本试卷适应范围
经济管理类2014级各专业（5学分）

南京农业大学试题纸

2014-2015 学年第 一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　班级 ________　学号 ________　姓名 ________

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

得分	评阅人

一、客观题（每题 2 分，共 24 分）

1. $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的第一类________间断点.

2. 曲线 $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

3. 设函数 $f(x)=x(2x-1)(3x-2)(4x-3)\cdots\cdots(2015x-2014)$，则 $f'(0)=$________.

4. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $dy=$________.

5. 函数 $f(x)=x(x-1)^{\frac{1}{3}}$ 在 $[-2,\ 2]$ 上的最大值为________.

6. 设某商品的需求函数为 $Q(p)=100-4p, p\in(0,20)$，其中 Q 为需求量，p 为商品价格，则需求函数在 $p=5$ 处的需求弹性 $E_d(5)=$________.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\dfrac{n}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$________.

8. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$________.

9. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=e^x+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

10. 若 e^x 和 $e^x+2e^{\frac{1}{x}}$ 是一阶非齐次线性微分方程 $x^2y'-cy=\varphi(x)$ 的两个解，则 $c=$________.

11. 当 $x\to0$ 时，设有 $\cos x-1=\alpha(x)\sin x$ 成立，则当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）.

A：与 x 等价的无穷小　　B：与 x 同阶但不等价的无穷小

C：比 x 低阶的无穷小　　D：比 x 高阶的无穷小

12. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

A：取得极小值 $f(0)=0$　　B：取得极大值 $f(0)=0$　　C：未取得极值　　D：极值情况无法确定

二、计算题Ⅰ （每题6分，共30分）

得分	评阅人

13．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

14．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x \arctan t \quad dt}{\sqrt{1+x^2}}$.

15．已知方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定了函数$y=f(x)$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

16．已知函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 所确定，求其凹凸弧所对应的x的取值范围及拐点坐标.

17．已知某商品的成本函数为$C(x)=21+2x^3$，x为产量，求$x=10$时的边际成本以及$[0,10]$内成本平均值.

三、计算题 II （每题 6 分，共 30 分）

得分	评阅人

18．已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求不定积分 $\int x f'(x^2)dx$ ．

19．已知 $f(x)=\begin{cases}-xe^{-x^2} & x\geq -1 \\ e^x & x<-1\end{cases}$，求定积分 $\int_0^3 f(1-x)dx$ ．

20．计算抛物线 $y=x^2-4, y=0, x=0, x=4$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 ．

21．求常数 c，使得广义积分 $\int_0^{+\infty}(\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{c}{x+2})dx$ 收敛，并求出积分值 ．

22．已知二阶可导函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)dt=e^x$，求 $f(x)$ ．

得分	评阅人

四、综合题（每题8分，共16分）

23. 证明不等式：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x \ge (x-1)^2$.

24. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数），证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$；并计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arctan e^x \cdot \cos x dx$ 的值.

系主任 李 强　　　　出卷人 李爱萍

2014-2015学年第一学期经管类微积分I的A卷答案

一、客观题（每题2分，共24分）

1. 跳跃； 2. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 3. $2014!$ 4. $dy=\frac{1}{y^y(1+\ln y)}dx$ 或 $dy=\frac{1}{x(1+\ln y)}dx$ 5. $2\sqrt[3]{3}$ 6. 0.25

7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $2(e-1)$ 10. -1 11. B 12. A

二、计算题I （每题6分，共30分）

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\bullet\frac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\bullet\frac{1}{2}x^2}{x^2\bullet\frac{1}{2}x}=1$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\arctan t\quad dt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\frac{\pi}{2}$

15. $e^y+6xy+x^2-1=0\Rightarrow e^y y'+6y+6xy'+2x=0\Rightarrow e^y(y')^2+e^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$

$x=0,\quad y=0,\quad y'\big|_{x=0}=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}=-2$

16. $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$，令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$t=0$，对应$x=1$

凸弧$(-\infty,1)$，凹弧$(1,+\infty)$，拐点$(1,1)$

17. $C'(x)=6x^2,C'(10)=600,\frac{\int_0^{10}c(x)dx}{10}=\frac{\int_0^{10}(21+2x^3)dx}{10}=\frac{(21x+\frac{1}{2}x^4)\Big|_0^{10}}{10}=521$

三、计算题II （每题6分，共30分）

18. $f(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，$\int xf'(x^2)dx=\frac{1}{2}\int f'(x^2)dx^2=\frac{1}{2}f(x^2)+C=\frac{1}{2}\frac{x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^4}+C$

19. $\int_0^3 f(1-x)dx\overset{t=1-x}{=}\int_1^{-2}f(t)d(-t)=\int_{-2}^1 f(t)dt=\int_{-2}^{-1}e^t dt+\int_{-1}^1 -te^{-t^2}dt$

$=\int_{-2}^{-1}e^t dt+0=e^t\Big|_{-2}^{-1}=e^{-1}-e^{-2}$

20. $V_y=\int_{-4}^0\pi(y+4)dy+\left[\pi\cdot4^2\cdot12-\int_0^{12}\pi(y+4)dy\right]=80\pi$

21. $\int_0^{+\infty}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2})dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{c}{x+2})dx=\lim\limits_{b\to\infty}\ln\frac{x^2+1}{(x+2)^c}\Bigg|_0^b$

$=\lim\limits_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b^2+1}{(b+2)^c}-\ln\frac{1}{2^c}\right]$,当且仅当$c=2$时广义积分收敛于$\ln4$

22. $f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x,f(0)=1\Rightarrow f'(x)+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x,f'(0)=1$

$\Rightarrow f''(x)+f(x)=e^x\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

23．证明：设 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，其在 $(0,+\infty)$ 上连续、可导，

$$f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}-2(x-1)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2,\quad f''(x)=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x^2}=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1$$

令 $f'(x)=0$ 得唯一 $x=1$，而 $f''(1)>0$，故 $f(1)$ 极小值，故 $f(x)\geq f(1)=0$，即 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq 0$

得 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx \overset{x=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)d(-t) \overset{g(t)偶}{=} \int_{0}^{a} f(-x)g(x)dx$$

24．证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)g(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)g(x)dx$

$$=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)dx=A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

解：

$$f(x)=\arctan e^x,\ g(x)=\cos x$$

$$\left[f(x)+f(-x)\right]'=\left[\arctan e^x+\arctan e^{-x}\right]'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$$

$$f(x)+f(-x)=C=f(0)+f(-0)=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan e^x\cdot\cos x dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

本试卷适应范围 经济管理类2013级各专业(5学分)

南京农业大学试题纸

2013-2014 学年第 一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　班级 ________　学号 ________　姓名 ________

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

得分	评阅人

一、客观题（每题 2 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=$________.

2. 当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1$ 是 $\sin^k x$ 的同阶无穷小量，则 $k=$________.

3. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+2x)-f(2)}{x}=6$，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f'(2)=$________.

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(1+x^{2014}\ln\dfrac{2+x}{2-x}\right)dx=$________.

5. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt=$________.

6. 若 $2f(x)=1+x\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

7. 下列函数中，在 $x=0$ 处可导的是(　　)

A：$f(x)=|x|$　B：$f(x)=|\sin x|$　C：$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　D：$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$

8. 设 $f(x_0+t)-f(x_0)=2t+\sqrt{1-t^2}-1$，那么 $f(x)$ 在 x_0 处（　　）.

A：不可微　B：不可导　C：可微且 $dy=2dx$　D：可微但 $dy\neq 2dx$

9. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^3}=a^2(a\neq 0)$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）.

A：取得极大值　B：取得极小值　C：未取得极值　D：视 a 的取值而定

10. 若 $x\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$（　　）

A：$x+c$　B：$x+2\ln x+c$

C：$\ln x+c$　D：$x(2+\ln x)+c$

11. 下列反常积分中发散的是(　　).

