

实验二：共轭梯度法

实用优化算法教学组

2019.4

一、实验目的：

1. 熟悉无约束优化问题的共轭梯度法；
2. 熟悉共轭梯度法并编制程序；
3. 培养Matlab编程与上机调试能力。

二、实验课时：4 课时

三、实验准备

- 1 复习无约束优化问题的共轭梯度法；
- 2 熟悉Matlab软件的基本操作。

四、实验内容

课堂上机实验演示：根据共轭梯度法编写程序，求函数

$$\min f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_1^2)^2$$

其中初始点为 $x_0 = (0, 0)^T$ 。

五、实验步骤：

5.0 matlab 准备

- (1) 以函数文件形式建立目标函数和梯度；
- (2) 黄金分割法程序
- (3) if-else-end, while-end 结构；

5.1 共轭梯度法算法描述

Algorithm 1 重新开始FR 共轭梯度法

初始化: 选取初始点 x_0 , 精度 $\epsilon > 0$.

计算 $f_0 = f(x_0)$, $\nabla f_0 = \nabla f(x_0)$;

if $\|\nabla f_0\| \leq \epsilon$ **then**

 终止

else

$f_{run} = 1$;

end if

令 $\beta_{-1} = 0$, $d_{-1} = 0$. 置 $k := 0$.

while $f_{run} = 1$ **do**

 令 $d_k = -\nabla f_k + \beta_{k-1}d_{k-1}$;

 计算最优步长 α_k , 使得

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha d_k).$$

 令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

 计算 $\nabla f_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$.

if $\|\nabla f_{k+1}\| \leq \epsilon$ **then**

 令 $f_{run} = 0$;

else

if k 能被 n 整除 **then**

$\beta_k = 0$;

else

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f_{k+1}\|^2}{\|\nabla f_k\|^2};$$

end if

 置 $k := k + 1$.

end if

end while

输出: $x^* = x_k$.

注意到上面算法中, 在一次迭代中只用到 x_k 和 x_{k+1} 两个迭代点. 故而在实际编程中, 为了简便起见, 可以用 $xold$, $xnew$ 表示这两个迭代点, 循环更替.

5.2 定义目标函数和梯度函数

和实验一相同. 注意: 一般说来, 如果函数的梯度比较容易计算, 则将其表达式算出来, 写成一个函数文件比较好. 格式如下

```
function gf=gradf(x)
    gf = [...;...];
end
```

如果梯度很难算出表达式, 则可用数值微分方法计算, 这里不做介绍.

另外, 不建议利用matlab 的符号运算功能计算函数梯度.

5.3 精确搜索.

要求使用实验一所写的黄金分割程序来计算精确步长. 为此, 可能需要对实验一的程序进行改写.

方法一: 构造一个新函数, 假设命名为 psi.m

```
function psix=psi( alp ,x,d)
    psix=funf(x+alp*d);
end
```

其中, x 为当前点, d 为搜索方向, funf 为目标函数. 再对 alp 进行一维搜索. 取初始区间为 $[0, 1]$ 或适当放大点的区间, 如 $[0, 2]$. 分别用 $alp1$, $alp2$ 和 $psix1 = psi(alp1, x, d)$, $psix2 = psi(alp2, x, d)$ 代替原黄金分割程序中的 x_1 , x_2 和 f_1 , f_2 即可.

方法二: 用分别用 $alp1$, $alp2$ 和 $f(x + alp1d)$, $f(x + alp2d)$ 代替原黄金分割程序中的 x_1 , x_2 和 f_1 , f_2 .

5.3 循环和选择

同实验一一样, 这个实验里需要用到while 语句和if 语句.

五、课堂实验任务

编写函数文件, 实现共轭梯度法, 求函数

$$f(x) = \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2} - x_1x_2 + x_1 - x_2.$$

的极小值, 始点分别为 $x^{(0)} = [0, 0]^T$ 和 $x^{(0)} = [1.5, 1]^T$.

备注: 同学们也可以自行选择所要求解的例题, 但必须使用共轭梯度法.

在完成课堂实验任务的基础上, 同学们可以考虑使用PRP 共轭梯度法或者拟Newton 法求解.

六、实验主要步骤

1. 熟悉Matlab中共轭梯度算法的常用命令;
2. 编写m文件以创建和保存各函数;
3. 运行程序, 保存结果;

4. 撰写实验报告。

七、实验报告的撰写要求

1. 写出实验课程名称、姓名和学号；
2. 写出实验目的及实验内容；
3. 写出实验过程及结果（程序代码及数值解），尽量给出其图像；
4. 递交实验报告：
 - (1) 课程结束后1周内，实验报告的电子版请发到sonqiang@163.com，标题和附件名称相同，格式如下：实验序号_姓名_学号_实验名称.rar
例：实验2_张某_12345678_共轭梯度法.rar
 - (2) 笔试(结课考试)前，实验报告的纸质版，由班长或者学习委员，按照每位同学收齐，交给任课教师。
5. 实验报告格式模板（见文件：实验报告模板.doc）