# 有限元方法上机作业

段俊明[*]

2017 年 12 月 20 日

## 1 问题重述

先简单介绍三维的弹性力学方程组, 设边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 位移为 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$, 应变与位移的关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}), \tag{1}$$

应力与应变的关系

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \lambda tr(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon, \tag{2}$$

应变和应力可表示成对称的三阶矩阵, 其中 $\lambda, \mu$ 是拉梅常数, $\lambda = 3.65e4, \lambda + 2\mu = 6.70e4$. 考虑平衡方程,

$$-\sum_{j=1}^{3} \partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ 是体积力, 将应力带入平衡方程,

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, \quad in\ \Omega, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_j = g_i, \quad on\ \Gamma_1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \quad on\ \Gamma_0, \tag{6}$$

其中 $\Gamma_0$ 是固定边界, $\Gamma_1$ 是自由边界.

考虑二维平面应变问题, 即假设 $z$ 方向应变为 0, 有 $u_3 = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{31} = \boldsymbol{\varepsilon}_{32} = \boldsymbol{\varepsilon}_{33} = 0$, 且 $\boldsymbol{\sigma}_{31} = \boldsymbol{\sigma}_{32} = 0$, 由 $\boldsymbol{\sigma}_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{33}$ 得到 $\boldsymbol{\sigma}_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$.

求解正方形区域 $\Omega = [0, 10] \times [0, 10]$ 上的平面弹性力学方程组混合边值问题. 其中, $\Gamma_0$ 是正方形的底边, 使用固定边界条件, $\Gamma_1$ 是正方形的另外三条边, 使用自由边界条件.

[*]北京大学数学科学学院，科学与工程计算系，邮箱：duanjm@pku.edu.cn

# 2 数值方法

取试探函数空间 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}(0;\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{u}|_{\Gamma_0} = 0\}$, 及检验函数空间 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}(0;\Omega)$, 将二维的平衡方程乘以 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, 使用 Green 公式

$$\int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \partial_i u v \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma uv\boldsymbol{n}_i \mathrm{d}s, \tag{7}$$

以及边界条件, 得到变分形式

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}(0;\Omega) \tag{8}$$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

$$f(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\boldsymbol{v}\mathrm{d}s. \tag{10}$$

取有限维子空间 $\mathbb{V}_h(0;\Omega)$ 逼近原空间, 上述变分形式变为

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = f(\boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega) \tag{11}$$

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = \int_\Omega \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u}_h)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}_h)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{12}$$

$$f(\boldsymbol{v}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}s. \tag{13}$$

取 $\mathbb{V}_h(0;\Omega)$ 上的一组基函数 $\boldsymbol{\phi}_i,\ i = 0,\dots,N_h - 1$, 令

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{j=0}^{N_h-1} u_j\boldsymbol{\phi}_j,\ \boldsymbol{v}_h = \sum_{j=0}^{N_h-1} v_j\boldsymbol{\phi}_j, \tag{14}$$

则可以将离散问题(13)等价于, 求 $\boldsymbol{u}_h = (u_0,\dots u_{N_h-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N_h}$, 使得

$$\sum_{i,j=0}^{N_h-1} a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i)u_j v_i = \sum_{i=0}^{N_h-1} (f,\boldsymbol{\phi}_i)v_i, \quad \forall \boldsymbol{v}_h = (v_0,\dots,v_{N_h-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N_h}, \tag{15}$$

由 $\boldsymbol{v}_h$ 的任意性, 等价于求解线性方程组

$$\sum_{j=0}^{N_h-1} a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i)u_j = (f,\boldsymbol{\phi}_i), \quad i = 0,\dots,N_h - 1, \tag{16}$$

记为 $K\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}$, $K = (k_{ij})$.

对区域 $\Omega$ 做三角形剖分, 记空间网格尺寸为 $h$, 记单元为 $T_i,\ i = 0,\dots,M-1$, 节点为 $A_i,\ i = 0,\dots,N-1$, 取分片线性基函数, 即 $\boldsymbol{\phi}_{2i},\boldsymbol{\phi}_{2i+1} \in \mathbb{V}_h(0;\Omega)$, 满足

$$\boldsymbol{\phi}_{2i}(A_j) = (\delta_{ij},0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\phi}_{2i+1}(A_j) = (0,\delta_{ij})^{\mathrm{T}}, \quad i = 0,\dots,N-1, A_i \notin \Gamma_0, \tag{17}$$

这里 $N_h = 2N$.

