第三章　偏好

偏好关系：

- ✓ $\succ$　表示严格偏好;
  x $\succ$ y 表示消费束x 严格偏好于消费束y
- ✓ ~　表示无差异;
  x ~ y 表示对于x和y同等偏好
- ✓ $\succsim$　表示弱偏好;
  x $\succsim$ y 表示x至少和y一样受偏好。

偏好关系

✓ 严格偏好、弱偏好和无差异三者之间具有密切的关系：

$x \succsim y$ 且 $y \succsim x$ 则 $x \sim y$。

$x \succsim y$ 且 (不是 $x \sim y$) 则 $x \succ y$。

关于偏好关系的假设

消费者偏好的三条公理

完备性:

任何两个消费束都是可以比较的。

假定任一x消费束和任一y消费束，则有

$$x \succsim y$$

或者

$$y \succsim x$$

关于偏好关系的假设

反身性:

任何一个消费束至少和它本身一样好；或者说相同的消费束对消费者来说是无差异的。*例如*

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{x}$$

关于偏好关系的假设

传递性: 假定

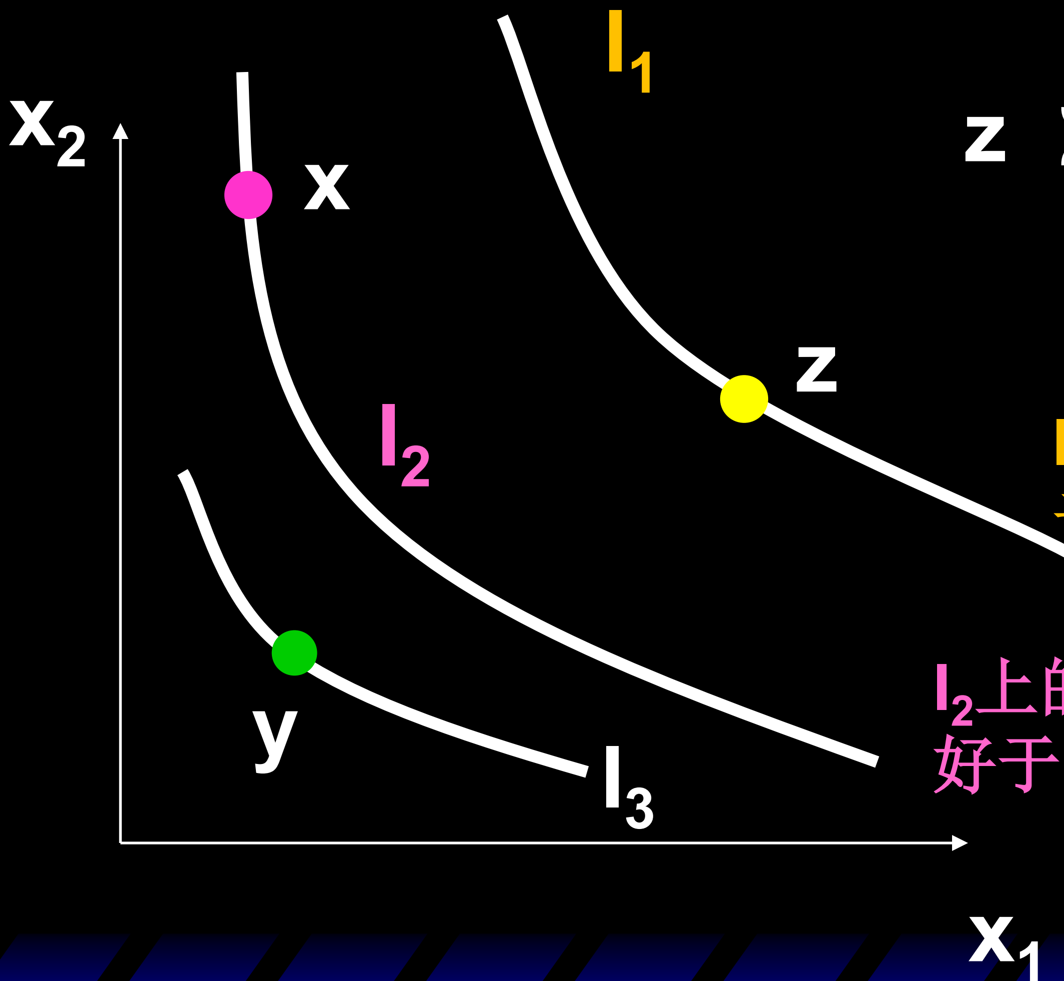
x 弱偏好于**y**, 且

y 弱偏好于**z**, 那么

x 弱偏好于**z**; *例如*

$$x \succsim y \text{ 且 } y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

无差异曲线

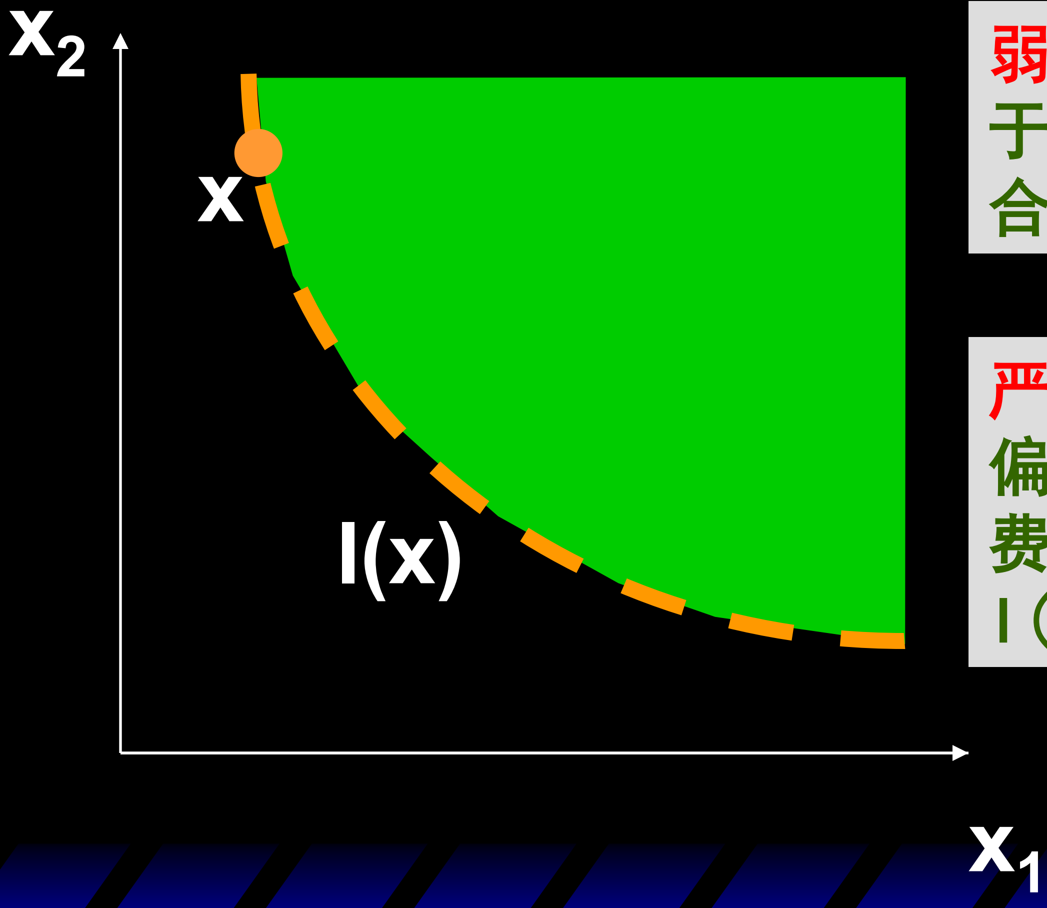


$z \succ x \succ y$

I_1上的消费束严格偏好于I_2上的消费束。

I_2上的消费束严格偏好于I_3上的消费束。

无差异曲线



弱偏好集： 所有弱偏好于消费组合X的消费组合的集合，包括I（x）。

严格偏好集： 所有严格偏好于消费组合X的消费组合的集合，不包括I（x）

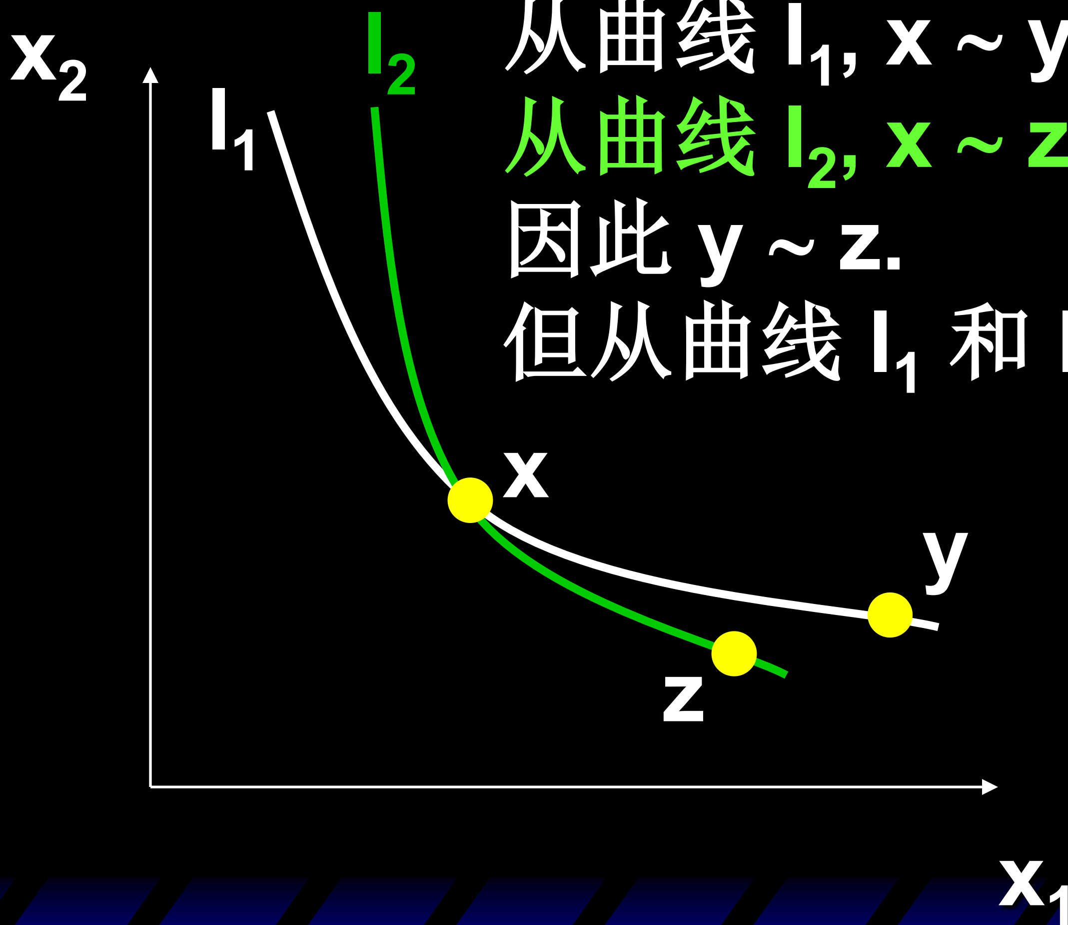
无差异曲线不能相交

从曲线 I_1, $x \sim y$.

从曲线 I_2, $x \sim z$.

因此 $y \sim z$.