A：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$　B：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$　C：$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　D：$\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

12. 连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^x f(t)dt+\ln 2$，则 $f(x)=$（　　）

A：$e^{x}\ln 2$　　B：$e^{2x}\ln 2$　　C：$e^{x}+\ln 2$　　D：$e^{2x}+\ln 2$

二、计算题 I　（每题 6 分，共 30 分）

得分	评阅人

13．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x\sin x}$．

14．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$．

15．已知方程 $ye^{y}=e^{1+x}$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$．

16．已知 $f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$，求其单调区间与极值、凹凸区间与拐点．

17．求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$．

三、计算题II （每题6分，共30分）

得分	评阅人

18．已知 $f(x)=e^{-x}$，求定积分 $\int_2^3 f(2-x)dx$ ．

19．计算抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 ．

20．求微分方程 $y'(2xy+y)=1$ 的通解 ．

21．求微分方程 $y''+2y'=e^{-x}$ 的通解，及满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$ 的特解 ．

22．生产某产品的固定成本为10（单位），当产量为 x 单位时边际成本为 $C'(x)=3x^2+20x-28$，而边际收益为 $R'(x)=20x-16$ ．试求：总利润最大时的产量 x_0 及最大利润 ．

得分	评阅人

四、综合题 （每题 8 分，共 16 分）

23. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=3$. 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上点点可导；并由此求出 $f(x)$.

24. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$；

由此证明等式 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx$，并计算 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx$ 的值.

系主任 李 强　　　　出卷人 李爱萍

2013-2014 学年第一学期经管类微积分 I 的 A 卷答案

一、客观题（每题 2 分，共 24 分）

1. 1； 2. 2； 3. 3； 4. 2； 5. $f(x)$ 6. $\frac{2}{3}$ 7. C； 8. C； 9. C； 10. A； 11. B； 12. A；

二、计算题 I （每题 6 分，共 30 分）

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2}=-1$

14. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

15. $ye^y=e^{1+x}\Rightarrow y'e^y+ye^yy'=e^{1+x}\Rightarrow y''e^y+y'e^yy'+y'e^yy'++ye^yy'y'+ye^yy''=e^{1+x}$

$x=0\Rightarrow y|_{x=0}=1\Rightarrow y'|_{x=0}=\frac{1}{2}\Rightarrow y''|_{x=0}=\frac{1}{8}$

16. $f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$， $f'(x)=0\Rightarrow x=2, f''(2)$ 不存在.

	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	−	不存在	+
$f(x)$	单调递增，凸的	无极值，有拐点(2,0)	单调递减，凹的

17. $\int\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=}\int\frac{\cos t}{1-\cos t}dt=\int\frac{\cos t(1+\cos t)}{\sin^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}+\cot^2 t\,dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}+\csc^2 t-1dt$

$=-\csc t-\cot t-t+c=-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+c$

18. $\int_2^3 f(2-x)dx\overset{t=2-x}{=}\int_0^{-1}f(t)(-dt)=\int_{-1}^0 f(t)dt=\int_{-1}^0 e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_{-1}^0=e-1$

19. $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 的交点为 $(1,-1)$ 、$(4,-2)$

$V_y=\pi\int_{-1}^2(y+2)^2dy-\pi\int_{-1}^2 y^4dy=14\frac{2}{5}\pi$ 或 $V_y=\frac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot4-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1-\pi\int_{-1}^2 y^4dy=14\frac{2}{5}\pi$

20. $y'(2xy+y)=1\Rightarrow\frac{dx}{dy}-2yx=y\Rightarrow x=e^{-\int-2ydy}\left[\int ye^{\int-2ydy}dy+c\right]=e^{y^2}(-\frac{1}{2}e^{-y^2}+c)=ce^{y^2}-\frac{1}{2},c\in\forall$

21. (1) $y''+2y'=0\Rightarrow r^2+2r=0\Rightarrow r_1=0,r_2=-2\Rightarrow Y=c_1+c_2e^{-2x}$

(2) $y^*=ae^{-x}\Rightarrow y^{*\prime}=-ae^{-x}$，$y^{*\prime\prime}=ae^{-x}\Rightarrow a=-1\Rightarrow y^*=-e^{-x}$

$\Rightarrow y=y^*+Y=-e^{-x}+c_1+c_2e^{-2x}\overset{y|_{x=0}=1,\,y'|_{x=0}=0}{\Rightarrow}c_1=\frac{3}{2},c_2=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-e^{-x}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

22. $L(x)=R(x)-C(x)=\int_0^x R'(t)dt-\left[\int_0^x C'(t)dt+C_0\right]=\int_0^x(20t-16)dt-\left[\int_0^x(3t^2+20t-28)dt+10\right]$

$=-x^3+12x-10, L''(x)=-3x^2$, 令 $L'(x)=-3x^2+12=0$ 得 $x=2(x=-2$ 舍去$), L''(2)=-12$

故 $x=2$ 处总利润最大，$L_{\max}(2)=6$ 单位.

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)+f(y)+2xy-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}+2x$$

23. 证明：$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy\Rightarrow f(0+0)=f(0)+f(0)+0\Rightarrow f(0)=0$

$$\Rightarrow\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=f'(0)\Rightarrow f'(x)=3+2x$$

解：$f'(x)=3+2x\Rightarrow f(x)=x^2+3x+c\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}c=0\Rightarrow f(x)=x^2+3x$

24. 证明：$\int_a^b f(a+b-x)dx\overset{t=a+b-x}{=}\int_b^a f(t)d(a+b-t)=-\int_b^a f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

由此 $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{(1-1-x)^2}{1+e^{(1-1-x)}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx=\frac{1}{2}(2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx)=\frac{1}{2}(\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx)$$

解：$=\frac{1}{2}(\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$$

本试卷适应范围
经 济 管 理 类
2012 级各专业(5

南京农业大学试题纸

2012-2013 学年第 一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 ___微积分 I___　班级 ________　学号 ________　姓名 ________

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

得分	评阅人

一、填空题与选择题 (每题 2 分，共 20 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^{(-1)^n}=$ ____________

2. 函数 $f(x)=\frac{|x|(x+1)}{(x^2-1)\sin x}$ 的第一类可去间断点为 $x=$ ____________

3. 已知一元四次多项式 $f(x)$ 满足等式 $f(x)=(x^2-1)\int_{-2}^{x}xg(t)dt$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根所在的区间依次为____________________________

4. $\int_{-3}^{3}(\sin x+1+\frac{x}{9-x^2})\sqrt{9-x^2}\,dx=$ ____________

5. 生产某种产品的固定成本为 10 单位，而当产量为 x 单位时的边际成本函数为 $C'(x)=3x^2-12x+15$，则成本函数 $C(x)$ 为____________.

6. 设对任意的 x，总有 $h(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}[g(x)-h(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$（　　）.

   A：存在且一定等于 0　　B：存在但不一定等于 0
   C：一定存在　　D：不一定存在

7. 设 $f(x)$ 连续、三阶可导，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则（　　）.

   A：$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　B：$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
   C：$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D：$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

8. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(x)\le g(x)$，则对于任意的 $c\in(0,1)$，有（　　）.

   A：$\int_{\frac12}^{c}f(t)dt\le\int_{\frac12}^{c}g(t)dt$　　B：$\int_{c}^{1}f(t)dt\le\int_{c}^{1}g(t)dt$
   C：$\int_{\frac12}^{c}f(t)dt\ge\int_{\frac12}^{c}g(t)dt$　　D：$\int_{c}^{1}f(t)dt\ge\int_{c}^{1}g(t)dt$

9. 反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ 的被积函数的瑕点为（　　）.

   A：$x=0$　　B：$x=0$、$x=-1$　　C：$x=-1$　　D：没有瑕点

10. 已知 e^{-x} 是微分方程 $y''+py'+y=2e^{-x}$ 的解，则方程的通解为（　　）.

   A：$y=e^{-x}+c_1\cos x+c_2\sin x$　　B：$y=e^{-x}+c_1e^x+c_2xe^x$
   C：$y=e^{-x}+c(\cos x+\sin x)$　　D：$y=e^{-x}+c(e^x+xe^x)$

得分	评阅人

二、计算题Ⅰ（每题6分，共30分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

13. 已知方程 $y^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{1}{y}}$ 确定了函数 $x=f(y)$，求 dx.

14. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线方程.

15. 已知通过点 $(-2,44)$ 的曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=-2$ 处有水平切线，拐点为 $(1,-10)$，

求 a、b、c、d 的值.

得分	评阅人

三、计算题 II （每题 6 分，共 30 分）

16. 求不定积分 $\int e^{-x+2\ln x}dx$

17. 求定积分 $\int_{-2}^{6}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$

18. 试判断反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$ 的敛散性并说明理由.

