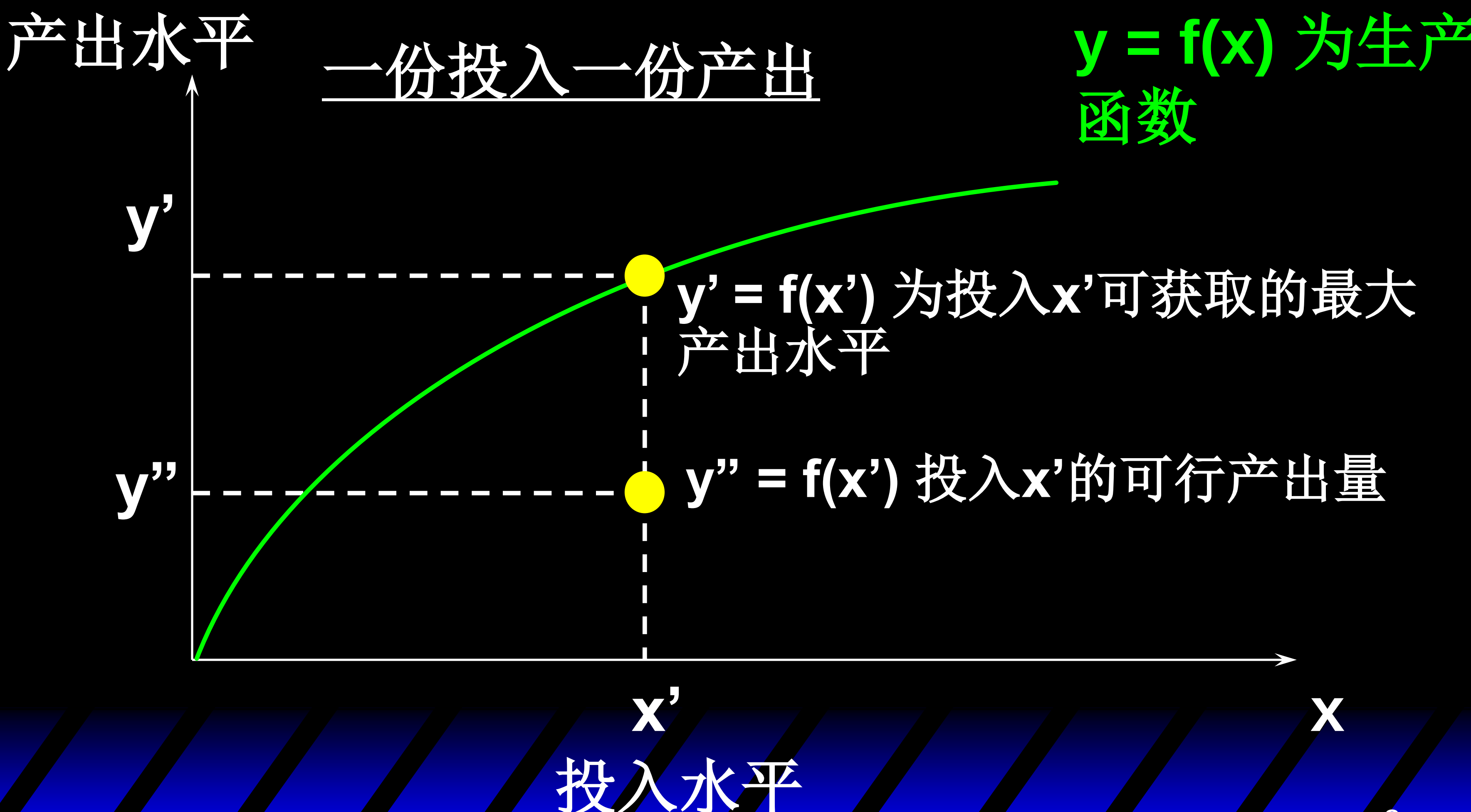
第十八章

技术

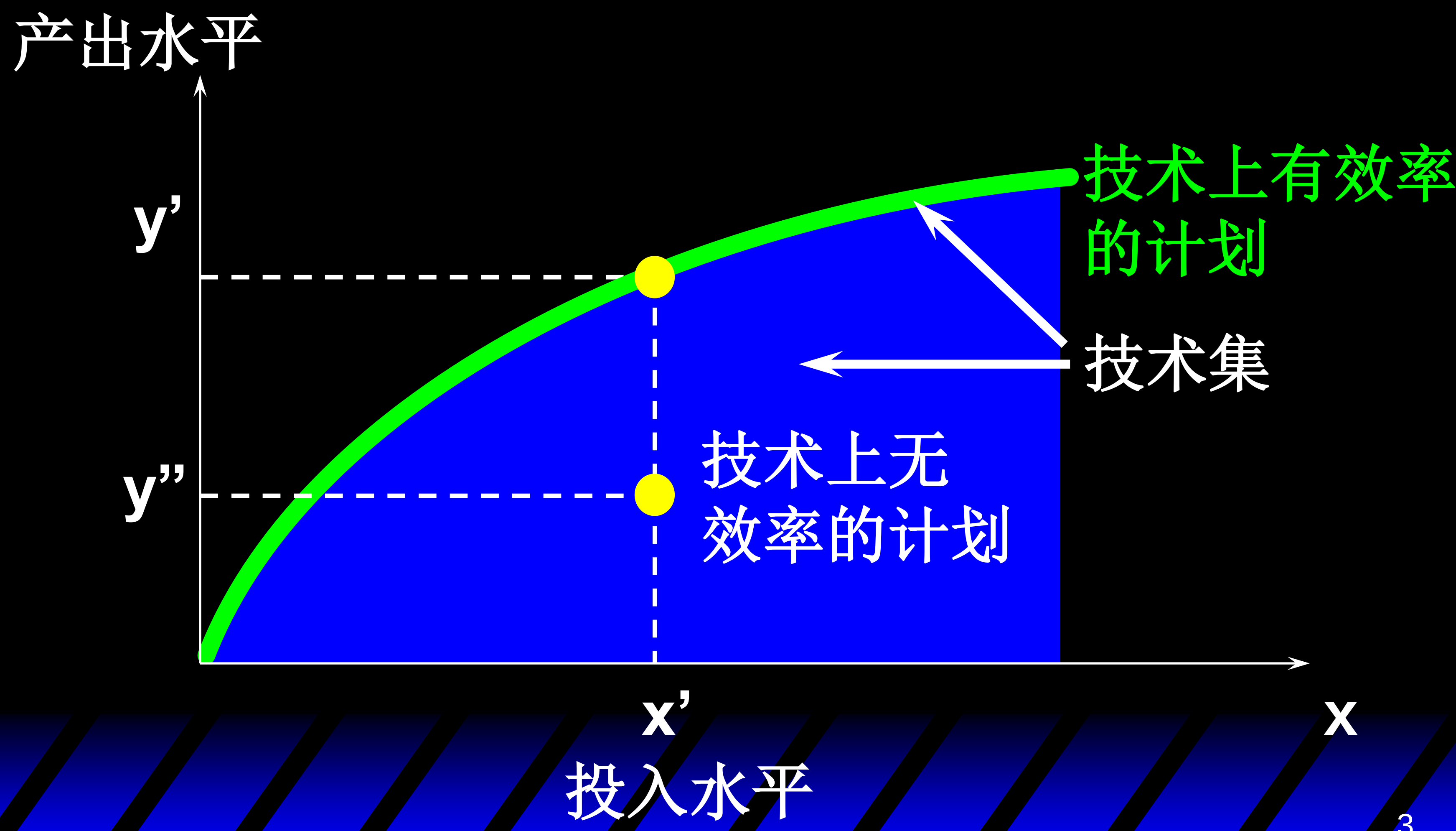
技术集

- 技术是只把投入转换成产出的过程。



技术集

一份投入一份产出



多种投入品的技术

- 假如投入品不止一种，那么技术会是什么样子？
- 两种投入品的例子: 投入水平为 x_1 和x_2. 产出水平为y。
- 假设生产函数为：

$$y = f(x_1, x_2) = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3}.$$

多种投入品的技术

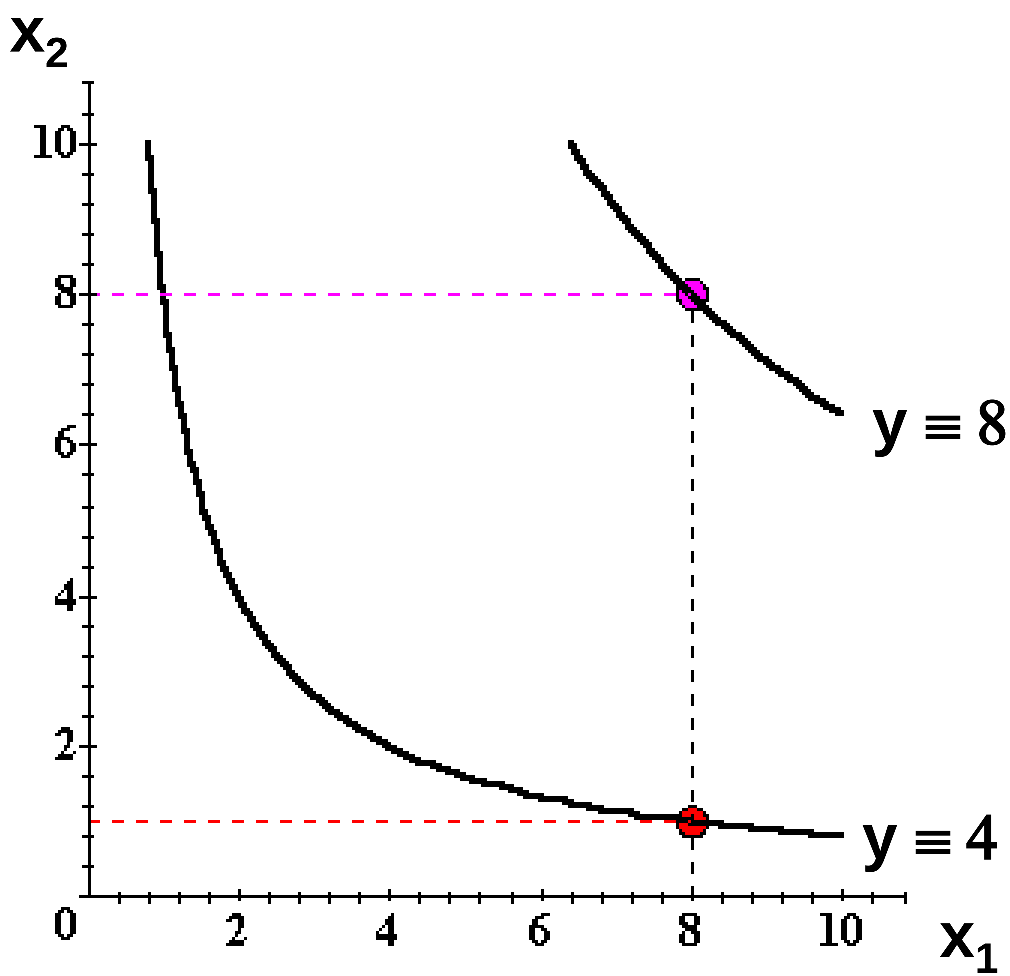
- 例如投入束$(x_1, x_2) = (1, 8)$的最大可行产出为：

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 1^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 1 \times 2 = 4.$$