但从曲线 I_1 和 I_2，$y \succ z$矛盾。



偏好的实例——完全替代品

完全替代品

- 如果消费者愿意按照固定的比率用一种商品来替代另一种商品，那么这两种商品是完全替代品。

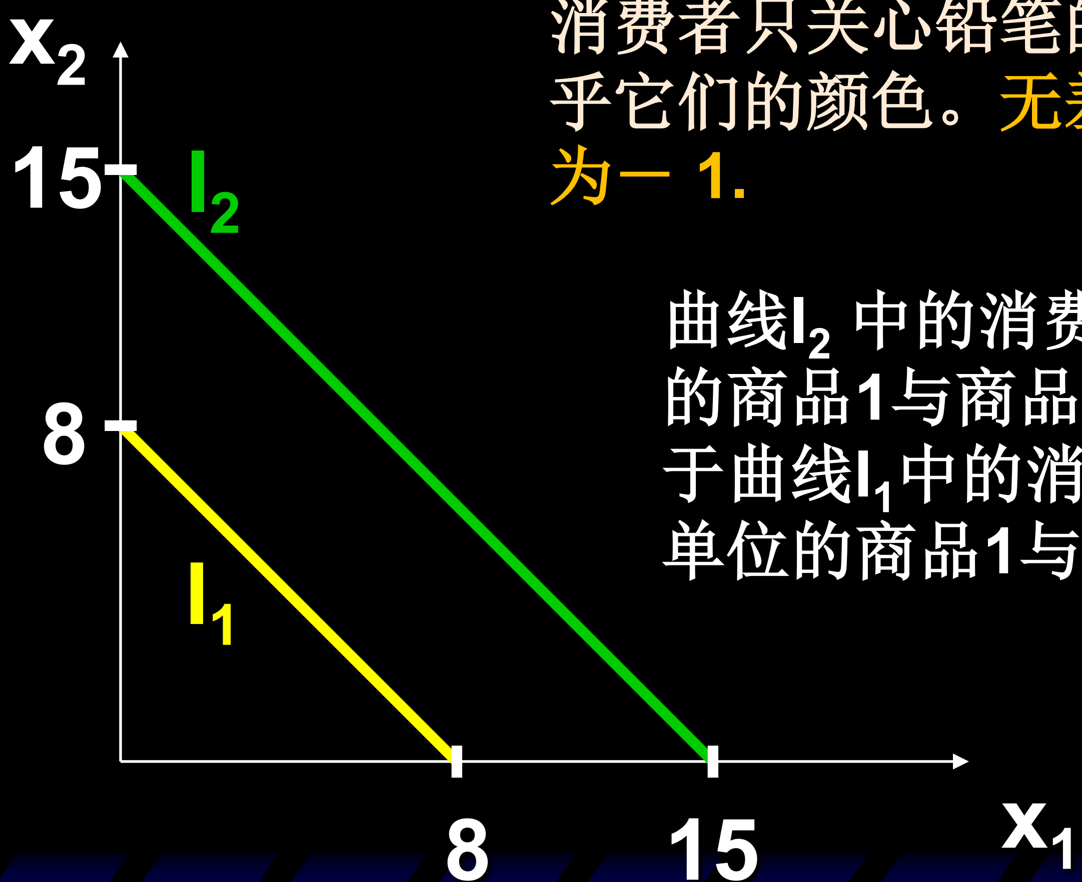
- 完全替代品的一个重要特点是无差异曲线具有固定的斜率。

完全替代品

- 假设我们要在红、蓝两种铅笔之间进行选择，有关的消费者喜欢铅笔，但一点也不在乎铅笔的颜色。

- 选一个消费束，比方说（10，10）。那么，对于这个消费者来说，任何包括20支铅笔的消费束与消费束（10，10）是一样的。

完全替代品



消费者只关心铅笔的总数，而不在乎它们的颜色。无差异曲线的斜率为－1.

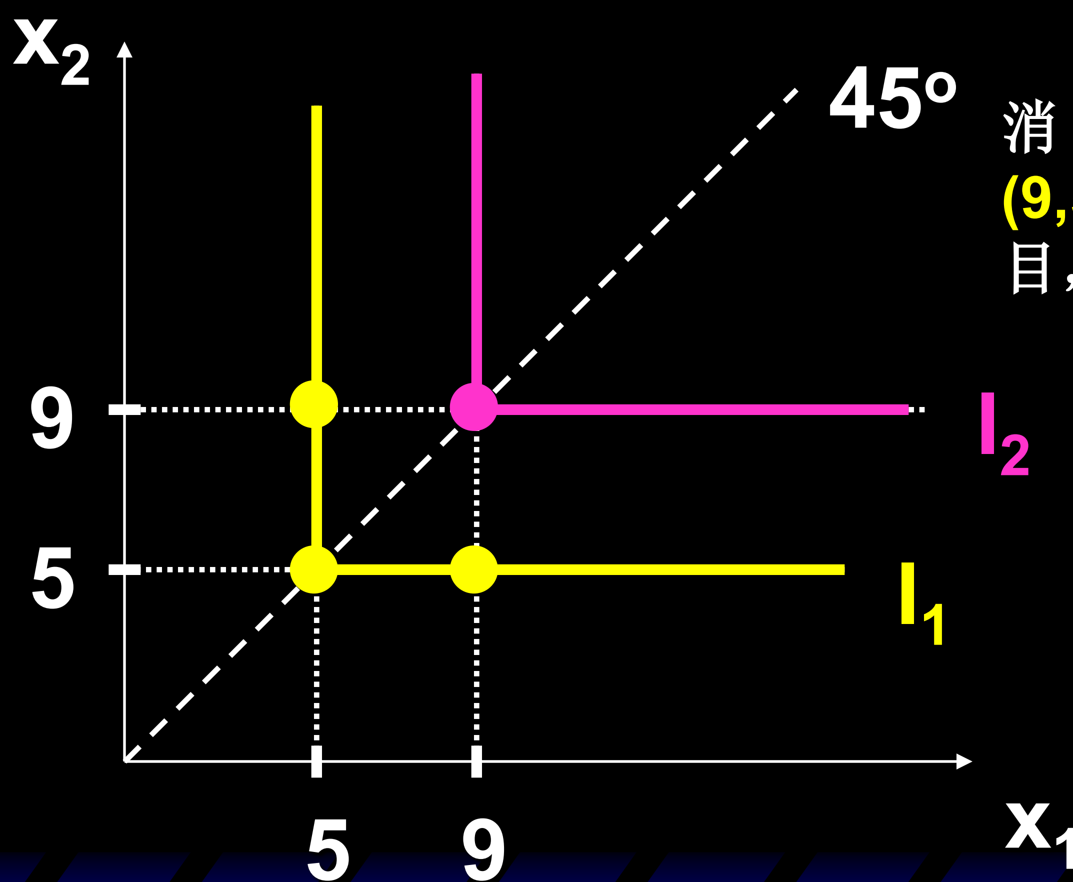
曲线I_2中的消费束中有15个单位的商品1与商品2，并且严格偏好于曲线I_1中的消费束，它包含8个单位的商品1与商品2。

偏好的实例——完全互补品

如果消费者总是以固定比例消费商品1与商品2（比如一比一），那么称这两种商品为完全互补品，且只有这两种商品组成的组合数目才影响消费束的偏好顺序

如：鞋子

完全互补品



消费组合 (5,5), (5,9) 和 (9,5) 含有相同的5套组合数目，因此受到同等偏好。

消费者更加偏好曲线I_2上的消费组合(9,9)，它含有9套组合数目。

无差异曲线的形状呈L型

偏好的实例——厌恶品

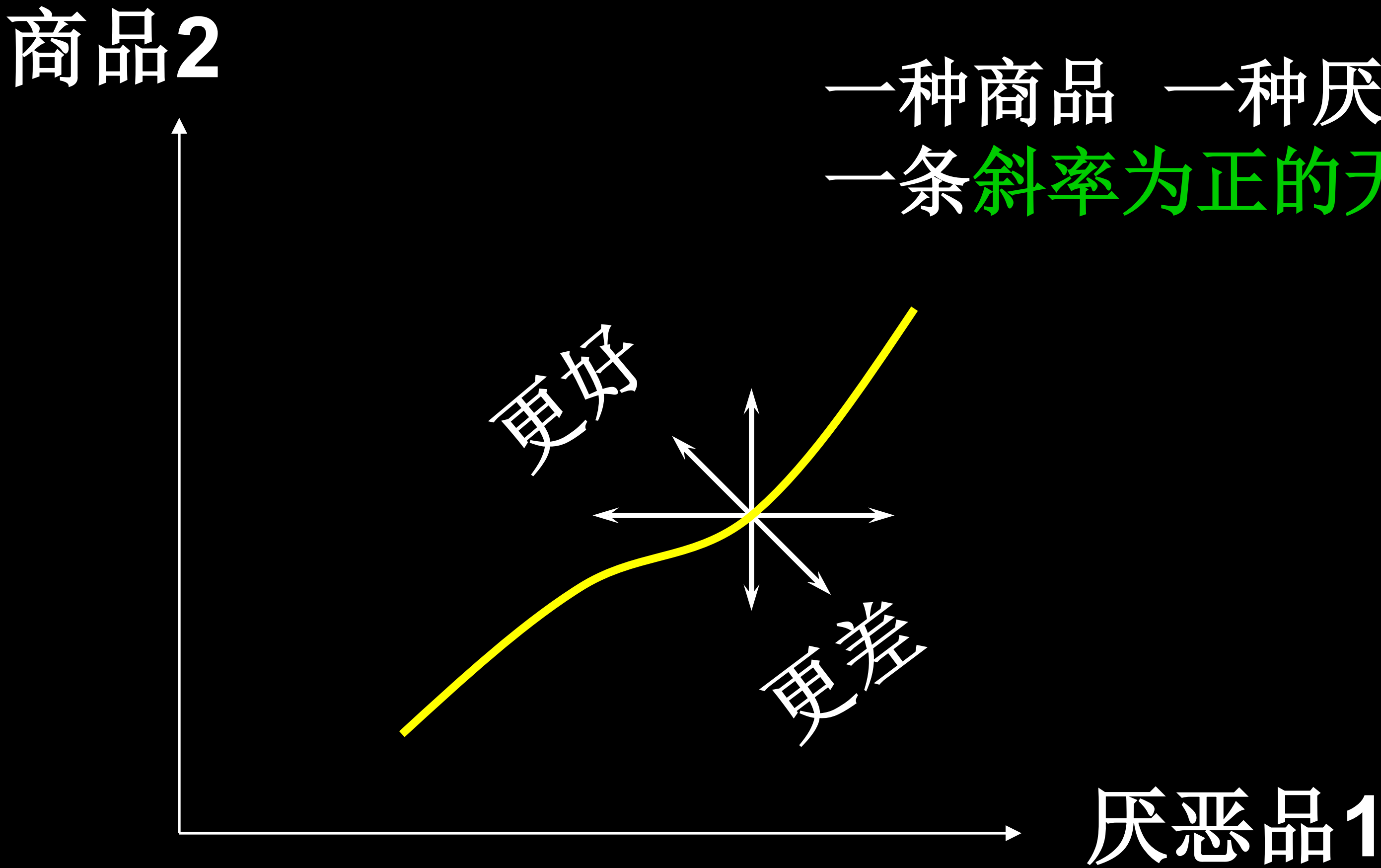
如果一种商品越少，消费者越偏好，那么称这种商品为厌恶品。

– 比如：

污染：噪音、灰尘、污染空气

厌恶品

一种商品 一种厌恶品
一条斜率为正的无差异曲线



厌恶品

选一个由一些香肠和一些凤尾鱼组成的消费束（x_1，x_2）。假设消费者喜爱香肠而不喜爱凤尾鱼

如果我们给消费者更多的凤尾鱼，那该如何处理香肠的消费数量以使消费者维持相同的无差异曲线?

