博弈论的应用

第二十九章

纳什均衡

- 在纳什均衡中，每一个参与者对于其他参与者的决策做出其最好的反应决策。
- 一个博弈可能不止一个纳什均衡。
- 我们如何找出一个博弈的每个纳什均衡？
- 假如存在的纳什均衡不只一个，我们能否确定其中的一个纳什均衡比其它均衡更有可能发生？

最佳反应决策

- 考虑一个2×2 的博弈； 由两个参与者A的B的博弈，每个参与者有两种决策。
- A 可以采取决策a^A_1 和 a^A_2。
- B 可以采取决策a^B_1 and a^B_2。
- 存在四种决策组合：
  $(a^A_1, a^B_1), (a^A_1, a^B_2), (a^A_2, a^B_1), (a^A_2, a^B_2)$。
- 每个决策组合对两个参与者会导致不同的收益。

最佳反应决策

- 假设当A和B分别选择决策$a^A{}_1$ 和 $a^B{}_1$ 的收益为：$U^A(a^A{}_1, a^B{}_1) = 6$ 和 $U^B(a^A{}_1, a^B{}_1) = 4$.
- 类似地，假设

  $U^A(a^A{}_1, a^B{}_2) = 3$ 和 $U^B(a^A{}_1, a^B{}_2) = 5$

  $U^A(a^A{}_2, a^B{}_1) = 4$ 和 $U^B(a^A{}_2, a^B{}_1) = 3$

  $U^A(a^A{}_2, a^B{}_2) = 5$ 和 $U^B(a^A{}_2, a^B{}_2) = 7$。

最佳反应决策

- $U^A(a^A{}_1, a^B{}_1) = 6$ 和 $U^B(a^A{}_1, a^B{}_1) = 4$
  $U^A(a^A{}_1, a^B{}_2) = 3$ 和 $U^B(a^A{}_1, a^B{}_2) = 5$
  $U^A(a^A{}_2, a^B{}_1) = 4$ 和 $U^B(a^A{}_2, a^B{}_1) = 3$
  $U^A(a^A{}_2, a^B{}_2) = 5$ 和 $U^B(a^A{}_2, a^B{}_2) = 7$。

最佳反应决策

- **$U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$** 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。
- 假设B选择决策a^B_1，那么A的最佳反应决策为什么？

最佳反应决策

- **$U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$** 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。
- 假设B选择决策a^B_1，那么A的最佳反应决策为a^A_1 (因为 $6 > 4$)。

最佳反应决策

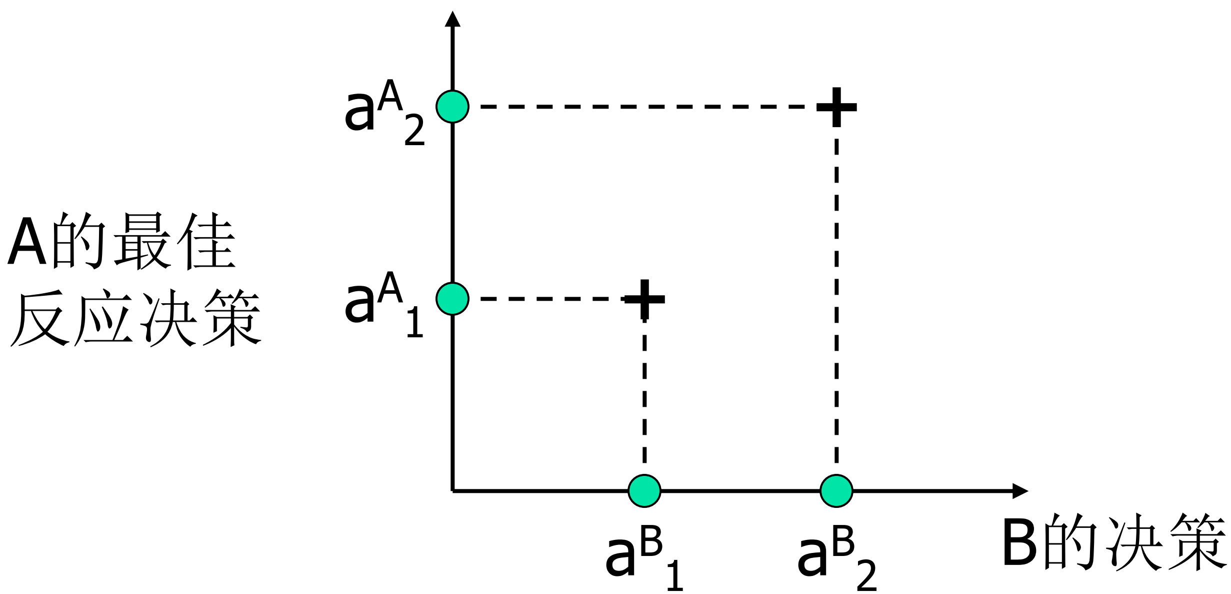
- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$.
- 假设B选择决策a^B_1，那么A的最佳反应决策为a^A_1 (因为 $6 > 4$)。
- 假设B选择决策a^B_2，那么A的最佳反应决策为什么？

最佳反应决策

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$.
- 假设B选择决策a^B_1，那么A的最佳反应决策为a^A_1 (因为 $6 > 4$)。
- 假设B选择决策a^B_2，那么A的最佳反应决策为a^A_2 (因为 $5 > 3$)。

最佳反应决策

- 假设 B 选择策略 a^B_1 那么A选择策略 a^A_1。
- 假设B 选择策略 a^B_2 那么 A 选择策略a^A_2。
- A的**最佳反应曲线**为：



最佳反应决策

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。

最佳反应决策

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 **$U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$**
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 **$U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$**
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$和$U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。
- 假如A选择策略a^A_1，那么B的最佳反应决策为什么？

最佳反应决策

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $\boldsymbol{U^B(a^A_1, a^B_1) = 4}$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $\boldsymbol{U^B(a^A_1, a^B_2) = 5}$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 $U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。
- 假如A选择策略a^A_1，那么B的最佳反应决策为a^B_2 (因为 $5 > 4$)。

最佳反应决策

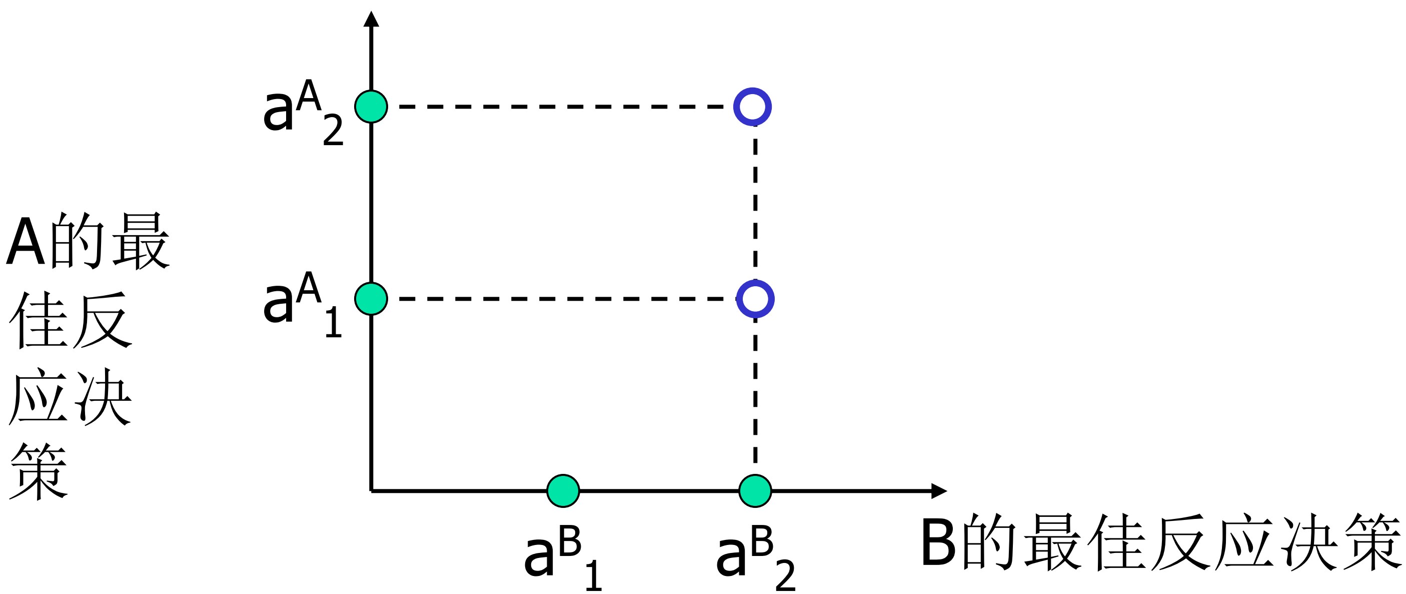
- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 **$U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$**
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 **$U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。**
- 假如A选择策略a^A_1，那么B的最佳反应决策为a^B_2 (因为 $5 > 4$)。
- 假如A选择策略a^A_2，那么B的最佳反应决策为什么？

最佳反应决策

- $U^A(a^A_1, a^B_1) = 6$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_1) = 4$
  $U^A(a^A_1, a^B_2) = 3$ 和 $U^B(a^A_1, a^B_2) = 5$
  $U^A(a^A_2, a^B_1) = 4$ 和 **$U^B(a^A_2, a^B_1) = 3$**
  $U^A(a^A_2, a^B_2) = 5$ 和 **$U^B(a^A_2, a^B_2) = 7$。**
- 假如A选择策略a^A_1，那么B的最佳反应决策为a^B_2 (因为 5 > 4)。
- 假如A选择策略a^A_2，那么B的最佳反应决策为a^B_2 (因为 7 > 3)。

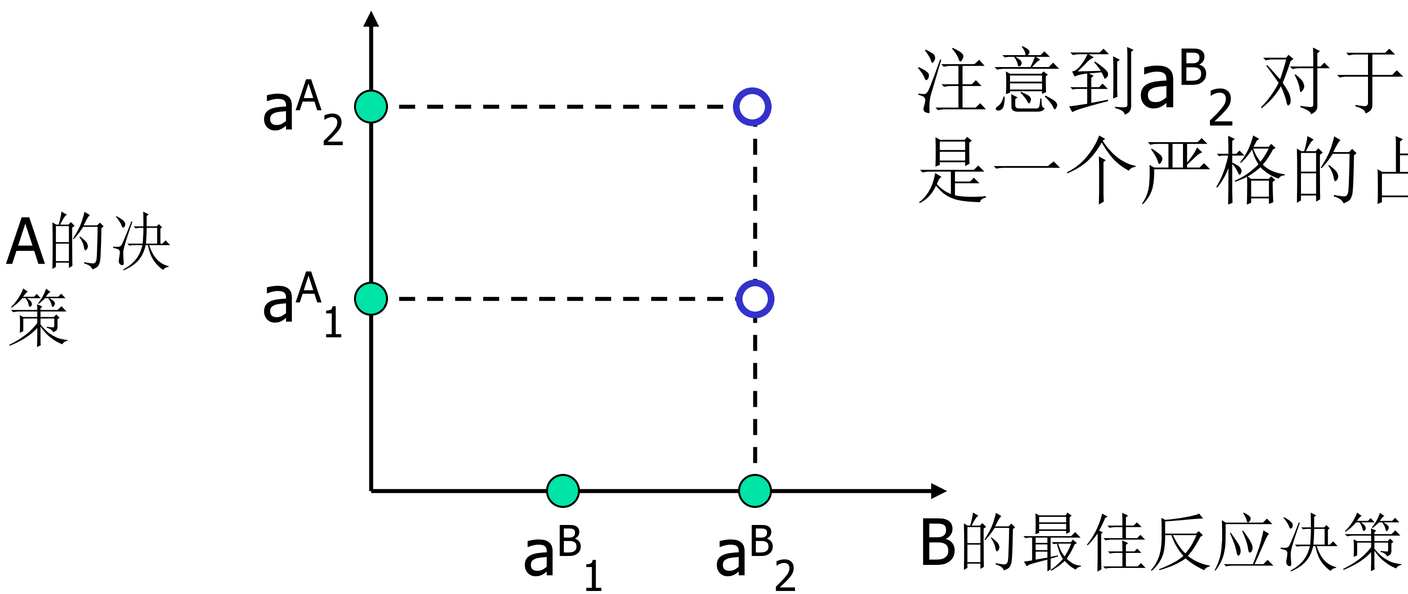
最佳反应决策

- 假如A选择策略 $a^A{}_1$ 那么 B 选择策略 $a^B{}_2$。
- 假如A选择策略 $a^A{}_2$ 那么 B选择策略 $a^B{}_2$。
- B的**最佳反应曲线**为：



最佳反应决策

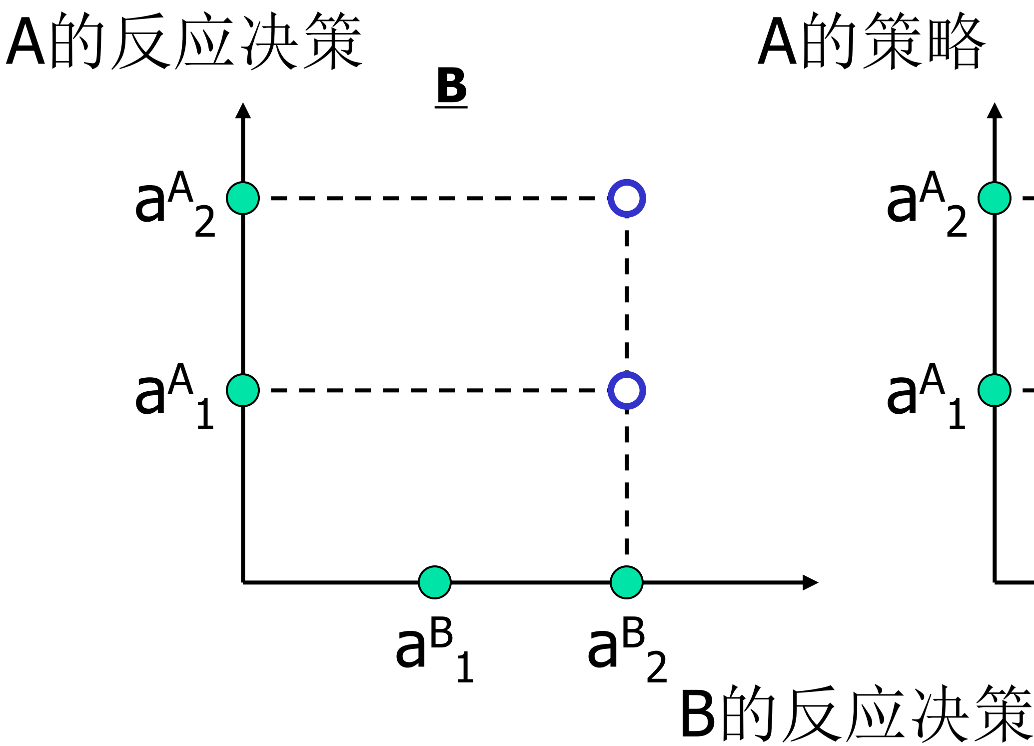
- 假如A选择策略 a^A_1 那么 B 选择策略 a^B_2。
- 假如A选择策略 a^A_2 那么 B选择策略 a^B_2。
- B的**最佳反应曲线**为：

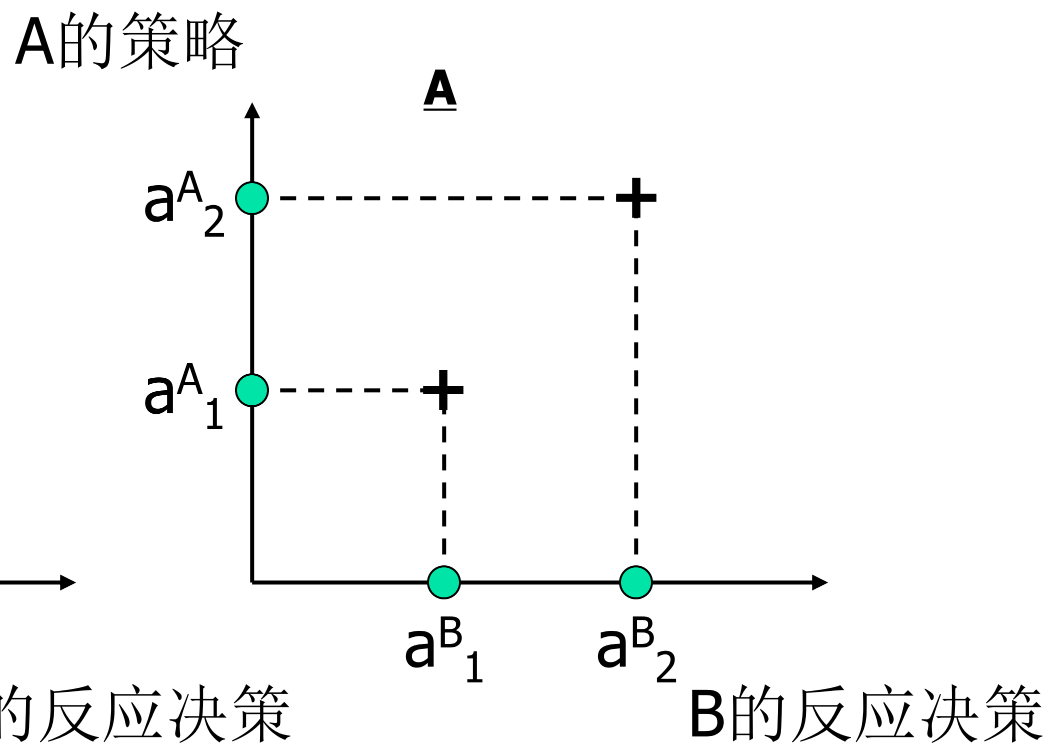


注意到a^B_2 对于B来说是一个严格的占优策略

最佳反应决策和纳什均衡

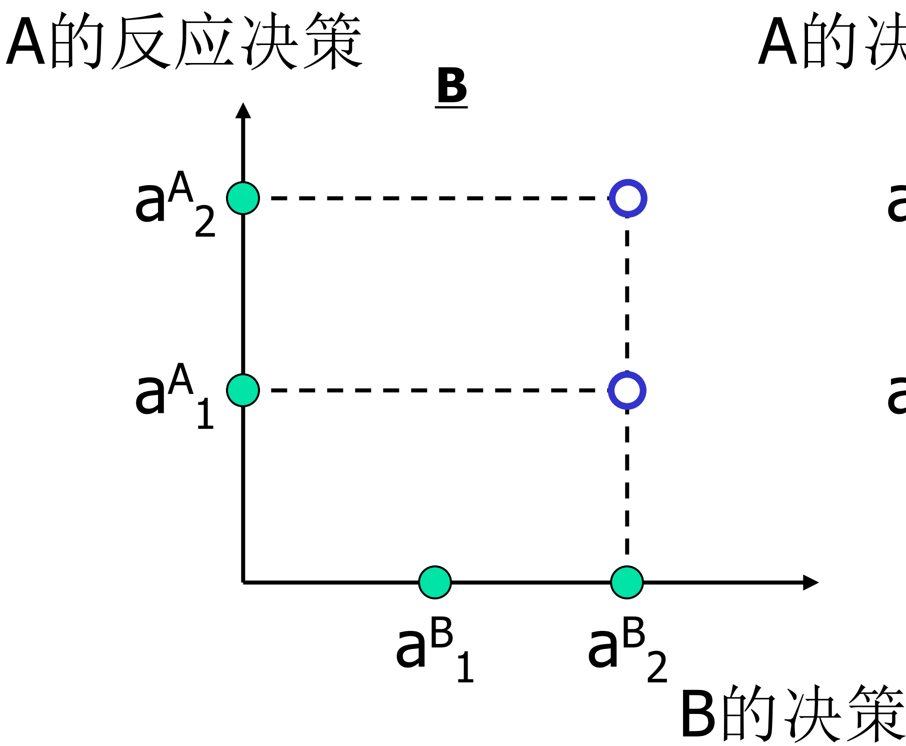
如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？

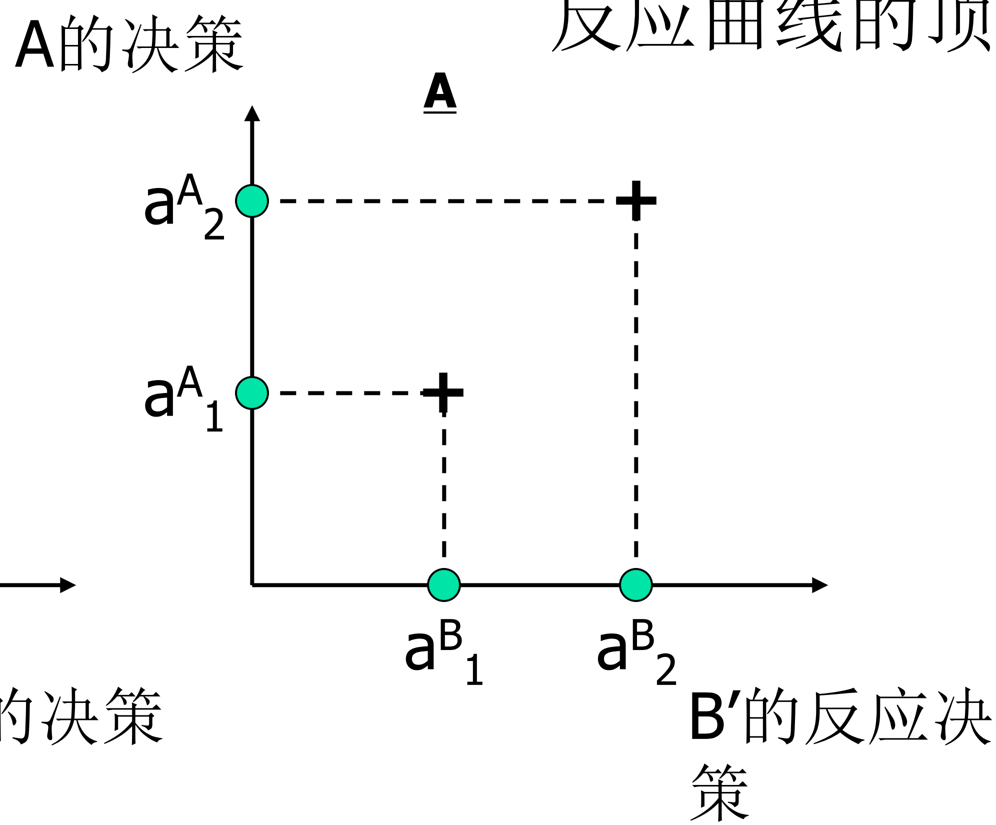




最佳反应决策和纳什均衡

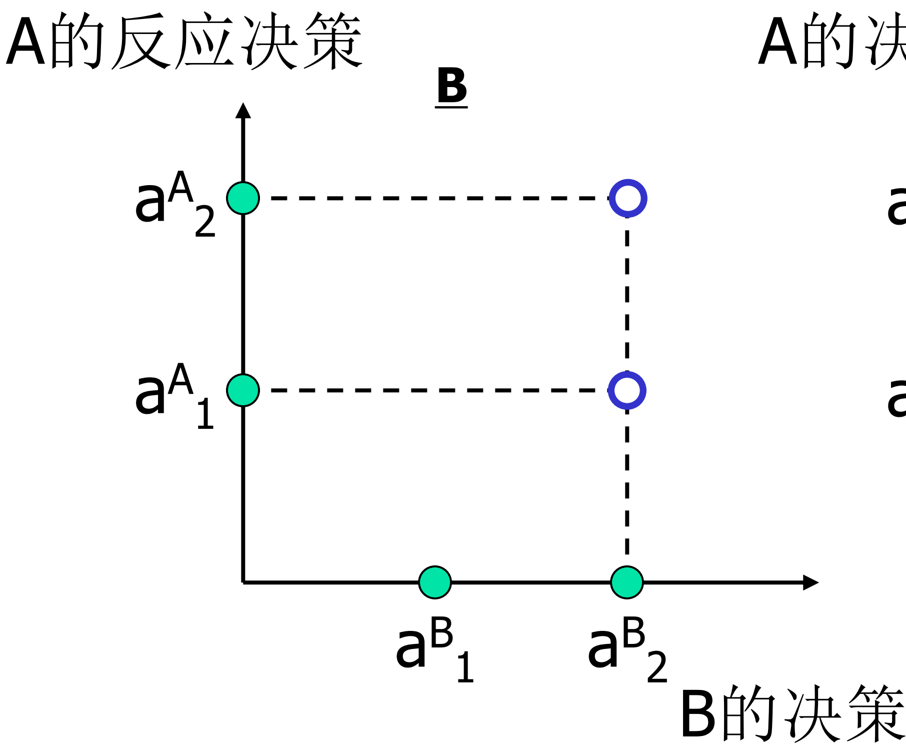
如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？将一个反应曲线置于另一个反应曲线的顶部。

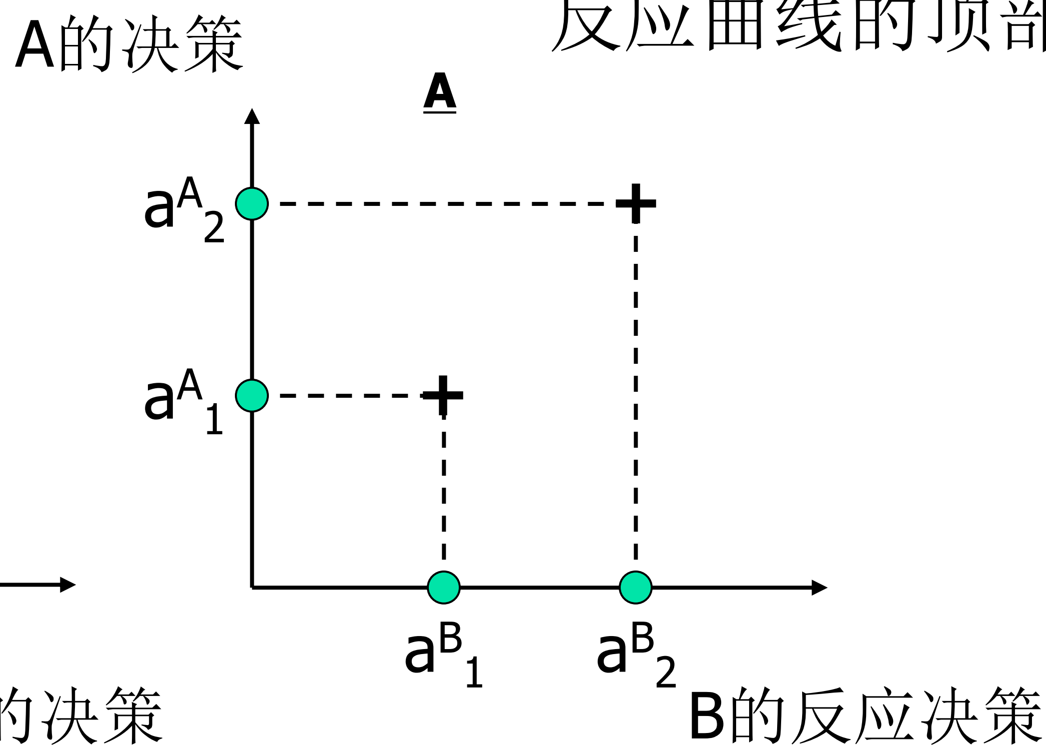




最佳反应决策和纳什均衡

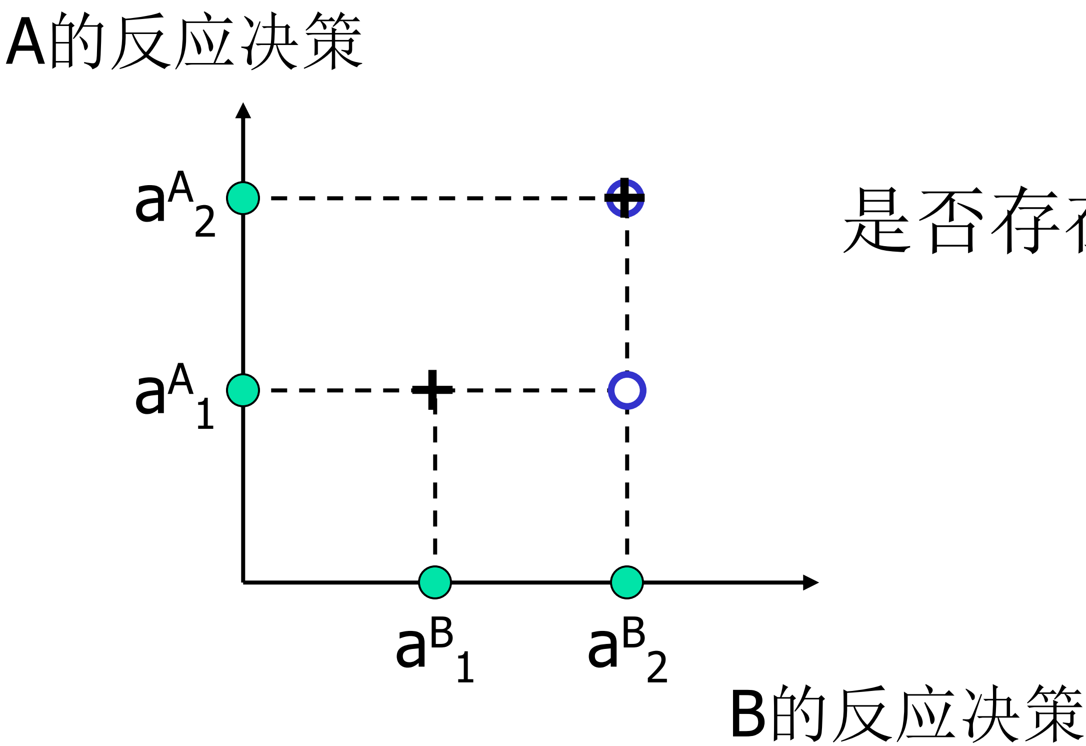
如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？将一个反应曲线置于另一个反应曲线的顶部。





最佳反应决策和纳什均衡

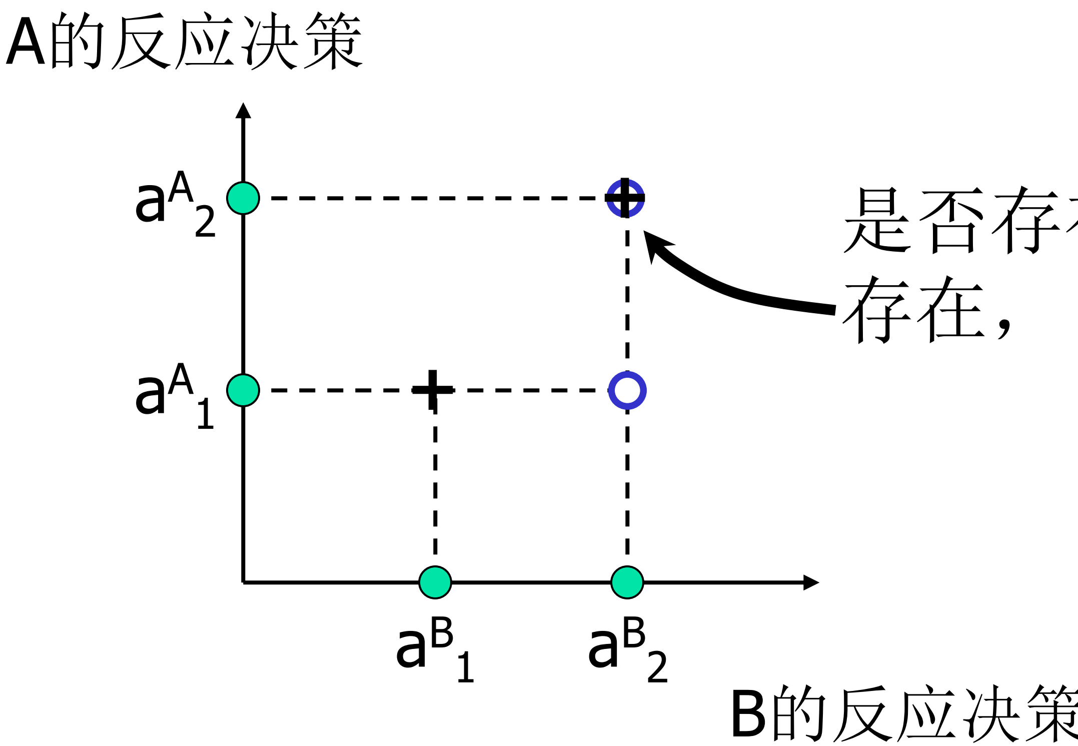
如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？将一个反应曲线置于另一个反应曲线的顶部。



是否存在一个纳什均衡？

最佳反应决策和纳什均衡

如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？将一个反应曲线置于另一个反应曲线的顶部。

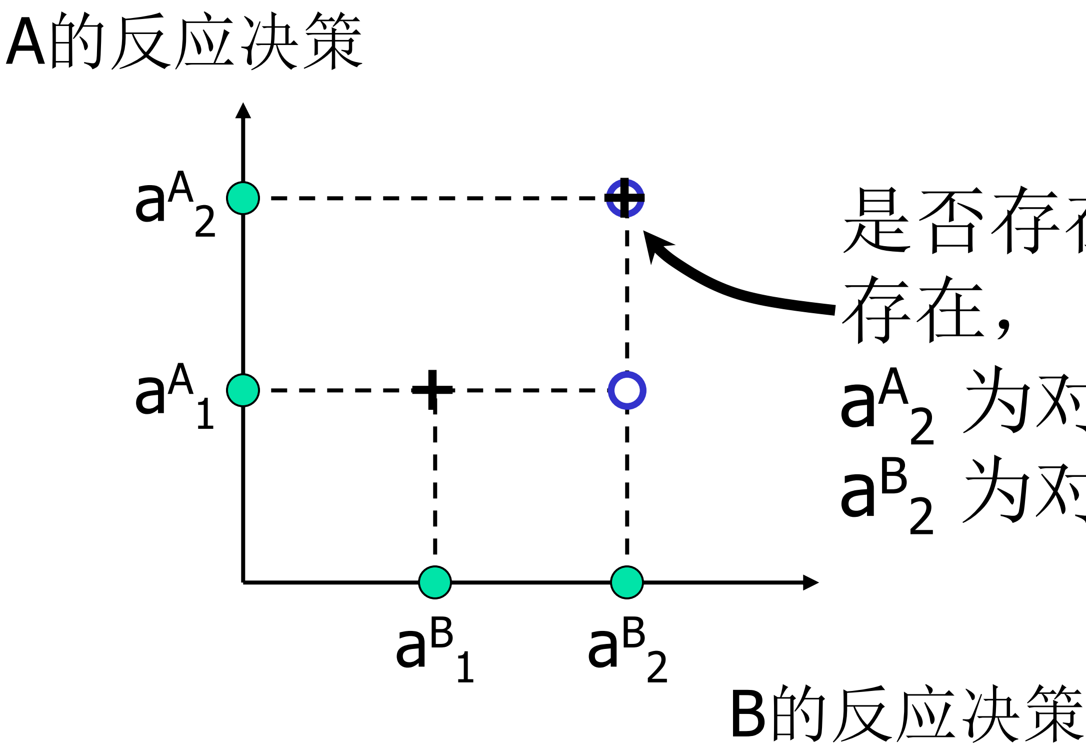


是否存在一个纳什均衡？

存在，(a^A_2, a^B_2)。为什么？

最佳反应决策和纳什均衡

如何利用参与者的最佳反应曲线来确定该博弈的纳什均衡？将一个反应曲线置于另一个反应曲线的顶部。



是否存在一个纳什均衡？

存在，（a^A_2, a^B_2）。为什么？

a^A_2 为对决策a^B_2的最佳反应决策

a^B_2 为对决策a^A_2的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

博弈的策略表

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

a^A_2 为对决策a^B_2的唯一最佳反应决策。

a^B_2 为对决策a^A_2的唯一最佳反应决策。

最佳反应决策和纳什均衡

博弈的策略表

参与者 B

参与者 A		a^B_1	a^B_2
	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

是否存在第二个纳什均衡？

a^A_2 为对决策a^B_2的唯一最佳反应决策。
a^B_2 为对决策a^A_2的唯一最佳反应决策。

最佳反应决策和纳什均衡

博弈的策略表

		参与者 B a^B_1	参与者 B a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
参与者 A	a^A_2	4,3	5,7

是否存在第二个纳什均衡？不存在，因为a^B_2 对于B来说为一个严格占优策略。

a^A_2 为对决策a^B_2的唯一最佳反应决策。
a^B_2 为对决策a^A_2的唯一最佳反应决策。

最佳反应决策和纳什均衡

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

现在允许两个参与者混合他们的决策。

最佳反应决策和纳什均衡

参与者 B

参与者 A		a^B_1	a^B_2
	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，
B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。

现在允许两个参与者混合他们的决策。

最佳反应决策和纳什均衡

参与者 A		参与者 B: a^B_1	参与者 B: a^B_2
	a^A_1	**6,4**	**3,5**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，
B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。
给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

最佳反应决策和纳什均衡

参与者 B

		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，
B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。
给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1.$

最佳反应决策和纳什均衡

参与者 B

		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,5**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，
B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。
给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1.$$
$$EV^A(a^A_2) = 4\pi^B_1 + 5(1 - \pi^B_1) = 5 - \pi^B_1.$$

最佳反应决策和纳什均衡

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1， B选择决策a^B_1的概率为π^B_1 。给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$EV^A(a^A_1) = 3 + 3\pi^B_1$.
$EV^A(a^A_2) = 5 - \pi^B_1$.
$3 + 3\pi^B_1 \gtreqless 5 - \pi^B_1$ 当 $\pi^B_1 \gtreqless$??

