本试卷适应范围
经管类各 专业
2020 级 本科生

南京农业大学试题纸

2020~2021 学年 第一学期 课程类型：必修 试卷类型：期中

课程号 MATH2110 课程名 微积分 I B 5 学分

学号 ____________ 姓名 ____________ 班级 ____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

装订线

一. 填空题（$2'\times5=10'$）

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则函数 $f\left[f(x)\right]$ 的间断点为 $x=$ ____________ .

2. 下列命题中正确的命题是____________. （多选题，选出全部选项方可得分）

(A). 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且不为零，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ 必定不存在 .

(B). 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(C). 函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内有界.

(D). 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

3. 曲线 $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)\arctan x}{x^2}$ 共有______条渐近线.

4. 设函数 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，自变量增量 $\Delta r=dr\to0$ 时， $dV=$ __________， $\dfrac{dV}{dr}=$ __________.

5. $d\left(\rule{4cm}{0.4pt}\right)=\dfrac{1}{2+x^2}dx$.

装订线

二、解答题 I（$8'\times4=32'$）

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=1$,求$a,b$.

8. 设$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,试计算$f'(0),f'(x),f''(0)$,$f''(x)$.

9. 设可导的偶函数$f(x)$有$f(0)=0$,求(1) $f'(0)$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$.

三、解答题 II（$8' \times 5 = 40'$）

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x=\arctan e^{-t} \\ y=\ln\sqrt{1+e^{2t}} \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+\cdots+2020^x}{2020}\right)^{\frac{1}{x}}$.

12. 设 a 为常数，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$.

13. 光的反射遵循反射定律. 通过计算椭圆曲线的切线与法线方程，我们可以证明椭圆曲线的光学性质：从一个焦点出发的光线经过曲线的反射恰好通过椭圆的另一个焦点.

试给出椭圆曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上点$\left(x_0,y_0\right)$处的切线方程.

14. 一个有盖有底的圆筒形容器，已知其容积为V，盖与底两个圆盘部分的材料每单位面积价格为a元，侧面材料的每单位面积价格为b元，问容器的底直径与高的比例等于多少时，造价最省？

四. 证明题（$9'\times 2=18'$）

15. 求证：在 $x>0$ 时有 $\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2<\dfrac{1}{x(1+x)}$. （提示：利用倒代换 $t=\dfrac{1}{x}$ 对不等式变形后再进行证明.）

16. 多年前的一天，一位学生给了我 2014 年辽宁高考数学理科卷第 21 题：

设函数 $f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\dfrac{8}{3}(\sin x+1), g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(\sin x+1)\ln\left(3-\dfrac{2x}{\pi}\right)$.

证明：(1). 存在唯一的 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f(x_0)=0$ ；

(2). 存在唯一的 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 使得 $g(x_1)=0$, 且对(1)中的 x_0 ，有 $x_0+x_1<\pi$.

就这个题，我耗时两小时左右方做出，惶恐！巨汗！!! 据说，当年该题得分率特别低，所以想到解题的思路是要紧的. 在我的做法中，需要比较 $\pi\sqrt{3}$ 与 $24\ln\dfrac{4}{3}$ 的大小，当时所想到的可使用的结论是：

$x>0$ 时有(1). $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$ ； (2). $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4<\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$ ；

(3). $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{6}x^6<\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5$. (相信你能发现规律!)

试证明： $x>0$ 时有 $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$. 由此，不借助计算器，比较数 $\pi\sqrt{3}$ 与 $24\ln\dfrac{4}{3}$ 的大小.

2020级经管类微积分 I 期中练习　2020-11-15

一. 填空题（$2'\times 5=10'$）

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则函数 $f\left[f(x)\right]$ 的间断点为 $x=$____________________.

答案： 1,2

解析：$f\left[f(x)\right]=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2-x}{x-1}}$，$x=1$ 为第一类可去间断点，$x=2$ 为第二类无穷间断点.

2. 下列命题中正确的命题是____________________.（多选题，选出全部选项方可得分）

(A). 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且不为零，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ 必定不存在 .

(B). 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(C). 函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内有界.

(D). 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

答案： A,C,D

解析: ①假设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ 存在，又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且不为零，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 必存在. 假设不成立，故 A 正确.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=1$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x}}=\infty$. 故 B 错误.

③ $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $x\neq 0$，

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-1\right|<\varepsilon$ 即 $1-\varepsilon<x\sin\dfrac{1}{x}<1+\varepsilon$；

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 即 $-\varepsilon<x\sin\dfrac{1}{x}<\varepsilon$；

$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[-X,-\delta\right],\left[\delta,X\right]$ 上连续，必有界.　　故 C 正确.

④ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数存在，

则由 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$，得 $\lim\limits_{x\to x_0^-}[f(x)-f(x_0)]=0$，得 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$；

则由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$，得 $\lim\limits_{x\to x_0^+}[f(x)-f(x_0)]=0$，得 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$；

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续. 故 D 正确.

3. 曲线 $y=\dfrac{(x^2+1)\arctan x}{x^2}$ 共有______条渐近线.

答案：3

解析：① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)\arctan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)\cdot\dfrac{\arctan x}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$，则 $x=0$ 为曲线的垂直渐近线；

② $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^2+1)\arctan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x^2+1)}{x^2}\cdot\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 为曲线的水平渐近线；

③ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x^2+1)\arctan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x^2+1)}{x^2}\cdot\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，则 $y=-\dfrac{\pi}{2}$ 为曲线的水平渐近线.

4. 设函数 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，自变量增量 $\Delta r=dr\to 0$ 时， $dV=$________， $\dfrac{dV}{dr}=$________.

答案：$4\pi r^2dr$； $4\pi r^2$.

5. $d(\qquad\qquad)=\dfrac{1}{2+x^2}dx$.

答案：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$ 或 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$

二. 解答题（$8'\times 9=72'$）

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

解 1：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4-(\sqrt{x}+1)(x+1)}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-x^{\frac{3}{2}}-x-x^{\frac{1}{2}}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2x}=-\dfrac{3}{2}$；

解 2：原式 $\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{4}{t^4-1}-\dfrac{1}{t-1}\right)=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{4-(t^3+t^2+t+1)}{t^4-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{-3t^2-2t-1}{4t^3}=-\dfrac{3}{2}$.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=1$,求$a,b$.

解：令 $-\dfrac{1}{x}=t, x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+0$,

(此非必要,但基于要将问题化归为无穷小问题的思路，采用倒代换)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{-5}{t}+\frac{\sqrt{a+bt+t^2}}{|t|}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{a+bt+t^2}-5}{t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{a-25+bt+t^2}{t\left(\sqrt{a+bt+t^2}+5\right)}=1,\quad \therefore \lim_{t\to+0}\left(a-25+bt+t^2\right)=0,\text{ 得 } a=25\text{ ；}$$

$$\text{此时原式}=\lim_{t\to+0}\frac{bt+t^2}{t\left(\sqrt{25+bt+t^2}+5\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{b+t}{\sqrt{25+bt+t^2}+5}=\frac{b}{10}=1,\text{ 故}b=10.$$

解 1：$$\lim_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{25x^2-ax^2+bx-1}{5x-\sqrt{ax^2-bx+1}}\overset{a=25}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{bx-1}{5x-\sqrt{25x^2-bx+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{b-\dfrac{1}{x}}{5+\dfrac{\sqrt{25x^2-bx+1}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{b-\dfrac{1}{x}}{5+\sqrt{25-\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{b}{10}\text{，则}\frac{b}{10}=1\text{，}\therefore a=25,b=10\text{ 为所求.}$$

解 2：$$\lim_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+1}\right)\overset{x=-\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to0^+}\left(-\frac{5}{t}+\sqrt{\frac{a}{t^2}+\frac{b}{t}+1}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{-5+\sqrt{a+bt+t^2}}{t}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{a=25}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{b+2t}{2\sqrt{25+bt+t^2}}}{1}=\frac{b}{10}\text{，则}\frac{b}{10}=1\text{，}\therefore a=25,b=10\text{ 为所求.}$$

8. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$,试计算$f'(0)$，$f'(x)$，$f''(0)$，$f''(x)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t^2}\cdot2t}=0,f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0\ , & x=0\end{cases},$$

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4}{e^{t^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{8t^3}{e^{t^2}\cdot2t}=0,f''(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0 & ,x=0\end{cases}.$$

解：① $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}te^{-t^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2te^{t^2}}=0$

② $x\neq 0$时，$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot(-1)\left(-\dfrac{2x}{x^4}\right)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases};$$

③ $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{t=\frac{1}{x^2}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t^2}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4t}{e^t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4}{e^t}=0$.

④ $x\neq 0$时，$f''(x)=-\dfrac{2\cdot 3x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}=\left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$，

$$\therefore f''(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

9. 设可导的偶函数$f(x)$有$f(0)=0$，求(1) $f'(0)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

解：(1) $f(x)$为可导偶函数，则有$f(-x)=f(x)$，$f'(0)$存在；

$\because f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}\overset{x=-t}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(-t)}{-t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{-t}=(-1)\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t}=-f'_+(0)$，

$\therefore f'_-(0)=f'_+(0)=0$，　　$\therefore f'(0)=0$.