投入束$(x_1,x_2) = (8,8)$的最大可行产出量为：

$$y = 2x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 2 \times 8^{1/3} \times 8^{1/3} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

两个投入变量的等产量线



等产量线与无差异曲线

产出y的**等产量线**是指最大产出量为y的所有投入束的集合。

- 等产量标记的是可能生产出的产量，由技术决定。

- 无差异曲线标记的是效用水平，效用的标记具有任意性。

固定比例生产函数

- 固定比例生产函数有如下形式：

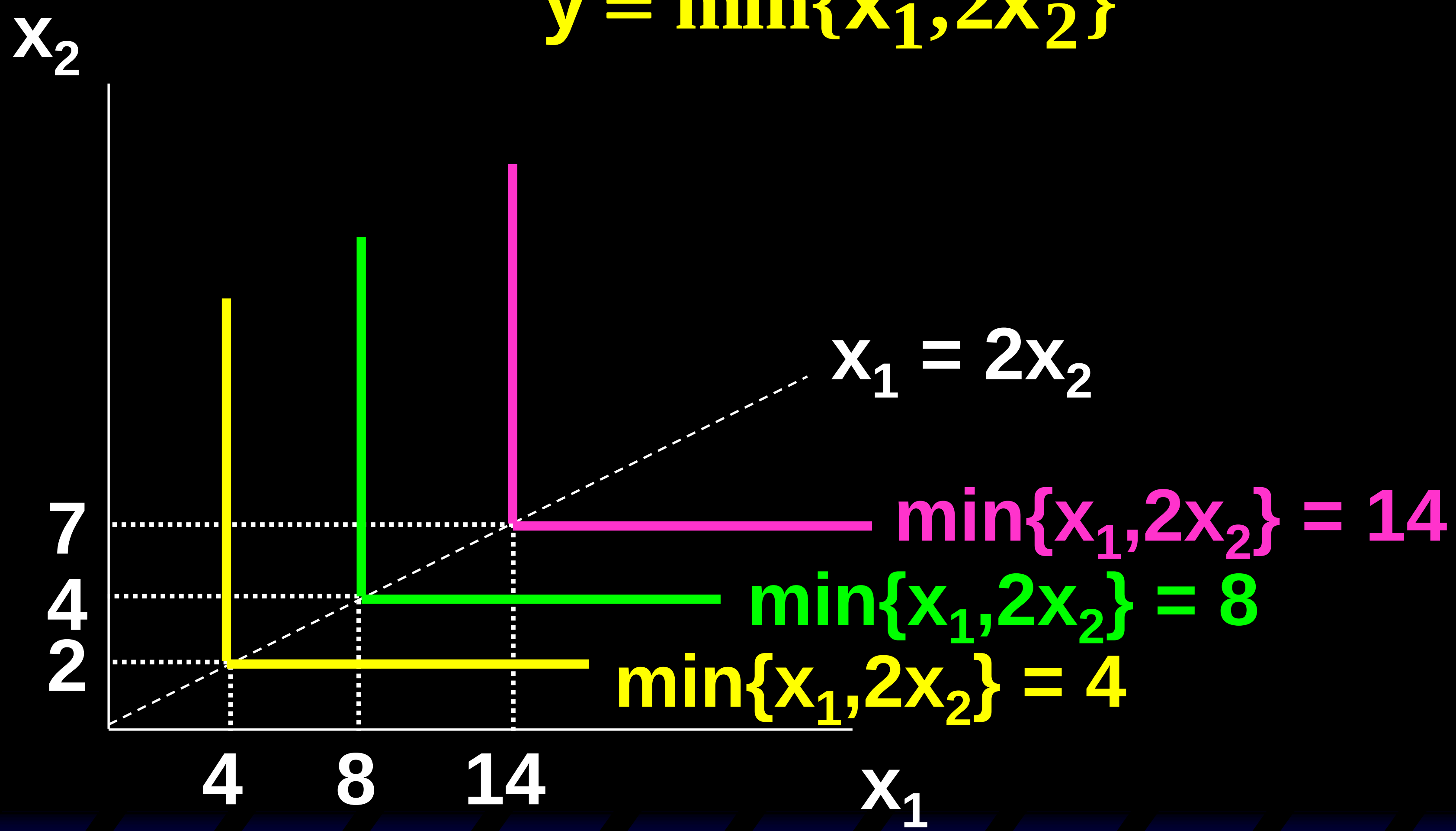
$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n\}.$$