19. 求直线 $y=\frac{1}{e}x$ 和曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

20. 求微分方程 $x^2-6y+2xy'=0$ 的通解.

得分	评阅人

四、综合题 （第 21、22 题每题 7 分，第 23 题 6 分，共 20 分）

21. 可导函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=x+\int_0^x (x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$.（7 分）

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,2\right]$ 上连续，在 $\left(0,2\right)$ 内可导，且 $f(0)=\int_1^2 e^{-x}f(x)dx$，试证：在 $\left(0,2\right)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.　　（7 分）

23. (1) 证明：当 $x>1$ 时，$f(x)=x\ln x$ 为单调递增函数.
(2) 不求出两数的具体值，试判断 $\ln(\sqrt{2}+1)$ 与 $\sqrt{2}-1$ 的大小关系，并说明理由.　　（6 分）

系主任　李　强　　　　出卷人　李爱萍

2012 级经管微积分 I-A 答案

一、填空题与选择题 (每题 2 分，共 20 分)

1、1；　2、-1；　3、$(-2,-1)(-1,0)(0,1)$；　4、4.5π；

5、$C(x)=x^3-6x^2+15x+10$; 6、D;　7、D;　8、B;　9、C;　10、A;

二、计算题 I (每题 6 分，共 30 分)

11、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln(1+x)-(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

12、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

13、$\dfrac{1}{x}\ln y=\dfrac{1}{y}\ln x\to y\ln y=x\ln x\to \ln y dy+y\cdot\dfrac{1}{y}dy=\ln x dx+x\cdot\dfrac{1}{x}dx\to dx=\dfrac{\ln y+1}{\ln x+1}dy$

14、$\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\dfrac{1}{2(1+t)^2}$

$x=3\Rightarrow t^2+2t=3\Rightarrow t=-3$(舍)，$t=1\Rightarrow y=\ln 2, y'=\dfrac{1}{8}\Rightarrow y-\ln 2=\dfrac{1}{8}(x-3)$

15、$y=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c\Rightarrow y''=6ax+2b$
$-8a+4b-2c+d=44,12a-4b+c=0,a+b+c+d=-10,6a+2b=0$ $\Rightarrow\begin{cases}a=1;b=-3\\ c=-24;d=16\end{cases}$

三、计算题 II (每题 6 分，共 30 分)

16、$\int e^{-x+2\ln x}dx=\int x^2e^{-x}dx=\int -x^2de^{-x}=-x^2e^{-x}+\int e^{-x}dx^2=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx$
$=-x^2e^{-x}-2\int xde^{-x}=-x^2e^{-x}-2(xe^{-x}-\int e^{-x}dx)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+c$

17、$\int_{-2}^{6}\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx\overset{t=\sqrt[3]{x+2}}{\underset{x=t^3-2}{=}}\int_0^2\dfrac{1}{1+t}d(t^3-2)=\int_0^2\dfrac{3t^2}{1+t}dt=3\int_0^2\dfrac{t^2-1+1}{1+t}dt$
$=3\int_0^2(t-1+\dfrac{1}{1+t})dt=3[\dfrac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t)]_0^2=3[2-2+\ln 3]=3\ln 3$

18、$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx=\int_1^{e}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx+\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{e}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^{b}\dfrac{1}{x\ln^2 x}dx$
$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(-\dfrac{1}{\ln x})_{1+\varepsilon}^{e}+\lim\limits_{b\to+\infty}(-\dfrac{1}{\ln x})_{e}^{+\infty},\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(-\dfrac{1}{\ln x})_{1+\varepsilon}^{e}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(-\dfrac{1}{\ln e}+\dfrac{1}{\ln(1+\varepsilon)})$发散，故原反常积分发散.

19、两线交点为$(e,1)$，

$$V_y=\pi\int_0^1 e^{2y}dy-\frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi\cdot\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\pi e^2=\frac{1}{6}\pi e^2-\frac{1}{2}\pi$$

或$V_y=\pi\int_0^1 e^{2y}dy-\pi\int_0^1(ey)^2dy=\pi\cdot\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\pi\cdot\frac{1}{3}e^2y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}\pi e^2-\frac{1}{2}\pi$

20、

$$x^2-6y+2xy'=0\Rightarrow y'-\frac{3}{x}y=-\frac{x}{2}\Rightarrow y=e^{-\int-\frac{3}{x}dx}\left[\int-\frac{x}{2}e^{\int-\frac{3}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=x^3\left[\int-\frac{x}{2}\cdot x^{-3}dx+C\right]=x^3\left[\frac{1}{2x}+C\right]=\frac{x^2}{2}+Cx^3$$

四、综合题 （第21、22题每题7分，第23题6分，共20分）

21、

$$f(x)=x+\int_0^x(x-t)f(t)dt\Rightarrow f(x)=x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt,\ f(0)=0$$

$$\Rightarrow f'(x)=1+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)\Rightarrow f'(x)=1+\int_0^x f(t)dt,f'(0)=1$$

$$\Rightarrow f''(x)-f(x)=0\Rightarrow r^2-1=0\Rightarrow r_1=1,r_2=-1\Rightarrow f(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow c_1+c_2=1,c_1-c_2=-1\Rightarrow c_1=\frac{1}{2},c_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

22 $f(0)=\int_1^2 e^{-x}f(x)dx\Rightarrow f(0)=e^{-\eta}f(\eta)(2-1),\eta\in(1,2)\Rightarrow e^{-0}f(0)=e^{-\eta}f(\eta)$

设函数$F(x)=e^{-x}f(x)$，则其在区间$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，且$F(0)=F(\eta)$，满足罗尔定理，则至少有一点$\xi\in(0,\ \eta)\subset(0,2)$，使$F'(\xi)=0$，即$-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$成立.

23、证明：（1）$f(x)=x\ln x\Rightarrow f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

当$x>1$时，$f'(x)>1>0$，则$f(x)=x\ln x$为单调递增函数.

（2）由（1）可知，$f(\sqrt{2}+1)>f(1+1)\Rightarrow(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}+1)>(1+1)\ln(1+1)=2\ln 2=\ln 4>1$

从而$\ln(\sqrt{2}+1)>\frac{1}{(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}-1$成立.

本试卷适应范围 经济管理类2011 级各专业(5学分)

南京农业大学试题纸

2011-2012 学年第 一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　　班级 ______　　学号 ______　　姓名 ______

题号	一	二	三	四	五	总分	签名
得分							

得分	评阅人

一、填空题 (每题 2 分,共 10 分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ______

2. 已知函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$，则 $dy\,|_{x=o}=$ ______

3. 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 ______

4. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t-x)dt=$ ______

5. 已知 y_1、y_2 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同解，则其通解可以表示成 $y=$ ______

得分	评阅人

二、选择题 (每题 2 分,共 10 分)

6. 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，比其他三个更高阶的无穷小量是（　　　　）.

A：x^2　　B：$1-\cos x$　　C：$\sqrt{1-x^2}-1$　　D：$x-\tan x$

7. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　　　）.

A：连续点　　B：可去间断点　　C：跳跃间断点　　D：无穷间断点

8. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　　　）.

A：$\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　B：$\lim\limits_{h\to\infty} h\left[f(a)-f\left(a-\dfrac{1}{h}\right)\right]$ 存在

C：$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在　　D：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

9. 下列等式中，正确的结果是（　　　　）.

A：$\int f'(x)dx=f(x)$　　B：$\int df(x)=f(x)$　　C：$\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　D：$d\int f(x)dx=f(x)$

10. 下列积分中运算结果正确的是（　　　　）.

A：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx=0$　　B：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\pi$

C：$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}dx=-2$　　D：$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x}dx=0$

得分	评阅人

三、计算题 I （每题 6 分,共 30 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$

12. 求 $y=(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线 $y=kx+b$（其中 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$）

13. 已知曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y+1=xy^3$ 相切于点 $(1,-1)$，求 a、b 的值.

14. 已知隐函数方程 $xy+e^y=x+1$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

15. 设参数方程 $\begin{cases} x=t^t \\ y=(t\ln t)^2 \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

得分	评阅人

四、计算题 II (每题 6 分,共 30 分)

16. 已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，列表讨论函数的凹凸区间与拐点.

17. 求不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & -2\le x\le 2\\ e^{-x} & x<-2、x>2\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{4} f(2-x)dx$

19. 计算抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

20. 已知 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x-y}$，求微分方程的通解.

