

NWPU 最优估计课程设计

刘振博

学号：2019201920

目录

1 贝叶斯滤波

1.1 贝叶斯滤波原理

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) \quad (1)$$

贝叶斯公式：

$$= \frac{p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})} \quad (2)$$

$$= \eta p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \quad (3)$$

马尔可夫假设：

$$= \eta p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \quad (4)$$

边缘概率公式：

$$= \eta p(z_t | x_t) \int_{x_{t-1}} p(x_t, x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \quad (5)$$

全概率公式：

$$= \eta p(z_t | x_t) \int_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \quad (6)$$

马尔可夫假设：

$$= \eta p(z_t | x_t) \int_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \quad (7)$$

马尔可夫假设：

$$= \eta p(z_t | x_t) \int_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \quad (8)$$

$$= \eta p(z_t | x_t) \int_{x_{t-1}} p(x_t | x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1} \quad (9)$$

贝叶斯滤波器算法流程：

Algorithm Bayes filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)

for all x_t do

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

$$\text{bel}(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \overline{\text{bel}}(x_t)$$

endfor

return bel(x_t)

1.2 卡尔曼滤波原理

状态方程与观测方程：

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t + \epsilon_t \quad (10)$$

$$z_t = \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t + \delta_t \quad (11)$$

$$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_t) \quad (12)$$

$$\delta_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_t) \quad (13)$$

根据上述线性方程得：

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\mathbf{R}_t|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t)^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t)} \quad (14)$$

$$p(z_t|\mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\mathbf{Q}_t|}} e^{-\frac{1}{2}(z_t - \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{Q}_t^{-1} (z_t - \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t)} \quad (15)$$

求 $\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ ：

$$\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t) = \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \text{bel}(\mathbf{x}_{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (16)$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{|2\pi\mathbf{R}_t|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t)^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t)} \frac{1}{\sqrt{|2\pi\Sigma_{t-1}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (\mathbf{x}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{t-1})} d\mathbf{x}_{t-1} \quad (17)$$

$$= \eta e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t - \mathbf{A}_t \boldsymbol{\mu}_{t-1})^T (\mathbf{A}_t \Sigma_{t-1}^{-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t - \mathbf{A}_t \boldsymbol{\mu}_{t-1})} \quad (18)$$

$\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_t)$ 满足如下高斯分布：

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}_t = \mathbf{A}_t \boldsymbol{\mu}_{t-1} + \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t \quad (19)$$

$$\bar{\Sigma}_t = \mathbf{A}_t \Sigma_{t-1}^{-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t \quad (20)$$

求 $bel(\mathbf{x}_t)$:

$$bel(\mathbf{x}_t) = \eta \frac{1}{\sqrt{|2\pi\mathbf{Q}_t|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_t - \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t)^T \mathbf{Q}_t^{-1} (\mathbf{z}_t - \mathbf{C}_t \mathbf{x}_t)} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t - \mathbf{A}_t \mu_{t-1})^T (\mathbf{A}_t \Sigma_{t-1}^{-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} (\mathbf{x}_t - \mathbf{B}_t \mathbf{u}_t - \mathbf{A}_t \mu_{t-1})} \quad (21)$$

经过推导可以证明 (21) 也是高斯分布:

$$bel(\mathbf{x}_t) = \eta e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \mu_t)^T \Sigma_t^{-1} (\mathbf{x}_t - \mu_t)} \quad (22)$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{C}_t \bar{\mu}_t) \quad (23)$$

$$\Sigma_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t) \bar{\Sigma}_t \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_t = \bar{\Sigma}_t \mathbf{C}_t^T (\mathbf{C}_t \bar{\Sigma}_t \mathbf{C}_t^T + \mathbf{Q}_t)^{-1} \quad (25)$$

卡尔曼滤波只需要每次计算均值与方差即可!!