引入数组 $en(\alpha,e)$, 其中 $e$ 为单元序数, $\alpha$ 为单元的局部基函数序数, 即第 $e$ 个单元的第 $\alpha$ 个基函数对应于第 $en(\alpha,e)$ 个整体节点; 取值为空间坐标的 $cd(i,nd)$, 其中 $nd$ 为整体节点序数, $cd(i,nd)$ 为第 $nd$ 个整体节点的空间坐标的第 $i$ 个分量. 记 $a^e(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{T^e}\sum_{i,j}\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 由刚度矩阵的定义,

$$k_{ij} = a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i) = \sum_{e=0}^{M-1} a^e(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i) = \sum_{e=0}^{M-1} k_{ij}^e. \tag{18}$$

设 $\alpha,\beta = 0,\ldots,5$ 为 $T^e$ 的 6 个基函数的局部序数, 即 $T^e$ 上 6 个基函数分别为 $\boldsymbol{\phi}_0^e,\ldots,A_5^e$, 定义单元刚度矩阵 $K^e = (k_{\alpha\beta}^e)$,

$$k_{\alpha,\beta}^e = a^e(\boldsymbol{\phi}_\alpha^e,\boldsymbol{\phi}_\beta^e), \tag{19}$$

则可以合成为刚度矩阵 $K$,

$$k_{ij} = \sum_{\substack{en(\alpha,e)=i\in T^e\\ en(\beta,e)=j\in T^e}} k_{\alpha,\beta}^e. \tag{20}$$

同样计算单元载荷向量 $\boldsymbol{f}^e = (f_\alpha^e)$,

$$f_\alpha^e = \int_{T^e}\boldsymbol{f}\boldsymbol{\phi}_\alpha^e\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{21}$$

则总载荷向量 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ 满足

$$f_i = \sum_{en(\alpha,e)=i\in T^e} f_\alpha^e. \tag{22}$$

生成了刚度矩阵和载荷向量后, 我们即可求解线性方程组得到数值解.

下面计算单元刚度矩阵, 设三角形三个顶点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$, 设点 $(x,y)$ 的重心坐标为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 满足

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & -c_1\\ a_2 & b_2 & -c_2\\ a_3 & b_3 & -c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2,\ b_1 = y_2 - y_3,\ c_1 = x_2 - x_3, \tag{24}$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3,\ b_2 = y_3 - y_1,\ c_2 = x_3 - x_1, \tag{25}$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1,\ b_3 = y_1 - y_2,\ c_3 = x_1 - x_2. \tag{26}$$

$D$ 为三角形面积的 2 倍. 设位移为 $u = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + u_3\lambda_3, v = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + v_3\lambda_3$, 则应

变满足

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix}\triangleq B\tilde{\boldsymbol{u}}, \quad (27)$$

计算得

$$B=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & -c_1 & 0 & -c_2 & 0 & -c_3\\ -c_1 & b_1 & -c_2 & b_2 & -c_3 & b_3\end{bmatrix}, \quad (28)$$

注意这里 $\varepsilon_{xy}=2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}$, 但最后推导出的单元刚度矩阵相同. 应力满足

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\triangleq L\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (29)$$

则

$$K^e=\int_{T^e}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{D}{2}B^{\mathrm{T}}LB. \quad (30)$$

单元载荷向量我们通过数值积分来计算, 这里单元上的数值积分使用 2 阶代数精度的三角形上的 Gauss 积分点, 边界上的线积分使用 3 阶代数精度的一维的 Gauss 积分点.

# 3 数值实验

令体积力 $f_1=f_2=0$, 沿法向受力为 0, 即 $g_1=g_2=0$, 除了左上角的第一个网格, 它的受力为 $\sigma_x=1,\sigma_y=-1,\sigma_{xy}=0$, 则它的两条边的边界条件为

$$g_{l1}=-1,$$

$$g_{l2}=0,$$

$$g_{u1}=0,$$

$$g_{u2}=-1,$$

下标 $l,r,u$ 分别表示左、右、上边界, 下标 $1,2$ 分别表示第一、二个分量.