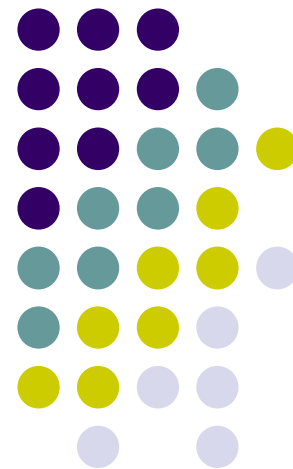


8、斯勒茨基方程

本章要点：

1. 替代效应
2. 收入效应
3. 收入效应和替代效应的例子
4. 替代效应的两种定义



价格变化的效应



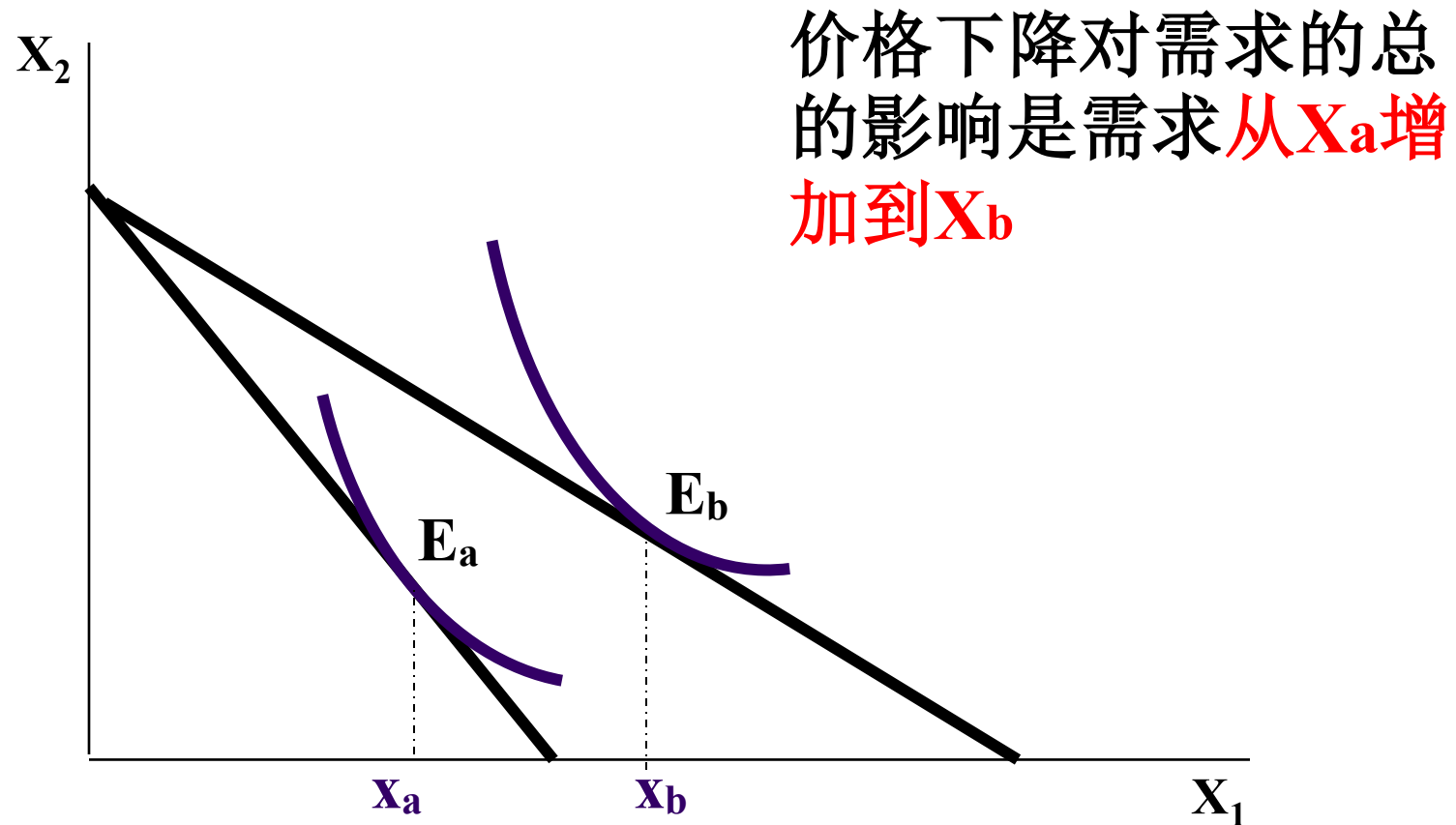
- 斯勒茨基揭示出由于价格变化导致的需求变化是替代效应和收入效应的加总。
- 当一种商品的价格下降时，会产生两种效应：
 - 1、 **替代效应(substitution effect)**：用一种商品交换另一种商品的比例发生了变化。商品1将变得相对便宜，于是消费者消费更多的这种商品，替代相对较贵的商品。这种购买力保持不变，由于交换比例（相对价格）发生变化引起的需求变化叫做替代效应。

价格变化的效应



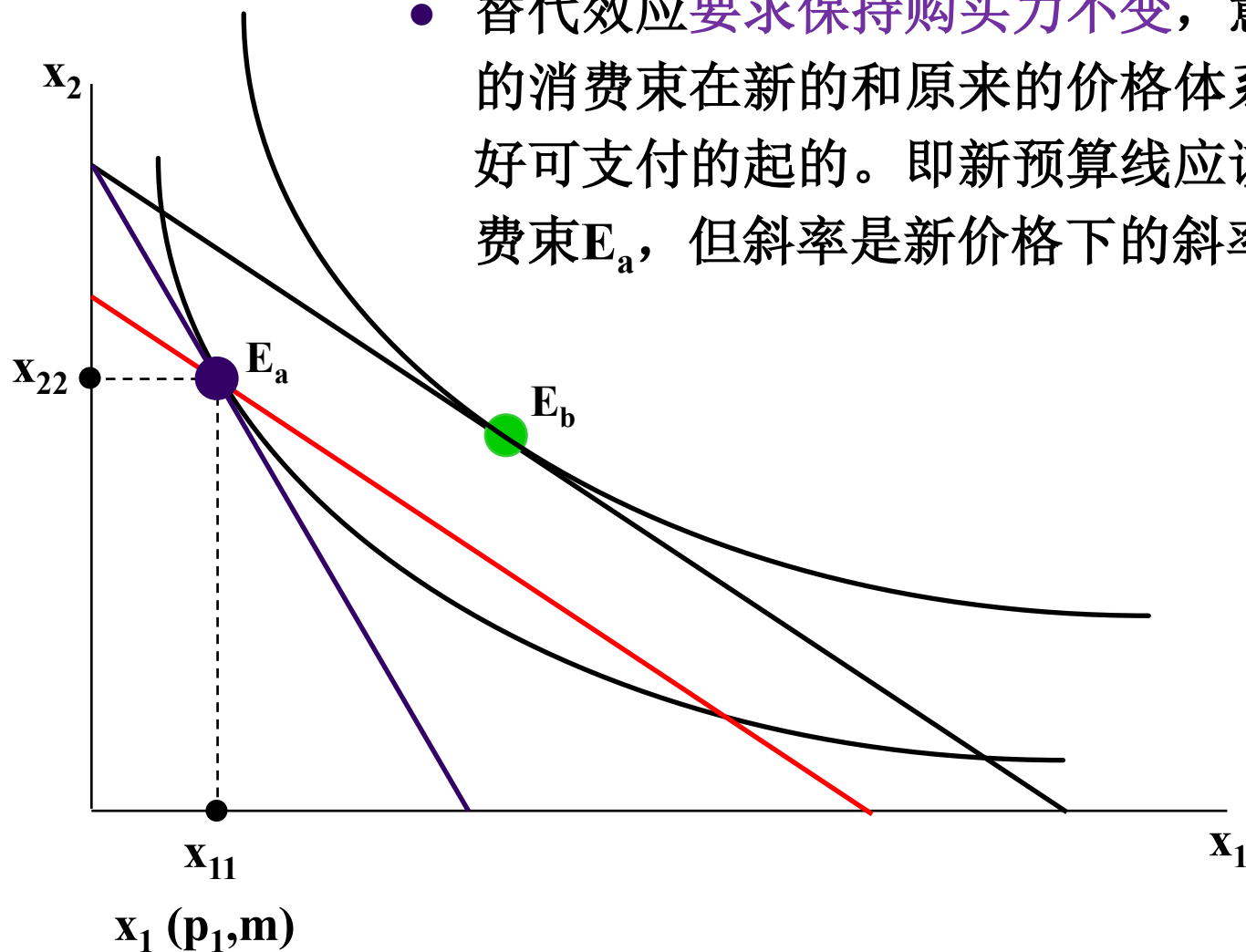
- 当一种商品的价格下降时，会产生两种效应：
 - 2、 **收入效应 (income effect)**：原有收入的购买力发生了变化。因为商品1价格下降，原来的收入可以购买更多的商品1，即货币的购买力提高了。这种交换比例（相对价格）保持不变，由于购买力的变化而导致的需求变化，叫做收入效应。

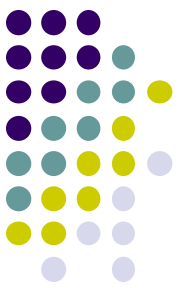
价格变化的总效应



1、替代效应

- 替代效应要求保持购买力不变，意味着原来的消费束在新的和原来的价格体系下都是正好可支付的起的。即新预算线应该过原来消费束 E_a ，但斜率是新价格下的斜率。





替代效应——保持购买力不变

设原来的消费束为 (x_1, x_2) ，要保持购买力不变，这个消费束仍然处在转动后的预算线上。计算货币收入的调整量。

设 m' 表示价格变动后恰好能使原来的消费束可以支付的货币收入；这也一定是转动后的预算线所代表的货币收入量。

$$\begin{cases} m' = p'_1 x_1 + p_2 x_2 \\ m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow m' - m = x_1 (p'_1 - p_1) \Rightarrow \Delta m = x_1 \Delta p_1$$

