x)$  を直線上のベクトル場として、ポテンシャル関数  $V(x)$  が存在することを用いて、解  $x(t)$  が振動しないことを示せ。

[11] 上記に関連して、以下のパラドックスを説明せよ。単純な調和振動子  $m\ddot{x} = -kx$  は1次元の  $x$  軸に沿って振動する系である。しかし、1次元の系は振動しないのであった。

<sup>\*7</sup> 図 2.6 のそれぞれの固定点に仮想的な粒子を描いた。この粒子を左右どちらかに指で押した時、その後の粒子の運動を想像することで安定であるか、不安定であるかは容易に判別できるであろう。



## 2.2 分岐

ここからは力学系を考える上で非常に重要なコンセプトである**分岐**を導入する。前節で見たように 1 次系では解が固定点に収束するか、 $\pm\infty$  に発散するかのいずれかししか起こらないのであった。これだけ聞くと 1 次系は非常に単調で、ダイナミクスとして面白くないと感じるかもしれない。しかし 1 次系にも面白さはある。**パラメータ依存性**だ。パラメータを変化させれば、それに伴い固定点は変化する (例えば、図 2.1.1 のグラフを上下に動かすことを考えてみよう！固定点の数はどのように変化するか？)。結果、系のダイナミクスは大きく変わる。これらのダイナミクスの定性的な変化は**分岐**と呼ばれ、分岐をもたらす時のパラメータの値を**分岐点**などという。**分岐**は何らかの制御パラメータの変化によって生じる転移や不安定化のモデルを与えているのである。このように聞くと、**分岐**を考える学術的意味が理解できるのではないだろうか。

### 2.2.1 サドルノード分岐

ここからはいくつかの分岐の具体例について学んでいく。

まず、**サドルノード分岐**を扱う。サドルノード分岐は固定点が生じ、消滅する基本的なメカニズムである。サドルノード分岐の標準的な例は次の 1 次系によって与えられる。

$$\dot{x} = x^2 + r \quad (2.21)$$

ここで  $r$  はパラメータであり、図に示すように  $r < 0$  の時、固定点は 2 つ存在し、1 つは安定、もう 1 つは不安定である、 $r = 0$  の時、固定点は 1 つに合体し、**半安定な固定点**<sup>\*8</sup>になる。 $r > 0$  の時は固定点は消滅してしまう。このように、 $r < 0$  のベクトル場と  $r > 0$  のベクトル場の定性的に異なってくることから、この例では  $r = 0$  で分岐が発生したという。

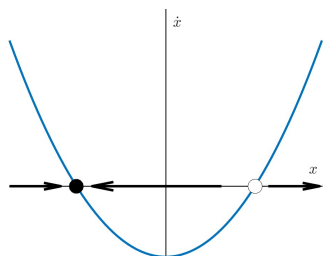


図 2.7  $r < 0$  の場合

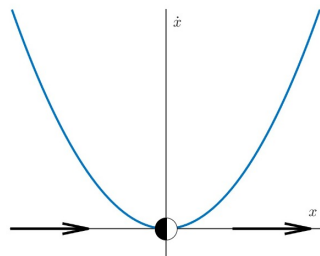


図 2.8  $r = 0$  の場合

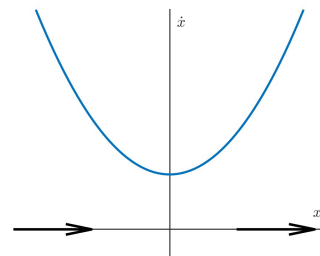


図 2.9  $r > 0$  の場合

サドルノード分岐を図示する際に先ほど提示したように、ベクトル場の性質の変化に着目してパラメータの値を場合分けし、その全てを図示するのがわかりやすい方法であるが、例えば固定点が 100 個現れてくるような系<sup>\*9</sup>の全ての分岐を図示するのは非常にめんどくさい。もう少し分岐にだけ着目して図示する方法はないだろうか。そこで**分岐図**と呼ばれる手法を導入する。