最佳反应决策和纳什均衡

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$EV^A(a^A_1) = 3 + 3\pi^B_1$.
$EV^A(a^A_2) = 5 - \pi^B_1$.
$3 + 3\pi^B_1 \gtreqless 5 - \pi^B_1$ 当 $\pi^B_1 \gtreqless ½$.

最佳反应决策和纳什均衡

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1， B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$EV^A(a^A_1) = 3 + 3\pi^B_1$.
$EV^A(a^A_2) = 5 - \pi^B_1$.
$3 + 3\pi^B_1 \gtreqqless 5 - \pi^B_1$ 当 $\pi^B_1 \gtreqqless 1/2$.
A的最佳反应决策为:

a^A_1 假如 $\pi^B_1 > 1/2$
a^A_2 假如 $\pi^B_1 < 1/2$
a^A_1 或者 a^A_2 假如 $\pi^B_1 = 1/2$

最佳反应决策和纳什均衡

A选择决策a^A_1的概率为π^A_1，B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。给定 π^B_1，π^A_1为多少对A最好？

$EV^A(a^A_1) = 3 + 3\pi^B_1$.
$EV^A(a^A_2) = 5 - \pi^B_1$.
$3 + 3\pi^B_1 \gtreqless 5 - \pi^B_1$ as $\pi^B_1 \gtreqless ½$.
A的最佳反应决策为：

a^A_1 (*例如*$\pi^A_1 = 1$) 假如 $\pi^B_1 > ½$
a^A_2 (*例如* $\pi^A_1 = 0$) 假如 $\pi^B_1 < ½$
a^A_1 或者 a^A_2 (*i.e.* $0 \le \pi^A_1 \le 1$) 假如 $\pi^B_1 = ½$

最佳反应决策和纳什均衡

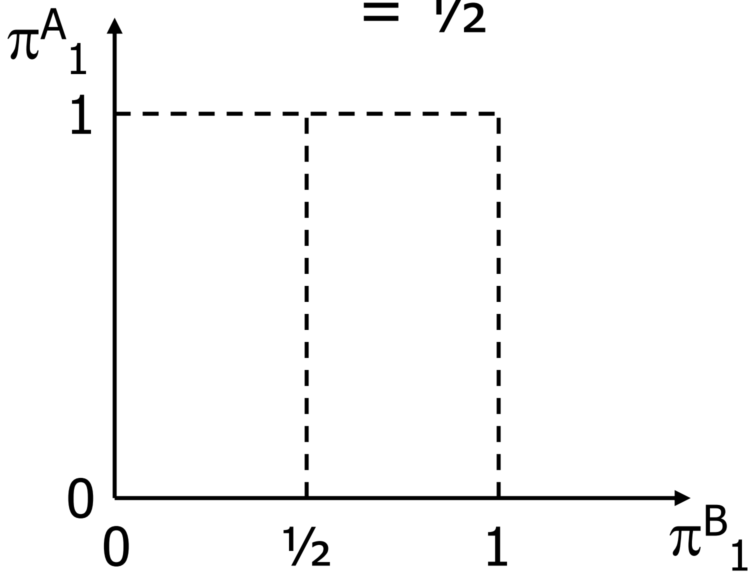
A的最佳反应决策为：

a^A_1 (*例如*$\pi^A_1 = 1$) 假如 $\pi^B_1 > ½$

a^A_2 (*例如* $\pi^A_1 = 0$) 假如 $\pi^B_1 < ½$

a^A_1 或者 a^A_2 (*i.e.* $0 \leq \pi^A_1 \leq 1$) 假如 $\pi^B_1 = ½$

A的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

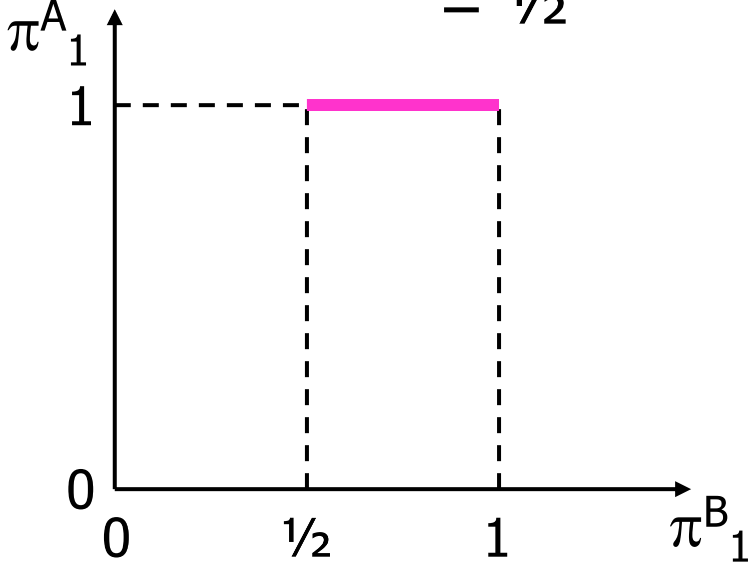
A的最佳反应决策为：

A的最佳反应决策

a^A_1 (*例如*$\pi^A_1 = 1$) 假如 $\pi^B_1 > ½$

a^A_2 (*例如* $\pi^A_1 = 0$) 假如 $\pi^B_1 < ½$

a^A_1或者 a^A_2 (*i.e.* $0 \le \pi^A_1 \le 1$) 假如 $\pi^B_1 = ½$



最佳反应决策和纳什均衡

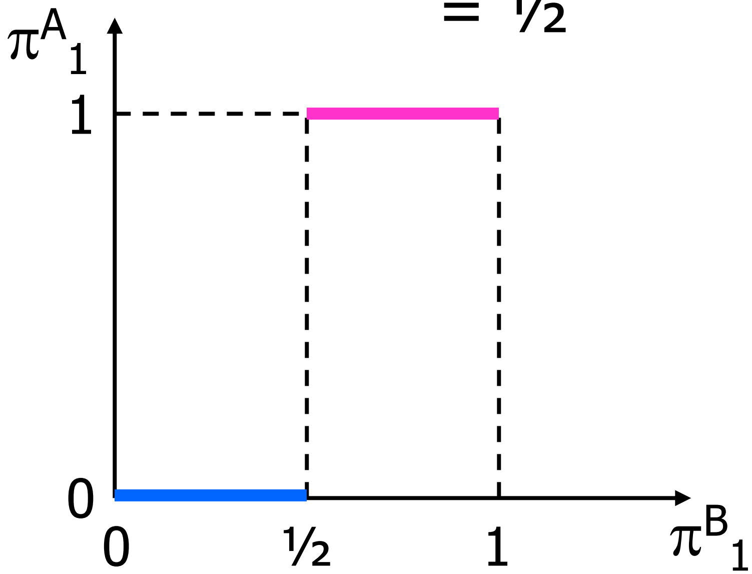
A的最佳反应决策为：

a^A_1 (*例如*$\pi^A_1 = 1$) 假如 $\pi^B_1 > ½$

a^A_2 (*例如* $\pi^A_1 = 0$) 假如 $\pi^B_1 < ½$

a^A_1或者 a^A_2 (*i.e.* $0 \le \pi^A_1 \le 1$) 假如 $\pi^B_1 = ½$

A的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

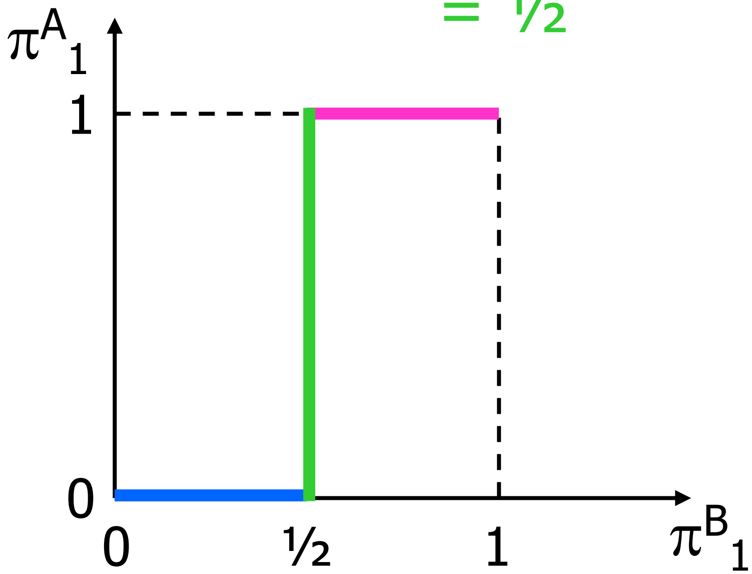
A的最佳反应决策为：

a^A_1 (*例如*$\pi^A_1 = 1$) 假如 $\pi^B_1 > ½$

a^A_2 (*例如* $\pi^A_1 = 0$) 假如 $\pi^B_1 < ½$

a^A_1或者 a^A_2 (*i.e.* $0 \leq \pi^A_1 \leq 1$) 假如 $\pi^B_1 = ½$

A的最佳反应决策



此为当参与者允许混合他们的策略时A的最佳反应曲线。

最佳反应决策和纳什均衡

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,5**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

A选择策略a^A_1的概率为π^A_1，B选择策略a^B_1的概率为π^B_1。给定π^A_1，π^B_1为多少时对B最好？

最佳反应决策和纳什均衡

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

A选择策略a^A_1的概率为π^A_1，B选择策略a^B_1的概率为π^B_1。给定π^A_1，π^B_1为多少时对B最好？

$$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 3 + \pi^A_1.$$

最佳反应决策和纳什均衡

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

A选择策略a^A_1的概率为π^A_1，B选择策略a^B_1的概率为π^B_1。给定π^A_1，π^B_1为多少时对B最好？

$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 3 + \pi^A_1.$

$EV^B(a^B_2) = 5\pi^A_1 + 7(1 - \pi^A_1) = 7 - 2\pi^A_1.$

最佳反应决策和纳什均衡

A选择策略a^A_1的概率为π^A_1， B选择策略a^B_1的概率为π^B_1。给定π^A_1， π^B_1为多少时对B最好？

$EV^B(a^B_1) = 3 + \pi^A_1.$
$EV^B(a^B_2) = 7 - 2\pi^A_1.$
$3 + \pi^A_1 \gtreqless 7 - 2\pi^A_1$ 当 $\pi^A_1 \gtreqless ??$

最佳反应决策和纳什均衡

A选择策略a^A_1的概率为π^A_1，B选择策略a^B_1的概率为π^B_1。给定π^A_1，π^B_1为多少时对B最好？

$EV^B(a^B_1) = 3 + \pi^A_1$.
$EV^B(a^B_2) = 7 - 2\pi^A_1$.
$3 + \pi^A_1 < 7 - 2\pi^A_1$ 对于所有$0 \leq \pi^A_1 \leq 1$.

最佳反应决策和纳什均衡

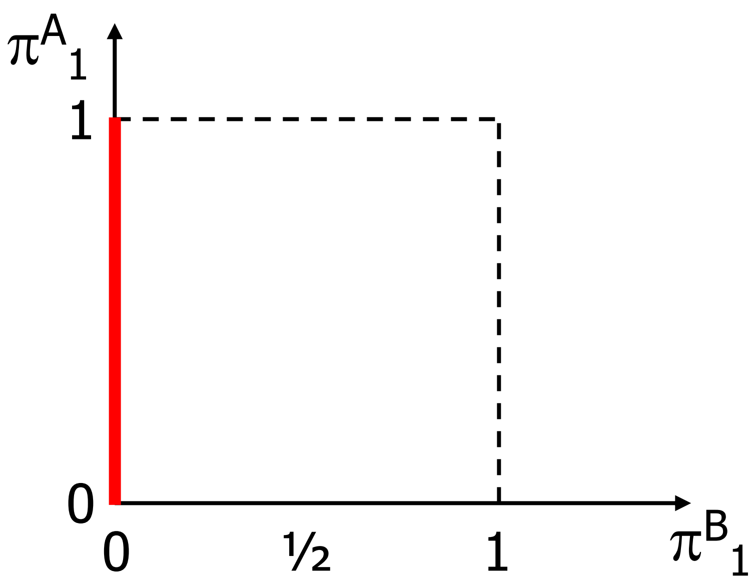
A选择决策a^A_1的概率为π^A_1， B选择决策a^B_1的概率为π^B_1。给定 π^B_1， π^A_1为多少对A最好？

$EV^B(a^B_1) = 3 + \pi^A_1$.
$EV^B(a^B_2) = 7 - 2\pi^A_1$.
$3 + \pi^A_1 < 7 - 2\pi^A_1$ 对于所有$0 \leq \pi^A_1 \leq 1$.
B的最佳反应决策为：

总是a^B_2 (例如当$\pi^B_1 = 0$时)。

最佳反应决策和纳什均衡

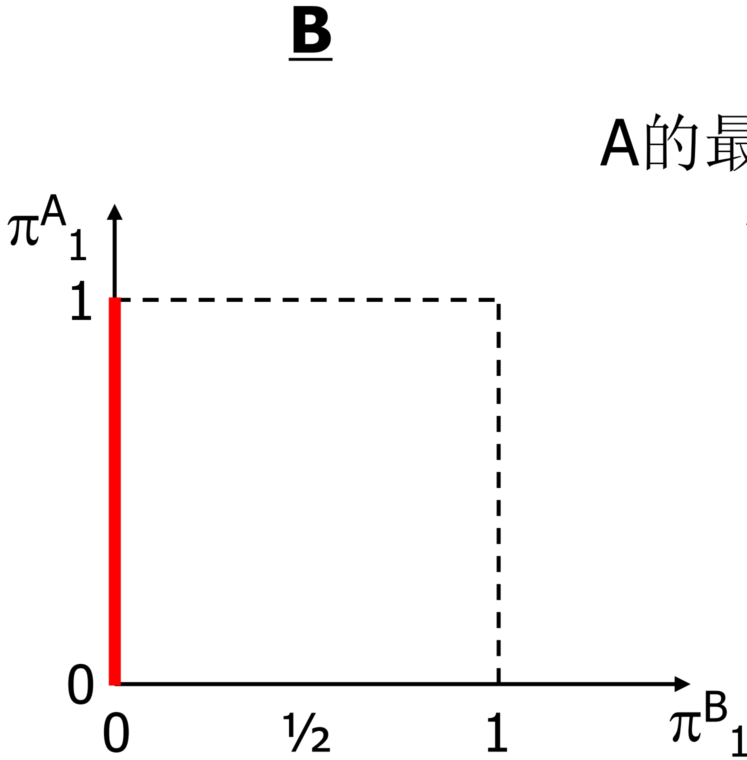
B的最佳反应决策为：总是a^B_2 (例如当π^B_1 = 0时)



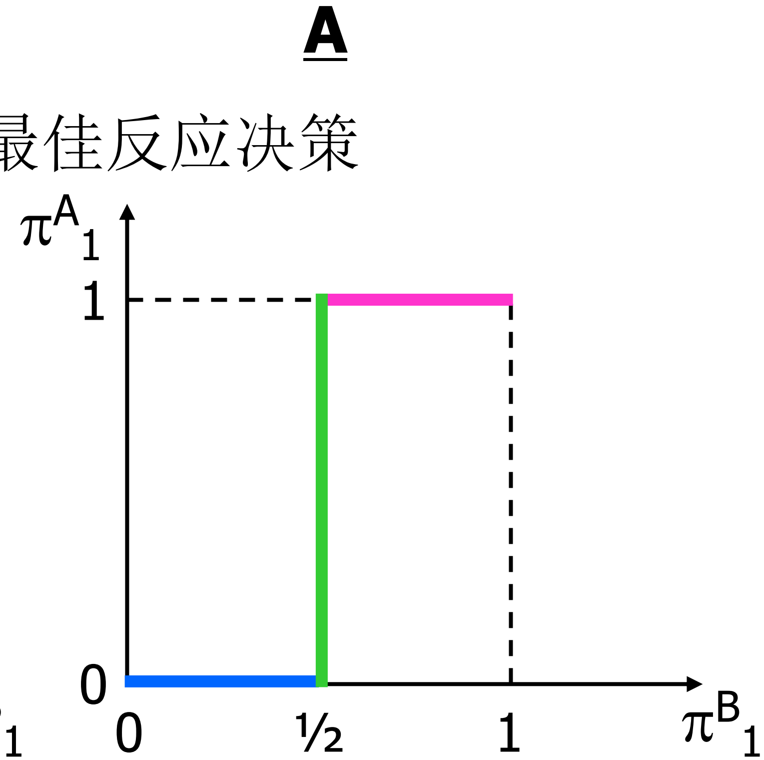
B的最佳反应决策

此为当参与者允许进行混合策略时B的最佳反应决策曲线。

最佳反应决策和纳什均衡



B′的最佳反应决策



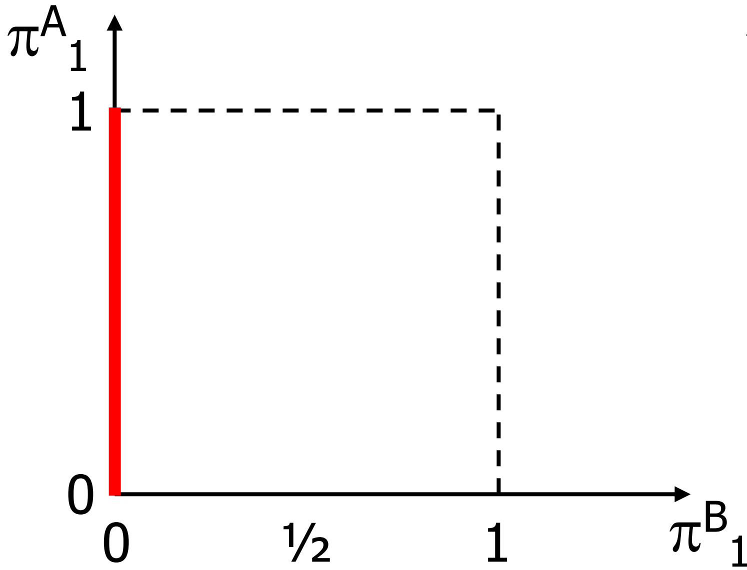
最佳反应决策和纳什均衡

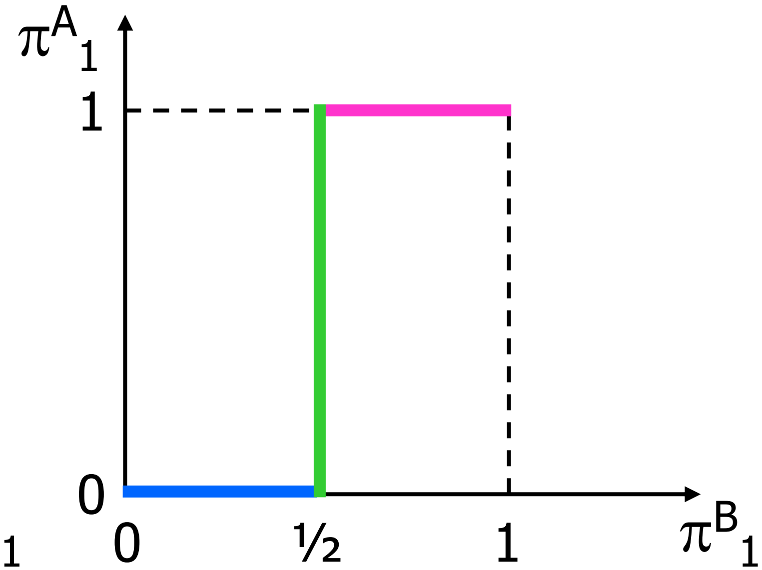
是否存在一个纳什均衡？

B

A

A的最佳反应决策



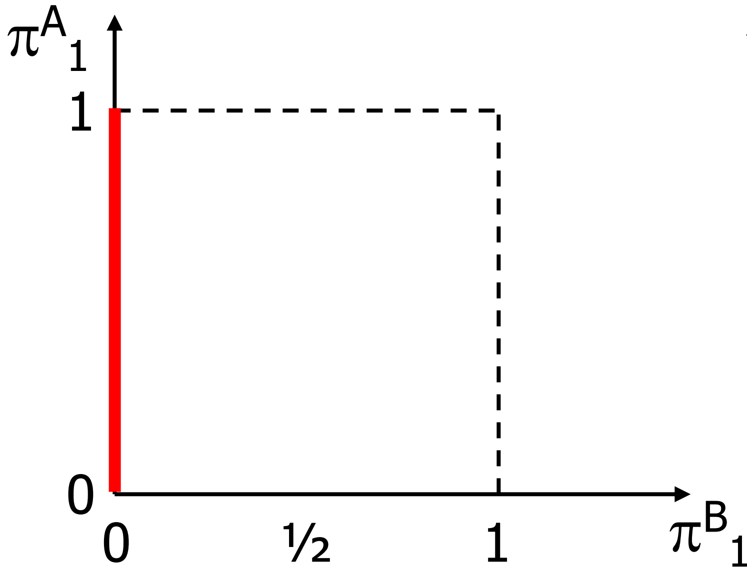


B的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？

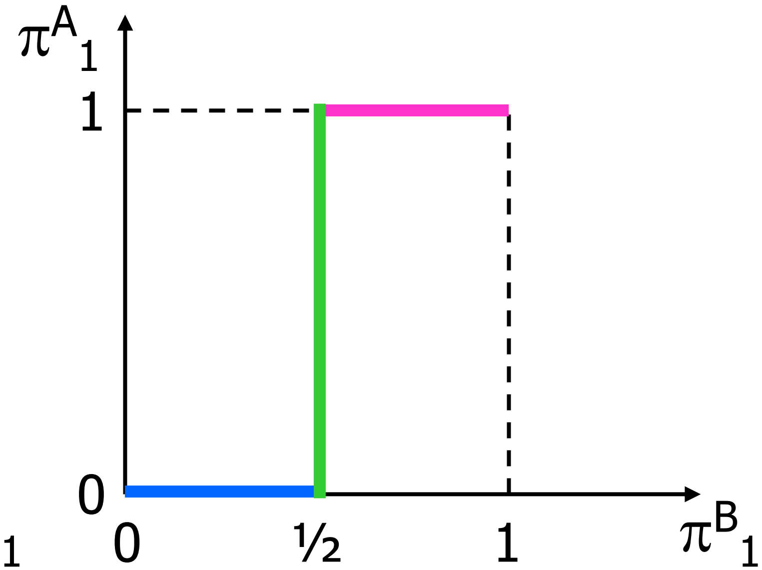
B



B的最佳反应决策

A

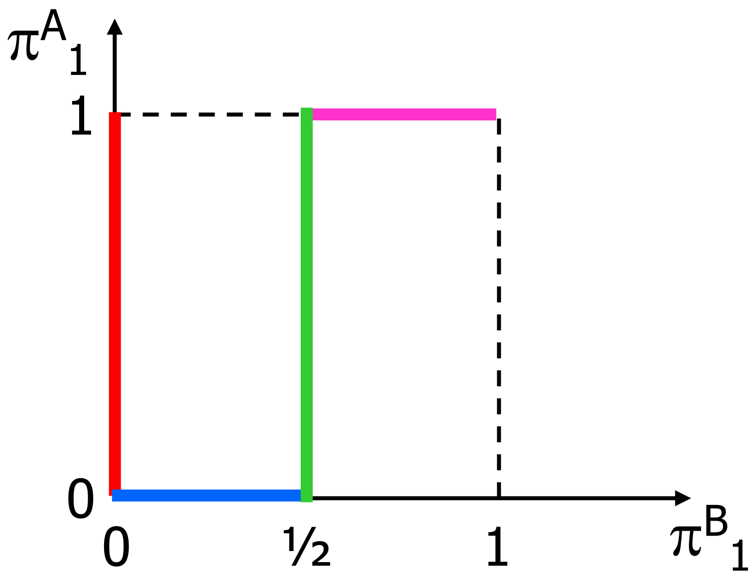
A的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？

A的最佳反应决策

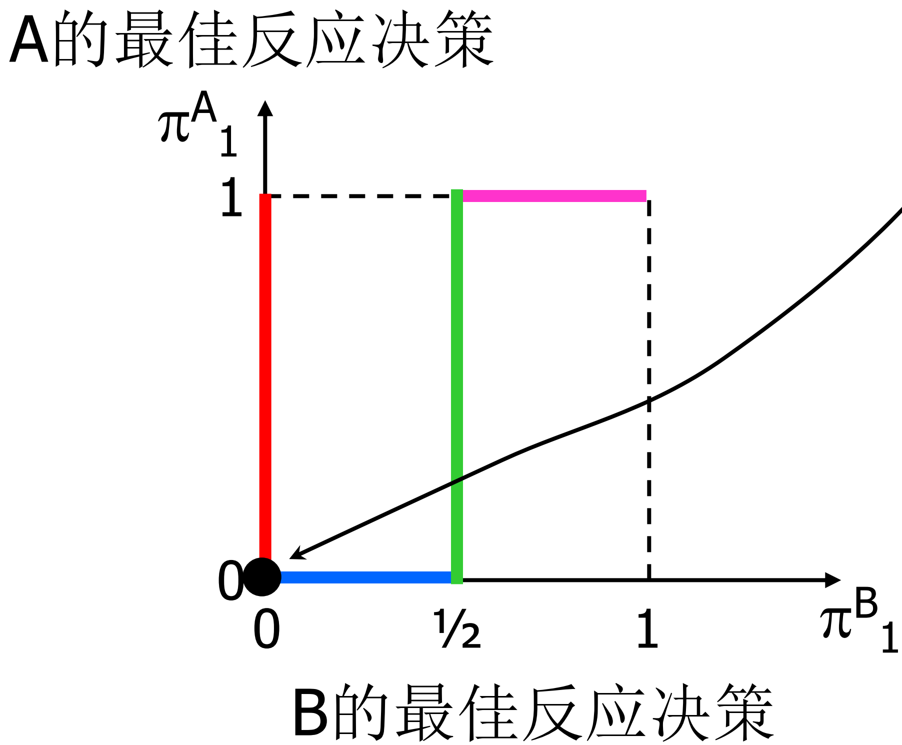


B的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？存在且仅有一个。

$(\pi^A{}_1, \pi^B{}_1) = (0,0)$；
例如，A仅选择$a^A{}_2$
& B仅选择$a^B{}_2$。



最佳反应决策和纳什均衡

改变博弈

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

最佳反应决策和纳什均衡

新的2×2 博弈

参与者 B

参与者 A		a^B_1	a^B_2
	a^A_1	6,4	3,5
	a^A_2	4,3	5,7

最佳反应决策和纳什均衡

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,1
	a^A_2	4,3	5,7

新的2×2 博弈。A 选择 a^A_1的概率为π^A_1 ，B 选择a^B_1. 的概率为π^B_1 。这个博弈的纳什均衡为什么？

注意参与者B不再有占优策略。

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,1**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

$EV^A(a^A_1) = ??$
$EV^A(a^A_2) = ??$

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

参与者 B

		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,1**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1.$

$EV^A(a^A_2) = ??$

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,1
	a^A_2	4,3	5,7

$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1$。
$EV^A(a^A_2) = 4\pi^B_1 + 5(1 - \pi^B_1) = 5 - \pi^B_1$。

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1 。

参与者 B

		a^B_1	**a^B_2**
参与者 A	**a^A_1**	**6,4**	**3,1**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1$。
$EV^A(a^A_2) = 4\pi^B_1 + 5(1 - \pi^B_1) = 5 - \pi^B_1$。
$3 + 3\pi^B_1 \gtreqless 5 - \pi^B_1$ as $\pi^B_1 \gtreqless ½$。

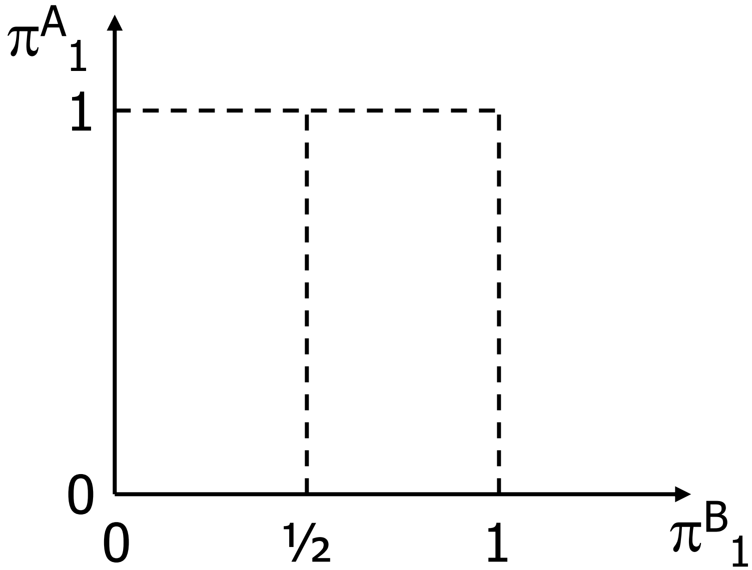
最佳反应决策和纳什均衡

$$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1.$$

$$EV^A(a^A_2) = 4\pi^B_1 + 5(1 - \pi^B_1) = 5 - \pi^B_1.$$

$$3 + 3\pi^B_1 \gtreqless 5 - \pi^B_1 \text{ as } \pi^B_1 \gtreqless ½.$$

A的最佳反应决策



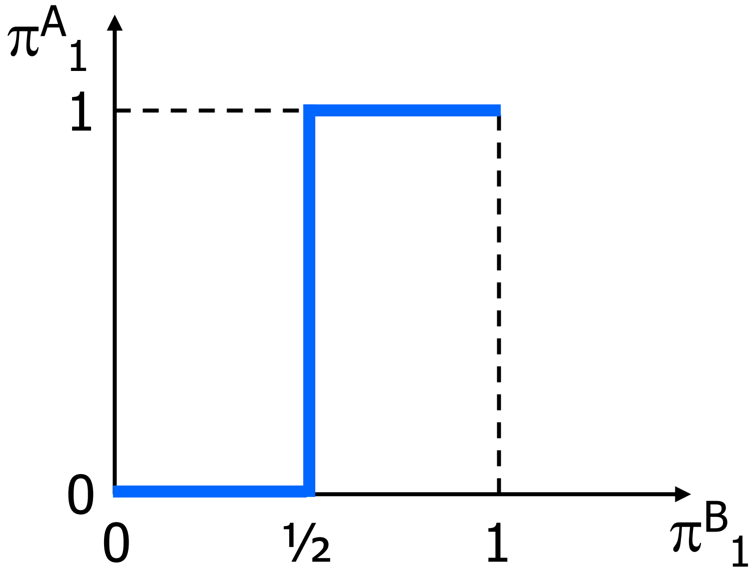
最佳反应决策和纳什均衡

$$EV^A(a^A_1) = 6\pi^B_1 + 3(1 - \pi^B_1) = 3 + 3\pi^B_1.$$

$$EV^A(a^A_2) = 4\pi^B_1 + 5(1 - \pi^B_1) = 5 - \pi^B_1.$$

$$3 + 3\pi^B_1 \gtreqqless 5 - \pi^B_1 \text{ as } \pi^B_1 \gtreqqless ½.$$

A的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	6,4	3,1
	a^A_2	4,3	5,7

$EV^B(a^B_1) = ??$
$EV^B(a^B_2) = ??$

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1 。

		参与者 B	
		a^B_1	a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,1**
	a^A_2	**4,3**	**5,7**

$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 3 + \pi^A_1.$

$EV^B(a^B_2) = ??$

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

参与者 B

参与者 A		a^B_1	a^B_2
	a^A_1	6,4	3,1
	a^A_2	4,3	5,7

$$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 4 + \pi^A_1.$$
$$EV^B(a^B_2) = \pi^A_1 + 7(1 - \pi^A_1) = 7 - 6\pi^A_1.$$

最佳反应决策和纳什均衡

A 选择 a^A_1的概率为π^A_1，
B 选择a^B_1的概率为π^B_1。

		参与者 B a^B_1	参与者 B a^B_2
参与者 A	a^A_1	**6,4**	**3,1**
参与者 A	a^A_2	**4,3**	**5,7**

$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 3 + \pi^A_1.$

$EV^B(a^B_2) = \pi^A_1 + 7(1 - \pi^A_1) = 7 - 6\pi^A_1.$

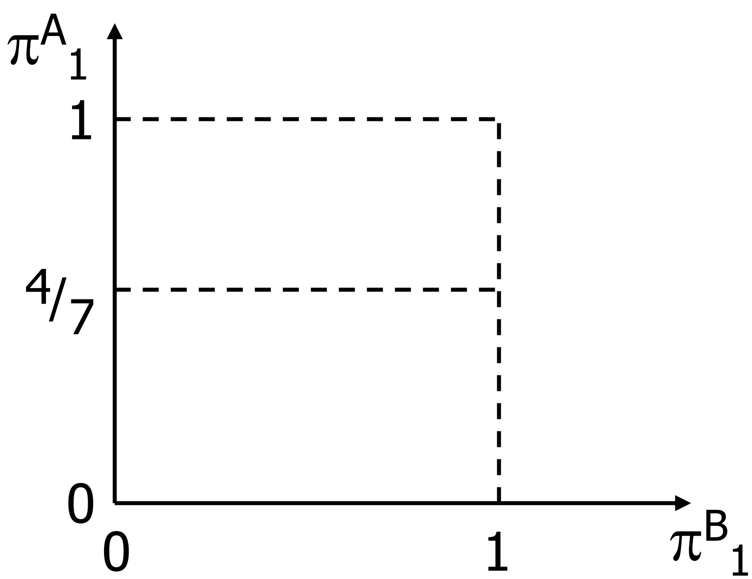
$3 + \pi^A_1 \gtreqless 7 - 6\pi^A_1$ as $\pi^A_1 \gtreqless 4/7$.