（注意：收入与价格总是同方向变动，如果价格上升，必须提高收入才能保持购买力不变。）

举例



- 假设消费者最初消费**20**支棒棒糖，价格为每支**50**美分。如果棒棒糖的价格提高到**60**美分，要使原先的消费束能够支付的起，收入应该如何变动？

$$\Delta p = p'_1 - p_1 = 0.6 - 0.5 = 0.1 \text{ 美元}$$

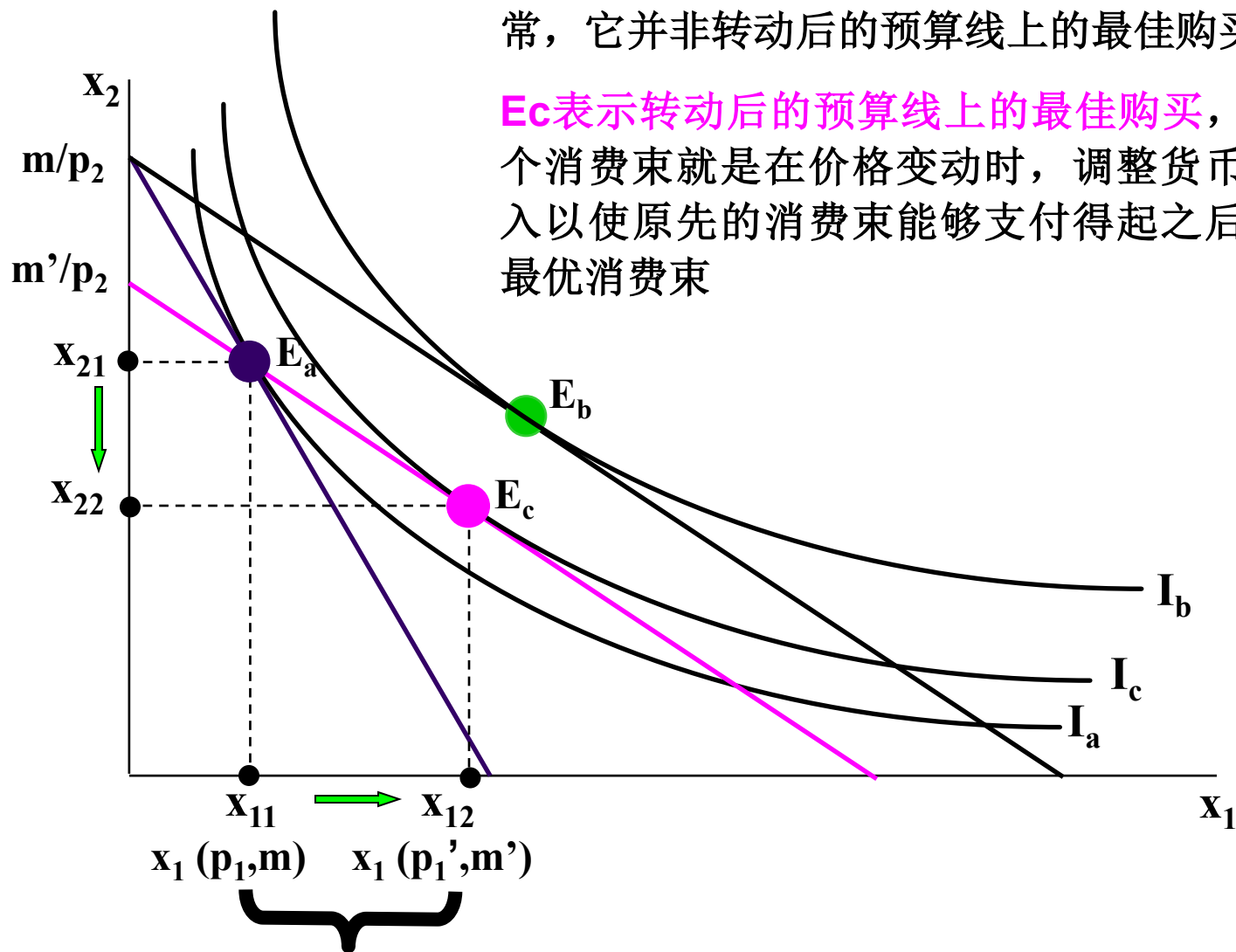
$$\Delta m = x_1 \Delta p_1 = 20 \times 0.1 = 2 \text{ 美元}$$

- 如果消费者的收入增加**2**美元，他就恰好能消费与原先数量相同的**20**支棒棒糖



尽管 (x_{11}, x_{21}) 仍然是可支付的，但是通常，它并非转动后的预算线上的最佳购买

Ec表示转动后的预算线上的最佳购买，这个消费束就是在价格变动时，调整货币收入以使原先的消费束能够支付得起之后的最优消费束



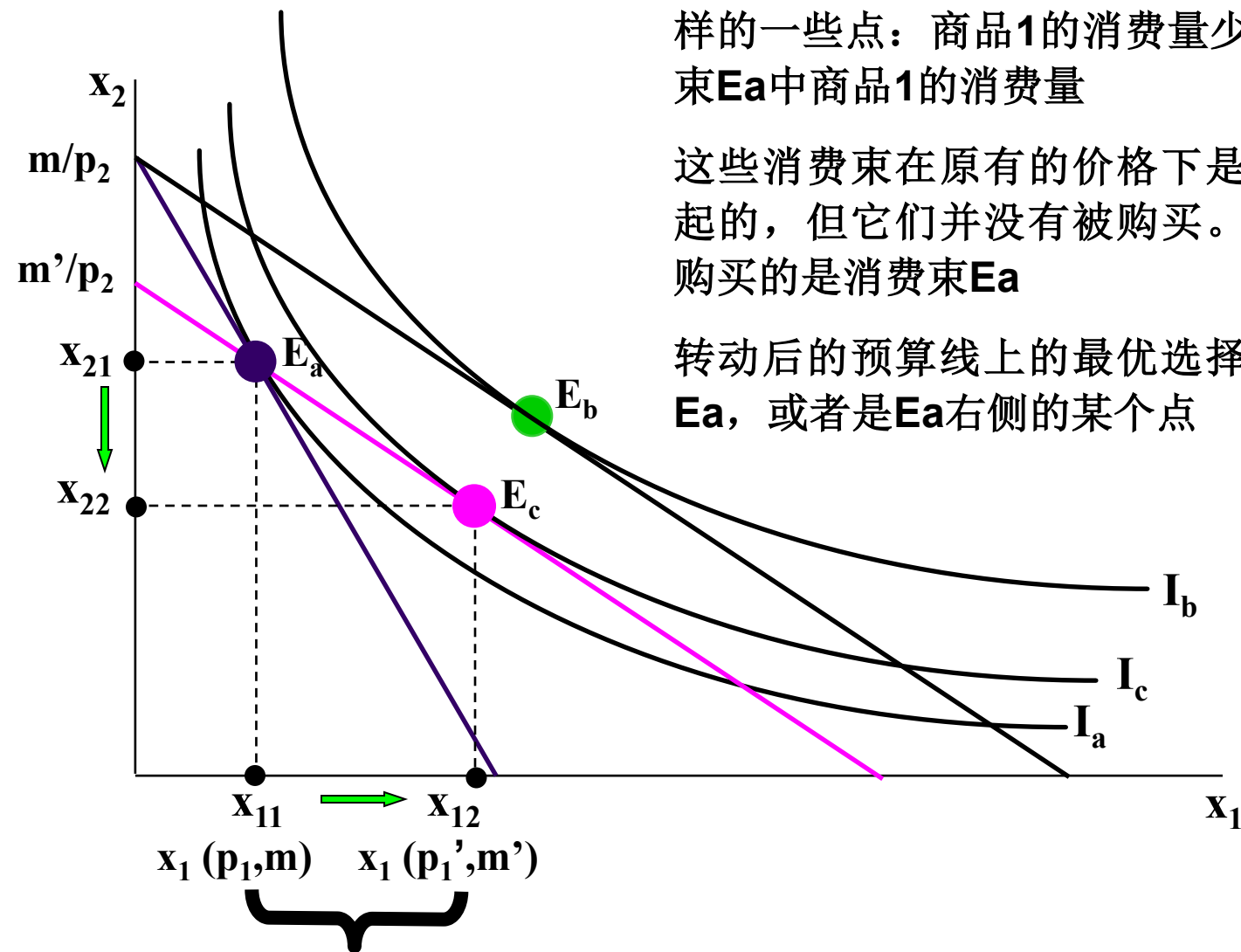
替代效应



考察左图中位于转动后的预算线上这样的一些点：商品1的消费量少于消费束Ea中商品1的消费量

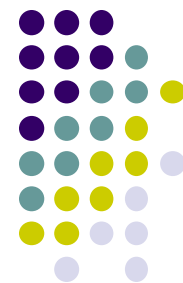
这些消费束在原有的价格下是支付得起的，但它们并没有被购买。相反，购买的是消费束Ea

转动后的预算线上的最优选择必定是Ea，或者是Ea右侧的某个点



替代效应

替代效应



替代效应 Δx_1^s 衡量的是商品1 的价格变动至 p_1' ，同时货币收入变动至 m' 时，商品1 的需求发生的变化，即：

$$\Delta x_1^s = x_1(p_1', m') - x_1(p_1, m)$$

替代效应也称作**补偿的需求变动**

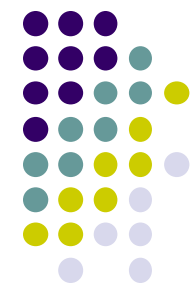
-当P上升时，作为补偿，消费者获得足够多的收入，从而恰好能购买原先的消费束

替代效应举例

- 假设消费者对牛奶的需求是：

$$x_1 = 10 + \frac{m}{10p_1}$$

- 起初，它的收入是\$ 120。
牛奶的价格是每品脱\$3。现在牛奶的价格下降到每品脱\$2，请问收入应该变化多少？
替代效应是多少？


$$x_1(p_1, m) = x_1(3, 120) = 10 + \frac{m}{10p_1}$$

$$= 10 + \frac{120}{10 \times 3} = 14$$

$$\Delta m = x_1 \Delta p_1 = 14 \times (2 - 3) = -14 \text{ 美元}$$

$$m' = m + \Delta m = 120 - 14 = 106 \text{ 美元}$$

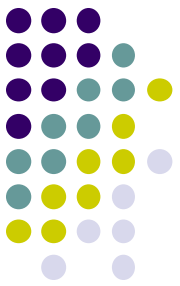
$$x_1(p'_1, m') = x_1(2, 106) = 10 + \frac{106}{10 \times 2} = 15.3$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1^s &= x_1(p'_1, m') - x_1(p_1, m) \\ &= x_1(2, 106) - x_1(3, 120) \\ &= 15.3 - 14 = 1.3 \end{aligned}$$