得分	评阅人

五、综合题　(第 21、22 题每题 7 分,第 23 题 6 分，共 20 分)

21. 设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=xe^x+\int_0^x(t-x)f(t)dt$，求 $f(x)$.（7 分）

22. 在某产品的生产过程中，设 x 为产量，已知固定成本为 15 万元,边际成本 $C'(x)=30+4x$, 边际收益 $R'(x)=60-2x$,（1）求最大利润及取得最大利润时的产量 x_0；（2）求在 $[0,x_0]$ 上利润的平均值.（7 分）

23. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、二阶可导，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，

求证：（1）$f'(0)=1$；　　（2）在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge x$.　　（6 分）

系主任　李　强　　　　出卷人　李爱萍

2011-2012学年第一学期5学分微积分Ⅰ（A）卷答案

一、填空题 (每题2分,共10分)：1：2；2：$-2011!dx$；3：$\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$；4：$f(-x)$；

5：$y_1+c(y_1-y_2)$ 或 $y_2+c(y_1-y_2)$（c 为任意常数）

二、选择题 (每题2分,共10分)：6：D；7：C；8：B；9：C；10：B；

三、计算题Ⅰ (每题6分,共30分)

11：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}(2')=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}(2')=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}(1')=\dfrac{1}{6}(1')$

12：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x}(1')=2(1')$；

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[(2x+1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right](1')=\lim_{x\to\infty}\left[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)+e^{\frac{1}{x}}\right](1')=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}\right]=3(1')$$

所求斜渐近线是 $y=2x+3(1')$

13：$y'=2x+a(1');2y'=y^3+x\cdot 3y^2\cdot y'\Rightarrow y'=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}(2')$;

$1+a+b=-1(1');2+a=\dfrac{-1}{2-3}(1')\Rightarrow a=-1,b=-1(1')$

14：$y+xy'+e^y\cdot y'=1(1')$；$y'+y'+xy''+e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''=0(2')$

将 $x=0$ 代入原方程得 $y=0(1')$，再一起代入上面左式得 $y=1(1')$，

最后代入上面右式得 $y''=-3$, 即 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=-3(1')$

15：$x=t^t\Rightarrow \ln x=t\ln t\Rightarrow \dfrac{1}{x}x'=\ln t+t\cdot\dfrac{1}{t}\Rightarrow x'=t^t(\ln t+t\cdot\dfrac{1}{t})(3')$

$y=(t\ln t)^2\Rightarrow y'=2t\ln t(\ln t+t\cdot\dfrac{1}{t})(2')$；$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t\ln t(\ln t+t\cdot\frac{1}{t})}{t^t(\ln t+t\cdot\frac{1}{t})}=2t^{1-t}\ln t(1')$

四、计算题 II （每题 6 分,共 30 分）

16: $D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$， $y'=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}(1'),y''=\dfrac{6x}{(x-1)^4}(1')$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$ $(1')$

3 分	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	—	0	+	/	+
y'	$\cap$	拐点（0，0）	$\cup$	/	$\cup$

17: $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx\xrightarrow[x=\ln(t^2-1)]{t=\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$

18: $$\int_{-1}^{4}f(2-x)dx\xrightarrow{t=2-x}=\int_{3}^{-2}f(t)d(2-t)=\int_{-2}^{3}f(t)dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{2}^{3}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2-e^{-t}\Big|_2^3=2\pi-e^{-3}+e^{-2}$$

或 $\displaystyle\xrightarrow{t=2\sin u}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos u\,d2\sin u-e^{-t}\Big|_2^3=2\pi-e^{-3}+e^{-2}$

19: 两线交点 $(1,-1)$ $(4,2)$，直线与 x 轴交点为 $(2,0)$

$$V_x=\int_0^4\pi x dx-\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot2=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^4-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$$

或 $\displaystyle=\int_0^4\pi x dx-\int_2^4\pi(x-2)^2dx=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^4-\frac{(x-2)^3}{3}\pi\Big|_2^4=\frac{16}{3}\pi$

20: $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=x-y\Rightarrow\frac{dx}{dy}-x=-y\Rightarrow x=e^{-\int-1dy}\left(\int-y\cdot e^{\int-1dy}dy+c\right)$$

$$=e^y\left(\int-ye^{-y}dy+c\right)=e^y\left(\int yde^{-y}+c\right)=e^y\left(ye^{-y}-\int e^{-y}dy+c\right)=e^y(ye^{-y}+e^{-y}+c)=y+1+ce^y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}\xrightarrow{u=x-y}1-\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=1-\frac{1}{u}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{u}\Rightarrow\frac{u}{u-1}du=dx\Rightarrow(1+\frac{1}{u-1})du=dx$$

$$\Rightarrow\int(1+\frac{1}{u-1})du=\int dx\Rightarrow u+\ln|u-1|=x+c\Rightarrow x-y+\ln|x-y-1|=x+c\Rightarrow\ln|x-y-1|=y+c$$

21：$f(x)=xe^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt(1')\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x+xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)(1')$

$\Rightarrow f''(x)=2e^x+xe^x-f(x)\Rightarrow f''(x)+f(x)=(2+x)e^x(1')$. 同时 $\Rightarrow f(0)=1,f'(0)=1(1')$

先求对应齐次方程通解：$f''(x)+f(x)=0\Rightarrow r^2+1=0\Rightarrow r_1=i,r_2=-i\Rightarrow Y=c_1\cos x+c_2\sin x\ (1')$

再求 $f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$ 的一个特解：

根据 $\lambda=1$ 不是特征方程 $r^2+1=0$ 的根，可设 $y^*=(ax+b)e^x\ (1')$

……………………………………所求 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)e^x+\dfrac{1}{2}\cos x$　　　(1′)

22：$L(x)=\int_0^x R'(t)-C'(t)dt-C_0=\int_0^x 60-2t-30-4tdt-15=30x-3x^2-15$　　　(2′)

$L'(x)=30-6x=0\Rightarrow$ 唯一驻点 $x=5\Rightarrow L_{\max}=L(5)=60$（万元）　　　(2′)

在 $[0,x_0]$ 上利润的平均值为 $\dfrac{\int_0^5 L(x)dx}{5-0}=\dfrac{\int_0^5 30x-3x^2-15dx}{5}=\dfrac{15x^2-x^3-15x\Big|_0^5}{5-0}=35$（万元）(3′)

23：（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\ (1')$，结合 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续可得 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0\ (1')$

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1\ (1')$

（2）设 $F(x)=f(x)-x$，则其在 $(-\infty,+\infty)$ 上也连续、二阶可导，$F'(x)=f'(x)-1=0\Rightarrow x=0\ (1')$

法一：$F''(x)=f''(x)$，结合 $f''(x)>0$ 可知 $f''(0)>0$，则 $x=0$ 为其极小值点，则 $F(x)\ge F(0)\Rightarrow f(x)-x\ge f(0)-0=0\Rightarrow f(x)\ge x$　　　(2′)

法二：$F''(x)\ge0\Rightarrow F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增，

则在 $(-\infty,0)$ 上 $F'(x)<F'(0)=0\Rightarrow F(x)$ 递减 $\Rightarrow F(x)\ge F(0)=f(x)-x=0$

则在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(x)>F'(0)=0\Rightarrow F(x)$ 递增 $\Rightarrow F(x)\ge F(0)=f(x)-x=0$

综上在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒有 $f(x)-x\ge0$，即 $f(x)\ge x$　　　(2′)

本试卷适应范围
经 济 管 理 类
2010级各专业

南京农业大学试题纸

2010-2011 学年一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　　班级 ________　　学号 ________　　姓名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

装订线

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1. 已知 $f(\sin x)=2\cos^2 x+3$，则 $f(x)=$________。

2. 若 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+bx+c}=-3$，则 $b=$ ________，c= ________。

3. 已知当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $\sec x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$________。

4. $f(x)=\dfrac{(x^3+3x^2-x-3)\sin x}{x^3+x^2-6x}$ 的间断点中为第一类可去间断的是________。

5. 设函数$f(x)$满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(1+3x)-f(1)}=5$，则 $f(x)$在$x=1$处可导，且 $f'(1)=$________。

6. 曲线 $y=\ln x$ 上某点的切线平行于直线 $y=2x-5$，则该点的坐标是________。

7. $\displaystyle\int\left(2^x e^{-x}+\left(\frac{x\cos^2 x}{x+\sin x}\right)'\right)dx=$________。