最佳反应决策和纳什均衡

$EV^B(a^B{}_1) = 4\pi^A{}_1 + 3(1 - \pi^A{}_1) = 3 + \pi^A{}_1.$

$EV^B(a^B{}_2) = \pi^A{}_1 + 7(1 - \pi^A{}_1) = 7 - 6\pi^A{}_1.$

$3 + \pi^A{}_1 \gtreqless 7 - 6\pi^A{}_1 \text{ as } \pi^A{}_1 \gtreqless {}^4/_7\,.$



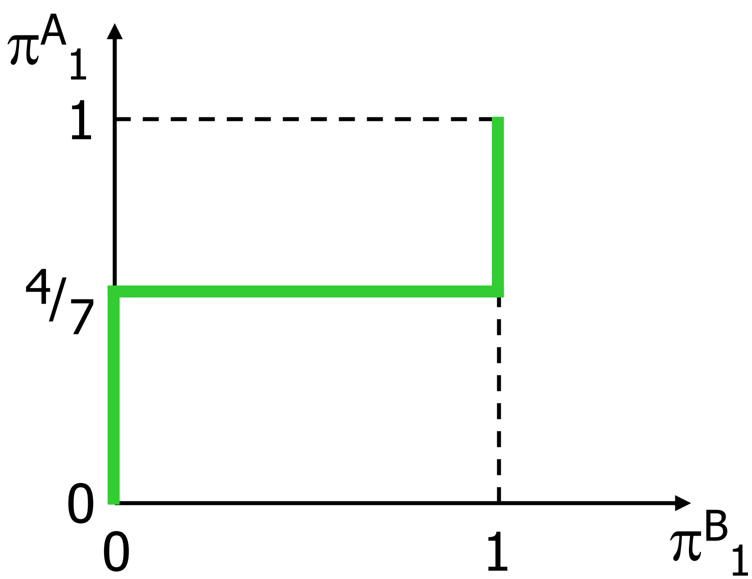
B的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

$$EV^B(a^B_1) = 4\pi^A_1 + 3(1 - \pi^A_1) = 3 + \pi^A_1.$$

$$EV^B(a^B_2) = \pi^A_1 + 7(1 - \pi^A_1) = 7 - 6\pi^A_1.$$

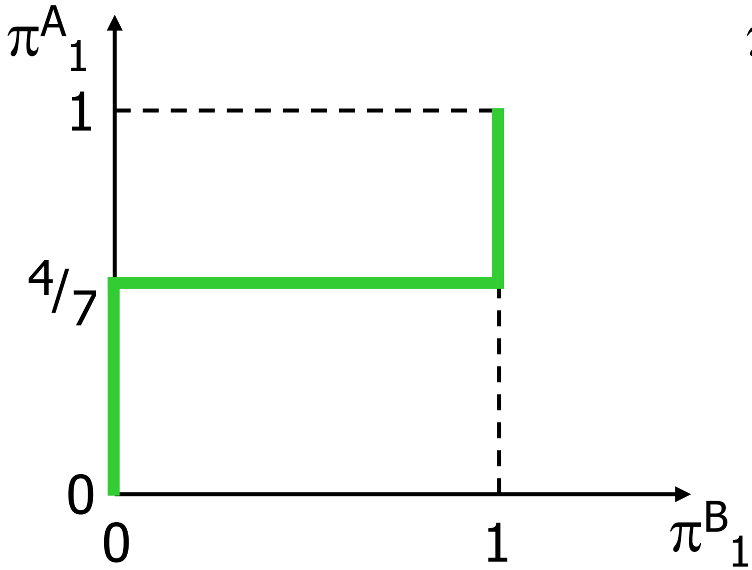
$$3 + \pi^A_1 \gtreqless 7 - 6\pi^A_1 \text{ as } \pi^A_1 \gtreqless {}^4/_7 .$$



B的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

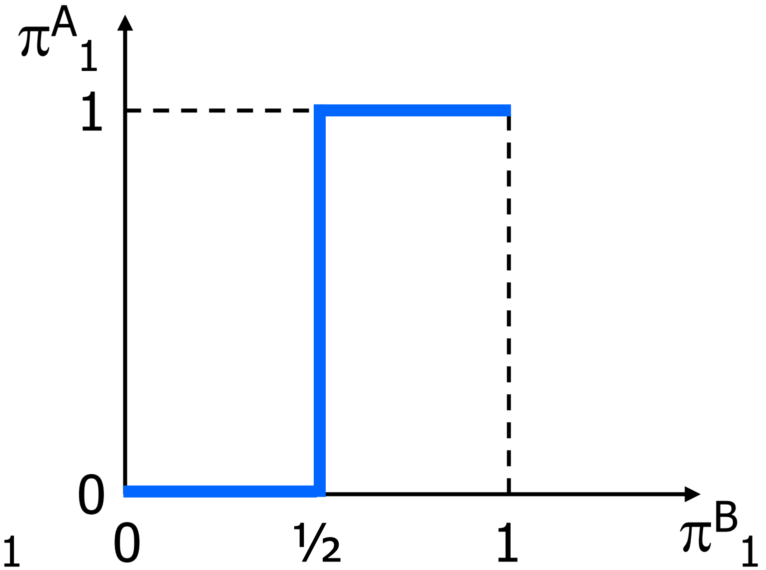
B



B的最佳反应决策

A

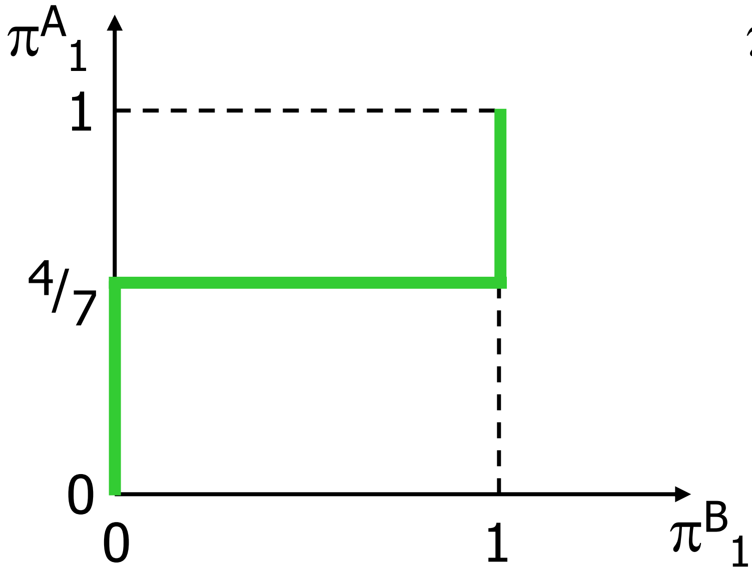
A的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

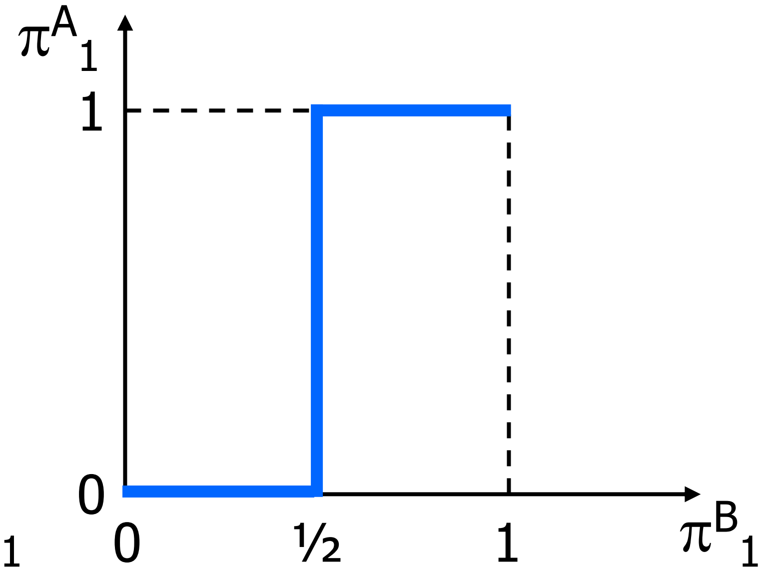
是否存在一个纳什均衡?

B **A**



B的最佳反应决策

A的最佳反应决策



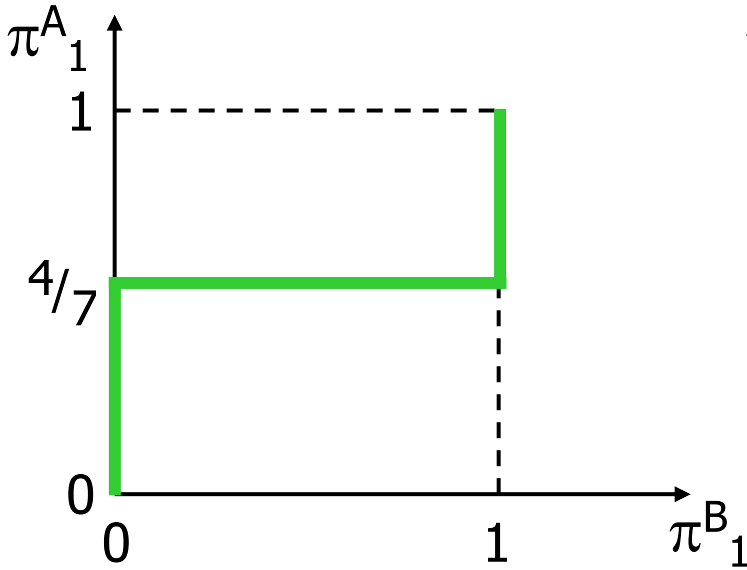
最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？

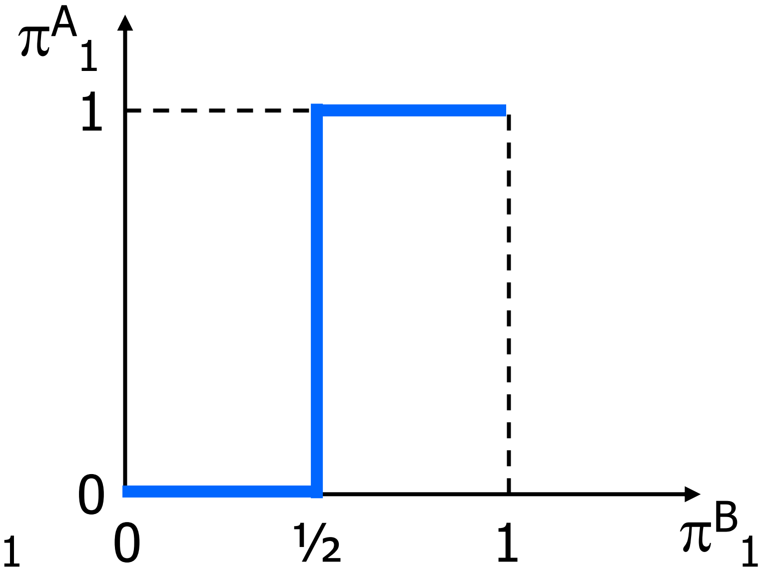
B

A

A的最佳反应决策



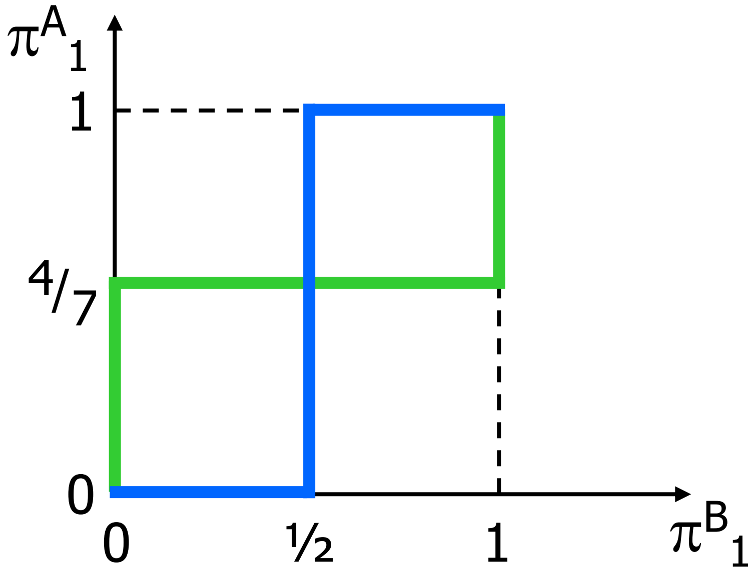
B的最佳反应决策



最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？

A的最佳反应决策

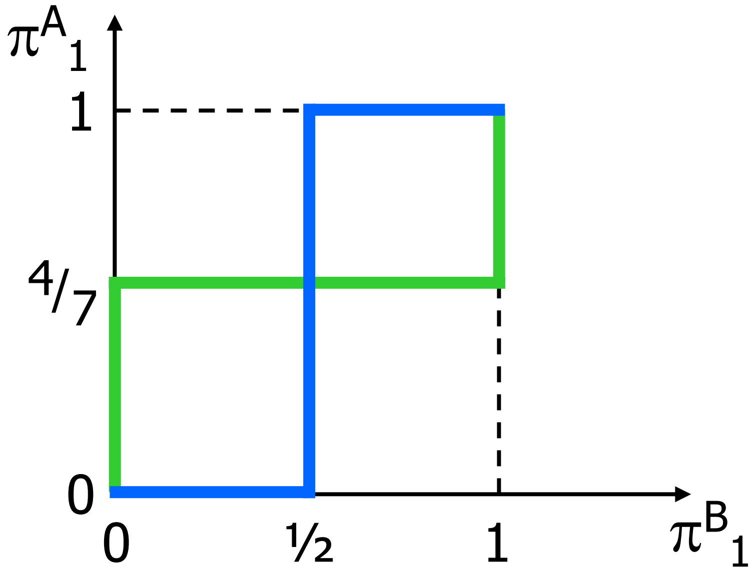


B的最佳反应决策

最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？存在且有3个。

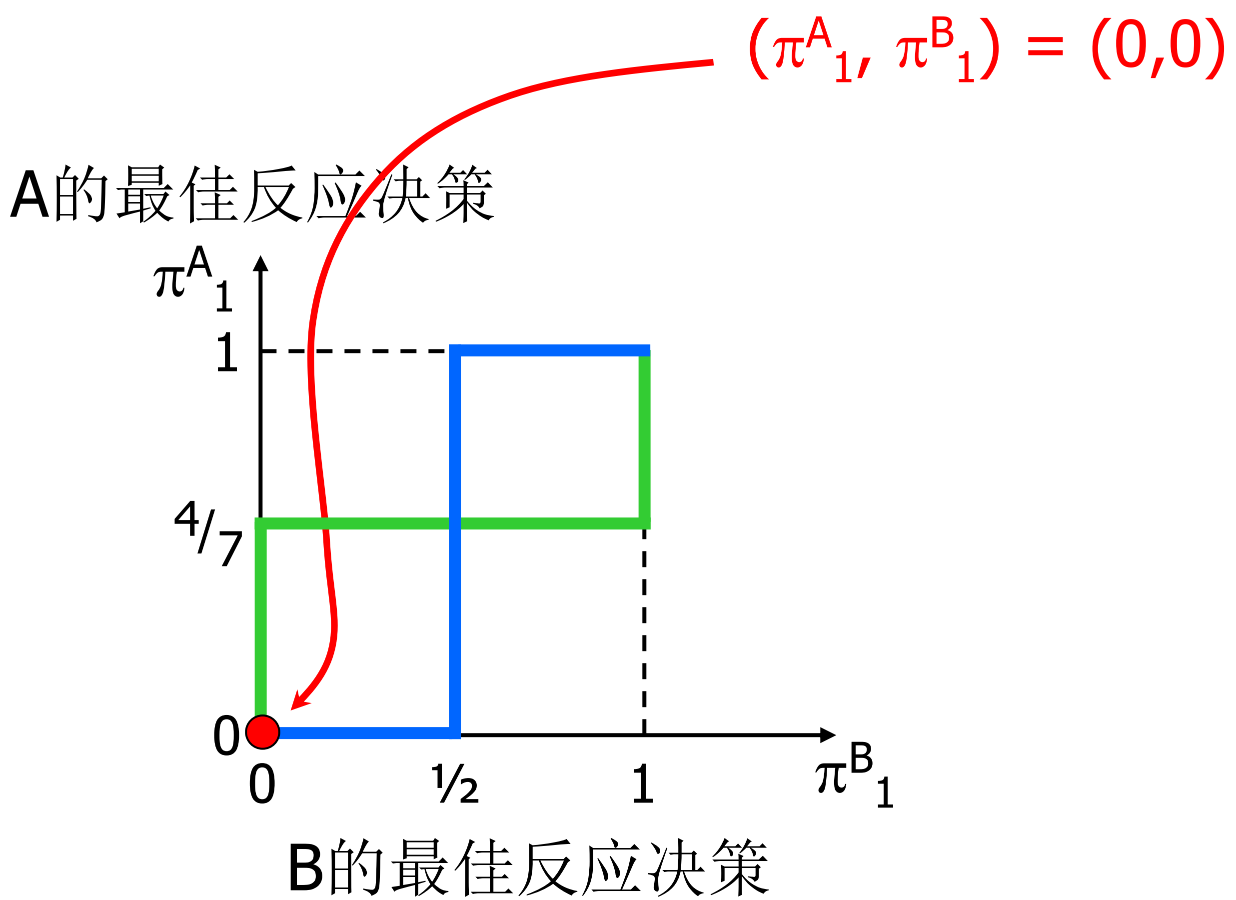
A的最佳反应决策



B的最佳反应决策

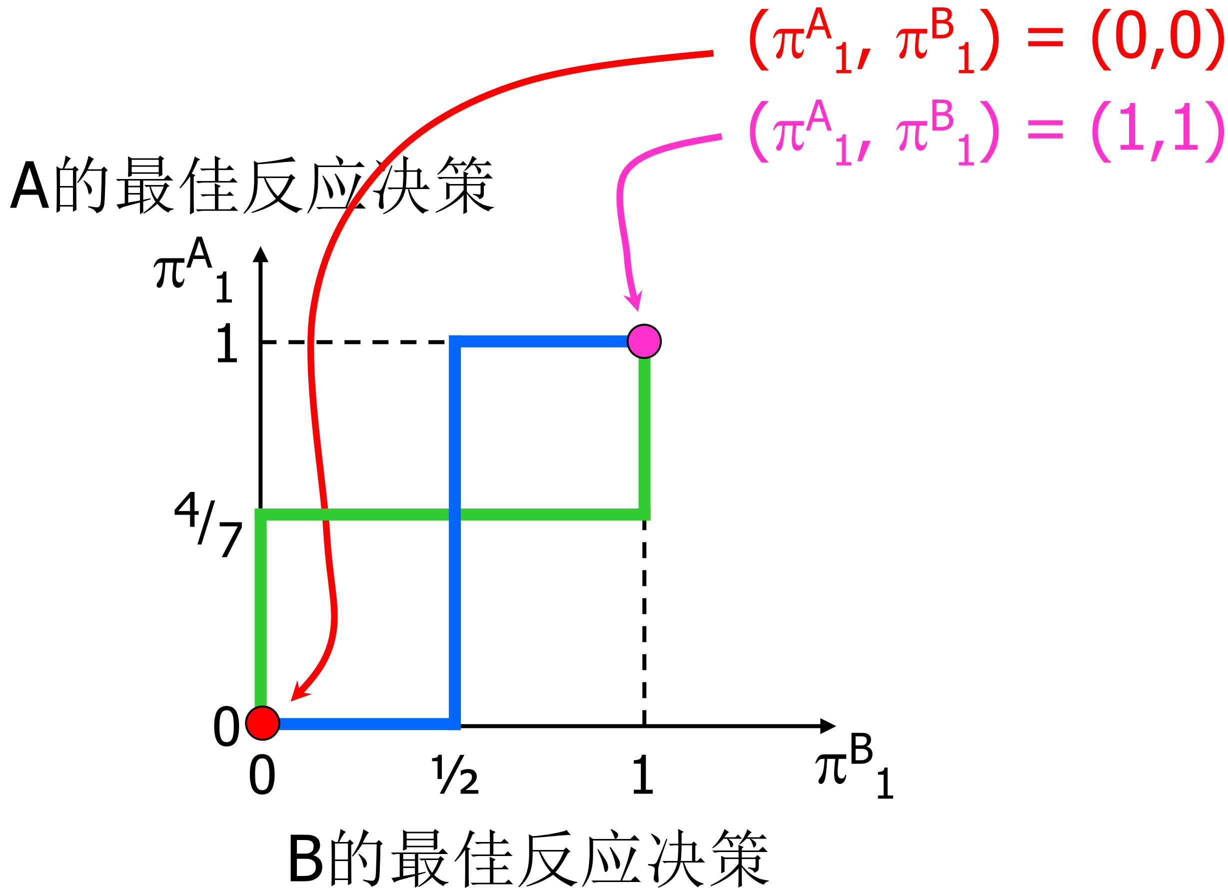
最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？存在且有3个。



最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？存在且有3个。



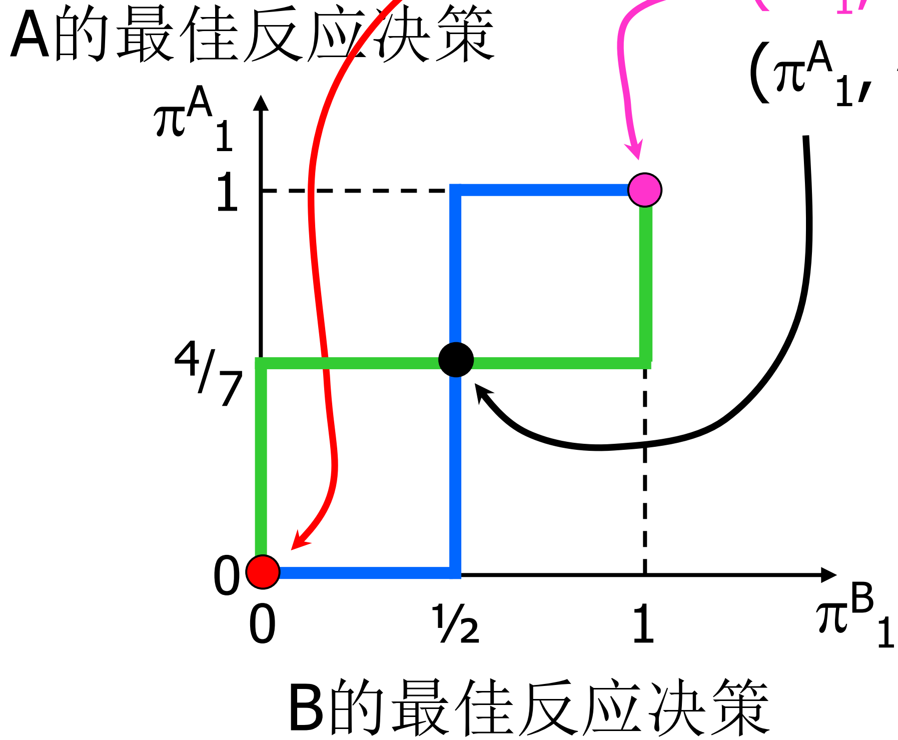
最佳反应决策和纳什均衡

是否存在一个纳什均衡？存在且有3个。

$(\pi^A{}_1, \pi^B{}_1) = (0,0)$

$(\pi^A{}_1, \pi^B{}_1) = (1,1)$

$(\pi^A{}_1, \pi^B{}_1) = (4/7, 1/2)$



博弈的几种重要类型

- 合作博弈
- 竞争博弈
- 共存博弈
- 承诺博弈
- 讨价还价博弈

合作博弈

- 同时做出决策的的参与者采取合作策略时，他们的收益最大。有名的例子有：
  - 性别战
  - 囚徒困境
  - 保证博弈
  - 斗鸡博弈

合作博弈：性别战

- 相比泥土摔跤，西斯更加喜欢看芭蕾。
- 相比芭蕾，杰克更喜欢看泥土摔跤。
- 相比分开看节目，两个人更喜欢共同看节目。

合作博弈：性别战

		杰克	
		B	**MW**
西斯	**B**	**8,4**	**1,2**
	MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

合作博弈：性别战

		杰克	
		B	**MW**
西斯	**B**	**8,4**	**1,2**
	MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

参与者的最佳反应函数为什么？

合作博弈：性别战

		杰克	
		B	**MW**
西斯	**B**	**8,4**	**1,2**
	MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为$\pi^S{}_B$，杰克选择泥土摔跤的概率为$\pi^J{}_B$。

参与者的最佳反应函数为什么？

$$EV^S(B) = 8\pi^J{}_B + (1 - \pi^J{}_B) = 1 + 7\pi^J{}_B.$$

合作博弈：性别战

		杰克 B	杰克 MW
西斯	B	8,4	1,2
西斯	MW	2,1	4,8

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。
参与者的最佳反应函数为什么？

$EV^S(B) = 8\pi^J_B + (1 - \pi^J_B) = 1 + 7\pi^J_B.$
$EV^S(MW) = 2\pi^J_B + 4(1 - \pi^J_B) = 4 - 2\pi^J_B.$

合作博弈：性别战

		杰克	
		B	**MW**
西斯	**B**	**8,4**	**1,2**
	MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。
参与者的最佳反应函数为什么？

$EV^S(B) = 8\pi^J_B + (1 - \pi^J_B) = 1 + 7\pi^J_B.$

$EV^S(MW) = 2\pi^J_B + 4(1 - \pi^J_B) = 4 - 2\pi^J_B.$

$1 + 7\pi^J_B \gtreqqless 4 - 2\pi^J_B$ as $\pi^J_B \gtreqqless 1/3.$

合作博弈：性别战

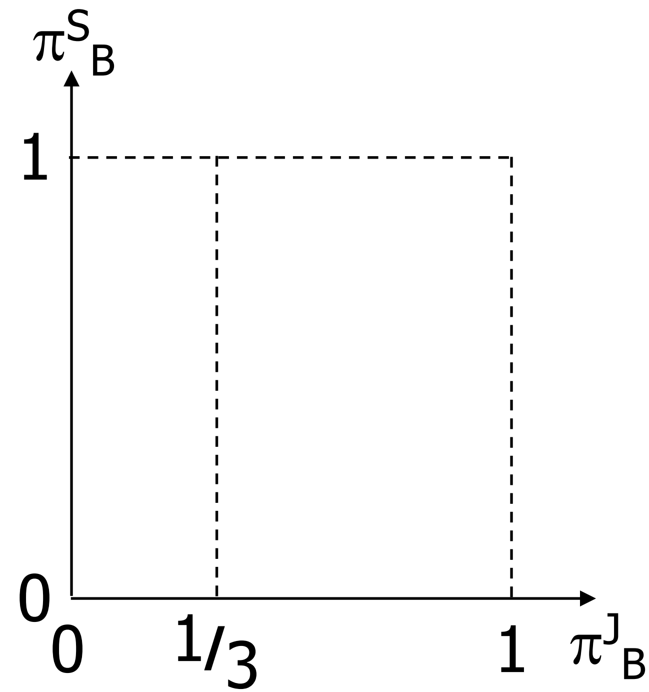
西斯 \ 杰克	B	MW
B	**8,4**	**1,2**
MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

$EV^S(B) = 8\pi^J_B + (1 - \pi^J_B) = 1 + 7\pi^J_B.$

$EV^S(MW) = 2\pi^J_B + 4(1 - \pi^J_B) = 4 - 2\pi^J_B.$

$1 + 7\pi^J_B \gtreqless 4 - 2\pi^J_B$ as $\pi^J_B \gtreqless 1/3.$



合作博弈：性别战

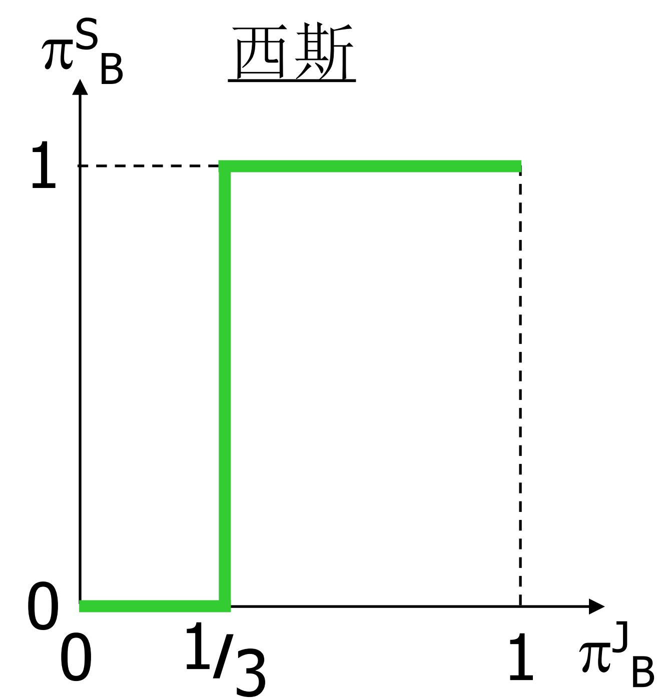
西斯 \ 杰克	B	MW
B	8,4	1,2
MW	2,1	4,8

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B 。

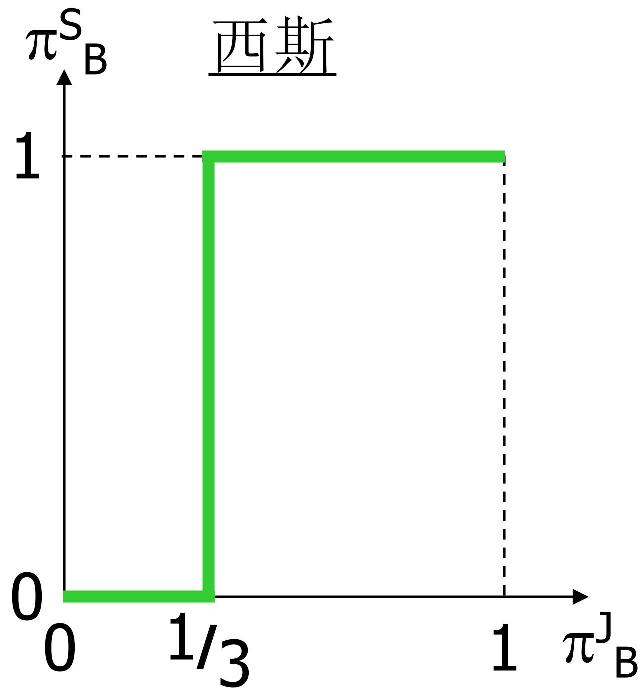
$EV^S(B) = 8\pi^J_B + (1 - \pi^J_B) = 1 + 7\pi^J_B.$

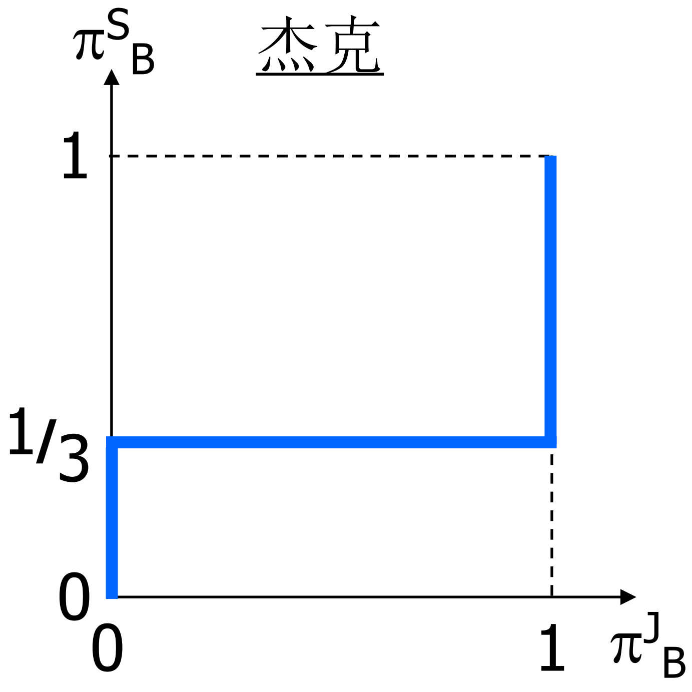
$EV^S(MW) = 2\pi^J_B + 4(1 - \pi^J_B) = 4 - 2\pi^J_B.$

$1 + 7\pi^J_B \gtreqless 4 - 2\pi^J_B$ as $\pi^J_B \gtreqless {}^1/_3.$



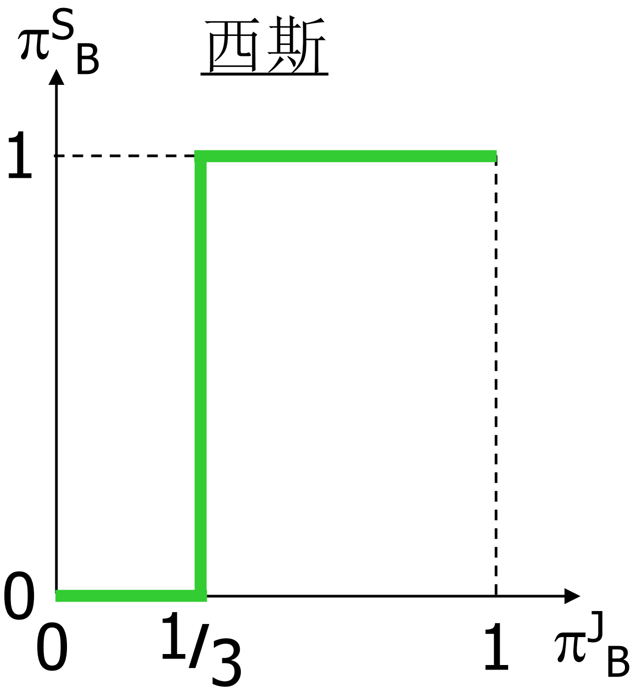
合作博弈：性别战

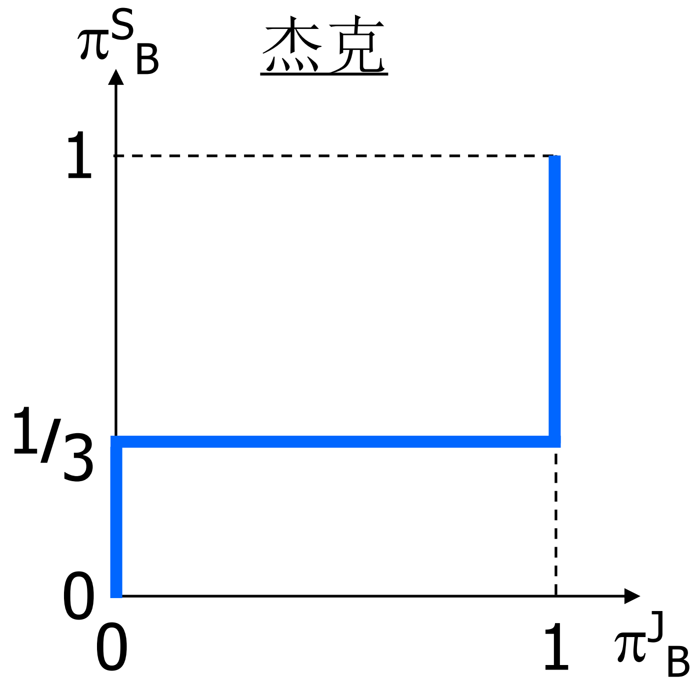




合作博弈：性别战

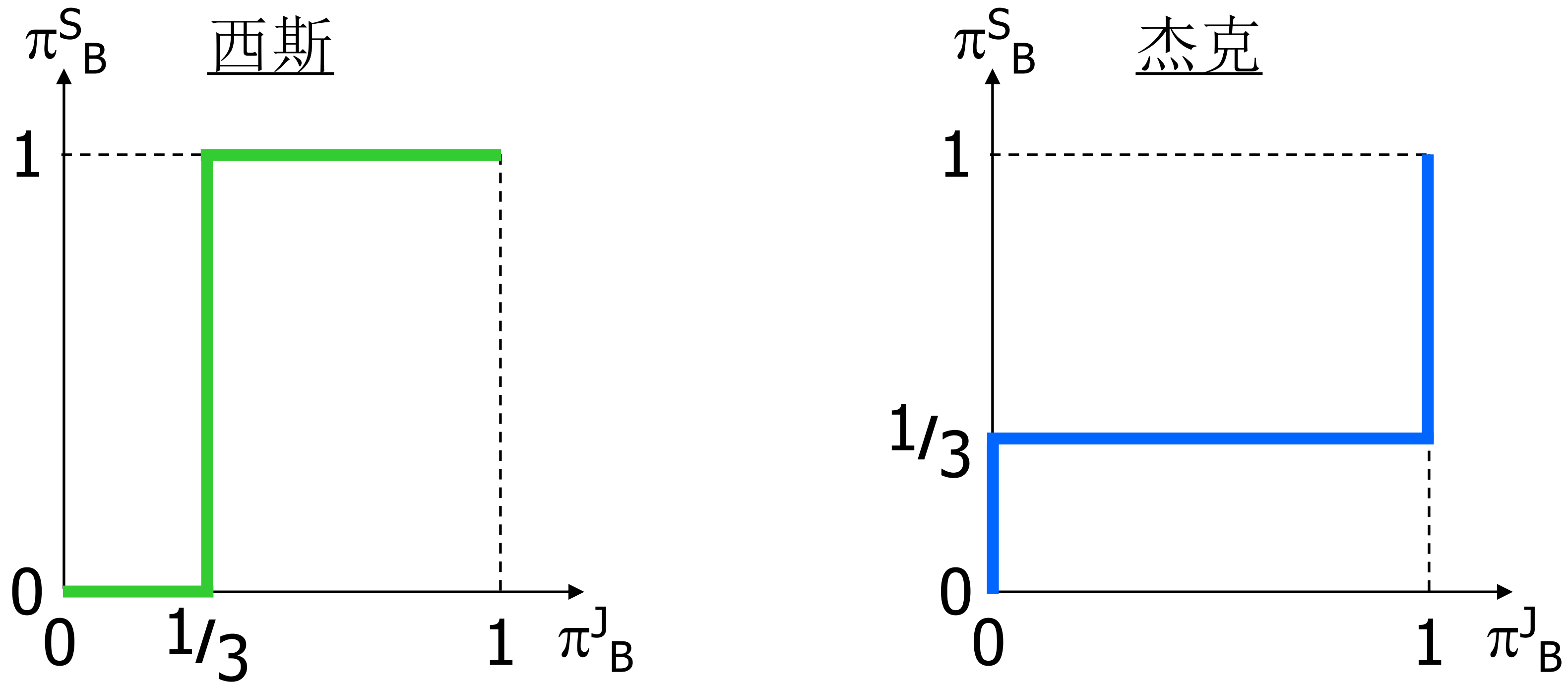
博弈的纳什均衡为什么？





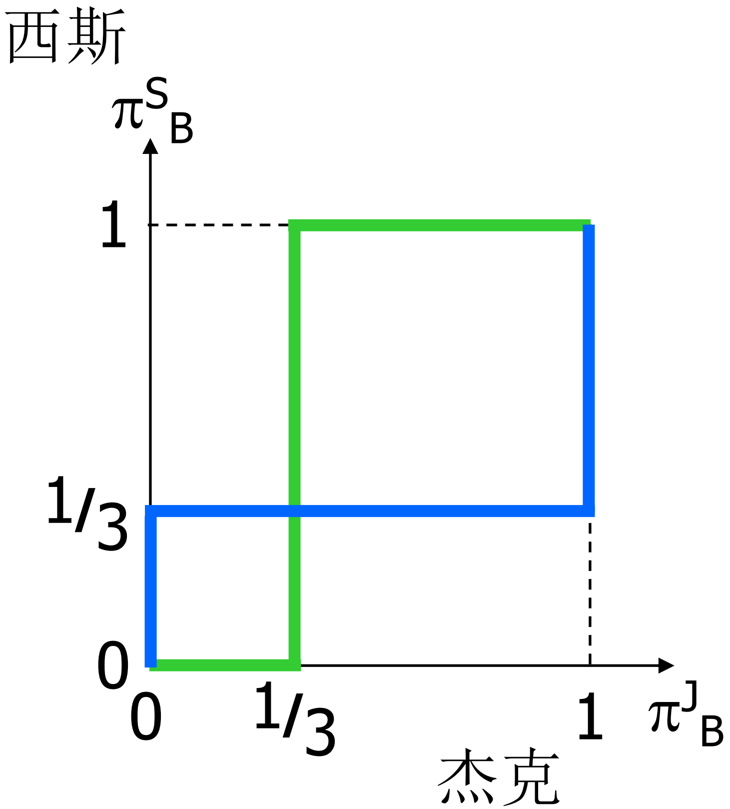
合作博弈：性别战

博弈的纳什均衡为什么？



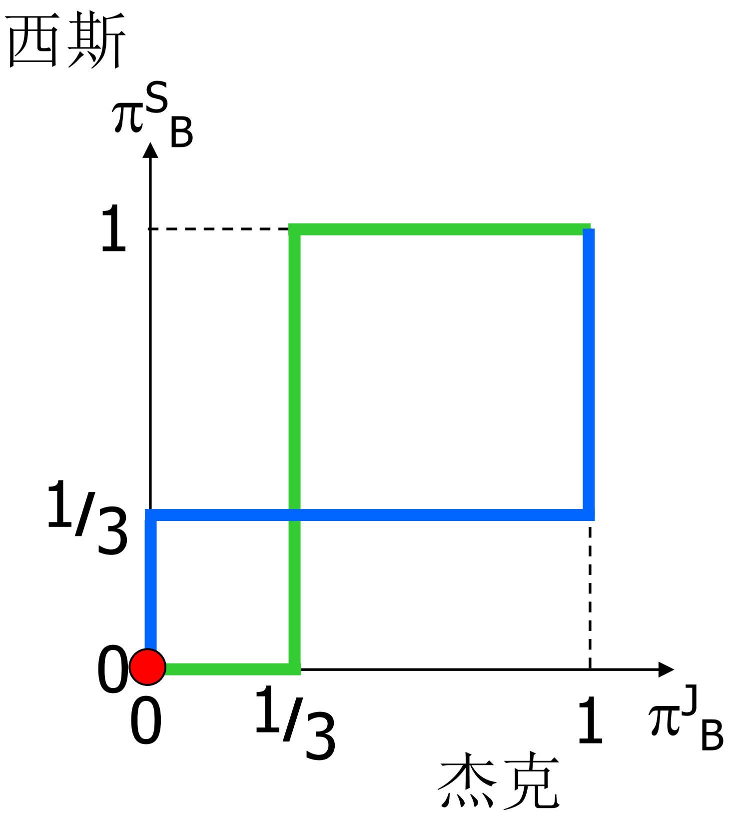
合作博弈：性别战

博弈的纳什均衡为什么？



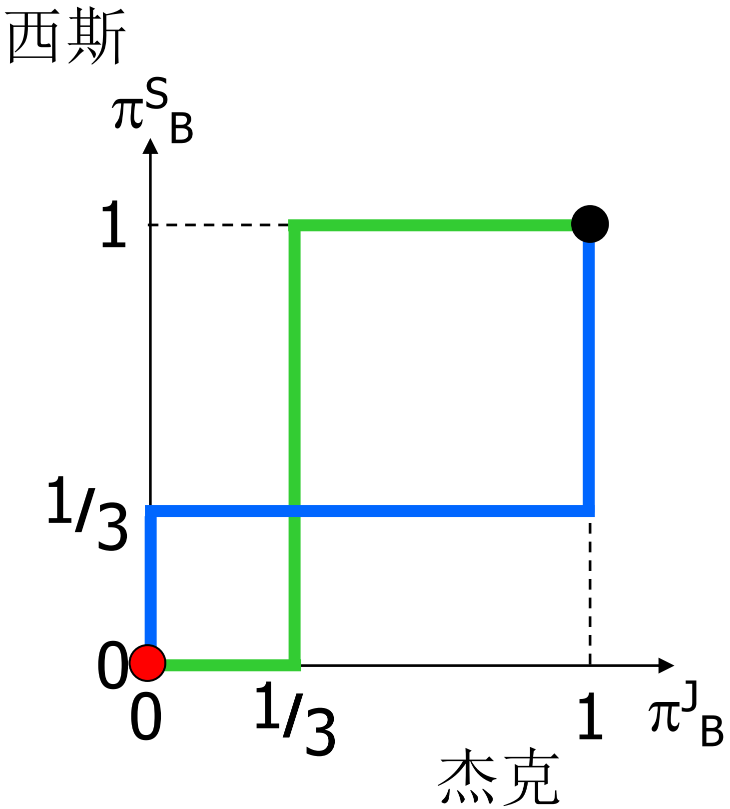
合作博弈：性别战

博弈的纳什均衡为: $(\pi^J{}_B, \pi^S{}_B) = (0, 0)$; *例如*, (MW, MW)