替代效应的符号

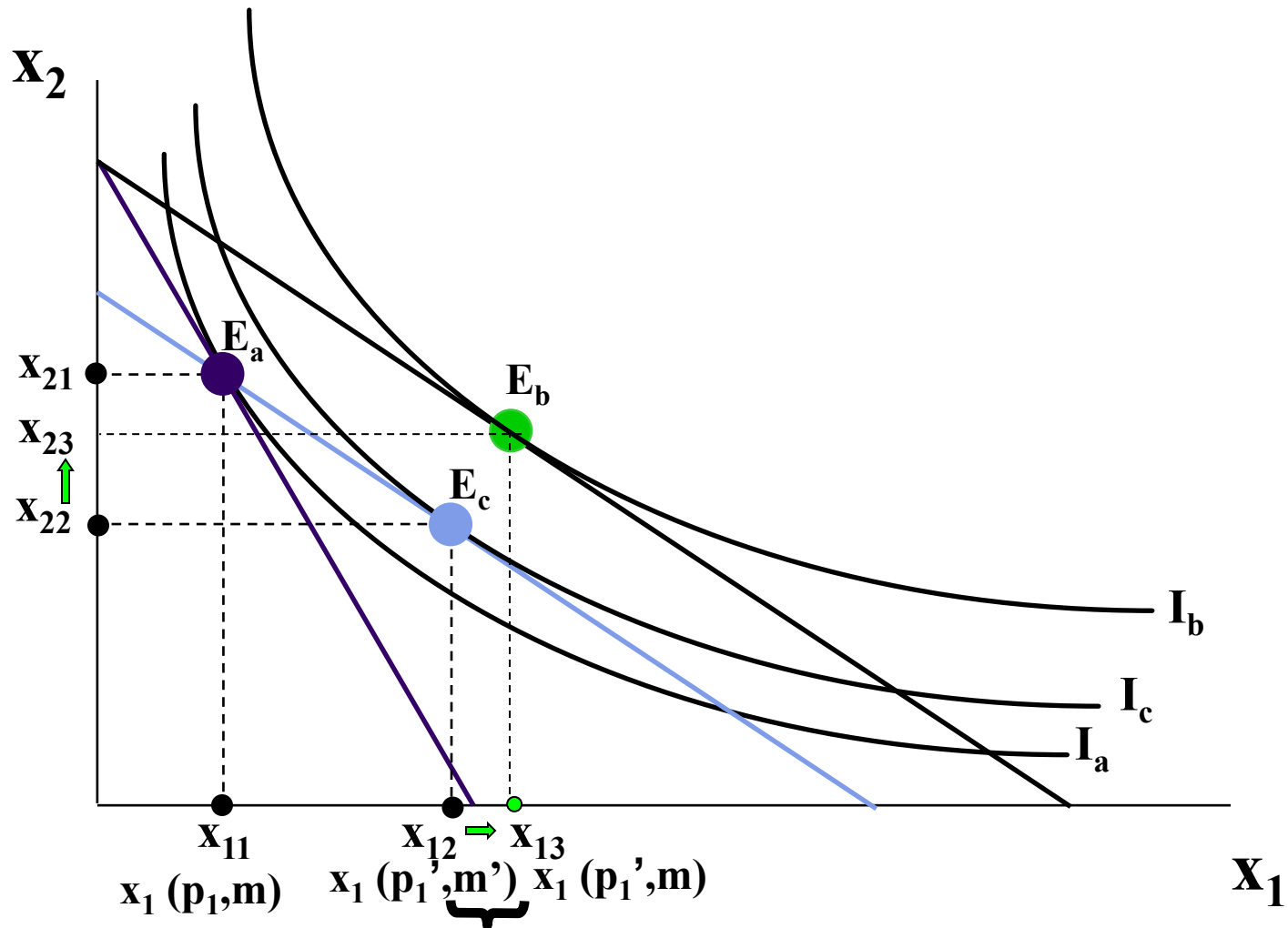
- 替代效应的符号是负的，即和价格变化的方向是相反的！
- 即：如果一种商品的价格下降，因替代效应导致的这种商品的需求的变动是上升的；如果一种商品的价格上升，因替代效应导致的这种商品的需求的变动是下降。



2、收入效应

- 收入效应是指让消费者的收入发生变化，而相对价格不变时，商品的需求变动。
- 确切的说，收入效应 Δx_1^I 衡量的是商品1 的价格保持在 p' 不变，同时货币收入从 m' 变化至 m 时，商品1 的需求发生的变化，即：

$$\Delta x_1^I = x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')$$

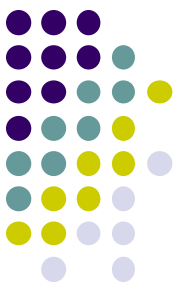


收入效应



收入效应的符号

- 注意：收入效应可以在两个方向发生作用，既可以增加商品1的需求，也可以降低商品1的需求，**取决于商品1是正常商品还是低档商品。**
- 也就是说，收入效应可以为正，也可以为负。



收入效应举例

- 假设消费者对牛奶的需求是：

$$x_1 = 10 + \frac{m}{10p_1}$$

- 起初，它的收入是120美元。牛奶的价格是每品脱\$3。现在牛奶的价格下降到每品脱\$2，请问收入效应是多少？

$$x_1(p'_1, m) = x_1(2, 120) = 10 + \frac{m}{10p_1}$$

$$= 10 + \frac{120}{10 \times 2} = 16$$

$$\Delta m = x_1 \Delta p_1 = 14 \times (2 - 3) = -14 \text{ 美元}$$

$$m' = m + \Delta m = 120 - 14 = 106 \text{ 美元}$$

$$x_1(p'_1, m') = x_1(2, 106) = 10 + \frac{106}{10 \times 2}$$

$$= 15.3$$

$$\Delta x_1^I = x_1(p'_1, m) - x_1(p'_1, m')$$

$$= x_1(2, 120) - x_1(2, 106)$$

$$= 16 - 15.3 = 0.7$$



需求的总变动

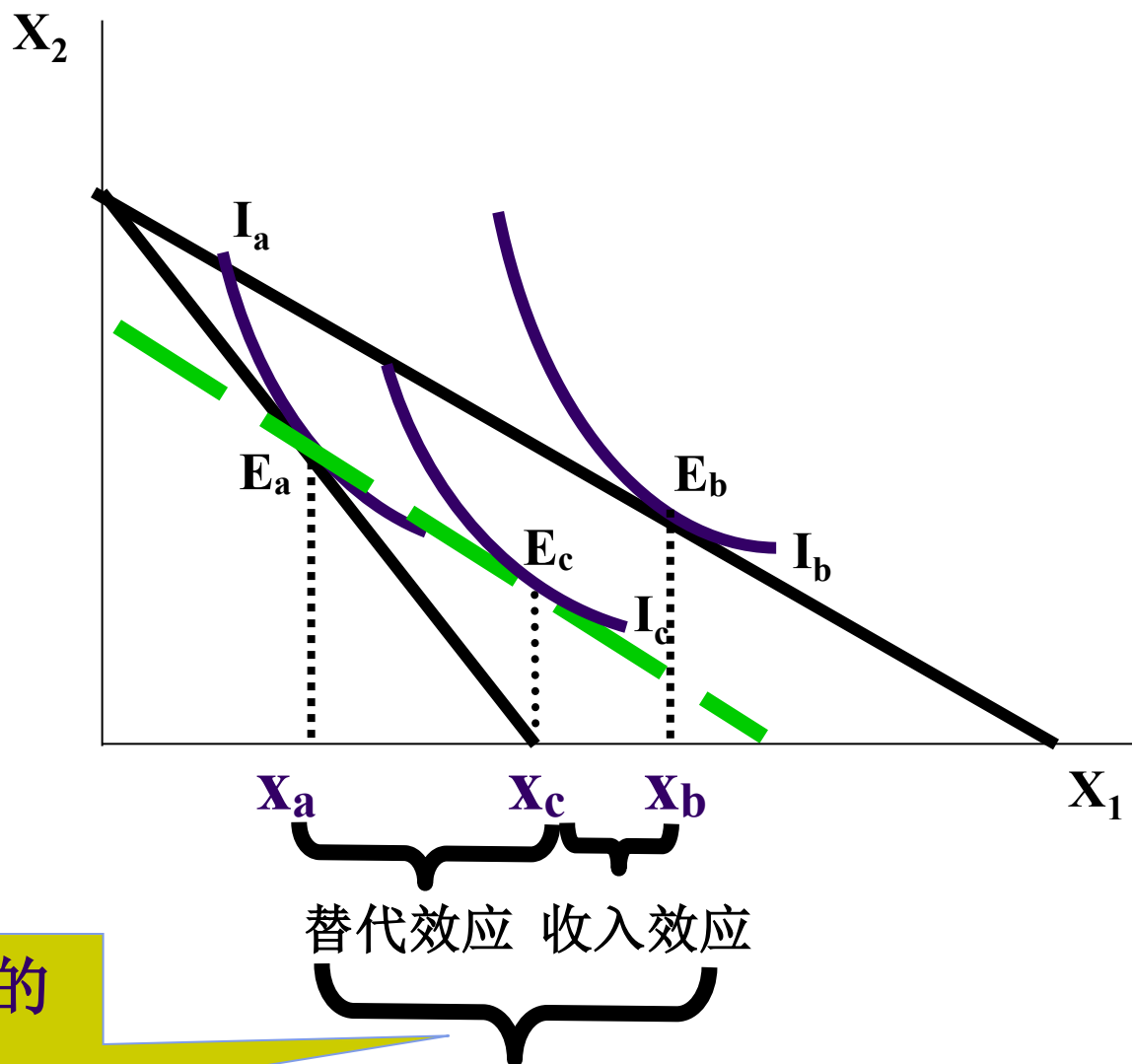
- 需求的总变动，是在收入保持不变的情况下由价格变动引起的需求变动

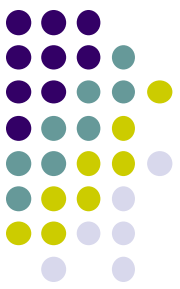
$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1(p_1', p_2, m) - x_1(p_1, p_2, m) \\ &= [x_1(p_1', p_2, m') - x_1(p_1, p_2, m)] + [x_1(p_1', p_2, m) - x_1(p_1', p_2, m')] \\ &= \Delta x_1^s + \Delta x_1^n\end{aligned}$$