上で例示したサドルノード分岐の標準形の分岐図を示す。

この図のコンセプトは大まかに、固定点に着目し  $\dot{x} = 0$  として、異なる  $r$  の値ごとに対応する固定点を与える曲線を図示するといったものである。先の例では  $r = -x^2$  で与えられる曲線を図示するといったものになる。このとき、分岐を与えるのはパラメータであるから独立変数として  $r$  を取る方が自然である。また、図にベクトル場の矢印を含める場合もしばしばあるが必須ではない。なお、固定点の安定性を区別するために安定な固定点を実線で不安定な固定点を点線で書くことが多い。

\*8 半安定な固定点とは、片側が安定 (吸引)、反対側が不安定な (湧き出し) 固定点のことをいう。図で示したように円の半分を塗りつぶした記号を用いて表現することが多い。

\*9 極端すぎる例ではあるが



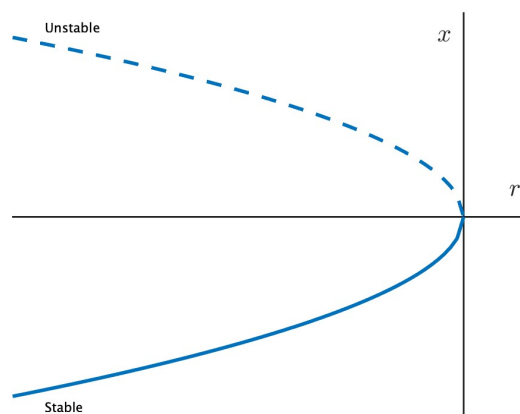


図 2.10 サドルノード分岐の標準形の分岐図

[12] 次の各方程式について分岐点 (サドルノード分岐が生じる  $r$  の臨界的な値) を求めよ。また、 $r$  に対する固定点  $x^*$  の分岐図を描け (書くことができる場合は)。

1.  $\dot{x} = 1 + rx + x^2$
2. (やや難)<sup>[10]</sup>  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$
3. (やや難)  $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$

このようなサドルノード分岐は分岐の最も基本的な形であり、その標準形は  $\dot{x} = x^2 + r$  で与えられるのである。<sup>[11]</sup>

<sup>[10]</sup> 固定点の座標を  $r$  の関数として陽に求めることができない。 $r - x - e^{-x}$  のグラフを書くのは難しいが、 $r - x$  と  $e^{-x}$  のグラフを書くことは比較的容易である。このことを上手く利用してやると分岐点を見つけ出すことができるだろう。

<sup>[11]</sup> [コラム・議論] ここで系  $\dot{x} = x^2 + r$  をサドルノードの標準形であるとした理由について議論していこう。ある意味で  $\dot{x} = x^2 + r$  や  $\dot{x} = r - x^2$  は全てのサドルノード分岐の代表例となっている。そのため「標準形」であると述べた。一般的にサドルノード分岐点の近傍では、一般的にダイナミクスは  $\dot{x} = x^2 + r$  や  $\dot{x} = r - x^2$  と同じように振る舞うのである。

例えば、[12].2 では先に解いたように分岐点は  $r = 1$  で、分岐は  $x = 0$  で生じることが分かるので  $x = 0$  かつ  $r = 1$  の分岐点近傍で  $\dot{x} = r - x - e^{-x}$  を考えてみる。 $x = 0$  周りで Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r - x - e^{-x} \\ &= r - x - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \cdots\right) \\ &= (r - 1) - \frac{x^2}{2} + \cdots\end{aligned}$$

となる。近傍を考えているので 3 次以上の項を無視すると、代数的に  $\dot{x} = r - x^2$  と同じような形になる。

サドルノード分岐がなぜ一般的にこのような代数的な形になるかは少し考えてみれば分かる。サドルノード分岐は  $x$  軸上の固定点が接近し、合体、消滅することで生じる。すなわち、局所的にみれば  $f(x)$  は放物線状にならなくてはならないといったところである。このことをもう少し数学的に厳密に考えてみる。 $f$  を  $x$  と  $r$  の 2 変数関数として  $\dot{x} = f(x, r)$  の挙動を分岐点  $r = r_c$  および  $x = x^*$  の近傍で考えてみる。すると