- 例如

$$y = \min\{x_1, 2x_2\}$$

固定比例生产函数

$$y = \min\{x_1, 2x_2\}$$

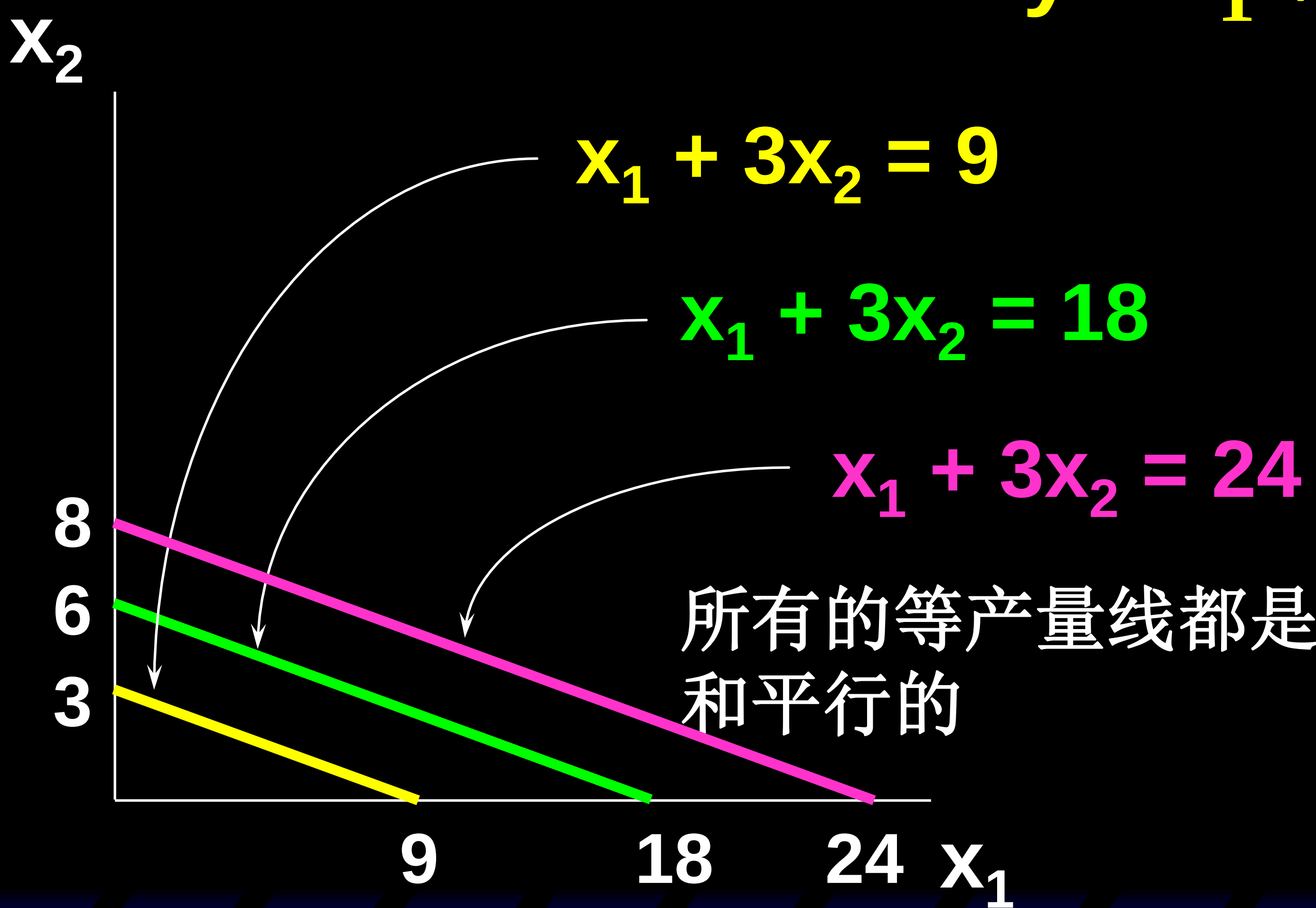


完全替代

- 完全替代的生产函数有如下的形式：
- $$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$
- 例如
$$y = x_1 + 3x_2$$

完全替代函数

$$y = x_1 + 3x_2$$



所有的等产量线都是线性的和平行的

边际产品

$$y = f(x_1, \cdots, x_n)$$

- 投入要素i的边际产出为在其它投入要素不变的情况下，产出变化与要素i投入变化之比。
- 也即

$$MP_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$$

边际产品

例如假如

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

要素1的边际产品为:

$$MP_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}$$

要素2的边际产品为:

$$MP_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{2}{3} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}.$$

边际产品

一般来说，一种要素的边际产品依赖于其它要素的投入量。例如假如

$$MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}x_2^{2/3}$$

假如 $x_2 = 8$,那么 $MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}8^{2/3} = \frac{4}{3}x_1^{-2/3}$

假如 $x_2 = 27$ 那么

$$MP_1 = \frac{1}{3}x_1^{-2/3}27^{2/3} = 3x_1^{-2/3}.$$

边际产品

- 边际产品随着投入要素i的投入量的增加而降低。也即假如

$$\frac{\partial MP_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} < 0.$$

