本试卷适应范围
大农类 专业
19 级 本科生

南京农业大学试题纸

2019/2020 学年 第一 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2106 课程名 微积分 1C 学分 4

学号 ________ 姓名 ________ 班级 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

装
订
线

一.填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 下列极限中，正确的是（ ）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=e$ B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sec x}=e$ D. $\lim\limits_{x\to 0}(1-n)^{\frac{1}{n}}=e$

2. 若 $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ ）.

A.可去间断点 B.跳跃间断点 C.无穷间断点 D.连续点

3. 设 $f(x)$ 有连续的导函数，且 $a\neq 0$，则下列表达式正确的是（ ）.

A. $\int f'(ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}f(ax)+C$ B. $\int f'(ax)\mathrm{d}x=f(ax)+C$

C. $\left[\int f'(ax)\mathrm{d}x\right]'=af(ax)$ D. $\int f'(ax)\mathrm{d}x=f(x)+C$

4. 微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解是（ ）.

A. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ B. $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

C. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$ D. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$

装
订
线

5. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是可导的函数,则 $(f(x)-f(-x))'$ 一定是（ ）.

A.奇函数 B.偶函数 C.非奇函数非偶函数 D.不能确定奇偶性

二.填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x}-e^{y}=\sin(xy)$ 所确定，则 $y'(0)=$________.

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$ 的单调递增区间为________.

8. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x\tan^2 x}{1+x^2}dx=$________.

9. 设 $y(x)$ 满足微分方程 $e^{x}yy'=1$，且 $y(0)=1$，则 $y=$________.

10. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx =$________________.

三、计算下列各题（每题 6 分，共 42 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\tan x}{\int_0^x t(t+\sin t)dt}$.

12. 已知 $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}$.

13. 已知 $z = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, x \ge 0 \\ \dfrac{1}{1+e^x}, x < 0 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

15. 求 $y'-(\cos x)y=e^{\sin x}$ 满足 $y(0)=1$ 的解.

16. 设 $z=f(x^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$.

17. 计算 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$.

四、综合题（本题共 3 个小题，满分 28 分）

18. 甲乙二城位于一直线形河流的同一侧，甲城位于岸边，乙城离河岸 40 公里，乙城在河岸的垂足与甲城相距 50 公里，甲乙二城计划在河岸上合资共建一个污水处理厂，已知从污水处理厂到甲乙二城铺设排污管道的费用分别为每公里 500 元和 700 元，问污水处理厂建在何处才能使排污管道的费用最少？（本题 9 分）

19. 已知抛物线 $y=4x-x^2$，

（1）抛物线上哪一点处的切线平行于 x 轴？写出该切线方程。（2 分）

（2）求抛物线与其水平切线及 y 轴围成的平面图形面积。（4 分）

（3）求该平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。（4 分）

20.（本题 9 分）

（1）（3 分）简述罗尔中值定理的条件和结论；

（2）（6 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b](0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(x)>0$，$x\in(a,b)$ 且 $af(b)-bf(a)=0$；证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

系主任＿＿＿＿＿＿　　　　出卷人＿＿＿＿＿＿

本试卷适应范围
大农类 专业
19 级 本科生

南京农业大学试题纸

2019/2020 学年 第一 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2106 课程名 微积分 1C 学分 4

学号 ______ 姓名 ______ 班级 ______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	签名
得分											

装订线

一.填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. A 2. B 3. A 4. C 5. B.

二.填空题（每题 3 分，共 15 分）

6. 1 7. $(-\infty,1]$ .8. 0 .9. $y=\sqrt{3-2e^{-x}}$ .10. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$.

三、计算下列各题（每题 6 分，共 42 分）

11.解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\tan x}{\int_0^x t(t+\sin t)dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\int_0^x t(t+\sin t)dt}$ （2分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x(x+\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x+\sin x}=\frac{3}{2}.$$ （6分）

12. 解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sec^2 t}{at\cos t}=\dfrac{1}{at\cos^3 t}$，$\Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{24}{\pi a}$. （3分,5分,6分）

13. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. （3分,6分）

14. 解：$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^0\dfrac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\dfrac{1}{1+t}dt$ （3分）

$$=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{e^t}-\frac{1}{1+e^t}\right)de^t+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\ln\frac{e^t}{1+e^t}\Big|_{-1}^{0}+\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln(e+1).$$ （6分）

15. 解：先求 $y'-(\cos x)y=0$，$\dfrac{dy}{y}=\cos x dx\Rightarrow \ln y=\sin x+\ln C\Rightarrow y=Ce^{\sin x}$. （3分）

再求 $y'-(\cos x)y=e^{\sin x}$，设 $y=C(x)e^{\sin x}$ 是 $y'-(\cos x)y=e^{\sin x}$ 的解，代入得

$e^{\sin x}C'(x)=e^{\sin x}\Rightarrow C'(x)=1\Rightarrow C(x)=x+C\Rightarrow y=e^{\sin x}(x+C)$ （5分）

又 $y(0)=1$，$\Rightarrow y=e^{\sin x}(x+1)$. （6分）

16. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_2'$；$dz=(2xf_1'+yf_2')dx+xf_2'dy$. （4分,6分）

5

17. 解：$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r^2dr=\frac{\pi}{12}.$$ （2分,4分,6分）

四、综合题（本题共3个小题，满分28分）

18. 解：设污水处理厂建在距甲城x公里的河岸处才能使排污管道的费用最少，则费用为

$$y=500x+700\sqrt{40^2+(50-x)^2},0<x<50$$ （2分）

令$y'=500+700\times\frac{-(50-x)}{\sqrt{40^2+(50-x)^2}}=0\Rightarrow x=50(1-\frac{\sqrt{6}}{3})$，

故污水处理厂应距甲城$50(1-\frac{\sqrt{6}}{3})$公里. （9分）

19. 解：

（1）$y'=4-2x,x=2$，所求点为$(2,4)$，所求切线为$y=4$. （2分）

（2）$S=\int_0^2(4-4x+x^2)dx=\frac{8}{3}$. （6分）

（3）$V=32\pi-\int_0^2\pi(4x-x^2)^2dx=\frac{224}{15}\pi$. （10分）

20.（本题9分）

解：（1）条件：设$f(x)$在$[a,b](0<a<b)$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，

结论：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f'(\xi)=0$. （2分）

（2）证明：作$g(x)=\ln f(x)-\ln x$，所以$g(x)$在$[a,b](0<a<b)$上连续，在(a,b)内可导，

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\text{ 且 }g(a)=\ln\frac{f(a)}{a}=\ln\frac{f(b)}{b}=g(b),$$

故由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$g'(\xi)=0$即$f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

系主任 ________　　出卷人 ________

本试卷适应范围
大农类专业
（4 学分）

南京农业大学试题纸

2018-2019 学年　第一　学期　　课程类型：必修　　试卷类型：A

课程号 MATH2106　　课程名 微积分 1C　　学分 4

学号 ________　　姓名 ________　　班级 ________

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
阅卷人						
核分人						

一、选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1、当 $x \to 0$ 时，$3x^2$ 是 $\sin^2 x$ 的（　　　）

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不等价

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

2、已知 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ 等于（　　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3、设 $\varphi(x)=\int_0^{x^2} e^{-t}\mathrm{d}t$，则 $\varphi'(x)=$（　　　）

A. e^{-x^2}　　B. $-e^{-x^2}$　　C. $2xe^{-x^2}$　　D. $-2xe^{-x^2}$

4、下列反常积分中，收敛的是（　　　）

A. $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

B. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　D. $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^{1/2}}\mathrm{d}x$

5、已知 $z=x+y+\dfrac{1}{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 在点 $(1,1)$ 处的值是（　　　）

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. 5

二、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

6、$x=0$ 是函数 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ 的第________类间断点.

7、若函数 $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x\le 1\\ x-a, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$________.

8、交换积分次序：

$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y=$ ________________ .

9、曲线$\begin{cases}x=t^2\\y=4t\end{cases}$在$t=1$处的切线方程为________.

10、微分方程$y''-4y'-5y=0$的通解为________.