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, r) \\ &= f(x^*, r_c) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(x^*, r_c)}(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{(x^*, r_c)}(r - r_c) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(x^*, r_c)}(x - x^*)^2 + \cdots\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x^*$  は固定点であるので  $f(x^*, r_c) = 0$ 、またサドルノードの分岐の接続条件により  $\partial f / \partial x|_{(x^*, r_c)} = 0$  となる (分岐点でグラフが接する!!)。よって、 $a := \partial f / \partial r|_{(x^*, r_c)}$ 、 $b := 1/2 \partial^2 f / \partial x^2|_{(x^*, r_c)}$  とすれば、

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \cdots \quad (2.22)$$

となることが分かる。このような理由から  $\dot{x} = x^2 + r$ ,  $\dot{x} = r - x^2$  をサドルノードの標準形と呼ぶ。

## 2.2.2 トランスクリティカル分岐と近似恒等変換

ここからはトランスクリティカル分岐について扱う。トランスクリティカル分岐とは「任意の  $r$  に対して固定点が存在し、消滅しない」ような分岐のことをいう。トランスクリティカル分岐の標準形は以下のような式で与えられる。

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (2.23)$$

この式はロジスティック方程式に非常によく似ているが、 $r$  および  $x$  はいずれも正負の値をとることに注意する。

トランスクリティカル分岐の標準形のベクトル場を示す。

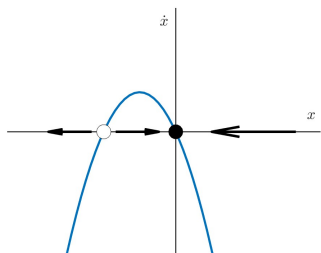


図 2.11  $r < 0$  の場合

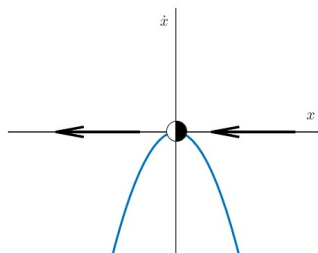


図 2.12  $r = 0$  の場合

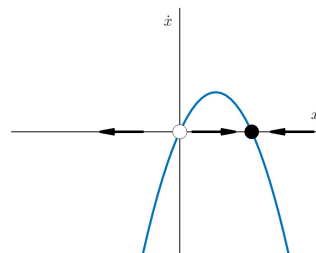


図 2.13  $r > 0$  の場合

図からも分かるようにどのパラメータ  $r$  の値に対しても  $x^* = 0$  は固定点となっている。しかし、パラメータを変化させるとその安定性が変化していることに注意したい。これこそがトランスクリティカル分岐の本質であり、最も重要な性質である。サドルノード分岐とは異なりトランスクリティカル分岐は固定点は常に存在し消滅しないものの、安定性が入れ替わるのだ。

[13] 系  $\dot{x} = r \ln x + x - 1$  が  $r$  のある値でトランスクリティカル分岐を起こすことを示せ。さらに系が分岐点の近傍で近似的に標準形  $\dot{X} \approx RX - X^2$  へ簡約化されるように適切な変数変換を行うことで新しい  $X$  と  $R$  を見つけ出せ。

[14][13] でトランスクリティカル分岐の近傍のダイナミクスを

$$\dot{X} = RX - X^2 + O(X^3)$$

という近似式に簡約化できることを確認した。実は適当な変数の非線形変換によって  $O(X^3)$  の項が常に消去できることが知られている。つまり、このような標準形への帰着は近似ではなく厳密に行うことが可能である。このことを具体的な計算によって示したい。

系  $\dot{X} = RX - X^2 + aX^3 + O(X^4)$  を考えよう。この系が  $\dot{x} = Rx - x^2 + O(x^4)$  に変換されるような新しい変数  $x$  を求めたい。これに関連して以下の問いに答えよ。