规模效益

- 边际产品测度了单个要素投入量的改变导致的产出变化。
- 规模报酬测度了所有投入要素同等幅度改变时产出的变化。（比如所有要素都加倍或者减半）

规模报酬

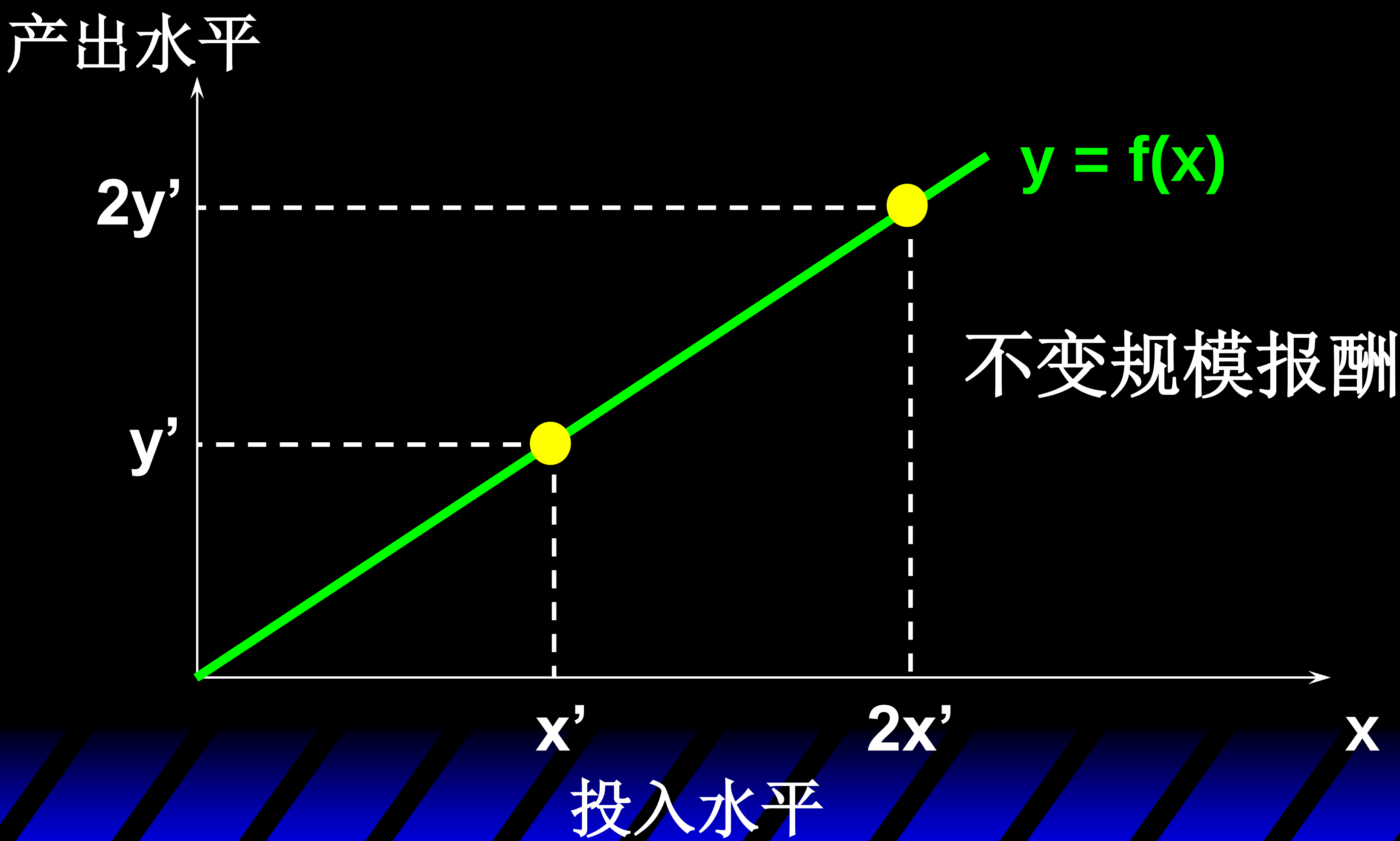
假如对于任意投入束 $(x_1,\ldots,x_n)$,

$$f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)=kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

那么技术通过产出函数f描述了不变的规模报酬。
例如(k = 2) 所有要素加倍使得产出也加倍。

规模报酬

一分投入一份产出



规模报酬

假如对于任意的投入束 $(x_1,\ldots,x_n)$,

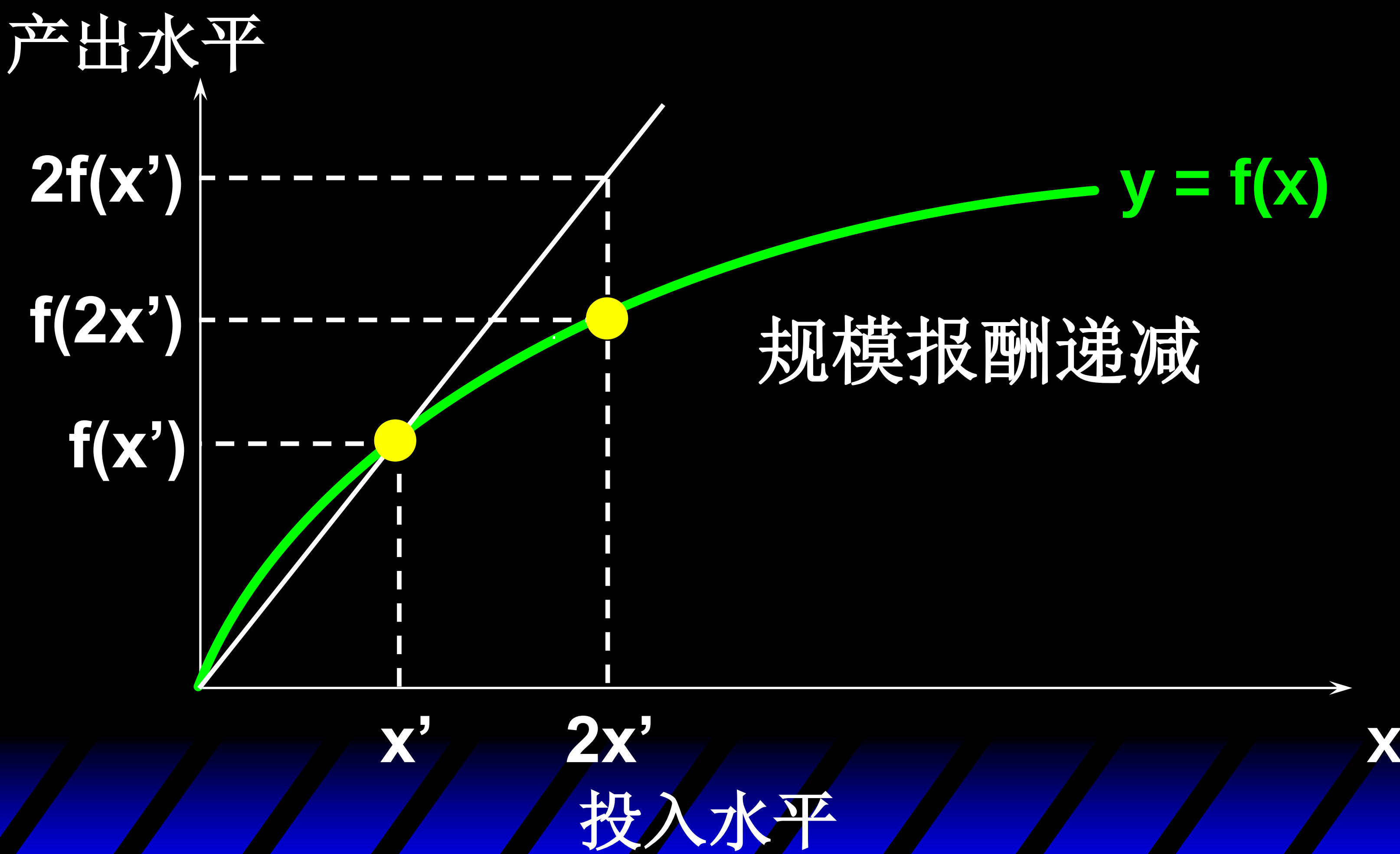
$$f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n) < kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