三、计算题：（每题6分，共36分）

11、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\cot x$；

12、求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$；

13、设函数$y=y(x)$由方程$2^{xy}=x+y$所确定，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

14、求定积分 $\int_0^{\pi}\sin^3 x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

15、若$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$，求$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$.

16、设$f(x,y)=\ln(x^2+y^2+2)$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

四、综合题（每题9分，共27分）

17、计算$\iint\limits_D \cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=1, y=2$与$y=x-1$所围成的闭区域.

18、在曲线族$y=a(1-x^2)(a>0)$中求一条曲线，使得这条曲线与它在点$(-1,0)$和$(1,0)$处的两条法线所围成的图形的面积最小.

19、已知曲线过$(0,1)$点，且在点(x,y)处的斜率为$x+y$，求该曲线方程.

四：证明题（7分）

20、设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且满足$f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$.证明:存在$\xi\in(0,3)$,使得$f'(\xi)=0$.

本试卷适应范围
大农类专业
（4学分）

南京农业大学试题纸

2018-2019 学年 第一 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程号 MATH2106 课程名 微积分 1C 学分 4

学号 ________ 姓名 ________ 班级 ________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						
核分人						

一、选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1、 B 2、B 3、 C 4、 B 5、 B

二、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

6、$x=0$ 是函数 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ 的第___一___类间断点.

7、若函数 $f(x)=\begin{cases}-2x+1, x\le 1\\ x-a, \quad x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a=$___2___.

8、交换积分次序：

$\int_0^1 dx\int_x^{2-x} f(x,y)dy=\underline{\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)dx}$

9、曲线 $\begin{cases}x=t^2\\ y=4t\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程为 $\underline{y=2x+2}$.

10、微分方程 $y''-4y'-5y=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}}$

三、计算题：（每题 6 分，共 36 分）

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\cot x$；

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$。

12、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$；

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{(2+x)\cdot\frac{2x}{2+x}}=e^2$。

13、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$。

解：方程两边对 x 求导，得：

$2^{xy}\ln 2(y+x\dfrac{dy}{dx})=1+\dfrac{dy}{dx}$，整理得：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y2^{xy}\ln 2-1}{1-x2^{xy}\ln 2}$。

当 $x=0$ 时，代入原方程可得 $y=1$。所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{y2^{xy}\ln 2-1}{1-x2^{xy}\ln 2}\right|_{x=0}=\ln 2-1。$$

14、求定积分 $\int_0^{\pi}\sin^3 x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$

解：$\int_0^{\pi}\sin^3 x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sin^3 x\cdot|\cos x|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot|\cos x|dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3 x\cdot|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3 x\cdot\cos x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3 x d\sin x=\frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin^4 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}。$$

15、若 $\int f(x)dx=x^2+C$，求 $\int xf(1-x^2)dx$。

解：两边对等式求导得，$f(x)=2x$，则 $f(1-x^2)=2(1-x^2)$，从而

$$\int xf(1-x^2)dx=\int 2x(1-x^2)dx=x^2-\frac{1}{2}x^4+C。$$

16、设 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+2)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2+2}$；

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+2}\right)'_y=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+2)^2}。$$

四、综合题（每题9分，共27分）

17、计算 $\iint\limits_D\cos y^2 dxdy$，其中 D 是由直线 $x=1,y=2$ 与 $y=x-1$ 所围成的闭区域。

解：（1）画图：略。

（2）$\iint\limits_D\cos y^2 dxdy=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}\cos y^2 dx=\int_0^2 y\cos y^2 dy$

$$=(\frac{1}{2}\sin y^2)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\sin 4。$$

18、在曲线族 $y=a(1-x^2)(a>0)$ 中求一条曲线，使得这条曲线与它在点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 处的两条法线所围成的图形的面积最小。

解：$y'=-2ax$，点 $(-1,0)$ 处的法线斜率 $k=-\frac{1}{2a}$，故法线方程为 $y=-\frac{1}{2a}(x+1)$，

点 $(1,0)$ 处的法线斜率 $k=\frac{1}{2a}$，故法线方程为 $y=\frac{1}{2a}(x-1)$，画出图形，由图形可知，所求面积关于 y 轴对称，记所围图形面积的一半为 S，则

$$S=\int_0^1[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)]\mathrm{d}x=\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a}。$$

令 $S_a'=\frac{2}{3}-\frac{1}{4a^2}=0$，得 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$，唯一的驻点即为最值点，故所求的曲线方程为

$$y=\frac{\sqrt{6}}{4}(1-x^2)。$$

19、已知曲线过 $(0,1)$ 点，且在点 (x,y) 处的斜率为 $x+y$，求该曲线方程。

解：由题意知，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x$，初始条件为 $y|_{x=0}=1$。

其中 $P(x)=-1,Q(x)=x,$ 故方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^{\int \mathrm{d}x}[\int xe^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^x[\int xe^{-x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^x[-(x+1)e^{-x}+C]$$

$$=Ce^x-x-1,$$

$\because y|_{x=0}=1$，$\therefore C=2$，该曲线方程为 $y=2e^x-x-1$

四：证明题（7 分）

20、设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且满足 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$. 证明:存在 $\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

本试卷适应范围 大农类专业 （4学分）

南京农业大学试题纸

2017-2018 学年 1 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程号 MATH2106　课程名 微积分 I C　学分 4

学　号 ____________　姓　名 ____________　班级 ________

题　号	一	二	三	四	五	总分
得　分						
阅卷人						
核分人						

一、填空题（每题3分，共18分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{x}=$ ____________，　$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ____________；

2. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且 $f'(a)=2, g'(a)=3$，则 $f'(-a)+g'(-a)=$ ____________；

3. 曲线 $y=\dfrac{\sin x}{(x-1)\ln x}$ 的所有渐近线有 ____________；

4. 函数 $y=(x-2)^{\frac{5}{2}}$ 的拐点是____________；

5. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^{2017}+2}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=$ ____________；

6. 交换积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ____________

二、选择题（每题2分，共8分）

7. 函数 $z=f(x,x+y)$ 具有连续的二阶偏导数，记 $u=x, v=x+y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）.

（A）$f''_{uv}+f''_{vv}$　（B）$f''_{uu}+f''_{uv}+f''_{vv}$　（C）$f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}$　（D）$f''_{uu}+f''_{uv}+f'_{v}$

8. 对广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{p}}dx$ 有结论（　　）.

（A）$p\geq 1$时收敛　（B）$p>1$时收敛　（C）$p<1$时收敛　（D）对于任意的 p 值均不收敛

9. 设方程 $x^3+3xy+y^3=1$ 确定隐函数 $y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$（　　）.

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）1.5

10. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x-4}$ 的间断点个数（　　）.

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3

三、计算题（6 分×6=36 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{1}{t}-\frac{1}{e^t-1})$.

12. 求曲线 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 为二次可导函数，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求不定积分 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

14. 求定积分 $\int_1^{e^2}\frac{1}{x(1+3\ln x)}\mathrm{d}x$.

15. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^z=xyz$ 确定的二元函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

16. 计算 $\iint\limits_{D}(x^2+y^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=\frac{1}{2}x, y=1$ 所围成的平面区域.

四、综合题 （10分×3=30分）

17. 确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & 0<x<1,\\ ax^2+bx+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导.

18. 设 $y=f(x)$ 是可微的，且满足 $f(x)=x^2+\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt$，求 $f(x)$.

19．设抛物线$y=ax^2+bx+c$过原点，当$0\le x\le 1$时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与直线$x=1$及x轴所围成的图形的面积为$\frac{1}{3}$，求a,b,c使此图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

五、证明题（8分）

20. 设函数在区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=1,f(1)=0$，证明：存在一点$z\in(0,1)$使得$f'(z)=-\frac{f(z)}{z}$.