合作博弈：性别战

博弈的纳什均衡为: $(\pi^J_B, \pi^S_B) = (0, 0)$; *例如*, (MW, MW)
$(\pi^J_B, \pi^S_B) = (1, 1)$; *例如*, (B, B)



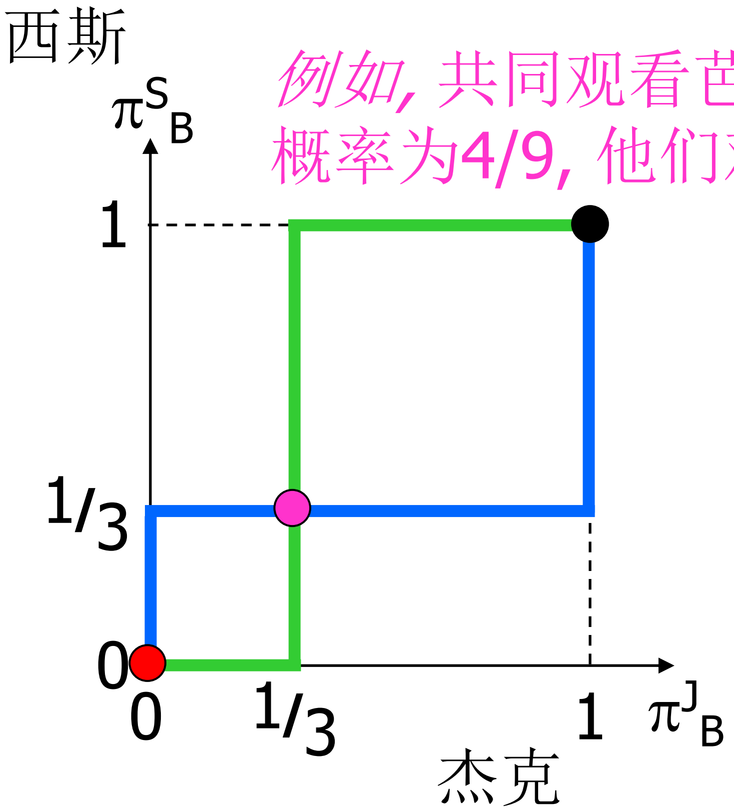
合作博弈：性别战

博弈的纳什均衡为: $(\pi^J_B, \pi^S_B) = (0, 0)$; *例如*, (MW, MW)

$(\pi^J_B, \pi^S_B) = (1, 1)$; *例如*, (B, B)

$(\pi^J_B, \pi^S_B) = ({}^1/_3, {}^1/_3)$;

例如, 共同观看芭蕾的概率为1/9, 共同观看泥土摔跤的概率为4/9, 他们观看不同节目的概率为4/9。



合作博弈：性别战

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

		杰克 B	杰克 MW
西斯	B	8,4	1,2
西斯	MW	2,1	4,8

达到纳什均衡 $(\pi^J_B, \pi^S_B) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时西斯的预期收益为：

$8 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{4}{9} = \frac{10}{3}$ < 4和 8。

合作博弈：性别战

		杰克 B	杰克 MW
西斯	B	8,4	1,2
西斯	MW	2,1	4,8

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

达到纳什均衡 $(\pi_B^J, \pi_B^S) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时西斯的预期收益为：

$8\times \frac{1}{9} + 1\times \frac{2}{9} + 2\times \frac{2}{9} + 4\times \frac{4}{9} = \frac{10}{3}$ < 4和 8。

达到纳什均衡 $(\pi_B^J, \pi_B^S) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时杰克的预期收益为：

$4\times \frac{1}{9} + 2\times \frac{2}{9} + 1\times \frac{2}{9} + 8\times \frac{4}{9} = \frac{14}{3}$， $4 < \frac{14}{3} < 8$ 。

合作博弈：性别战

		杰克	
		B	**MW**
西斯	**B**	**8,4**	**1,2**
	MW	**2,1**	**4,8**

西斯选择芭蕾的概率为π^S_B，杰克选择泥土摔跤的概率为π^J_B。

因此，混合策略纳什均衡是否该博弈的一个焦点？

达到纳什均衡 $(\pi_B^J, \pi_B^S) = \left(1/3, 1/3\right)$ 时西斯的预期收益为：

$8 \times 1/9 + 1 \times 2/9 + 2 \times 2/9 + 4 \times 4/9 = 10/3$ < 4和 8。

达到纳什均衡 $(\pi_B^J, \pi_B^S) = \left(1/3, 1/3\right)$ 时杰克的预期收益为：

$4 \times 1/9 + 2 \times 2/9 + 1 \times 2/9 + 8 \times 4/9 = 14/3$， $4 < 14/3 < 8$ 。

合作博弈：囚徒困境

- 同时做出决策的参与者都有占优策略。
- 唯一的纳什均衡为每个参与者选择的占优策略。
- 然而每个参与者可以通过合作采取其它策略组合达到比在纳什均衡情况更多的收益。

合作博弈：囚徒困境

- 提姆和汤姆在看守所。每个人可以选择供认罪行(C)或者保持沉默(S)。
- 两者都供认罪行每人将被判罚5年监禁。
- 两者都保持沉默每人将被判罚2年监禁。
- 假如提姆供认罪行而汤姆保持沉默，那么提姆不受处罚而汤姆将要判罚10监禁(反之亦然)。

合作博弈：囚徒困境

		汤姆	
		沉默	供认
提姆	沉默	-2,-2	-10,0
	供认	0,-10	-5,-5

对于提姆来说，供认为占优策略。

合作博弈：囚徒困境

		汤姆 沉默	汤姆 供认
提姆	沉默	-2,-2	-10,0
提姆	供认	0,-10	-5,-5

对于提姆来说供认为占优策略。
对于汤姆来说供认为占优策略。

合作博弈：囚徒困境

		汤姆 沉默	汤姆 供认
提姆	沉默	-2,-2	-10,0
提姆	供认	0,-10	-5,-5

对于提姆来说供认为占优策略。
对于汤姆来说供认为占优策略。
唯一的纳什均衡为：(供认，供认)。

合作博弈：囚徒困境

		汤姆	
		沉默	供认
提姆	沉默	-2,-2	-10,0
	供认	0,-10	-5,-5

但是（沉默，沉默）对于提姆和汤姆来说更好。

对于提姆来说供认为占优策略。
对于汤姆来说供认为占优策略。
唯一的纳什均衡为：(供认，供认)。

合作博弈：囚徒困境

		汤姆	
		沉默	供认
提姆	沉默	-2,-2	-10,0
	供认	0,-10	-5,-5

为了使双方合作从而达到
收益最大状态所需的是合
理的确保承诺。

可能的措施包括将来的惩罚或者强制实施的合同

合作博弈：承诺博弈

- 同时做决策的博弈的两个合作纳什均衡，其中一个比另一个所得收益要严格地高。
- 问题是：每个参与者怎么给对方承诺从而使该博弈出现好的纳什均衡结果？

合作博弈：承诺博弈

- 一个普遍的例子为军备竞赛博弈。
- 印度和巴基斯坦都可以增加他们的核武器存量，这样的成本很高。
- 对另一个国家有核有时能够得到更高的收益，但是对手方国家的收益降低。
- 不增加核储备对两个国家最好。

合作博弈：承诺博弈

		巴基斯坦	
		不增加	增加
印度	不增加	**5,5**	**1,4**
	增加	**4,1**	**3,3**

合作博弈：承诺博弈

		巴基斯坦	
		不增加	增加
印度	不增加	**5,5**	**1,4**
	增加	**4,1**	**3,3**

博弈的纳什均衡为什么？

合作博弈：承诺博弈

		巴基斯坦	
		不增加	增加
印度	不增加	**5,5**	**1,4**
	增加	**4,1**	**3,3**

该博弈的纳什均衡为 (不增加，不增加) 和 (增加，增加)。
哪一个纳什均衡更有可能发生？

合作博弈：承诺博弈

		巴基斯坦	
		不增加	增加
印度	不增加	**5,5**	**1,4**
	增加	**4,1**	**3,3**

该博弈的纳什均衡为 (不增加，不增加) 和 (增加，增加)。
哪一个纳什均衡更有可能发生？假如印度先行动，结果如何？它会采取哪种策略？不增加核储备是不是最好的？

合作博弈：斗鸡博弈

- 同时做出决策的两个合作纳什均衡，在该均衡中每个参与者选择不被对手方选择的策略

合作博弈：保证博弈

- 两个司机进行对向行驶赛车。谁转向谁就是懦夫，谁不转向谁就是男子汉。
- 假如二者都不转向，就会发生碰撞，两者的收益都很低。
- 假如二者都转向不会发生碰撞，二者会得到适度的收益。
- 假如其中一个转向而另一个没有转向，那么转向的人得到很低的收益而没有转向的人获得高收益。

合作博弈：保证博弈

		Dumber	
		转向	不转向
Dumb	转向	**1,1**	**-2,4**
	不转向	**4,-2**	**-5,-5**

该博弈的纳什均衡为什么？

合作博弈：保证博弈

		Dumber 转向	Dumber 不转向
Dumb	转向	1,1	-2,4
	不转向	4,-2	-5,-5

该博弈的纯策略纳什均衡为（转向，不转向）和（不转向，转向）。存在一个混合策略纳什均衡，该均衡中每个人选择转向的概率为½ 。

合作博弈：保证博弈

		Dumber	
		转向	不转向
Dumb	转向	1,1	-2,4
	不转向	4,-2	-5,-5

Dumb 能否保证他得到4的收益？仅当他能说服Dumber他将会选择不转向。
他如何说服Dumber？

该博弈的纯策略纳什均衡为（转向，不转向）和（不转向，转向）。存在一个混合策略纳什均衡，该均衡中每个人选择转向的概率为½ 。

博弈的几种重要类型

- 合作博弈
- 竞争博弈
- 共存博弈
- 承诺博弈
- 讨价还价博弈

竞争博弈

- 同时做出决策的博弈，其中一个参与者的收益增加额正好是另一个参与者收益的减少额。
- 这些博弈通常称为零和博弈

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**$x,-x$**	**1,-1**

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

假如 x < 0 是否选择上？

		2	
		L	R
1	U	0,0	2,-2
	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

假如x < 0 那么与下相比上为占优策略。

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

假如$x < 0$ 那么与下相比上为占优策略。

假如$x < 1$ 那么选择左的策略呢？

		2	
		L	R
1	U	0,0	2,-2
	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡?

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

假如$x < 0$ 那么与下相比上为占优策略。
假如$x < 1$ 那么与右相比左为占优策略。

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

假如$x < 0$ 那么与下相比上为占优策略。
假如$x < 1$ 那么与右相比左为占优策略。
因此假如 $x < 0$纳什均衡
为什么？

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

假如x < 0 那么与下相比上为占优策略。
假如x < 1 那么与右相比左为占优策略。
假如x < 0 纳什均衡为(上，左)。

		2 L	2 R
1	U	0,0	2,-2
1	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

假如$x < 0$ 那么与下相比上为占优策略。
假如$x < 1$ 那么与右相比左为占优策略。
假如$x < 0$ 纳什均衡为(上，左)。假如$0 < x < 1$ 纳什均衡为什么？

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

		2 L	2 R
1	U	0,0	2,-2
1	D	x,-x	1,-1

假如x < 0 那么与下相比上为占优策略。
假如x < 1 那么与右相比左为占优策略。
假如x < 0 纳什均衡为(上，左)。假如0 < x < 1 纳什均衡为(下，左)。

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

1 \ 2	L	R
U	0,0	2,-2
D	x,-x	1,-1

假如x < 0 那么与下相比上为占优策略。
假如x < 1 那么与右相比左为占优策略。
假如x < 0 纳什均衡为 (上，左)。假如0 < x < 1 纳什均衡为(下，左)。
假如x > 1 那么纳什均衡为什么？

竞争博弈

下表是该博弈的一个例子。该博弈能达到什么样的纳什均衡？

		2	
		L	R
1	U	0,0	2,-2
	D	x,-x	1,-1

假如x < 0 那么与下相比上为占优策略。

假如x < 1 那么与右相比左为占优策略。

假如x < 0 纳什均衡为(上，左)。假如0 < x < 1 纳什均衡为(下，左)。

假如x > 1 不存在纯策略纳什均衡。是否存在混合纳什均衡

竞争博弈

2选择左的概率为 π_L。1 选择上的概率为π_U。当 x > 1时。

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

竞争博弈

2选择左的概率为 π_L。
1 选择上的概率为π_U。
当 x > 1时。

$EV_1(U) = 2(1 - \pi_L).$
$EV_1(D) = x\pi_L + 1 - \pi_L.$

		2: L	2: R
1	U	0,0	2,-2
1	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

2选择左的概率为 π_L。
1 选择上的概率为π_U。
当 x > 1时。

$EV_1(U) = 2(1 - \pi_L)$.
$EV_1(D) = x\pi_L + 1 - \pi_L$.

$2 - 2\pi_l \gtreqqless 1 + (x - 1)\pi_L$

as $\pi_L \gtreqqless 1/(1 + x)$.

		2	
		L	R
1	U	0,0	2,-2
	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

2选择左的概率为 π_L。
1 选择上的概率为π_U。
当 x > 1时。

		2	
		L	**R**
1	**U**	**0,0**	**2,-2**
	D	**x,-x**	**1,-1**

$EV_1(U) = 2(1 - \pi_L).$
$EV_1(D) = x\pi_L + 1 - \pi_L.$

$2 - 2\pi_l \gtreqless 1 + (x - 1)\pi_L$

as $\pi_L \gtreqless 1/(1 + x).$

$EV_2(L) = - x(1 - \pi_U).$
$EV_2(R) = - 2\pi_U - (1 - \pi_U).$

竞争博弈

2选择左的概率为 π_L。
1 选择上的概率为π_U。
当 x > 1时。

		2	
		L	R
1	U	0,0	2,-2
	D	x,-x	1,-1

$$EV_1(U) = 2(1 - \pi_L).$$
$$EV_1(D) = x\pi_L + 1 - \pi_L.$$
$$2 - 2\pi_l \gtreqless 1 + (x - 1)\pi_L$$
$$\text{as} \quad \pi_L \gtreqless 1/(1 + x).$$

$$EV_2(L) = - x(1 - \pi_U).$$
$$EV_2(R) = - 2\pi_U - (1 - \pi_U).$$
$$- x + x\pi_U \gtreqless - 1 - \pi_U$$
$$\text{as} \quad (x - 1)/(1 + x) \gtreqless \pi_U.$$

竞争博弈

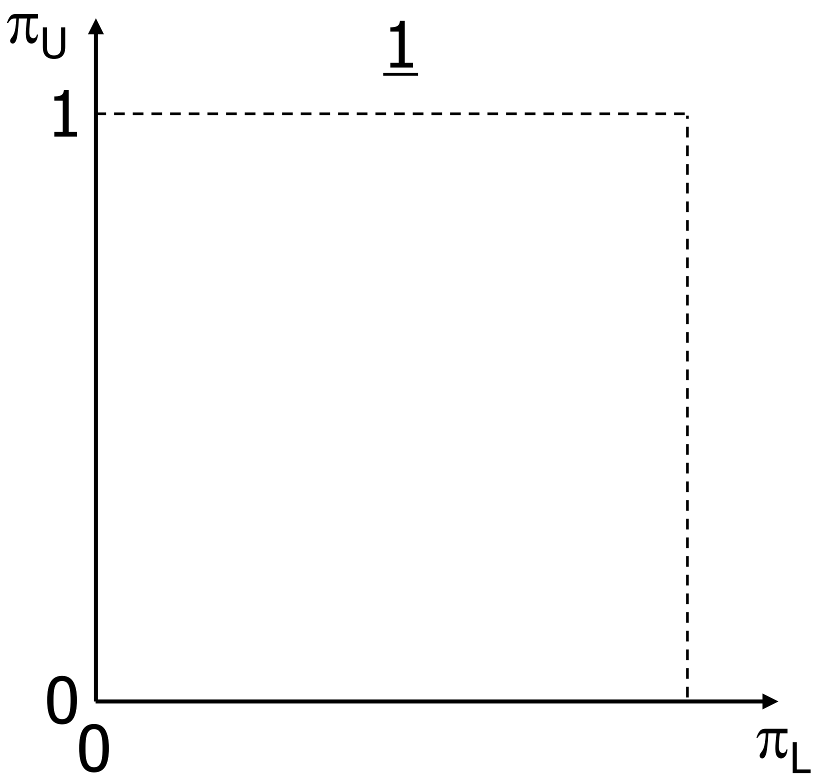
1 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$ 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$。
2 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$ 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$。

