

15. Кинетическая энергия вращающегося тела. Момент инерции. Теорема Штейнера. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.
Рассмотрим ключевые понятия: **кинетическую энергию вращающегося тела, момент инерции, теорему Штейнера и работу сил, приложенных к вращающемуся телу.**

1. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия вращающегося тела — это энергия, связанная с его вращением.

Формула:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2},$$

где:

- E_k — кинетическая энергия,
- I — момент инерции тела относительно оси вращения,
- ω — угловая скорость.

Единица измерения:

- В СИ: джоуль (Дж).
-

2. Момент инерции (I)

Момент инерции — это величина, характеризующая распределение массы тела относительно оси вращения. Он зависит от формы тела и расположения оси.

Формула:

Для системы из N материальных точек:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

где:

- m_i — масса i -й точки,

- r_i — расстояние от i -й точки до оси вращения.

Для непрерывного тела:

$$I = \int r^2 dm,$$

где:

- dm — элемент массы,
- r — расстояние от элемента массы до оси вращения.

Примеры моментов инерции:

- **Тонкий стержень** (ось через центр): $I = \frac{1}{12}ml^2$.
 - **Сплошной цилиндр** (ось через центр): $I = \frac{1}{2}mR^2$.
 - **Шар** (ось через центр): $I = \frac{2}{5}mR^2$.
-

3. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера позволяет вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, если известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Формула:

$$I = I_0 + md^2,$$

где:

- I_0 — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,
 - m — масса тела,
 - d — расстояние между осями.
-

4. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

Работа силы при вращении тела связана с изменением его кинетической энергии.

Формула:

$$A = \int M d\phi,$$

где:

- A — работа,
- M — момент силы,
- $d\phi$ — элементарный угол поворота.

Связь работы и кинетической энергии:

$$A = \Delta E_k = \frac{I \omega_2^2}{2} - \frac{I \omega_1^2}{2},$$

где:

- ω_1 и ω_2 — начальная и конечная угловые скорости.
-

5. Примеры

Пример 1: Кинетическая энергия вращающегося цилиндра

Цилиндр массой $m=5$ кг и радиусом $R=0,5$ м вращается с угловой скоростью $\omega=4$ рад/с. Найдём кинетическую энергию:

1. Момент инерции:

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,5^2 = 0,625 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2} = \frac{0,625 \cdot 4^2}{2} = 5 \text{ Дж}.$$

Пример 2: Теорема Штейнера

Тонкий стержень массой $m=2$ кг и длиной $l=1$ м вращается вокруг оси, проходящей через его конец. Найдём момент инерции:

1. Момент инерции относительно центра:

$$I_0 = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 1^2 = \frac{1}{6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Расстояние между осями: $d = \frac{l}{2} = 0,5$ м.

3. Момент инерции относительно конца:

$$I = I_0 + m d^2 = \frac{1}{6} + 2 \cdot 0,5^2 = \frac{1}{6} + 0,5 = \frac{2}{3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Пример 3: Работа силы

Момент силы $M = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ действует на тело, которое поворачивается на угол $\phi = \pi$ рад. Найдём работу:

$$A = M \phi = 10 \cdot \pi \approx 31,4 \text{ Дж}.$$

6. Итог

- **Кинетическая энергия вращающегося тела:** $E_k = \frac{I \omega^2}{2}$.
- **Момент инерции:**
 - Для системы точек: $I = \sum m_i r_i^2$.
 - Для непрерывного тела: $I = \int r^2 dm$.
- **Теорема Штейнера:** $I = I_0 + m d^2$.
- **Работа сил:** $A = \int M d\phi$.

Эти понятия и формулы широко используются для анализа вращательного движения твёрдых тел.