或者：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{-x-0}=-f'(0)$

$\therefore f'(0)=0$

(2) 两种情形：

① 若$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1$.

② 若$f\left(\dfrac{1}{n}\right)\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\ln\left[1+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}-0}}=e^{f'(0)}=e^0=1$$

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x=\arctan e^{-t} \\ y=\ln\sqrt{1+e^{2t}} \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $y=\ln\sqrt{1+e^{2t}}=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{2t}\right)$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{-e^{-t}}{1+e^{-2t}}}=-e^{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'}=\frac{-e^{t}}{\frac{-e^{-t}}{1+e^{-2t}}}=1+e^{2t}.$$

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1^x+2^x+\cdots+2020^x}{2020}\right)^{\frac{1}{x}}$.

"1^∞" 型问题

解1：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{1^x+2^x+\cdots+2020^x-2020}{2020}\right)^{\frac{2020}{1^x+2^x+\cdots+2020^x-2020}}\right]^{\frac{1^x+2^x+\cdots+2020^x-2020}{2020x}}$,

$a>0,a\neq1$ 时有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln a}{x}=\ln a$,

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1^x+2^x+\cdots+2020^x-2020}{2020x}=\dfrac{\ln2+\ln3+\cdots+\ln2020}{2020}=\ln\left(\sqrt[2020]{2020!}\right)$,

$\therefore$ 原 $=e^{\ln\left(\sqrt[2020]{2020!}\right)}=\sqrt[2020]{2020!}$.

解2：原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln\left(\frac{1^x+2^x+\cdots+2020^x}{2020}\right)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln\left(1^x+2^x+\cdots+2020^x\right)-\ln(2020)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1^x+2^x+\cdots+2020^x\right)-\ln(2020)}{x}}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1^x+2^x+\cdots+2020^x\right)-\ln(2020)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x\ln2+\cdots+2020^x\ln2020}{1^x+2^x+\cdots+2020^x}$

$=\dfrac{\ln2+\ln3+\cdots+\ln2020}{2020}=\ln2020!^{\frac{1}{2020}}$,

$\therefore$ 原 $=e^{\ln2020!^{\frac{1}{2020}}}=2020!^{\frac{1}{2020}}$.

12. 设a为常数，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$.

解：① $a=0$时，原式$=0$；

② $a\neq 0$时，

法1：由$Lagrange$中值定理知$\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)\frac{1}{1+\xi^2}$，$\xi$介于$\frac{a}{n+1},\frac{a}{n}$之间，

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)\frac{1}{1+\xi^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2a}{n(n+1)}\frac{1}{1+\xi^2}\right]=a.$$

法2：记$\arctan\frac{a}{n}=\alpha$，$\arctan\frac{a}{n+1}=\beta$，由$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}{1+\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n+1}}=\dfrac{a}{n^2+n+a^2}$得

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(n^2\arctan\frac{a}{n^2+n+a^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n^2}{n^2+n+a^2}=a.$$

法3：先求对应函数的极限，可用$L'Hopital$法则

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}\right)\right]\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\lim_{t\to0}\frac{\arctan at-\arctan\frac{at}{1+t}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{a}{1+a^2t^2}-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{at}{1+t}\right)^2}\cdot\dfrac{a(1+t)-at}{(1+t)^2}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{a}{1+a^2t^2}-\dfrac{a}{(1+t)^2+a^2t^2}}{2t}$$

$$=a\lim_{t\to0}\frac{1+2t+t^2+a^2t^2-1-a^2t^2}{2t\cdot(1+a^2t^2)\left[(1+t)^2+a^2t^2\right]}=a\lim_{t\to0}\frac{2t+t^2}{2t}\cdot\frac{1}{(1+a^2t^2)\left[(1+t)^2+a^2t^2\right]}=a.$$

13. 光的反射遵循反射定律. 通过计算椭圆曲线的切线与法线方程，我们可以证明椭圆曲线的光学性质：从一个焦点出发的光线经过曲线的反射恰好通过椭圆的另一个焦点.

试给出椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线方程.

解：对于曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P(x_0,y_0)$，

(1) 若 $y_0=0$，P 点处的切线方程为 $x^2=a^2$.

(2) 若 $y_0\neq 0$，由 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'_x}{b^2}=0$ 即 $y'_x=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ ，得 P 点处的切线斜率 $y'_x\big|_P=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$，

P 点处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ ，整理得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ ，

总之，椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

14. 一个有盖有底的圆筒形容器，已知其容积为 V ，盖与底两个圆盘部分的材料每单位面积价格为 a 元，侧面材料的每单位面积价格为 b 元，问容器的底直径与高的比例等于多少时，造价最省?

解：设容器底直径为 d，高为 h ，则 $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h=4V$，则 $h=\frac{4V}{\pi d^2}$，

$$\text{总造价为}M=2\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot a+2\pi\left(\frac{d}{2}\right)h\cdot b=\frac{1}{2}\pi d^2a+\pi dhb$$

$$=\frac{1}{2}\pi d^2a+\pi db\cdot\frac{4V}{\pi d^2}=\frac{1}{2}\pi d^2a+\frac{4Vb}{d},$$

令 $M'_d=\pi da-\frac{4bV}{d^2}=\frac{\pi d^3a-4bV}{d^2}=0$，有唯一驻点，对应最优解为 $d=\sqrt[3]{\frac{4bV}{\pi a}}$，

即 $d:h=d:\frac{4V}{\pi d^2}=d^3:\frac{4V}{\pi}=\frac{4bV}{\pi a}:\frac{4V}{\pi}=b:a$ 时，造价最省.

三. 证明题（$9'\times 2=18'$）

15. 求证：在 $x>0$ 时有 $\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2<\frac{1}{x(1+x)}$. （提示：利用倒代换 $t=\frac{1}{x}$ 对不等式变形后再进行证明.）

分析1：$x>0,\ \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2<\frac{1}{x(1+x)}\Leftrightarrow x>0,\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$

作变换 $\frac{1}{x}=t,\ t>0,\ \ln(1+t)<\frac{t}{\sqrt{t+1}}$

分析2：作变换$\frac{1}{x}=t$，$t>0$，$\left[\ln(1+t)\right]^2<\frac{t^2}{1+t} \Leftrightarrow t>0$，$\frac{t^2}{1+t}-\left[\ln(1+t)\right]^2>0$

$\Leftrightarrow t>0$，$t^2>(1+t)\left[\ln(1+t)\right]^2 \Leftrightarrow t>0$，$t>\sqrt{1+t}\ln(1+t) \Leftrightarrow t>0$，$\frac{t}{\sqrt{1+t}}>\ln(1+t) \Leftrightarrow \cdots$

证明1：设$\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}-\ln(1+t)$，在$\left[0\ ,\ +\infty\right)$上连续，$\left(0\ ,\ +\infty\right)$内可导，

$$\varphi'(t)=\frac{1\cdot\sqrt{1+t}-t\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}-\frac{1}{1+t}=\frac{2+t-2\sqrt{1+t}}{2\sqrt{(1+t)^3}}=\frac{t-2\left(\sqrt{1+t}-1\right)}{2\sqrt{(1+t)^3}}$$

$$=\frac{t-2\frac{t}{\sqrt{1+t}+1}}{2\sqrt{(1+t)^3}}=\frac{t\left(\sqrt{1+t}+1-2\right)}{2\left(\sqrt{1+t}+1\right)\sqrt{(1+t)^3}}=\frac{t^2}{2\left(\sqrt{1+t}+1\right)^2\sqrt{(1+t)^3}}>0,$$

即$t>0$时$\varphi'(t)>0$，

$\therefore t\geq 0$时$\varphi(t)$严格单调增加，

$\therefore t>0$时$\varphi(t)>\varphi(0)=0$，

$\therefore \frac{t}{\sqrt{1+t}}>\ln(1+t)$，即$\left[\ln(1+t)\right]^2<\frac{t^2}{1+t}=\frac{1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+1\right)}$，

$\therefore \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2<\frac{1}{x(1+x)}$，命题得证.

证明2：设$\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t}}-\ln(1+t)$，在$\left[0\ ,\ +\infty\right)$上连续，$\left(0\ ,\ +\infty\right)$内可导，

$$\varphi'(t)=\frac{1\cdot\sqrt{1+t}-t\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1+t}-\frac{1}{1+t}=\frac{t+2-2\sqrt{1+t}}{2\sqrt{(1+t)^3}}$$

令$h(t)=t+2-2\sqrt{1+t}$，则$t>0$时$h'(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}>0$，

则$t\geq 0$时$h(t)$严格单调增加，则$h(t)>h(0)=0$

则$t>0$时$\varphi'(t)>0$，

$\therefore t\geq 0$时$\varphi(t)$严格单调增加，

$\therefore t>0$时$\varphi(t)>\varphi(0)=0$，

$\therefore \frac{t}{\sqrt{1+t}}>\ln(1+t)$，即$\left[\ln(1+t)\right]^2<\frac{t^2}{1+t}=\frac{1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+1\right)}$，

$\therefore \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2<\frac{1}{x(1+x)}$，命题得证.