- 斯勒茨基（Slutsky）方程（斯勒茨基恒等式）

该方程表明需求的总变动等于替代效应和收入效应的和。

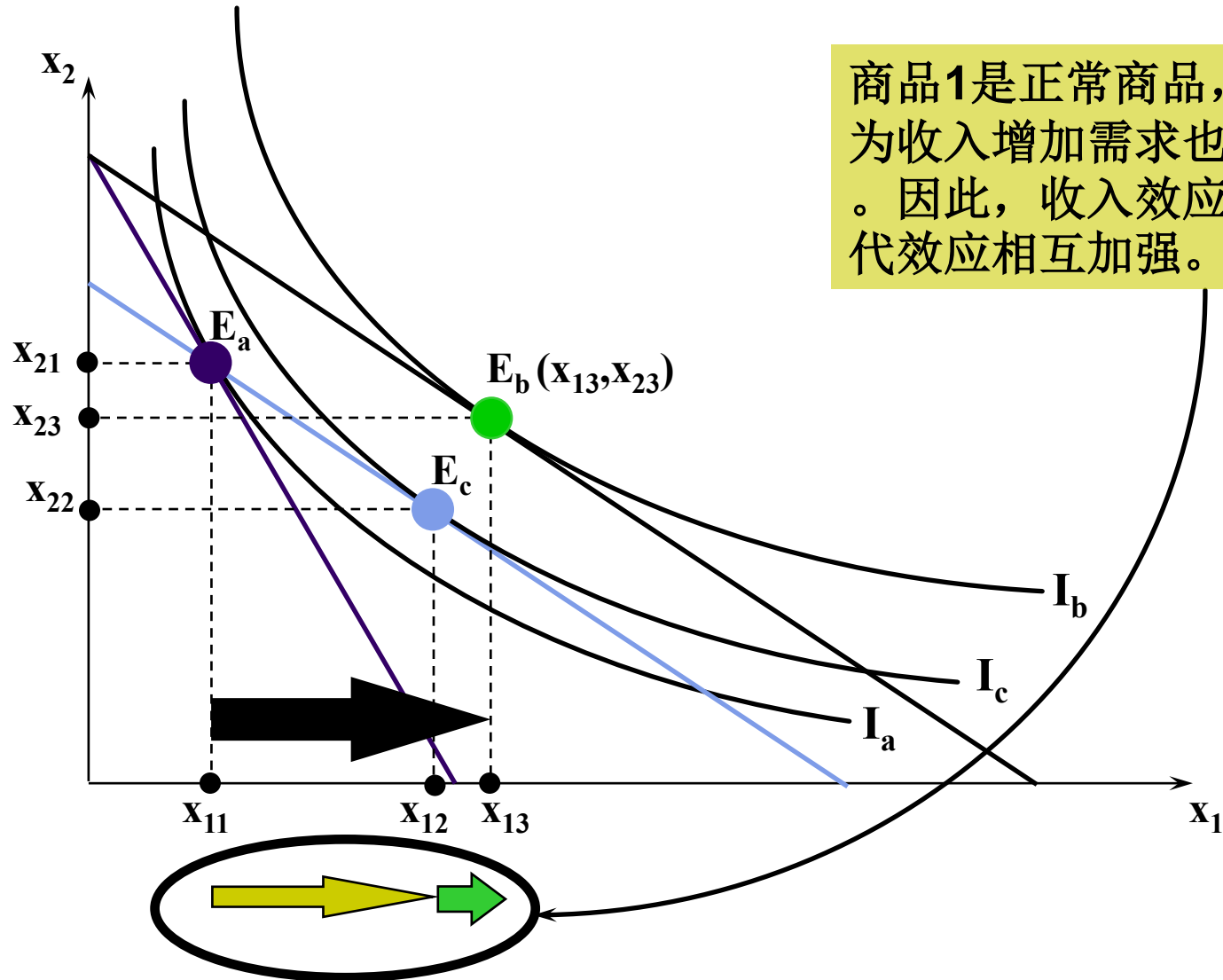
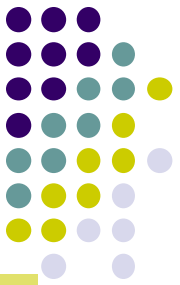
需求的总变动





正常商品的斯勒茨基效应

- 大部分商品是正常商品，即需求和收入同向变动。
- 当正常商品价格变化时，替代效应和收入效应相互增强而导致需求同向变动。
- 既然当价格下降时替代效应和收入效应都增加商品需求，正常商品的普通需求曲线向下倾斜。
- 因此，需求法则对于正常商品总是适用的。
- 需求法则：如果一种商品的需求随着收入的增加而增加，那么这种商品的需求一定随着价格的上升而下降。