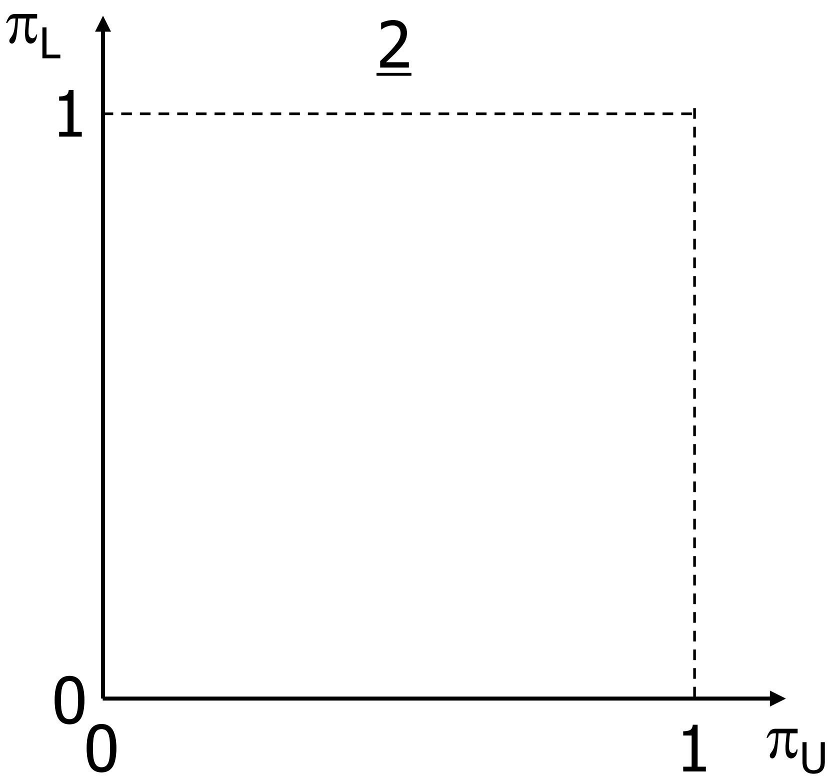
		2 L	2 R
1	U	0,0	2,-2
1	D	x,-x	1,-1

竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

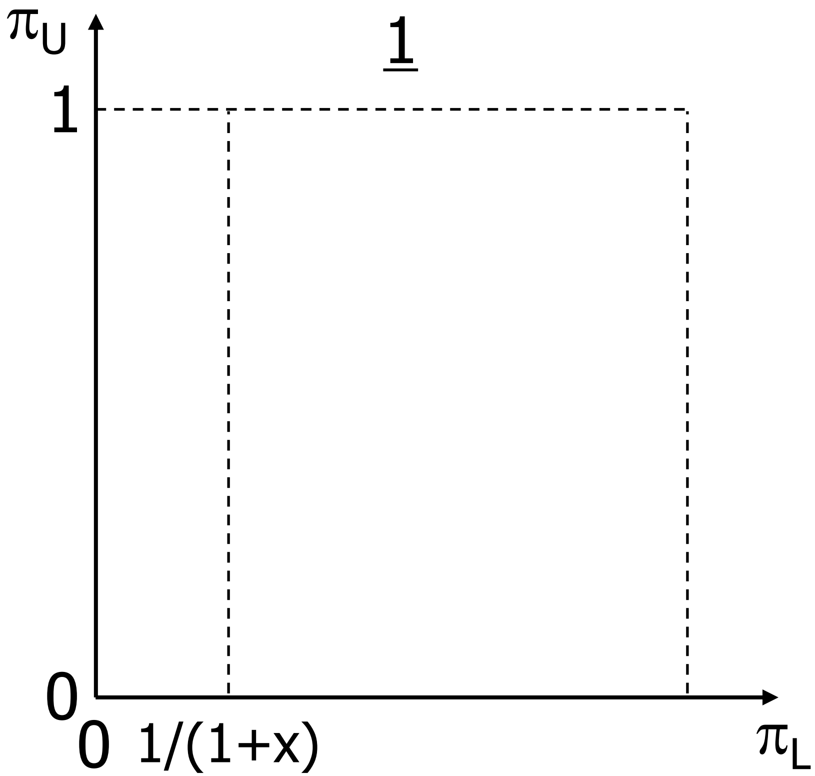


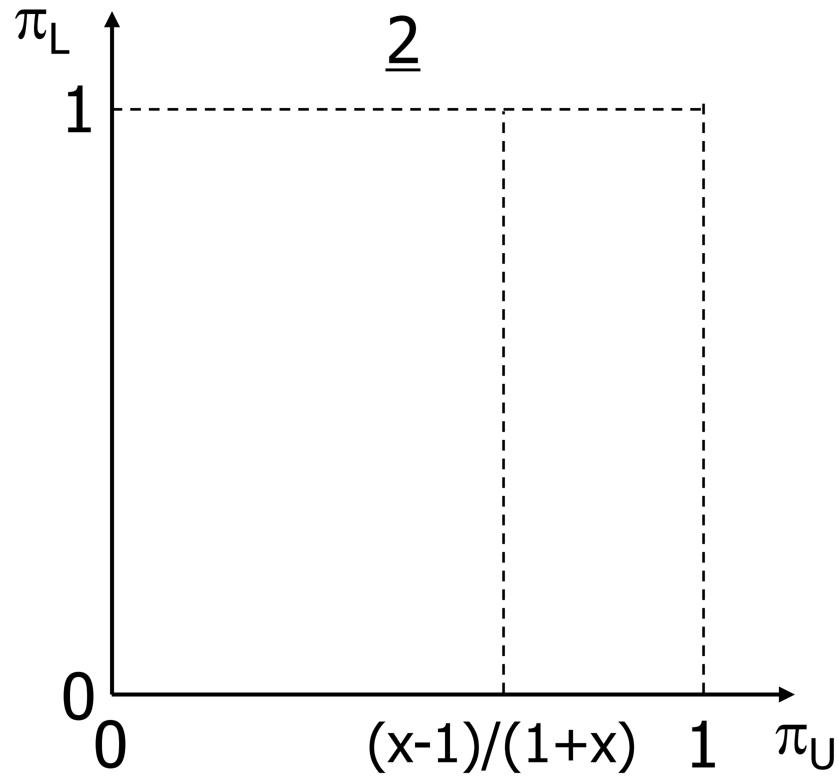


竞争博弈

<u>1</u>: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

<u>2</u>: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

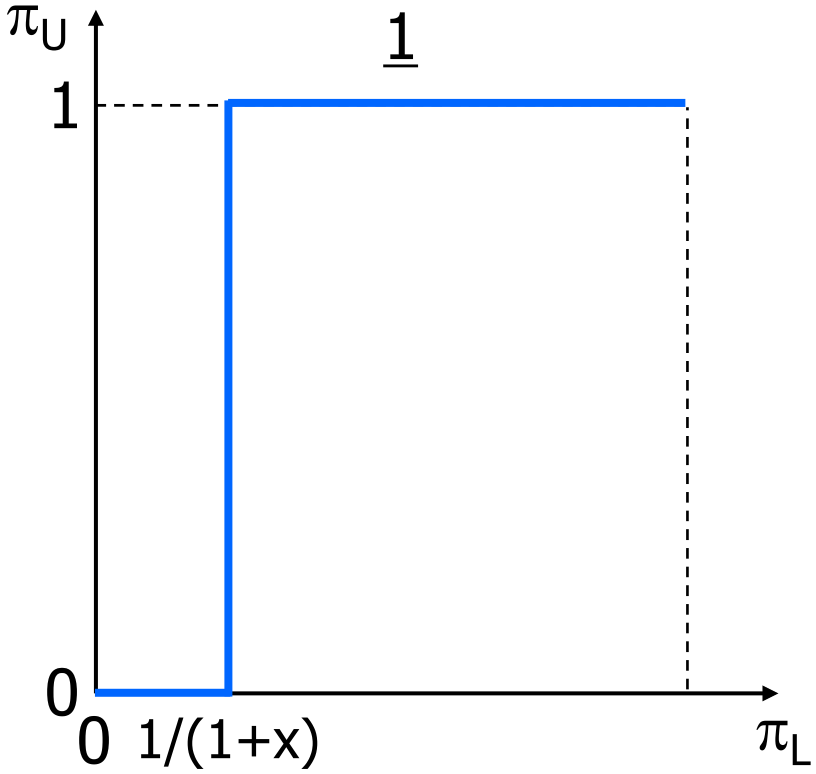


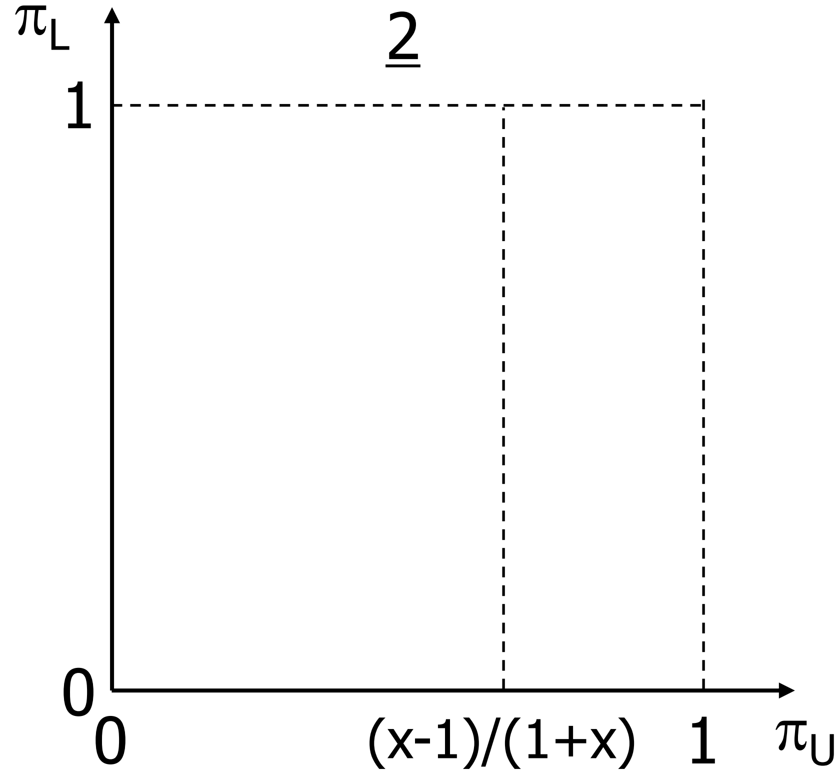


竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

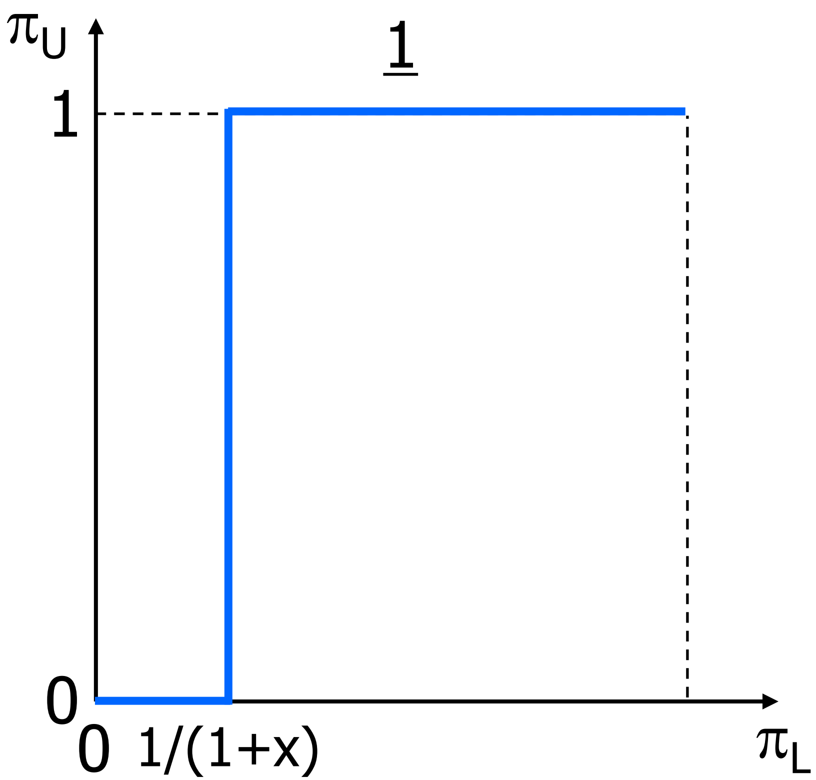


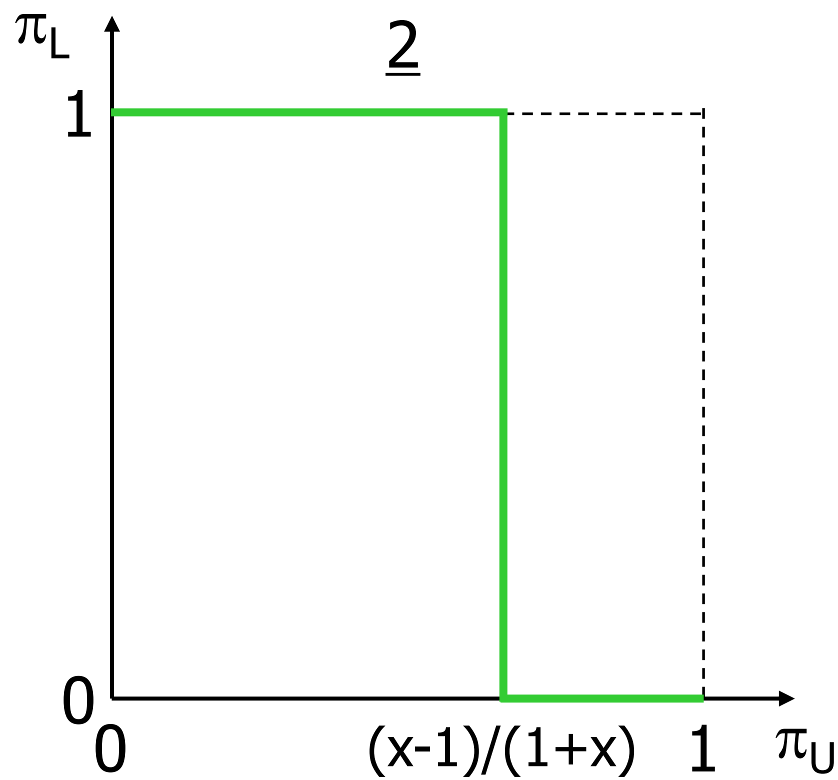


竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

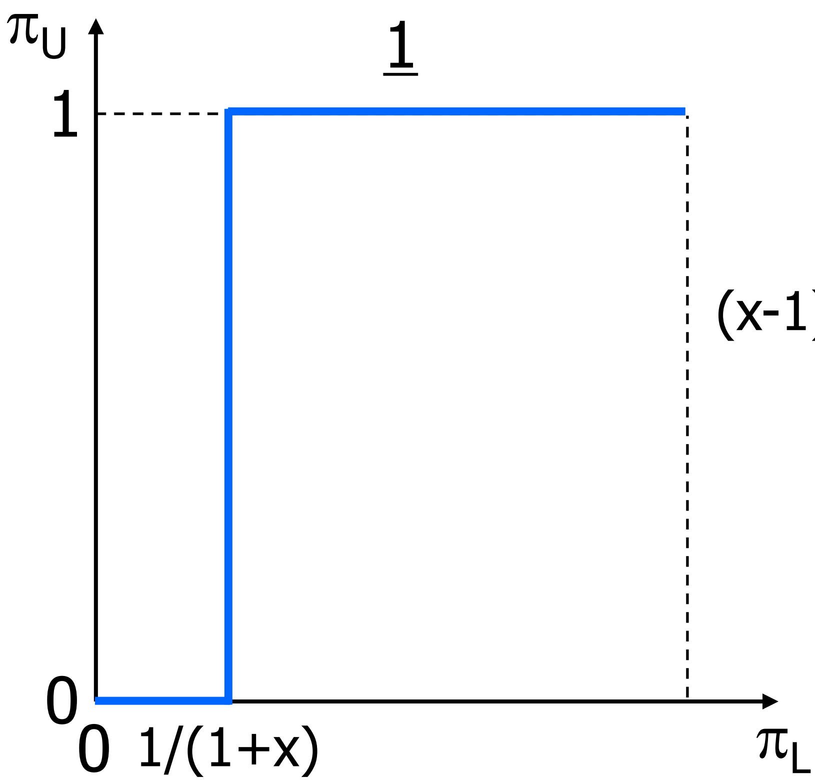


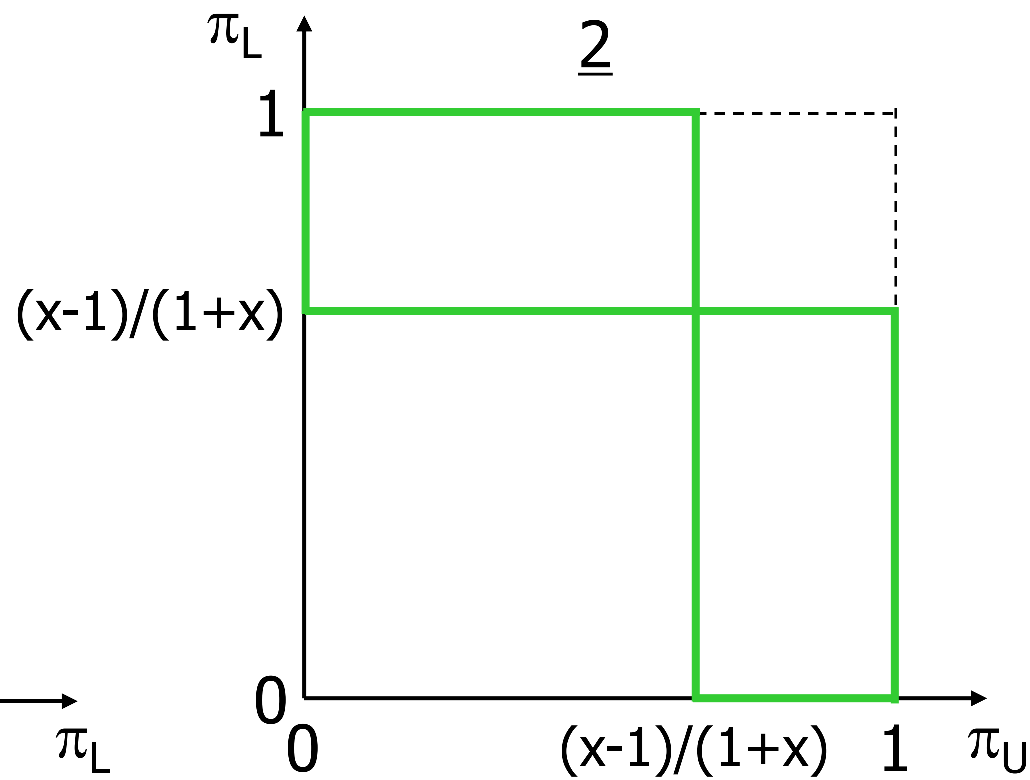


竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

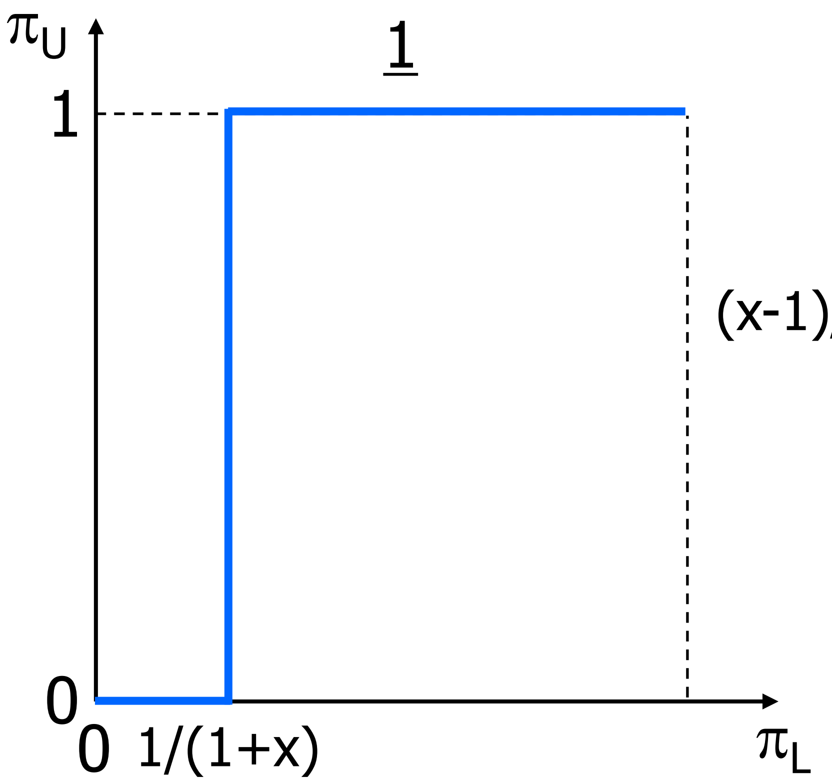


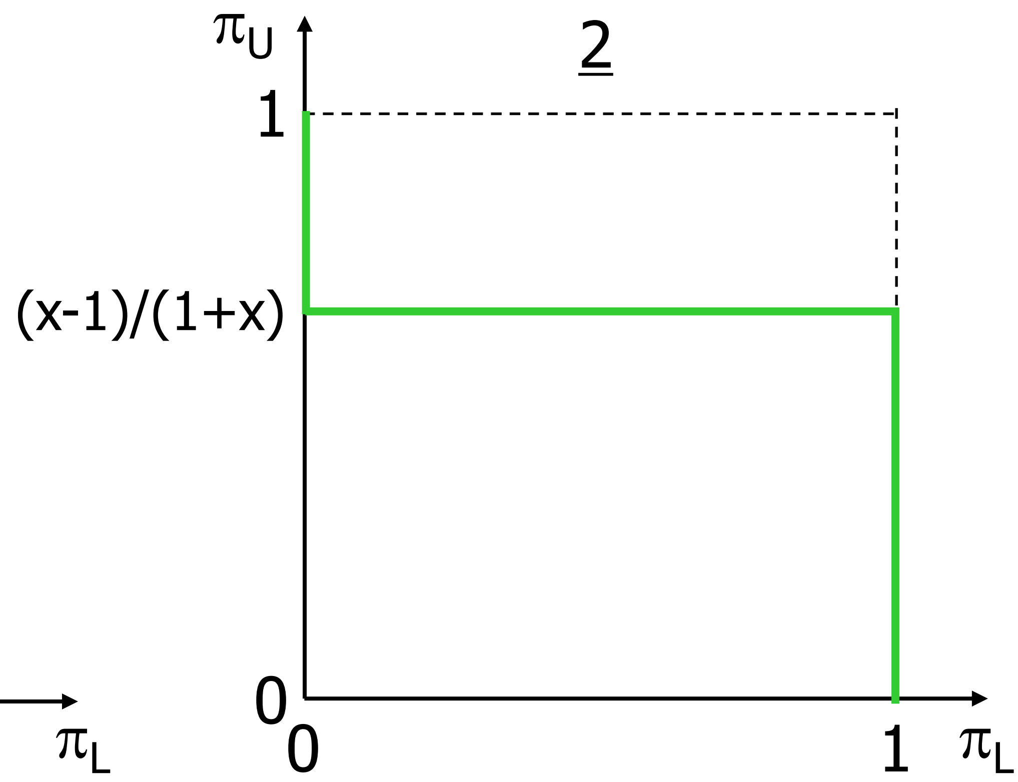


竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

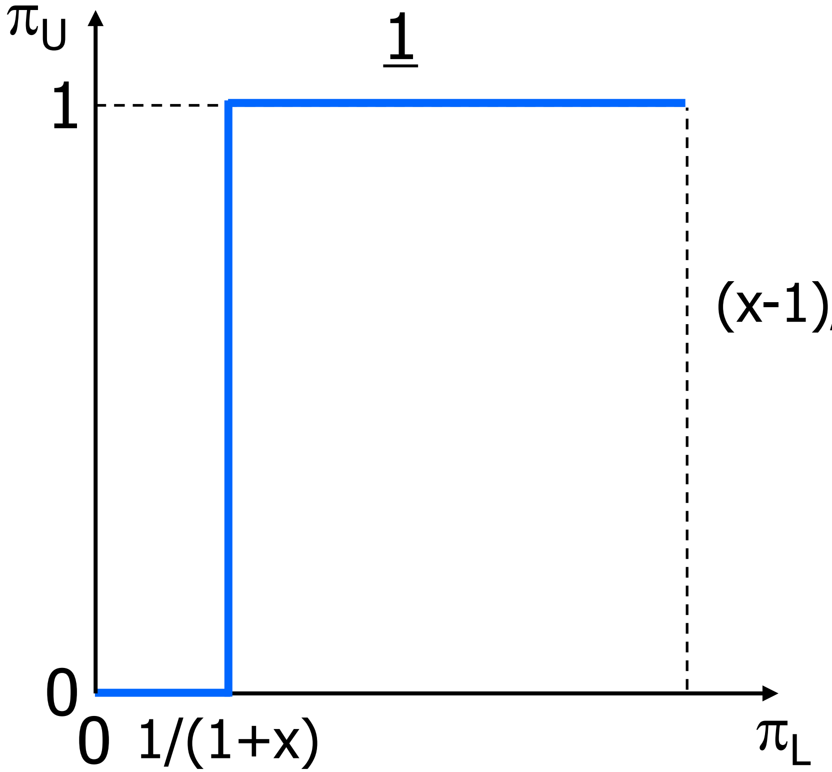


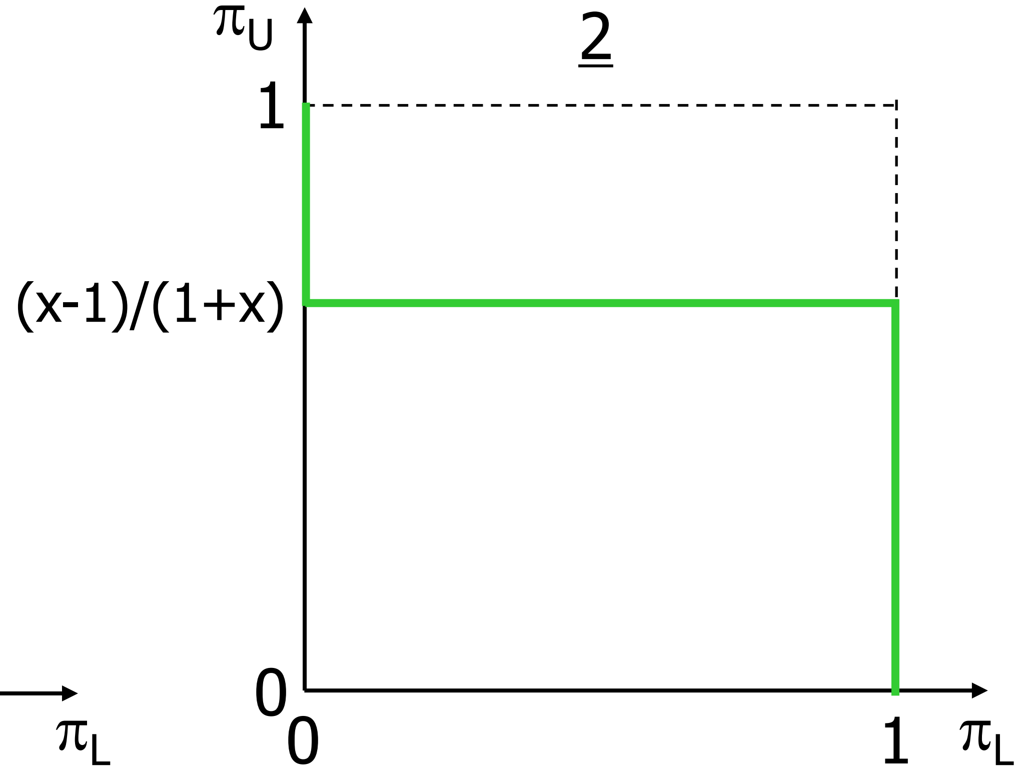


竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.

2: 选择左假如$\pi_U < (x - 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x - 1)/(1 + x)$

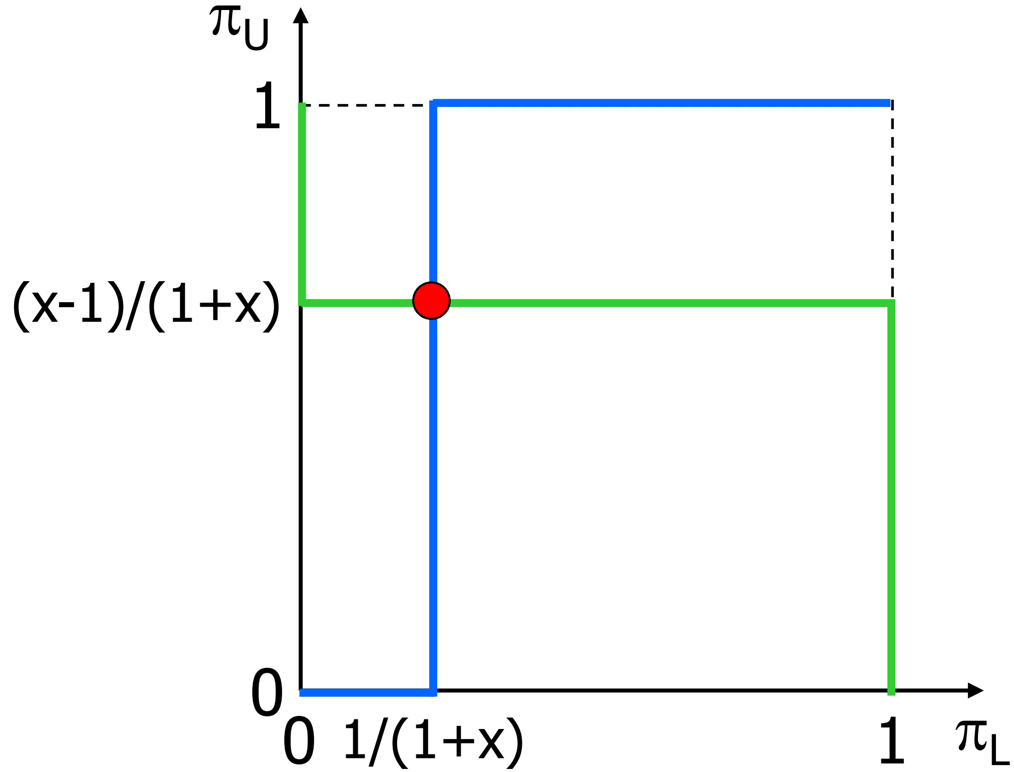




竞争博弈

1: 选择上假如$\pi_L > 1/(1 + x)$; 选择下假如$\pi_L < 1/(1 + x)$.
2: 选择左假如$\pi_U < (x – 1)/(1 + x)$; 选择右假如$\pi_U > (x – 1)/(1 + x)$

当 $x > 1$时，当1选择上概率为 $(x – 1)/(x + 1)$
2 选择左的概率为 $1/(1 + x)$时存在唯一纳什均衡。



博弈的几种重要类型

- 合作博弈
- 竞争博弈
- 共存博弈
- 承诺博弈
- 讨价还价博弈

共存博弈

- 同时做出决策的博弈，该博弈用来对不同种类的人之间相互反应的行为来进行建模。
- 一个重要的例子为鹰派-鸽派博弈。

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

- 鹰派意味着具有进攻性
- 鸽派意味着不具有进攻性
- 两只熊来到了一个捕鱼产地。每只熊都可以与对方搏斗来将其驱赶开从而能得到更多的鱼，但其在搏斗中要受伤。或者它容忍另一只熊的存在，分享捕鱼，避免受伤。

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2	
		鹰派	鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
	鸽派	0,8	4,4

是否存在纯策略纳什均衡？

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2 鹰派	熊 2 鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
熊 1	鸽派	0,8	4,4

是否存在纯策略纳什均衡？
存在 (鹰派, 鸽派) 和 (鸽派, 鹰派)。
注意到完全的和平共存不是纳什均衡。

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2 鹰派	熊 2 鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
熊 1	鸽派	0,8	4,4

是否存在一个混合策略纳什均衡？

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2 鹰派	熊 2 鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
熊 1	鸽派	0,8	4,4

1 选择鹰派的概率为π^1_H
2 选择鹰派的概率为π^2_H
参与者的最佳反应函数为什么？

是否存在一个混合策略纳什均衡？

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2 鹰派	熊 2 鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
	鸽派	0,8	4,4

1 选择鹰派的概率为π^1_H
2 选择鹰派的概率为π^2_H
参与者的最佳反应函数为什么？

$EV^1(H) = -5\pi^2_H + 8(1 - \pi^2_H) = 8 - 13\pi^2_H.$
$EV^1(D) = 4 - 4\pi^2_H.$

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2	
		鹰派	鸽派
熊 1	鹰派	**-5,-5**	**8,0**
	鸽派	**0,8**	**4,4**

1 选择鹰派的概率为π^1_H
2 选择鹰派的概率为π^2_H
参与者的最佳反应函数
为什么？

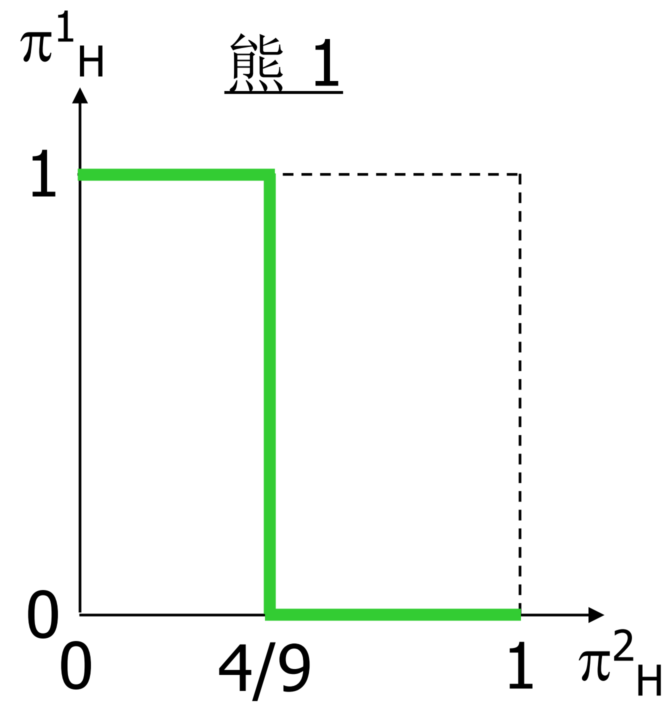
$EV^1(H) = -5\pi^2_H + 8(1 - \pi^2_H) = 8 - 13\pi^2_H.$
$EV^1(D) = 4 - 4\pi^2_H.$
$8 - 13\pi^2_H \gtreqless 4 - 4\pi^2_H$ as $\pi^2_H \lesseqgtr 4/9.$

共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2	
		鹰派	鸽派
熊 1	鹰派	**-5,-5**	**8,0**
	鸽派	**0,8**	**4,4**

1 选择鹰派的概率为π^1_H

2 选择鹰派的概率为π^2_H

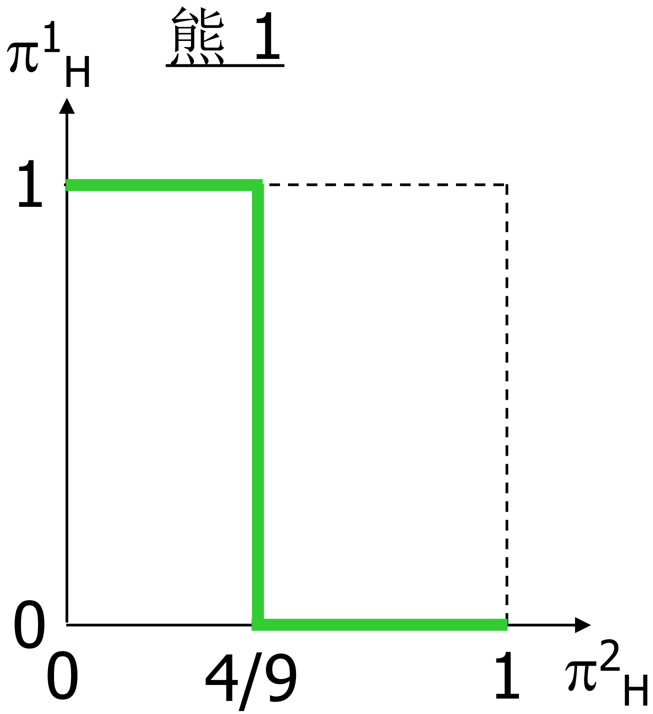


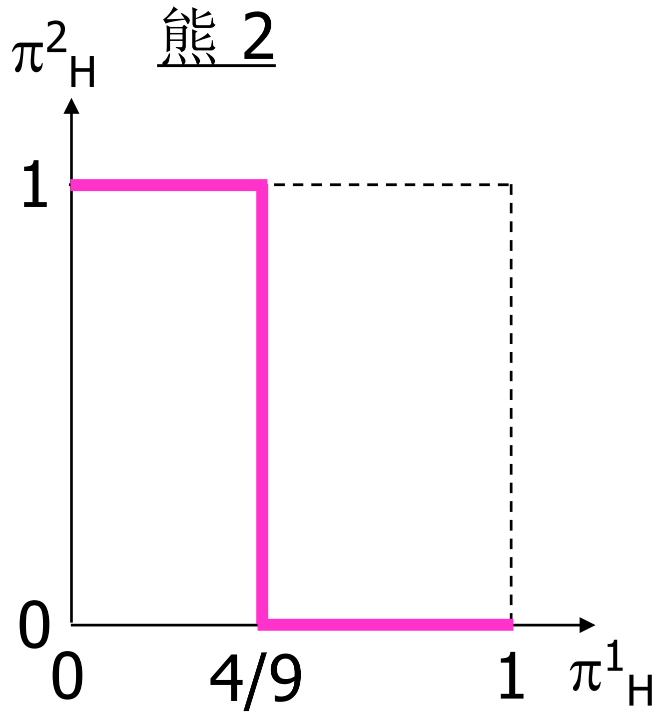
$EV^1(H) = -5\pi^2_H + 8(1 - \pi^2_H) = 8 - 13\pi^2_H.$

$EV^1(D) = 4 - 4\pi^2_H.$

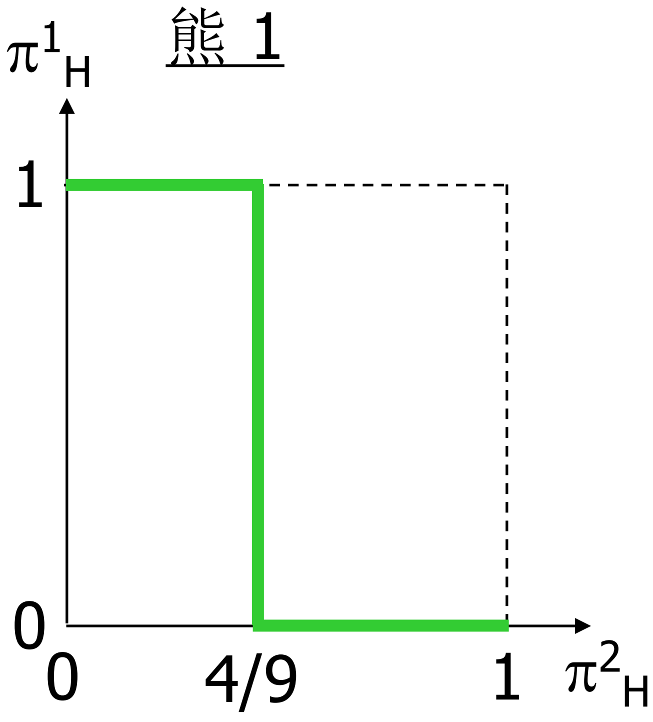
$8 - 13\pi^2_H \gtreqless 4 - 4\pi^2_H$ as $\pi^2_H \lesseqgtr 4/9.$

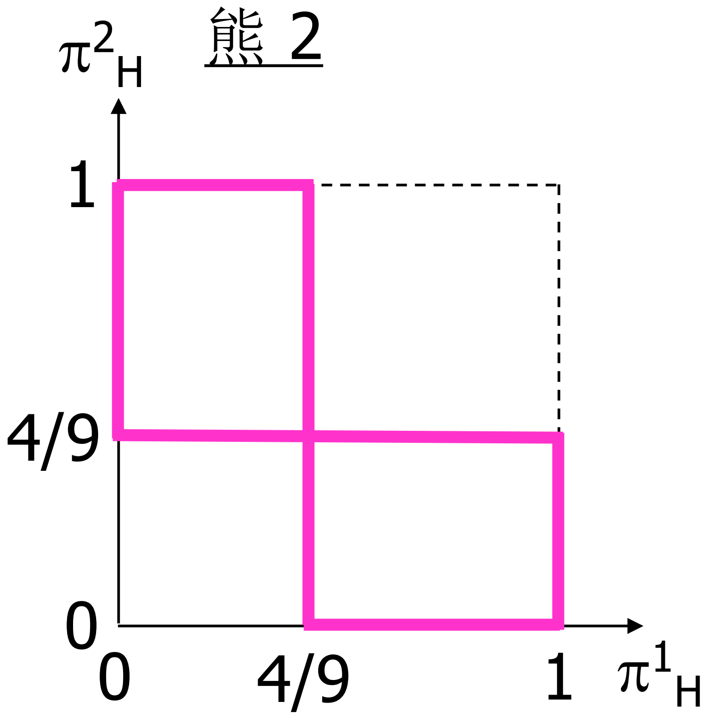
共存博弈：鹰派-鸽派博弈



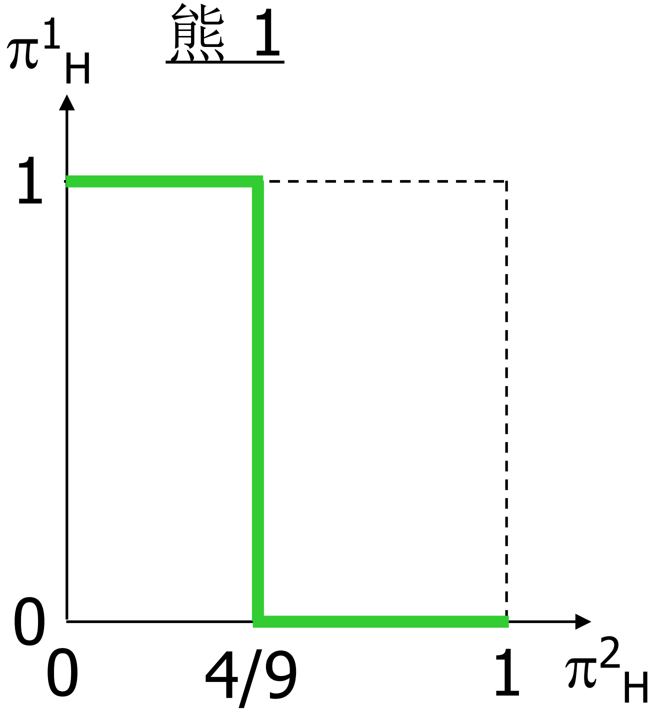


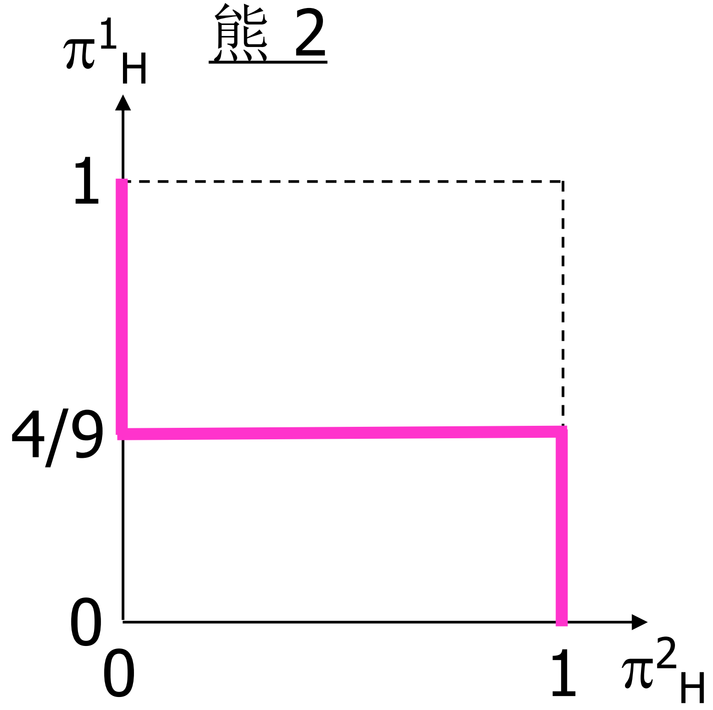
共存博弈：鹰派-鸽派博弈





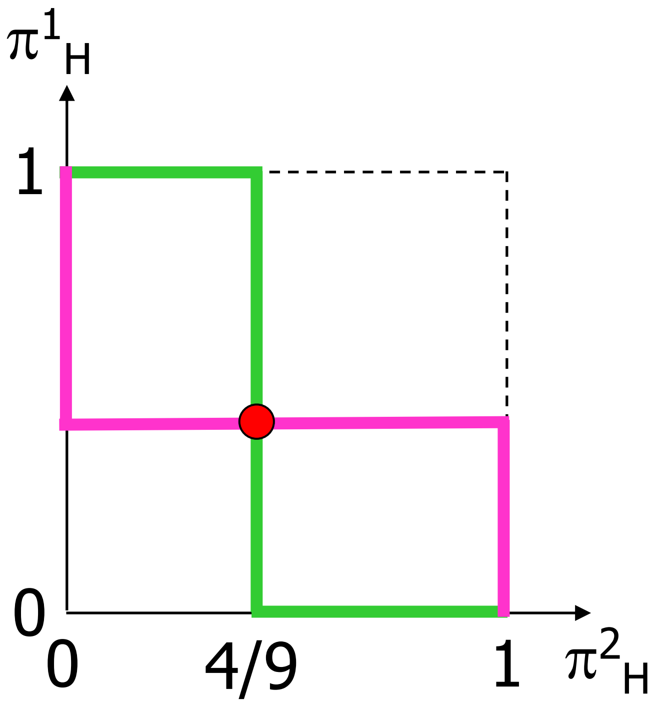
共存博弈：鹰派-鸽派博弈





共存博弈：鹰派-鸽派博弈

假如每只熊选择鹰派的概率为4/9，
该博弈存在一个混合策略纳什均衡。



共存博弈：鹰派-鸽派博弈

		熊 2 鹰派	熊 2 鸽派
熊 1	鹰派	-5,-5	8,0
熊 1	鸽派	0,8	4,4

对于每只熊，混合策略纳什均衡的预期收益为：

$(-5)\times {}^{16}\!/_{81}+8\times {}^{20}\!/_{81}+4\times {}^{25}\!/_{81}={}^{181}\!/_{81}$ ，该值介于-5和+4之间。

这是否为纳什均衡焦点？

博弈的几种重要类型

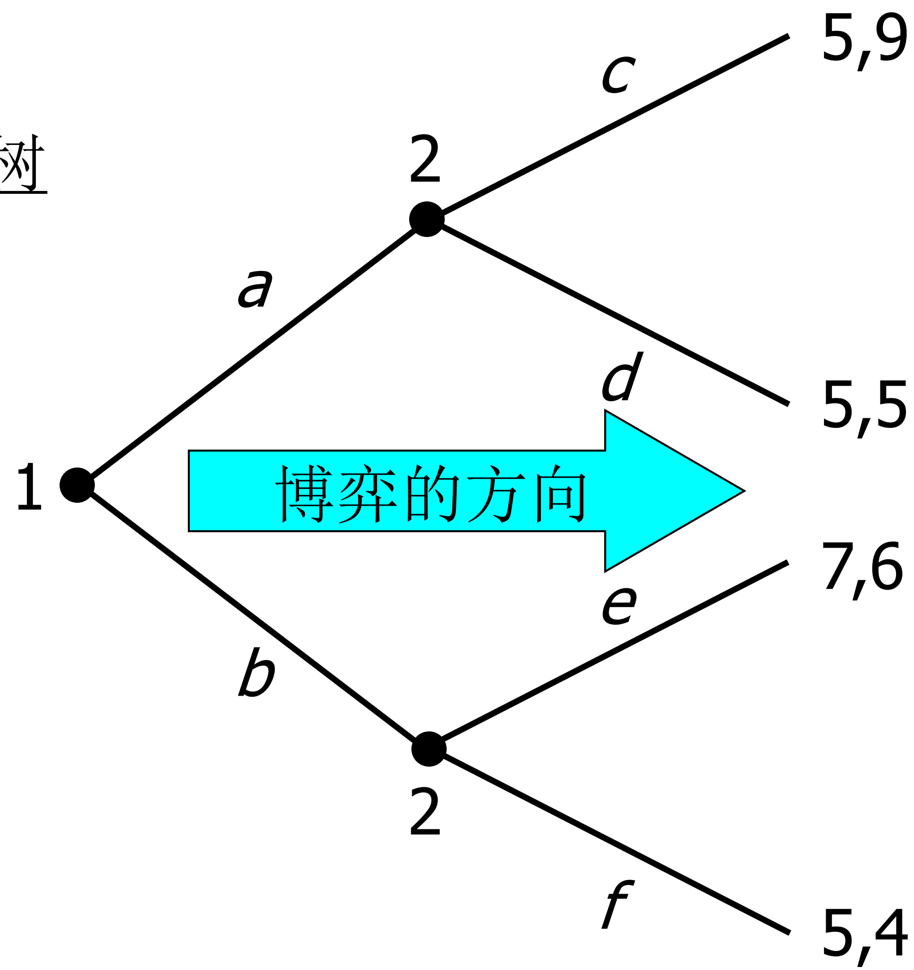
- 合作博弈
- 竞争博弈
- 共存博弈
- **承诺博弈**
- 讨价还价博弈

承诺博弈

- 该博弈为序贯博弈
  - 一个参与者在另一个参与者之前选择决策。
  - 第一个参与者的决策不可撤销且能被第二个参与者观察到。
  - 第一个参与者知道他的决策将被第二个参与者知道。

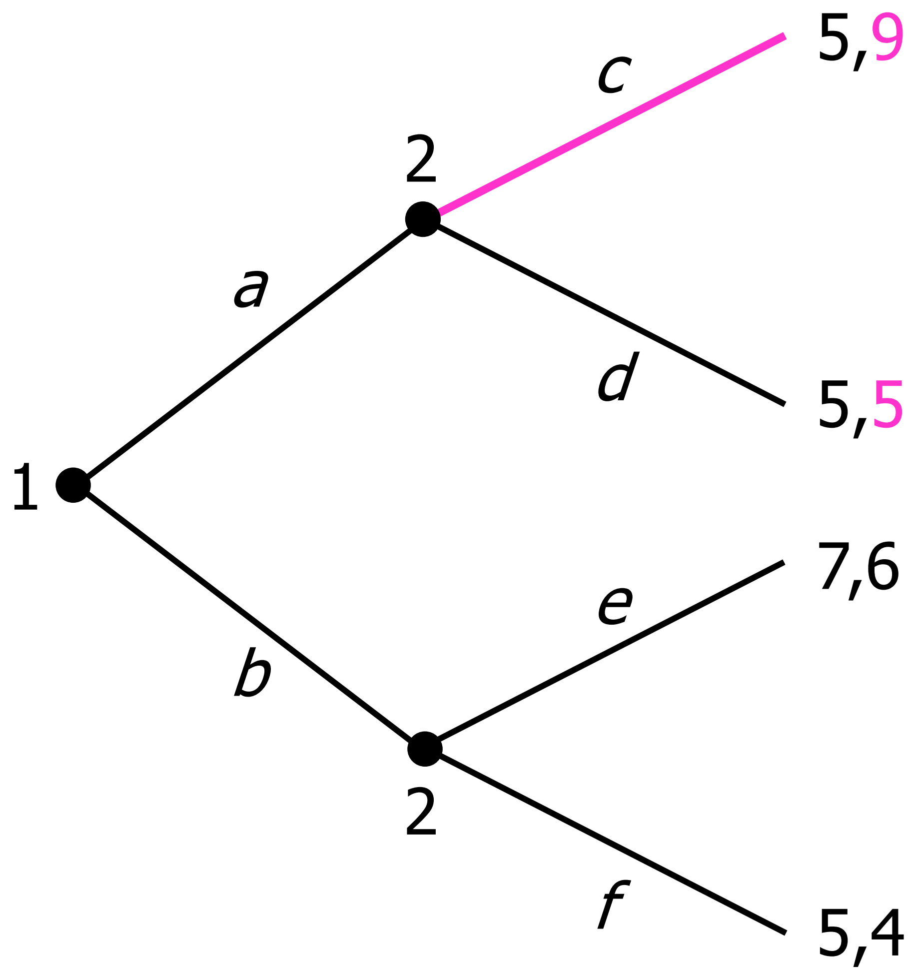
承诺博弈

<u>博弈树</u>



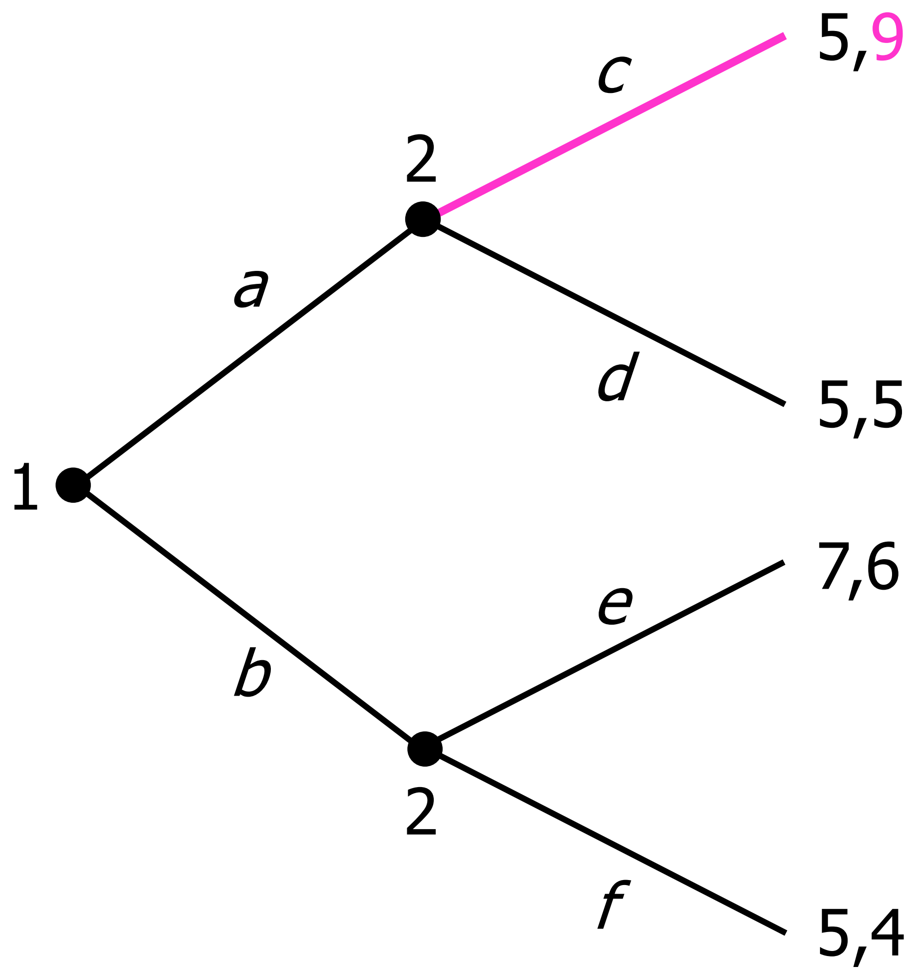
参与者1有两种决策 *a* 和 *b*。
参与者*2*在*a*之后有两种决策*c* 和 *d*
在b之后有两种决策 *e* 和 *f*。
参与者1在参与者2选择决策之前作出决策。