8. 已知$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$，则该参数方程所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________。

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=-1$处的 n 阶泰勒公式为（余项用形式 $R_n(x+1)$ 表示）：

   $\dfrac{1}{x}=$ ________。

10. 某种产品生产 x 件时，总成本函数为 $C(x)=100+6x-0.4x^2+0.02x^3$（元），则生产 10 件时的边际成本为________。

装订线

二、单项选择题（每小题 2 分，共 18 分）

1. 设 $f(x)=(x-1)h(x),h(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性与可导性为【　　】

(A) 连续但不可导　(B) 连续，可导且 $f'(1)=h(1)$　(C) 既不连续，也不可导　(D) 可导但不连续

2. 下列各式运算正确的是【　　】

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n} = x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}} = x(x\neq 0)$

(B) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 1$

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$

3. 设$f(u)$可导，且$y=f(-x^2)$，则$dy=$【　　】

（A）$xf'(-x^2)dx$　（B）$-2xf'(-x^2)dx$　（C）$2xf'(-x^2)dx$　（D）$2f'(-x^2)dx$

4. 若函数$y=f\left(x\right)$为线性函数，则下列等式中成立的是【　　】

（A）$dy=\dfrac{1}{2}\Delta y$　（B）$dy=\dfrac{1}{3}\Delta y$　（C）$dy=\Delta y$　（D）$dy=-\Delta y$

5. 曲线$y=a-(x-b)^{\frac{1}{3}}$【　　】

(A) 凹的，没有拐点　(B)凸的，没有拐点　(C) 有拐点(a,b)　(D) 有拐点(b,a)

6. 设函数$f(x)=x^2-\ln x^2$，那么在区间(-1,0)和(0,1)内，$f(x)$分别为【　　】

(A) 单调增加，单调减少　(B) 单调增加，单调增加

(C) 单调减少，单调减少　(D) 单调减少，单调增加

7. 落在平静水面上的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径增大率总是6(米/秒)，则在2秒末被扰动水面面积的增大率为【　　】

（A）144π(平方米/秒)　（B）144(平方米/秒)　（C）288(平方米/秒)　（D）288π(平方米/秒)

8. 若$\dfrac{\ln x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，则$\int xf'(x)dx=$【　　】

(A) $\dfrac{\ln x}{x}+c$　(B) $\dfrac{1-\ln x}{x}+c$　(C) $\dfrac{1-2\ln x}{x}+c$　(D) $\dfrac{1-2\ln x}{x^2}+c$

9. 微分方程$(1+\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=0$的通解为【　　】

（A）$y=\dfrac{c}{1+\mathrm{e}^{2x}}$　（B）$y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$　（C）$y=\dfrac{c}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$　（D）$y=1-c\mathrm{e}^{2x}$

三、计算题(共42分)

1. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$（6分）

2. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b & x\le 0 \\ \sin ax & x>0 \end{cases}$，问 a，b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。(6 分)

3. 设 $y=e^{x+y}+x^{\sin x}$ 确定 y 是 x 的函数，求 dy（6 分）

4. 求不定积分 $\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt$ （6 分）

5. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$.（6 分）

6. 已知 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$（6 分）

7．已知函数 $f(x)$ 二阶可导，它的图像在原点与曲线 $y=x^2+x$ 相切，且满足关系式：

$$f'(x)+2\int_0^x f(t)dt=-3f(x)+1$$

试求函数 $f(x)$ 的表达式。（6 分）

四、应用题（6 分）

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$（万元/吨），x 为销售量（单位：吨），商品的成本函数是 $C=3x+1$（万元）。

(1) 若每销售一吨商品，政府要征税 t（万元），求该商家获最大利润时的销售量；

(2) t 为何值时，政府税收总额最大。

五、求（1）由 $y=\mathrm{e}^{x}, y=\mathrm{e}^{-x}, x=1$ 所围成图形的面积；（2） $y=\mathrm{e}^{x}, y=\mathrm{e}^{-x}, x=1$ 所围成图形绕 X 轴旋转所形成的旋转体的体积 。（6 分）

六、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：

(1) 存在一点 $a \in (0,\ 1)$，使 $f(a)=1-a$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0,\ 1)$，使 $f'(\eta)f'(\xi)=1$；　(8 分)

系主任 李　强　　　　出卷人 吴清太

2010-2011 学年南京农业大学统考

微积分Ⅰ试题答案(管理类)(A)

一、填空题：（每空 2 分，共 20 分）

1. $-2x^2+5$　2. 3,2　3. $\frac{3}{2}$　4. $x=-3$和$x=0$　5. $\frac{1}{15}$　6. $(\frac{1}{2},-\ln 2)$

7. $\frac{2^x e^{-x}}{\ln 2-1}+\frac{x\cos^2 x}{x+\sin x}+c$　8. $-\frac{b}{a}$　9. $-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^n+R_n(x+1)$　10. 4（元/件）

二、选择题：（每小题 2 分，共 18 分）

1. B　2. A　3. B　4. C　5. D　6. A　7. A　8. C　9. C

三、计算题：（每小题 6 分,共 42 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$ ……… ……………4 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{6x}=-\frac{1}{3}$$ ………6 分

2. 解：首先$f(x)$应在x=0 处连续，故应有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即 $1+b=0\Rightarrow b=-1$．2 分

其次，要使$f(x)$在x=0 处可导，应有 $f'_-(0)=f'_+(0)$。而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$$

故 a=2.　所以当 a=2，b=-1 时，$f(x)$在 x=0 处可导。　6 分

3. 两端对 x 求导，得 $y'=e^{x+y}(1+y')+x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)$　3 分

整理，得 $(1-e^{x+y})y'=e^{x+y}+x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)$

$y'=\dfrac{e^{x+y}+x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)}{1-e^{x+y}}$，$dy=\dfrac{e^{x+y}+x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x)}{1-e^{x+y}}dx$　6 分

4. $\int\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\arcsin t\,d(\arcsin t)$　3 分

$$=\frac{1}{2}(\arcsin t)^2+c$$　6 分

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2 d(\cos x)=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx$　3 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin x)=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\pi+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$ 6分

6. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt-2\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ 3分

$$=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+2e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\pi}-2$$ 6分

7. 由 $y=f(x)$ 在原点与曲线 $y=x^2+x$ 相切可得 $f(0)=0,f'(0)=1$，方程 $f'(x)+2\int_0^x f(t)dt=-3f(x)+1$

两边对 x 求导可得 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0$

显然它为二阶常系数齐次微分方程，它所对应的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, 特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，所以该微分方程的通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$。 4分

求导得 $y'=-c_1e^{-x}-2c_2e^{-2x}$，由 $f'(0)=1,f(0)=0$ 得 $c_1=1,c_2=-1$。

所以所求函数为 $y=e^{-x}-e^{-2x}$ 6分

四、应用题

(1) 总税额为 $T=tx$，利润函数为 $L=R-C-T=-0.2x^2+(4-t)x-1$

令 $L'=-0.4x+4-t=0$，解得唯一驻点 $x=\frac{5}{2}(4-t)$

因为 $L''=-0.4<0$，所以 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 为利润最大时的销售量。 3分

(2) 将 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$，得 $T=10t-\frac{5}{2}t^2$。令 $T'=10-5t=0$，解得唯一驻点 $t=2$。

因为 $T''=-5<0$，所以当 $t=2$ 时，T 有最大值，此时，政府税收总额最大。 6分

五、(1) $S=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=e+\frac{1}{e}-2$ 3分

(2) $V_X=\pi\int_0^1\left(e^x\right)^2dx-\pi\int_0^1\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx$

$$=\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}+e^{-2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$$ 6分

六、证明 (1) 令 $F(x)=f(x)+x-1$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，

又 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$

由零值定理可知，存在一点 $a\in(0,\ 1)$，使 $F(a)=0$，即 $f(a)=1-a$； 4分

(2) 根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(0,a),\xi\in(a,1)$，使

$$f'(\eta)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1-a}{a};\quad f'(\xi)=\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{a}{1-a}$$

从而 $f'(\eta)f'(\xi)=1$。 8分

本试卷适应范围
经济管理类 09
级各专业

南京农业大学试题纸

2009-2010 学年一学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　班级 ________　学号 ________　姓名 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

装
订
线

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=x+1$，且 $\varphi(x)\geq 0$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为________________。

2. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+5}{3n-2}=2$，则 $a=$________，$b=$________________。

3. 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{2}\sin^2 x$ 与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 都是无穷小量，则比较 $\dfrac{1}{2}\sin^2 x$ 与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 知，它们是________无穷小。

4. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=$________。

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$________________。

6. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=$________。

7. 曲线 $y=x^2+2x-5$ 上点 M 处的切线斜率为 6，则点 M 的坐标为________。

8. $d(\int xf'(x)dx)=$________________。

9. 设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________________。

装
订
线

二、单项选择题（每小题 2 分，共 18 分）

1. 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限分别为 a 和 b，且 $a\neq b$，则数列 $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots\ldots,a_n,b_n,\ldots$ 的极限是【　】

（A）a　（B）b　（C）$a+b$　（D）一定不存在

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$，则 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的【　】

(A) 可去间断点　(B) 跳跃间断点　(C) 无穷型间断点　(D) 连续点

系主任________　出卷人 吴清太

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{3x}=$【　　】

(A) 1　　(B) ∞　　(C) e^2　　(D) e^3

4. 对需求函数 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$，需求价格弹性 $\frac{EQ}{Ep}=-\frac{p}{5}$。当价格 $p=$【　　】时，需求量减少的幅度小于价格提高的幅度。

(A) 3　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 10

5. 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=2$ 所围成图形的面积为【　　】

(A) $\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx$　(B) $\int_{-2}^{1}(2-x)dx$　　(C) $\int_{-2}^{1}x^2dx$　　(D) $\int_{-2}^{1}(x^2-2+x)dx$

6. 曲线 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 的拐点个数是【　　】

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

7. 曲线 $y=\frac{4x-1}{(x-2)^2}$【　　】

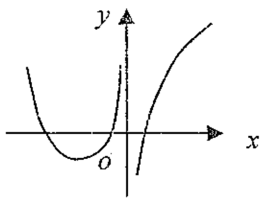
(A) 只有水平渐近线；　　(B) 只有垂直渐近线；

(C) 没有渐近线；　　(D) 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

8. 假设 $f(x)$ 连续，其导函数图形如右图所示，则 $f(x)$ 具有【　　】

(A) 两个极大值一个极小值　(B) 两个极小值一个极大值

(C) 两个极大值两个极小值　(D) 三个极大值一个极小值



9. 若 $f(x)$ 的导函数是 x^{-2}，且 $f(1)=-1$，则 $f(x)=$【　　】

(A) $\ln|x|$　　(B) $-\ln|x|$　　(C) $-x^{-1}$　　(D) $-x^{-3}$

三、计算题(共 42 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$　（6 分）

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x} & x<0\\ a & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}+b & x>0\end{cases}$，求 a ,b 的值，使 $f(x)$ 在 x=0 处连续。(6 分)

3．设$e^{x+y}=xy+1$，求y'及$y'|_{x=0}$（6分）

4．求不定积分$\int xe^{-2x}dx$（6分）

5．求定积分$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$（6分）

6．求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕X轴旋转所形成的旋转体的体积（6分）。

7．计算广义积分$\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$（6分）

四、求微分方程 $y''+2y'=e^{-2x}$ 的通解，及满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$ 的特解. (6 分)

五、某商品的需求量 Q 是单价 P 的函数 $Q=12000-80P$，商品的成本 C 是需求量 Q 的函数 $C=25000+50Q$，每单位商品需纳税 2，试求使销售利润最大的商品价格和最大利润。(6 分)

六、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$，试证：

(1) 至少存在一点 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\xi)=\xi$；

(2) 至少存在一点 $\eta\in(0,\xi)$，使 $f'(\eta)=1$；

(3) 对任意实数λ, 必存在 $x_0\in(0,\xi)$, 使得 $f'(x_0)-\lambda[f(x_0)-x_0]=1$. (8 分)

系主任 李 强　　　　出卷人 吴清太

2009-2010 学年南京农业大学统考
微积分 I 试题答案(管理类)(A)

一、填空题：（每空 2 分，共 20 分）

1.$[0,+\infty)$　2. **0，6**　**3.等价**　**4.** $f(a)$　**5. 2**　**6.** $3f'(x_0)$

7.(2,3)　**8.** $xf'(x)dx$　9. -1

二、选择题：（每小题 2 分，共 18 分）

1. D　2. A　3. D　4. A　5. A　6. B　7. D　8. C　9.C

三、计算题：（每小题 6 分,共 42 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$ ……………………………4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$ ……………………………………………6 分

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$ ……………………………………………………2 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\dfrac{1}{x}+b)=b$ ……………………………………………………4 分

要$f(x)$在 x=0 处连续,要$f(x)$在x=0 处连续,只要 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,即 2=$b$=$a$。

所以当 a=2,b=2 时，$f(x)$在x=0 处连续。 ………………………………… …6 分

3. 方程两边对 x 求导得 $e^{x+y}(1+\dfrac{dy}{dx})=y+x\dfrac{dy}{dx}$,　　2 分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$　　4 分

把x=0 代入原方程可得y=0,所以

$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=-1$　　6 分

4. $\int xe^{-2x}dx=-\dfrac{1}{2}\int xd(e^{-2x})=-\dfrac{x}{2}e^{-2x}+\dfrac{1}{2}\int e^{-2x}dx$　　3 分

$=-\dfrac{x}{2}e^{-2x}-\dfrac{1}{4}\int d(e^{-2x})=-\dfrac{x}{2}e^{-2x}-\dfrac{1}{4}e^{-2x}+c$　　6 分

5. $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\ \underset{dx=\cos t dt}{\overset{x=\sin t}{=}}\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t dt$　　3 分

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=-\cot t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$ 6分

6．椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的平面图形绕 X 轴旋转所形成的旋转体与椭圆的在 X 轴的上半部分与 X 轴所围成的图形绕 X 轴旋转所形成的旋转体是相同的，所以所求旋转体的体积为

$$V_X=\pi\int_{-a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$ 4分

$$=\frac{2b^2\pi}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a\right]=\frac{4\pi ab^2}{3}$$ 6分

7．$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_e^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}$ 3分

$$=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1$$ 6分

四、解法Ⅰ 令 $y'=p=p(x),则y''=\frac{dp}{dx}$,代入原方程得 $\frac{dp}{dx}+2p=e^{-2x}$ 变成了一阶线性微分方程，由一阶线性微分方程的求通解公式，我们得

$$p=e^{-\int 2dx}\left(\int e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+c_1\right)=e^{-2x}(x+c_1)$$

即 $y'=e^{-2x}(x+c_1)$，由 $y'|_{x=0}=0,得c_1=0$，从而可得

$$y'=xe^{-2x}$$ 4分

所以 $y=\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c_2$，由 $y|_{x=0}=1$ 可得 $c_2=\frac{5}{4}$，所以所求方程的通解为

$$y=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{5}{4}$$ 6分

解法Ⅱ 该方程也是二阶常系数非齐次微分方程，它所对应的齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda=0$,特征根为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=0$，而 $f(x)=e^{-2x}$，所以可设该二阶常系数非齐次微分方程的一特解为 $y^*=axe^{-2x}$，求导得 $y^{*\prime}=(a-2ax)e^{-2x}$, $y^{*\prime\prime}=(4ax-4a)e^{-2x}$，代入微分方程得 $-2ae^{-2x}=e^{-2x}$，即 $a=-\frac{1}{2}$。 4分

该二阶常系数非齐次微分方程的一特解为 $y^*=-\frac{1}{2}xe^{-2x}$，其通解为

$y=c_1e^{-2x}+c_2-\frac{1}{2}xe^{-2x}$， $y'|_{x=0}=0, y|_{x=0}=1$ 得 $c_1=-\frac{1}{4}, c_2=\frac{5}{4}$，所以所求微分方程的特解为 $y=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{5}{4}$ 6 分

五、利润函数为

$$L=R-C-2Q=PQ-25000-50Q-2Q=-80P^2+16160P-649000$$ 3 分

$\frac{dL}{dP}=-160P+16160\underset{=}{令}0$，可得 $P=101$ 4 分

$$\frac{d^2L}{dP^2}|_{P=101}=-160<0$$

所以在价格为 P=101 时，可获得利润最大，最大利润为 $L|_{P=101}=167080$ 6 分

六、证明 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，又

$$F(1)=f(1)-1=0-1<0$$
$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

由零值定理可知，至少存在一点 $\xi\in(\frac{1}{2}, 1)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$； 3 分