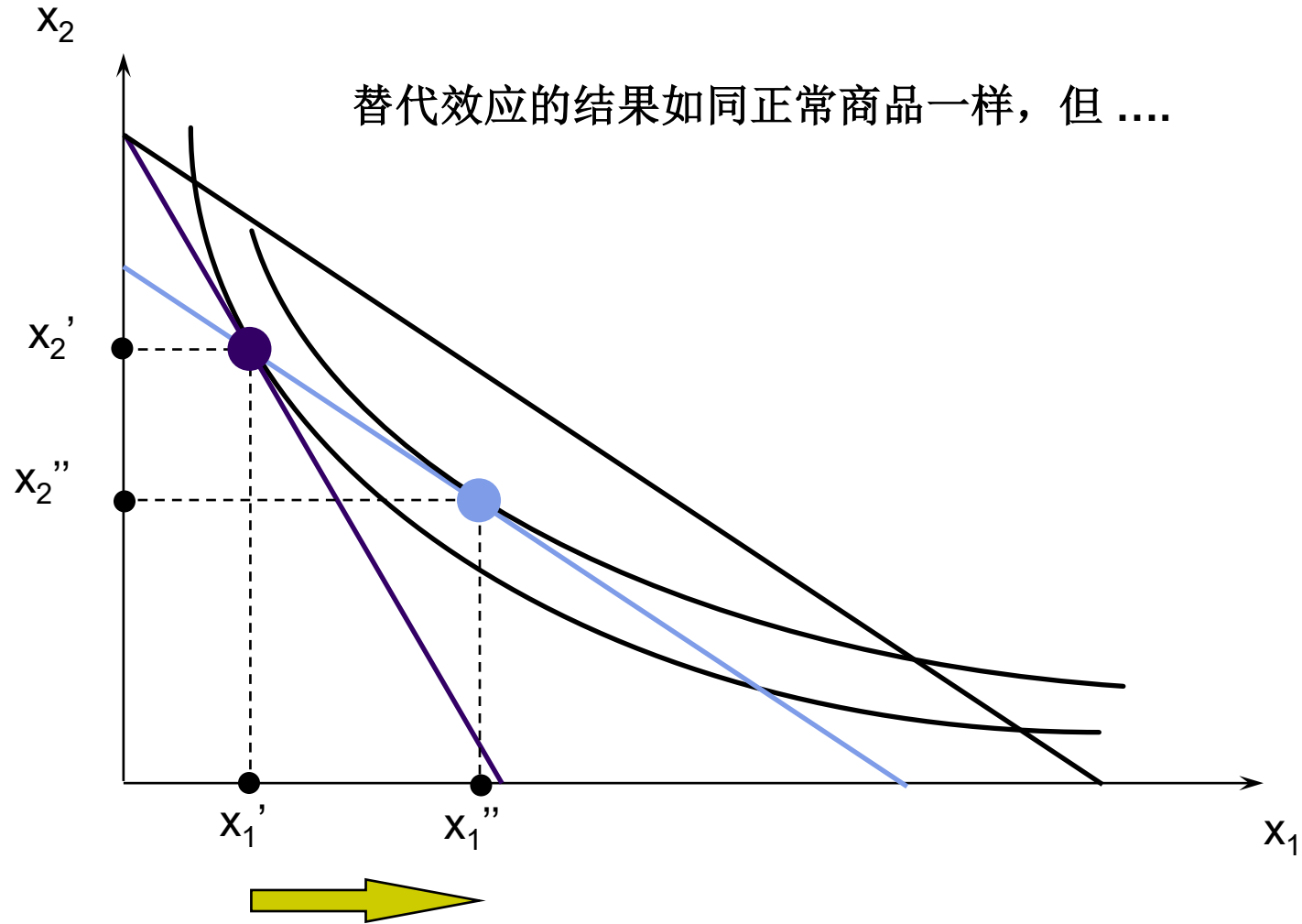


低档商品的斯勒茨基效应

- 有些商品是低档商品，即收入增加需求反而减少。
- 当价格变化时，低档商品的替代效应和收入效应所导致的需求变化的方向相反，相互抵消。

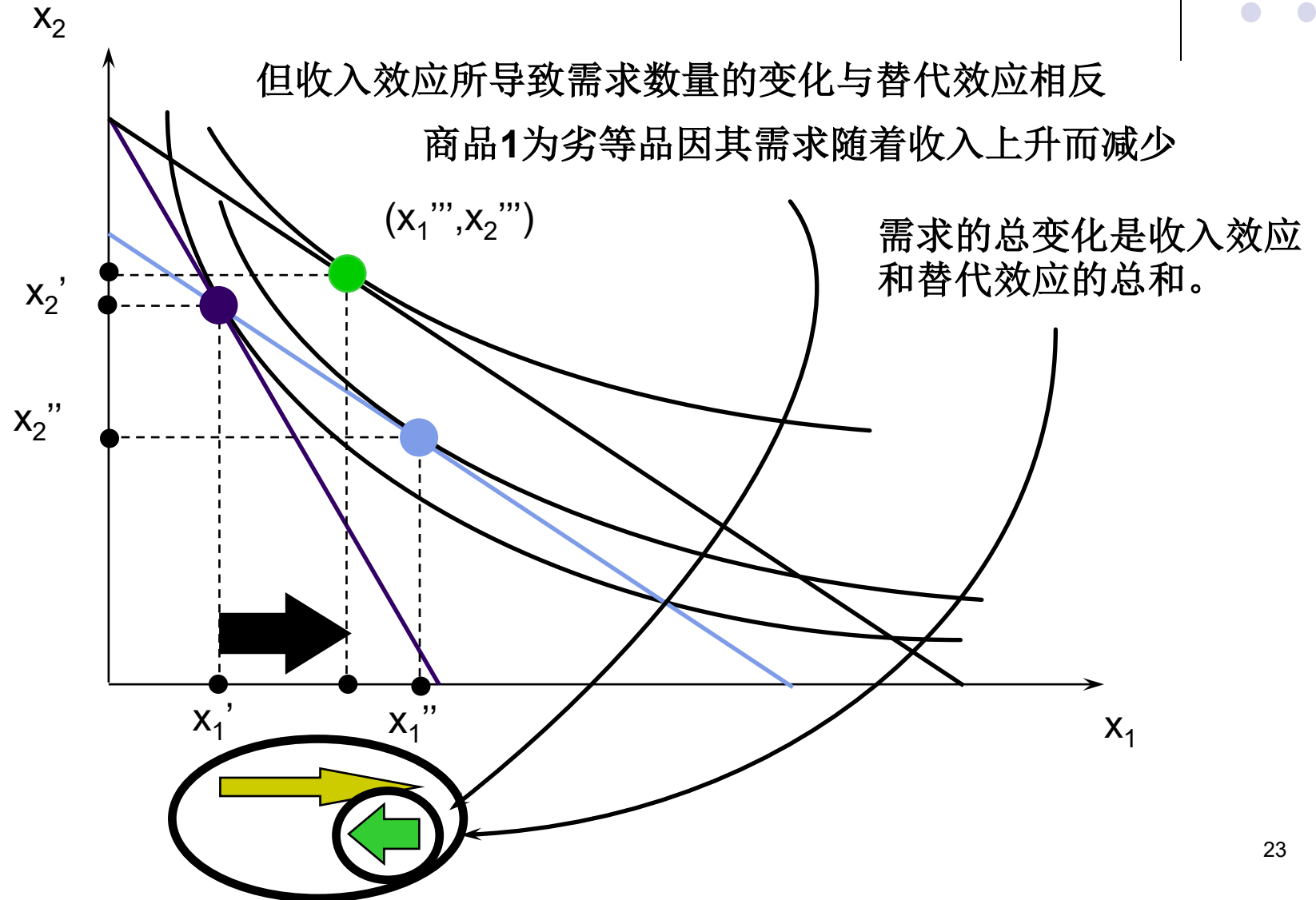


劣等商品的斯勒茨基效应

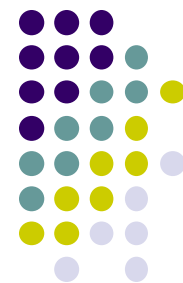




劣等商品的斯勒茨基效应



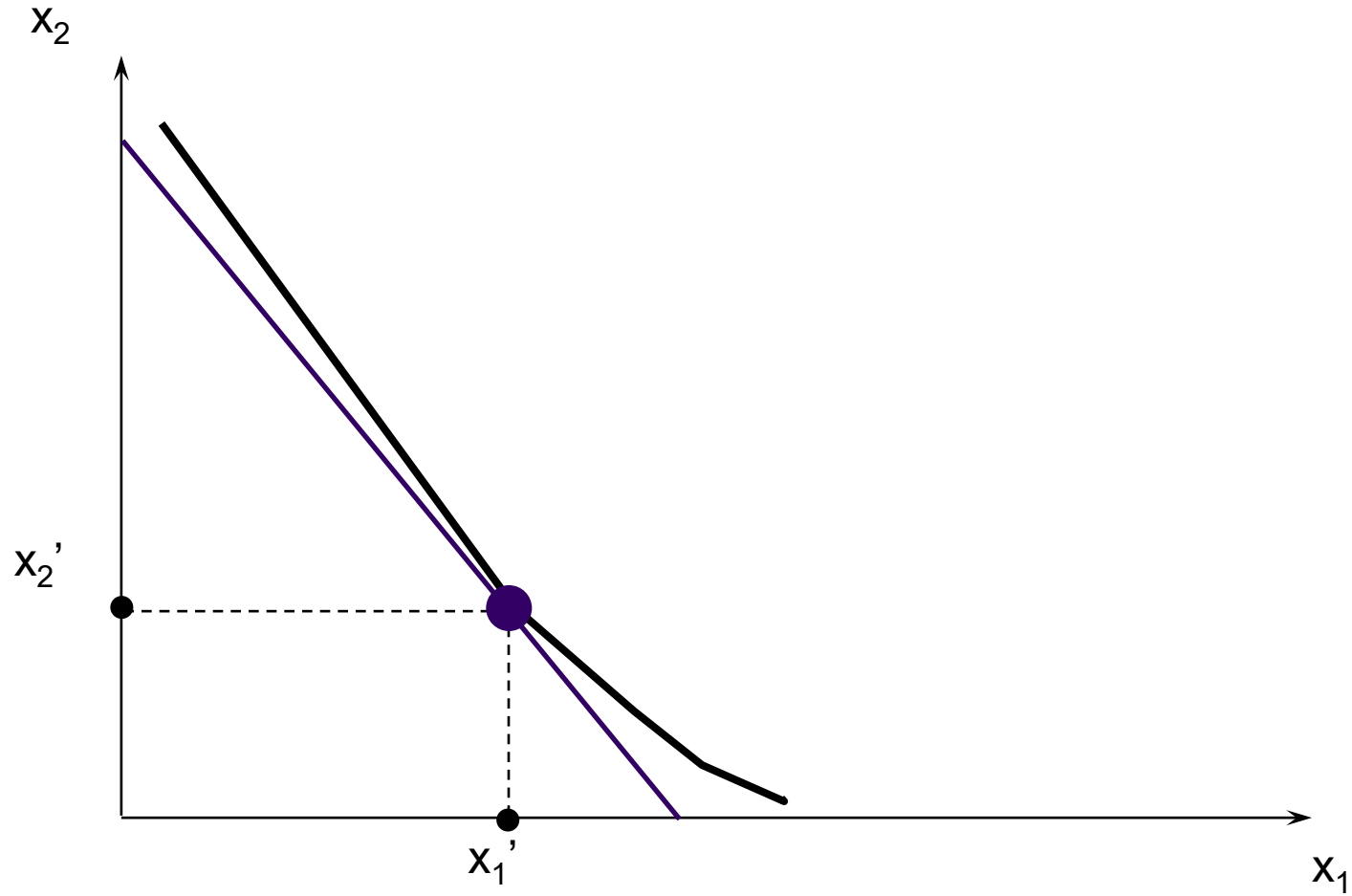
吉芬商品的斯勒茨基效应



- 在极少情况下，商品的档次极低，收入效应大到超过替代效应，以至于随着价格上升，商品的需求量反而增加。
- 这种商品是吉芬商品。
- 斯勒茨基把价格变化的效应分解为纯粹替代效应和收入效应，解释了为什么极端的低档商品违背需求规律。