系主任________　　　　出卷人 ________

2017-2018学年第一学期

南京农业大学《微积分 I C》试卷 (A)

考试方式__闭卷__考试时长_120__分

一、填空题（3分×6=18分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x=$ _____e^{-2}______ $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$______0____；

2. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且 $f'(a)=2, g'(a)=3$，则 $f'(-a)+g'(-a)=$ __-1__；

3. 曲线 $y=\dfrac{\sin x}{(x-1)\ln x}$ 的渐近线有____$y=0$，x=1_______；

4. 函数 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点是___(2,0)_____；

5. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^{2017}+2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$______$\dfrac{2\pi}{3}$________________；

6. 交换积分次序 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ $\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$；

二、选择题（2分×4=8分）

7. 函数 $z=f(x,x+y)$ 具有连续的二阶偏导数，记 $u=x, v=x+y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（ A ）.

（A） $f''_{uv}+f''_{vv}$　　（B） $f''_{uu}+f''_{uv}+f''_{vv}$

（C） $f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv}$　　（D） $f''_{uu}+f''_{uv}+f'_{v}$

8. 对广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ 有结论（ B ）.

（A） $p\geq 1$ 时收敛　　（B） $p>1$ 时收敛

（C） $p<1$ 时收敛　　（D）对于任意的 p 值均不收敛

9. 设方程 $x^3+3xy+y^3=1$ 确定隐函数 $y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$（ A ）.

（A） -1　　（B） 0　　（C） 1　　（D） $\frac{3}{2}$

10．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x-4}$ 的间断点个数（　B　）．

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3

三、计算题（6 分×6＝36 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e^t-1})$．

解 $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{e^t-1})=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1-t}{t(e^t-1)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{2t}=\dfrac{1}{2}$．

12.求曲线 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 为二次可导函数，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

解 $\dfrac{dy}{dx}=t$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}。$$

13. 设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求不定积分 $\int xf'(x)\,dx$．

解 $\int xf'(x)\,dx=\int x\,d\,f(x)=xf(x)-\int f(x)\,dx$

$$=\frac{x\cos x-2\sin x}{x}+C$$

14．求定积分 $\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x(1+3\ln x)}\,dx$．

解. $\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x(1+3\ln x)}dx=\dfrac{1}{3}\int_1^{e^2}\dfrac{1}{(1+3\ln x)}d(1+3\ln x)=\dfrac{1}{3}\ln|1+3\ln x|\Big|_1^{e^2}=\dfrac{1}{3}\ln 7$

15．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^z=xyz$ 确定的二元函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

解　设 $f(x,y,z)=e^z-xyz$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{f_z}{f_x}=\dfrac{yz}{e^z-xy}$，

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$。

16. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=\frac{1}{2}x, y=1$ 所围成的平面区域.

解 $\iint\limits_D (x^2+y^2-y)dxdy=\int_0^1 \mathrm{dy}\int_y^{2y}(x^2+y^2-y)dx$

$$=\int_0^1(\frac{10}{3}y^3-y^2)dy=\frac{1}{2}.$$

四、综合题 （10 分×2＝20 分）

17. 确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}, & 0<x<1,\\ ax^2+bx+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导.

解. 因为可导，所以连续，则 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4}{x}=4=a+b+1=f(1)$，则 $a+b=3$。

$$f'(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2+bx+1-4}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1+}\frac{2ax+b}{1}=2a+b$$

又因为

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{4}{x}-4}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1+}\frac{-4(x-1)}{x(x-1)}=-4$$

故 $a=-7, b=10$.

18. 设 $y=f(x)$ 是可微的，且满足 $f(x)=x^2+\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt$，求 $f(x)$.

解. 两边求导得 $f'(x)=2x+\frac{f(x)}{x}$，令 $f(x)=y$，

则 $y'-\frac{1}{x}y=2x$，解一阶线性微分方程得 $y=2x^2+cx$，

显然 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$，则 $c=-1$.

因此 $f(x)=2x^2-x$.

五、应用题（10 分）

19. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$y\geq 0$，又已知该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形的面积为 $\frac{1}{3}$，求 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解 由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，则 $c=0$.

由 $\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，得 $b=\frac{2}{3}(1-a)$.

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2),$$

$$=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2].$$

由$V_a'=0$得$a=-\frac{5}{4}$，因为 $V_a''=\frac{4}{135}>0$ 所以$a=-\frac{5}{4}$，V最小. 这是$b=\frac{3}{2},c=0$.

（或由条件极值求）

六、证明题（8 分）

20. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=1,f(1)=0$，证明：存在一点$z\in(0,1)$使得$f'(z)=-\frac{f(z)}{z}$.

证明　取辅助函数$\varphi(x)=xf(x)$，则：

$\varphi(x)$在$[0,1]$上连续，

在区间$(0,1)$内可导，

且$\varphi(0)=\varphi(1)$，

由 Rolle 中值定理知，至少存在点$z\in(0,1)$，使$\varphi'(z)=0$，即$f'(z)=-\frac{f(z)}{z}$.

装订线

本试卷适应范围
大农类专业(4 学分)

南京农业大学试题纸

2016-2017 学年 第 1 学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程 微积分 1C 班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

一、单项选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的[ ].

（A）连续点 （B）可去间断点 （C）跳跃间断点 （D）第二类间断点

2、设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则下列式子不成立的是[ ].

（A） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

（B） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$

（C） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

（D） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$

3、设 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^x f(e^x)\mathrm{d}x=$[ ].

（A） e^x+C （B） $\ln x+C$

（C） $x+C$ （D） $x\ln x+C$

装订线

4、反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$[ ].

（A）0 （B） $\dfrac{1}{2}$ （C）1 （D）发散

5、交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 正确的是[ ].

（A） $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$ （B） $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

（C） $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$ （D） $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

二、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

6、已知当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 ax^n 是等价无穷小量，则常数 $n=$__________，$a=$__________.

7、设 $y = x\ln x$，则微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=1} =$ ________________.

8、$\int_{-1}^{1} \frac{x^2\sin x+1}{1+x^2}dx =$ ________________.

9、已知函数 $z = e^{x+2y}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ ________________.

10、已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin x, & x<0 \\ a, & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x}+b, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$__________，$b=$__________.

三、计算题(每题 6 分，共 42 分)

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

12、求参数方程 $\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$ 确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

13、求不定积分 $\int \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

14、计算定积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

15、求微分方程 $xy' - y - x^2 e^{-x} = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解.

16、设方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 确定隐函数 $z = f(x, y)$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

17、计算二重积分 $\iint\limits_D xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以（0,0）、(1,1)和(0,1)为顶点的三角形区域.

四、综合题（本题共3个小题,满分28分）

18、**（12分）** 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}+1$，求

（1）单调区间和极值；（2）凹凸区间和拐点；（3）该曲线的渐近线.

19、**（8分）** 计算由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $y=x-2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积，并求该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

20、 **（8分）**（1）叙述拉格朗日中值定理；（2）证明不等式 $e^x>1+x \quad (x>0)$.

系主任　李 强　　　　出卷人　张 梅

本试卷适应范围
大农类各专业

南京农业大学试题纸

2015年12月

2016/2017 学年 第一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程号 MATH2106　课程名 微积分 1C　学分 4

学号 ________　姓名 ________　班级 ________

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						
阅卷人						
核分人						

装订线

一、单项选择题：（每题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的[B].

（A）连续点　（B）可去间断点　（C）跳跃间断点　（D）第二类间断点

2、设函数 $f(x)$ 可导且下列极限均存在，则下列式子不成立的是[C].

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

（B）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$

（C）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

（D）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$

$=\int f(e^x)d(e^x)=\ln e^x+C=x+C$

3、设 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int e^x f(e^x)\mathrm{d}x=$[C].

$\int f(x)dx=\ln x+C$

（A）e^x+C　　（B）$\ln x+C$

（C）$x+C$　　（D）$x\ln x+C$

装订线

4、反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$[B]. $=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^a\right)$

$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）发散

D_1Y: $y\le x\le\sqrt{y}$, $0\le y\le\frac{1}{4}$

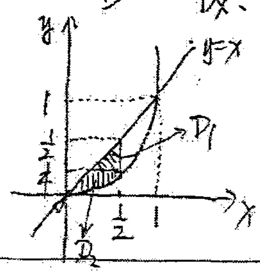
D_2Y: $y\le x\le\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}$

D_X: $x^2\le y\le x$, $0\le x\le\frac{1}{2}$

5、交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 正确的是[D].