1.  $x = X + bX^3 + O(X^4)$  は近似恒等変換 (Near-Identity Transformations)<sup>[\*12]</sup>と呼ばれる。近似恒等変換は逆変換によって  $X = x + cx^3 + O(x^4)$  という形にできることを示し、この  $c$  を求めよ。
2.  $\dot{x} = \dot{X} + 3bX^2\dot{X} + O(X^4)$  において、右辺の  $X$  と  $\dot{X}$  の項を置き換え、全ての項が  $x$  のみに依存するようにせよ。 $\dot{x} = Rx - x^2 + kx^3 + O(x^4)$  の形になるように、級数展開の積を計算して項ごとに整理せよ。ただし、 $k$  は  $a, b$  および  $R$  に依存する。
3.  $k = 0$  となるように  $b$  を選べ。また、 $R \neq 0$  という仮説は本当に必要か？
4. (難) これまでの議論を一般の  $n \geq 3$  に対して拡張せよ。すなわち任意の高次項が消去できることを示せ。

<sup>\*12</sup> 近似恒等変換については以下の文献が参考になる。近似恒等変換以外にも力学系を考える上で必要な数学の知識がコンパクトにまとまっている。

[MarkPernarowski, "Math454-455DynamicalSystemsxx SupplementaryLectureNotes", p24-p26](#)

### 2.2.3 トランスクリティカル分岐の例

ここではトランスクリティカル分岐の具体例としてレーザーの閾値を扱う。

そもそもレーザー (LASER) とは、Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (誘導放出による光増幅) の頭文字をとったもので、誘導放出によって、コヒーレントで強い指向性のある光線を発生させる装置のことである。レーザーの光は、コヒーレンスや単色性などのユニークな性質を持ち、通信、製造、医療、科学研究など、さまざまな用途で活用されている。詳しい原理についての説明は省略するが、レーザーは以下のようなモデル記述されることが知られている。

$$\dot{n} = (\text{Gain}) - (\text{Loss}) \quad (2.24)$$

$$= GnN - kn \quad (2.25)$$

ただし、ここでのダイナミカルな変数はレーザー場の光子数  $n(t)$  であり、 $G(>0)$  をゲイン (利得係数)、 $k(>0)$  を損失レート表す定数、 $N(t)$  を誘導放出によって新たに励起した原子の数とする。なお、 $\tau = 1/k$  はレーザー中の光子の典型的な寿命が表している。

さて、ここで少し物理的な考察をしよう。励起した原子は光子を放出した後、低いエネルギー準位へ移り、励起状態ではなくなる。つまり、 $N(t)$  の値は光子の放出に従い減少する。この効果を反映させると  $N(t)$  は以下のように記述できる。

$$N(t) = N_0 - \alpha n \quad (2.26)$$

ここで  $N_0$  はレーザーとして動作していない際の  $N(t)$  の下限、 $\alpha(>0)$  を原子が基底状態へ戻る率である。これによりレーザーの閾値のモデル式は