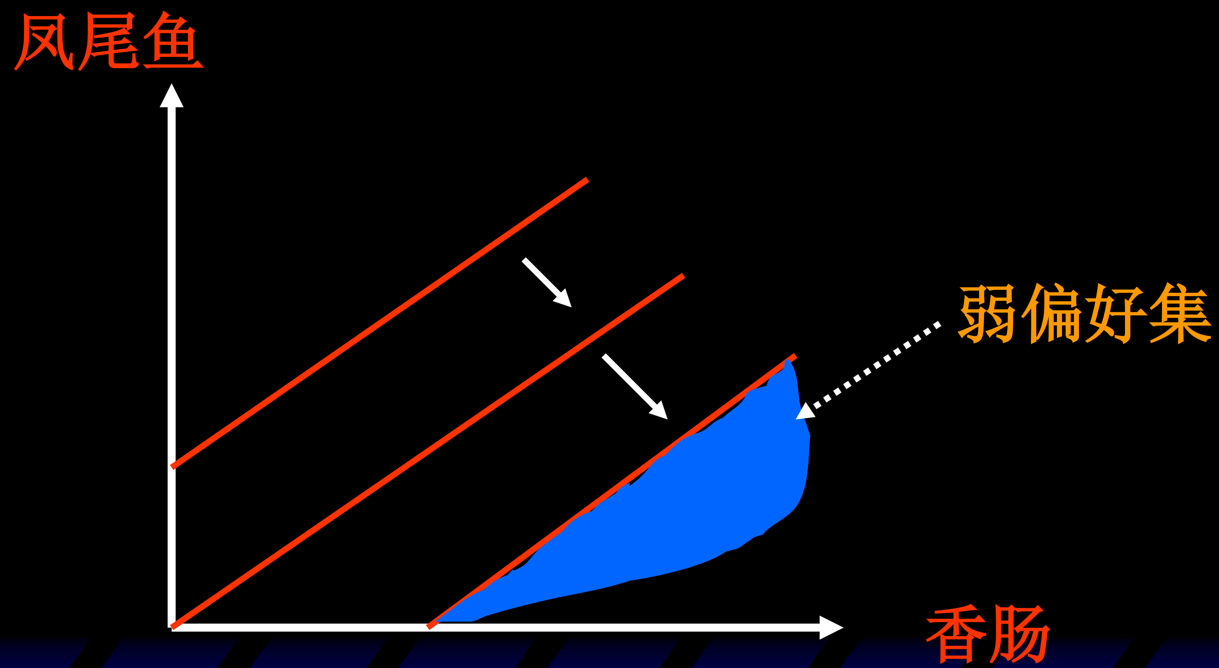
显然，我们得给他一些额外的香肠来补偿他对凤尾鱼的忍受

这样，消费者的无差异曲线必定是向右上方倾斜

厌恶品

偏好增加的方向？

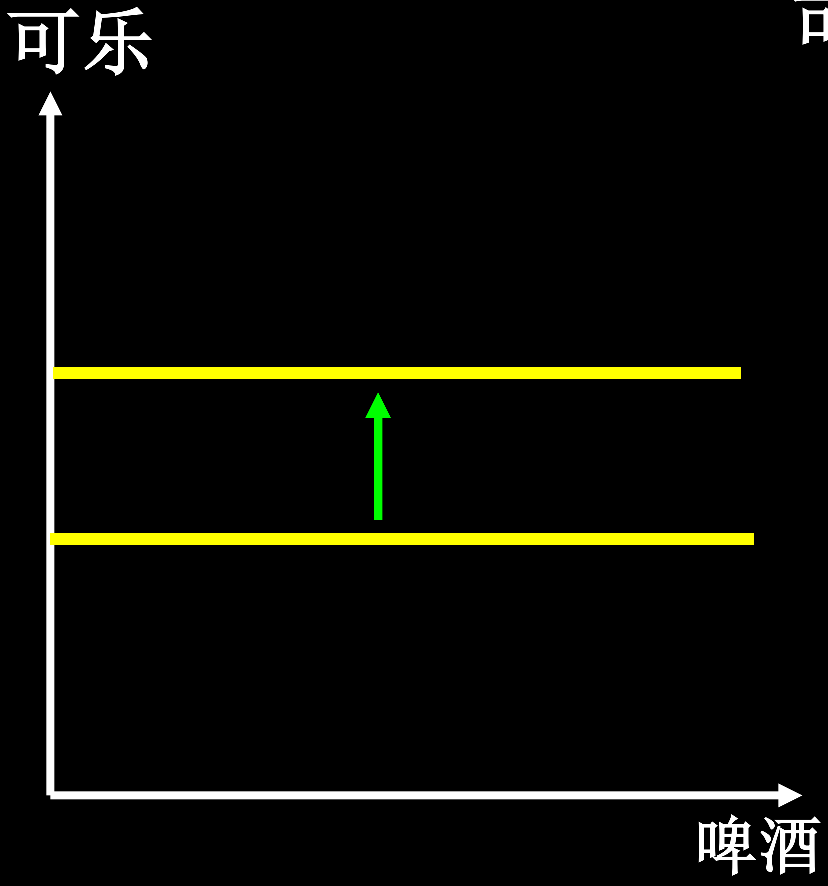
— 指向右下方，朝着凤尾鱼消费减少和香肠消费增加的方向，如图中箭头所示。无差异曲线的斜率斜率为正数

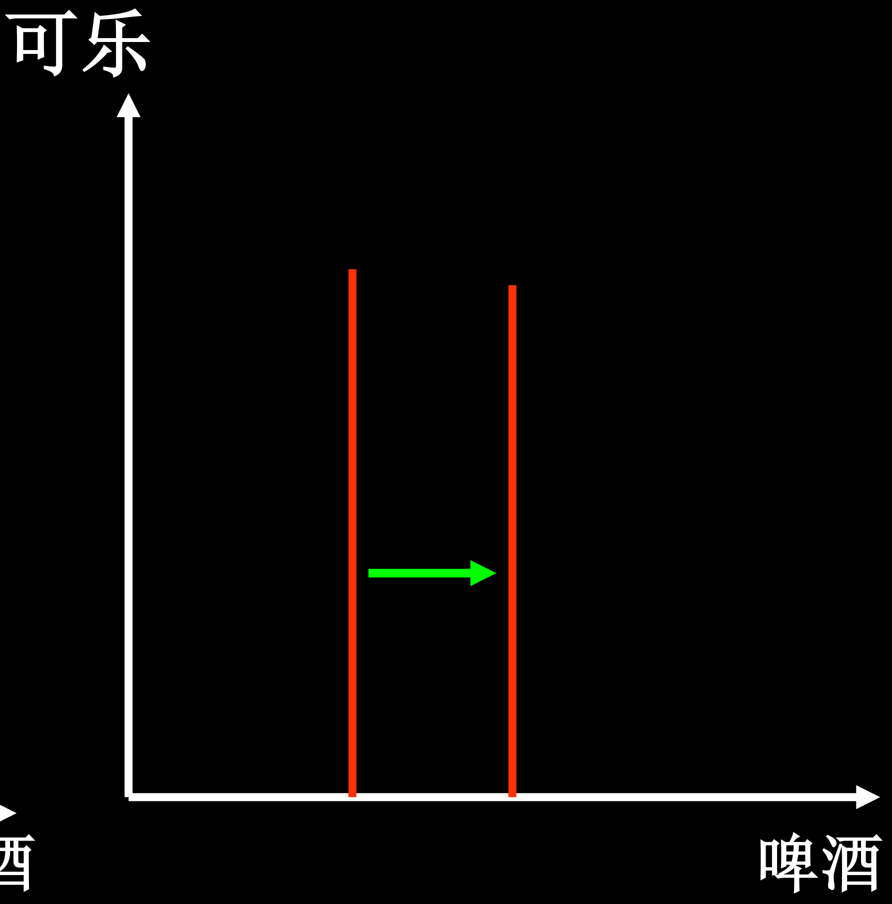


偏好的实例——中性商品

- ✓ 中性商品是消费者无论从哪方面说都不在乎的商品。
- ✓ 如果消费者正好对凤尾鱼持中立态度，那情况如何？
  - — 消费者只关心他能得到多少香肠，而毫不关心他将得到多少凤尾鱼
  - — 他得到的香肠越多越好，但增加一些凤尾鱼对他没有任何影响

中性商品





偏好的实例——餍足

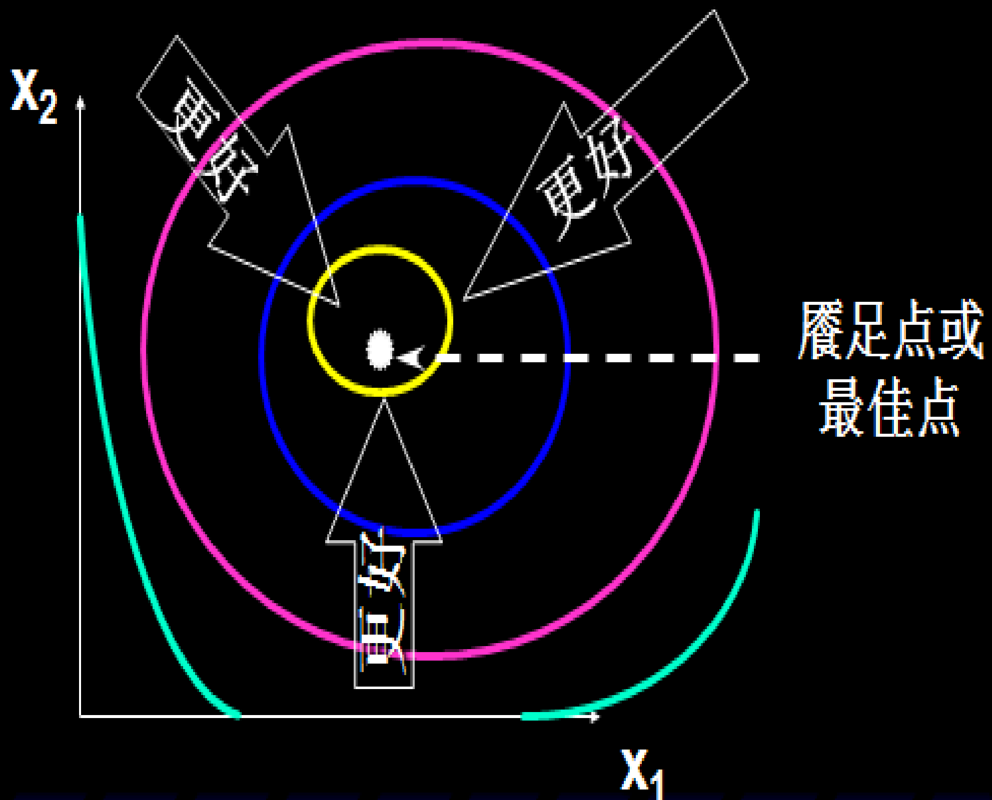
对于消费者来说有一个最佳的消费束，就他自己的偏好而言，越接近这个消费束越好。

例如，假设消费者有某个最偏爱的消费束（x_1，x_2），离这个消费束越远，他的情况就越糟。

在这种情况下，（x_1，x_2）即为餍足点或最佳点

对于有餍足点的无差异曲线看来是怎样的?