（A）$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$



二、填空题：（每题3分，共15分）

6、已知当$x\to 0$时，$1-\cos x$与ax^n是等价无穷小量，则常数$n=$ 2 ，$a=$ $\frac{1}{2}$.

7、设$y=x\ln x$，则微分$dy|_{x=1}=$ dx .

8、$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x+1}{1+x^2}dx=$ $\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=0+2\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{2}$

9、已知函数$z=e^{x+2y}$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$ $2e^{x+2y}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}$

10、已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x, & x<0\\ a, & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$在点$x=0$处连续，则常数$a=$ 1 ，$b=$ 1 .

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$，$f(0)=a$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\sin\frac{1}{x}+b)=b$

三、计算题(每题6分，共42分)

11、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$. $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}$

$=2$

12、求参数方程$\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$确定的函数的导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cdot\cos t-e^t\cdot\sin t}{e^t\cdot\sin t+e^t\cdot\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)'_t}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(-\sin t-\cos t)(\sin t+\cos t)-(\cos t-\sin t)(\cos t-\sin t)}{(\sin t+\cos t)^2}}{e^t(\sin t+\cos t)}$$

$$=-\frac{(\sin t+\cos t)^2+(\cos t-\sin t)^2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$$

$$=-\frac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}$$

13、求不定积分$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$.

$=\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)$

$=\ln(1+e^x)+C$

14、计算定积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

$$=2\int_1^4 \ln x \, d(\sqrt{x})$$

$$=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]$$

$$=2\left[2\ln 4-\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right]$$

$$=4\ln 4-2\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=4\ln 4-4\sqrt{x}\Big|_1^4=4\ln 4-4=8\ln 2-4$$

15、求微分方程 $xy'-y-x^2e^{-x}=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解.

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^{-x}$$

$$\therefore y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int xe^{-x}e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln x}\left(\int xe^{-x}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\int e^{-x}dx+C\right)$$

$$=x(-e^{-x}+C)$$

$\because$ $x=1$ 时 $y=0$，代入得 $C=e^{-1}$，$\therefore y=x(-e^{-x}+e^{-1})$

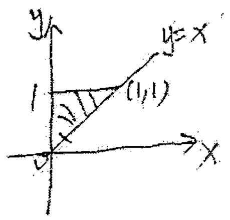
16、设方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，求全微分 dz.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则 $F_x'=2x$，$F_y'=2y$，$F_z'=2z-4$.

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{x}{2-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{y}{2-z}$$

$$\therefore dz=\frac{x}{2-z}dx+\frac{y}{2-z}dy$$

17、计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D 是以（0,0)、(1,1)和(0,1)为顶点的三角形区域.



D_x: $x\le y\le 1$，$0\le x\le 1$

$$\iint\limits_D xy\,dxdy=\int_0^1dx\int_x^1xy\,dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^3\right)dx=\frac{1}{8}$$

或 D_y: $0\le x\le y$，$0\le y\le 1$

$$\therefore \iint\limits_D xy\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^y xy\,dx=\frac{1}{8}$$

四、综合题（本题共 3 个小题,满分 28 分）

18、（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{1-2x}{x^2}+1$，求

（1）单调区间和极值；（2）凹凸区间和拐点；（3）该曲线的渐近线.

函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{2(x-1)}{x^3}$，$f''(x)=\frac{2(3-2x)}{x^4}$

令 $f'(x)=0$ 得驻点为 $x=1$，

令 $f''(x)=0$ 得 $x=\frac{3}{2}$，且 $x=0$ 时 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 均不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+		+
$f''(x)$	+	不存在	+		+	0	−
$f(x)$	↑ 凹		↓ 凹	极小值 $f(1)=0$	↑ 凹		↑ 凸

∴ (1) 单调增区间为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

单调减区间为 $(0,1)$

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$.

(2) 凹区间为 $(-\infty,0)\cup(0,\frac{3}{2}]$，

凸区间为 $(\frac{3}{2},+\infty)$，

拐点为 $(\frac{3}{2},\frac{5}{9})$.

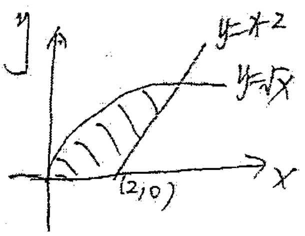
(3) ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-2x}{x^2}+1\right)=\infty$

∴ $x=0$ 为一条垂直渐近线

又 ∵ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{x^2}+1\right)=1$

∴ $y=1$ 为一条水平渐近线

19、（8 分）计算由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $y=x-2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积，并求该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.



$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

(1) $S=\int_0^4\sqrt{x}\,dx-\int_2^4(x-2)\,dx=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}$

(2) $V_x=\int_0^4\pi(\sqrt{x})^2dx-\int_2^4\pi(x-2)^2dx=8\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$

20、（8 分）(1) 叙述拉格朗日中值定理；(2) 证明不等式 $e^x>1+x \quad (x>0)$.

(1) 若 $f(x)$ 满足：在 $[a,b]$ 上连续，

在 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(2) 设 $f(t)=e^t-t-1$，

显然 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi\in(0,x)$ 使得

$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x$，

即 $e^x-x-1=(e^\xi-1)\cdot x$

∵ $0<\xi<x$，∴ $e^\xi-1>0$

∴ $e^x-x-1>0$，即 $e^x>1+x$

系主任 李强　　出卷人 张梅

装
订
线

本试卷适应范围 大农类专业 （4学分）

南京农业大学试题纸

2015-2016 学年 第1学期　　课程类型：必修　　试卷类型：A

课程 微积分1　　班级 ________　　学号 ________　姓名 ________　　成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

得分	评阅人

一、选择题：（每题3分，共15分）

1．函数 $y=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+x-2}$ 的可去间断点的个数是（　　）

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

2．若 $f(x)$ 的一个原函数是在 e^{-x}，则 $\int x^2 f(\ln x)dx=$（　　）

(A) $-x^2+c$　　(B) $-\dfrac{1}{2}x^2+c$　　(C) $-e^{-x}+c$　　(D) $e^{-x}+c$

3．$F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微是 $F_x'(x_0,y_0),F_y'(x_0,y_0)$ 存在的（　　）条件

(A) 充分非必要　　(B) 必要非充分

(C) 充分必要　　(D) 既非充分也非必要

4．反常积分 $\int_1^e \dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx=$（　　）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) 0　　(D) 发散

装
订
线

5．若 $\int_0^1[f(x)+f'(x)]e^x\mathrm{d}x=1, f(1)=0$，则 $f(0)=$（　　）

(A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) 2

得分	评阅人

二、填空题：（每题3分，共15分）

6．函数 $y=\arccos\mathrm{n}\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为________．

7．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}=$________．

8．设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $dy=$________.

9．交换二重积分的积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$________.

10．函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为________.

得分	评阅人

三、计算题（每小题 6 分，共 42 分）

11．求不定积分 $\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx$.

12．求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$.

13．设 $f(x)=\begin{cases}(a+1)^2x+1, & x>0\\ b, & x=0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值.

14．已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$．

15．设 $z=x^2e^{xy}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

16．计算 $\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 和 $x=0$ 所围成的闭区域．

17．求微分方程 $y'+y\tan x=\sin 2x$ 的通解．

得分	评阅人

四、综合题（每小题 10 分，共 20 分）

18. 求函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.

19. 设曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成平面图形 D.

