有限元方法上机作业
——弹性力学平面问题求解

段俊明*

2017 年 12 月 21 日

1 问题重述

先简单介绍三维的弹性力学方程组, 设边界 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续的, 位移为 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$, 应变与位移的关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}), \tag{1}$$

应力与应变的关系

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \lambda tr(\boldsymbol{\varepsilon})I + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2}$$

应变和应力可表示成对称的三阶矩阵, 其中 λ, μ 是拉梅常数, $\lambda = 3.65e10, \lambda + 2\mu = 6.70e10$. 考虑平衡方程,

$$-\sum_{j=1}^{3} \partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ 是体积力, 将应力带入平衡方程,

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, \quad in\ \Omega, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_j = g_i, \quad on\ \Gamma_1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \quad on\ \Gamma_0, \tag{6}$$

其中 Γ_0 是固定边界, 即位移为 0, Γ_1 是自由边界, 即只受法向力.

考虑二维平面应变问题, 即假设 z 方向应变为 0, 有 $u_3 = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{31} = \boldsymbol{\varepsilon}_{32} = \boldsymbol{\varepsilon}_{33} = 0$, 且 $\boldsymbol{\sigma}_{31} = \boldsymbol{\sigma}_{32} = 0$, 由 $\boldsymbol{\sigma}_{33} = \lambda(\boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \boldsymbol{\varepsilon}_{22}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{33}$ 得到 $\boldsymbol{\sigma}_{33} = \lambda(\boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \boldsymbol{\varepsilon}_{22})$.

求解正方形区域 $\Omega = [0, 0.1] \times [0, 0.1]$ 上的平面弹性力学方程组混合边值问题. 其中, Γ_0 是正方形的底边, 使用固定边界条件, Γ_1 是正方形的另外三条边, 使用自由边界条件.

*北京大学数学科学学院，科学与工程计算系，邮箱：duanjm@pku.edu.cn

2 数值方法

取试探函数空间 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{V}(0;\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{u}|_{\Gamma_0} = 0\}$, 及检验函数空间 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}(0;\Omega)$, 将二维的平衡方程乘以 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, 使用 Green 公式

$$\int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \partial_i u v \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma uv\boldsymbol{n}_i \mathrm{d}s, \tag{7}$$

以及边界条件, 得到变分形式

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}(0;\Omega) \tag{8}$$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

$$f(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\boldsymbol{v}\mathrm{d}s. \tag{10}$$

取有限维子空间 $\mathbb{V}_h(0;\Omega)$ 逼近原空间, 上述变分形式变为

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = f(\boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega) \tag{11}$$

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = \int_\Omega \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\boldsymbol{v}_h)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{12}$$

$$f(\boldsymbol{v}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{g}\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}s. \tag{13}$$

取 $\mathbb{V}_h(0;\Omega)$ 上的一组基函数 $\boldsymbol{\phi}_i,\ i = 0,\dots,N_h-1$, 令

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{j=0}^{N_h-1} u_j\boldsymbol{\phi}_j,\ \boldsymbol{v}_h = \sum_{j=0}^{N_h-1} v_j\boldsymbol{\phi}_j, \tag{14}$$

则可以将离散问题(13)等价于, 求 $\boldsymbol{u}_h = (u_0,\dots u_{N_h-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N_h}$, 使得

$$\sum_{i,j=0}^{N_h-1} a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i)u_jv_i = \sum_{i=0}^{N_h-1} (f,\boldsymbol{\phi}_i)v_i, \quad \forall \boldsymbol{v}_h = (v_0,\dots,v_{N_h-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{N_h}, \tag{15}$$

由 $\boldsymbol{v}_h$ 的任意性, 等价于求解线性方程组

$$\sum_{j=0}^{N_h-1} a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i)u_j = (f,\boldsymbol{\phi}_i), \quad i = 0,\dots,N_h-1, \tag{16}$$

记为 $K\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}$, $K = (k_{ij})$.

对区域 Ω 做三角形剖分, 记空间网格尺寸为 h, 记单元为 $T_i,\ i = 0,\dots,M-1$, 节点为 $A_i,\ i = 0,\dots,N-1$, 取分片线性基函数, 即 $\boldsymbol{\phi}_{2i},\boldsymbol{\phi}_{2i+1} \in \mathbb{V}_h(0;\Omega)$, 满足

$$\boldsymbol{\phi}_{2i}(A_j) = (\delta_{ij},0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\phi}_{2i+1}(A_j) = (0,\delta_{ij})^{\mathrm{T}}, \quad i = 0,\dots,N-1, A_i \notin \Gamma_0, \tag{17}$$

这里 $N_h = 2N$.