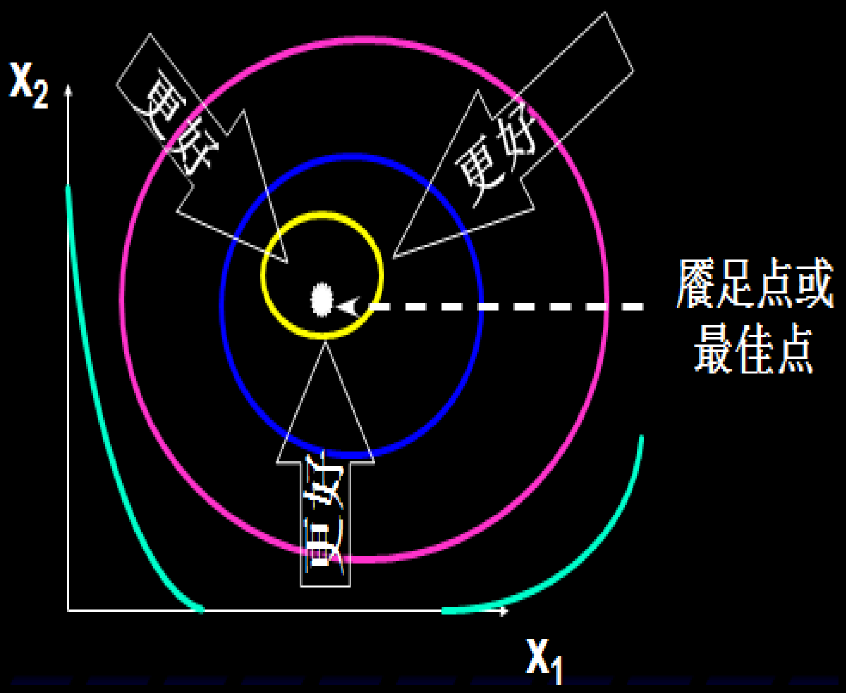
餍足



当消费者拥有的两种商品都“太少”或“太多”时，无差异曲线的斜率为负数

当他拥有的其中一种商品“太多”时，无差异曲线的斜率为正数

餍足



当消费者拥有的其中一种商品太多时，这种商品就成了厌恶品——减少对厌恶品的消费使他更接近最佳点

如果他拥有的两种商品都太多，那么这两种商品都是厌恶品，减少对这两种商品的消费使他接近最佳点

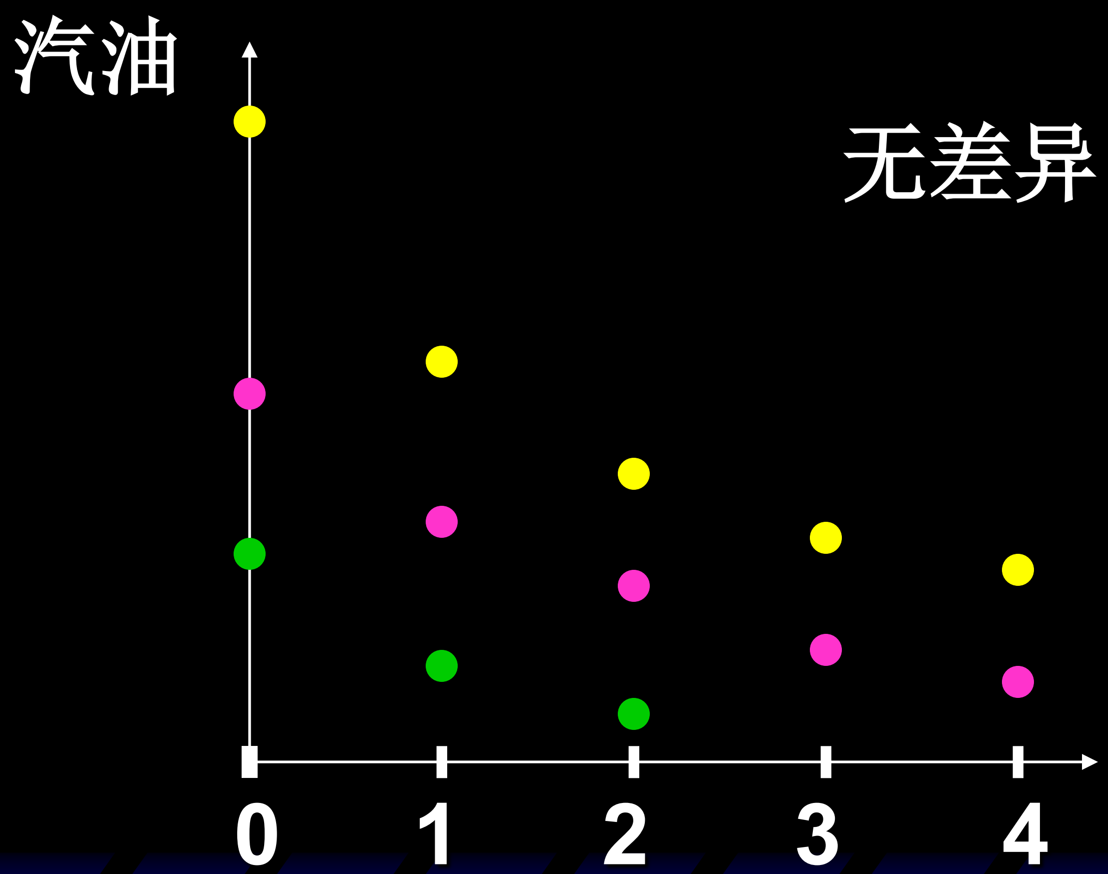
离散商品的无差异曲线

如果我们能够得到一种商品的任何数量，比如水，那么称这种商品为无穷可分商品。

如果一种商品是以数量1，2，3等成块的出现，那么称之为离散商品; *比如* 手工制品，轮船，冰箱。

假设商品2是无限可分商品（汽油），而商品1是一种只能以整数量获得的离散商品（手工制品）。那么无差异曲线是什么样子?

离散商品的无差异曲线



无差异曲线为离散的点。

良态偏好

如果偏好关系是单调且凸的，那么这种偏好关系为良态偏好。它是消费者对绝大多数正常品所具有的偏好。

单调性：越多越受偏好（*比如，*没有餍足点 ，商品是嗜好品）。

良态偏好

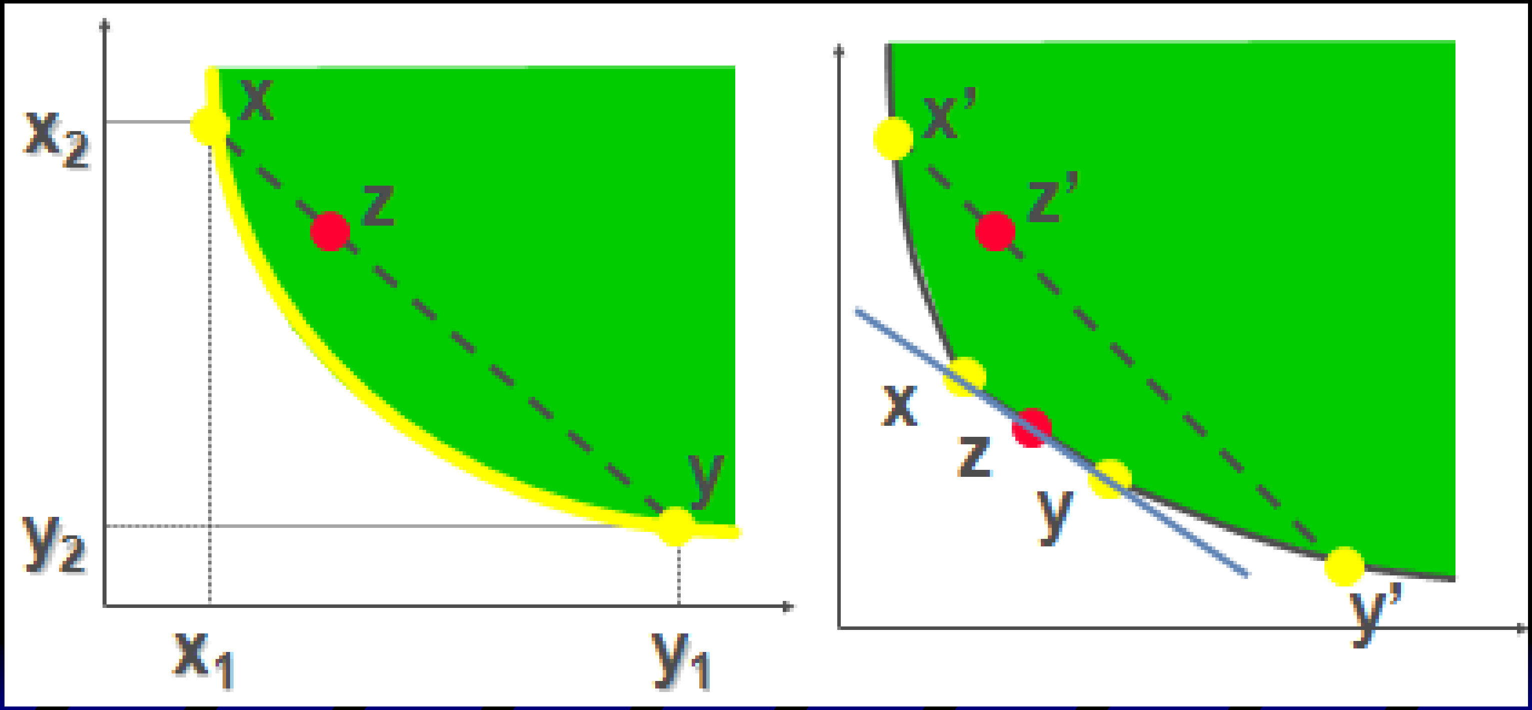
凸性

- 假设是说消费者认为平均消费束比极端消费束更好。
  - ✓ 也就是，在同一条无差异曲线上取两个消费束，有（x_1，x_2）～(y_1，y_2)，取这两个消费束的加权平均 $[tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2]$，其中 $t\in[0,1]$，这一消费束弱偏好于原来的任一个消费束，即

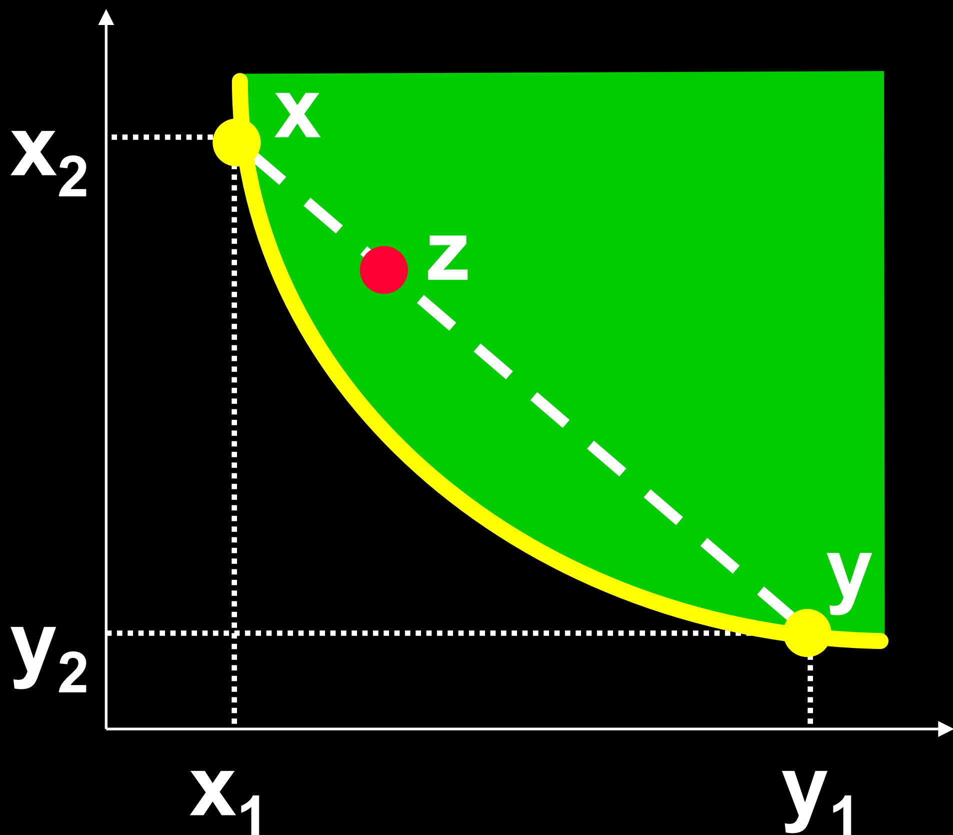
$$[tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2] \succeq (x_1, x_2) or (y_1, y_2)$$

