第十三章

风险资产

分布函数的均值

一个随机变量(r.v.) w 取值$w_1,\ldots,w_S$ 的概率分别为$\pi_1,\ldots,\pi_S$ $(\pi_1 + \cdot\cdot\cdot + \pi_S = 1)$。

这个分布的均值（期望值）就是这个随机变量预期值，可用下式表示：

$$\mathrm{E}[w] = \mu_W = \sum_{s=1}^{S} w_S \pi_S.$$

分布函数的方差

分布函数的方差为随机变量取值偏离其均值的平方的预期值。

$$\mathbf{var}[w]=\sigma_W^2=\sum_{s=1}^{S}(w_s-\mu_W)^2\pi_s.$$

方差测度了随机变量的变化幅度。

分布函数的标准差

标准差为方差的平方根;

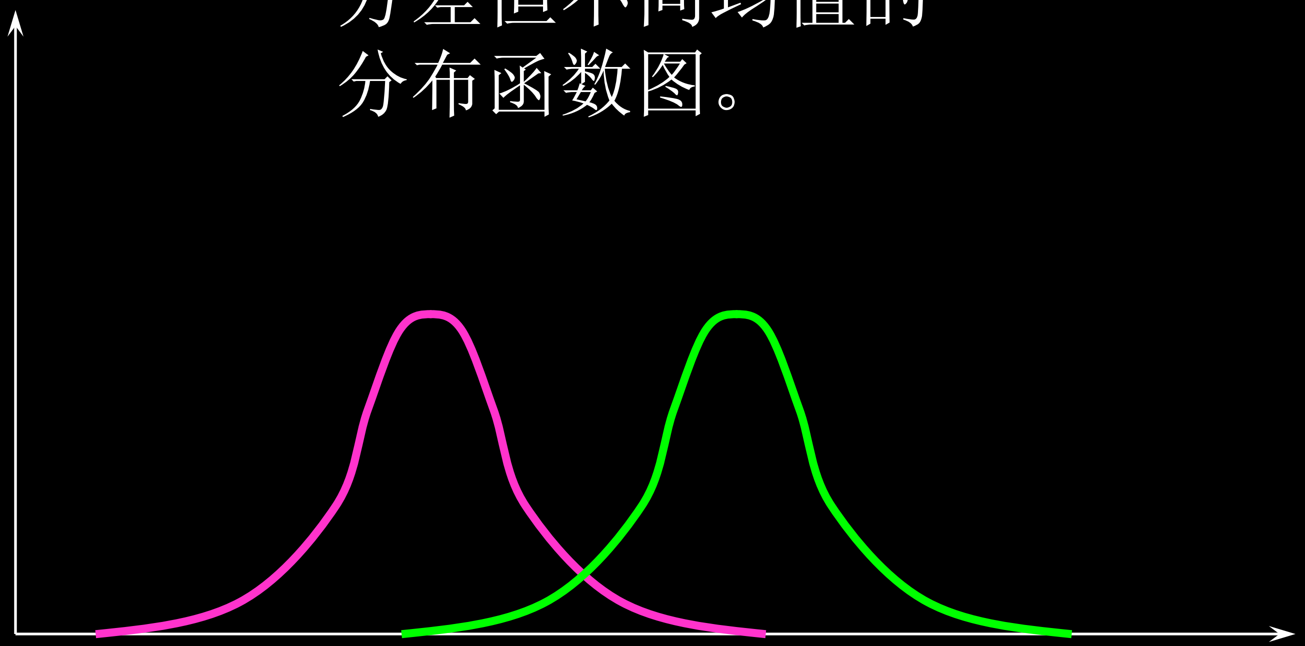
$$\text{st. dev}[w] = \sigma_w = \sqrt{\sigma_w^2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{S}(w_s - \mu_w)^2 \pi_s}.$$