（1）求 D 的面积 S；　（2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

得分	评阅人

五、证明题：（本题 8 分）

20.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(a,b)$，使得：$e^{\xi}(b-a)=e^b-e^a$；

（2）对于（1）中的 ξ，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

系主任________________　　出卷人________________

装
订
线

本试卷适应范围 大农类专业 （4 学分）

南京农业大学试题纸

2015-2016 学年 第 1 学期 课程类型：必修 试卷类型：A 答案

课程 微积分 1 班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________ 成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

一、选择题：（每题 3 分，共 15 分）

（ B ）（ B ） （ A ） B ） （ B ）

二、填空题：（每题 3 分，共 15 分）

1．函数定义域为 $\underline{(2,3]}$．2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}=1$．3．$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$．

4．$\underline{\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx}$．5．最大值为 $\underline{\ \ 7\ \ }$．

三、计算题（每题 6 分，共 48 分）

1．求不定积分 $\int\dfrac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x$．

解 原式 $=\int(\ln x-1)\mathrm{d}(-\dfrac{1}{x})=-\dfrac{1}{x}(\ln x-1)+\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}\ln x+C$ （2 分，4 分，6 分）

2．求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$．

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=2(\sqrt{2}-1)$ （2 分，4 分，6 分）

3．设 $f(x)=\begin{cases}(a+1)^2x+1, & x>0\\ b, & x=0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值．

解 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，必定在 $x=0$ 处连续，所以必有 $b=f(0)=f(0^-)=1$，（3 分）

又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，则有 $(a+1)^2=f_+'(0)=f_-'(0)=0$，解得 $a=-1$．（6 分）

4．已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

装
订
线

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+t^2}{4t}$ （2分，6分）

5．设 $z=x^2e^{xy}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2x+x^2y)e^{xy}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2+4xy+x^2y^2)e^{xy}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(3x^2+x^3y)e^{xy}$（2分，4分，6分）

6．计算 $\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 和 $x=0$ 所围成的闭区域．

解 积分区域 $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\0\le x\le y\end{cases}$，（2分）

$\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\dfrac{1}{2}(e-1)$．（4分，6分）

7．求微分方程 $y'+y\tan x=\sin 2x$ 的通解．

解 先求原方程对应的齐次方程 $y'+y\tan x=0$ 的通解：

分离变量积分得通解：$y=C\cos x$，（2分）

再用常数变易法求原方程的通解：

设原方程通解为 $y=u(x)\cos x$，代入原方程解得 $u(x)=-2\cos x+C$，（4分）

故原方程的通解为：$y=C\cos x-2\cos^2 x$．（6分）

四、综合题（每题11分，共22分）

1．求函数 $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点．

解 函数定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$y'=\dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$，$y''=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$；令 $y'=0$，解得 $x_1=-5$，

$x_2=1$，令 $y''=0$，$x_3=1$ （4分）

列表考察

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−		+	0	+
y''	−		−		−		+
y	↗	$-\dfrac{27}{2}$	↘	间断	↗	0	↗

得单调递增区间：$(-\infty,-5)$，$(-1,+\infty)$；单调递减区间：$[-5,-1)$；

极值 $y|_{x=-5}=-\dfrac{27}{2}$；

凹区间：$[1,+\infty)$；凸区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,1)$；

拐点：$(1,0)$ （10 分）

2．设曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成平面图形 D．

（1）求 D 的面积 S；（2）求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V．

解 （1）$S=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx=\dfrac{32}{3}$．（4 分）

（2）$V=V_1-V_2=\int_0^9\pi(\sqrt{y})^2dy-\int_3^9\pi(\dfrac{y-3}{2})^2dy=\dfrac{45}{2}\pi$．（6 分，8 分，10 分）

五、证明题：（8 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(a,b)$，使得：$e^{\xi}(b-a)=e^b-e^a$；

（2）对于（1）中的 ξ，$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$．

证明：

（1）由于 e^x 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$e^{\xi}(b-a)=e^b-e^a,$$ （4 分）

（2）设 $F(x)=e^xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，根据拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $F'(\eta)(b-a)=F(b)-F(a)$，即

$$e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a)=e^bf(b)-e^af(a)=e^b-e^a=e^{\xi}(b-a)$$

即

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$ （8 分）

装订线

本试卷适应范围
大农类专业
（4学分）

大 学 试 题 纸

2014-2015 学年 第1学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程 微积分1 班级 ______ 学号 ______ 姓名 ______ 成绩 ______

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

得分	评阅人

一、选择题：（每题3分，共15分）

1、当 $x\to 0$ 时，x^2 的高阶无穷小为（ ）.

A．$\sqrt{1+x^2}-1$ B．$x+x^3$ C．$e^{x^2}-1$ D．$x-\sin x$

2、设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ ）.

A．振荡间断点 B．可去间断点 C．跳跃间断点 D．无穷间断点

3、点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则必有（ ）.

A．$f'(x_0)=0$ B．$f''(x_0)=0$

C．$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在 D．$f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在

4、已知 $f_x'(x_0,y_0)$ 和 $f_y'(x_0,y_0)$ 存在，那么 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处（ ）.

A．连续 B．有极限 C．可微 D．有定义

5、已知 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0+h)}{h}$ 为（ ）.

A． -2 B．-1 C．1 D．2

装订线

得分	评阅人

二、填空题：（每题3分，共15分）

6、设 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+C$，则 $f'(x)=$______.

7、$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ 在 $[-2,2]$ 的最大值为______.

8、定积分 $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+|x|\right)dx=$______.

9、设 $z=x^y$，则 $\mathrm{d}z=$______.

10、反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x=$______.

得分	评阅人

二、计算题（每题 6 分，共 48 分）

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\int_3^x \dfrac{\ln(t-2)}{t+2}\mathrm{d}t}{(x-3)^2}$.

12、交换积分次序并计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{-y^3}\mathrm{d}y$.

13、求不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

14、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x\le 2\end{cases}$， $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ \ (0\le x\le 2)$ 的表达式.

15、设$\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

16、设$z = z(x, y)$由方程$z = \mathrm{e}^{2x-3z} + 2y$确定，求$3\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

17、求函数$f(x) = 4e^x + e^{-x}$的单调区间和极值.

18、求微分方程$y'' - 2y' = 1$的通解.

四、综合题（每题 11 分，共 22 分）

得分	评阅人

19、已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $f(0)+f(1)=2$，$f(2)=1$.试证：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

一点 $\xi\in(1,2)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

20、在抛物线 $y=x^2(x\geq 0)$ 上某点 A（a，a^2）处作一切线，试之与曲线以及 x 轴所围图形面积为 $\frac{1}{12}$，试求：（1）a 的值；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕 x 周旋转一周所成旋转体的体积.

系主任 李强　　　　出卷人 [illegible]

本试卷适应范围
大农类专业
（4学分）

大 学 试 题 纸

2014-2015 学年 第1学期 课程类型：必修 试卷类型：A

课程 ~~线性代数~~ 微积II 班级 ______ 学号 ______ 姓名 ______ 成绩 ______

题号	一	二	三	四	五	六	总分	签名
得分								

装订线

一、选择题：（每题3分，共15分）

1、 D 2、 C 3、 D 4、 D 5、 A

填空题：（每题3分，共18分）

6、$f'(x)=2(1+2x^2)e^{x^2}$.7、$f(-1)=6$.8、1.9、$dz=yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy$.10、$\dfrac{\pi}{2}$.

三、计算题（每题6分，共48分）

11、解：原式 $=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x-2)}{2(x-3)}\dfrac{1}{x+2}$ ………………………………（3）

$=\dfrac{1}{10}$ ………………………………（6）

12、解：原式 $=\int_0^1 e^{-y^3}dy\int_0^{y^2}dx$ ………………………………（3）

$=\int_0^1 y^2e^{-y^3}dy$ ………………………………（4）

$=\dfrac{1}{3}(1-e^{-1})$ ………………………………（6）

13、求不定积分 $\int\dfrac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

装订线

解：令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2, dx=-2t\,dt$，则

原式 $=\int\dfrac{-2t}{(1+t^2)t}dt$ ………………………………（3）

$=-2\arctan t+C$ ………………………………（5）

$=-2\arctan\sqrt{1-x}+C$ ………………………………（6）

14、已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1\\ x, & 1\le x\le2\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ (0\le x\le 2)$ 的表达式.

