有限元方法上机作业

段俊明[*]

2017 年 12 月 16 日

1 问题重述

求解正方形区域 $\Omega = [0,10] \times [0,10]$ 上的二维弹性力学方程组混合边值问题. 设边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 位移为 $\boldsymbol{u} = (u,v)^{\mathrm{T}}$, 应变与位移的关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}), \tag{1}$$

应力与应变的关系

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon}) I + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

其中 λ, μ 是拉梅常数, $\lambda = 3.65e4, \lambda + 2\mu = 6.70e4$. 考虑平衡方程,

$$-\sum_{j=1}^{2} \partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$ 是外力, 将应力带入平衡方程,

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, \quad in\ \Omega, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_j = g_i, \quad on\ \Gamma_1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \quad on\ \Gamma_0, \tag{6}$$

其中, Γ_0 是正方形的底边, 使用固定边界条件, Γ_1 是正方形的另外三条边, 使用自由边界条件.

假设精确解为 $u = x^2y^2, v = x^2\sin(y)$, 带入以上方程组得到,

$$f_1 = -\left(2\,y^2 + 2\,x\,\cos y\right)\,(\mu+\lambda) - \mu\,\left(2\,x^2 + 2\,y^2\right),$$

$$f_2 = -\left(4\,x\,y - x^2\,\sin y\right)\,(\mu+\lambda) - \mu\,\left(2\,\sin y - x^2\,\sin y\right),$$

[*]北京大学数学科学学院，科学与工程计算系，邮箱：duanjm@pku.edu.cn

$$g_{l1} = -\lambda(x^2 \cos y + 2xy^2) - 4\mu xy^2,$$

$$g_{l2} = -2\mu(x \sin y + x^2 y),$$

$$g_{r1} = \lambda(x^2 \cos y + 2xy^2) + 4\mu xy^2,$$

$$g_{r2} = 2\mu(x \sin y + x^2 y),$$

$$g_{u1} = 2\mu(x \sin y + x^2 y),$$

$$g_{u2} = \lambda(x^2 \cos y + 2xy^2) + 2\mu x^2 \cos y,$$

下标 l, r, u 分别表示左、右、上边界, 下标 $1, 2$ 分别表示第一、二个分量.

2 数值方法

将原问题化为变分形式: