간섭계 레이더 고도계를 이용한 관성 항법/지형 참조 항법 결합의 가관측성 분석

박준우*, 방효충
KAIST

Observability Analysis on Interferometric Radar Altimeter-aided INS/TRN

Junwoo Park*, Hyochoong Bang

Key Words : Observability(가관측성), Terrain Referenced Navigation(지형참조항법), Interferometric Radar Altimeter(간섭계 레이더 고도계), Integrated Navigation(통합 항법)

서 론

기체와 지표고 사이의 간격을 측정하는 레이더 고도계를 이용한 지형 참조 항법은 기체가 수평 비행 중이라는 가정하에 기체의 추정 고도에서 레이더 고도계 측정치를 뺀 값과 데이터베이스 형태로 가지고 있는 지표고 값을 비교하여 기체의 2차원 위치(위도, 경도)를 추정한다. 이는 TERCOM/TERPROM과 같이 전통적으로 지형 참조 항법을 활용한 시스템에서도 사용된 방식이지만, 레이더 고도계 자체가 가진 한계 때문에 능동적인 활용에는 제한이 있다. 기체의 고도와 지표고 데이터베이스와의 선형 관계를 만족하기 위해서는 자세 변화가 적은 비행 조건을 유지해야 한다. 또한, 특정 범위 내의 지표고까지의 상대 거리를 평균내는 레이더 고도계의 특징 때문에 지형의 험준도가 높아 지표고 변화가 심한 지형을 지나는 상황이나 높은 고도에서 운용되는 상황에서는 정확한 측정치를 획득하는 것을 기대하기 어렵다. 최근 라이다, 영상 센서같이 지표고의 정보를 간접적으로 획득할 수 있는 도구나[3] 간섭계 레이더 고도계와 같이 정확도 및 운용 범위가 개선된 지형 측정 센서가 가용하여서 이를 이용해 지형 참조 항법을 수행하려는 시도가 다수 이루어지고 있다[1,4]. 본 연구팀은 특히 선행 연구[1]에서 간섭계 레이더 고도계를 활용한 강결합 방식의 지형 참조 항법/관성 항법의 결합 항법 방식을 제시한 바 있고, 본 논문에서는 해당 방법의 가관측성 분석 결과를 제시한다.

본 론

박준우 등[1]의 선행 연구에서는 간섭계 레이더 고도계의 측정치 모델을 아래와 같이 제시하였다.

$$y(t) = h_t(x_n(t)) + H(t)x_l(t) \tag{1}$$

여기서 x_n은 측정치에 비선형적으로 관계된 상태 변수로 기체의 위/경도 및 고도, h_t는 지표고 중 최근접점을 추정하는 비선형 식, x_l은 선형 상태 변수로 기체의 속도, 자세 및 관성 측정장치의 편차를 포함하며, $H(t)$는 특히 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다. 요소가 표기되지 않은 부분은 모두 0의 값을 가진다.

$$H(t)_{1,1:3} = \left[\frac{\partial \rho}{\partial v_n}_{(L^*,\lambda^*)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial v_e}_{(L^*,\lambda^*)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial v_d}_{(L^*,\lambda^*)} \right] \tag{2}$$

$$H(t)_{2,4:6} = \left[\frac{z_b^*}{\sqrt{{x_b^*}^2 + {z_b^*}^2}} \; 0 \; \frac{-x_b^*}{\sqrt{{x_b^*}^2 + {z_b^*}^2}} \right] \tag{3}$$

여기서 *로 윗첨자 표기된 부분은 모두 간섭계 레이더 고도계가 측정한 최근접점의 위치를 나타낸 것으로 L,λ는 위,경도, b로 아랫 첨자가 표기된 x,y,z는 해당 최근접점을 동체 좌표계에서 해석한 것이다. 선행 연구에서는 오차 상태 (error state)에 대한 전파 모델을 Nordlund 등[2]에서 확인할 수 있는 관성 항법 선형 시스템 모델을 아래와 같이 사용하여 Rao-Blackwellized 파티클 필터(RBPF)를 설계하였다. A_{nn}, A_{nl}, A_{ll}은 문맥을 따른다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_n(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{nn}(t) & A_{nl}(t) \\ A_{\ln}(t) & A_{ll}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_l(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

해당 연구에서는 기체의 3차원 항법 정보 모두를 보정할 수 있고, 기동에 따라 높은 항법 성능을 얻을 수 있음을 확인하였지만 모든 결과가 수치적 시뮬레이션의 결과로만 제시되었다. 이에 본 논문에서는 (1)~(3) 및 (4)로 이루어진 필터의 해석적인 접근 결과를 제시하며, 특히 가관측성 분석을 통해 비선형 필터를 적용하였기 때문만이 아니라 문제 정식화 및 측정치 모델이 유효했기 때문에 필터가 수렴하였으며 좋은 성능을 보일 수 있었음을 보인다.