承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

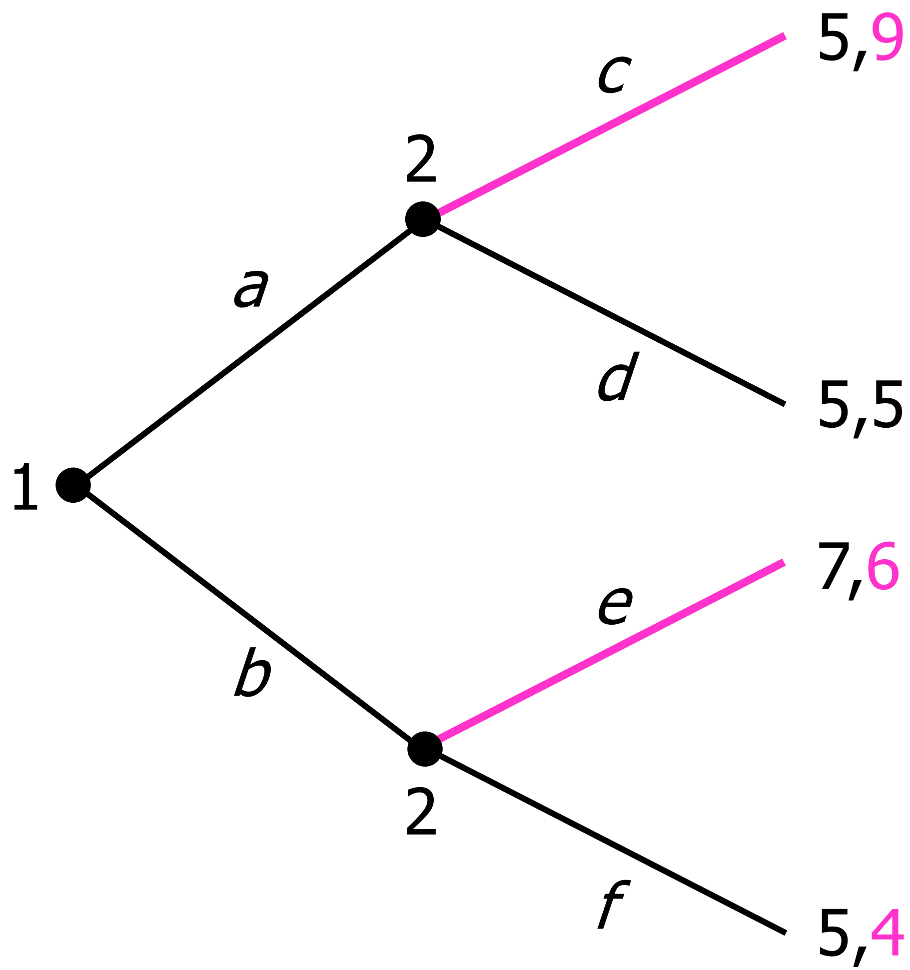
承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

可信

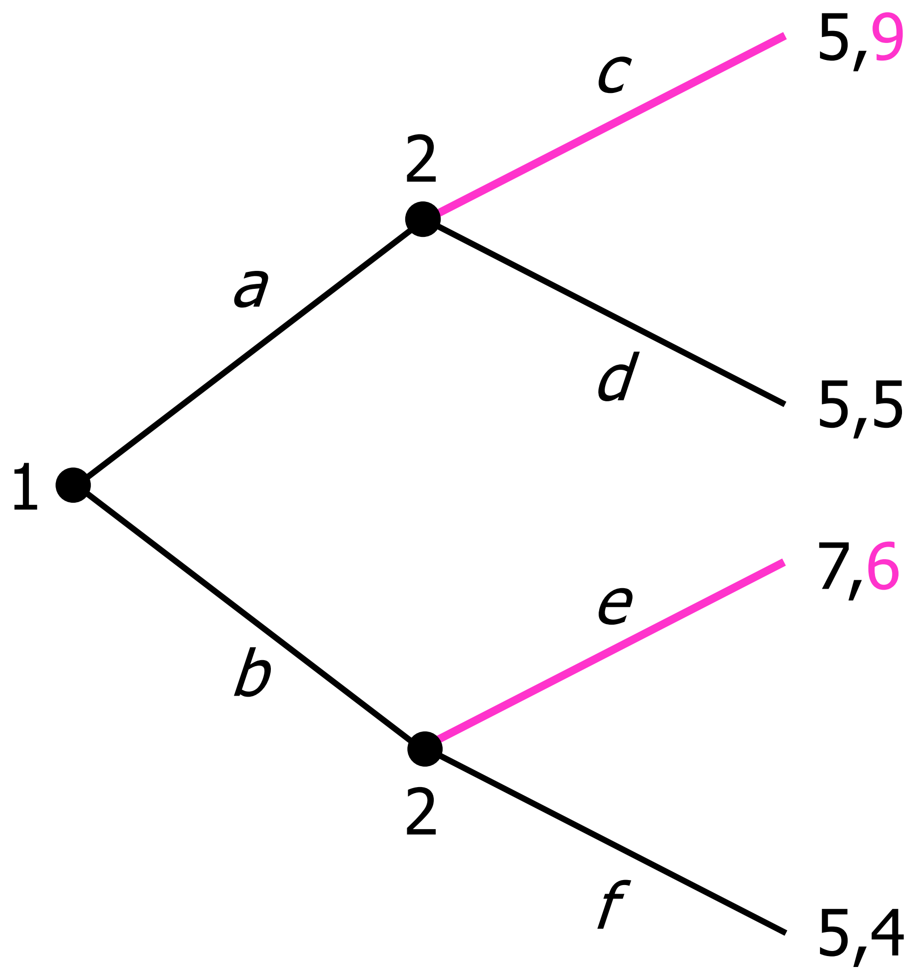
承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？
可信

参与者2声称假如参与者1选择策略*b*，他将选择策略*e*，这样的承诺是否可信？

承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

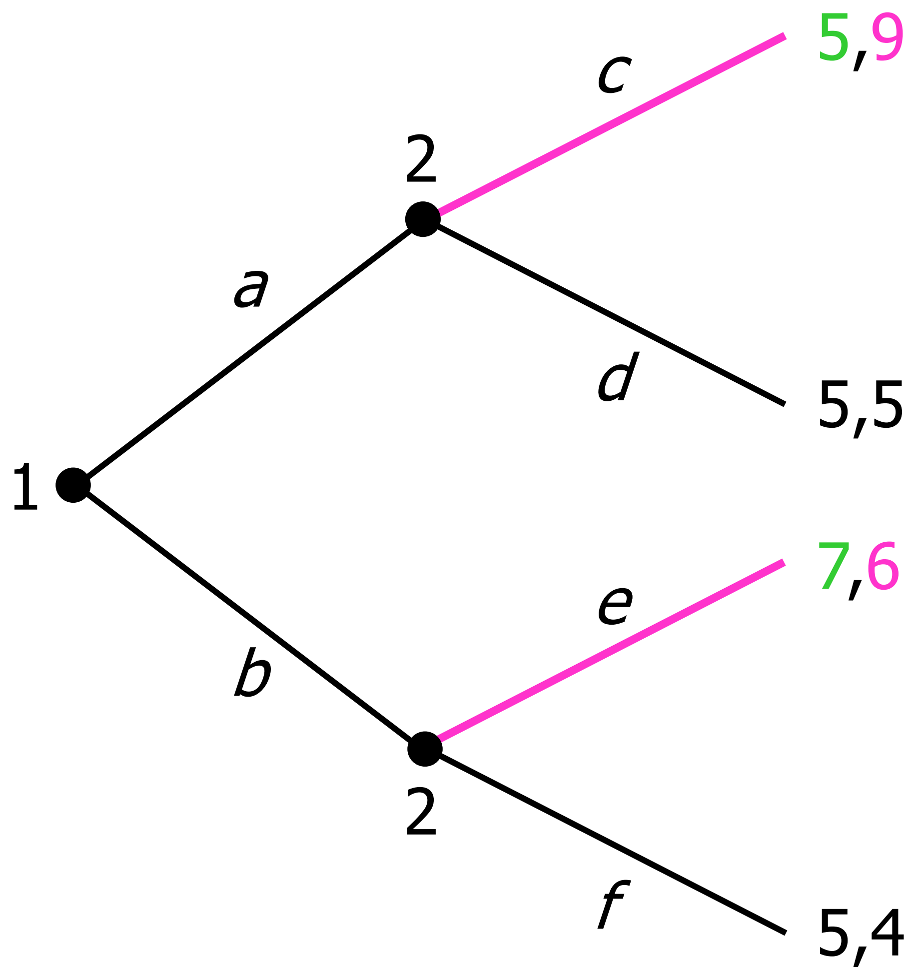
可信

参与者2声称假如参与者1选择策略*b*，他将选择策略*e*，这样的承诺是否可信？

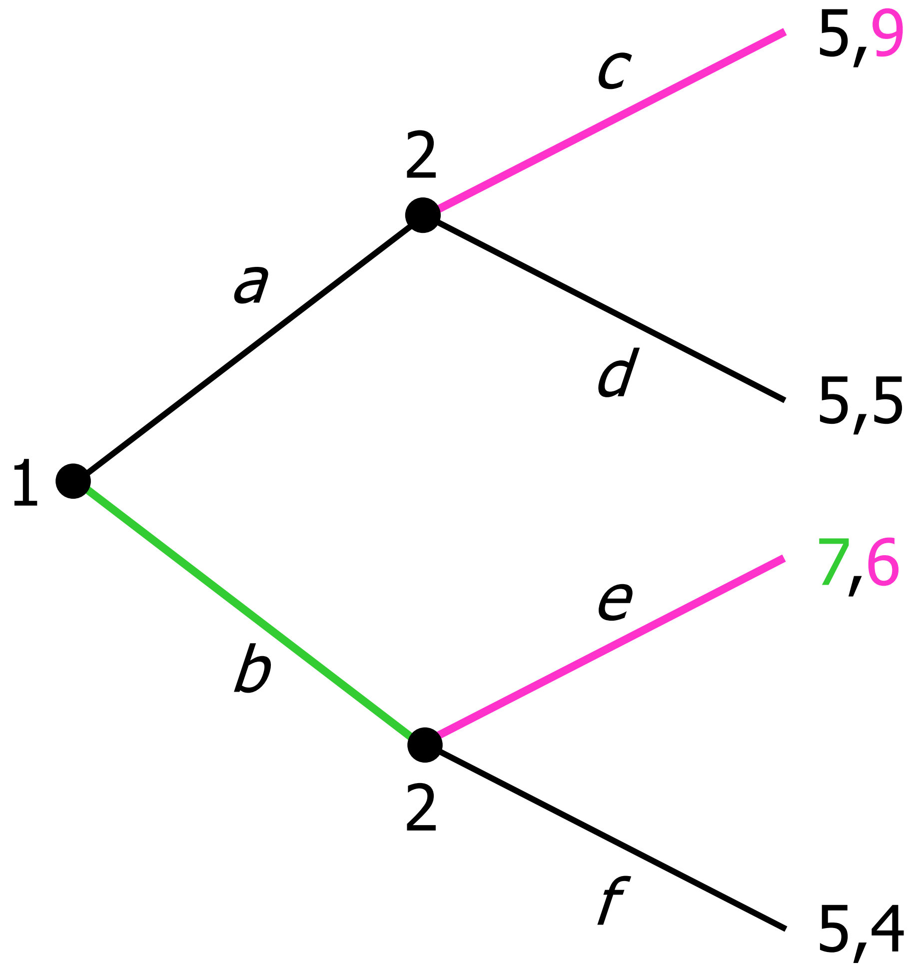
可信

承诺博弈

参与者1会如何选择决策

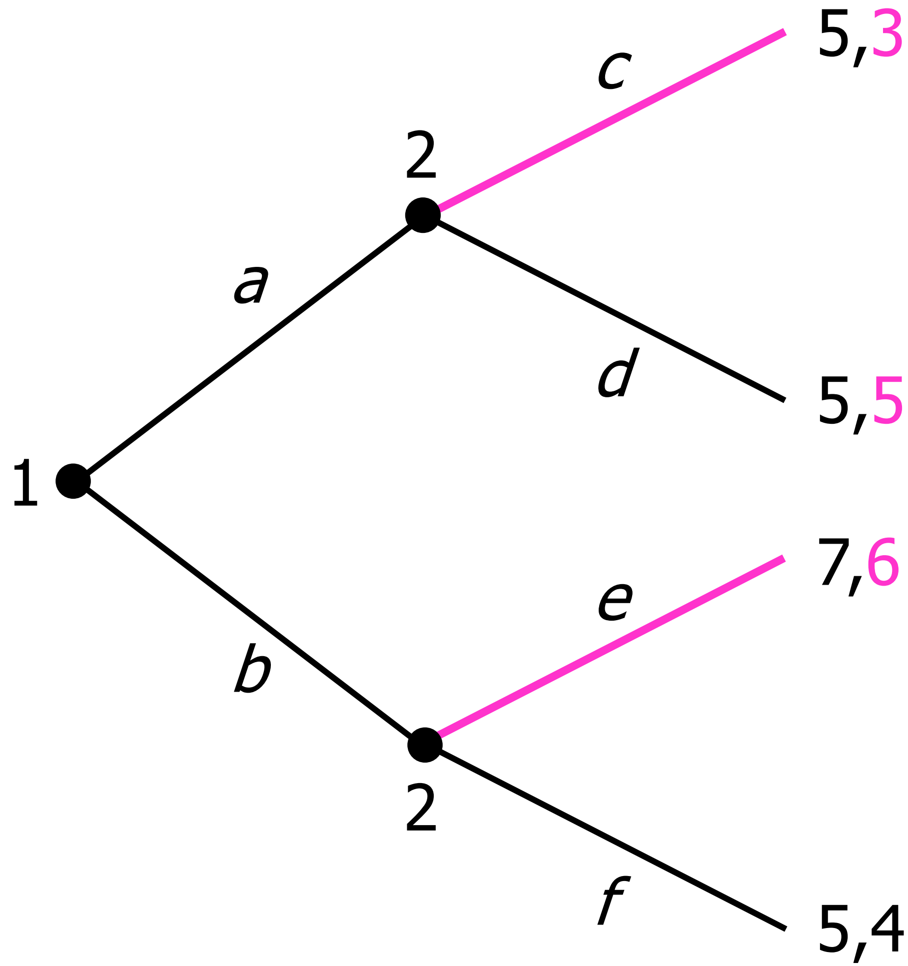


承诺博弈



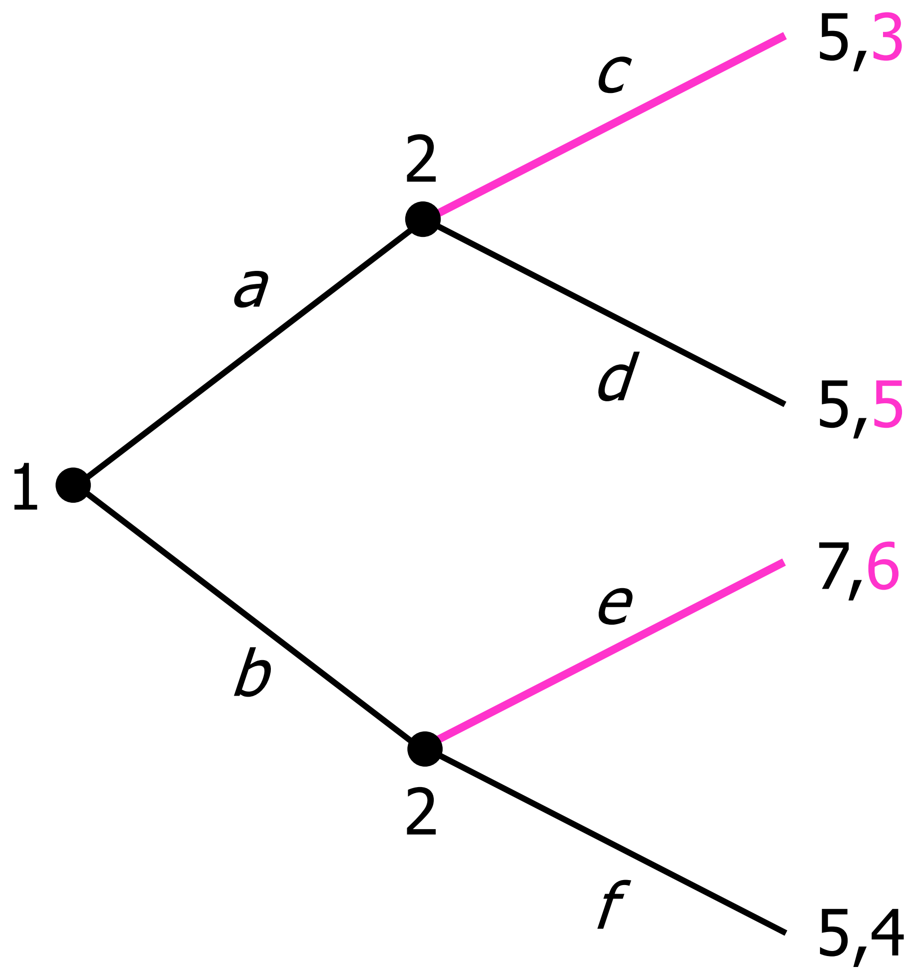
参与者1应该选择决策 *b*。

承诺博弈



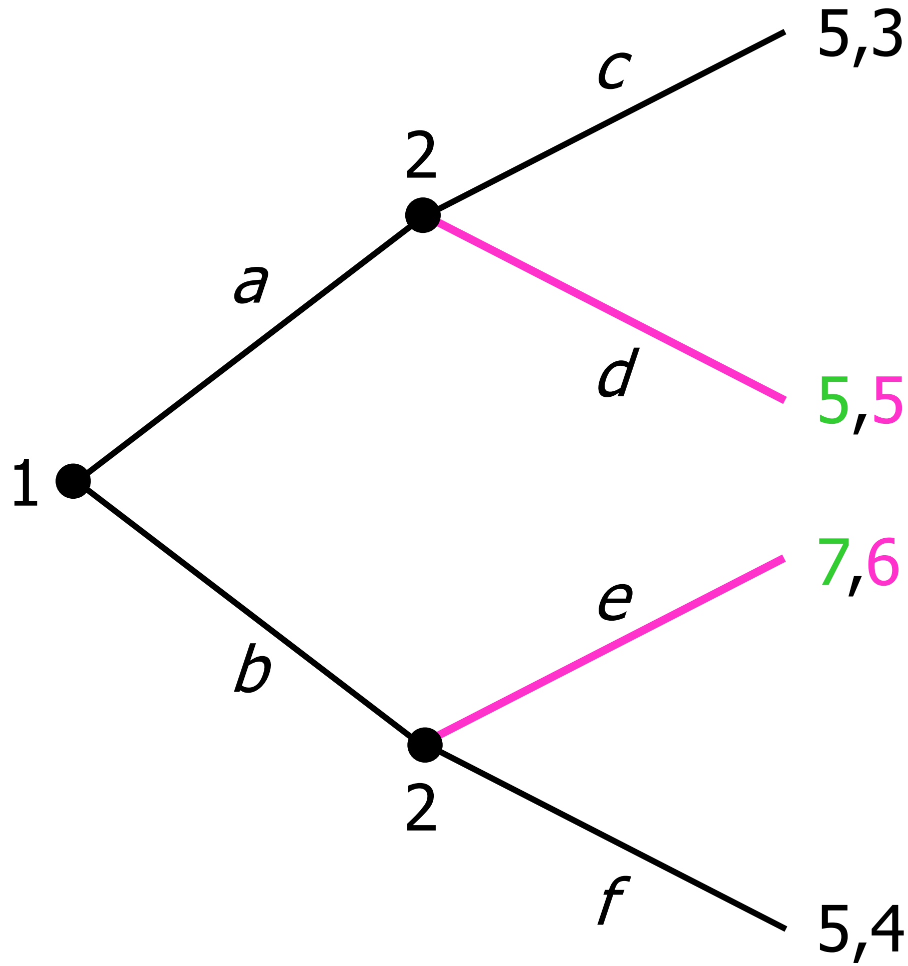
改变该博弈

承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

承诺博弈

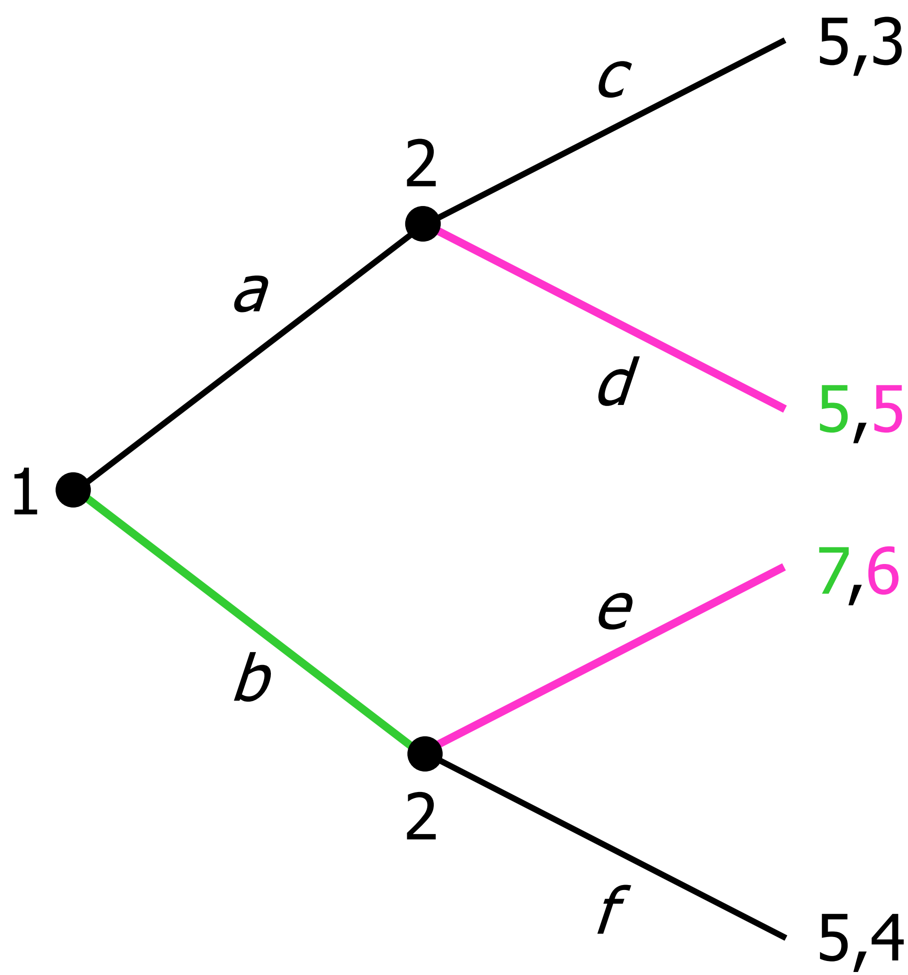


参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

不可信。假如参与者1选择决策*a* 参与者2的最佳决策为*d*。

参与者1该如何做？

承诺博弈



参与者2声称假如参与者1选择策略*a*，他将选择策略*c*，这样的承诺是否可信？

不可信。假如参与者1选

决策*a* 参与者2的最佳决

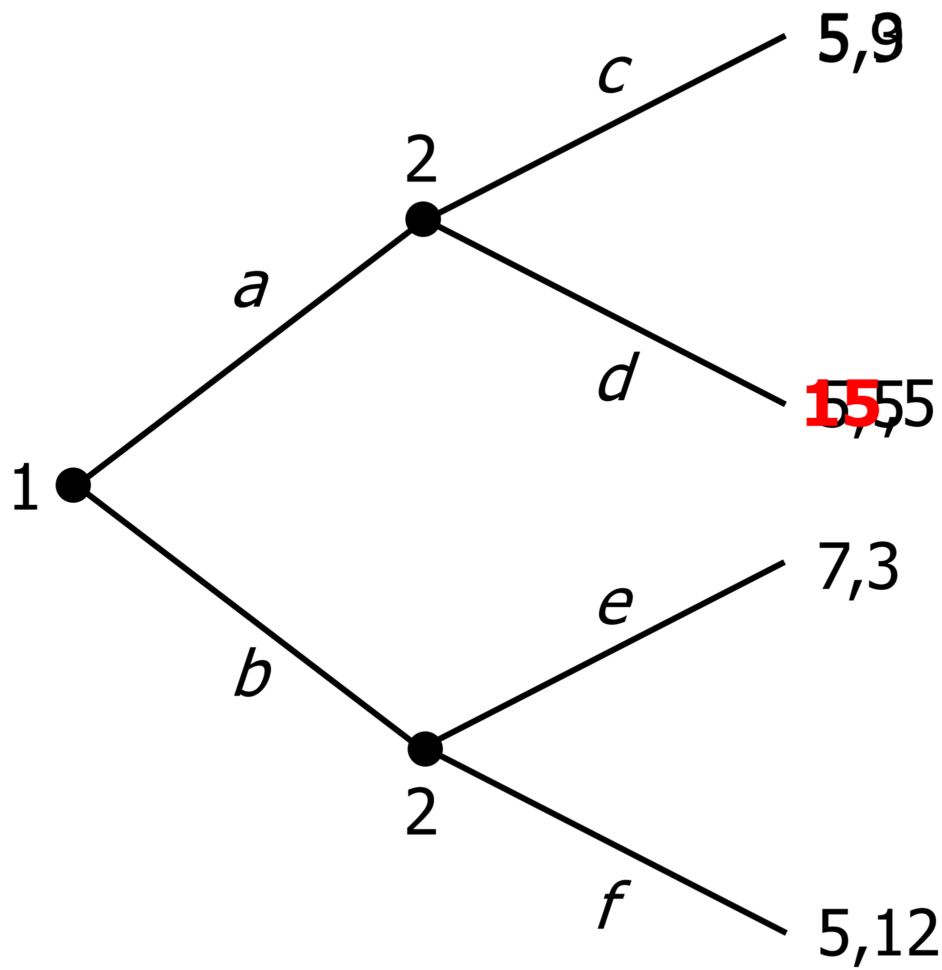
为*d*。

参与者1该如何做？

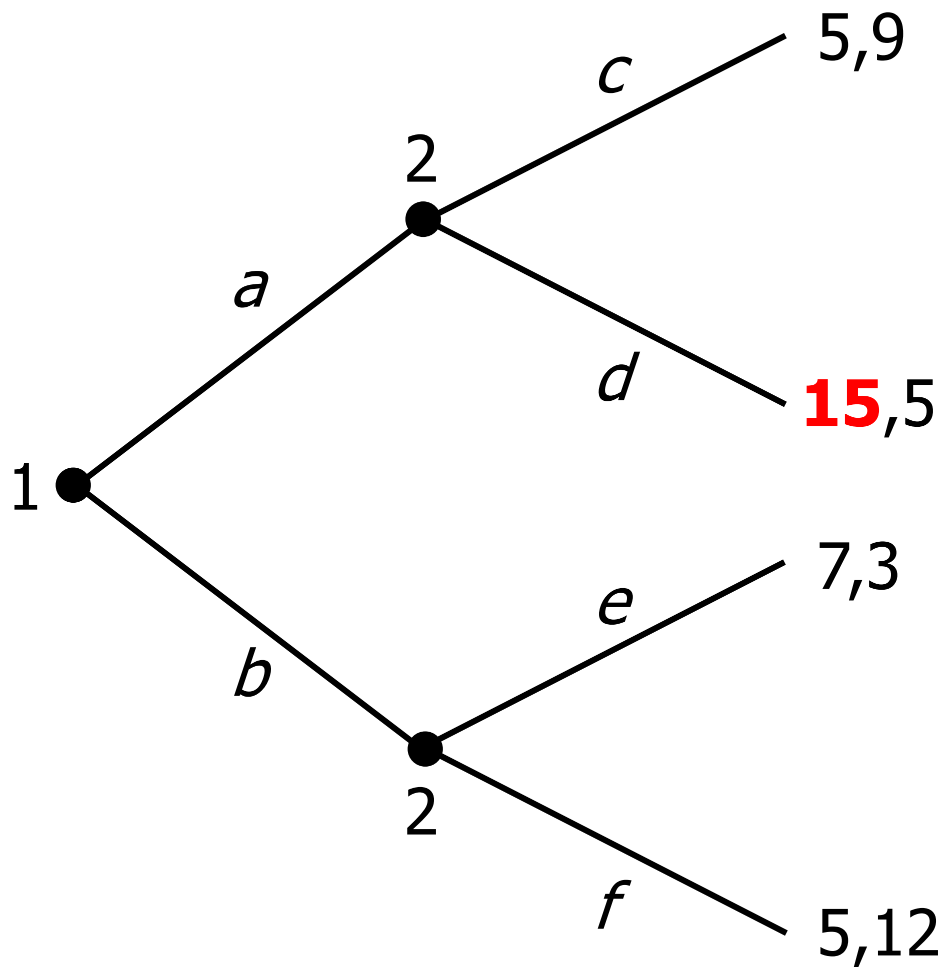
还是选择决策 *b*。

承诺博弈

改变该博弈

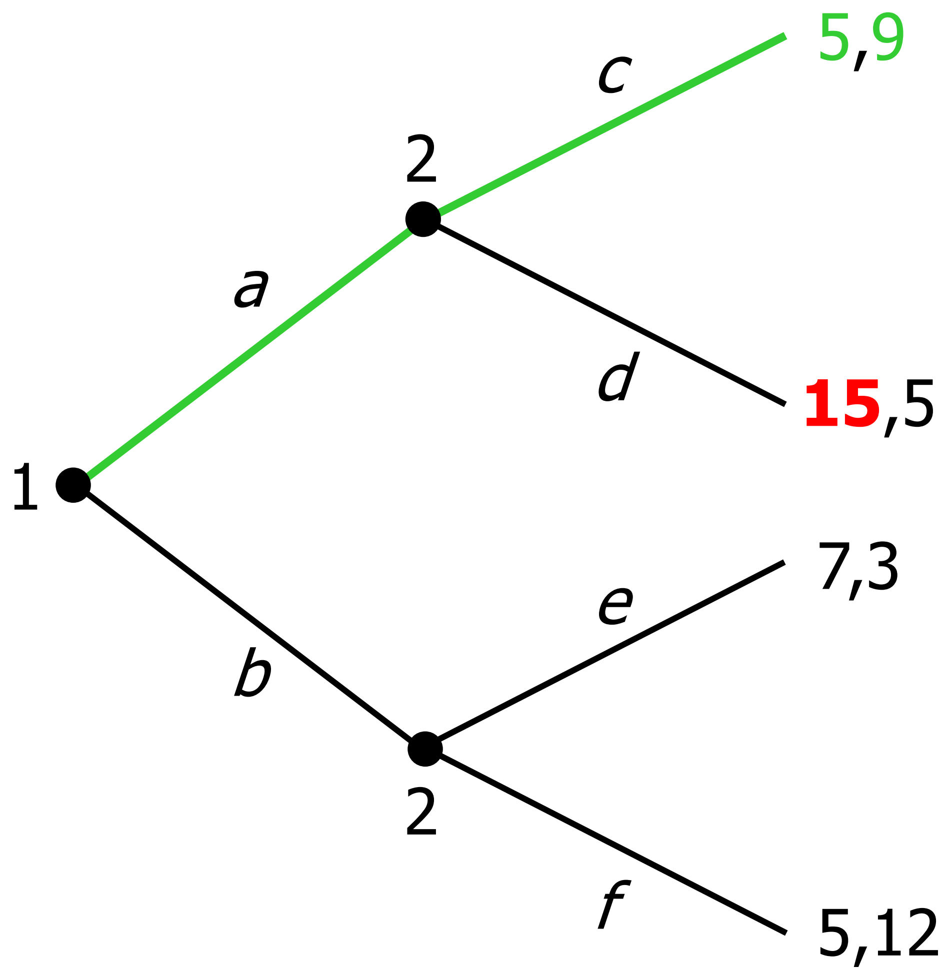


承诺博弈



参与者1能否得到15的收益？

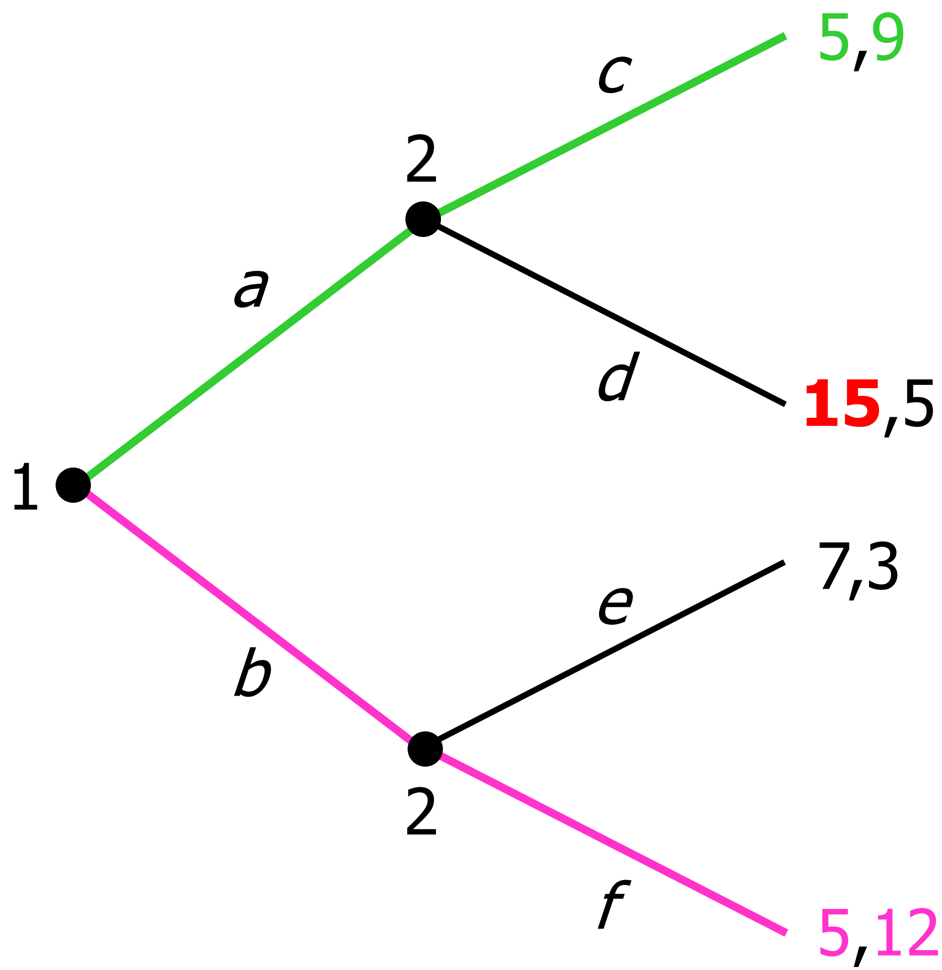
承诺博弈



参与者1能否得到15的收益？

假如参与者1选择*a*
参与者2会选择*c*，参与
得到的收益仅为5。

承诺博弈

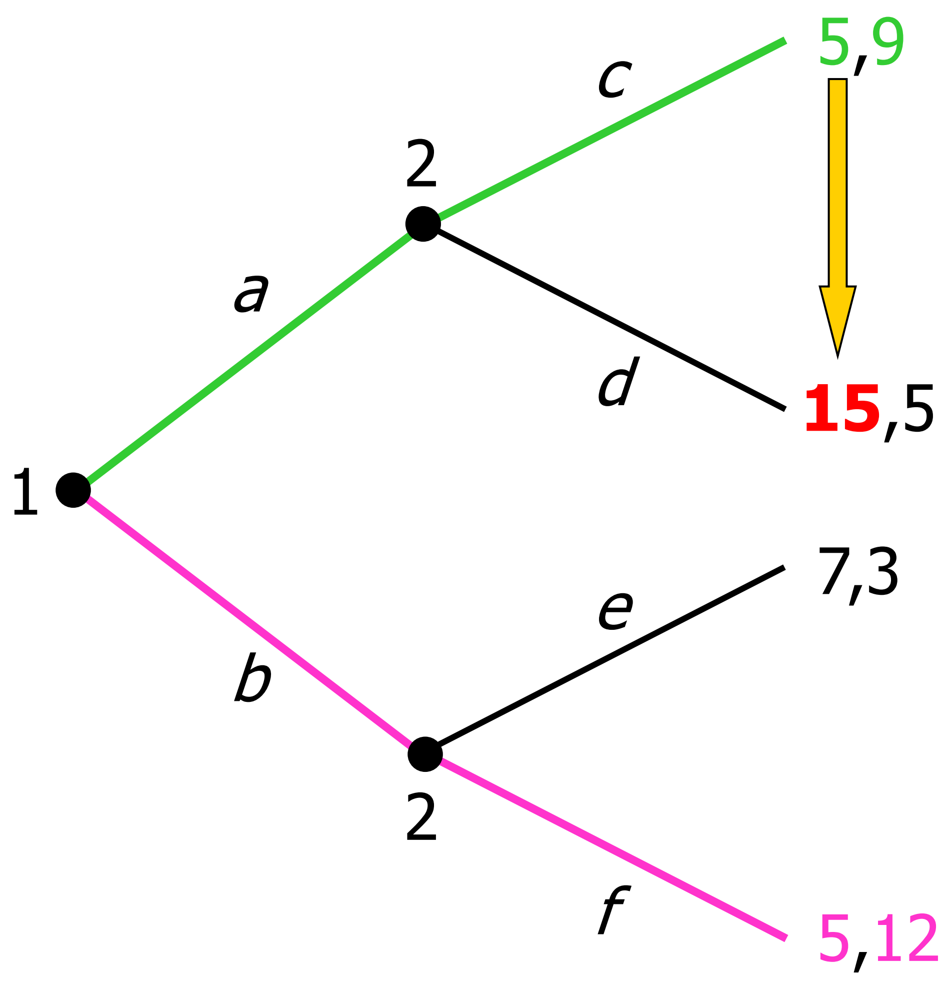


参与者1能否得到15的收益？

假如参与者1选择*a*参与者2会选择*c*，参与者得到的收益仅为5 。

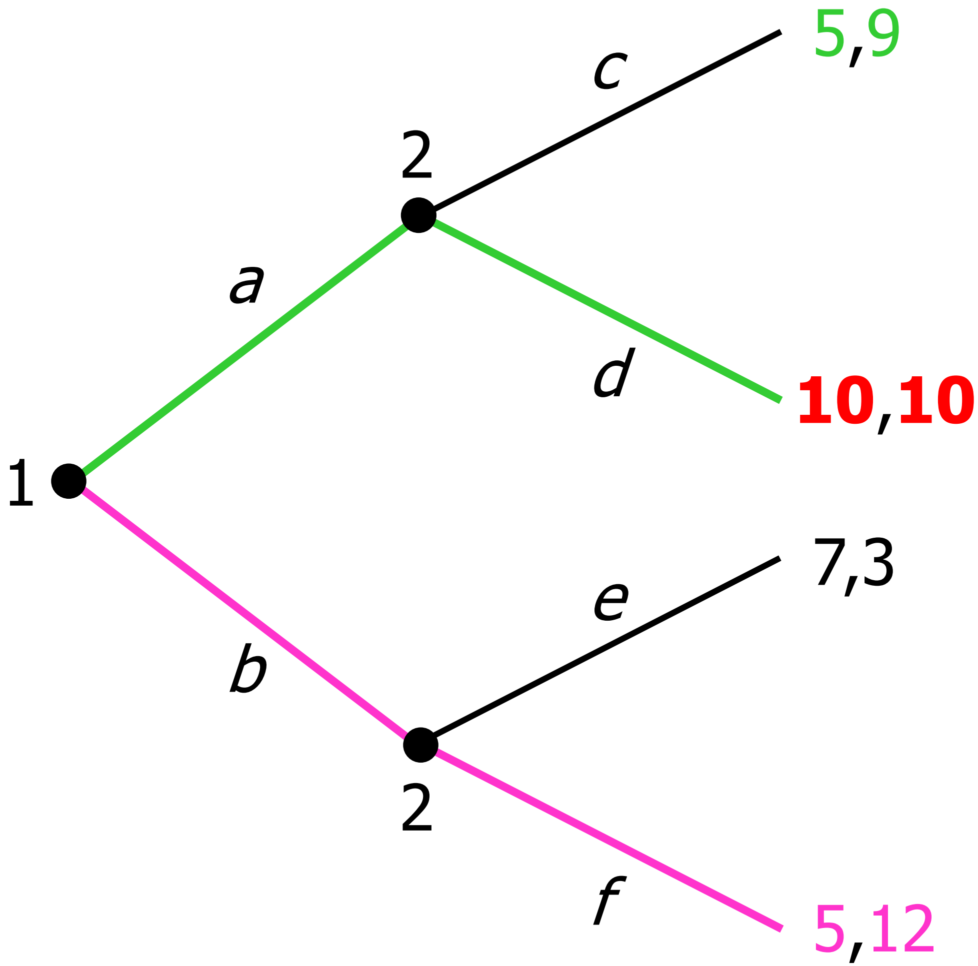
假如参与者1选择*b*参与者2会选择*f* 参与者得到的收益仅为5。

承诺博弈



假如参与者1能够改变收益以致参与者2在*a*之
选择*d*变得可信，那么
参与者1的收益将从5上
至15，新增收益10.