证明3：设$\varphi(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$，其在$[0,+\infty)$上连续，$(0,+\infty)$内可导，

$$\varphi'(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}},$$

设$h(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，

$$h'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{1+t}=\frac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}=\frac{t}{(1+t)\left(\sqrt{1+t}+1\right)},$$

显然$t>0$时$h'(t)>0$，

故$t\geq 0$时$h(t)$严格单调递增，则$t>0$时$h(t)>h(0)=0$，

故$t>0$时$\varphi'(t)>0$，则$t\geq 0$时$\varphi(t)$严格单调递增，则$t>0$时$\varphi(t)>\varphi(0)=0$，

$\therefore t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0$，即$\ln(1+t)<\dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$

即$\left[\ln(1+t)\right]^2<\dfrac{t^2}{1+t}=\dfrac{1}{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+1\right)}$，$\therefore\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^2<\dfrac{1}{x(1+x)}$，命题得证.

若原问题不加变化,处理起来是否比较不得劲啊？

显然,成功的做法不止一种.

前进途中,常遇困厄,困则死,变则生.

世间事,往往如此.数学解题亦然.

16. 多年前的一天，一位学生给了我2014年辽宁高考数学理科卷第21题：

设函数$f(x)=(\cos x-x)(\pi+2x)-\dfrac{8}{3}(\sin x+1)$，$g(x)=3(x-\pi)\cos x-4(\sin x+1)\ln\left(3-\dfrac{2x}{\pi}\right)$.

证明：(1). 存在唯一的$x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$f(x_0)=0$；

(2). 存在唯一的$x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，使得$g(x_1)=0$，且对(1)中的$x_0$，有$x_0+x_1<\pi$.

就这个题，我耗时两小时左右方做出，惶恐！巨汗!!! 据说，当年该题得分率特别低，所以想到解题的思路是要紧的. 在我的做法中，需要比较$\pi\sqrt{3}$与$24\ln\dfrac{4}{3}$的大小，当时所想到的可使用的结论是：

$x>0$时有(1). $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$；(2). $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4<\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$；

(3). $x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{6}x^6<\ln(1+x)<x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{5}x^5$.(相信你能发现规律!)

试证明：$x>0$时有$x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$，由此，不借助计算器，比较数$\pi\sqrt{3}$与$24\ln\dfrac{4}{3}$的大小.

证明 1：设 $f(x)=\ln(1+x)$，其在 $[0,+\infty)$ 连续，$(0,+\infty)$ 内 n 阶可导，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$，

则 $f(x)=\ln(1+x)$ 的一阶、二阶麦克劳林展式分别为：

① $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2(1+\xi_1)^2}$，$\xi_1$ 介于 0 与 x 之间；

② $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3(1+\xi_2)^3}$，$\xi_2$ 介于 0 与 x 之间；

由①②易得，$x>0$ 时有 $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$ 成立．

证明 2：设 $f(x)=x-\ln(1+x)$，其在 $[0,+\infty)$ 连续，$(0,+\infty)$ 内可导，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f(x)>f(0)=0-\ln(1+0)=0$，$\therefore x>\ln(1+x)$.

设 $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$，其在 $[0,+\infty)$ 连续，$(0,+\infty)$ 内可导，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}>0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(x)>g(0)=\ln(1+0)-0+0=0$，$\therefore \ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$.

$\therefore x>0$ 时有 $x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$ 成立．

解：$\because \dfrac{5}{18}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2\cdot 3^2}<\ln\dfrac{4}{3}=\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)<\dfrac{1}{3}$,

$\therefore 24\ln\dfrac{4}{3}>24\cdot\dfrac{5}{18}=\dfrac{20}{3}>6.66$，

又 $\because \pi\sqrt{3}<2\pi<2\times 3.1416<6.3$，

$\therefore \pi\sqrt{3}<24\ln\dfrac{4}{3}$.

后记：

某天，我突然想到大家广为熟知的不等式：$x>0$ 时有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，

本题用此结论来处理更为简单有效，

$$24\ln\frac{4}{3}=24\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)>24\cdot\frac{1/3}{1+1/3}=6>3.15\times 1.733>\pi\sqrt{3}.\ \left(1.732<\sqrt{3}<1.733\right)$$

朱某曰：本题就是表达一个意思，用什么知识与如何运用知识去解决问题才是难的，一如那个著名的例子：画一道线收费1美元，知道在哪里画线收费9999美元……