那么技术显示了**规模报酬递减**。

例如 (k = 2) 投入要素加倍但是产出并没有加倍。

规模报酬

一分投入一分产出



规模报酬

假如对于任意的投入束 $(x_1,\ldots,x_n)$,

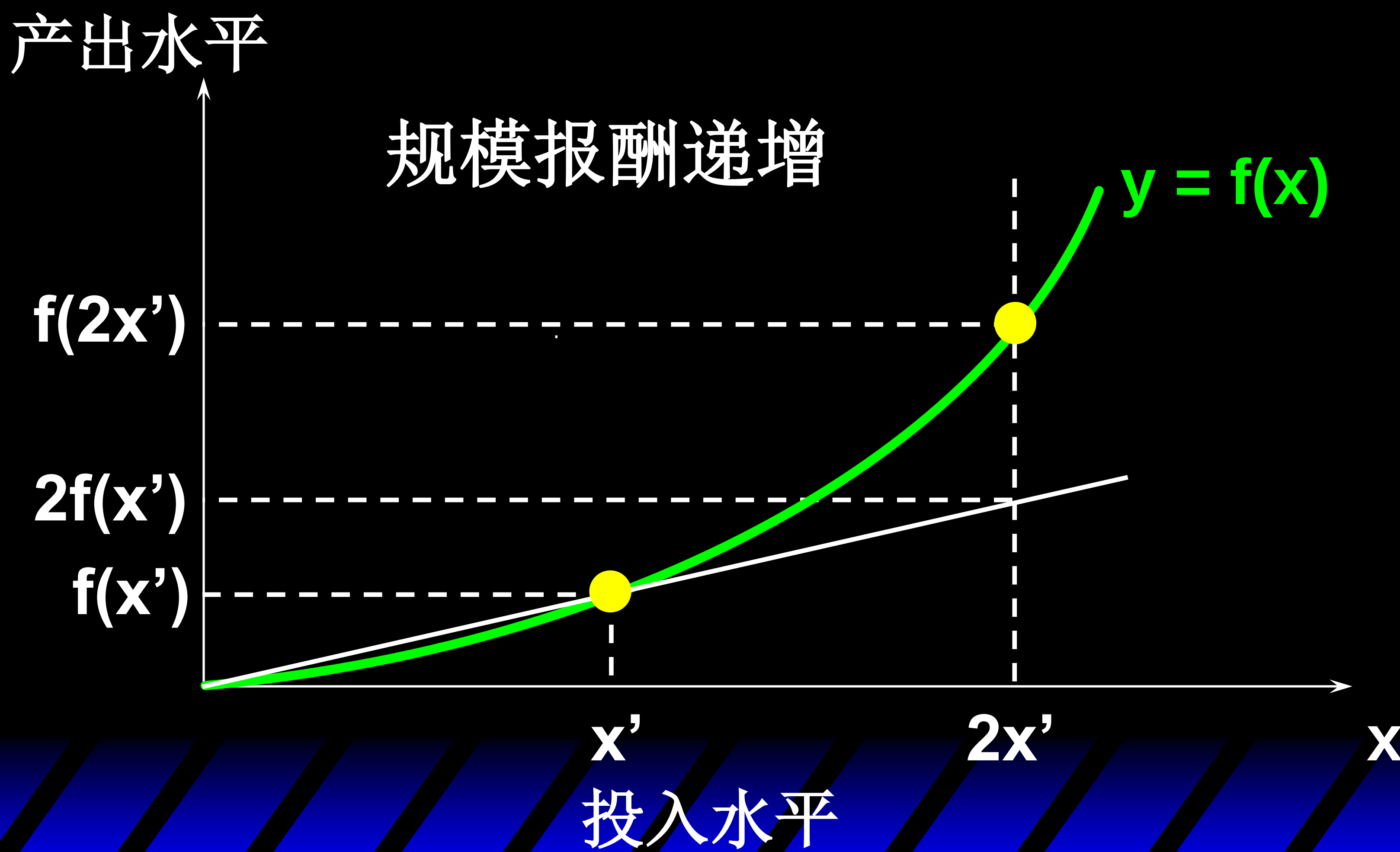
$$f(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n) > kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

那么技术显示了**规模报酬递增**。

例如 (k = 2) 投入要素加倍导致产出水平增加超过两倍。

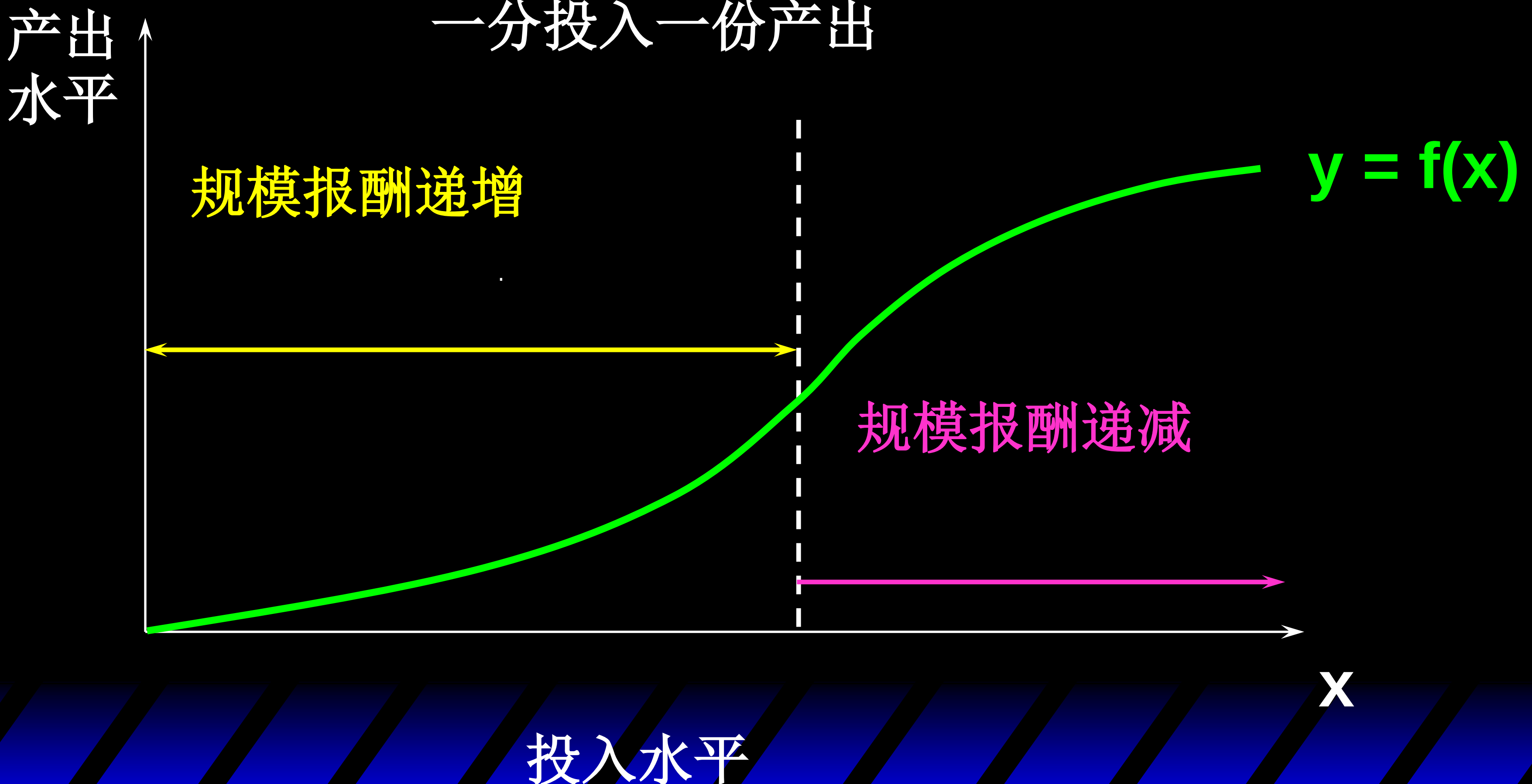
规模报酬

一分投入一份产出



规模报酬

- 单种技术可以在不同位置显示不同规模效益。



规模报酬的例子

完全替代生产函数为：

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

所有投入要素都扩大k倍。产出变为：

$$\begin{aligned} & a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \cdots + a_n(kx_n) \\ &= k(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ &= ky. \end{aligned}$$

完全替代生产函数为规模报酬不变函数。

规模报酬的例子

完全互补生产函数为：

$$y = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots, a_n x_n\}.$$

所有投入要素都扩大k倍，产出变为：

$$\min\{a_1(kx_1), a_2(kx_2), \cdots, a_n(kx_n)\}$$
$$= k(\min\{a_1x_1, a_2x_2, \cdots, a_nx_n\})$$
$$= ky.$$

完全互补生产函数为规模报酬不变的生产函数。

规模报酬的例子

柯布-道格拉斯生产函数为：

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

所有投入要素都扩大k倍，产出变为：

$$(kx_1)^{a_1}(kx_2)^{a_2}\cdots(kx_n)^{a_n}$$

$$= k^{a_1} k^{a_2} \cdots k^{a_n} x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_n}$$

$$= k^{a_1+a_2+\cdots+a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

$$= k^{a_1+\cdots+a_n} y.$$

规模报酬的例子

柯布-道格拉斯生产函数为：

$$y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}.$$

$$(kx_1)^{a_1}(kx_2)^{a_2}\cdots(kx_n)^{a_n} = k^{a_1+\cdots+a_n} y.$$

柯布-道格拉斯函数的规模报酬是不变的。

假如 $a_1 + \ldots + a_n = 1$

递增的 假如 $a_1 + \ldots + a_n > 1$

递减的 假如 $a_1 + \ldots + a_n < 1$.