凸性

凸集具有的特征：如果你在凸集上任取两点，再画一条线把这两点连接起来，则这条线段完全在弱偏好集内。



严格凸性



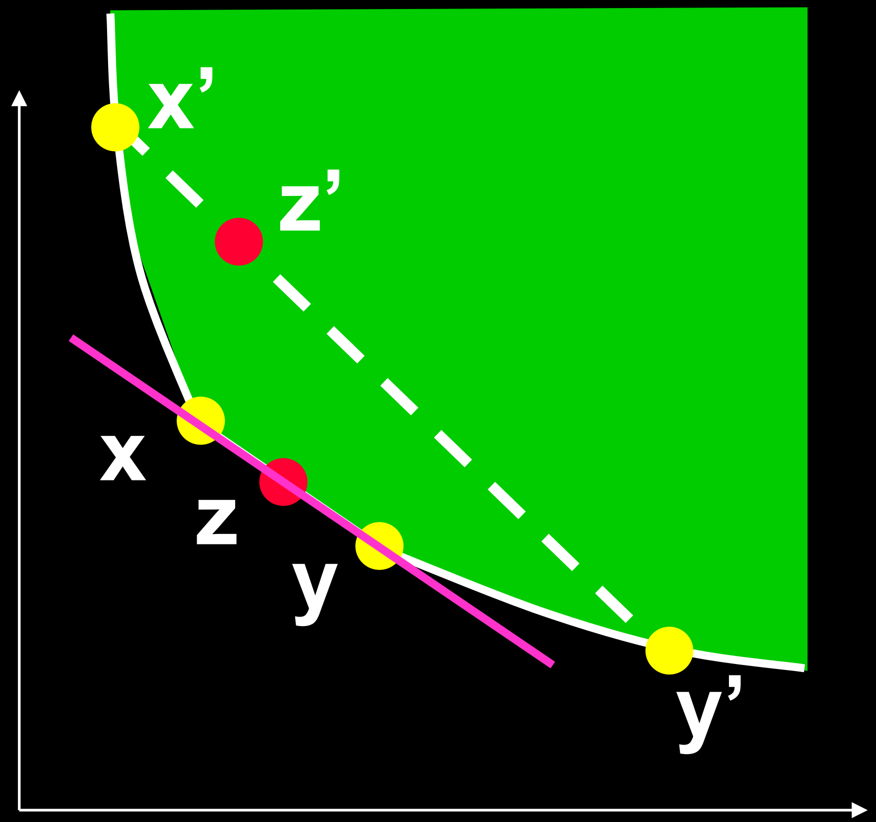
如果消费束组合z是严格偏好于消费束x与消费束y，那么这种偏好关系是严格凸性的

$$[tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2]$$

其中$t\in(0,1)$，

$$[tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2]\succ(x_1,x_2)or(y_1,y_2)$$

良好性状偏好 – 弱凸性



如果至少有一个消费束组合z相对于消费束x或者y来说受到平等偏好，那么这种偏好关系为弱凸性的。

非凸性偏好

- ✓ 为什么我们要假定良态偏好是凸的？

  因为在大多数情况下，各种商品是一起消费的。

- ✓ 而对于非凸的偏好：例如，我喜爱冰淇淋和橄榄，但我不喜欢同时吃这两样东西。

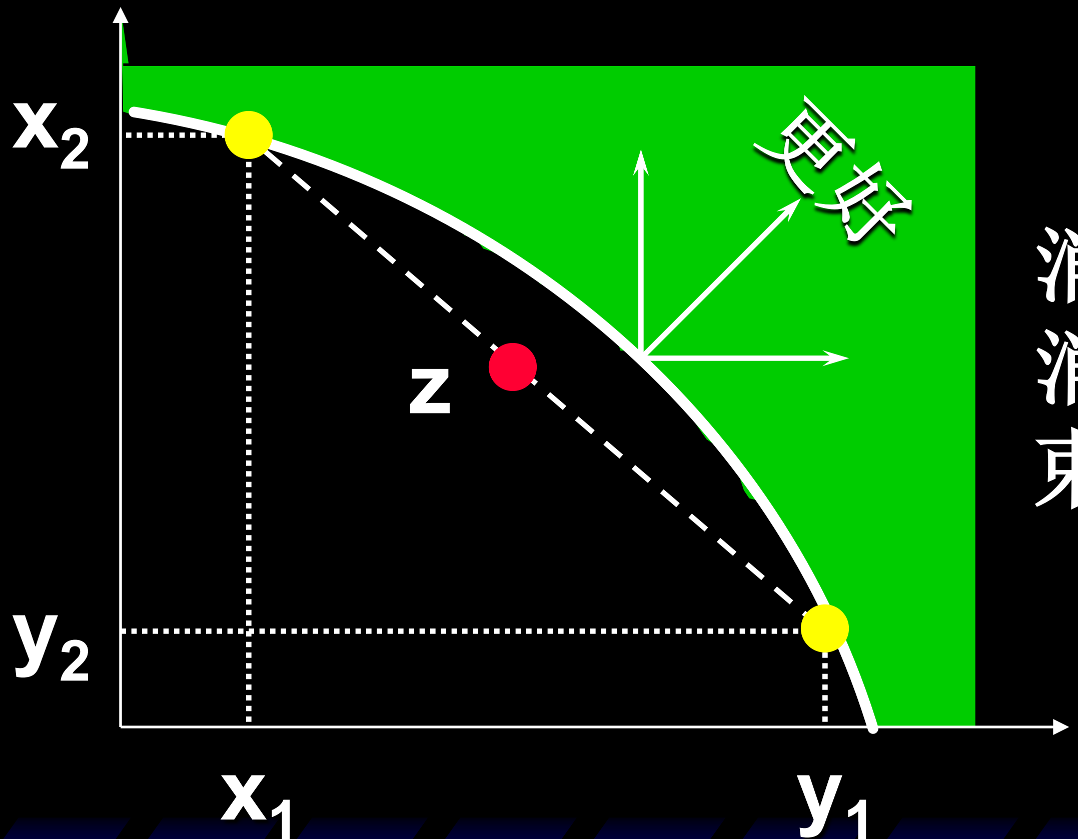
- ✓ 例子：我也许对消费8盎司冰淇淋和2盎司橄榄，或者8盎司橄榄和2盎司冰淇淋无差异，但是无论哪个消费束都比各消费5盎司的冰淇淋和橄榄要好。

非凸性偏好

✓ 凹状偏好：

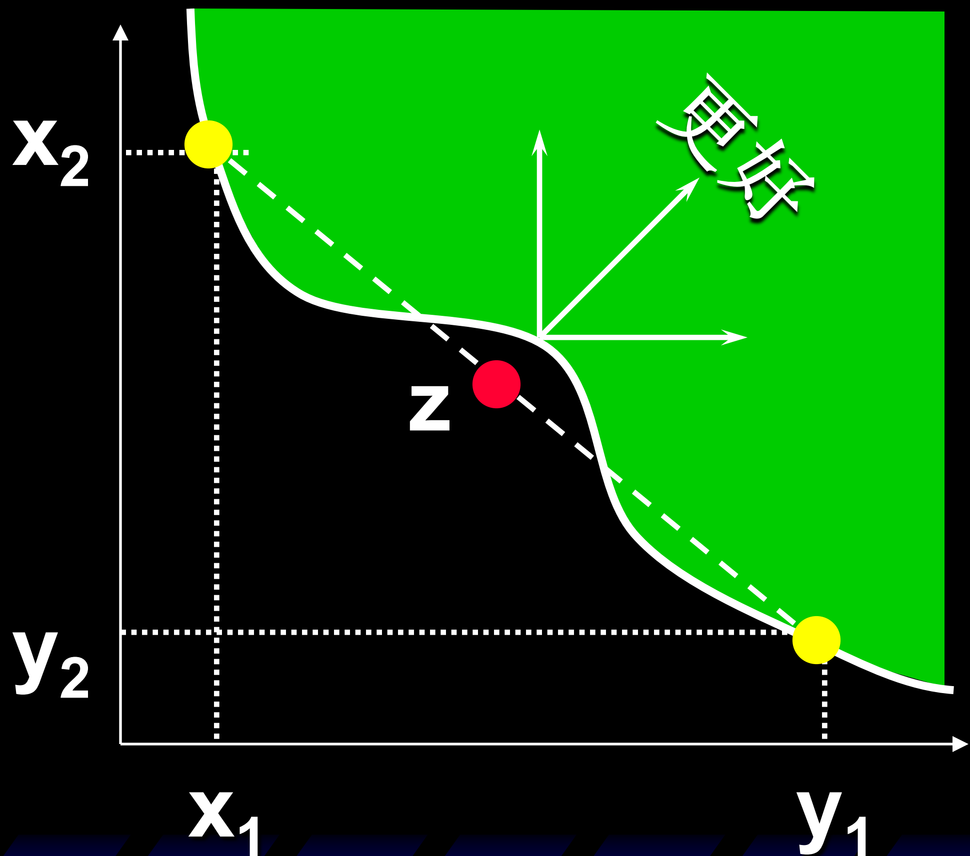
假设有两种商品，如果消费者对端点消费束的偏好甚于对平均消费束的偏好，那么消费者对这两种商品的偏好就是凹状的