引入数组 $en(\alpha,e)$, 其中 e 为单元序数, α 为单元的局部基函数序数, 即第 e 个单元的第 α 个基函数对应于第 $en(\alpha,e)$ 个整体节点; 取值为空间坐标的 $cd(i,nd)$, 其中 nd 为整体节点序数, $cd(i,nd)$ 为第 nd 个整体节点的空间坐标的第 i 个分量. 记 $a^e(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{T^e}\sum_{i,j}\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 由刚度矩阵的定义,

$$k_{ij} = a(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i) = \sum_{e=0}^{M-1} a^e(\boldsymbol{\phi}_j,\boldsymbol{\phi}_i) = \sum_{e=0}^{M-1} k_{ij}^e. \tag{18}$$

设 $\alpha,\beta = 0,\ldots,5$ 为 T^e 的 6 个基函数的局部序数, 即 T^e 上 6 个基函数分别为 $\boldsymbol{\phi}_0^e,\ldots,A_5^e$, 定义单元刚度矩阵 $K^e = (k_{\alpha\beta}^e)$,

$$k_{\alpha,\beta}^e = a^e(\boldsymbol{\phi}_\alpha^e,\boldsymbol{\phi}_\beta^e), \tag{19}$$

则可以合成为刚度矩阵 K,

$$k_{ij} = \sum_{\substack{en(\alpha,e)=i\in T^e\\ en(\beta,e)=j\in T^e}} k_{\alpha,\beta}^e. \tag{20}$$

同样计算单元载荷向量 $\boldsymbol{f}^e = (f_\alpha^e)$,

$$f_\alpha^e = \int_{T^e}\boldsymbol{f}\boldsymbol{\phi}_\alpha^e\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{21}$$

则总载荷向量 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ 满足

$$f_i = \sum_{en(\alpha,e)=i\in T^e} f_\alpha^e. \tag{22}$$

生成了刚度矩阵和载荷向量后, 我们即可求解线性方程组得到数值解.

下面计算单元刚度矩阵, 设三角形三个顶点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$, 设点 (x,y) 的重心坐标为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 满足

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & -c_1\\ a_2 & b_2 & -c_2\\ a_3 & b_3 & -c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2,\ b_1 = y_2 - y_3,\ c_1 = x_2 - x_3, \tag{24}$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3,\ b_2 = y_3 - y_1,\ c_2 = x_3 - x_1, \tag{25}$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1,\ b_3 = y_1 - y_2,\ c_3 = x_1 - x_2. \tag{26}$$

D 为三角形面积的 2 倍. 设位移为 $u = u_1\lambda_1 + u_2\lambda_2 + u_3\lambda_3, v = v_1\lambda_1 + v_2\lambda_2 + v_3\lambda_3$, 则应

变满足

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix}\triangleq B\tilde{\boldsymbol{u}}, \tag{27}$$

计算得

$$B=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & -c_1 & 0 & -c_2 & 0 & -c_3\\ -c_1 & b_1 & -c_2 & b_2 & -c_3 & b_3\end{bmatrix}, \tag{28}$$

注意这里 $\varepsilon_{xy}=2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}$, 但最后推导出的单元刚度矩阵相同. 应力满足

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\triangleq L\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{29}$$

则

$$K^e=\int_{T^e}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{D}{2}B^{\mathrm{T}}LB. \tag{30}$$

单元载荷向量我们通过数值积分来计算, 这里单元上的数值积分使用 2 阶代数精度的三角形上的 Gauss 积分点, 边界上的线积分使用 3 阶代数精度的一维的 Gauss 积分点.

3 数值实验

令体积力 $f_1=f_2=0$, 除了左上角的第一个网格的边界上受到法向外力, 其它网格单元边界上法向受力为 0, 左上角的第一个网格它的受力大小为 F, 方向为 $(1,-1)$,

$$g_{l1}=F,$$

$$g_{l2}=0,$$

$$g_{u1}=0,$$

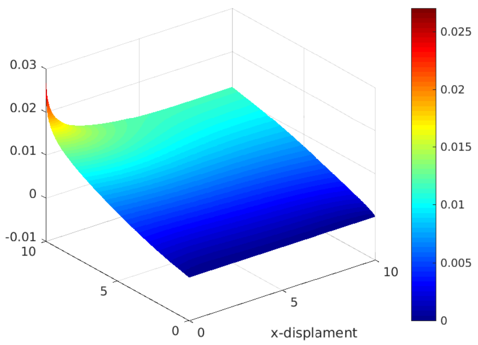
$$g_{u2}=-F,$$

下标 l,u 分别表示左、上边界, 下标 $1,2$ 分别表示第一、二个分量.

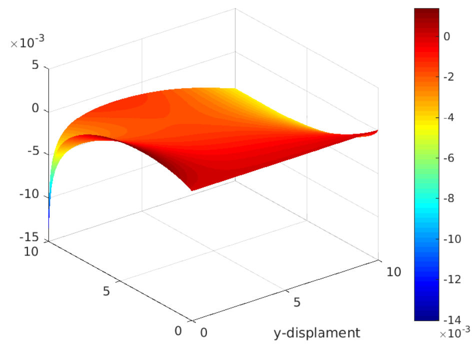
取 $F=1e12$, 计算不同网格下数值解, 网格从 10×10 加密到 1280×1280, 以 1280×1280 下数值解作为精确解计算 L^2 误差.