规模报酬

- Q:是否存在一个生产函数，它的边际产品递减但确实规模报酬递增的？
- A: 存在
- 例如 $y = x_1^{2/3} x_2^{2/3}.$

$$a_1 + a_2 = \frac{4}{3} > 1$$

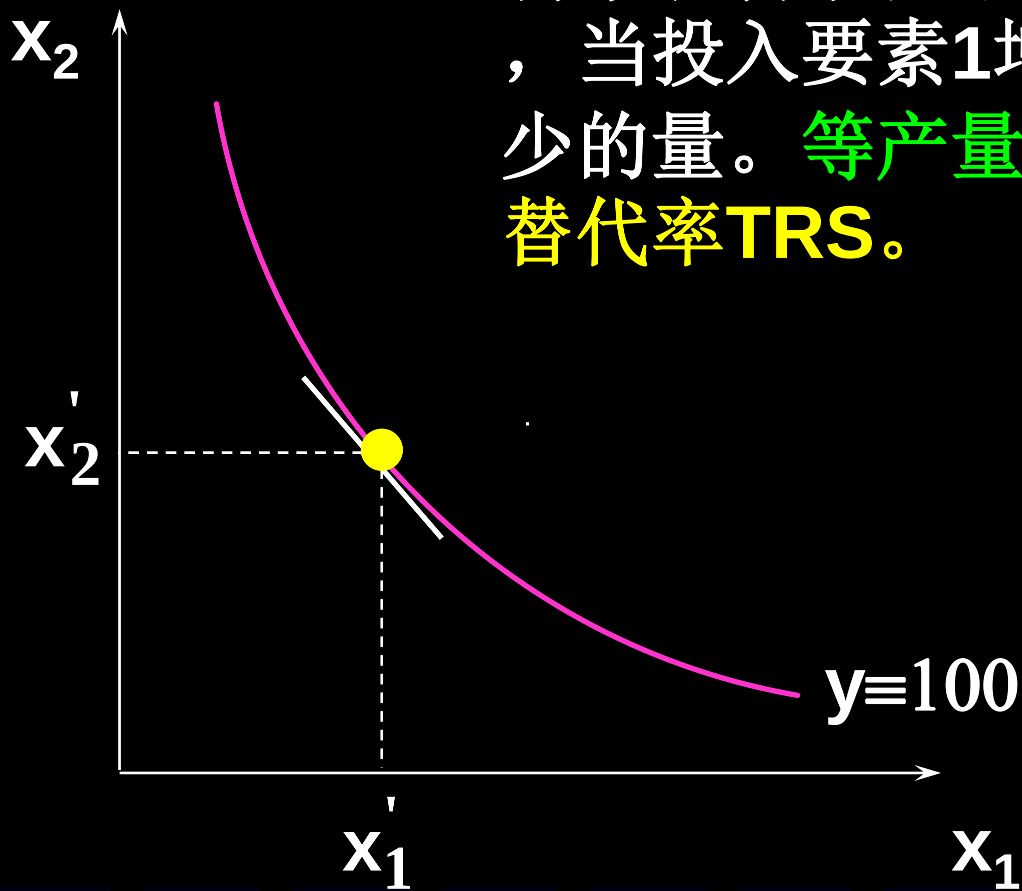
因此这个生产函数展示了递增的规模报酬。

但是 $MP_1 = \frac{2}{3} x_1^{-1/3} x_2^{2/3}$ 随着x_1增加而减小

$MP_2 = \frac{2}{3} x_1^{2/3} x_2^{-1/3}$ 随着x_2增加而减小

技术替代率

斜率表明了在不改变产出的前提下，当投入要素1增加时要素2必须减少的量。等产量线的斜率即为技术替代率TRS。



技术替代率

- 技术替代率如何计算?
- 生产函数为： $y = f(x_1, x_2).$
- 投入束的微小改变导致产出的改变量为：

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

但是 dy = 0 因为产出没有改变，因此 dx_1和 dx_2 必须满足下式：

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2.$$

技术替代率

重新整理得

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1$$

因此

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}.$$

表示了在保持产出不变的前提下，要素1增加时要素2必须减少的数量，也即等产量线的斜率。

技术替代率： 柯布-道格拉斯的例子

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

因此 $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = a x_1^{a-1} x_2^b$ 且 $\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = b x_1^a x_2^{b-1}.$

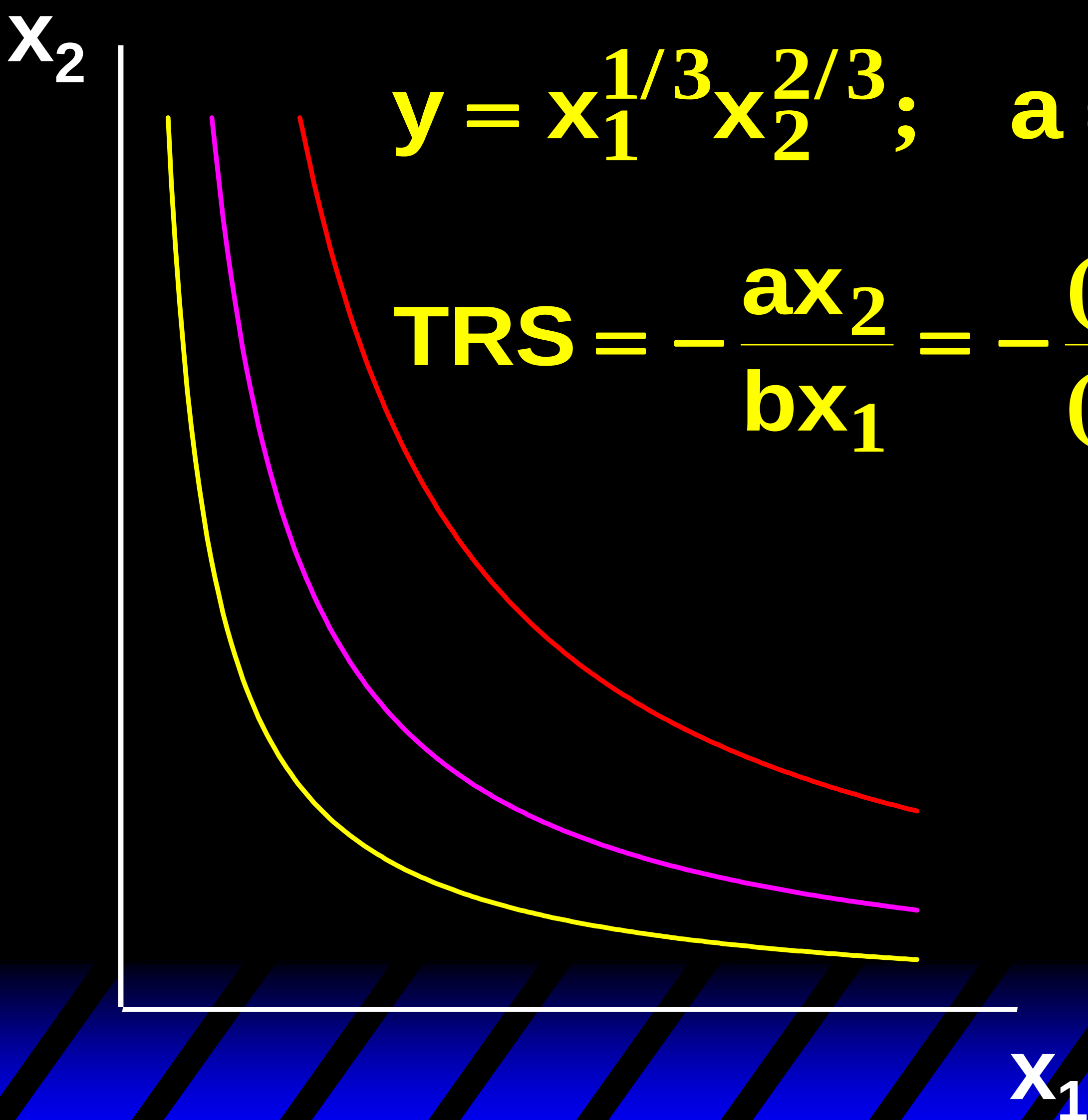
技术替代率为：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{a x_1^{a-1} x_2^b}{b x_1^a x_2^{b-1}} = -\frac{a x_2}{b x_1}.$$