标准差也测度了随机变量的变化幅度。

均值与方差

两个有着同样的
方差但不同均值的
分布函数图。

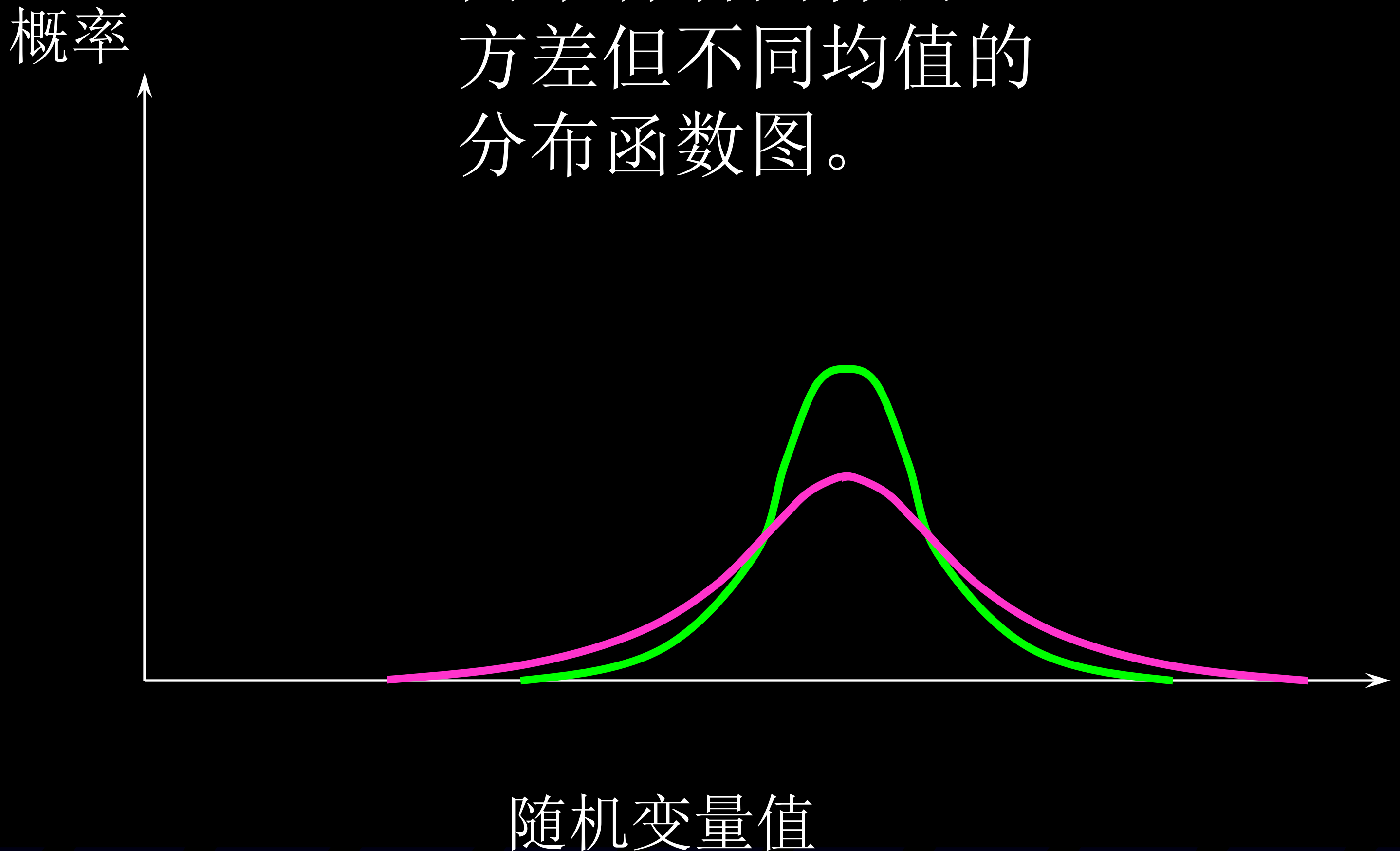
概率



随机变量值

均值与方差

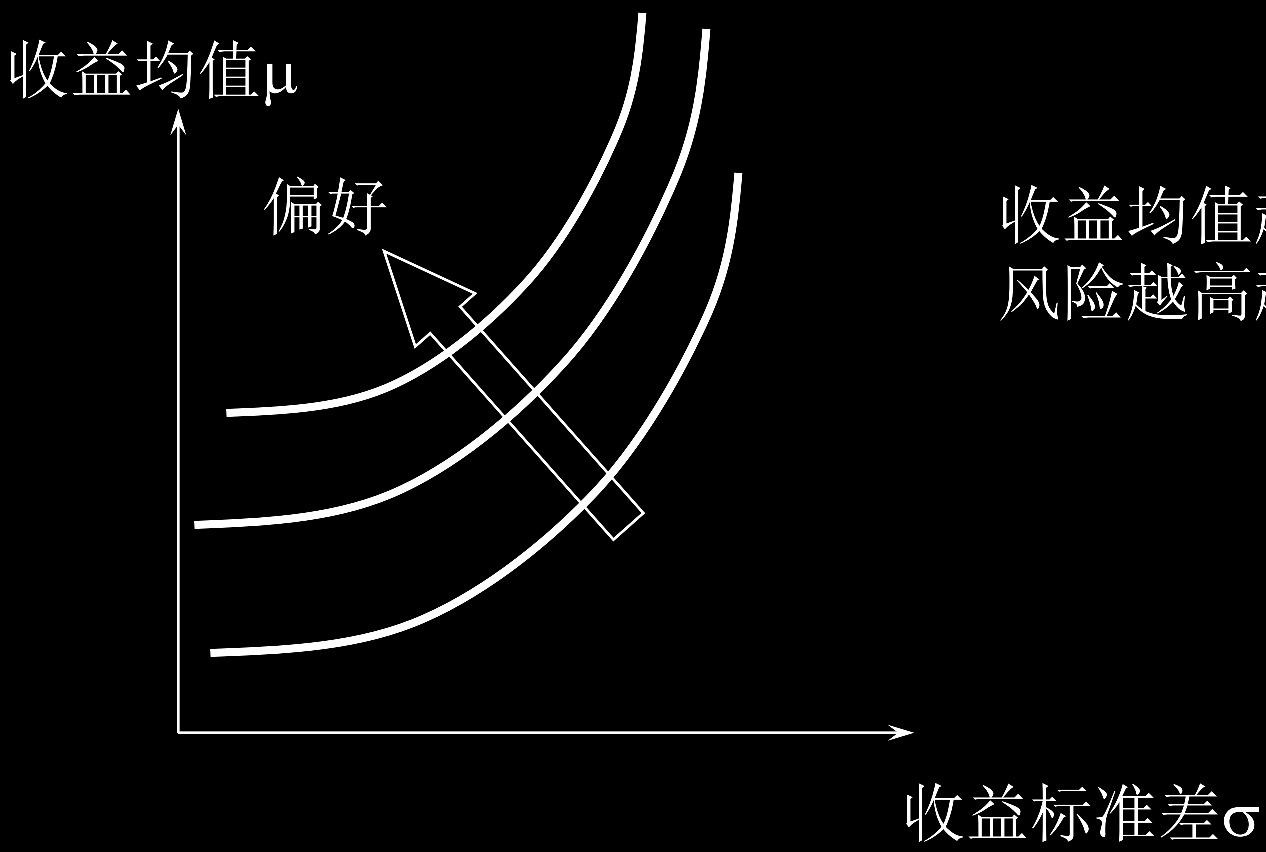
两个有着同样的
方差但不同均值的
分布函数图。



对于风险资产的偏好

有更高收益均值的资产更受偏好。
方差更小（风险小）的资产更受偏好。
偏好通过效用函数**U(μ,σ)**来表示。
U 随着μ上升而上升。
U 随着σ上升而下降。

对于风险资产的偏好



收益均值越高越好
风险越高越不利。

对于风险资产的偏好

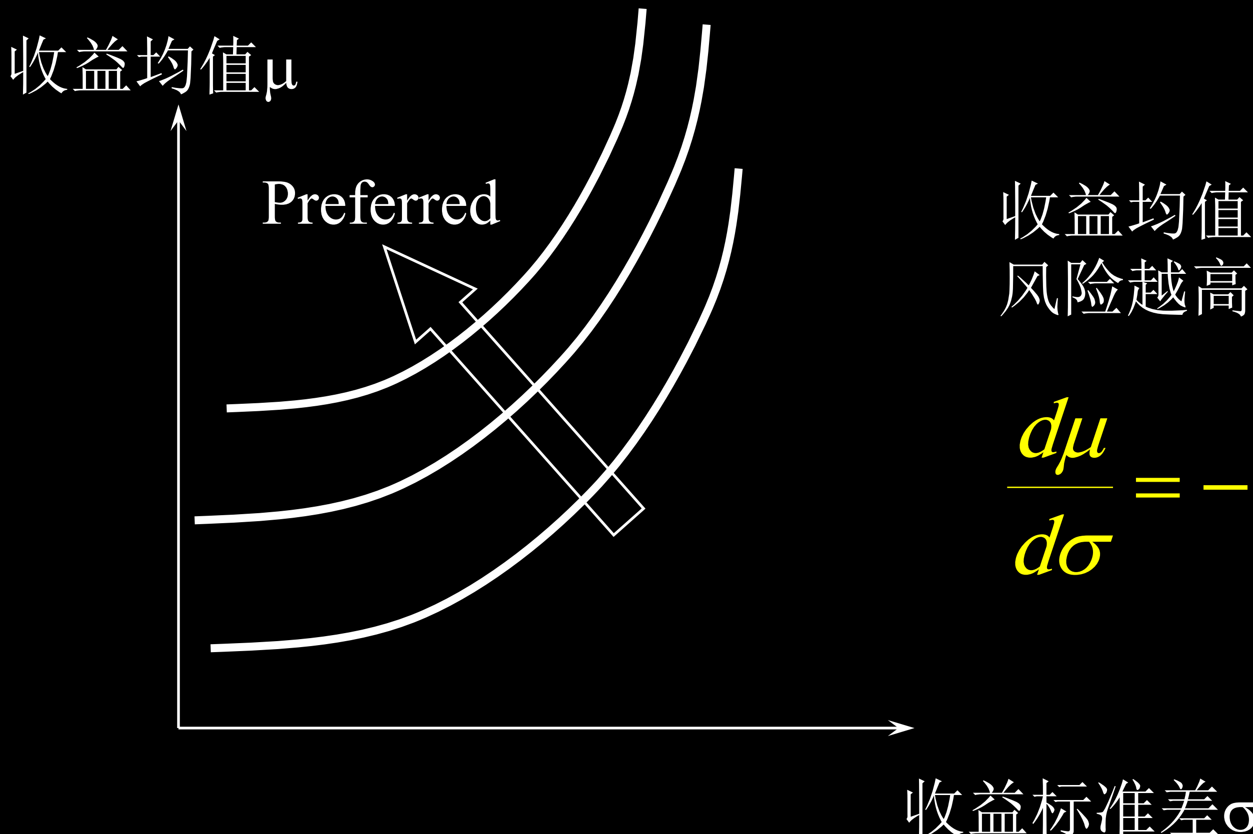
边际替代率如何计算？

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu = -\frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}.$$