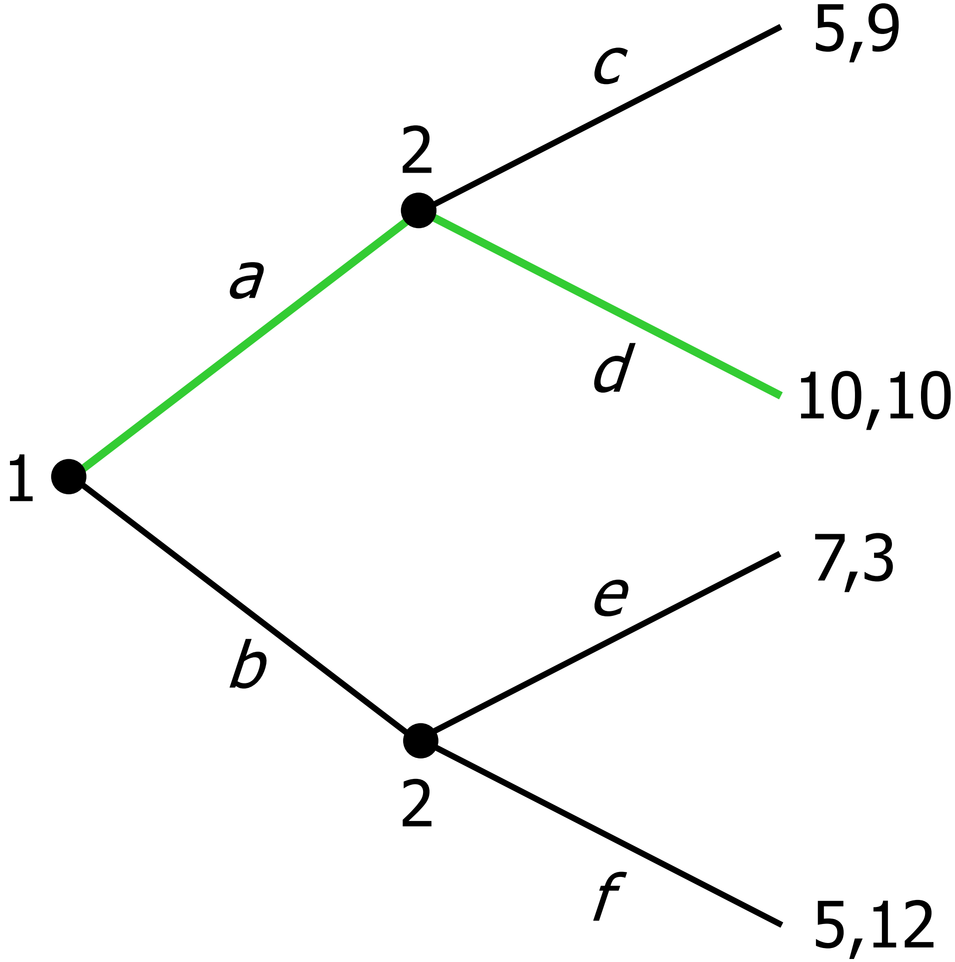
承诺博弈



假如参与者1能够改变收益以致参与者2在*a*之选择*d*变得可信，那么参与者1的收益将从5上至15，新增收益10.

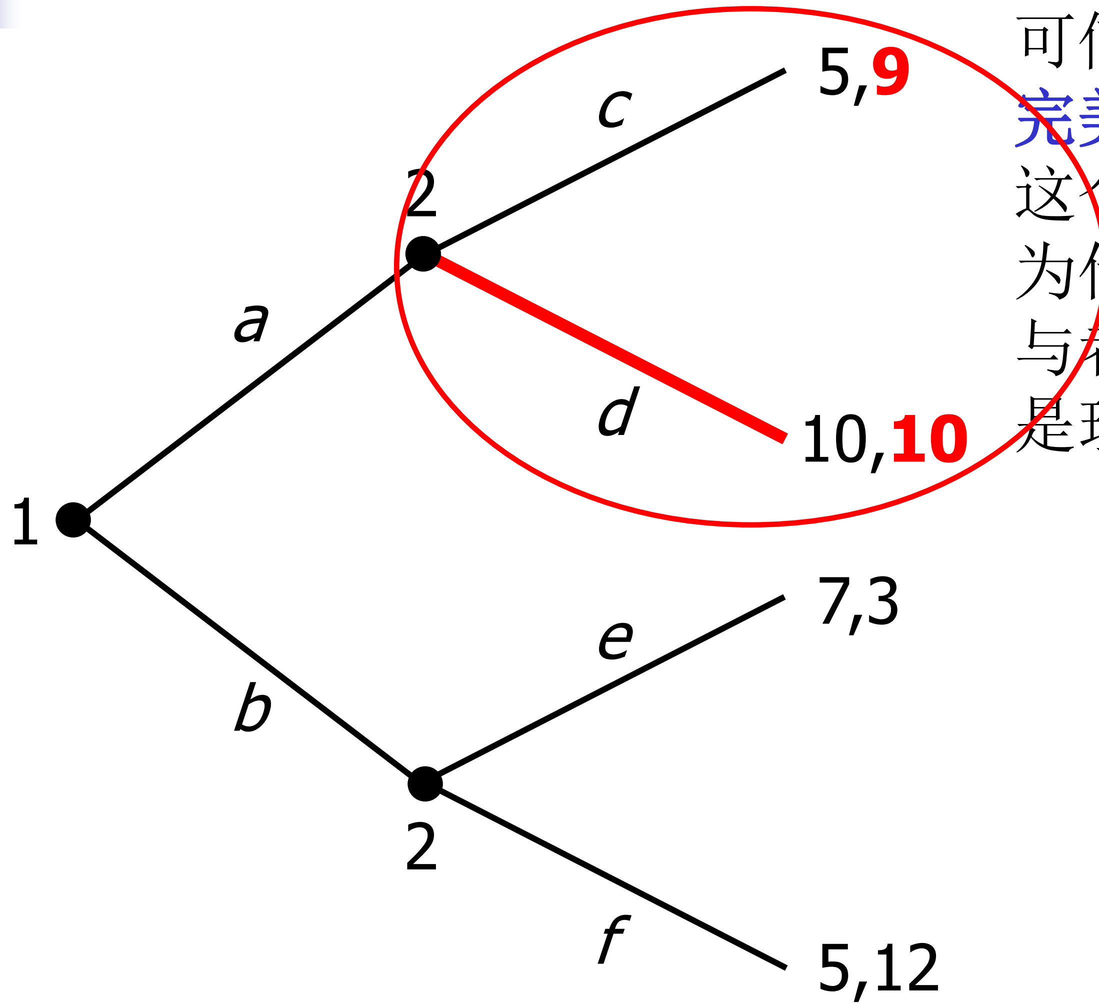
假如参与者1将收益量5给参与者2，那么参与者2的承诺变得可信。参与1不能得到15的收益。

承诺博弈



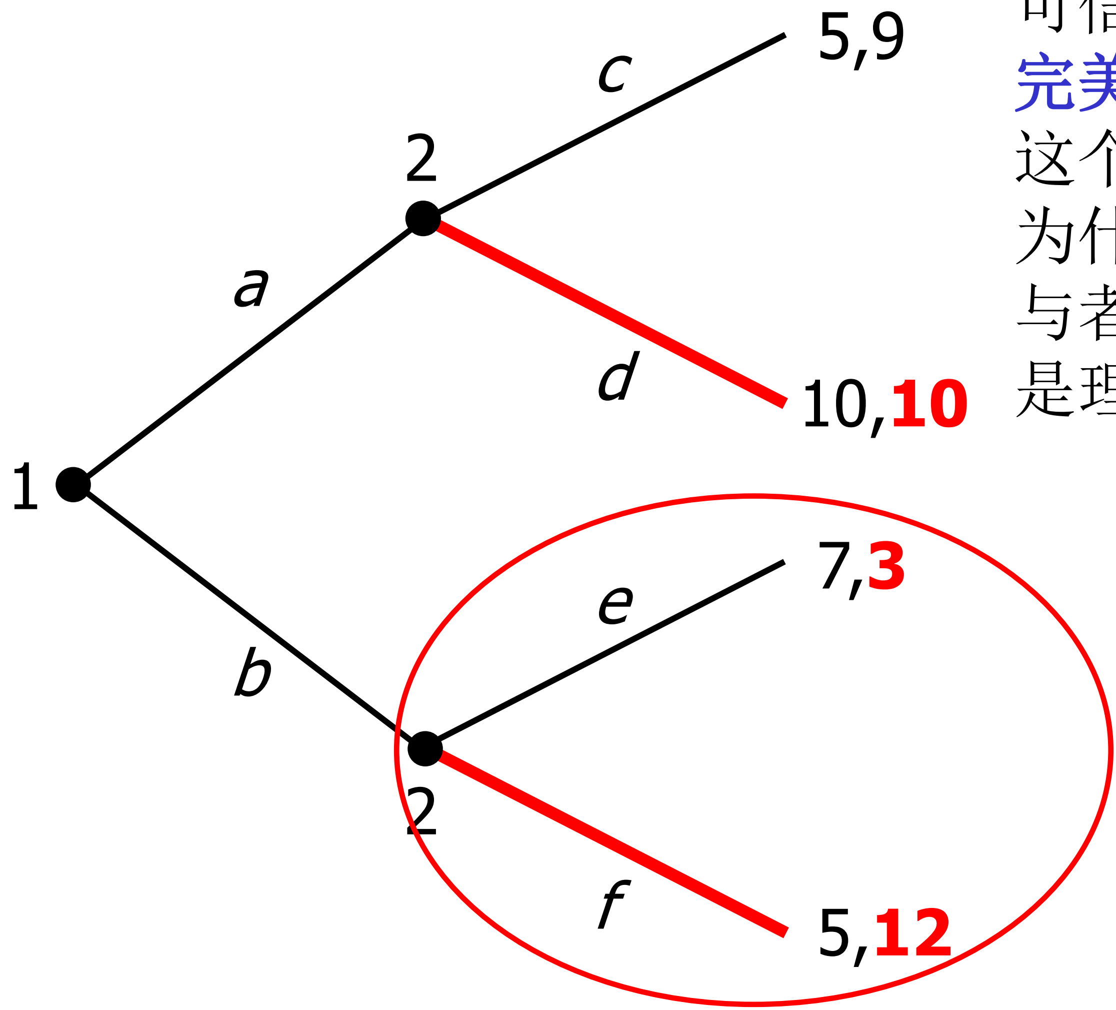
可信纳什均衡称为**子博弈完美**。
这个博弈的子博弈完美
为什么？它要求每个参
与者所做的决策必须
是理性的。

承诺博弈



可信纳什均衡称为子博弈完美。
这个博弈的子博弈完美
为什么？它要求每个参与者所做的决策必须是理性的。

承诺博弈



可信纳什均衡称为子博弈完美。

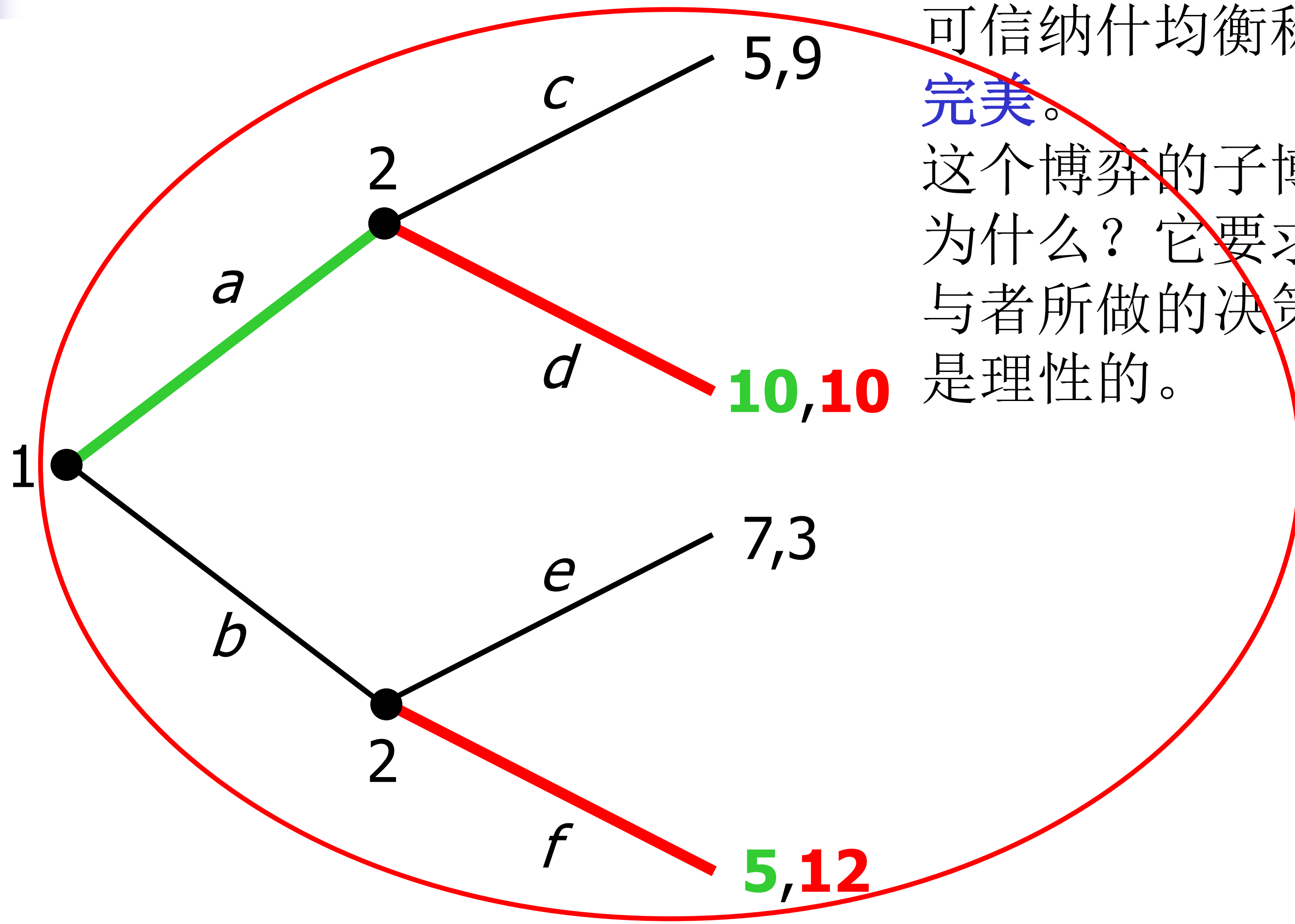
这个博弈的子博弈完美

为什么？它要求每个参

与者所做的决策必须

是理性的。

承诺博弈

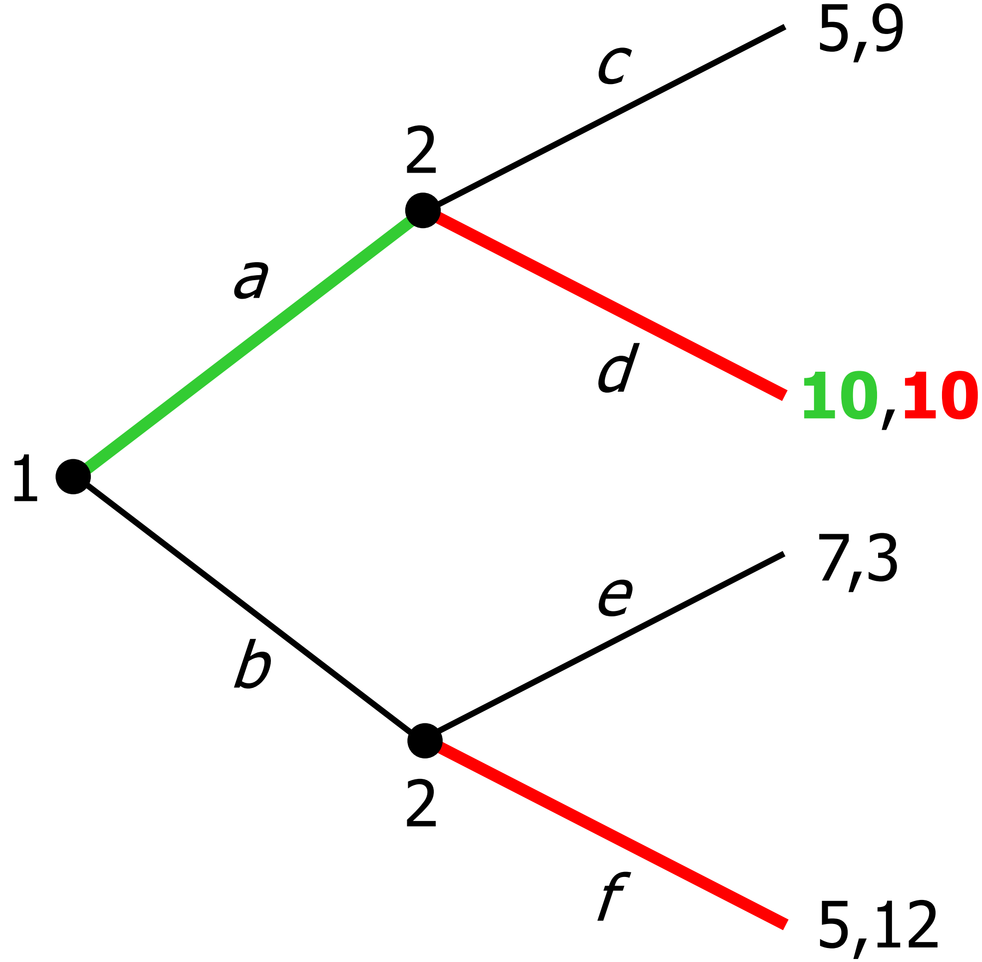


可信纳什均衡称为子博弈完美。

这个博弈的子博弈完美

为什么？它要求每个参与者所做的决策必须是理性的。

承诺博弈



可信纳什均衡称为子博弈完美。
这个博弈的子博弈完美为什么？它要求每个参与者所做的决策必须是理性的。

博弈的几种重要类型

- 合作博弈
- 竞争博弈
- 共存博弈
- 承诺博弈
- 讨价还价博弈

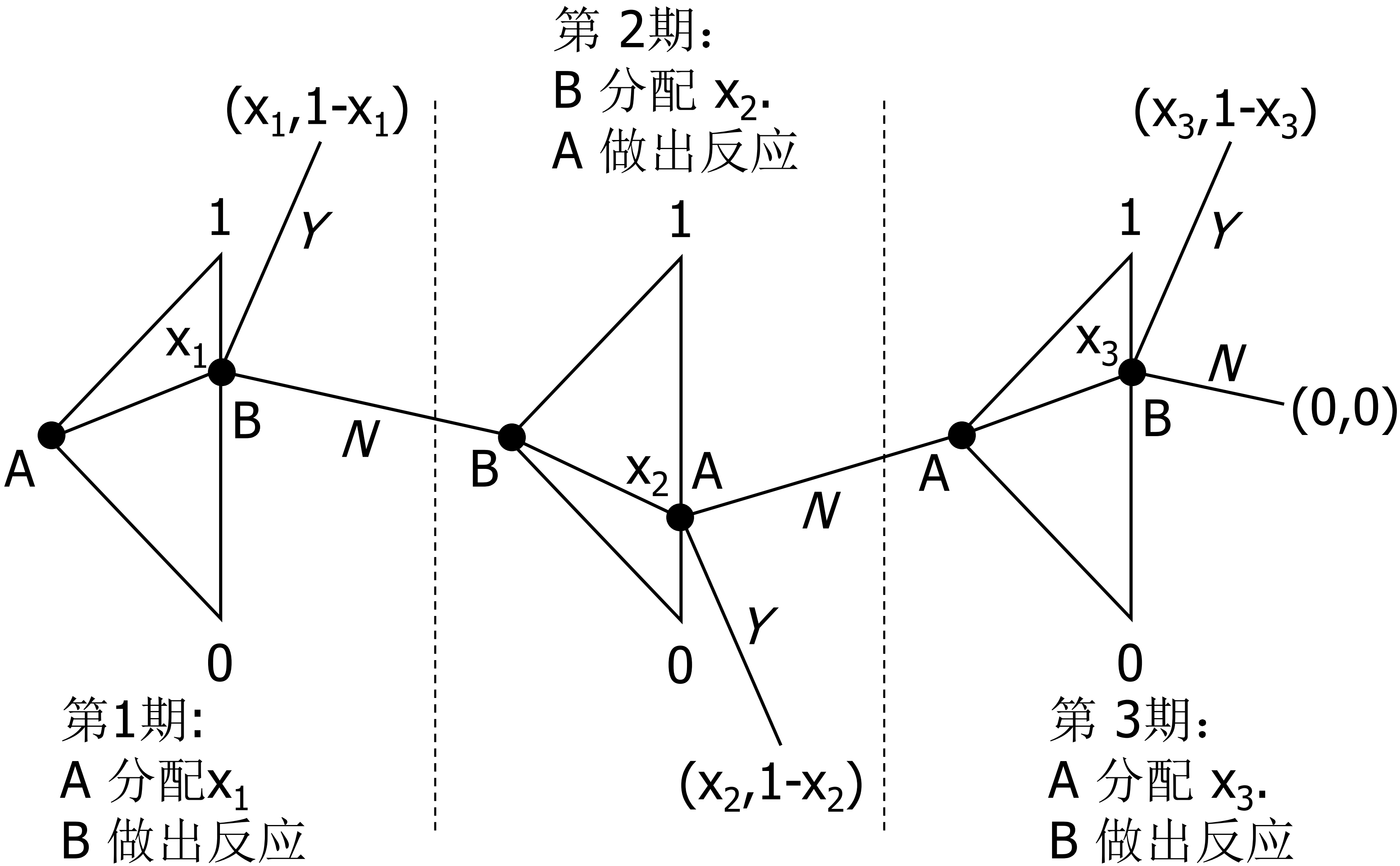
讨价还价博弈

- 两个参与者对于大小为1的一个饼的分配进行讨价还价。结果如何？
- 两种方法：
  - 纳什讨价还价模型
  - 鲁宾斯坦讨价还价模型。

策略讨价还价

- 参与者在3各阶段决定如何分配饼，在其它时刻什么都得不到。
- 参与者A 下期收益的折现率为α.
- 参与者B 下期收益率的折现率为β.
- 参与者轮流提出分配方案，其参与者A在第一期现提出分配方案。
- 假如接受分配方案的参与者接受该方案，那么博弈结束。否则该博弈下期继续进行。

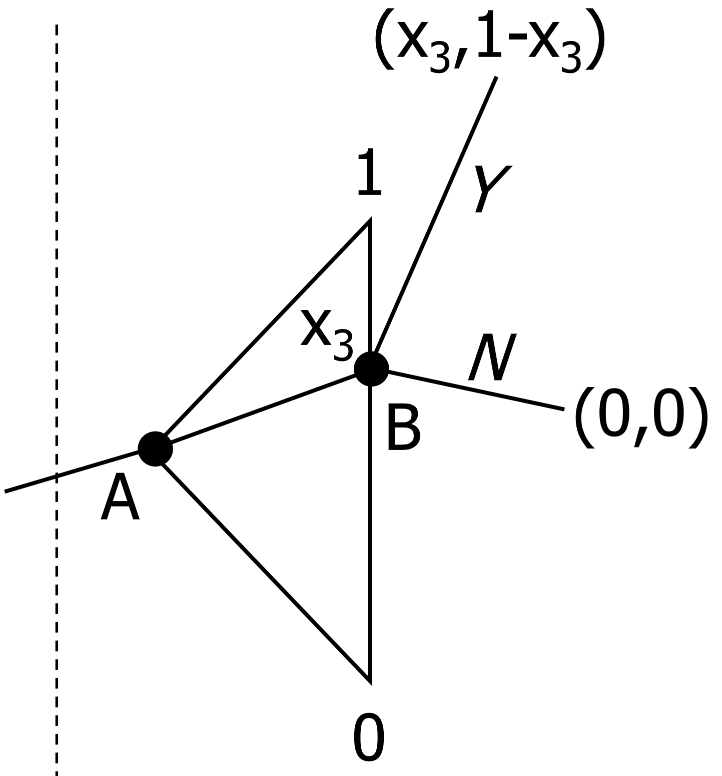
策略讨价还价



第 2期:
B 分配 x2.
A 做出反应
(x1,1-x1)
(x3,1-x3)
1
Y
x1
A
B
N
0
x2
(0,0)
x3
(x2,1-x2)
第1期:
A 分配x1
B 做出反应
第 3期:
A 分配 x3.
B 做出反应

策略讨价还价

B对x_3如何反应？



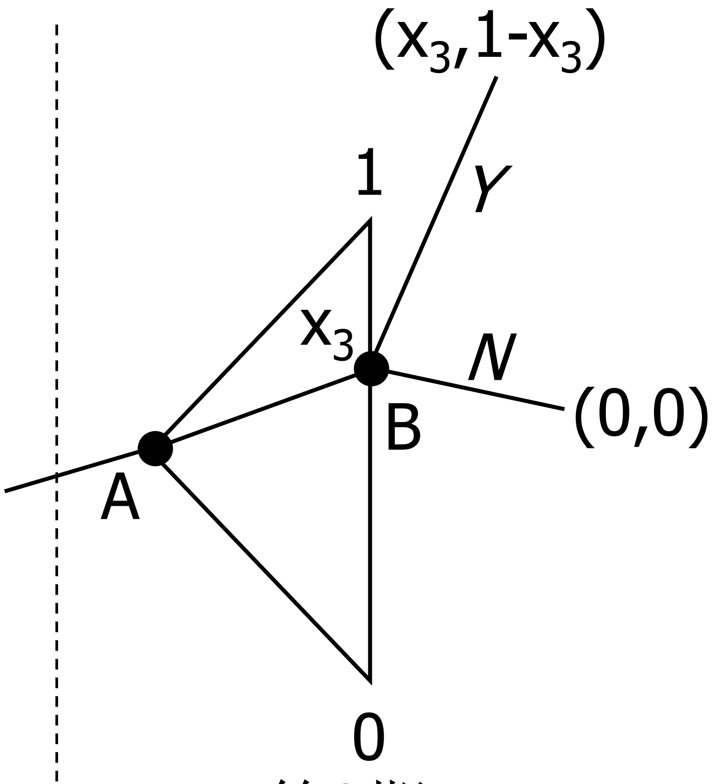
第3期：

A 分配 x_3.

B 做出反应

策略讨价还价

B对x_3如何反应？
假如$1 - x_3 \geq 0$则接受；也即
当$x_3 \leq 1$时接受。

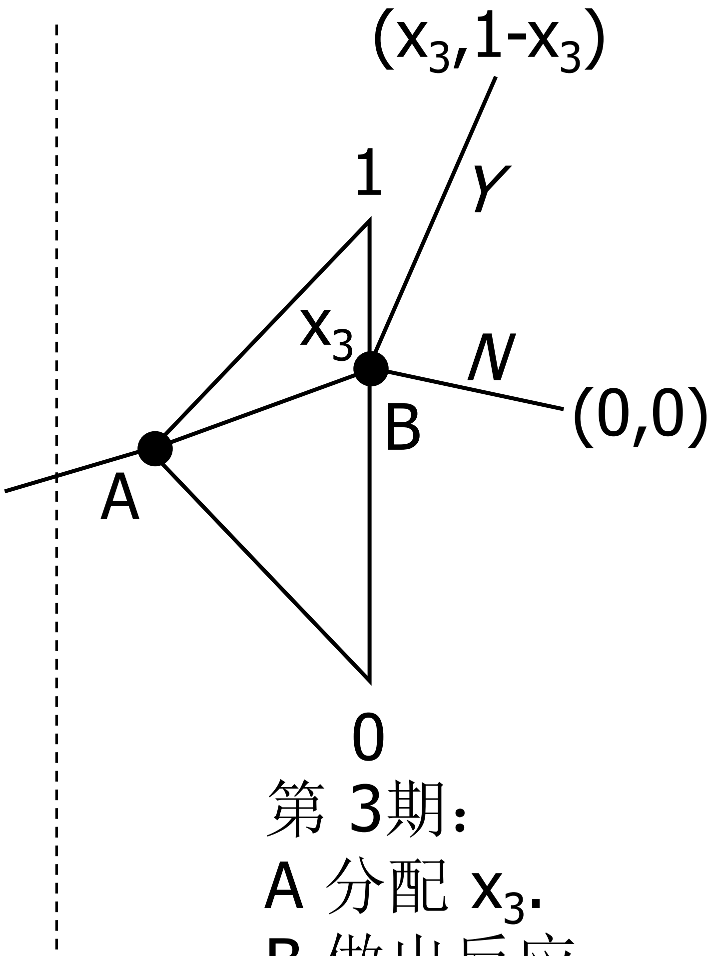


第3期：
A分配x_3.
B 做出反应

策略讨价还价

B对x_3如何反应？
假如$1 - x_3 \geq 0$则接受；也即
当$x_3 \leq 1$时接受。

知道这一点，A会如何分配？

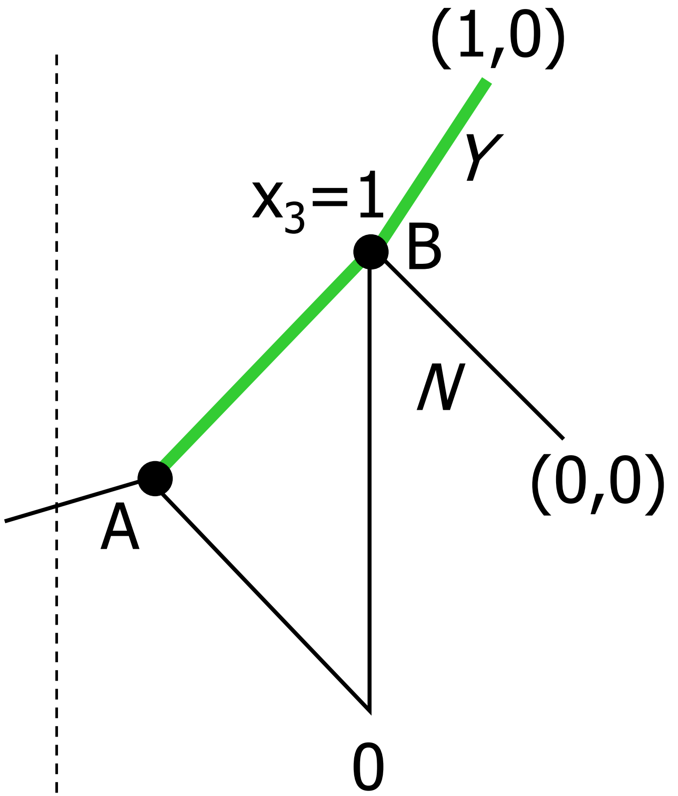


第 3期:
A 分配 x_3.
B 做出反应

策略讨价还价

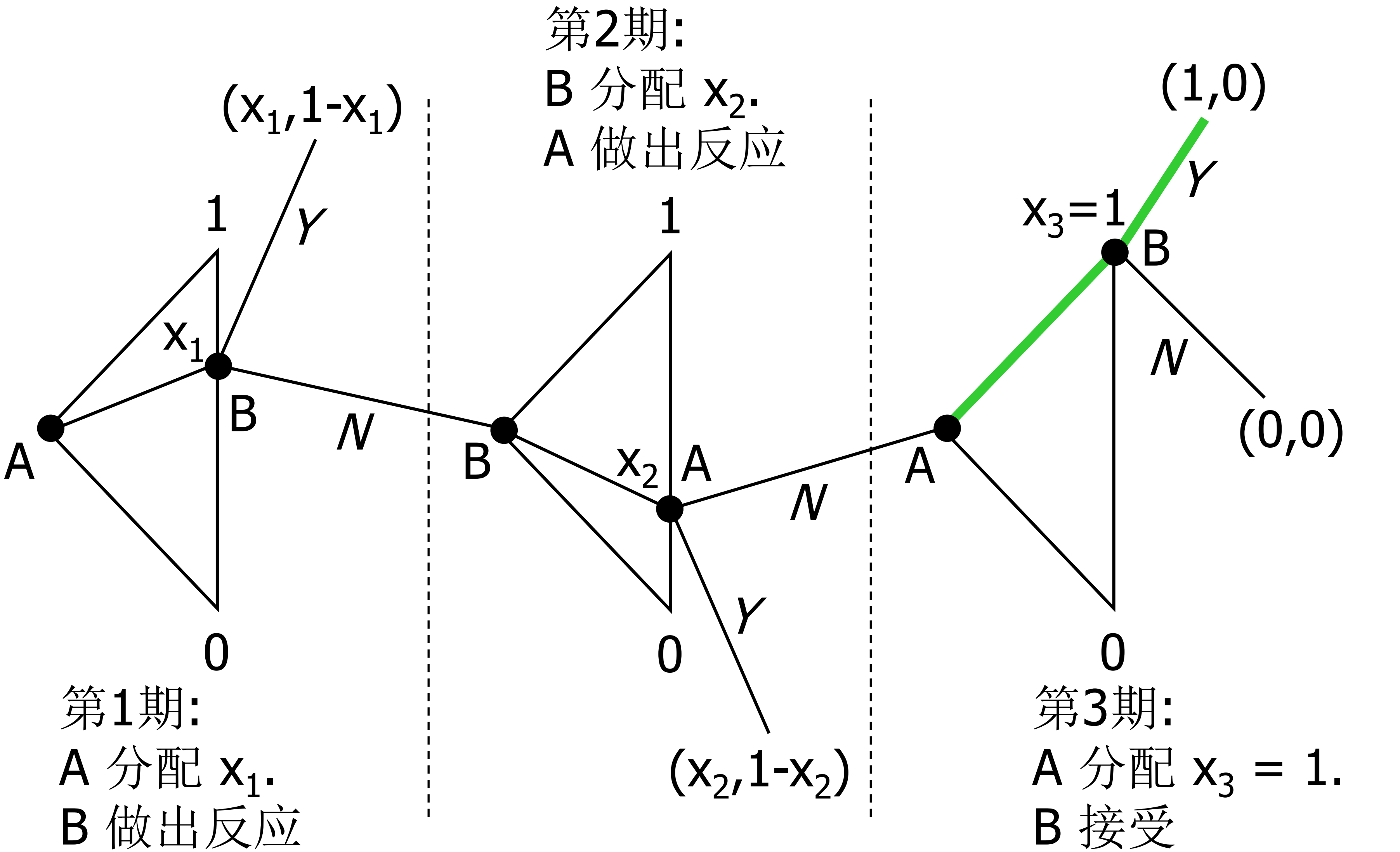
B对x_3如何反应？
假如$1 - x_3 \geq 0$则接受；也即
当$x_3 \leq 1$时接受。