非凸性偏好



消费束组合z比消费束x和消费束y更不受偏好

更多非凸性偏好



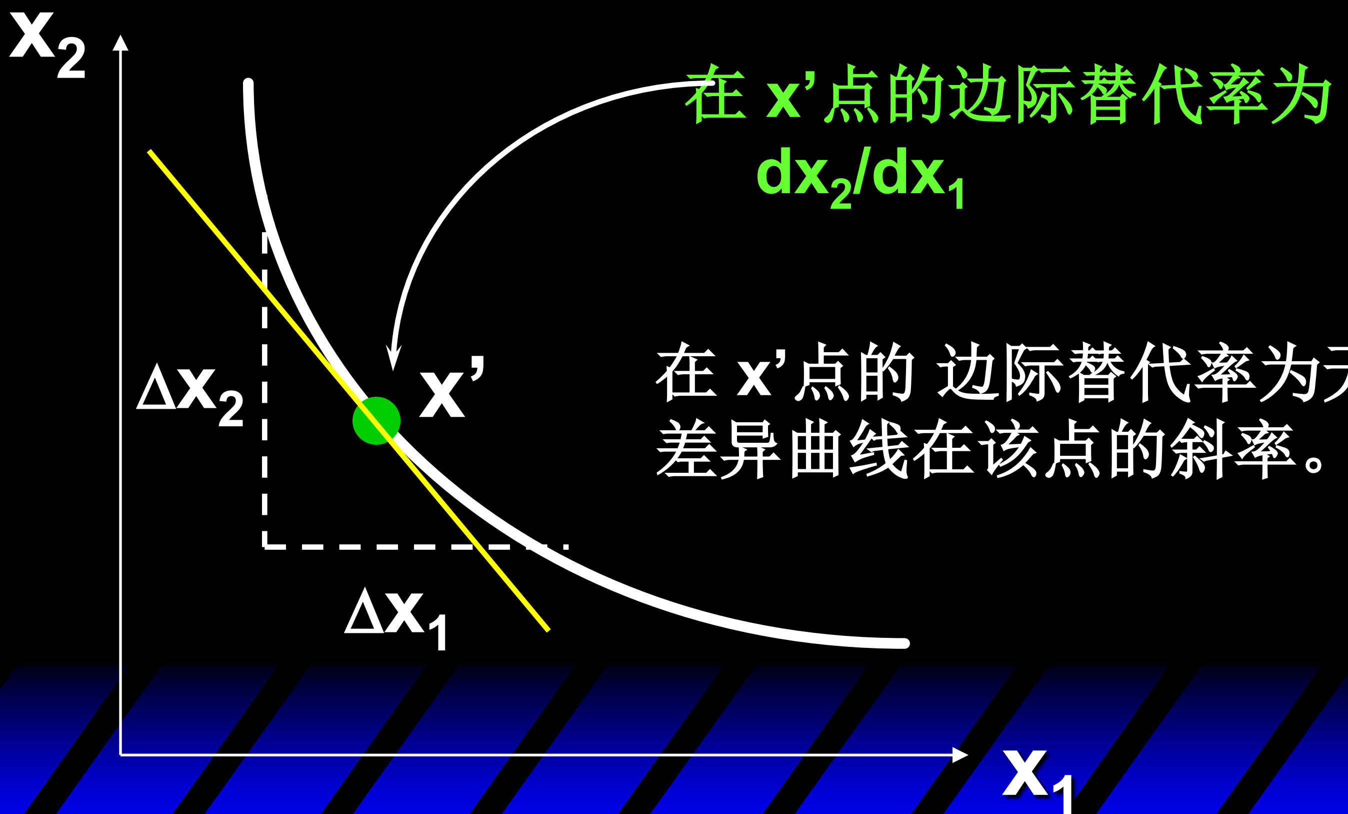
消费束组合z比消费束x和消费束y更不受偏好

无差异曲线的斜率

边际替代率

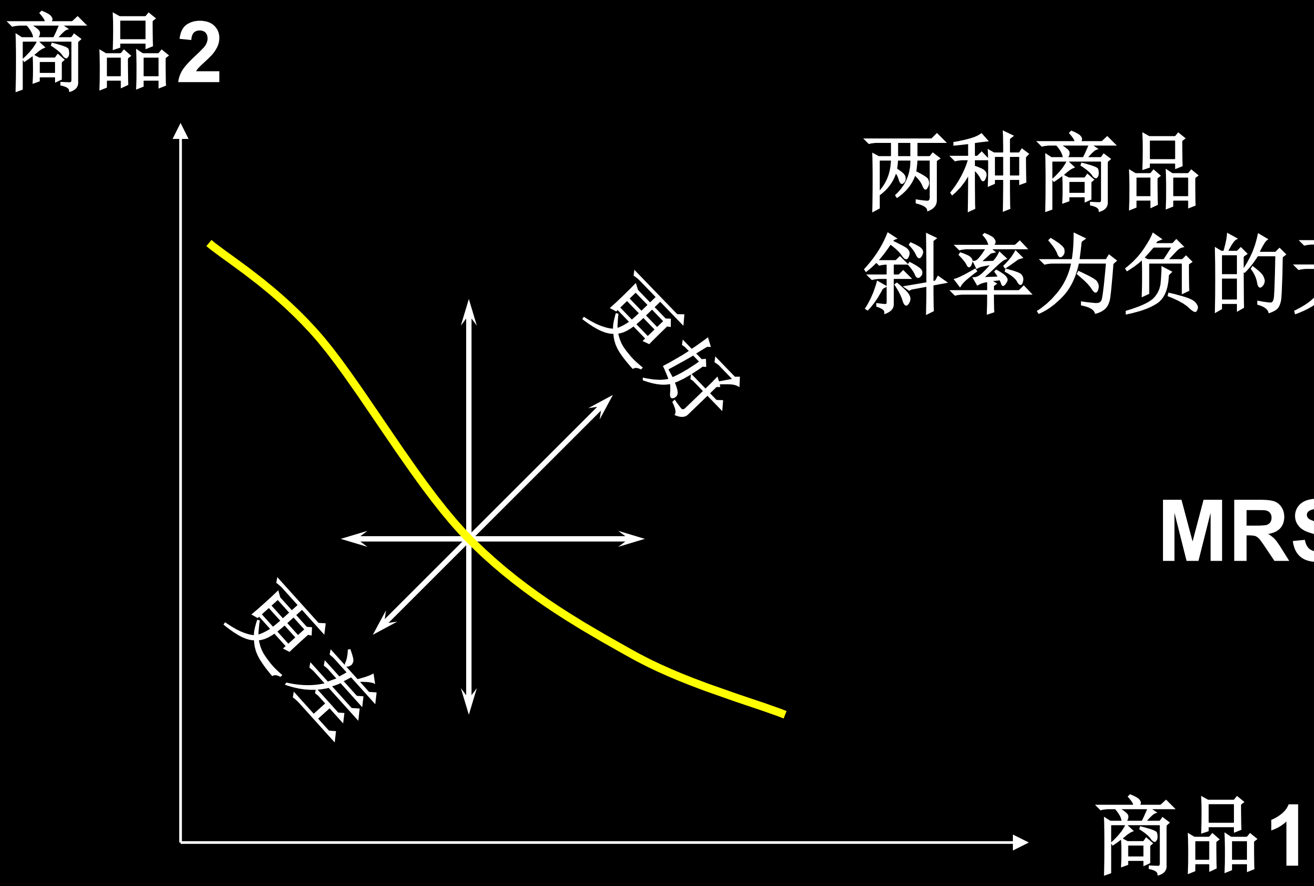
定义：维持满足水平不变时，消费者愿意用一单位的商品x_1替换商品x_2的数量称为x_1对x_2的边际替代率用数学表示为：

$MRS_{1,2} = \Delta x_2 / \Delta x_1$



在 x'点的 边际替代率为无差异曲线在该点的斜率。

边际替代率与无差异曲线性质



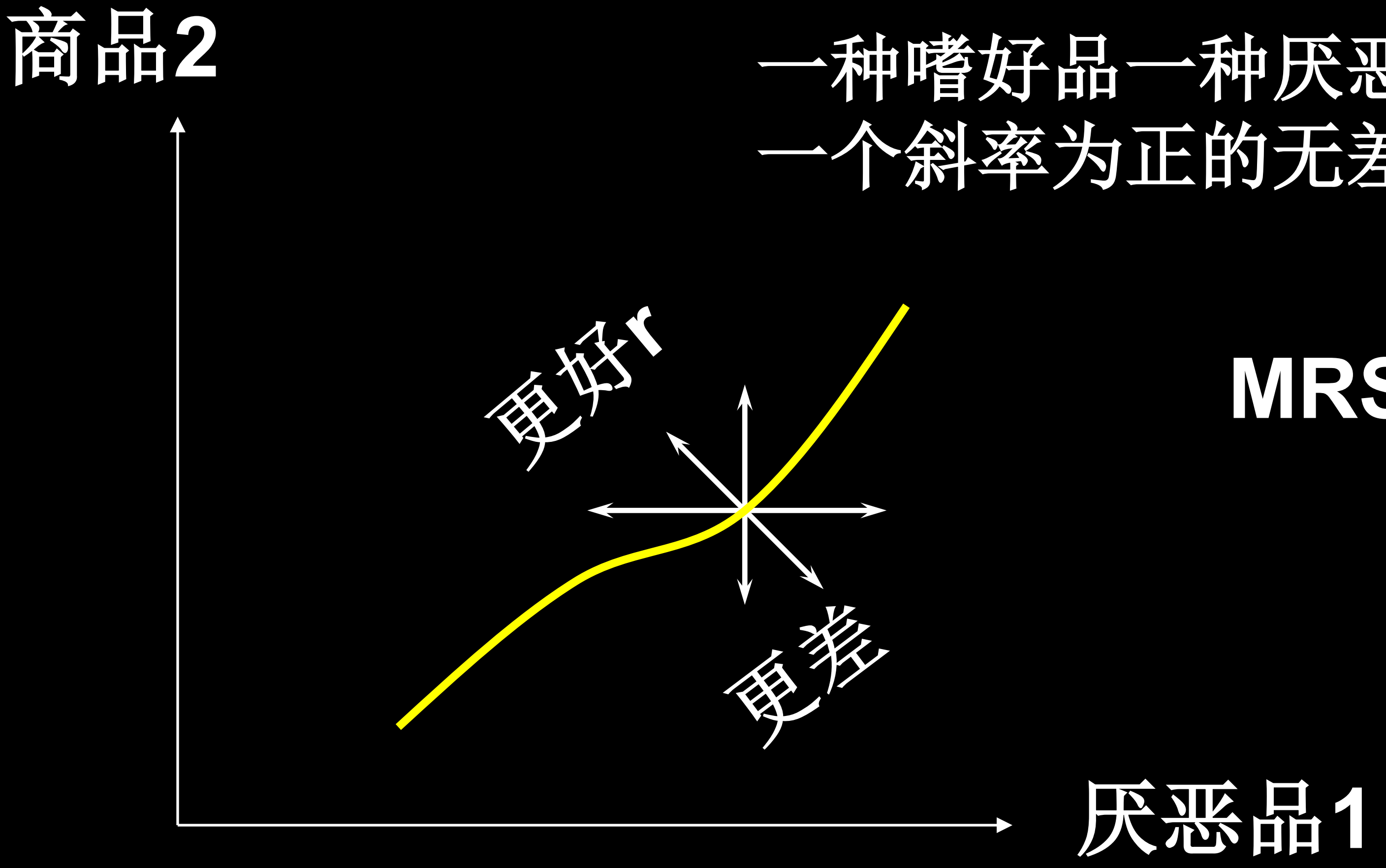
两种商品
斜率为负的无差异曲线

MRS < 0.

边际替代率与无差异曲线性质

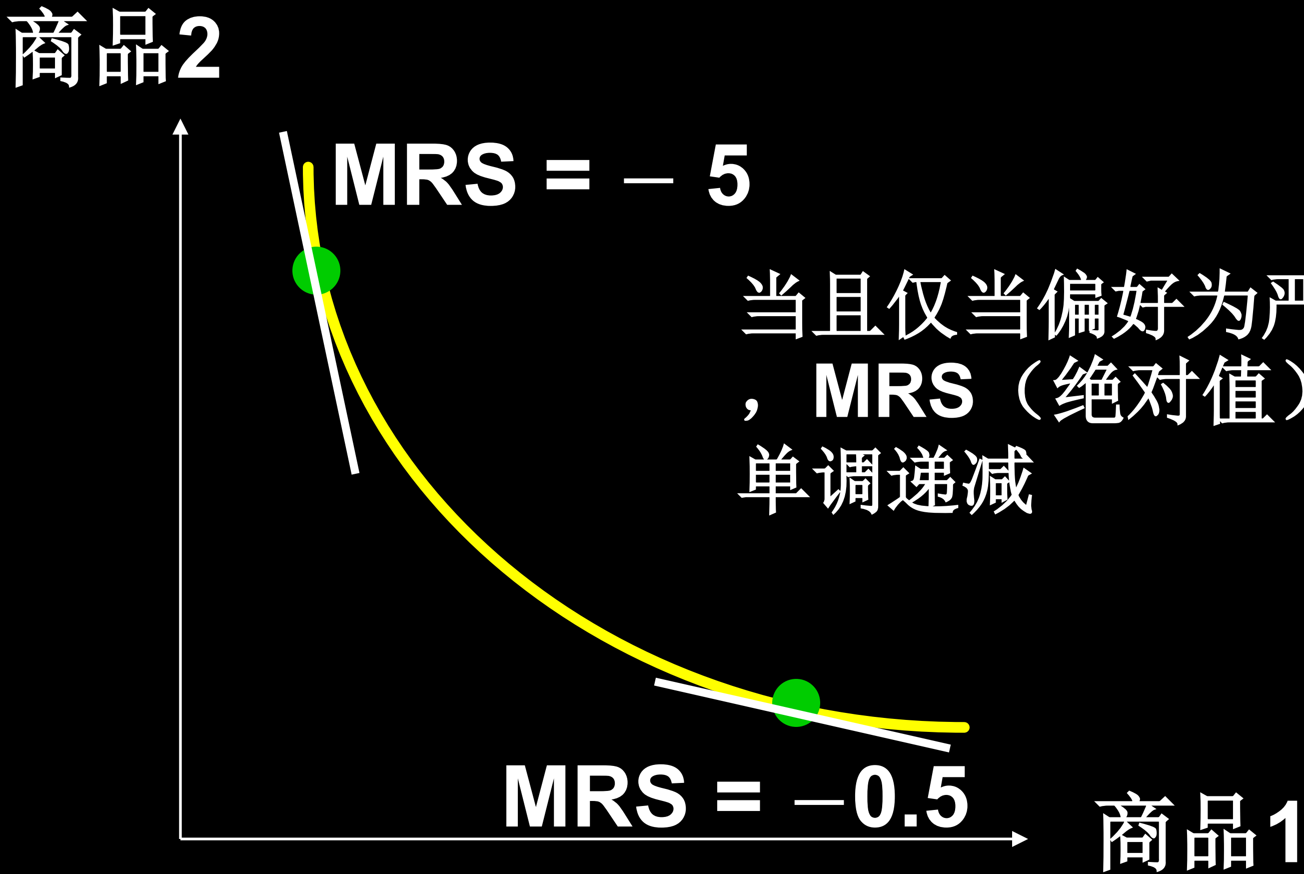
一种嗜好品一种厌恶品

一个斜率为正的无差异曲线



MRS > 0.