对于风险资产的偏好



收益均值越高越好
风险越高越不利。

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}$$

风险资产的预算约束

两种资产

无风险资产的收益率为r_f.

有风险的股票在事件s发生时的概率为π_s收益率为m_s。

有风险的股票资产的收益率的均值为

$$r_m = \sum_{s=1}^{S} m_s \pi_s.$$

风险资产的预算约束

资产组合是指包含一些有风险的股票资产和其它无风险资产的组合。

x 表示用来购买风险资产的财富比例。

给定 ***x***, 资产组合的预期收益率为

$$r_x = xr_m + (1 - x)r_f.$$

风险资产的预算约束

$$r_x = xr_m + (1 - x)r_f.$$

x = 0 ⇒ $r_x = r_f$ 且 **x = 1** ⇒ $r_x = r_m.$

因为股票属于风险资产，风险对于投资者不利
因此股票的收益率必须满足： $r_m > r_f.$

因此资产组合的预期收益率随着x上升而上升（组合中包含更多的股票）。

风险资产的预算约束

资产组合收益率的方差为:

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - r_x)^2 \pi_s.$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{s=1}^{S} (xm_s + (1-x)r_f - xr_m - (1-x)r_f)^2 \pi_s$$

$$= \sum_{s=1}^{S} (xm_s - xr_m)^2 \pi_s = x^2 \sum_{s=1}^{S} (m_s - r_m)^2 \pi_s = x^2 \sigma_m^2.$$

风险资产的预算约束

方差 $\sigma_x^2 = x^2\sigma_m^2$

标准差 $\sigma_x = x\sigma_m$

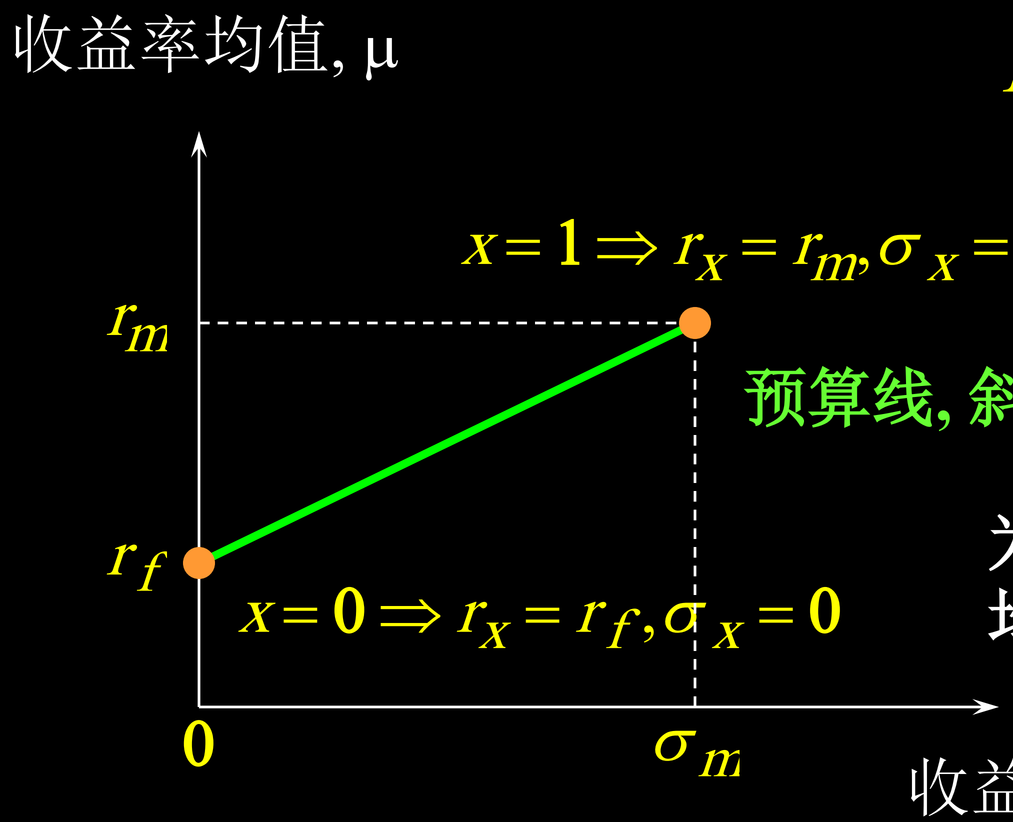
$x = 0 \Rightarrow \sigma_x = 0$ $x = 1 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_m$