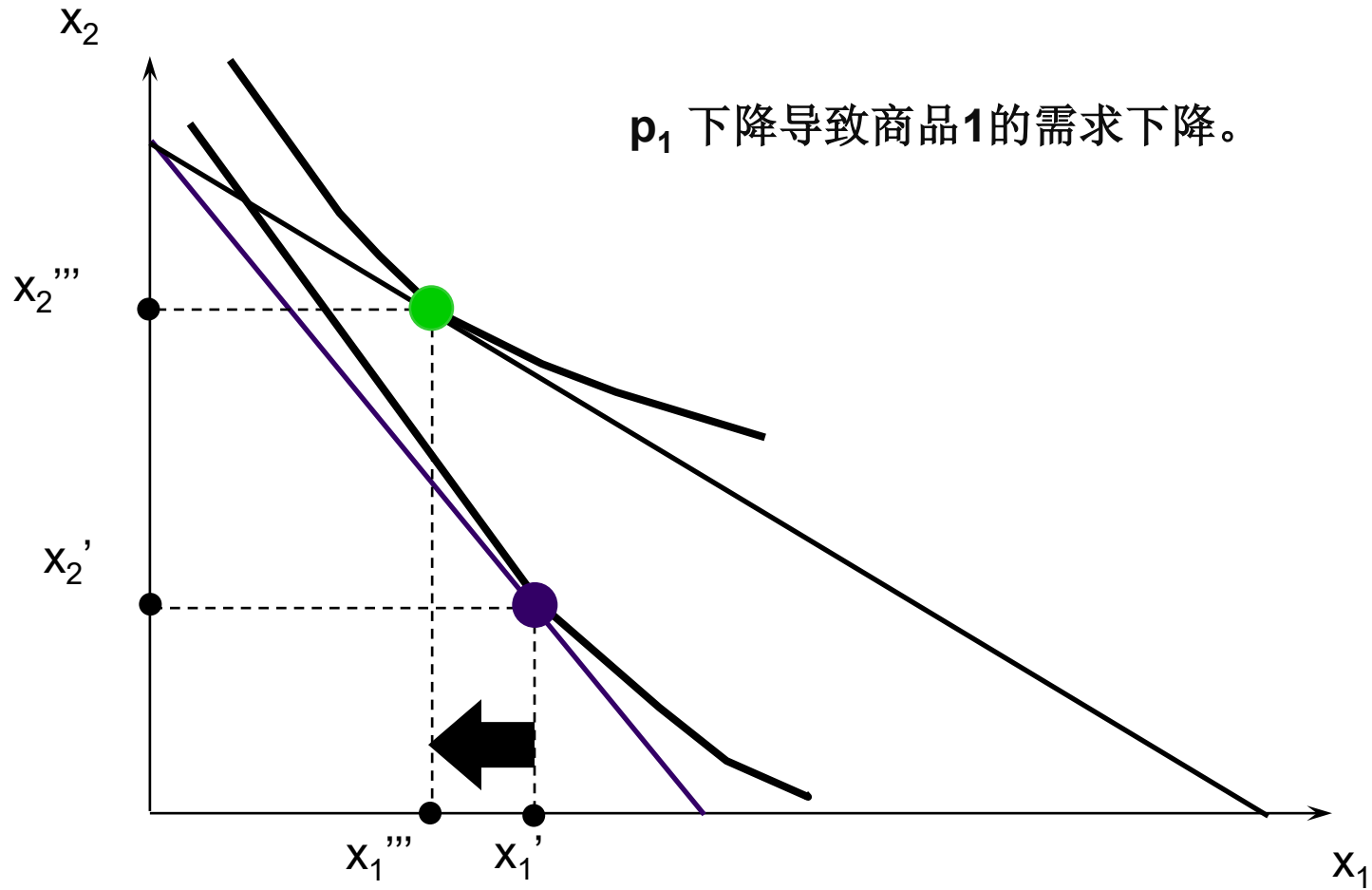


吉芬商品的斯勒茨基效应



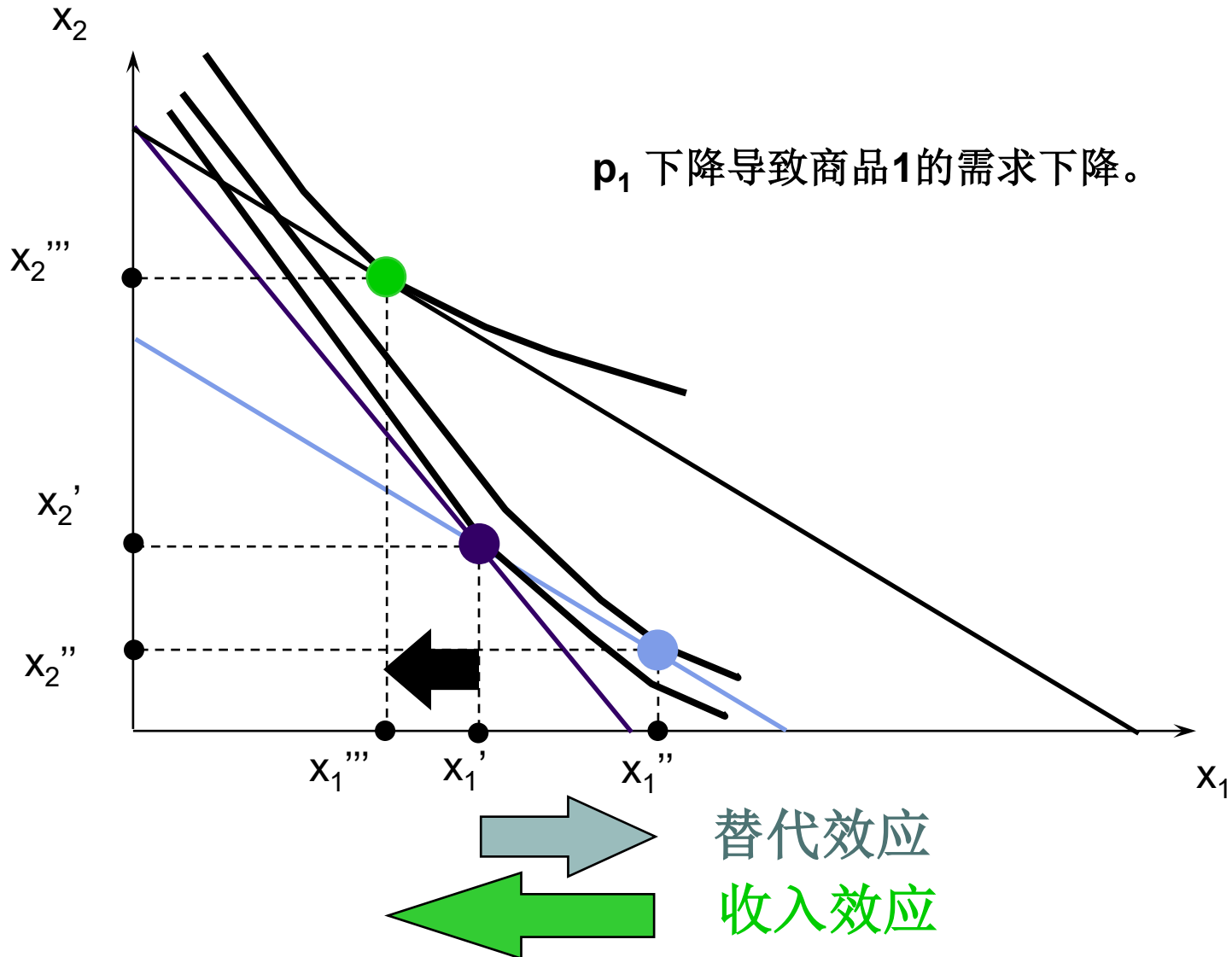


吉芬商品的斯勒茨基效应





吉芬商品的斯勒茨基效应



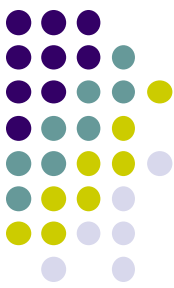


斯勒茨基方程

(1) 绝对量（计算时经常使用）

- 总效应=替代效应+收入效应

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \Delta x_1^s + \Delta x_1^n \\ &= x_1(p_1', m) - x_1(p_1, m) \\ &= [x_1(p_1', m') - x_1(p_1, m)] + [x_1(p_1', m) - x_1(p_1', m')]\end{aligned}$$



(2) 变动率

$$\Delta x_l = \Delta x_l^s + \Delta x_l^n = [x_l(p_l', m') - x_l(p_l, m)] + [x_l(p_l', m) - x_l(p_l', m')]$$

$$\text{令 } \Delta x_l^m = x_l(p_l', m') - x_l(p_l', m) = -\Delta x_l^n$$

$$\text{得 } \Delta x_l = \Delta x_l^s - \Delta x_l^m$$

同除 Δp_l

$$\frac{\Delta x_l}{\Delta p_l} = \frac{\Delta x_l^s}{\Delta p_l} - \frac{\Delta x_l^m}{\Delta p_l}$$

$$\because \Delta m = x_l \Delta p_l$$

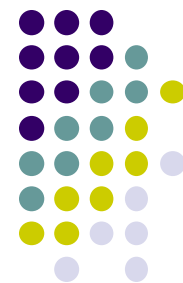
$$\therefore \frac{\Delta x_l}{\Delta p_l} = \frac{\Delta x_l^s}{\Delta p_l} - \frac{\Delta x_l^m}{\Delta m} x_l$$

- 其中 $\frac{\Delta x_l^s}{\Delta p_l}$ 是替代效应;
- $\frac{\Delta x_l^m}{\Delta m} x_l$ 是收入效应。

用变化率表示的
斯勒茨基方程

总结：总效应的符号

（考虑价格下降对需求的影响）



$$\Delta x_I = \Delta x_I^s + \Delta x_I^n$$

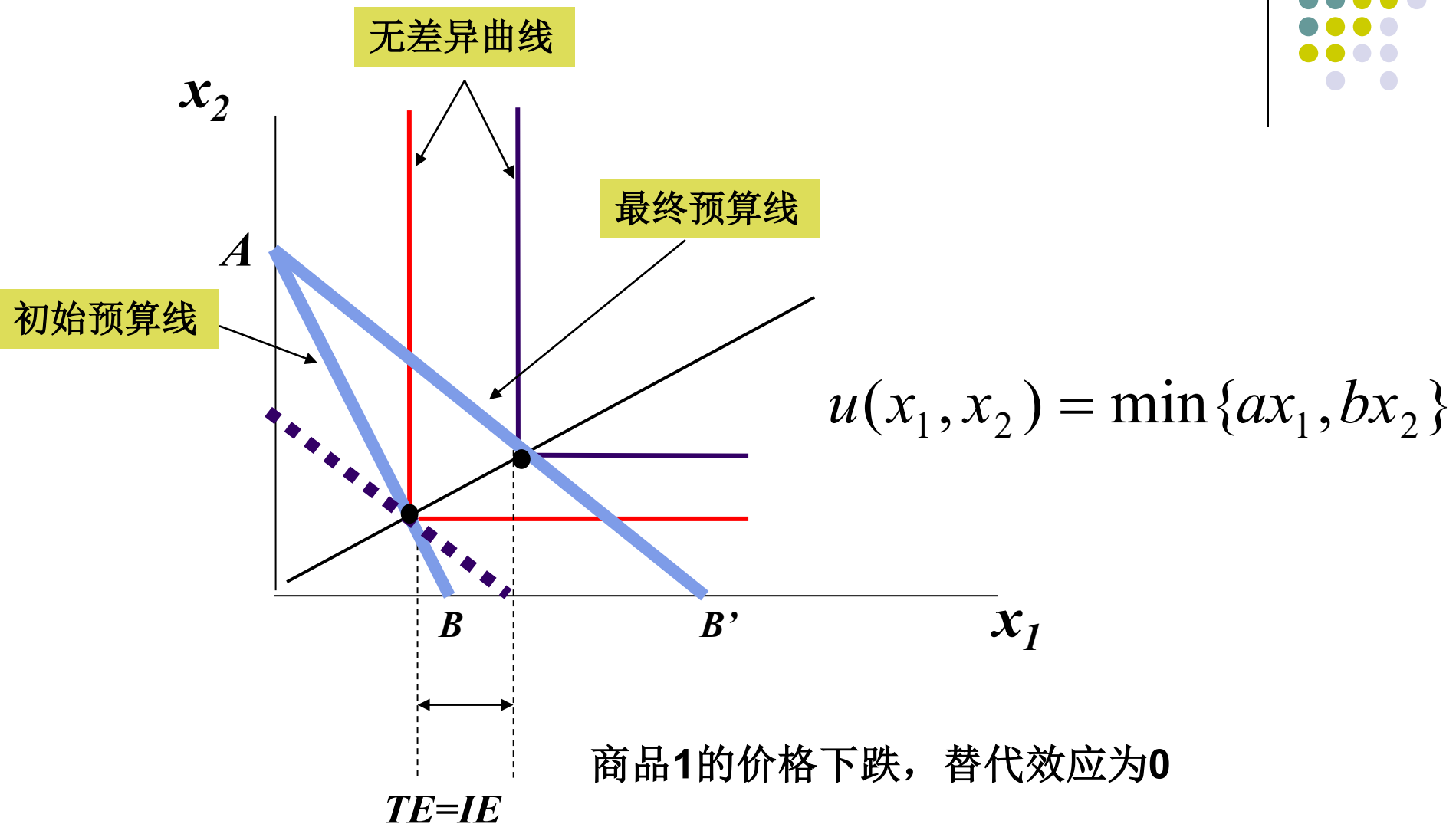
(-)	(-)	(-) 正常商品
(-)	(-)	(+) 非吉芬低档商品
(+)	(-)	(+) 吉芬商品



