实用优化算法习题

1. 用斐波那契法求函数$f(x) = x^2 - x + 2$ 在区间$[-1, 3]$ 上的极小点, 要求至少迭代3次.

2. 用黄金分割法求
$$f(x) = -2x^3 + 21x^2 - 60x + 50$$
在区间$[-1, 4]$ 内的最小值, 迭代三次.

3. 考虑函数
$$f(x) = \frac{1}{3}x_1^3 - 16x_1 + \frac{1}{3}x_2^3 - x_2$$
写出$\min\ f(x)$ 的一阶必要条件并利用该条件求$f(x)$ 的极小点.

4. 考虑下列函数

   (1) $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$

   (2) $f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2\left(x_1 - x_2 - 1\right).$

   的所有驻点.哪些是极小点，是否是整体极小点.

5. 对正定二次函数$f(x) = \frac{1}{2}x^TGx + c^Tx$, 在点$x_k$ 处, 求出沿方向d_k 做精确搜索的步长α_k.

6. 用最速下降法求解
$$\min\ f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2,$$
设初始点为$(9, 1)^T$.

7. 试用最速下降法求解
$$\min\ f(x) = 2x_1^2 + x_2^2,$$
设初始点取为$x_0 = (4, 4)^T$, 迭代2次, 并验证相邻两次迭代的搜索方向是正交的.

8. 用Newton 法求解
$$\min\ f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{9}{2}x_2^2.$$

9. 用FR 共轭梯度法求解
$$\min\ f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1,$$
取初始点$x_0 = (0, 0)^T$.

10. 考虑函数

$$f(x) = 1/2x_1^2 + 1/2x_2^2$$

设初始点为$x_k = (1,1)^T$，取$d_0 = (-1,0)^T$,

(a) 沿方向d_0 进行精确一维搜索得α_0. 令$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0$, 用FR 公式求d_1 .

(b) 设G 为目标函数的Hesse 矩阵，证明d_0 与d_1 不是关于G 共轭的. 试说明原因。

11. 用DFP 算法求解

$$\min\ f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1,$$

取$x_0 = (1,1)^T$, $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. 用DFP 算法求解

$$\min f(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 7.$$

初始点为$x_0 = (-1,0)^T$, 初始矩阵为单位矩阵.

13. 用DFP 算法求解

$$\min\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$$

初始点取为$x_0 = (2,2)^T$, 初始矩阵取为单位矩阵，并验证算法所产生的两个方向关于$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 共轭的.

14. 考虑问题

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t. } & c(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

的最优性条件和极值点.（相当于用Lagrange 乘子法求极小点）

15. 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) = -(x_1 + x_2) \\ \text{s.t. } & c_1(x) = 1 - x_1^2 - 4x_2^2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

初始点为$x_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$. 试分别判断方向向量$d_1 = [1,0]^T$, $d_2 = [1,-0.5]^T$, $d_3 = [0,-1]^T$ 是否是初始点处的下降方向？是否是可行方向？是否是可行下降方向？

16. 问题

$$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_2^2, \\ s.t.\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 \leq 1, \\ & x_2^2 - x_1 + 1 \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

的最优解是$x^* = (1,0)^T$. 求点x^* 处的有效集$\mathcal{I}^*$.

17. 求问题

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)=(x_1-1)^2+(x_2-1)^2,\\ \text{s.t.}\ & c_1(x)=1-x_1-x_2\geq 0,\\ & c_2(x)=x_1\geq 0,\\ & c_3(x)=x_2\geq 0.\end{aligned}$$

的KKT 点.

18. 求问题

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)=(x_1+x_2)^2+2x_1+x_2^2,\\ \text{s.t.}\ & x_1+3x_2\leq 4,\\ & 2x_1+x_2\leq 3,\\ & x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

的KKT 点.

19. 已知约束问题

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)=-3x_1^2-x_2^2-2x_3^2,\\ \text{s.t.}\ & c_1(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3=0,\\ & c_2(x)=-x_1+x_2\geq 0,\\ & c_3(x)=x_1\geq 0,\\ & c_4(x)=x_2\geq 0,\\ & c_5(x)=x_3\geq 0.\end{aligned}$$

试验证最优解$x^*=(1,1,1)^T$ 为KKT 点.

20. 用外罚函数法求解约束优化问题

$$\begin{aligned}\min\ & f(x)=x_1^2+x_2^2,\\ s.t.\ & x_1+x_2-2=0.\end{aligned}$$

21. 对问题

$$\begin{aligned}\min\ & x_2^2-3x_1,\\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2=1\\ & x_1-x_2=0\end{aligned}$$

考虑外罚函数法，求出问题的局部最优解和相应的Lagrange 乘子.

22. 对问题

$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1+3x_2\\ \text{s.t.}\quad & 1-2x_1^2-x_2^2\geqslant 0\end{aligned}$$

考虑对数障碍函数, 求出问题的解.

23. 写出如下不等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2, \\ &\ s.t.\ x_1 + x_2 - 2 \geq 0. \end{aligned}$$

的外罚函数.

24. 写出如下不等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ -x_1 x_2 \\ &\ s.t.\ c_1 = -x_1 - x_2^2 + 1 \geq 0, \\ &\qquad c_2 = x_1 + x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

的外罚函数.

25. 用障碍函数法

$$\begin{aligned} &\min\ f(x_1 + x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2 \\ &s.t.\ 1 - x_1 \leq 0, \\ &\qquad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

26. 用内罚函数法求如下问题的最优点。

$$\begin{aligned} &\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ &s.t. x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

27. 用增广Lagrange 函数法求解等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2, \\ &\ s.t.\ x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

28. 用增广Lagrange 函数法求解等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

29. 写出不等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min\ x_1^2 + x_2^2, \\ &\ s.t.\ x_1 + x_2 - 2 \geq 0. \end{aligned}$$

的增广Lagrange 函数.

30. 用增广Lagrange 函数法求解等式约束最优化问题

$$\begin{aligned} &\min f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 \\ &\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

(写出增广Lagrange 函数，不需求解).

31. 用有效集法求解

$$\begin{aligned} \min\ & q(x) = (x_1-1)^2 + (x_2-2.5)^2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - 2x_2 + 2 \geq 0 \\ & -x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

初始点为$x_0 = (2,0)^T$. (至少能迭代一次)