1.3 扩展卡尔曼滤波原理

当运动方程与观测方程不是线性方程时, 可以使用泰勒展开, 对其近似, 这就是扩展卡尔曼滤波 (EKF) 的基本思想。

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{u}_t) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_t) \quad (26)$$

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{X}_t) + \delta_t \quad \delta_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_t) \quad (27)$$

以一阶泰勒展开为例, 对上述非线性模型线性化。

运动方程: 当 \mathbf{x}_t 取值为 μ_t 的一个邻域内时, 可以得到:

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \approx \mathbf{f}_t(\mu_t, \mathbf{u}_t) + \frac{\partial \mathbf{f}_t(\mu_t, \mathbf{u}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} (\mathbf{x}_t - \mu_t) \quad (28)$$

$$= \mathbf{f}_t(\mu_t, \mathbf{u}_t) + \mathbf{F}_t (\mathbf{x}_t - \mu_t) \quad (29)$$

观测方程：当 x_t 取值为 μ_t 的一个邻域内时，可以得到：

$$h_t(x_t) \approx h_t(\mu_t) + \frac{\partial h_t(\mu_t)}{\partial x_t} (x_t - \mu_t) \quad (30)$$

$$= h_t(\mu_t) + H_t(x_t - \mu_t) \quad (31)$$

之后，就按照线性 KF 滤波的方法更新其均值和协方差。

2 EKF-SLAM 设计思路

2.1 SLAM 问题定义

同时定位与建图 (SLAM) 的本质是一个估计问题, 它要求移动机器人利用传感器信息实时地对外界环境结构进行估计, 并且估算出自己在这个环境中的位置, Smith 和 Cheeseman 在上个世纪首次将 EKF 估计方法应用到 SLAM。

以滤波为主的 SLAM 模型主要包括三个方程:

- 1) 运动方程: 它会增加机器人定位的不确定性
- 2) 根据观测对路标初始化的方程: 它根据观测信息, 对新的状态量初始化。
- 3) 路标状态对观测的投影方程: 根据观测信息, 对状态更新, 纠正, 减小不确定度。

2.2 EKF-SLAM 维护的数据地图

系统状态 \mathbf{x} 是一个很大的向量, 它包括机器人的状态和路标点状态,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{L}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中 \mathcal{R} 是机器人状态, $\mathcal{M} = (\mathcal{L}_1 \dots \mathcal{L}_n)$ 是 n 个当前已经观测过的路标点状态集合。

在 EKF 中, \mathbf{x} 被认为服从高斯分布, 所以, EKF-SLAM 的地图被建模为 \mathbf{x} 的均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 与协方差 \mathbf{P} ,

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{R}} \\ \bar{\mathcal{L}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{L}}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{M}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{L}_1} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{L}_n} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{L}_1\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_1} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathcal{L}_n\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{L}_n\mathcal{L}_1} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n} \end{bmatrix} \quad (33)$$

因此 EKF-SLAM 的目标就是根据运动模型和观测模型及时更新地图量 $\{\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}\}$

2.3 EKF-SLAM 算法实施

2.3.1 地图初始化

显而易见, 在机器人开始之前是没有任何路标点的信息的, 因此此时地图中只有机器人自己的状态信息, 因此 $n = 0, \mathbf{x} = \mathcal{R}$ 。SLAM 中经常把机器人初始位姿认为是地图的原点, 其初

始协方差可以按实际情况设定，比如：

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

2.3.2 运动模型

在 EKF 中如果 \mathbf{x} 是状态量， \mathbf{u} 是控制输入， \mathbf{n} 是噪声变量，那么我们可以得到一般的状态更新函数：

$$\mathbf{x} \leftarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) \quad (35)$$

EKF 的预测步骤为：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &\leftarrow f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0) \\ \mathbf{P} &\leftarrow \mathbf{F}_x \mathbf{P} \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_n \mathbf{N} \mathbf{F}_n^\top \end{aligned} \quad (36)$$

其中雅克比矩阵 $\mathbf{F}_x = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}$ ， $\mathbf{F}_n = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}}$ ， \mathbf{N} 是随机变量 \mathbf{n} 的协方差。

但是在 EKF-SLAM 中，只有一部分状态 \mathcal{R} 是随运动而改变的，其余所有路标状态不改变，所以 SLAM 的运动方程为：

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\leftarrow f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) \\ \mathcal{M} &\leftarrow \mathcal{M} \end{aligned} \quad (37)$$

因此我们可以得到稀疏的雅克比矩阵：

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\mathcal{R}}}{\partial \mathbf{n}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

最终我们得到了用于运动模型的 EKF 稀疏预测公式

$$\bar{\mathcal{R}} \leftarrow f_{\mathcal{R}}(\bar{\mathcal{R}}, \mathbf{u}, 0) \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \leftarrow \frac{\partial f_{\mathcal{R}}^T}{\partial \mathcal{R}} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \frac{\partial f_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} + \frac{\partial f_{\mathcal{R}}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{N} \frac{\partial f_{\mathcal{R}}^T}{\partial \mathbf{n}} \quad (40)$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} \leftarrow \frac{\partial f_{\mathcal{R}}}{\partial \mathcal{R}} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{M}} \quad (41)$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{M}\mathcal{R}} \leftarrow \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}^\top \quad (42)$$

2.3.3 已经加入地图的状态量观测更新

在 EKF 中，我们有以下一般的观测方程

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (43)$$

其中 \mathbf{y} 是测量噪声， \mathbf{x} 是全状态， $h()$ 是观测函数， v 是测量噪声。
典型的 EKF 观测更新为：

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{y} - h(\bar{\mathbf{x}}) \quad (44)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}_x \mathbf{P} \mathbf{H}_x^\top + \mathbf{R} \quad (45)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}_x^\top \mathbf{Z}^{-1} \quad (46)$$

$$\bar{\mathbf{x}} \leftarrow \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{z}} \quad (47)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} - \mathbf{K} \mathbf{Z} \mathbf{K}^\top \quad (48)$$

雅克比矩阵 $\mathbf{H}_x = \frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}}$ ， \mathbf{R} 是测量噪声的协方差矩阵。

在 SLAM 中，观测指的是机器人上的传感器观测到某些路标点，并对路标点进行参数化的输出。每次可能对好多个路标点都有观测，这里依次对一个路标的观测结果进行状态更新。

观测的结果依赖于机器人的状态 \mathcal{R} ，传感器的状态 \mathcal{S} 和路标点的状态 \mathcal{L}_i ，并且这里假设，传感器的状态与机器人的状态差了一个固定的坐标变化。当观测到路标点 i 时，可以得到单一的观测函数：

$$\mathbf{y}_i = h_i(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{L}_i) + \mathbf{v} \quad (49)$$

这就是观测方程，它不依赖于除了 \mathcal{L}_i 外的任何路标点状态。因此 EKF-SLAM 的雅克比 \mathbf{H}_x 也是稀疏的：

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathcal{R}} & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{H}_{\mathcal{L}_i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

其中 $\mathbf{H}_{\mathcal{R}} = \frac{\partial h_i(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \bar{\mathcal{L}}_i)}{\partial \mathcal{R}}$ ， $\mathbf{H}_{\mathcal{L}_i} = \frac{\partial h_i(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \bar{\mathcal{L}}_i)}{\partial \mathcal{L}_i}$ 。由于这里的稀疏性，EKF-SLAM 的观测更新变成：

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{y}_i - h_i(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \bar{\mathcal{L}}_i) \quad (51)$$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{H}_{\mathcal{R}} \mathbf{H}_{\mathcal{L}_i}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{L}_i} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{L}_i\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{L}_i\mathcal{L}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathcal{R}}^\top \\ \mathbf{H}_{\mathcal{L}_i}^\top \end{bmatrix} + \mathbf{R} \quad (52)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{L}_i} \\ \mathbf{P}_{\mathcal{M}\mathcal{R}} & \mathbf{P}_{\mathcal{M}\mathcal{L}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathcal{R}}^\top \\ \mathbf{H}_{\mathcal{L}_i}^\top \end{bmatrix} \mathbf{Z}^{-1} \quad (53)$$

$$\bar{\mathbf{x}} \leftarrow \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{z}} \quad (54)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P} - \mathbf{K}\mathbf{Z}\mathbf{K}^\top \quad (55)$$

2.3.4 观测方程可逆时的状态增广

这里的状态增广指的是新发现的路标点的初始化。当机器人发现了曾经未观测到的路标点时，会利用观测方程将新的路标状态加入地图，这一步操作会增大总状态向量的大小。可以看到 EKF-SLAM 中的滤波器大小动态变化的。

当传感器信息可以提供新发现路标点的所有自由度，也就是观测方程是双射时，只需要根据观测方程 $h()$ 的逆运算，即可以得到机器人状态 \mathcal{R} ，传感器状态 \mathcal{S} ，观测量 \mathbf{y}_{n+1} 与新路标点状态的关系：

$$\mathcal{L}_{n+1} = g(\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (56)$$

上式是单个路标点的逆观测模型。

路标点的均值和雅克比：

$$\bar{\mathcal{L}}_{n+1} = g(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \mathbf{y}_{n+1}) \quad (57)$$

$$\mathbf{G}_{\mathcal{R}} = \frac{\partial g(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \mathbf{y}_{n+1})}{\partial \mathcal{R}} \quad (58)$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{y}_{n+1}} = \frac{\partial g(\bar{\mathcal{R}}, \mathcal{S}, \mathbf{y}_{n+1})}{\partial \mathbf{y}_{n+1}} \quad (59)$$

显然，新加路标点状态的协方差 $\mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$ ，以及该状态与地图其它状态的互协方差为：

$$\mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} = \mathbf{G}_{\mathcal{R}}\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathbf{G}_{\mathcal{R}}^\top + \mathbf{G}_{\mathbf{y}_{n+1}}\mathbf{R}\mathbf{G}_{\mathbf{y}_{n+1}}^\top \quad (60)$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathbf{x}} = \mathbf{G}_{\mathcal{R}}\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathbf{x}} = \mathbf{G}_{\mathcal{R}}[\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathbf{P}_{\mathcal{R}\mathcal{M}}] \quad (61)$$

然后将这些结果加入到地图中，可以得到总状态的均值与协方差矩阵：

$$\bar{\mathbf{x}} \leftarrow \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathcal{L}}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{P} \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathbf{x}}^\top \\ \mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathbf{x}} & \mathbf{P}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \end{bmatrix} \quad (63)$$

3 仿真实验

3.1 实验说明

3.1.1 传感器模型

传感器是一个 360 度的雷达，可以探测发现周围一定范围内的路标点及其类型，其探测半径为 r ，其探测结果为 (ξ, s) 。 ξ 为路标点向量与当前雷达坐标系的夹角， s 为路标点与雷达局部坐标系原点的距离。

3.1.2 运动模型

将当前时刻雷达局部坐标系中的 $(u_1, 0)$ 点作为下一时刻雷达的位置：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

其方位：

$$\theta = \theta + u_2 + n_2 \quad (65)$$

3.1.3 观测模型

设观测到的路标点 i 的状态为 (m_1^i, m_2^i) ，则其在当前雷达坐标系的坐标为：

$$\begin{bmatrix} ladar_1^i \\ ladar_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1^i \\ m_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (66)$$

则观测量为：

$$\xi = \text{atan2}(ladar_2^i, ladar_1^i) + v_1 \quad (67)$$

$$s = \sqrt{(ladar_1^i)^2 + (ladar_2^i)^2} + v_2 \quad (68)$$

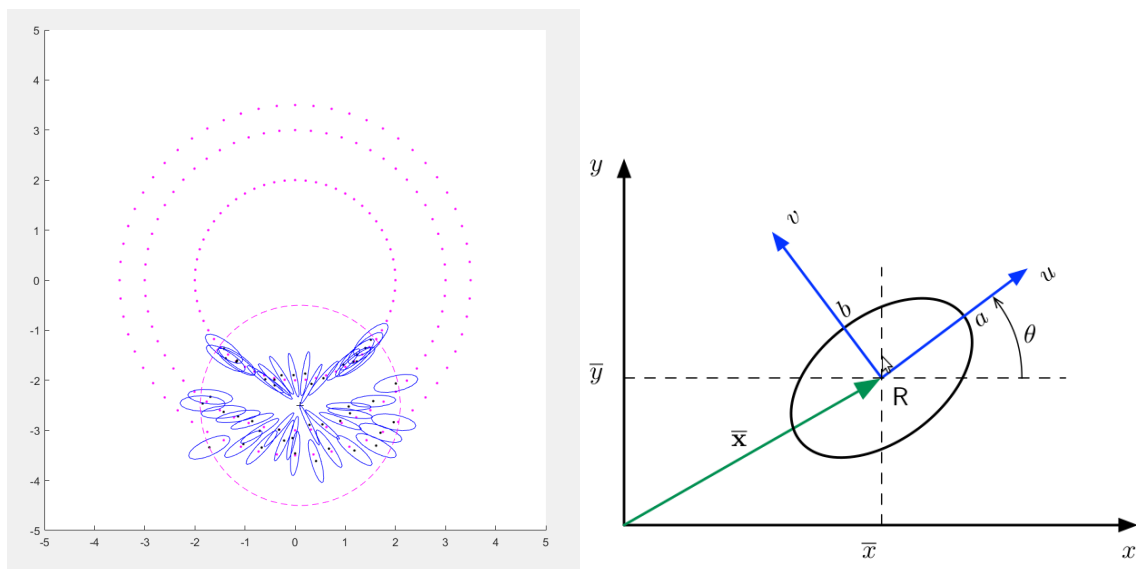
3.2 实验结果

使用 MATLAB 编写程序进行仿真。

源代码 1: <https://github.com/liuzhenboo/Optimal-Estimate-BigHomework>

源代码 2: <https://github.com/liuzhenboo/EKF-2D-SLAM>

3.2.1 传感器模型，第一次状态增广



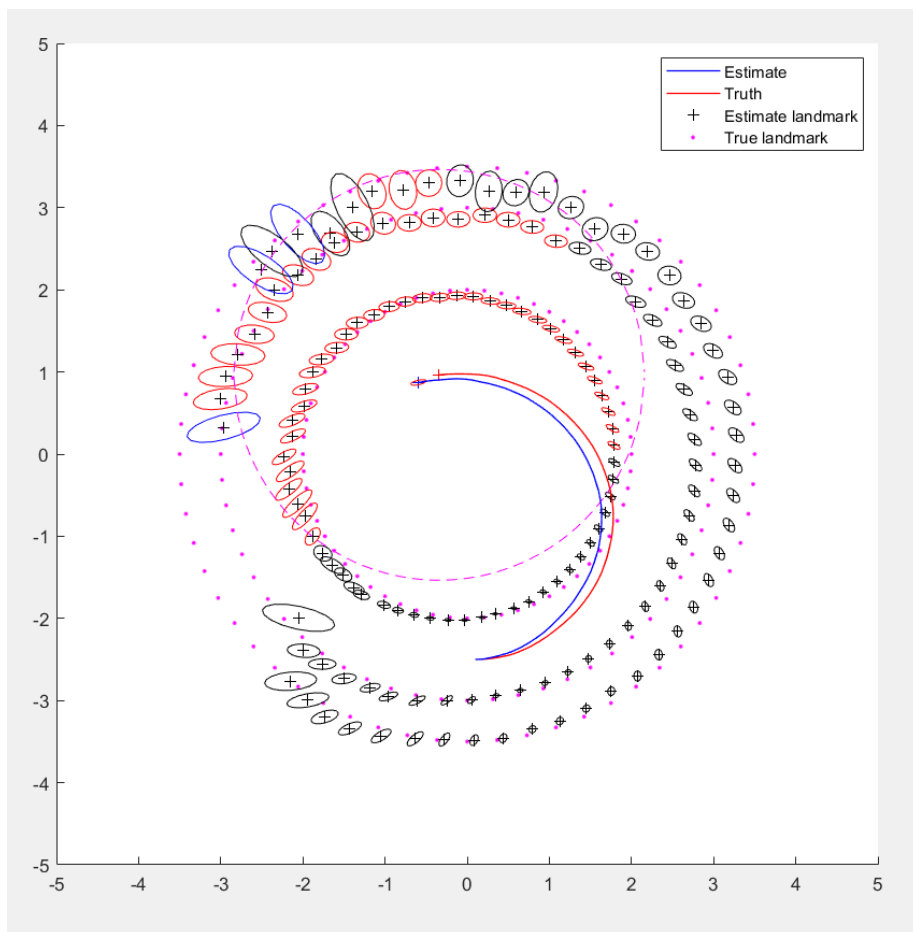
其中左图黑色的点表示滤波器新加入的路标点状态均值，绿色椭圆表征路标状态的协方差，其椭圆方程为：