风险随着x上升而上升 (组合中股票的比例上升)。

风险资产的预算约束

$$r_x = x r_m + (1 - x) r_f.$$

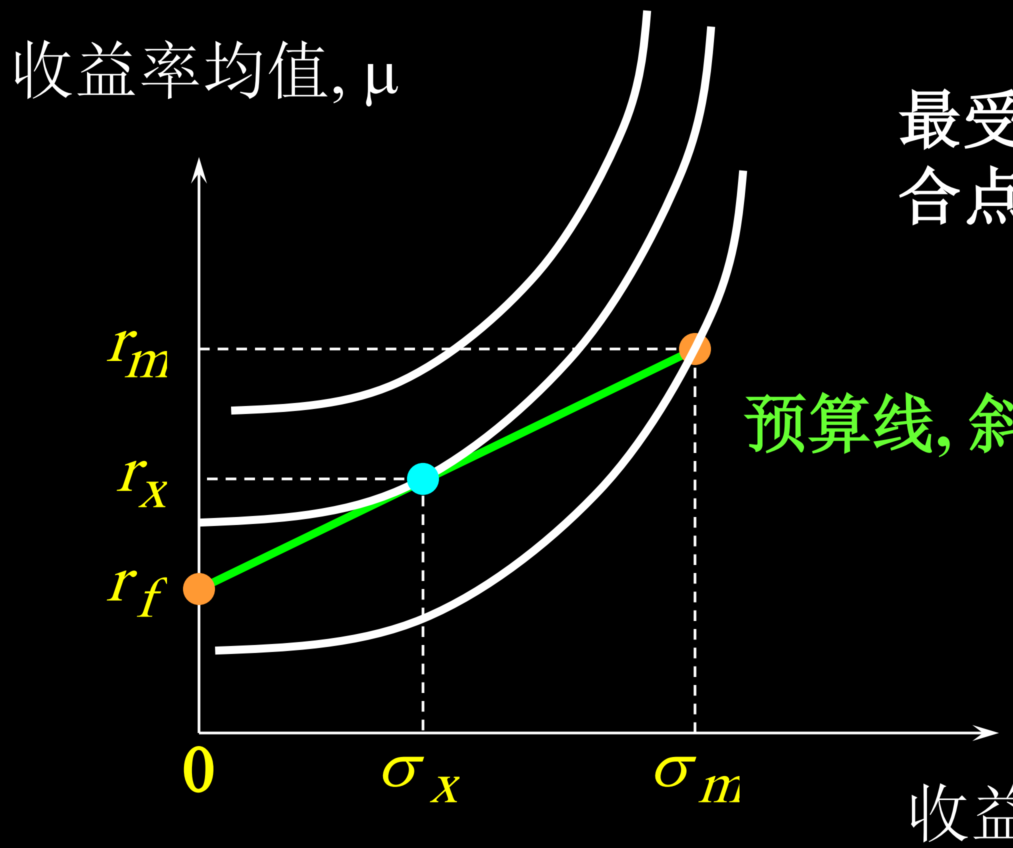
$$\sigma_x = x\sigma_m.$$



预算线, 斜率 $= \dfrac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

为风险相对于收益率均值的**价格**。

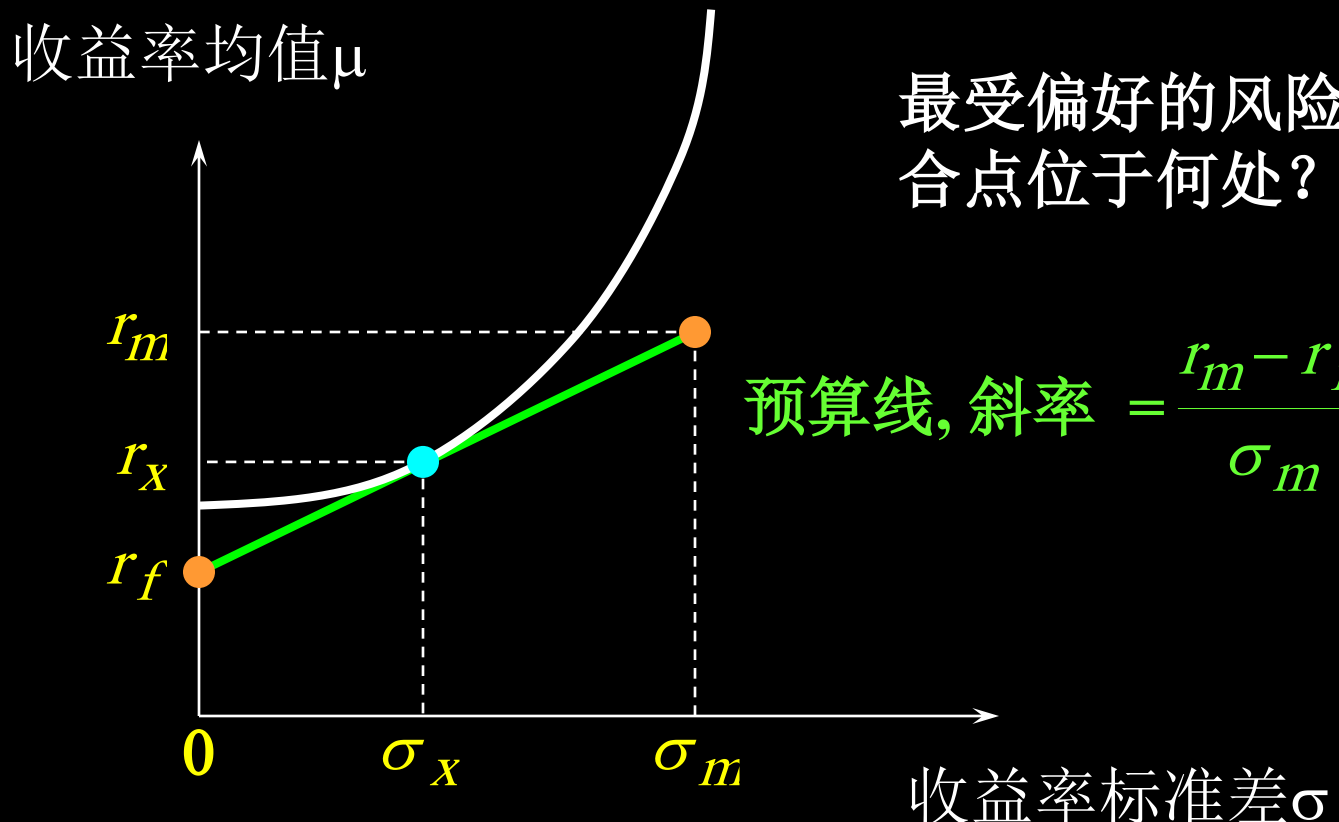
资产组合选择



最受偏好的风险/收益组合点位于何处？

预算线, 斜率 $= \dfrac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

