

实验二：外罚函数法

实用优化算法教学组

2019.4

一、实验目的：

1. 通过上机利用Matlab数学软件进行外罚函数编程，并学会对具体问题具体分析；
2. 熟悉外罚函数并编制程序；
3. 培养Matlab编程与上机调试能力.

二、实验课时：4 课时

三、实验准备

- 1 复习外罚函数算法；
- 2 熟悉Matlab软件的基本操作.

四、实验内容

课堂上机实验演示：根据外罚函数算法编写程序，求解约束问题

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 - x_2 = 0. \end{array}$$

五、实验步骤：

5.0 matlab 准备

- (1) 以函数文件的形式定义目标函数及其梯度;约束条件及其梯度.
- (2) 定义外罚函数及其梯度. 如果使用（阻尼）Newton 法，则需计算外罚函数的Hesse 矩阵；如果使用拟Newton 法，需用一个文件实现拟Newton 校正.
- (3) 一个共轭梯度法程序.

5.1 外罚函数法算法描述

Algorithm 1 外罚函数法(等式约束)

初始化: 选取初始点 x_0 , 初始罚因子 σ_1 , 精度 $\epsilon_1 > 0, \epsilon > 0$.

计算罚函数 $P_0 = P(x_0, \sigma_0)$ 及梯度 $\nabla P_0 = \nabla P(x_0, P_1)$. 令 $f_{stop} = 0, k = 1$.

while $f_{stop} = 0$ **do**

以 x_{k-1} 为初始点,

$$\|\nabla P(x, \sigma_{k-1})\| \leq \epsilon_1$$

为终止条件, 求解问题

$$\min P(x, \sigma_{k-1}).$$

(这里要求使用共轭梯度法求解). 设解为 $x_k = x_k(\sigma_k)$.

if $\|c(x_k)\| \leq \epsilon$ **then**

令 $f_{stop} = 1$;

else

令 $\sigma_{k+1} = 10\sigma_k, k = k + 1$.

end if

end while

输出: x_k .

5.2 定义罚函数及其梯度

在定义罚函数之前, 先要定义好目标函数, 约束条件和它们的梯度. 目标函数及其梯度可按实验一、二的方法定义. 接下来介绍约束条件及其梯度. 设约束条件包含 m 个约束.

$$c(x) := \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_m(x) \end{pmatrix} = 0.$$

则定义

约束条件

```
function cx=func(x)
    cx=[c1(x);
        c2(x);
        ...;
        cm(x)];
```

end

约束条件的梯度

```
function gcx=gradc(x)
    cx=[gc1 gc2 ... gcm];
```

end

其中, $gc1, \dots, gcm$ 分别是各个约束条件的梯度(列向量).

外罚函数

```
function px=funp(x,s)
    fx=funf(x);
    cx=func(x);
    px=fx+s*cx'*cx;
```

end

外罚函数的梯度

```
function gpx=gradp(x,s)
    gfx=gradf(x);
    cx=func(x);
    gc=gradc(x);
    gpx=gfx+2*s*gcx*cx;
```

end

5.3 用共轭梯度法求 $P(x, \sigma_k)$ 的最小值.

将实验二所写的共轭梯度算法应用与 $P(x, \sigma_k)$ 即可.

五、课堂实验任务

编写函数文件, 实现外罚函数法. 求解

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{aligned}$$

备注: 同学们也可以自行选择所要求解的例题.

对于部分完成较快的同学, 可以做如下的拓展问题

- (1) 改变精度，罚因子等参数，重新实验
- (2) 尽可能多的选取实验函数
- (3) 采用不同的无约束优化算法（建议：BFGS拟牛顿法，共轭梯度法）
- (4) 与MATLAB优化工具箱的结果进行比较
- (5) 选用非凸或者较为难解的问题进行实验

六、实验主要步骤

1. 熟悉Matlab中共轭梯度算法的常用命令；
2. 编写m文件以创建和保存各函数；
3. 运行程序，保存结果；
4. 撰写实验报告.

七、实验报告的撰写要求

1. 写出实验课程名称，全体组员的姓名和学号；
2. 写出实验目的及实验内容；
3. 写出实验过程及结果（程序代码及数值解），尽量给出其图像；
4. 递交实验报告：
 - (1) 课程结束后1周内，实验报告的电子版请发到sonqiang@163.com，标题和附件名称相同，格式如下：实验序号_组名_实验名称.rar
例：实验3_×× 组_外罚函数法.rar
 - (2) 笔试(结课考试)前，实验报告的纸质版，由班长或者学习委员，按照每组同学收齐，交给任课教师.
5. 实验报告格式模板（见文件：实验报告模板.doc）