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \text{const} \quad (69)$$

其中 \mathbf{x} 为路标状态, \mathbf{P} 为路标的协方差。

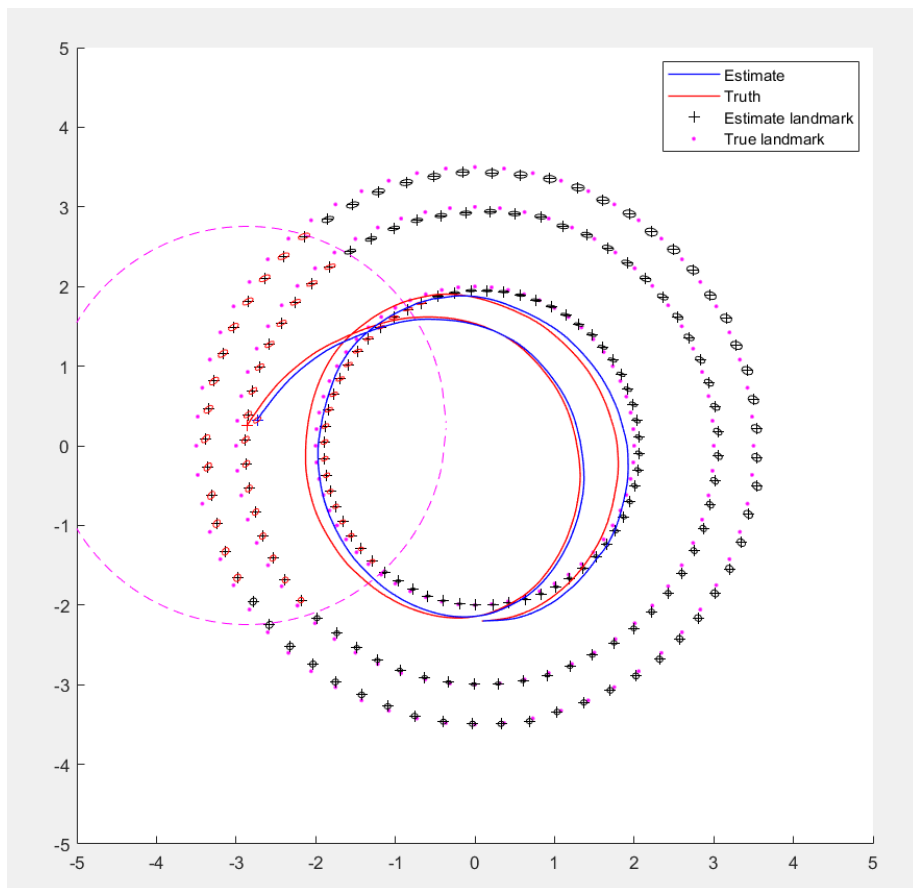
程序中是对 \mathbf{P} 进行 SVD 分解，得到椭圆的方向 \mathbf{R} 以及半轴到的长度，进行绘图。

3.2.2 状态增广，观测更新



如上图，黑色的协方差椭圆代表的路标点表示雷达曾经观测过它，但是当前没有观测到；红色的协方差椭圆代表的路标点表示雷达曾经观测过它，并且当前也观测到；蓝色代表当前刚刚初始化的新路标点。

3.2.3 状态不再增广



如上图，不再存在蓝色的协方差椭圆，代表状态增广停止，滤波器的大小不再改变。

4 附录

全概率公式：

$$p(x) = \sum_y p(x|y)p(y) \quad (70)$$

$$p(x) = \int p(x|y)p(y)dy \quad (71)$$

条件概率公式：

$$p(x|y) = p(x, y)/p(y) \quad (72)$$

贝叶斯公式：

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)P(x)}{P(z)} = \frac{\text{likelihood} \cdot \text{prior}}{\text{evidence}} \quad (73)$$

4.1 条件概率和联合概率

首先需要明确的是随机变量有随机性，其中随机性可以用一个概率分布来描述。 $P(x|z)$ 指的是在随机变量 z 已经确定的情况下，继而推算出的 x 的概率，也即是 x 的概率分布。显然， $P(x|z)$ 是一个关于 x 和 z 的函数。

简单例子：

现有随机变量 x, y, z ，其中 z, y 均服从 $(0,1)$ 的高斯分布，且 z, y 两者不相互影响（即一方的取值不影响另一方）。 x 满足如下关系： $x = z + y$ ，求 $P(x)$ 和 $P(x|z)$ 。

$P(x)$ ：此时根据 z, y 的概率分布可以求得 $P(x)$ 为 $(0,2)$ 的高斯分布，也就是说除了 x 之外的随机变量会提供一个概率分布，我们通过随机变量的关系，由此来推出 x 的新的概率分布，这是一个仅仅关于 x 的函数。

$P(x|z)$ ：表示的是在随机变量 z 确定的情况下，随机变量 x 服从的概率分布 $x = z(\text{确定}) + y$ 。这时，随机变量 z 是一个确定的值，只有随机变量 y 为 x 传递概率分布信息。 z 的确定代表 x 的不确定度下降，比如求 $P(x|z, y)$ ，当 z, y 确定时， x 也是定值， x 也就没有概率分布。所以 $P(x|z)$ 服从 $(z,1)$ 的高斯分布， $P(x|z)$ 是关于 x, z 的函数。

4.2 联合概率

$P(y, z)$ 表示的是 y, z 的概率分布，定义为： $P(y, z) = P(y|z)P(z)$

4.3 边缘概率

当我们知道 $P(y, z)$ 时，就可以利用 $\int P(y, z)dy$ 来求 $P(z)$