(2) $F(0)=f(0)-0=0=F(\xi)$，对 $F(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上用罗尔定理，

则至少存在一点 $\eta\in(0, \xi)$，使 $F'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)=1$； 6 分

(3) 令 $\Phi(x)=e^{-\lambda x}F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

则 $\Phi(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上连续，在 $(0, \xi)$ 内可导，且 $\Phi(0)=\Phi(\xi)=0$，所以

至少存在一点 $x_0\in(0, \xi)$，使得 $\Phi'(x_0)=0$

即 $e^{-\lambda x_0}[f'(x_0)-1]-\lambda e^{-\lambda x_0}[f(x_0)-x_0]=0$

因 $e^{-\lambda x_0}\neq 0$，从而有 $f'(x_0)-\lambda[f(x_0)-x_0]=1$。 8 分

本试卷适应范围 经济管理类 09 级各专业

南京农业大学试题纸

2009-2010 学年一 学期　　课程类型：必修　　试卷类型：B

课程 ＿微积分 I＿　班级＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

装订线

一、填空题（每空 2 分,共 20 分）

1. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$，则 $f(x)=$＿＿＿＿＿。

2. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿。

3. 已知当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则 a=＿＿＿＿。

4. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的类间断点中为第一类可去间断的是＿＿＿＿＿＿＿。

5. 设函数 $f(x)$满足，$f(0)=0, f'(0)=A$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$＿＿＿＿＿＿。

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处切线方程＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

7. $\displaystyle\int\left(e^{-x}+\left(\frac{2^x}{x\sin x}\right)'\right)dx=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

8. 设某商品的需求函数为 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$，则需求弹性函数 $\dfrac{EQ}{Ep}=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

9. 函数 xe^x 的 n 阶麦克劳林公式为（余项用形式 $R_n(x)$ 表示）：

$xe^x=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

装订线

二、单项选择题（每小题 2 分,共 18 分）

1. 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限分别为 a 和 b，若数列 $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots\ldots,a_n,b_n,\ldots$ 的极限存在，则【　　】

（A）极限为 a　　B）极限为 b　　（C）极限为 $a+b$　　（D）$a=b$

2. 设 $f(x)=(x-a)h(x), h(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的连续性与可导性为【　　】

(A) 连续但不可导　(B) 不连续，但可导　(C) 既不连续，也不可导　(D) 连续且可导

系主任＿＿＿＿＿＿　　出卷人 ＿吴清太＿

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n}(x\neq 0)=$【　　】

(A) x　　(B) ∞　　(C) 0　　(D) 1

4. 设 $f(u)$ 可导，且 $y=f(e^x)$，则 $dy=$【　】

（A） $f'(e^x)dx$　　（B） $f'(e^x)de^x$　　（C） $\left[f(e^x)\right]'de^x$　　（D） $\left[f(e^x)\right]'e^x dx$

5. 设 $f(x)$ 为可微函数，则在点 x 处，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y - dy$ 是关于 Δx 的【　　】

（A） 同阶无穷小　（B） 低降无穷小　（C） 高阶无穷小　（D） 等价无穷小

6. 函数 $f(x)=\sin 2x - x\left(|x|\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 最大值为【　　】

(A) $-\frac{\pi}{2}$　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

7. 已知 $y=\left(f[\ln(-x)]\right)^2$,则 $\frac{dy}{dx}=$【　】

(A) $2f[\ln(-x)]f'[\ln(-x)]$　　(B) $\frac{1}{x}f[\ln(-x)]$

(C) $\frac{2}{x}f[\ln(-x)]f'[\ln(-x)]$　　(D) $-\frac{1}{x}f[\ln(-x)]f'[\ln(-x)]$

8. 利用函数的微分代替函数的增量计算近似值，则 $\sqrt[5]{0.95}$ 的近似值为【　】

（A）1.1；　（B）1；　（C） 1.01；　（D）0.99.

9. 若 $x\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$【　】

(A) $x+c$　　(B) $x+2\ln x+c$　　(C) $\ln x+c$　　(D) $x(2+\ln x)+c$

三、计算题(共 42 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sinx}\right)$ （6 分）

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, x\geq 0\\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, x<0\end{cases}$ $(a>0)$，当 a 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。(6 分)

3. 设$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$确定y是x的函数，求$y'|_{x=0}$（6分）

4. 求不定积分$\int x\ln x dx$（6分）

4. 求定积分$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.（6分）

6. 计算广义积分$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$（6分）

7. 求微分方程$y''-4y'+3y=0$在初始条件$y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$下的特解。（6分）

四、应用题（8分）

设生产某产品的边际成本为$C'(Q)=1000-20Q+Q^2$，固定成本为9000元，该产品的单位售价为3400元，求该产品

（1）成本函数、收益函数、利润函数；

（2）获得最大利润时的产量及最大利润

五、求（1）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成图形的面积；（2）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成图形绕 Y 轴旋转所形成的旋转体的体积 。（6 分）

六、证明下列不等式：

当$x>0$时，$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$ (6 分)

系主任 李 强 出卷人 吴清太

2009-2010 学年南京农业大学统考
微积分Ⅰ试题答案(管理类)(B)

一、填空题：（每空 2 分，共 20 分）

1. x^2+1　　2。 $2,-8$　　**3.** $\frac{3}{2}$　　**4.** $x=1$　　**5.** A　　**6.** $y=-4x+4$

7. $-e^{-x}+\frac{2^x}{x\sin x}+c$　　**8.** $-\frac{p}{5}$　　9. $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+R_n(x)$

二、选择题：（每小题 2 分，共 18 分）

1. D　2. D　3. A　4. B　5. C　6. D　7. C　8. D　9. A

三、计算题：（每小题 6 分,共 42 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}$ ……………………………….4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$ ……….. ……………….6 分

2. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ …..2 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………….4 分

要 $f(x)$ 在 x=0 处连续，要 $f(x)$ 在 x=0 处连续，只要 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，

即 $\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$,

所以当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 x=0 处连续。 ………………………………… …6 分

3. 方程两边对 x 求导得 $\cos(xy)(y+x\frac{dy}{dx})+\frac{\frac{dy}{dx}-1}{y-x}=1$, 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y-x-y(y-x)\cos(xy)}{1+x(y-x)\cos(xy)}$$ 5 分

把 x=0 代入方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 可得 y=1,所以

$\frac{dy}{dx}|_{(0,1)}=1$ 　6 分

4. $\int x\ln xdx=\frac{1}{2}\int\ln xd(x^2)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2d(\ln x)$ 　3 分

$$L(60)=-\frac{1}{3}\times 60^3+10\times 60^2+2400\times 60-9000=99000$$ 8分

五、(1) 由对称性可知，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的平面图形等于该椭圆在第一象限与 X 轴及 Y 轴所围成的图形面积的 4 倍，即

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x=a\sin t}{\underset{dx=a\cos t dt}{=}} 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt$$

$$=2ab\left[\frac{\pi}{2}+\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=ab\pi$$ 3分

(2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的平面图形绕 X 轴旋转所形成的旋转体与椭圆的在 X 轴的上半部分与 X 轴所围成的图形绕 X 轴旋转所形成的旋转体是相同的，所以所求旋转体的体积为

$$V_X=\pi\int_{-a}^{a}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2b^2\pi}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^a\right]=\frac{4\pi ab^2}{3}$$ 6分

六、证明　令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 2分

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0(\forall x>0)$$ 4分

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，所以当 $x>0$，$f(x)>f(0)=0$

即　$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ 6分

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$ 6分

5. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx \overset{x=2\sin t}{\underset{dx=2\cos tdt}{=}} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt$ 3分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))dt=\pi-\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$ 6分

6. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ 3分

$$=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{2}$$ 6分

7．方程 $y''-4y'+3y=0$ 是二阶常系数齐次微分方程，它所对应的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1$，所以该微分方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{3x}$。 4分