技术替代率：柯布-道格拉斯的例子

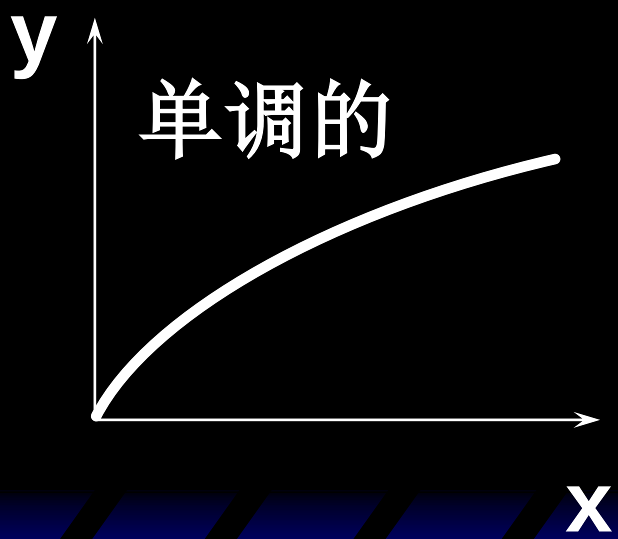
$$y = x_1^{1/3} x_2^{2/3}; \quad a = \frac{1}{3} \text{ and } b = \frac{2}{3}$$

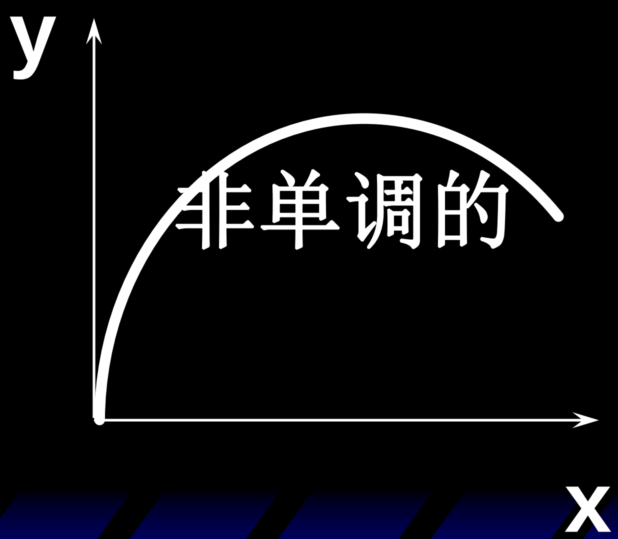
$$TRS = -\frac{a x_2}{b x_1} = -\frac{(1/3) x_2}{(2/3) x_1} = -\frac{x_2}{2 x_1}$$