$$\dot{n} = Gn(N_0 - \alpha n) - kn \quad (2.27)$$

$$= (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2 \quad (2.28)$$

となる。これはトランスクリティカル分岐の標準形であることが分かるであろう。<sup>\*13</sup> この 1 次系のベクトル場は図のようになる。

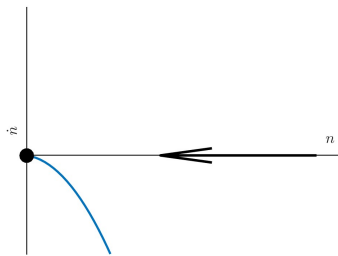


図 2.14  $N_0 < k/G$  の場合

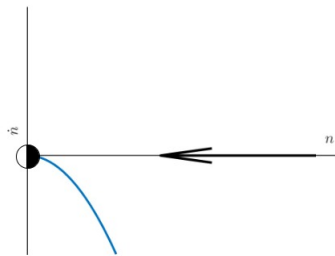


図 2.15  $N_0 = k/G$  の場合

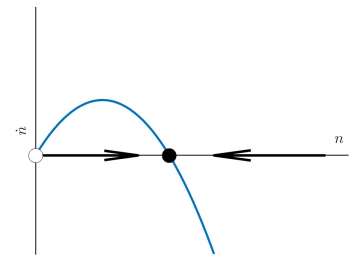


図 2.16  $N_0 > k/G$  の場合

$N_0 < k/G$  のとき、 $n^* = 0$  の固定点は安定である。このことは、誘導放出が起こっておらず、レーザーはコヒーレントではない灯火のような状態になっていることを示している。ここで  $N_0$  が増加すると、 $N_0 = k/G$  でトランスクリティカル分岐が起こることになる。 $N_0 > k/G$  で原点は安定性を失い、安定な固定点が  $n^* = (GN_0 - k)/\alpha G > 0$  に現れる。これはレーザーの自発的な動作 (コヒーレンスの発生) に対応する。つまり、レーザーの動作に対する閾値が  $N_0 = k/G$  で与えられることになる。これを図に示すと <sup>2.17</sup> のようになる。

<sup>\*13</sup> 適当な変数変換で標準形に帰着できるのであった。

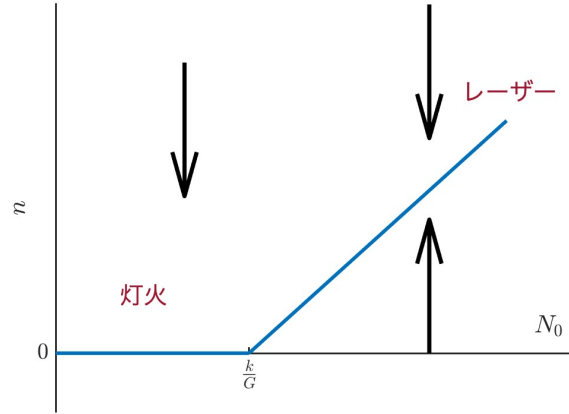


図 2.17 レーザー閾値モデル

しかし、このモデルでは励起した原子自体のダイナミクスや、自然放出の存在などの影響を完全に無視している。そこでこのモデルを改良すべく以下の演習問題を与えることにする。

[15] より現実的なレーザーのモデルは以下の微分方程式で与えられることが知られている。

$$\dot{n} = GnN - kn \quad (2.29)$$

$$\dot{N} = -GnN - fN + p \quad (2.30)$$

ここで  $G$  は誘導放出の利得係数、 $k$  は鏡による透過や散乱などによって生じる光子の損失を表す減衰率である。また、 $f$  は自然放出による励起された原子の減衰率、 $p$  はポンプ強度である。 $p$  以外の全てのパラメータは正の値のみをとる。これまでは 1 次系しか扱っていなかった为上の 2 次系を適当な近似を用いて 1 次系に変換することを考える。

1. 励起した原子数  $N$  はレーザーの光子数  $n$  に比べ、はるかに早く緩和するとしよう。このとき、準静的近似  $\dot{N} \approx 0$  を用いることができる。この近似により  $N(t)$  を  $n(t)$  を用いて表示し、 $n$  についての 1 次元の系を導出せよ。
2.  $n^* = 0$  が  $p > p_c$  で不安定になることを示し、この  $p_c$  を求めよ。
3. レーザー閾値  $p_c$  でどのようなタイプの分岐が生じるか。
4. 1. で用いた近似はどのようなパラメータ領域で有効であるか。

## 2.2.4 ピッチフォーク分岐 1(超臨界ピッチフォーク分岐)

ここからは第 3 の分岐であるピッチフォーク分岐 (pitchfork bifurcation) について取り上げることにする。この分岐は対称性のある物理の問題によく登場するもので、固定点が対称なペアになって生成消滅するような分岐のことをいう。ピッチフォーク分岐には大きく分けて超臨界ピッチフォーク分岐 (supercritical pitchfork bifurcation) と亜臨界ピッチフォーク分岐 (subcritical pitchfork bifurcation) がある。まずは超臨界ピッチフォーク分岐について扱う。