3、收入效应和替代效应的例子

- 完全互补偏好
- 完全替代偏好
- 拟线性偏好
- 退税：对最终消费退税

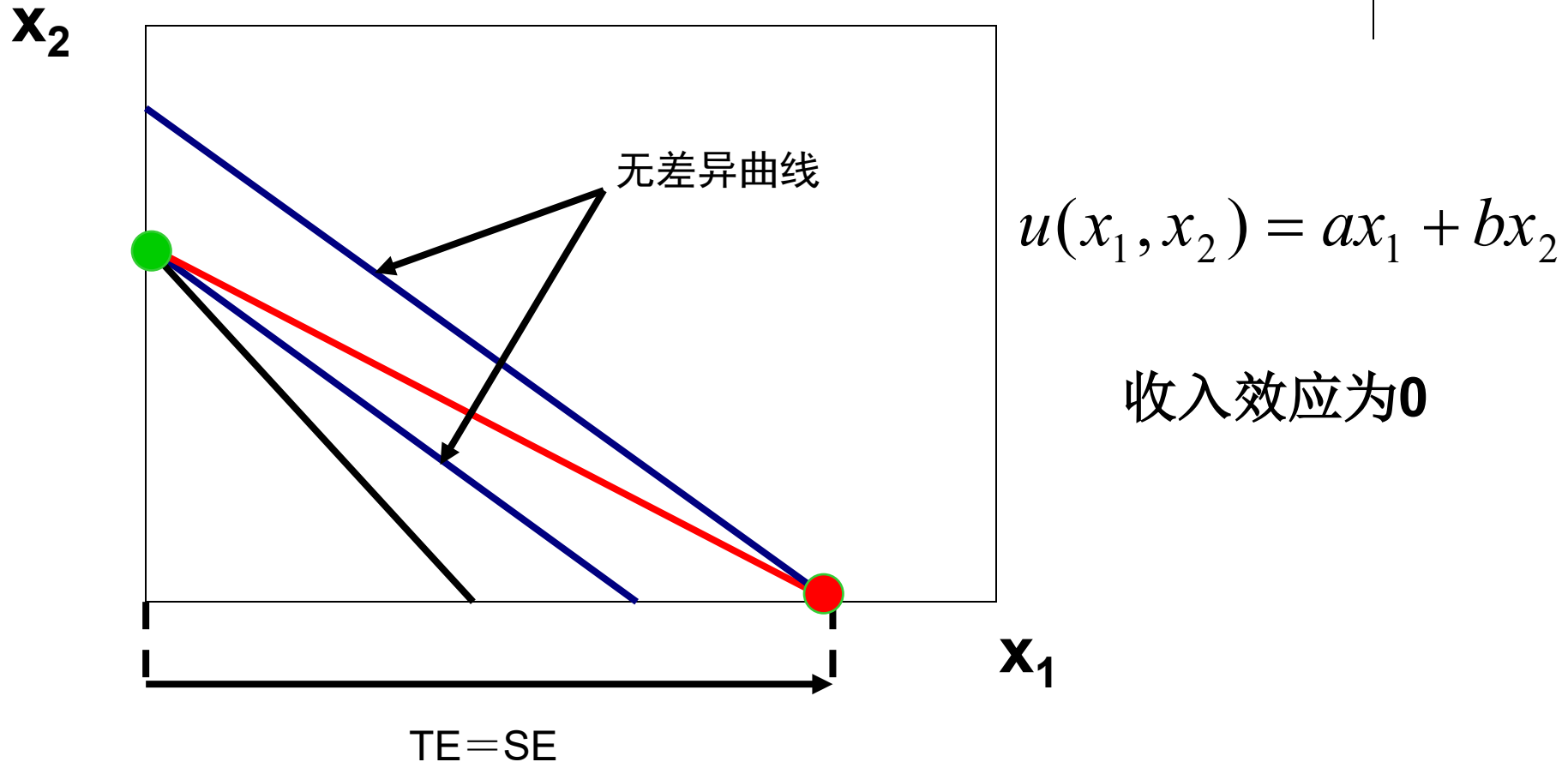
● 完全互补品价格变动的SE和IE



- 完全互补品的总效应等于收入效应

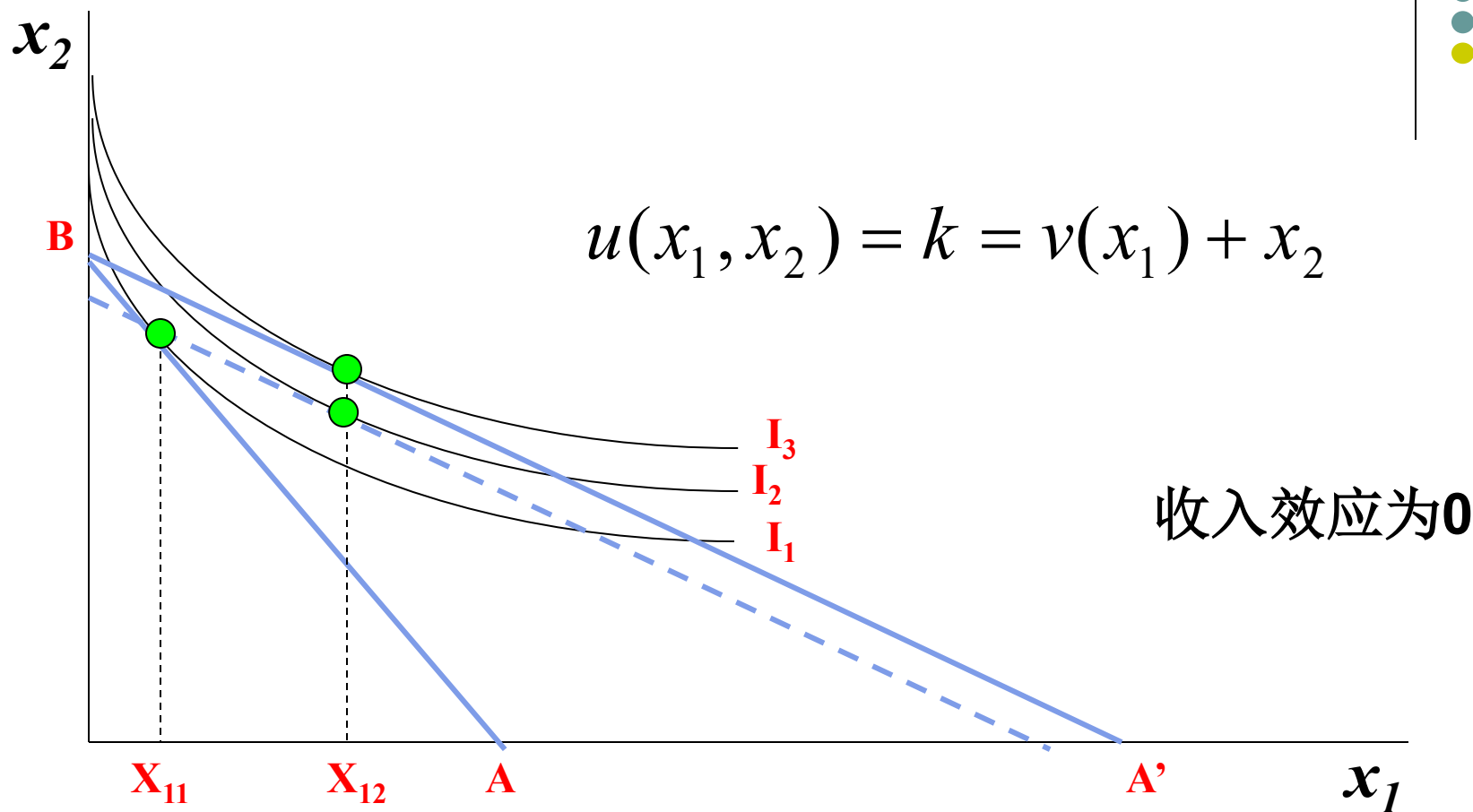


- 完全替代品价格变动的SE和IE (p_1 降价)



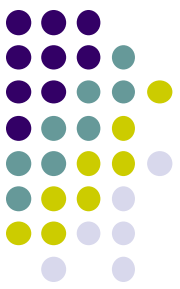
- 完全替代品的总效应等于替代效应

● 拟线性偏好品价格变动的SE和IE (p_1 降低)