资产组合选择



最受偏好的风险/收益组合点位于何处？

预算线, 斜率 $= \dfrac{r_m - r_f}{\sigma_m} = MRS$

$= -\dfrac{\partial U / \partial \sigma}{\partial U / \partial \mu}$

资产组合选择

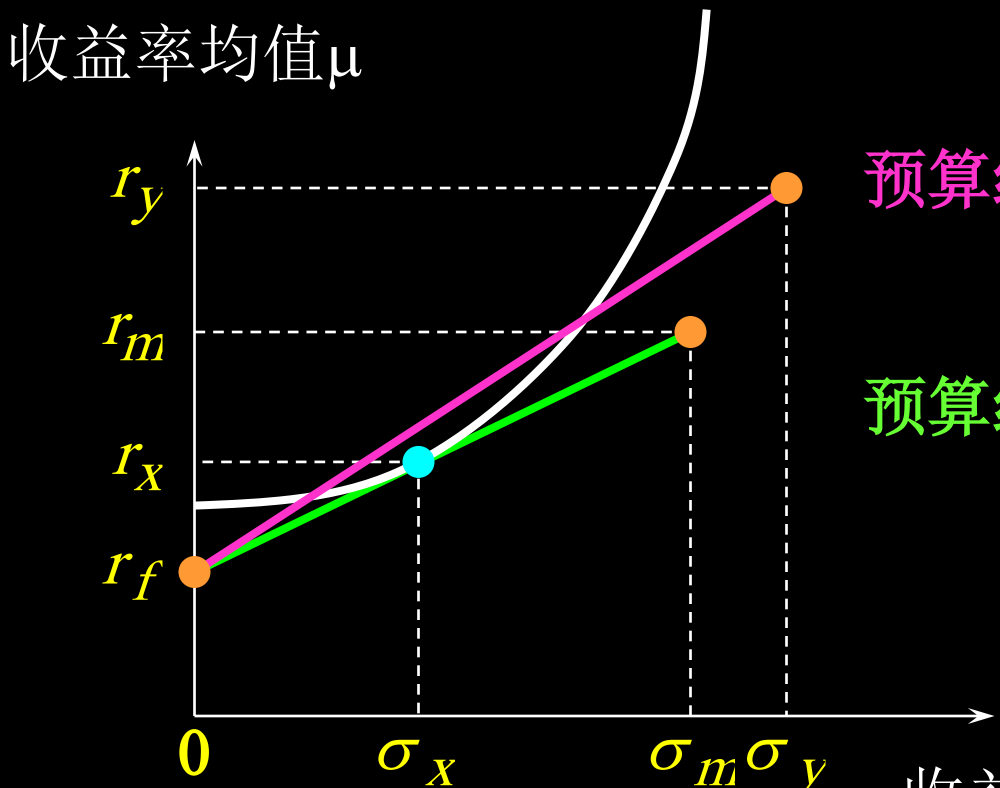
假设一个新的风险资产出现，其收益率均值$r_y > r_m$，方差$\sigma_y > \sigma_m$。

那个资产更受偏好？

假设

$$\frac{r_y - r_f}{\sigma_y} > \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