边际替代率与无差异曲线性质



当且仅当偏好为严格凸性时，MRS（绝对值） 是x_1的单调递减

第四章　效用

效用函数

对于消费束(x_1, x_2)的偏好超过对于消费束(y_1, y_2)的偏好，其充分必要条件是(x_1, x_2)的效用大于(y_1, y_2)的效用。

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Longleftrightarrow u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$$

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Longleftrightarrow u(x_1, x_2) < u(y_1, y_2)$$

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Longleftrightarrow u(x_1, x_2) = u(y_1, y_2)$$

效用函数

效用函数的数值，只在对不同消费束进行排序时才有意义。任意两个消费束之间的效用差额的大小是无关紧要的。这种效用强调消费束的排列次序，所以它被称作序数效用

表 4.1 指派效用的不同办法

商品束	效用1(u_1)	效用2(u_2)	效用3(u_3)
A	3	17	−1
B	2	10	−2
C	1	0.002	−3

表示B严格偏好于C，但并不表示B比C好1倍。

效用函数就是按照一定的偏好特征给消费束赋值，使之保持一定的次序。在次序不变的情况下，可以有多种赋值方法

构造效用函数

效用函数和无差异曲线的关系

- 考虑以下消费束（4, 1），（2, 3） and （2, 2）.
  假设(2, 3) $\succ$ (4, 1) ~ (2, 2).
- 分配给上述消费束保持偏好顺序的任何效用
  e. g. U(2, 3) = 6 > U(4, 1) = U(2, 2) = 4
  这些被分配的效用称为效用水平。
  - 无差异曲线表示相同偏好的消费束集合。
  - 相同偏好⇒同样的效用水平

效用函数

单调变换

- 单调变换就是在保持效用次序不变的条件下将一组数字变换成另一组数字的方法
- 如果u代表偏好关系的效用函数
- 如果函数f是一个严格递增函数
- V = f(u)代表的偏好与原函数U代表的偏好相同

效用函数的几个例子

一个给定的偏好关系的效用函数不止一个

假设 $U(x_1,x_2) = x_1x_2$ 表示一种偏好关系

我们考虑消费束 (4,1),(2,3) 和 (2,2)

$U(2,3) = 6 > U(4,1) = U(2,2) = 4;$

也即, $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.

效用函数的几个例子

$U(x_1,x_2) = x_1x_2$ ⇒ $(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.

令$V = U^2$.

那么有 $V(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2$ 且

$V(2,3) = 36 > V(4,1) = V(2,2) = 16$

同样,

$(2,3) \succ (4,1) \sim (2,2)$.

一个效用函数的单调变换还是一个效用函数，这个效用函数代表的偏好与原效用函数代表的偏好相同

一些其它的效用函数以及它们的无差异曲线

考虑用

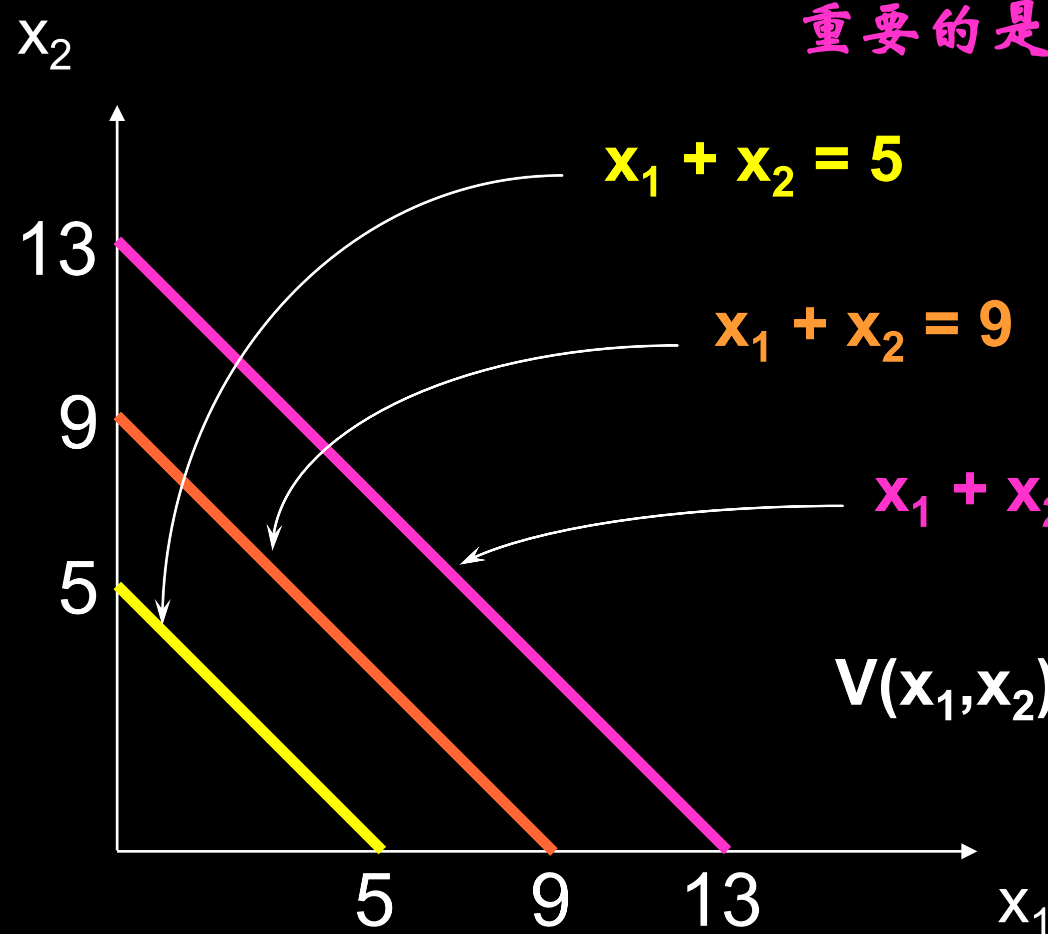
$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2$代替

$U(x_1,x_2) = x_1x_2$

那么对于这个表示完全替代关系的无差异曲线是怎样的？

完全替代品的无差异曲线

重要的是商品的总数量



$V(x_1,x_2) = x_1 + x_2.$

所有的无差异曲线都是线性和平行的

完全替代品的无差异曲线

假设消费者为了补偿他所放弃的1单位商品1，要求获得2单位的商品2。效用函数采取的形式 $U(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$

无差异曲线的斜率为-2

替代比例是1：2

完全替代偏好可以用以下形式的效用函数描述：

$$U(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$$

典型的无差异曲线的斜率为-a/b

替代比例：b:a

一些其它的效用函数以及它们的无差异曲线

考虑用函数 $W(x_1,x_2) = \min\{x_1,x_2\}$

那么完全互补品的无差异曲线是怎样的？

✓ L形无差异曲线的效用函数数学表达式：

效用= U(x，y)=min(ax, by)

其中，a和b是两个取正值的参数

重要的是最少的那一种商品决定效用！

完全互补品的无差异曲线

✓ 一个偏好8盎司咖啡配1盎司奶油的人，会选择16盎司咖啡配2盎司奶油。

✓ 对他来讲，只有同时选择两种商品才能增加效用

✓ 在咖啡-奶油的例子中，用x表示咖啡，y表示奶油，效用函数： $U(x, y)=\min(x, 8y)$

即8盎司咖啡配1盎司奶油提供8单位的效用，而16盎司咖啡配1盎司奶油仍然只提供8单位的效用

一些其它的效用函数以及它们的无差异曲线

一个效用函数有如下的形式

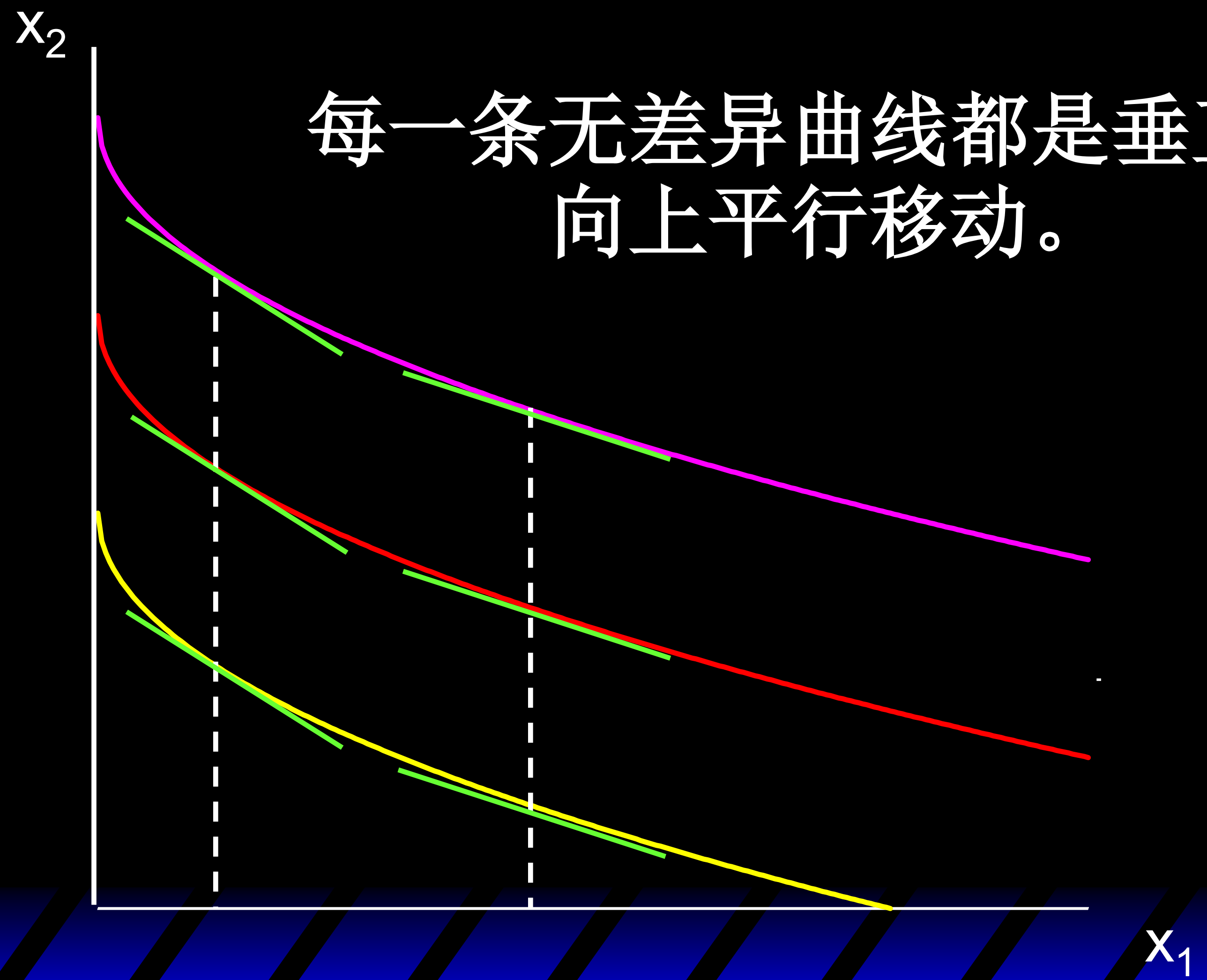
$$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$$

在这种情况下效用函数对商品2来说是线性的，对商品1来说是非线性的，意味着局部线性的效用。我们称之为拟线性效用函数。

例如 $U(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$.