求导得 $y'=c_1e^x+3c_2e^{3x}$，由 $y'|_{x=0}=10, y|_{x=0}=6$ 得

$\begin{cases}c_1+c_2=6\\c_1+3c_2=10\end{cases}$，解得 $c_1=4,c_2=2$。

所以所求微分方程的特解为

$$y=4e^x+2e^x$$ 6分

四、应用题

解(1) 成本函数为

$$C(Q)=\int_0^Q C'(Q)dQ+C_0=\int_0^Q(1000-20Q+Q^2)dQ+9000$$

$$=\frac{1}{3}Q^3-10Q^2+1000Q+9000$$ 2分

收益函数为

$$R(Q)=PQ=3400Q$$ 3分

利润函数为

$$L(Q)=L(Q)-C(Q)=-\frac{1}{3}Q^3+10Q^2+2400Q-9000$$ 5分

（2）$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=-Q^2+20Q+2400$

令 $L'(Q)=0$ 得，$Q=60$或$Q=-40$(舍去)$,L''(Q)=-2Q+20,L''(60)=-100<0$ 7分

所以在产量 $Q=60$ 时，所获得的利润最大，最大利润为:

本试卷适应范围
经管类

南京农业大学试题纸

2008/2009 学年 第一学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程 微积分I 班级________ 学号________ 姓名________ 成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

装订线

得分	评阅人

一、选择题（每小题 3 分，共计 15 分）

1.函数 $y=\sin(3x-1)$ 的一个原函数是(　　　)

(A) $y=-\cos(3x-1)$　　(B) $y=-3\cos(3x-1)$

(C) $y=-\frac{1}{3}\cos(3x-1)$　　(D) $y=\frac{1}{3}\cos(3x-1)$

2. 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f^{(n)}(0)=$(　　　)

(A) $-n!$　　(B) $n!$　　(C) $(n-1)!$　　(D) $(n+1)!$

3. 下列函数中,在 $x=0$ 处可导的是(　　　)

(A) $f(x)=|x|$　　(B) $f(x)=|\sin x|$

(C) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

装订线

4. 当 $x\to 0$ 时,下列无穷小量与 $\ln(1-x^2)$ 等价的是(　　　)

(A) $-\sin x^2$　　(B) e^x-1　　(C) x^3　　(D) $\arcsin\frac{x^2}{2}$

5.微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的特解 y^* 应设为(　　　)

(A) $y^*=(Ax+B)e^x$　(B) $y^*=x(Ax+B)e^x$　(C) $y^*=xe^x$　(D) $y^*=x^2(Ax+B)e^x$

得分	评阅人

二、填空题（每小题 4 分，共计 20 分）

6. 积分 $\int_0^1 \arctan x dx=$ ____________.

7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x} t\sin t dt}{e^{x^3}-1}=$ ________ .

8. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=x^{\frac{1}{y}}$ 确定，则 $dy=$________ .

9. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线平行于直线 $y=1+x$；

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=$________ .

10. $\int e^{-x+\ln x}dx=$ ________ .

得分	评阅人

三、计算题（每小题6分，共计54分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

12. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

13. 求 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2(1+\sin x)}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

14. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在$x=0$处可导,求a,b的值.

15. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, -\pi<x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

16. 求 $\int\frac{x^3-1}{1+x^2}dx$.

17. 求微分方程 $y'+xy=x$ 的通解。

18. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 L,使该曲线与切线 L 及直线 $x=0, x=2$ 所围成的图形面积最小.

19.求由曲线 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{2-x^2}$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积.

得分	评阅人

四、证明题（共 11 分）

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$

证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)-f(\xi)=0$．（本题 6 分）

21. 证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$ ．（本题 5 分）

系主任 [illegible]　　　　出卷人 [illegible]

南京农业大学试题纸

经管类　微积分 I

一、选择题

1. C　2. B　3. C　4. A　5. B

二、填空题

6. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

7. $\frac{8}{3}$

8. $\frac{y}{xy+x\ln x}dx$

9. 2

10. $-(x+y)e^{-x}+C$

11. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

$=2$

6

12. [redacted]

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\frac{dt}{dx}=\frac{(\frac{t}{2})'}{[\ln(1+t^2)]'}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$

6

13. [redacted]

解：原式 $=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}d(x)+\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}d(x)+0$

$=2\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})d(x)$

$=2\{[x]_0^1-\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(x)\}$

$=2-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(x)$

令 $x=\sin t$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}d(x)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,d(t)$

$=[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{4}$

∴原式 $=2-\frac{\pi}{2}$

6

14. [redacted]

解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

∴ $e^0 = b = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & (x \le 0) \\ a & x > 0 \end{cases}$$

∴ $a = 2$

∴ $a = 2 \quad b = 1$

15. [redacted]

解：令 $x-2=t \quad x=2+t$

$\int_1^4 f(x-2)\, d(x)$

$= \int_{-1}^{2} f(t)\, d(t+2)$

$= \int_{-1}^{2} f(t)\, d(t)$

即 $\int_1^4 f(x-2)\, d(x) = \int_{-1}^{2} f(x)\, d(x)$

$= \int_{-1}^{0} f(x)\, d(x) + \int_0^2 f(x)\, d(x)$

$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+\cos x}\, d(x) + \int_0^2 x e^{-x^2}\, d(x)$

$= \left[\tan\frac{x}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{-2}\int_0^2 e^{-x^2}\, d(-x^2)$

$= \lim_{x\to 0}\tan\frac{x}{2} - \left[\tan\left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2$

$= 0 + \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[e^{-4} - 1\right]$

$= \tan\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4} + \frac{1}{2}$

16. [redacted]

解：原式 $= \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, d(x)$

$= \int \frac{x^2 \cdot x}{1+x^2}\, d(x) - \arctan x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, d(x^2) - \arctan x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, d(x^2) - \arctan x$

$= \frac{1}{2}\left[x^2 - \ln(x^2+1)\right] - \arctan x + C$

17. [redacted]

解：∵ $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -xy$

$\frac{dy}{y} = -x\, dx$

$\ln y = -\frac{x^2}{2} + c'$

$y = C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$

令 $C_1 = u(x) \quad y = u(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

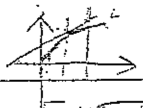
$y' = u' e^{-\frac{x^2}{2}} + u\, e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{1}{2}\times 2x\right)$

$x - xy = u' e^{-\frac{x^2}{2}} + y\cdot e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$

∴ $u' = x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

∴ $u = e^{\frac{x^2}{2}} + C$

∴ 通解为 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$



6

18. [redacted]

解：设切点为 $(x_0,\sqrt{x_0})$ $(x_0>0)$

$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ∴ $k=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}$

$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

∴切线 l: $y=\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$

∵曲线与 $x=0$, $x=2$ 及 x 轴围成的面积为定值

∴只要 l 与 $x=0$, $x=2$ 及 x 轴围成的面积最小就可以

∴ $S=\int_0^2\left(\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^2}{4\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}\cdot x\right]_0^2$

$=\frac{1}{\sqrt{x_0}}+\sqrt{x_0}\ge 2$

当 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\sqrt{x_0}$ 即 $x_0=1$ 时成立 面积最小.

∴切线 l: $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)$

6

19. [redacted]

解：$y=x^2$ $y=\sqrt{2-x^2}$

$\begin{cases}y=x^2\\ y=\sqrt{2-x^2}\end{cases}$ $y=1$

∴ $V_y=\int_0^1\pi(\sqrt{y})^2dy+\int_1^{\sqrt{2}}\pi(\sqrt{2-y^2})^2dy$

$=\int_0^1\pi y\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\pi(2-y^2)dy$

$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}$

$=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$

$=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$

得分	评阅人
10	李

四、证明题（共11分）

6

20. [redacted]

[redacted]

证明：设 $F(x)=e^{-x}f(x)$

$F(0)=e^0f(0)=0$ $F(1)=0$

$F(0)=F(1)$

∴由罗尔定理得 $\exists\xi\in(0,1)$

存使得 $F'(\xi)=0$

$F'(x)=f'(x)e^{-x}+e^{-x}(-1)f(x)$

∴ $e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0$

即 $f'(\xi)-f(\xi)=0$

21. [redacted]

证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{\frac{2}{n}}+\frac{1}{\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}}\right]$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{\frac{2}{n}}+\frac{1}{\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}}\right]=\int_0^1\frac{1}{x}dx$ $x=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,3,\dots)$

$=[\ln x]_0^1=0-\lim_{x\to0^+}\ln x=\lim_{n\to\infty}\ln n$

$\lim_{n\to\infty}(1+\ln n)=1+\lim_{n\to\infty}\ln n$

∴ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.