解：当 $0\le x\le1, F(x)=\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{3}x^3$ ………………………………（2）

当 $1<x\le2, F(x)=\int_0^x f(t)dt=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ ………………………………（5）

因此 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 \text{ ，} & 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}(x^2-1), & 1<x\le 2\end{cases}$ ．…………………………（6）

15、设 $\begin{cases}x=t-\cos t\\ y=t+\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{1+\cos t}{1+\sin t}$ …………………………………………………………（2）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}=\frac{-\sin t(1+\sin t)-(1+\cos t)\cos t}{(1+\sin t)^3}$$

$=-\dfrac{1+\sin t+\cos t}{(1+\sin t)^3}$ ……………………………………………………（6）

16、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x,y,z)=z-\mathrm{e}^{2x-3z}-2y$，则

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-2e^{2x-3z},\dfrac{\partial F}{\partial y}=-2,\dfrac{\partial F}{\partial z}=1+3e^{2x-3z}$ ………………（3）

因此，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$ ……………………………（5）

所以，$3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$ ……………………………………………（6）

17、求函数 $f(x)=4e^x+e^{-x}$ 的单调区间和极值.

解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

由 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-\ln 2$，无不可导点，…………………………（2）

当 $x<-\ln 2$，有 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调减少，

$x>-\ln 2$，有 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调增加，

因此，$f(x)$ 单减区间为 $(-\infty,-\ln 2)$，单增区间为 $[-\ln 2,+\infty)$ ……………（5）

极小值为 $f(-\ln 2)=4$ ……………………………………………………（6）

18、求微分方程的通解.

解：原方程通解为：$y=C_1e^{2x}+C_2-\dfrac{1}{2}x$ ……………………………（6）

得分	评阅人

四、综合题（每题11分，共22分）

19、已知$f(x)$在$[0,2]$上可导，且$f(0)+f(1)=2$，$f(2)=1$.试证：至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f'(\xi)=0$.

证 （1）若$f(0)=f(1)$，则由$f(0)+f(1)=2$可得$f(0)=f(1)=1$，

因此$f(x)$在$[1,2]$满足罗尔定理条件，故至少存在一点$\xi\in(1,2)\subset(0,2)$，使得$f'(\xi)=0$……………………（5）

（2）若$f(0)\neq f(1)$，不妨设$f(0)<f(1)$.

由$f(0)+f(1)=2$可得$f(0)<1$和$f(1)>1$，

由介值定理，存在一点$\eta\in(0,1)$，使得$f(\eta)=1$，因此$f(x)$

在$[\eta,2]$满足罗尔定理条件，故至少存在一点$\xi\in(\eta,2)\subset(0,2)$，使得$f'(\xi)=0$……………………（11）

20、在抛物线$y=x^2(x\geq 0)$上某点A（a，a^2）处作一切线，试之与曲线以及x轴所围图形面积为$\frac{1}{12}$，试求：（1）a的值；（2）过切点A的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕x周旋转一周所成旋转体的体积.

解：过点A的切线斜率为$y'(a)=2a$，

切线方程为$y=2ax-a^2$……………………（3）

切线与x轴交点坐标为（$\frac{a}{2}$，0），因此上述平面图形的面积为

$$S(a)=\int_0^a x^2\mathrm{d}x-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}\text{……………………（5）}$$

由$S(a)=\frac{1}{12}$得$a=1$……………………（6）

切线方程为$y=2x-1$……………………（7）

旋转体的体积为

$$V_x=\pi\left(\int_0^1(x^2)^2\mathrm{d}x-\int_{1/2}^1(2x-1)^2\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{30}\text{……………………（11）}$$

本试卷适应范围 大农类 2013 级各专业(4 学分)

南京农业大学试题纸

2013-2014 学年第 一 学期　课程类型：必修　试卷类型：A

课程 微积分 I　班级 ______　学号 ______　姓名 ______

题号	一	二	三	四	五	总分	签名
得分							

得分	评阅人

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}=$ ______.

2. 设 $y=\sin^2 x$，则 $dy=$ ______.

3. 交换二重积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{1-y}^{2}f(x,y)dx=$ ______.

4、设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+2x)-f(2)}{x}=6$，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f'(2)=$ ______.

5. 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(1+x^{2014}\ln\dfrac{2+x}{2-x}\right)dx=$ ______.

得分	评阅人

二、选择题(每题 3 分，共 15 分)

6. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 存在，那么点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A．连续点；　　B．可去间断点；

C．跳跃间断点；　　D．以上结论都不对．

7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=$（　　）.

A．$2f'(a)$；　　B．$3f'(a)$；

C．$f'(a)$；　　D．$-2f'(a)$．

8. 已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$，则曲线 L 上 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为（　　）

A．$x+y=\pi$；　　B．$x-y=\pi-4$；

C．$x-y=\pi$；　　D．$x+y=\pi-4$．

9．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点可微的（　　）

A．充分条件而非必要条件；　　B．必要条件而非充分条件；

C．充分必要条件；　　D．既非充分条件又非必要条件.

10．下列广义积分中发散的是（　　）

A．$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$；　　B．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+2}\mathrm{d}x$；

C．$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　D．$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

得分	评阅人

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 7 分，满分 42 分）

11．求不定积分 $\int x^3\cos(x^4+1)\mathrm{d}x$.

12．求定积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$.

13．设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x)+2, & x\ge 0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$，选择适当的 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

14. 计算 $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $x=1$ 所界的区域.

15. 设 $u=x^3\cos(xy)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

16. 求微分方程 $y'-2xy=4e^{x^2}$，满足 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

得分	评阅人

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

17. 求函数 $y=x^4-2x^3+2$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.

18. 设曲线 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{e}x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

得分	评阅人

五、证明题（本题 8 分）

19.设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(1)=0$，$F(x)=x^2f(x)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得：$F''(\xi)=0$.

系主任 李 强　　　　出卷人 张梅

本试卷适应范围
文农类 2013 级各
专业(4 学分)

南京农业大学试题纸

2013-2014 学年第一学期　课程类型：必修　　试卷类型：A

课程 微积分 I　　班级 ______　　学号 ______　　姓名 ______

题号	一	二	三	四	五	总分	签名
得分							

得分	评阅人

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x}}{\sin x}=$ ___−1___.

2. 设 $y=\sin^2 x$，则 $dy=$ ___$\sin 2x\,dx$___.

3. 交换二重积分的积分次序：$\int_{-2}^{0}dy\int_{-y}^{2}f(x,y)dx=$ ___$\int_{0}^{2}dx\int_{-x}^{0}f(x,y)dy$___

4. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+2x)-f(2)}{x}=6$，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，且 $f'(2)=$ ___3___.

5. 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(1+x^{2014}\ln\dfrac{2+x}{2-x}\right)dx=$ ___2___.

得分	评阅人

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

6. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 存在，那么点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的（ D ）

A．连续点；　　　　B．可去间断点；

C．跳跃间断点；　　D．以上结论都不对．

7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=$（ A ）

A．$2f'(a)$；　　B．$3f'(a)$；

C．$f'(a)$；　　D．$-2f'(a)$．

8. 已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$，则曲线 L 上 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为（ B ）

A．$x+y=\pi$；　　B．$x-y=\pi-4$；

C．$x-y=\pi$；　　D．$x+y=\pi-4$．

9. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点可微的（ B ）

A. 充分条件而非必要条件；　　B. 必要条件而非充分条件；

C. 充分必要条件；　　D. 既非充分条件又非必要条件.

10. 下列广义积分中发散的是（ B , D ）

A. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$；　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+2}dx$；

C. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$；　　D. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

得分	评阅人

三、计算题（本题共6小题，每小题7分，满分42分）

11. 求不定积分 $\int x^2\cos(x^3+1)dx$.

$\frac{1}{3}\sin(x^3+1)+C$

12. 求定积分 $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$.

$\int_0^1 xe^x dx+\int_1^2(x-1)dx=\frac{3}{2}$

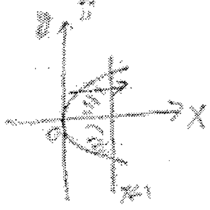
13. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x)+2, & x\ge 0\\ ax+b, & x<0\end{cases}$，选择适当的 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

$\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=\lim\limits_{x\to0^+}[\ln(1+x)+2]=f(0)$，　$b=2$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{ax+2-2}{x}=a$，　$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)+2-2}{x}=1$

$\therefore a=1$，　　$\therefore a=1,\ b=2$

14. 计算 $\iint_D xy^2\,dxdy$，D 是由抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $x=1$ 所界的区域.