性状良好的生产函数- 单调性

- 性状良好的生产函数的特点：
  - 单调的
  - 凸的
- 单调性：任何要素投入量的增加会带来更多的产出。

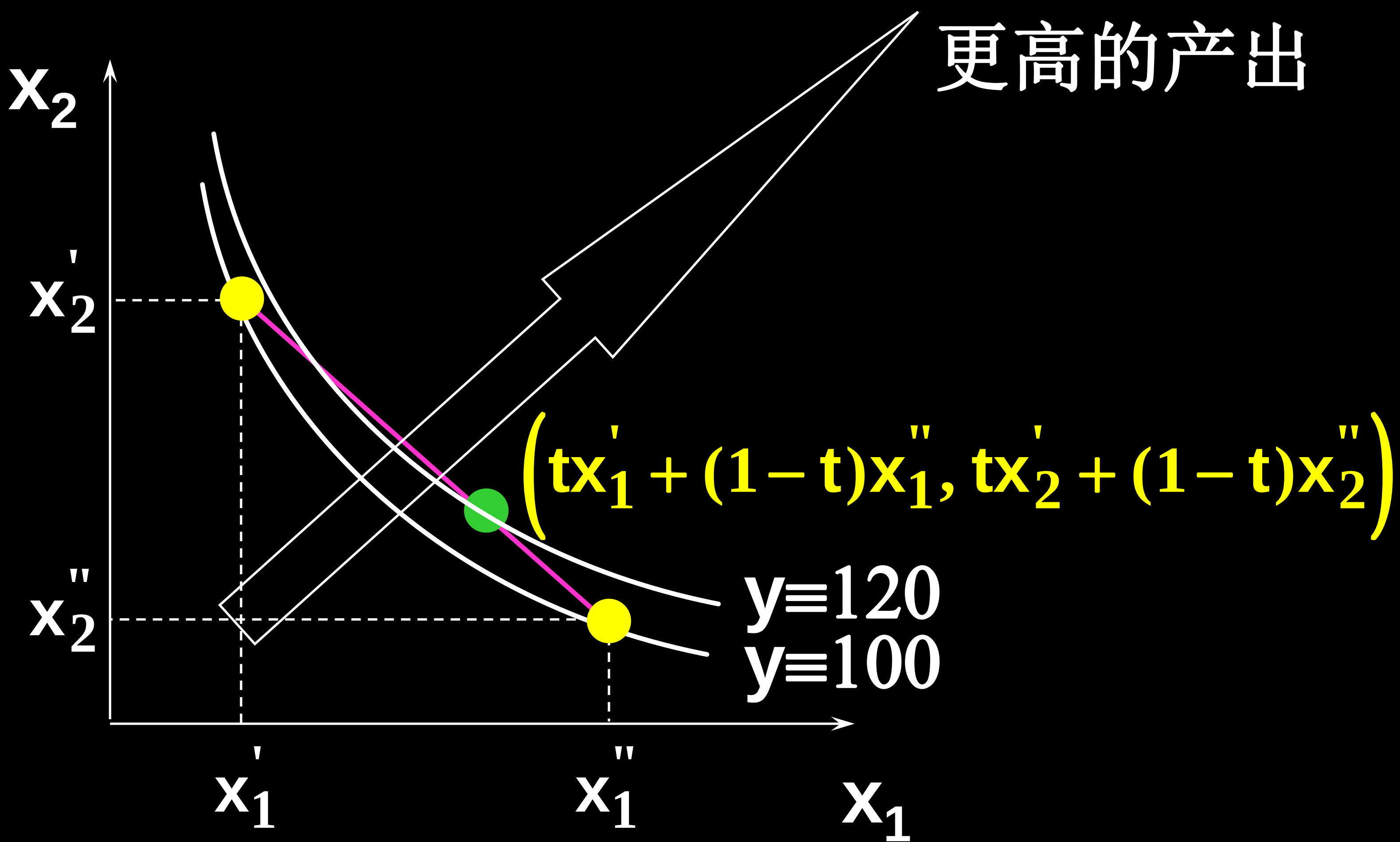




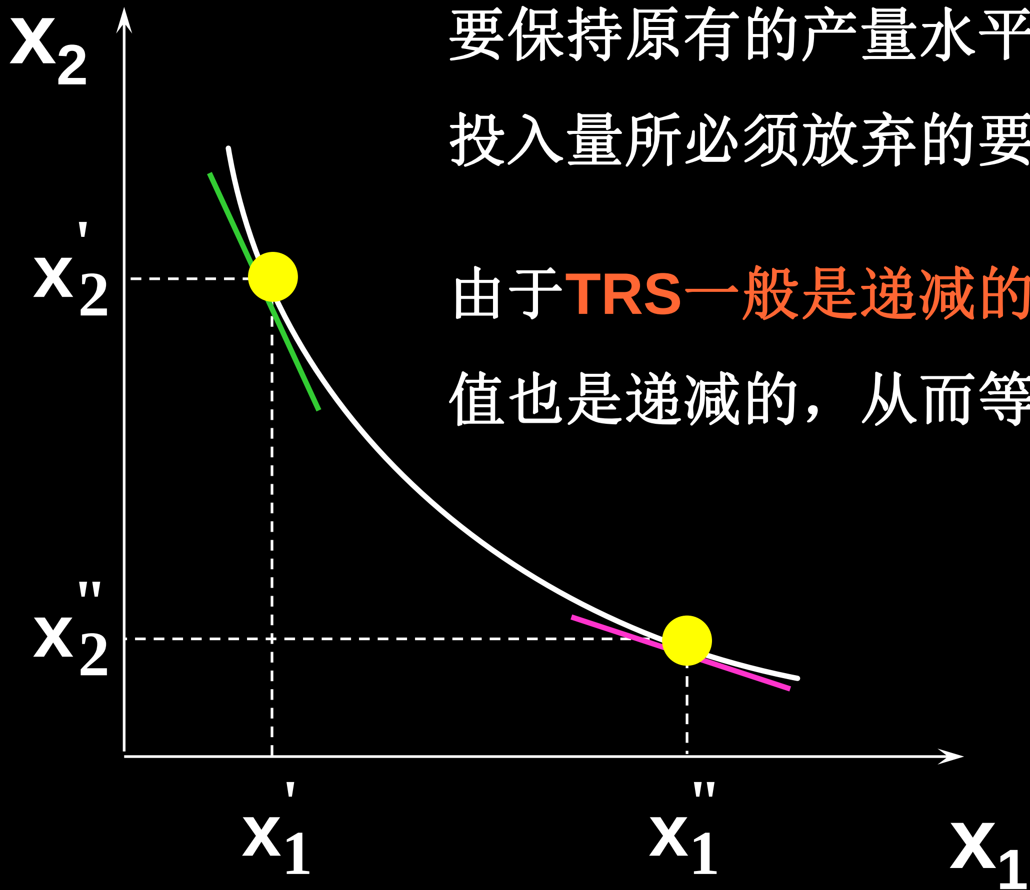
性状良好的生产函数- 凸性

- 凸性：假如投入束x’ 和 x” 都能生产出y单位产出，那么投入束的组合 tx’ + (1-t)x”至少能够生产出y单位产出，对于任意0 < t < 1。

性状良好的生产函数- 凸性



性状良好的生产函数- 凸性



要保持原有的产量水平不变，每增加要素1的投入量所必须放弃的要素2的量会越来越少。

由于TRS一般是递减的，等产量线斜率的绝对值也是递减的，从而等产量线通常凸向原点

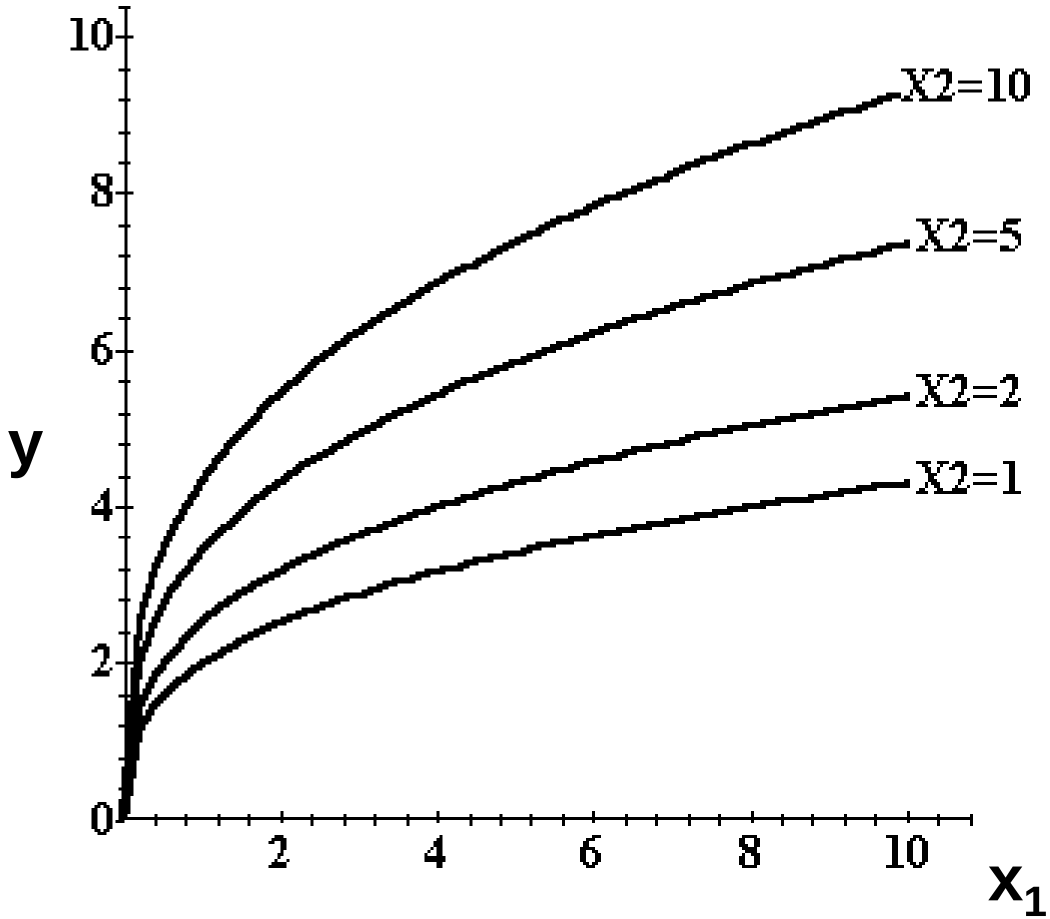
长期与短期

- 从长期来看，厂商的所有投入要素的投入量都可以改变
- 从短期来看，厂商只有某些投入要素的投入量是可变的
- 厂商面对的短期限制条件：
  - 暂时不能安装转移机械设备。
  - 短期融资困难。
  - 暂时找不到特定技术的工人。

长期与短期

- 短期限制意味着厂商的生产函数有什么特点?
- 假设短期限制为投入要素2的投入量固定。
- 投入要素2因此在短期内成为一个固定投入要素。投入要素1为可变量。

长期与短期



四个短期生产函数