拟线性无差异曲线

每一条无差异曲线都是垂直的
向上平行移动。



一些其它的效用函数以及它们的无差异曲线

任何有如下形式的效用函数

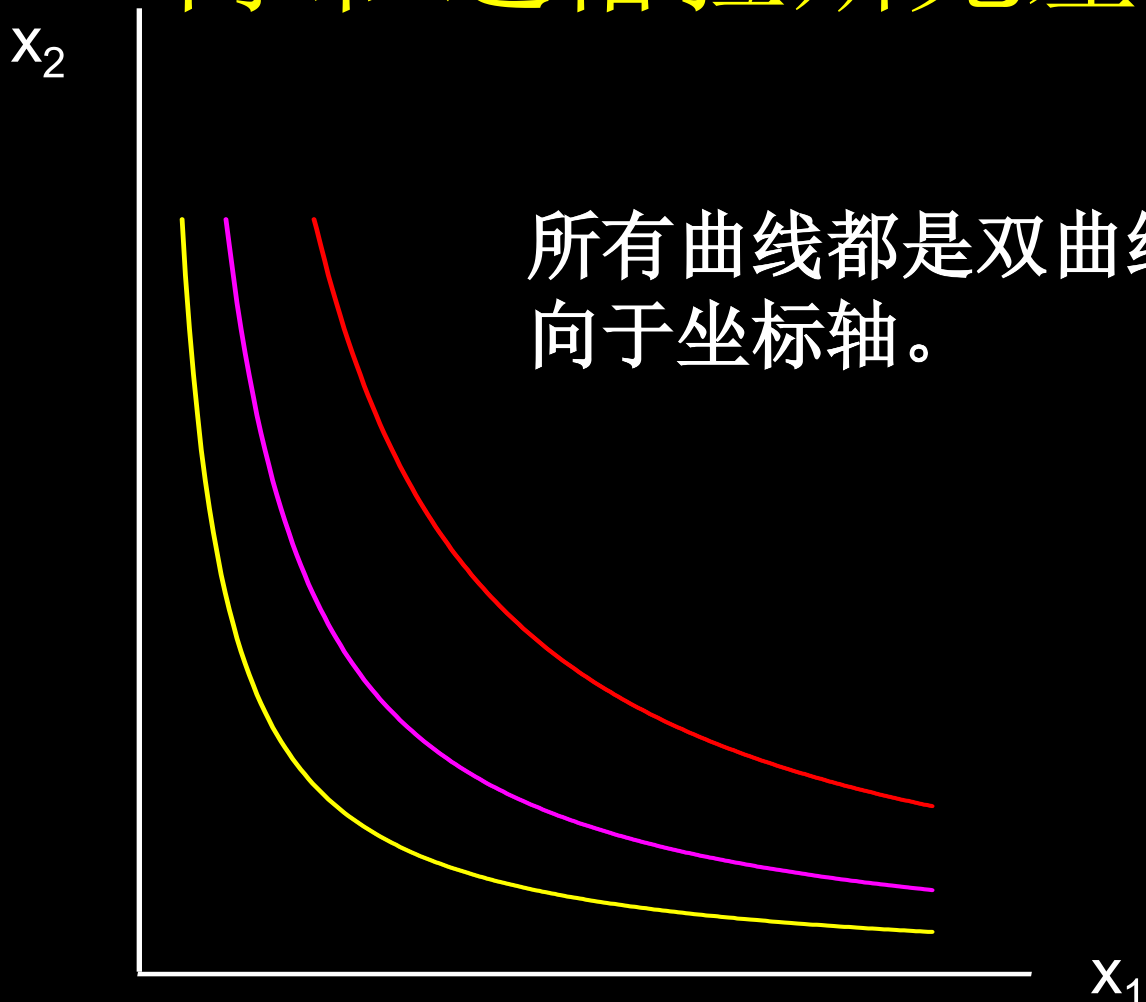
$$U(x_1,x_2) = x_1^{a} x_2^{b}$$

其中 a > 0， b > 0 叫做**柯布道格拉斯**效用函数

例如 $U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ (a = b = 1/2)

$V(x_1,x_2) = x_1 x_2^{3}$ (a = 1, b =3）

柯布-道格拉斯无差异曲线



所有曲线都是双曲线，渐进趋向于坐标轴。

柯布-道格拉斯无差异曲线

柯布-道格拉斯效用函数的单调变换同样表示同一个偏好，考察这个变化的两个例子

一般形式　$U(x_1,x_2) = x_1^{c} x_2^{d}$

（1）　$v(x_1,x_2) = \ln（x_1^{c} x_2^{d}）=c\ln x_1+d\ln x_2$

（2）　$v(x_1,x_2) = x_1^{a} x_2^{1-a}$

边际效用

考察一个消费者，他正在消费某消费束（x_1，x_2）。当我们稍微多给他一点商品1时，这个消费者的效用会怎样变化？

*这种变动率称作商品1 的边际效用，记为**MU_1**：*

$$MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

$$\Delta U = MU_1 \Delta x_1$$

边际效用和边际替代率

无差异曲线效用函数的一般形式为

U(x$_1$,x$_2$) ≡ k, k为常数

全微分得到如下方程：

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

且

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1$$

也即

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2}.$$

这是边际替代率。

拟线性效用函数的边际替代率

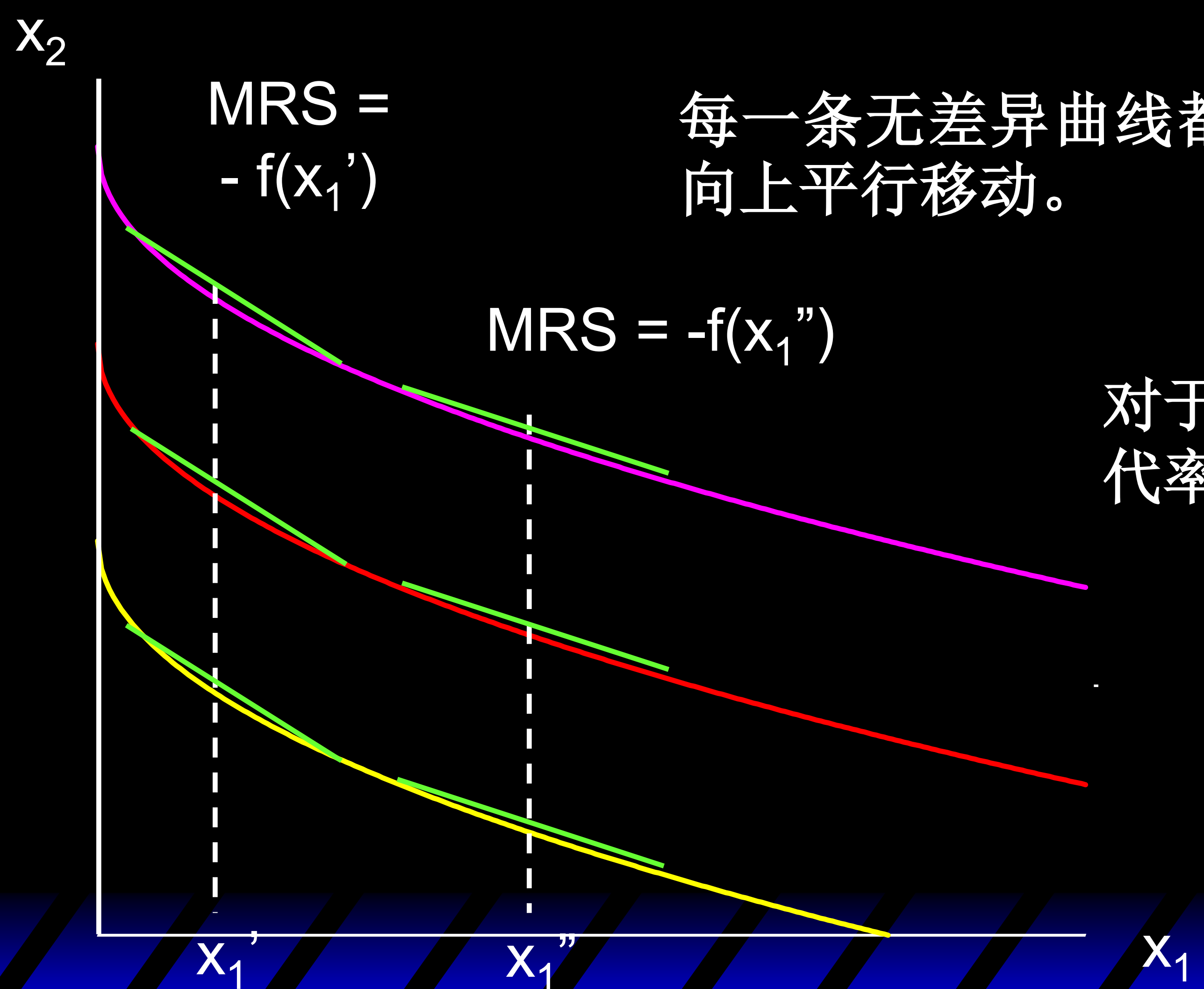
拟线性效用函数有如下形式：$U(x_1,x_2) = f(x_1) + x_2$.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = f'(x_1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1$$

因此 $$MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U / \partial x_1}{\partial U / \partial x_2} = -f'(x_1).$$

MRS = - f （x_1）与x_2无关，对于给定的x_1，拟线性效用函数的无差异曲线的斜率是一个常数，且与x_2无关。

拟线性效用函数的边际替代率



每一条无差异曲线都是垂直的向上平行移动。

对于给定的$\mathbf{x_1}$，边际替代率是一个常数。

柯布-道格拉斯函数的边际替代率

思考：对效用函数进行单调变化后，**MRS**和**MU**发生变化吗？

一般指数表达式形式：$U(x_1,x_2) = x_1^a x_2^b$

如果我们选择对数表达式：$V(x_1,x_2) = a\ln x_1 + b\ln x_2$

那么，我们就会有

$$MRS = -\frac{\partial v(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial v(x_1,x_2)/\partial x_2} = -\frac{a/x_1}{b/x_2} = -\frac{ax_2}{bx_1}$$

我们会发现：单调变化不可能改变边际替代率

单调变换与边际替代率

对一个效用函数使用单调变换并不改变消费束的偏好关系。

— **单调变换只是对无差异曲线重新标号**

当使用单调变换时，边际替代率会怎么样变化？

—而边际替代率的计算只关注沿既定无差异曲线的移动

单调变换与边际替代率

一般来说, 假如V = f(U) 且f 是一个严格单调递增函数。

$$MRS = -\frac{\partial V/\partial x_1}{\partial V/\partial x_2} = -\frac{f'(U)\times\partial U/\partial x_1}{f'(U)\times\partial U/\partial x_2}$$

$$= -\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}.$$

因此 MRS不受单调变换的影响。

- 思考

  x_1=一元纸币，x_2=十元纸币

- 写出效用函数，并画出无差异曲线

完全替代品

- 用人民币总数测定效用。
- 选$u(x_1, x_2)=x_1+10x_2$作为效用函数。
- 该效用函数的任何单调变换都是描述完全替代品合适的效用函数。