D_y: $\frac{y^2}{4} \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$

$\int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{1} xy^2\,dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{y^2}{8} - \frac{y^6}{32}\right) dy = \frac{32}{21}$

or D_x: $-\sqrt{4x} \le y \le \sqrt{4x}$, $0 \le x \le 1$,

$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} xy^2\,dy = \frac{32}{21}$

15. 设 $u = x^3\cos(xy)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2\cos(xy) - x^3 y\sin(xy)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (6x - x^3y^2)\cos(xy) - 6x^2 y\sin(xy)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4x^3\sin(xy) - x^4 y\cos(xy)$

16. 求微分方程 $y' - 2xy = 4e^{x^2}$，满足 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

$P(x) = -2x$，$Q(x) = 4e^{x^2}$

$y = e^{\int 2x\,dx}\left(\int 4e^{x^2} e^{-\int 2x\,dx}\,dx + C\right) = (4x + C)e^{x^2}$

$\because y|_{x=0} = 1$，$\therefore C = 1$，$\therefore y = (4x+1)e^{x^2}$

得分	评阅人

四、综合题（本题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

17. 求函数 $y = x^4 - 2x^3 + 2$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点.

$D = (-\infty, +\infty)$，$y' = 4x^3 - 6x^2$，$y'' = 12x^2 - 12x$，令 $y'=0$ 得 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{3}{2}$

令 $y''=0$ 得 $x_3 = 0$，$x_4 = 1$

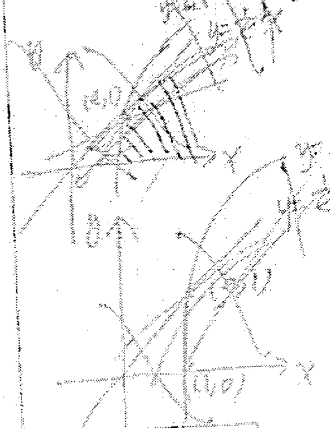
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
y'	−	0	−	−	−	0	+
y''	+	0	−	0	+	+	+
y	↓凹	拐点	↓凸	拐点	↓凹	极小	↑凹

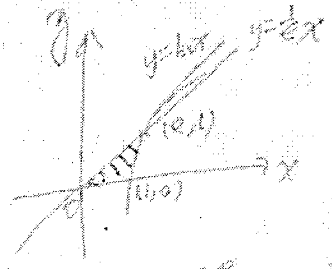
单调增加区间：$(\frac{3}{2}, +\infty)$；单调减少区间：$(-\infty, \frac{3}{2})$，极小值 $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{16}$.

凹区间：$(-\infty, 0)$，$(1, +\infty)$，凸区间：$(0, 1)$，拐点：$(0, 2)$，$(1, 1)$.

18. 设曲线 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{e}x$ 及 x 轴围成平面图形 D. (1) 求 D 的面积 S;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V





(1): $S=\int_0^e \frac{1}{e}x\,dx-\int_1^e \ln x\,dx$

$=\frac{1}{2}e-1$

或 $S=\int_0^1 (e^y-ey)\,dy=\frac{1}{2}e-1$

(2) $V=\int_0^e \pi(\frac{1}{e}x)^2dx-\int_1^e \pi(\ln x)^2dx$

$=2\pi-\frac{2}{3}\pi e$

得分	评阅人

五、证明题（本题 8 分）

19. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(1)=0$，$F(x)=x^2 f(x)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得：$F''(\xi)=0$.

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又 $F(0)=F(1)=0$，

∴ 由罗尔定理知：$\exists\, x_0\in(0,1)$ 使得 $F'(x_0)=0$.

∵ $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，

∴ $F'(0)=0$，

∴ $F'(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理条件，

∴ $\exists\, \xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$ 使得 $F''(\xi)=0$.

本试卷适应范围
大农类专业

南京农业大学试题纸

2012--2013 学年 第一学期 课程类型：必修 试卷类型：A 卷

课程 微积分 I 班级______ 学号______ 姓名______ 成绩______

题号	一	二	三	四	总分	签名
得分						

装订线

得分	评阅人

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分）

1. 已知当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小量，则 $a=$______.

2. 设 $f'(1)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=$______.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$______.

4. 已知函数 $y=x(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，则定理中的 ξ 为______.

5. 交换积分次序 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y=$______.

得分	评阅人

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分）

装订线

6. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x(x-1)}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

(A) 连续点； (B) 可去间断点；

(C) 跳跃间断点； (D) 无穷间断点.

7. 设 $g(x)$ 可导，$f(x)=e^{1+g(x)}$，且 $f'(1)=2$，$g'(1)=1$，则 $g(1)=$（　　）.

(A) $\ln 3-1$； (B) $-\ln 3-1$； (C) $\ln 2-1$； (D) $-\ln 2-1$.

8. 椭圆 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{18}=1$ 在点 $(4,3)$ 点处的切线方程为（　　）.

(A) $3x+4y-24=0$； (B) $3x-4y=0$；

(C) $4x+3y-25=0$； (D) $4x-3y-7=0$.

9. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\sin\sqrt{x}+C$；　　(B) $\frac{1}{2}\cos\sqrt{x}+C$；

(C) $2\sin\sqrt{x}+C$；　　(D) $2\cos\sqrt{x}+C$.

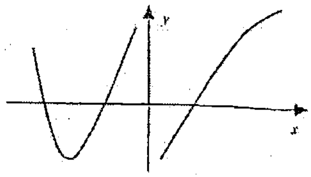
10. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则$f(x)$有(　　).

(A) 一个极小值点和两个极大值点；

(B) 两个极小值点和一个极大值点；

(C) 两个极小值点和两个极大值点；

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



得分	评阅人

三、计算题(每小题6分，满分48分)

11. 已知$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+1}{x-1}=b$，求$a,b$的值.

12. 已知函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$所确定，求$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 求不定积分$\int e^{\sqrt{x-1}}dx$.

14. 求定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos x\,dx$.

15. 设$z=u^v$，$u=x^2+y^2$，$v=\dfrac{y}{x}$，求全微分dz.

16. 计算$\iint\limits_D xe^{-y}\,dxdy$，其中$D$是由直线$x=0$，$y=1$和$y=x$围成的区域.

17. 已知函数$y=(ax-1)\sqrt[3]{x^2}$在点$x=\dfrac{2}{5}$处取得极值.

（1）求a的值；（2）确定函数的单调区间.

18. 已知函数$y=f(x)$可导，且满足$xf(x)=-2x^3+2\int_1^x f(t)\,dt$，求$f(x)$.

得分	评阅人

四、综合题

19.（8 分）确定 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b & ,x\le 0 \\ \ln(1+x) & ,x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续且可导.

20.（9 分）过曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的点 $(a,\sqrt{a})(a>0)$ 做曲线的切线 L，设切线 L 与直线 $x=0$，$x=2$ 及此曲线所围平面图形为 D.

（1） 求当平面图形 D 的面积最小时 a 的值；

（2） 在条件(1)下求切线 L 的方程；

（3） 在条件(1)下求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题（5 分）

21. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，当 $x>0$ 时，$f'(x)>3$，又 $f(0)<0$，证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(0,\dfrac{|f(0)|}{3})$ 内有唯一实根.

系主任 李[illegible]　　　　出卷人 张梅

2012-2013 学年第一学期

华东地区农林水院校《高等数学》统考试卷（A）

参考答案与评分标准

课程代码： BB103001 **考试方式** 闭卷 **考试时长** 120 **分钟**

题　　号	一	二	三	四		合计
满　　分	15	15	48	22		100
得　　分						
阅卷人						
审核人						

考生须知：1、姓名、学号、专业班级均要填在密封线以内，否则试卷作废。2、答题请在题后空白区域，在草稿纸上答题无效。3、试卷上不准做任何标记，否则按作弊论处。4、考试期间，试卷不准拆开，否则按作弊处理。5、不准使用计算器！

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1．已知当 $x \to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 ax^3 是等价无穷小量，则 $a=$ 1/6 .