➡
替代效应

❖ 拟线性偏好的总效应等于替代效应



应用：汽油税

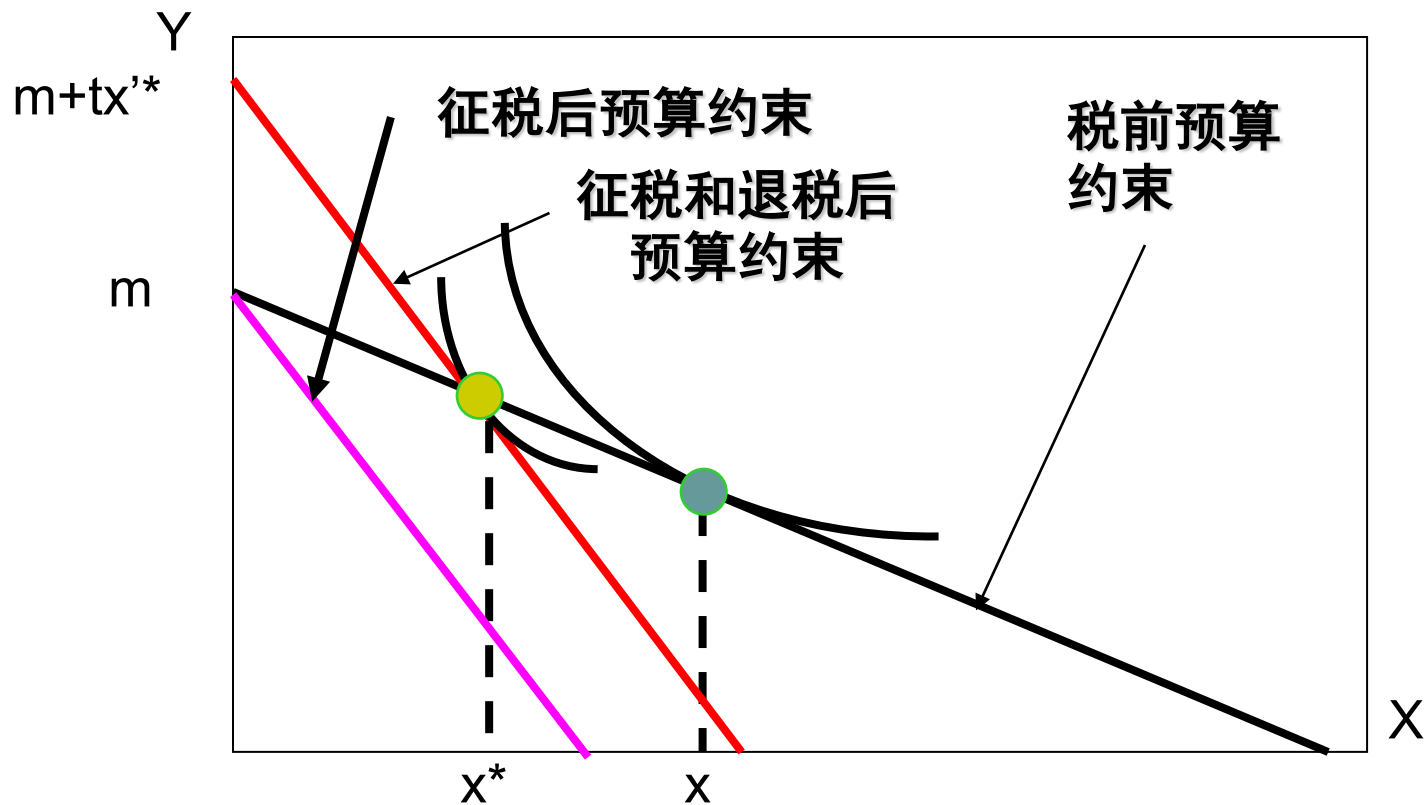
- 1974年，石油输出国组织（OPEC，欧佩克）对美国实行石油禁运，油轮几个星期内不进入美国港口，这使得美国石油供给陷入混乱，引起了第一次石油危机。
- 为减少美国对外国石油的依赖程度，其中之一一个计划是提高汽油税，提高消费者使用汽油的成本通常会使他们减少汽油的消费，进而减少对外国石油的需求。
- 但是，直接提高汽油 P 会使消费者钱包“受损”，在美国政治上是行不通的。因此，有人建议通过汽油从消费者那里征得的税收，直接以货币形式退还给消费者。



退税：对最终消费退税

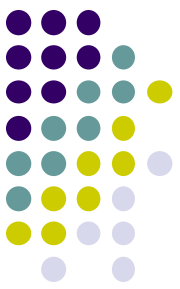
- 初始预算约束：
- $px + y = m$
- 在最终消费束 (x^*, y^*) ，对 x 征收数量税，再把它退还给消费者：
- $(p+t)x^* + y^* = m + tx^*$
- $px^* + y^* = m$
- (x^*, y^*) 也在旧的预算约束线上。

消费者的境况？



事实是：对于 (x, y) 的偏好超过对 (x^*, y^*) 的偏好。如果实施这项计划，消费者的境况将变坏

退税后，最初的需求束不再支付得起

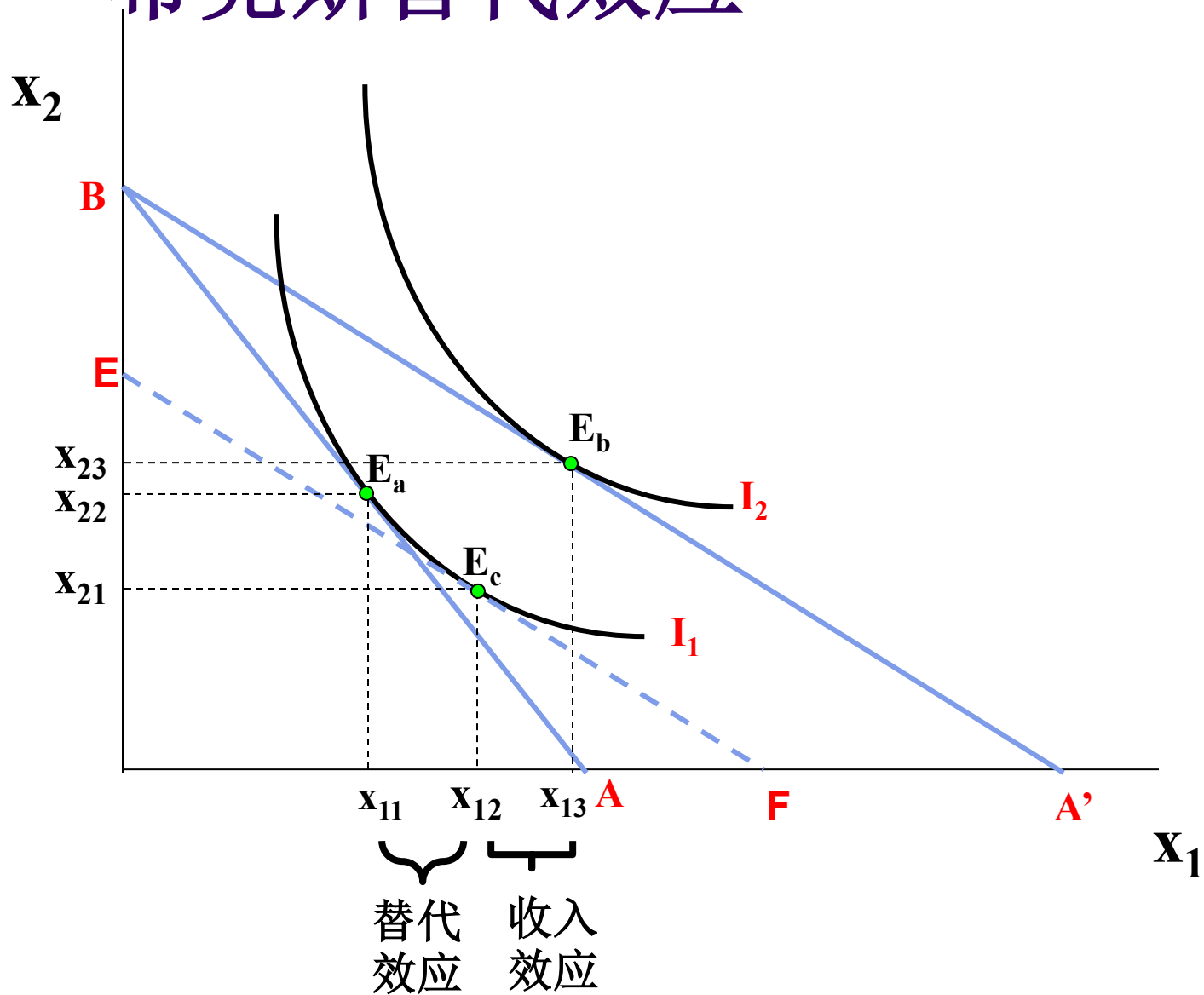


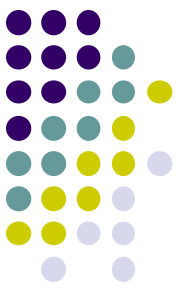
4、替代效应的两种定义

- 斯勒茨基的定义：
 - 在价格变动后，消费者的购买力保持不变从而最初的需求束仍能支付得起的情况下需求所发生的变动。
(购买力不变)
- 希克斯的定义：
 - 在价格变动后，消费者欲维持原来的满足程度（效用水平）不变的情况下需求所发生的变动。
(效用不变)



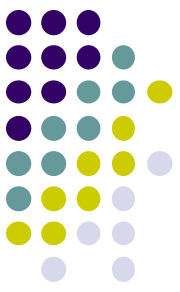
希克斯替代效应





斯勒茨基补偿和希克斯补偿

- 斯勒茨基补偿是在价格变动时，按价格发生变化前的消费量为基准，以保持相同的消费计划为目标，而对价格变化后的消费者所实行的补偿。
- 希克斯补偿是以消费者保持相同的效用水平为目标所发放的补偿。它意味着，价格变化之后，消费计划可以改变，但可以达到与以前一样的效用。



- 与斯勒茨基替代效应相同，希克斯替代效应也一定为负。

证：令 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 为按价格 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ 选择的需求束， $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ 为按价格 $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ 选择的需求束。假设对消费者而言，两需求束无差异，即根据显示偏好定义，以下不等式不成立



$$p_1x_1 + p_2x_2 > p_1y_1 + p_2y_2$$

$$q_1y_1 + q_2y_2 > q_1x_1 + q_2x_2$$

由此，以下两不等式**必成立** $p_1x_1 + p_2x_2 \leq p_1y_1 + p_2y_2$

$$q_1y_1 + q_2y_2 \leq q_1x_1 + q_2x_2$$

将以上两不等式相加，重新整理得：

$$(q_1 - p_1)(y_1 - x_1) + (q_2 - p_2)(y_2 - x_2) \leq 0$$

- 这里， $q_2 = p_2$ ，于是有：

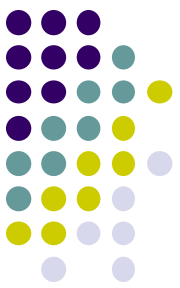
$$(q_1 - p_1)(y_1 - x_1) \leq 0$$

上式说明，基于替代效应的需求变动和价格变动的方向相反。



补偿需求曲线

- 用我们所学的框架可以推导出**三种需求曲线**：
- 需求数量在三种不同的框架下是如何随着价格的变化而变化的：
 - 1、马歇尔需求曲线（收入保持不变）
 - 2、斯勒茨基需求曲线（购买力保持不变）
 - 3、希克斯需求曲线（效用保持不变）



补偿需求曲线

- 给定的**收入水平**，消费者效用最大化时的选择，就是消费者的**马歇尔需求函数（普通需求函数）**。
 - 对于普通需求曲线的情况：对于普通需求曲线而言，消费者在高价格下的境况要比在低价格下的境况差，这是因为他的收入保持不变
- **希克斯需求函数**也被称为补偿的需求函数，即通过变化价格和收入以便把消费者维持在某一固定的效用水平而形成的需求函数，收入变化被用以补偿价格的变化。
 - 希克斯需求曲线上每一点效用都是一样的
- **购买力保持不变**---**斯勒茨基需求**

三种需求曲线