知道这一点，A会如何分配？
$x_3 = 1.$



第3期:
A 分配 $x_3 = 1.$
B 接受

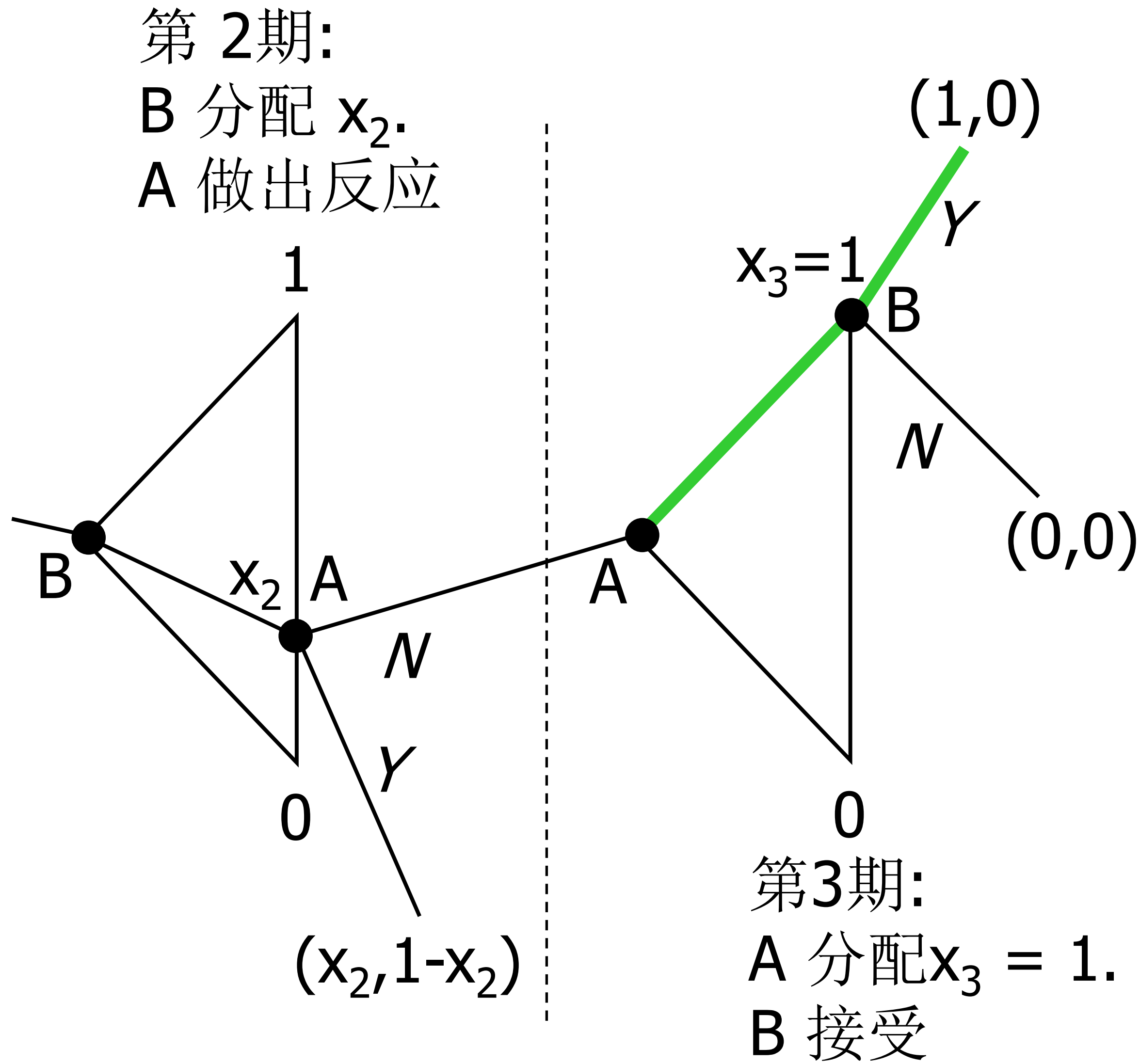
策略讨价还价



第2期:
B 分配 x_2.
A 做出反应
$(x_1,1-x_1)$
Y
1
x_1
B
N
A
0
B
1
x_2
A
N
Y
0
$(x_2,1-x_2)$
(1,0)
Y
$x_3=1$
B
N
(0,0)
A
0
第1期:
A 分配 x_1.
B 做出反应
第3期:
A 分配 x_3 = 1.
B 接受

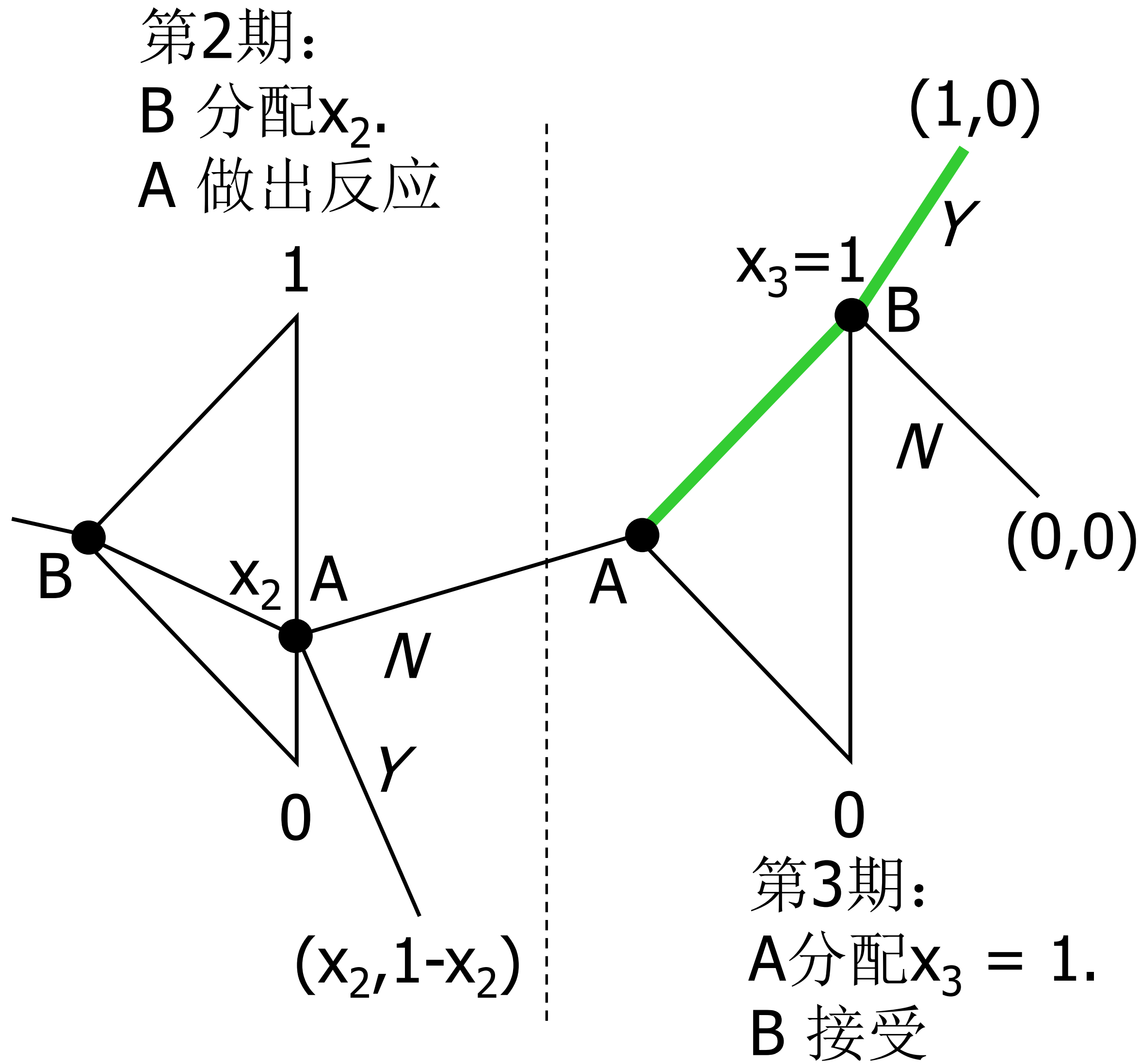
策略讨价还价

在第3期 A 得到的分配量为1。在第2期，在回应B的分配量x_2的时候，A得到*1*的现值为多少？



策略讨价还价

在第3期 A 得到的分配量为1。在第2期，在回应B的分配量x_2的时候，A得到*1*的现值为α。

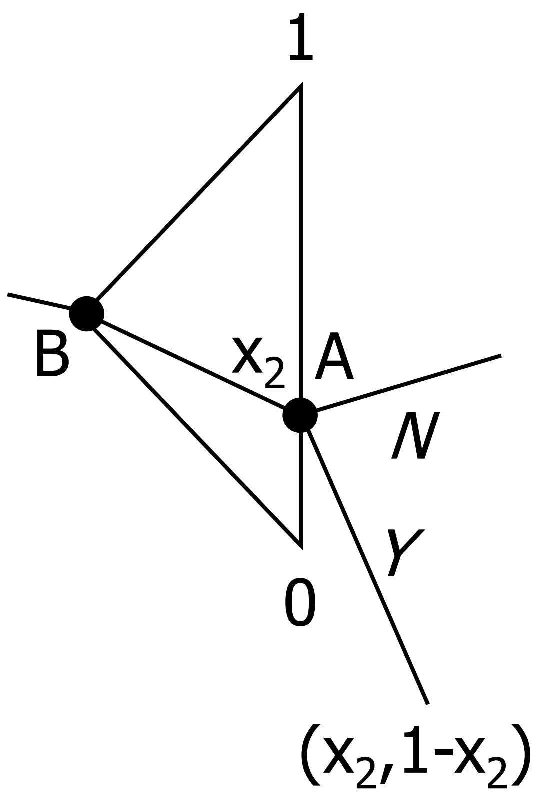


策略讨价还价

在第3期 A 得到的分配量为1。在第2期，在回应B的分配量x_2的时候，A得到*1*的现值为α。

B 最多能分配给A多少？

第 2期：
B 分配 x_2.
A 做出反应



策略讨价还价

在第3期 A 得到的分配量为1。在第2期，在回应B的分配量x_2的时候，A得到*1*的现值为α。

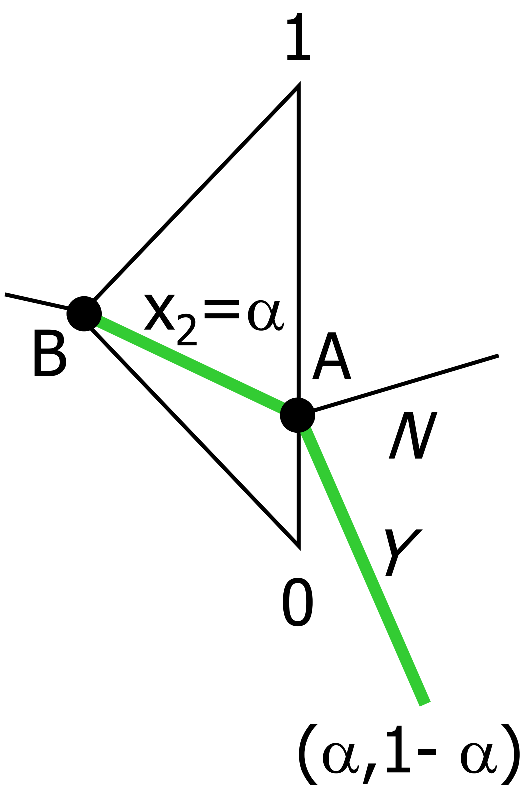
B 最多能分配给A多少？

$x_2 = \alpha$.

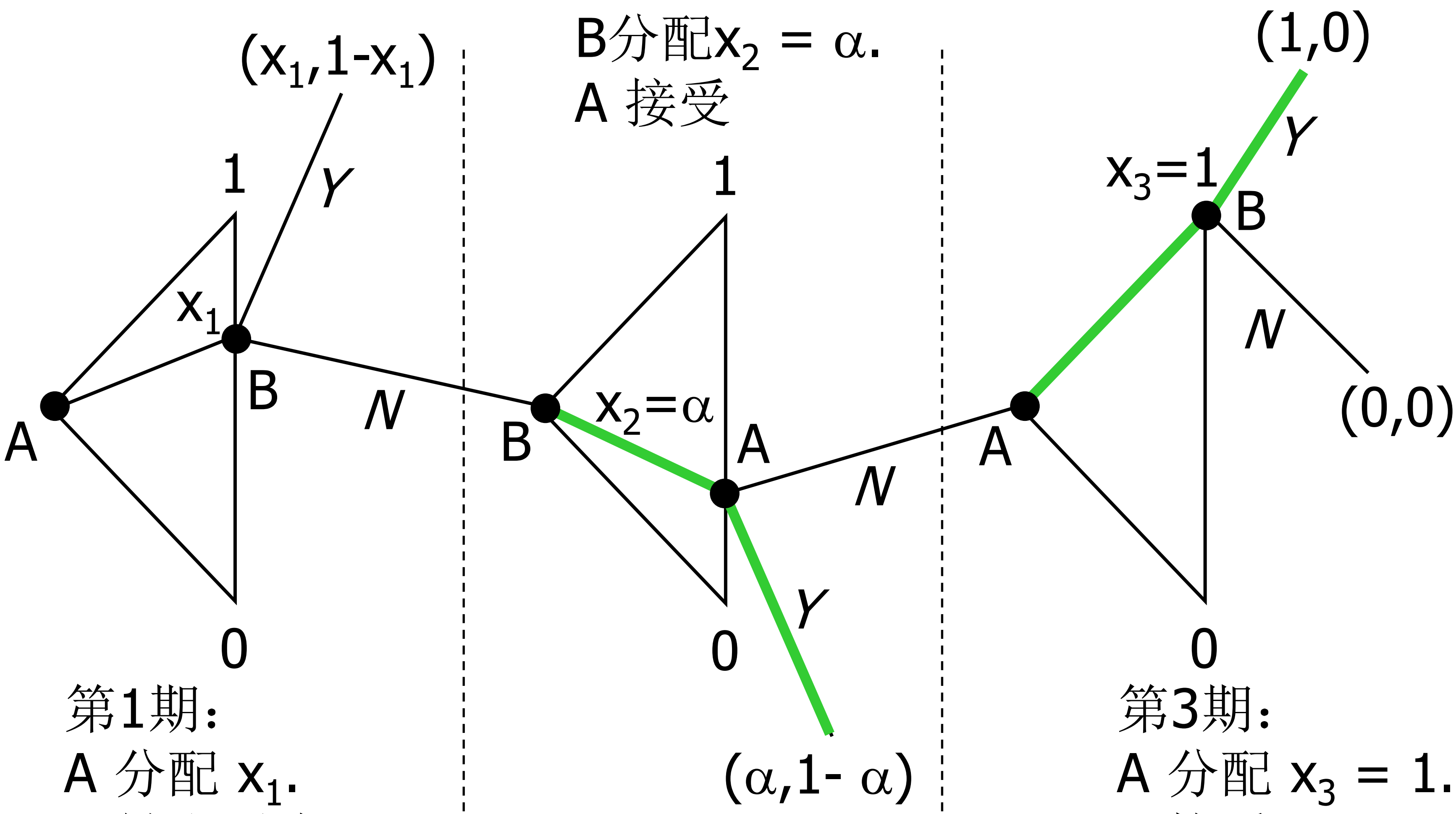
第2期：

B 分配$x_2 = \alpha$.

A 接受



策略讨价还价



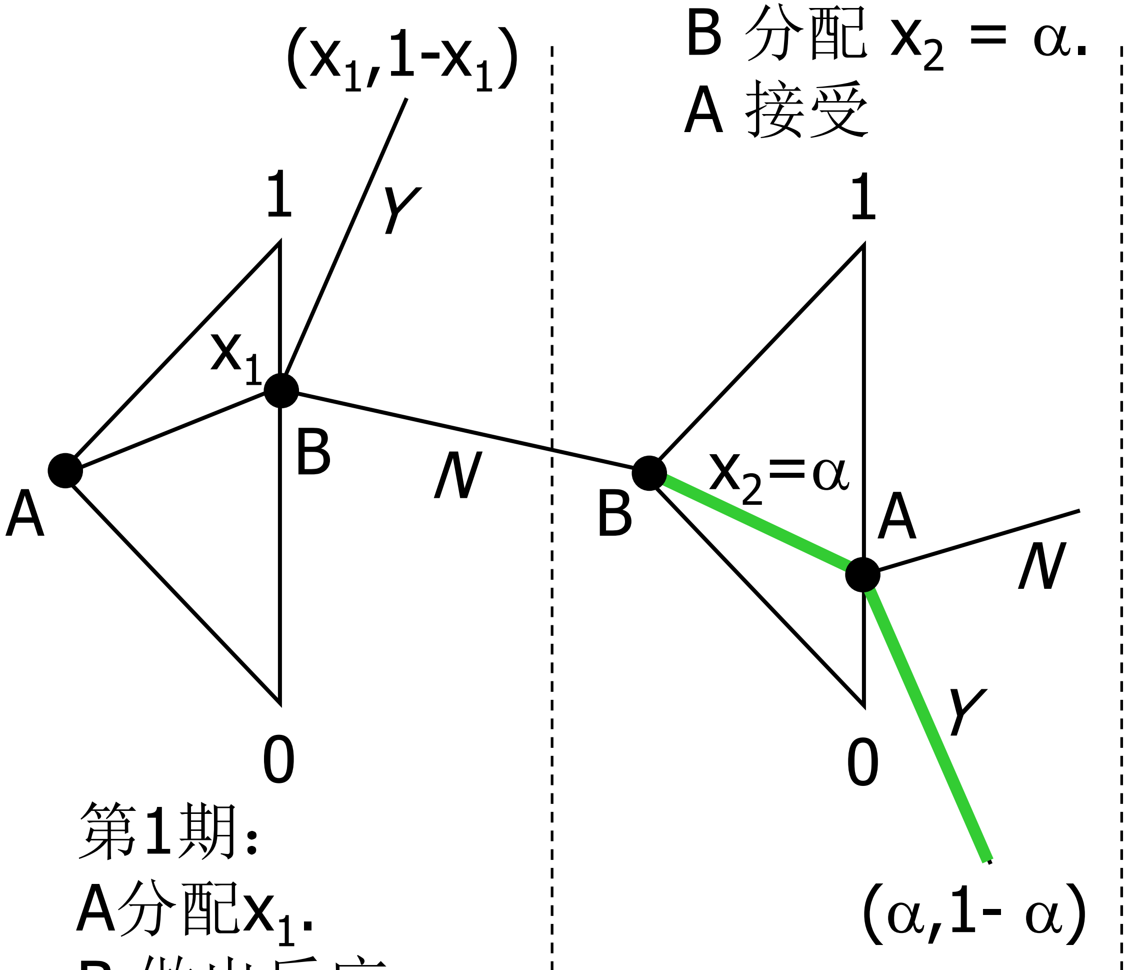
第1期:
A 分配 x_1.
B 做出反应

第3期:
A 分配 $x_3 = 1$.
B 接受

策略讨价还价

第2期:
B 分配 $x_2 = \alpha$.
A 接受

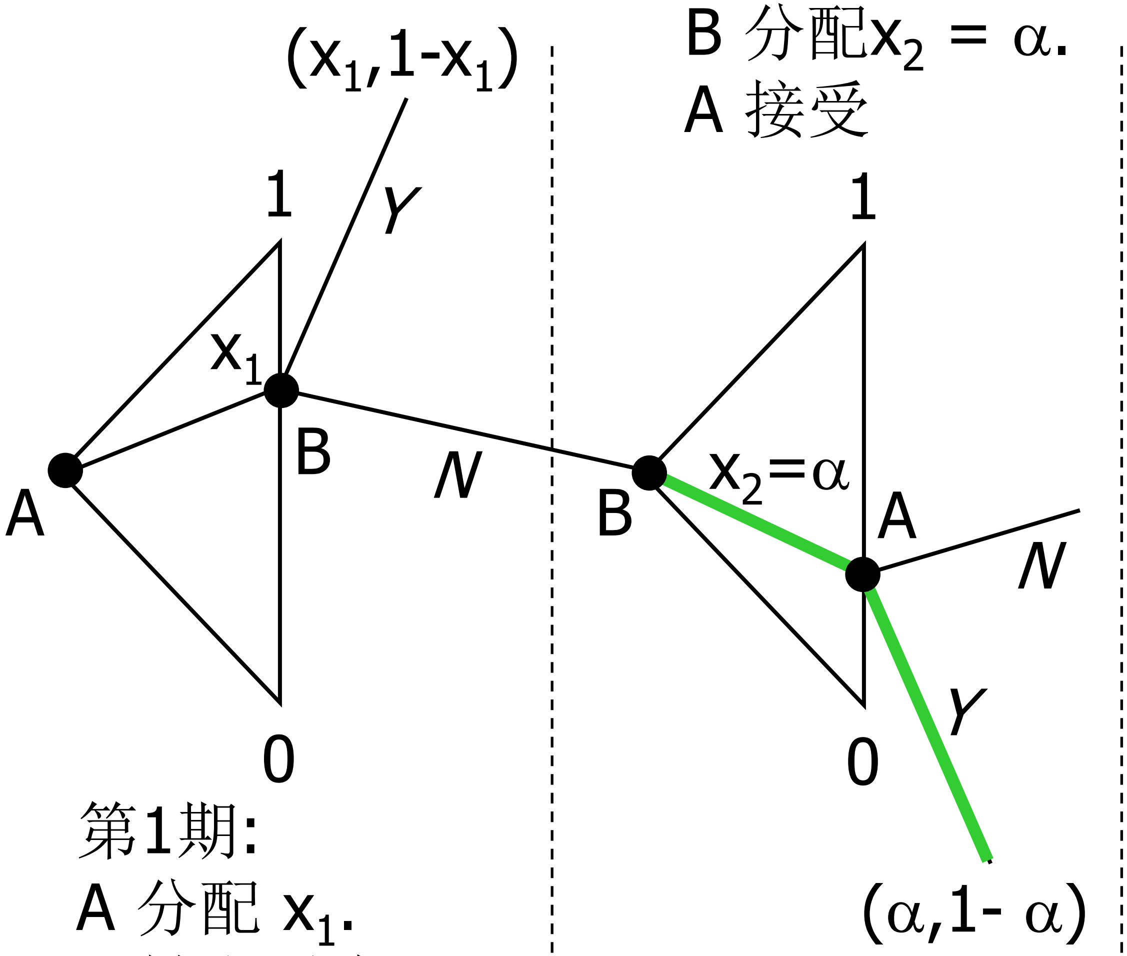
在第2期 A 会接受α. 这样B
在第2期会得到$1 - \alpha$ 。
在第1期对于B来说$1 - \alpha$
的现值为多少？



第1期:
A分配x_1.
B 做出反应

策略讨价还价

第2期:
B 分配$x_2 = \alpha$.
A 接受

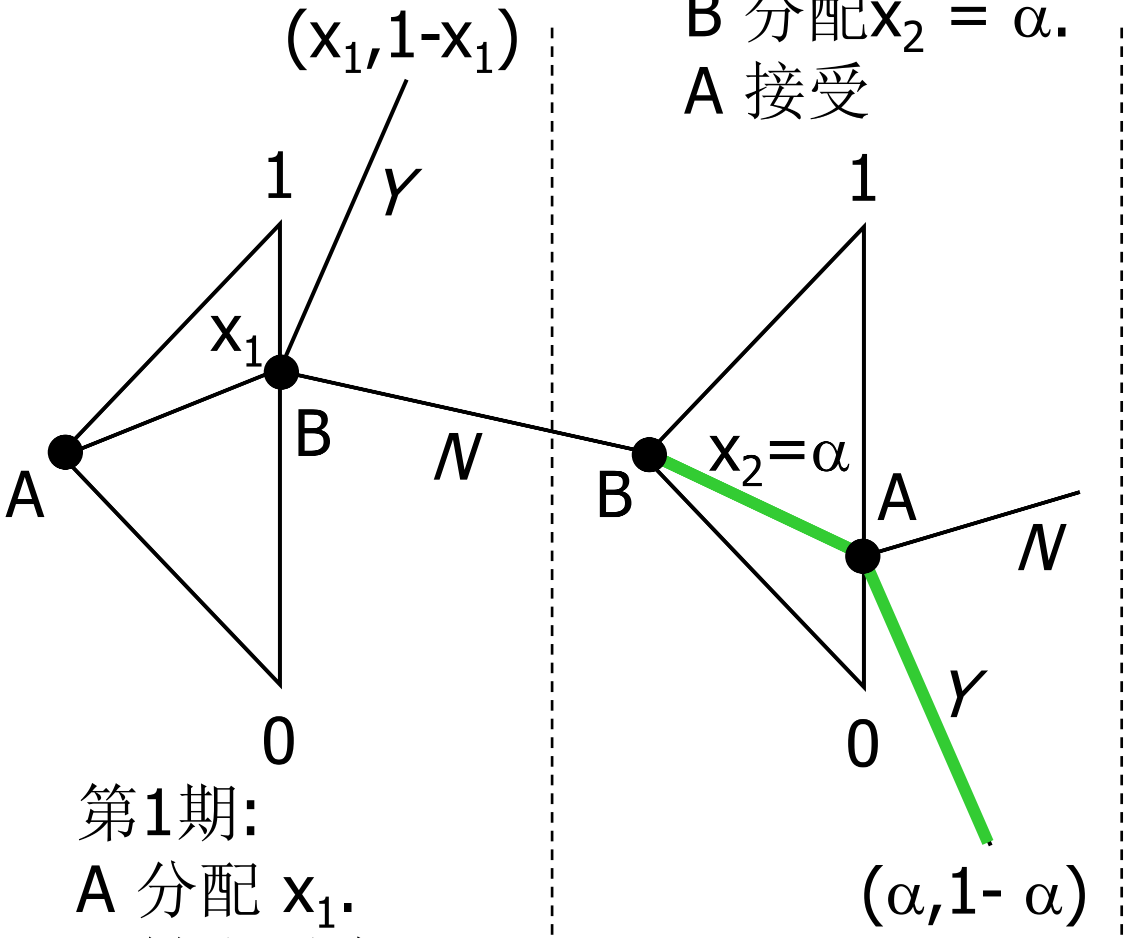


第1期:
A 分配 x_1.
B 做出反应

在第2期 A 会接受α. 这样B
在第2期会得到$1 - \alpha$ 。
在第1期对于B来说$1 - \alpha$
的现值为多少?
$\beta(1 - \alpha)$。

策略讨价还价

第2期:
B 分配$x_2 = \alpha$.
A 接受

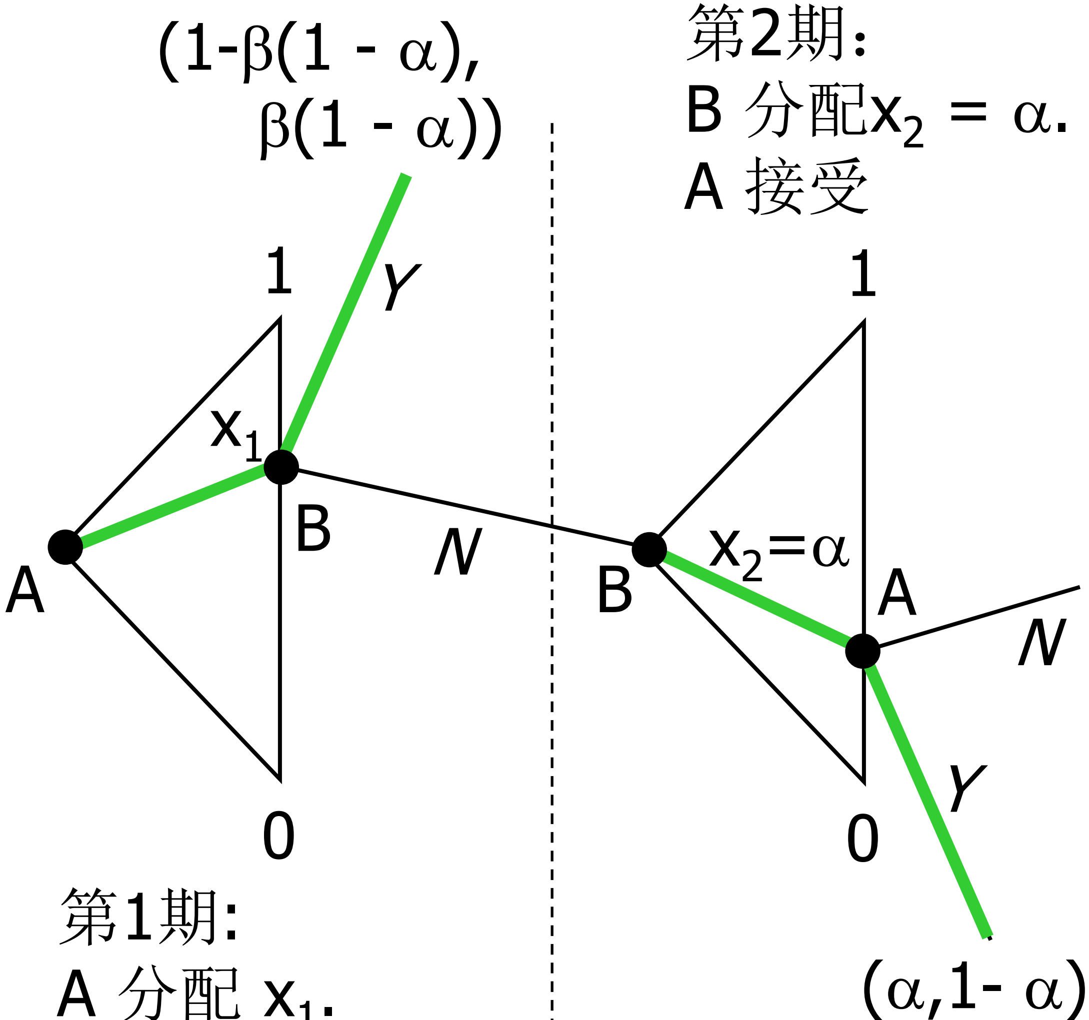


第1期:
A 分配 x_1.
B 做出反应

在第2期 A 会接受α. 这样B
在第2期会得到1 - α 。
在第1期对于B来说1 - α
的现值为多少?
β(1 - α) 。

在第1期最多能向 B分
配多少?

策略讨价还价



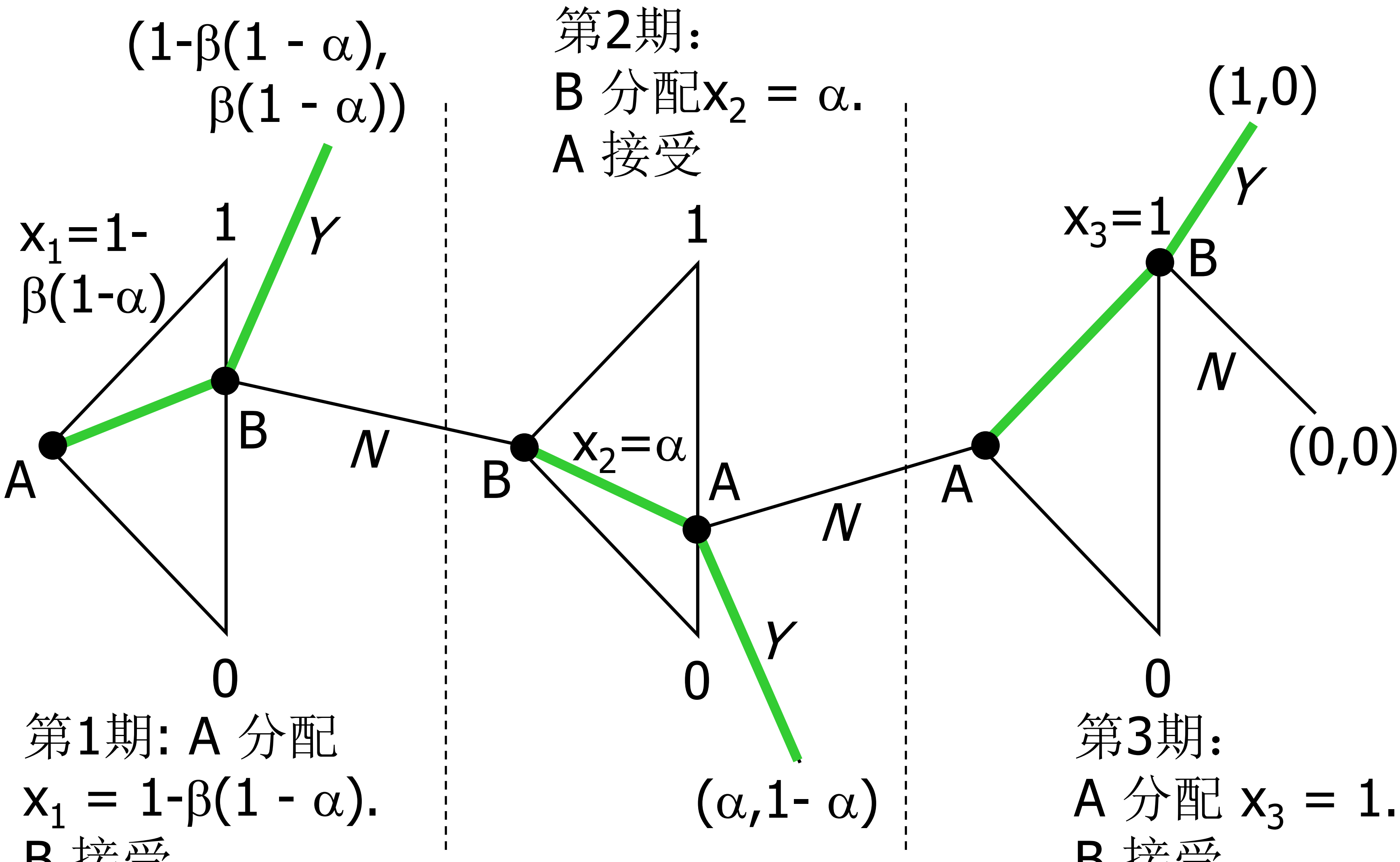
第1期:
A 分配 x_1.
B 做出反应

第2期:
B 分配$x_2 = \alpha$.
A 接受

在第2期 A 会接受α. 这样B
在第2期会得到1 - α 。
在第1期对于B来说1 - α
的现值为多少?
β(1 - α) 。

在第1期最多能向 B分
配多少?
$1 - x_1 = \beta(1 - \alpha)$; 也即
$x_1 = 1 - \beta(1 - \alpha)$。
B 会接受。

策略讨价还价


(1-β(1 - α),
β(1 - α))
第2期:
B 分配x2 = α.
A 接受
(1,0)
x1=1-
β(1-α)
1
Y
x3=1
B
N
(0,0)
B
N
B
x2=α
A
A
N
A
A
Y
0
0
0
第1期: A 分配
x1 = 1-β(1 - α).
B 接受
(α,1- α)
第3期:
A 分配 x3 = 1.
B 接受

策略讨价还价

- 注意该博弈在第1期马上结束。
- 参与者 A得到了$1 - \beta(1 - \alpha)$ 单位的分配量。
参与者 B得到了 $\beta(1 - \alpha)$ 单位的分配量。
- 谁的分配量大?
- $x_1 = 1 - \beta(1 - \alpha) \geq ½ \Leftrightarrow \beta \leq 1/2(1 - \alpha)$
假如，参与者B比A来说过于没有耐心，参与者A 比参与者B得到的份额多。

策略讨价还价

- 假设该游戏可以无限进行下去(无限期)。 使用相同的推理方法所得结果表明子博弈完美会导致参与者1和参与者2分别得到：

- $$\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \quad \text{和} \quad \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\ \text{单位份额}$$

- 参与者1的分配额上升当 α$\uparrow$ 和　β$\downarrow$。
参与者2的分配额上升当 α$\downarrow$ 和　β$\uparrow$。