2．设 $f'(1)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1+\Delta x)}{\Delta x}=$ -6 .

3．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ $\pi/8$.

4．已知函数 $y=x(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，则定理中的 ξ 为 1/2 .

5．交换积分次序 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y=$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内）

6. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x(x-1)}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的〖 B 〗.

（A） 连续点；（B） 可去间断点；

（C） 跳跃间断点；（D） 无穷间断点.

7. 设 $g(x)$ 可导，$f(x)=e^{1+g(x)}$，且 $f'(1)=2$，$g'(1)=1$，则 $f(1)=$〖 C 〗.

（A） $\ln 3-1$；（B） $-\ln 3-1$；（C） $\ln 2-1$；（D） $-\ln 2-1$.

8. 椭圆 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{18}=1$ 在点 $(4, 3)$ 点处的切线方程为〖 A 〗.

（A） $3x+4y-24=0$；（B） $3x-4y=0$；

（C） $4x+3y-25=0$；（D） $4x-3y-7=0$.

9. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$〖 C 〗.

（A） $\sin\sqrt{x}+C$；（B） $\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{x}+C$；

（C） $2\sin\sqrt{x}+C$；（D） $2\cos\sqrt{x}+C$.

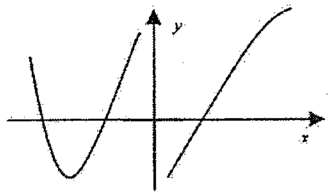
10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有〖 C 〗.

（A） 一个极小值点和两个极大值点；

（B） 两个极小值点和一个极大值点；

（C） 两个极小值点和两个极大值点；

（D） 三个极小值点和一个极大值点.



三、计算题（本题共 8 小题，每小题 6 分，满分 48 分）

11. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+1}{x-1}=b\ (b\neq0)$，求 a,b 的值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+1}{x-1}=b\ (b\neq0)$，且 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+1)=0\ .\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3\text{ 分})$$

即 $1+a+1=0$，从而得 $a=-2$. ……………………………………（4 分）

所以 $b=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$. ……………………………（6 分）

12. 已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$，$dy=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$，……………………………………（2 分）

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2t$. ……………………………………………………………（4 分）

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\dfrac{d(2t)}{dx}=2/\dfrac{1}{1+t^2}=2+2t^2$. ……………………（6 分）

13. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$，$dx=2tdt$. ……………………（2 分）

原式$=\int e^t \cdot 2t\,dt$ ……………………………………………………（3 分）

$=2\int t\,de^t = 2te^t - 2\int e^t\,dt$ …………………………………（4 分）

$=2te^t - 2e^t + C$. ……………………………………………………（5 分）

$=2\sqrt{x-1}e^{\sqrt{x-1}} - 2e^{\sqrt{x-1}} + C$. ……………………………………（6 分）

14．求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

解：

原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$ ………………………（1 分）

$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$ ……………………………………（3 分）

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}\sin x$ ……………………………………………（4 分）

$=\frac{2}{3}\sin^3 x\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$. ……………………………………………（6 分）

15．设 $z=u^v$，$u=x^2+y^2$，$v=\frac{y}{x}$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

解：由链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot(-\frac{y}{x^2})$$

$$=u^v(\frac{2xv}{u}-\frac{y\ln u}{x^2});$$ ……………………………………（2 分）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=vu^{v-1}\cdot 2y+u^{v}\ln u\cdot\frac{1}{x}$$

$$=u^{v}(\frac{2yv}{u}+\frac{\ln u}{x})$$ ……………………………………………（4 分）

所以 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{u^{v}}{x^{2}+y^{2}}[(\frac{2xv}{u}-\frac{y\ln u}{x^{2}})dx$

$+(\frac{2yv}{u}+\frac{\ln u}{x})dy]$. ……………………（6 分）

16．计算 $\iint\limits_{D}xe^{-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=0$， $y=1$ 和 $y=x$ 围成的区域.

解：画出积分区域 D（图略），选 D 为 X—型区域，则 D 可表示为

$D:x\le y\le 1,0\le x\le 1$. ………………………(1 分)

$$\iint\limits_{D}xe^{-y}dxdy=\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}xe^{-y}dy$$ ………………………………(3 分)

$$=\int_{0}^{1}[x(-e^{-1})-x(-e^{-x})]dx=1-\frac{5}{2}e^{-1}.$$ …(6 分)

(或者选 D 为 Y—型区域， $\iint\limits_{D}xe^{-y}dxdy=\int_{0}^{1}dy\int_{0}^{y}xe^{-y}dx=1-\frac{5}{2}e^{-1}$)

17．已知函数 $y=(ax-1)\sqrt[3]{x^{2}}$ 在 $x=\frac{2}{5}$ 取得极值.

（1）求 a 的值；（2）确定函数的单调区间.

解：$f'(x)=\frac{5ax-2}{3\sqrt[3]{x}}$， ……………………………………………（2 分）

由题意知，当 $x=\frac{2}{5}$ 时 $y'=0$，于是得 $a=1$． ………………（3 分）

当 $a=1$ 时，$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$. 由（1）知，$x=\frac{2}{5}$ 是驻点（极值点），$x=0$ 为导数不存在的点，列表讨论如下

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	+	×	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

……………………………………………………（5 分）

所以的单增区间为：$(-\infty,0),(\frac{2}{5},+\infty)$，单减区间为：$(0,\frac{2}{5})$.（6 分）

18．已知 $y=f(x)$ 可导，且 $f(x)$ 满足 $xf(x)=-2x^3+2\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

解：对已知等式两边求导，得

$$f(x)+xf'(x)=-6x+2f(x),$$

即 $y'-\frac{y}{x}=-6x$. ……………………………………………………(2 分)

这是一个一阶线性非齐次方程，其通解为

$$y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}\left(\int-6xe^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=-6x^2+Cx.$$ …………(5 分)

又 $f(1)=-2$，$\therefore C=4$，$\therefore f(x)=-6x^2+4x$. ………………(6 分)

四、综合题（本题共 2 个小题，满分 22 分）

19.（11 分）试确定 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续且可导.

解：(1) 因为可导必连续，所以由连续性知

$$f(0+0)=f(0-0)=f(0)\,. \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(1 分)}$$

又因为

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b\,;$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0\,. \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(4 分)}$$

所以 $b=0$. ………………………………………………………… 4 分)

(2) 可导性

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a\,; \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(7 分)}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(9 分)}$$

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)$，所以 $a=1$. ………………………………… (10 分) 8

所以当 $a=1$，$b=0$ 时函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. ………………… ~~(11 分)~~

20. (11 分) 过曲线 $y=\sqrt{x}$ 上的点 $(a,\sqrt{a})(a>0)$ 做曲线的切线 L，设切线 L 与直线 $x=0$，$x=2$ 及此曲线所围平面图形为 D.

(1) 求当平面图形 D 的面积最小时 a 的值；

(2) 在条件(1)下求切线 L 的方程；

(3) 在条件(1)下求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：(1) $y'|_{x=a}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$，

………………………………………………………… (1 分)

所以切线方程为 $y-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$，即 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{a}$. … (2 分)

D 的面积为 $A=\int_0^2(\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{a}-\sqrt{x})dx=\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$. …(4 分)

由 $A'(a)=-\dfrac{1}{2a\sqrt{a}}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=0$ 得惟一驻点 $a=1$. …………… (5 分)

又根据题意，最小值一定存在，所以最小面积必定在惟一驻点处取得，即当$a=1$时D的面积最小.……………………………………………(6 分)

(2) 当$a=1$时，切线方程为$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.…………………… (7 分)

（注：也可按如下确定最小值点

$$A \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=2-\frac{4}{3}\sqrt{2},$$

上式等号成立当且仅当$a=1$.）

(3) $V=\int_0^2 \pi\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]dx$…………………………(9 分)

$=\frac{\pi}{4}\int_0^2 (x^2-2x+1)dx$

$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2=\frac{\pi}{6}$.……………………………… ~~(11 分)~~

9