N	u 的 l^2 范数	u 的 l^2 误差阶	v 的 l^2 范数	v 的 l^2 误差阶
10	0.5897	-	0.1332	-
20	0.2852	1.0477	0.0640	1.0568
40	0.1386	1.0409	0.0308	1.0574
80	0.0669	1.0504	0.0148	1.0585
160	0.0317	1.0763	0.0069	1.0992
320	0.0134	1.2403	0.0029	1.2287
640	0.0046	1.5346	0.0010	1.5527

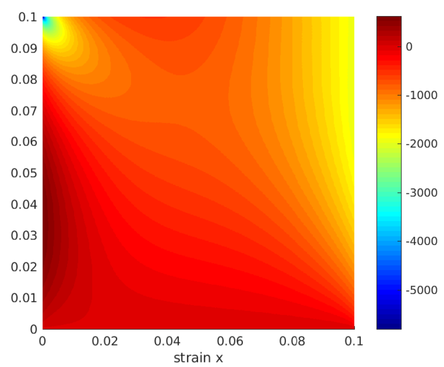
表 1: 位移的精度



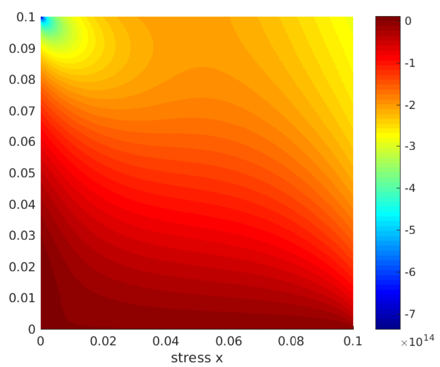
(a) x 方向位移, 网格 640×640



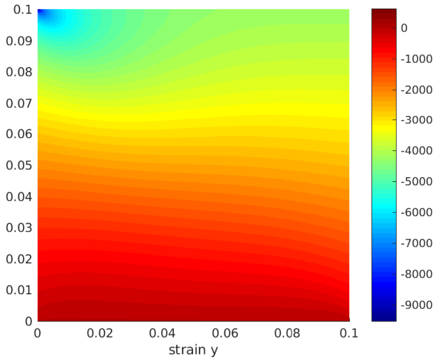
(b) y 方向位移, 网格 640×640



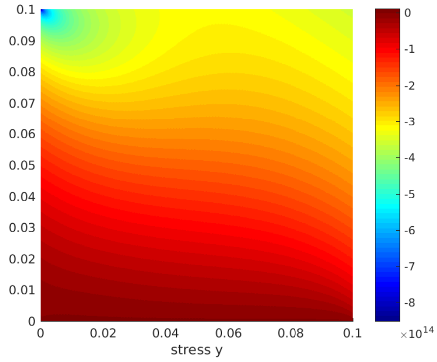
(c) 应变 ε_x, 网格 640×640



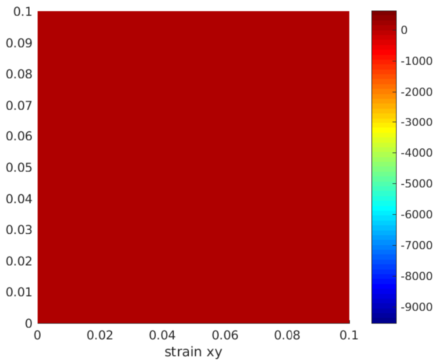
(d) 应力 σ_x, 网格 640×640



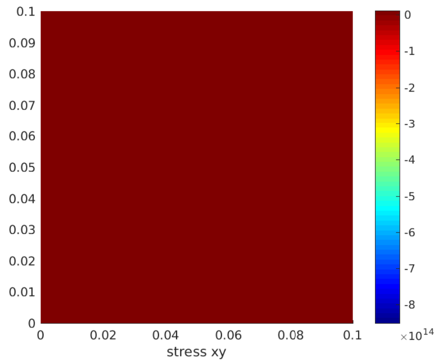
(e) 应变 ε_y, 网格 640×640



(f) 应力 σ_y, 网格 640×640



(g) 应变 ε_{xy}, 网格 640×640



(h) 应力 σ_{xy}, 网格 640×640

表格给出了 L^2 误差和误差阶, 以上图片展示了 640×640 网格下的位移、应变、应力等物理量. 当网格加密时, 数值解是收敛的, 为一阶精度, 当网格加密时, 误差阶在上升. 从图中可以看到, 计算出的结果符合物理直观, 在左上角处位移、应变、应力的绝对值最大, 且满足底边的固定边界条件, 可以认为计算结果是正确的. 作业目录中有位移关于受力的 gif 图片, 展示了外力大小从 $1e11$ 变化到 $9e11$ 的位移二维纹影图, 从中可以看到随着外力增大, 位移随之增大的过程, 更加直观地反映了外力对位移的影响.