(1)~(4)의 시스템 모델은 시변 특징을 가지기 때문에, 임의의 시간 t에 정확한 시간 응답을 확보하기 어렵다. 이에 시스템의 특징을 용이하게 파악하고자, 연속적인 시간 영역 모두에 대해서 시스템을 분석하기보다는 충분히 작은 시간 간격에 대해 부분적으로 시불변한 시스템을 구성하고 이를 쌓아 올려 전체를 이해한다. 다음의 연속 시간/시변 시스템을 생각해보자

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ y(t) = H(t)x(t) \tag{5}$$

여기서 작은 시간 간격 $\triangle t$에 대해 시스템이 시불변하다고 가정하면 k번째 시불변 부분 시스템에서는 다음을 생각해볼 수 있다.

$$\begin{aligned} y_k(t) &= H_k x(t) \\ \dot{y}_k(t) &= H_k \dot{x}(t) = H_k A_k x(t) \\ &\vdots \\ y_k^{n-1} &= H_k x^{n-1}(t) = H_k A_k^{n-1} x(t) \end{aligned} \tag{6}$$

(6)을 가관측성 행렬 $\boldsymbol{O_k}$를 이용해 아래와 같이 하나의 큰 행렬로 표현 가능하며,

$$\boldsymbol{Y_k}(t) = \left[y_k^T \, \dot{y}_k^T \, \ddot{y}_k^T \cdots y_k^{n-1^T} \right]^T = \boldsymbol{O_k} x(t) \tag{7}$$

특히, 상태 천이 행렬 (8)을 고려하면 (7)은 (9)와 같이 쓸 수 있다.

$$x(t_k) = e^{A_{k-1} \triangle t_{k-1}} x(t_{k-1}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Y_k}(t_k) = \boldsymbol{O_k} \left[e^{A_{k-1} \triangle t_{k-1}} \right] \cdots \left[e^{A_0 \triangle t_0} \right] x(t_0) \tag{9}$$

이제 각 부분 시스템의 (9)를 임의의 r번째까지 모으면 다음과 같이 또다시 하나의 큰 행렬로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{O_{total}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O_1} \\ \boldsymbol{O_2} \left[e^{A_1 \triangle t_1} \right] \\ \vdots \\ \boldsymbol{O_r} \left[e^{A_{r-1} \triangle t_{r-1}} \right] \cdots \left[e^{A_1 \triangle t_1} \right] \end{bmatrix} \tag{10}$$

상기는 일반적으로 Piecewise-constant system (PWCS)의 가관측성 행렬이며, $\boldsymbol{O_k}$의 영공간(Null space)가 A_k에 포함될 경우 다음의 간소화된 형태로도 가관측 여부를 확인할 수 있다.

$$\boldsymbol{O_{stripped}} = \boldsymbol{O_s} = \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ \vdots \\ O_r \end{bmatrix} \tag{11}$$

여기서 간섭계 레이더 고도계를 이용한 지형 참조 항법 시스템을 생각했을 때, (1)의 h_t을 선형화한 아래의 관계식을 $\boldsymbol{O_s}$계산에 활용한다.

$$H_{linearized}(t) = \left[\frac{\partial h_t(t)}{\partial x_n(t)}, H_l(t) \right] \tag{12}$$

특히 기체 3차원 위치(위,경,고도) 변화에 따른 지표고 최근접점 위치의 변화량을 나타내는 첫 번째 항은 연쇄 법칙을 활용하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial h_t(t)}{\partial x_n(t)} \approx \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} \frac{x_b}{\rho} \\ \frac{y_b}{\rho} \end{bmatrix}, \frac{z_b}{\rho} \\ \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} \frac{-x_b \tan(\theta)}{\rho^2} \\ \frac{-y_b}{\rho^2 \tan(\theta)} \end{bmatrix}, -\frac{z_b \tan(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \tag{13}$$

여기서 $\boldsymbol{C}$는 $R_E \begin{bmatrix} \cos(\psi) - \sin(\psi) \\ \sin(\psi) \ \ \cos(\psi) \end{bmatrix}$을, 아랫첨자 b가 표기된 x,y,z는 동체 좌표계에서의 최근접점 위치, ψ,θ는 각각 기체의 요,피치각, R_E는 지구 장반경, ρ는 $\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}$를 의미한다.

선행 연구[1]에서 설계한 RBPF는 15차 항법 필터이다. 간섭계 레이더 고도계를 이용한 지형 참조 항법/관성 항법의 통합 항법 시뮬레이션에서 (11)의 r을 키워가며 $\boldsymbol{O_s}$의 Rank를 확인한 결과를 표1에 기술하며, 전체 시스템이 가관측함을 보인다.

Table 1. 간섭계 레이더 고도계를 이용한 지형 참조 항법 시스템 $\boldsymbol{O_s}$의 스텝 별 Rank

Step(r)	1	2	3	4
Rank	9	14	15	15

참고문헌

1) Park, J., Kim, Y., and Bang, H., "Tightly Coupled INS/Interferometric Radar Altimeter-aided Terrain Referenced Navigation." *Proceeding of the 2018 KSAS Fall Conference*: 190-192.

2) Nordlund, Per-Johan, and Gustafsson, Fredrik, "Marginalized Particle Filter for accurate and Reliable Terrain-aided Navigation", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 45, No. 4, 2009, pp. 1385~1399.

3) Hong, K., Kim, S., Bang, H., Kim, J., Seo, I., and Park, J., "Particle Filters using Gaussian Mixture Models for Vision-Based Navigation," *Journal of the Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, 2019, Vol. 47, No. 4, pp. 274-282.

4) Lee, J., and Bang, H., "A Robust Terrain aided Navigation using the Rao-Blackwellized Particle Filter Trained by Long Short-term Memory Networks," *Sensors*, 2018, Vol. 18, No. 9, pp. 2886-2910.