超臨界ピッチフォーク分岐の標準形は以下で与えられる。

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (2.31)$$

このとき、この方程式は  $x \rightarrow -x$  の変数変換において不変 (空間対称性) があることに注意したい。この標準形の異なる  $r$  の値に対するベクトル場を図 2.18~2.20 に示す。 $r < 0$  では原点が唯一の固定点であり、安定である。 $r = 0$  の場合は原点で安定である。このとき系は  $\dot{x} = -x^3$  であり、解は指数関数的な速さで減衰せず、代数関数的なずっと

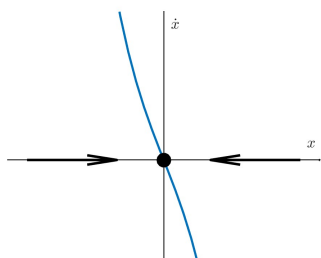


図 2.18  $r < 0$  の場合

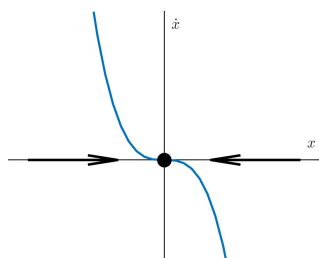


図 2.19  $r = 0$  の場合

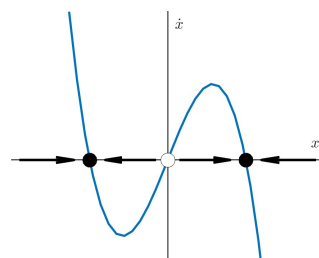


図 2.20  $r > 0$  の場合

遅い減衰をする。<sup>\*14</sup>このようなゆっくりとした減衰は**臨界減衰** (critical slowing down) と呼ばれる。 $r > 0$  の場合は、2つの新しい固定点が  $y$  軸対称に生成される。超臨界ピッチフォーク分岐の分岐図を図 2.21 に示す。

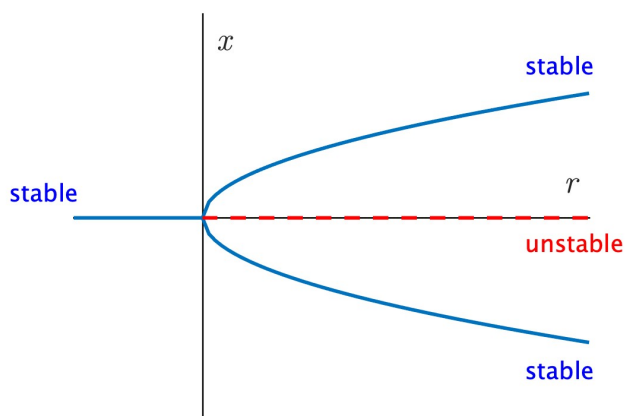


図 2.21 超臨界ピッチフォーク分岐の分岐図

[16]  $\dot{x} = -x + \beta \tanh x$  が  $\beta$  が変化すると超臨界ピッチフォーク分岐を生じることを示せ。またそれぞれの  $\beta$  に対する固定点を数値的に正確にプロットすることで分岐図をかけ。

## 2.2.5 ピッチフォーク分岐 2(亜臨界ピッチフォーク分岐)

先の超臨界ピッチフォーク分岐  $\dot{x} = rx - x^3$  では、3 次の項が原点の固定点を安定化していた。逆にこれを不安定化させるような

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad (2.32)$$

で与えられる分岐を**亜臨界ピッチフォーク分岐** (subcritical pitchfork bifurcation) と呼ぶ。超臨界ピッチフォーク分岐と同様にこの方程式は  $x \rightarrow -x$  の**変数変換**において不変 (空間対称性) があることに注意したい。この標準形の異なる  $r$  の値に対するベクトル場を図 2.22 ~ 2.24 に示す。