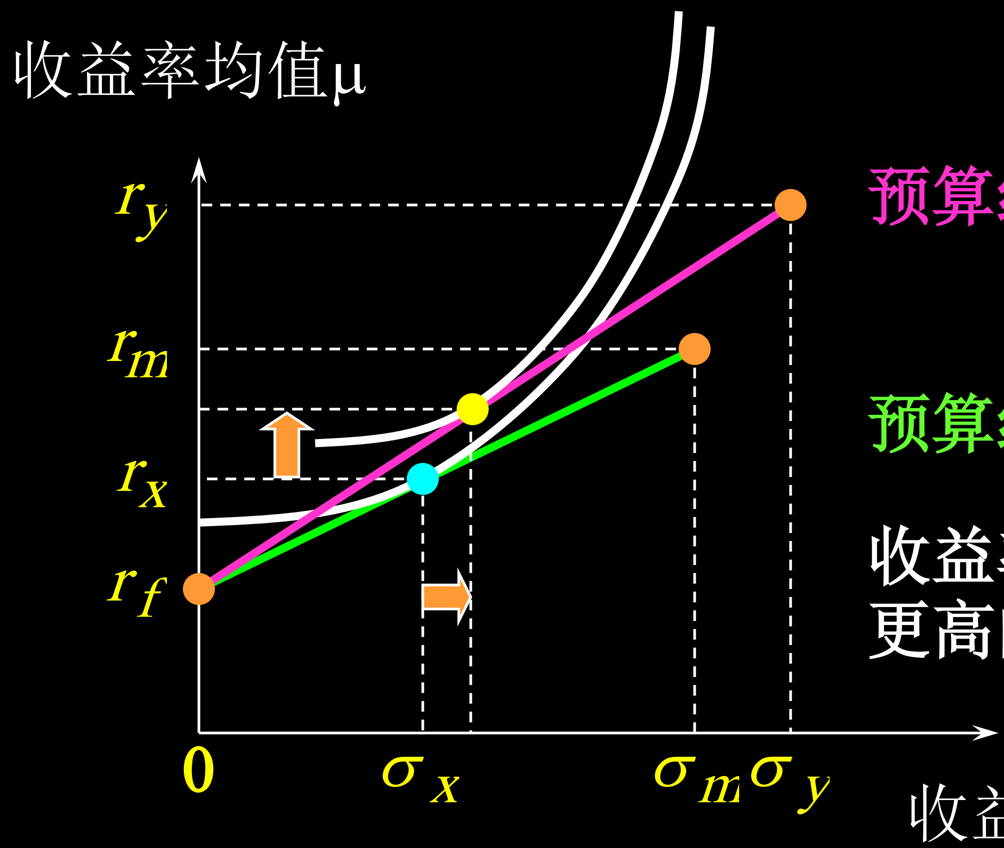
资产组合选择



预算线, 斜率 $= \dfrac{r_y - r_f}{\sigma_y}$

预算线, 斜率 $= \dfrac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

资产组合选择



预算线, 斜率 $= \dfrac{r_y - r_f}{\sigma_y}$

预算线, 斜率 $= \dfrac{r_m - r_f}{\sigma_m}$

收益率均值变高，在这种情况下更高的风险投资组合被选择。

风险测度

我们如何在数量上测度一种资产的风险？

要取决于该资产的价值与其它资产价值之间的关系。

例如，资产 **A**的价值有**1/4**的概率为**$60**，有**3/4**的概率为**$20** 。

购买资产**A**最多要支付**$30** 。

风险测度

例如，资产 A的价值有1/4的概率为$60，有3/4的概率为$20 。

但资产A的价值为$60时资产 B的价值为$20，但资产A的价值为$20时资产 B的价值为$60 。

最多支付额上升到$40 > $30 ，对于AB两种资产各占一半的组合。

风险测度

资产A的风险与组合的整体风险之比可用下式来衡量：

$$\beta_A = \frac{\text{risk of asset A}}{\text{risk of whole market}}.$$

$$\beta_A = \frac{\text{covariance}(r_A, r_m)}{\text{variance}(r_m)}$$

r_m 表示市场收益率

r_A 表示资产A的收益率

风险测度

$$-1 \le \beta_{\mathrm{A}} \le +1.$$

$\beta_{\mathrm{A}} < +1 \Rightarrow$ 资产**A**的收益率不是与整个市场的收益率完全相关，因此可以用来构筑一个低风险的组合。

有风险资产的市场均衡

均衡时, 所有资产的经风险调整后的收益率都应该相等。

如何调整风险?

有风险资产的市场均衡

资产**A**相对于整个市场的风险为 β_A。

整个市场的风险为σ_m。

资产**A**的所有风险为 $\beta_A\sigma_m$。

风险的价格为

$$p=\frac{r_m-r_f}{\sigma_m}.$$

资产**A**的风险成本为 $p\beta_A\sigma_m$.

有风险资产的市场均衡

资产A的风险调整为

$$p\beta_{\mathbf{A}}\sigma_m = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}\beta_{\mathbf{A}}\sigma_m = \beta_{\mathbf{A}}(r_m - r_f).$$

资产A的风险调整收益率为

$$r_{\mathbf{A}} - \beta_{\mathbf{A}}(r_m - r_f).$$

有风险资产的市场均衡

均衡时，所有资产的经风险调整后的收益率都应该相等。

无风险资产的$\beta = 0$ 因此它经调整后的收益率应为r_f.

因此，

$$r_f = r_A - \beta_A (r_m - r_f)$$

i.e. $$r_A = r_f + \beta_A (r_m - r_f)$$

对于任何风险资产A。

有风险资产的市场均衡

也即 $r_{\mathbf{A}} = r_f + \beta_{\mathbf{A}}(r_m - r_f)$

为有风险资产均衡市场中**资本资产定价模型**的主要结论 **(CAPM)**, 也是一个广泛应用于金融市场的模型。