\*14 このことは演習問題 [8] で確認した。

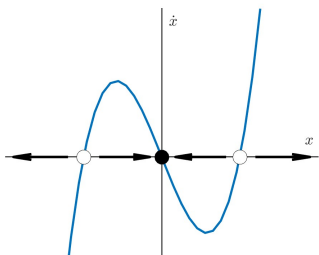


図 2.22  $r < 0$  の場合

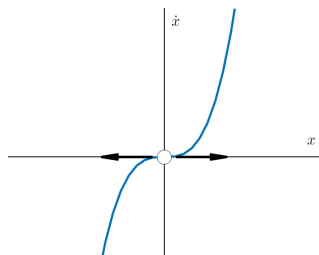


図 2.23  $r = 0$  の場合

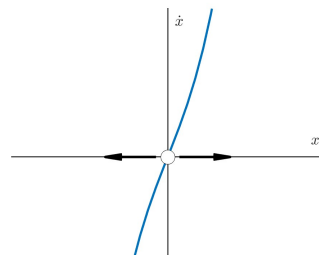


図 2.24  $r > 0$  の場合

図 2.18~2.20 と見比べると、安定性や向きが逆転していることがわかる。このことは次に示す分岐図を見るとよりわかりやすい。

この分岐図を見ると超臨界の場合と同じく  $r < 0$  で原点は安定、 $r > 0$  で不安定であるが、 $r > 0$  での不安定性は

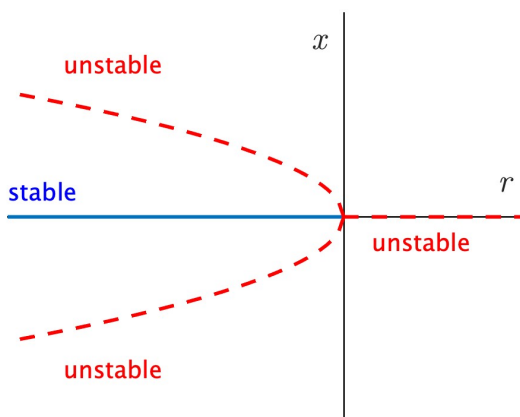


図 2.25 亜臨界ピッチフォーク分岐の分岐図

3 次の項により妨げられていない。むしろ解の軌道を無限大に飛ばすような役割をになっている。これにより解の爆発が起こる。解の爆発とは、任意の初期条件  $x_0 \neq 0$  から出発して、有限時間で  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  となることをいう。

[17] 解の爆発に関して以下の問いに答えよ。

1.  $\dot{x} = 1 + x^{10}$  の解を  $\dot{x} = 1 + x^2$  の解と比較することによって、どの初期条件から出発しても、有限時間で  $+\infty$  に逃走してしまうことを示せ。
2. 亜臨界ピッチフォーク分岐を与える方程式  $\dot{x} = rx + x^3$  を考える。 $r > 0$  において  $x_0 \neq 0$  である任意の初期条件から出発しても有限時間で  $x(t) \rightarrow \pm\infty$  となることを示せ。

しかし、現実の物理系において解の爆発が見られることはそう多くない。これは多くの場合、爆発的な不安定性がより高次の項の安定化しようとする働きにより妨げられているからである。系の空間対称性を仮定すると、次に現れる安定化項は  $x^5$  になるはずである。これより、亜臨界ピッチフォーク分岐の標準形を次のように定めることができる。

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5 \quad (2.33)$$

具体的な計算をすることで不安定項が抑制される様子を見ていこう。

[18] 亜臨界ピッチフォーク分岐の標準形  $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$  を解析したい。

1.  $r$  の値が変化する際に生じる全ての固定点の代数式を求めよ。
2.  $r$  の値が変化する際のベクトル場を描け。全ての固定点とその安定性を示すこと。
3. サドルノード分岐によって 0 でない固定点が生じるパラメーター値  $r_s$  を計算せよ。

### 2.2.6 円周上の流れ