

# Algoritmer

## Den kortaste vägen

### Ett problem: bestäm mellanstationer för den kortaste vägen

Det finns i ett trafiksystem fyra zoner:  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  och  $Z_4$ . I zonen  $Z_1$  finns endast stationen  $X$ , och zonen  $Z_4$  omfattar bara stationen  $Y$ . I zonen  $Z_2$  finns stationerna  $U_1, U_2, \dots, U_m$ , ( $m$  är ett positivt heltal), och zonen  $Z_3$  omfattar stationerna  $V_1, V_2, \dots, V_n$  ( $n$  är ett positivt heltal).

Det finns direkta vägar mellan stationen  $X$  och alla stationer i zonen  $Z_2$ . Zonerna  $Z_2$  och  $Z_3$  är väl kopplade med varandra: det finns en direkt väg mellan vilken station som helst i den ena zonen och en godtycklig station i den andra zonen. Det finns även en direkt väg mellan vilken station som helst i zonen  $Z_3$  och stationen  $Y$ . Det finns inga andra vägar mellan givna stationer..

För ett godtyckligt heltal  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , gäller: längden av vägen mellan stationen  $X$  och stationen  $U_i$  är  $a_i$ .

För ett godtyckligt heltal  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , och för ett godtyckligt heltal  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , gäller: längden av vägen mellan stationen  $U_i$  och stationen  $V_j$  är  $b_{ij}$ .

För ett godtyckligt heltal  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , gäller: längden av vägen mellan stationen  $V_j$  och stationen  $Y$  är  $c_j$ .

En väg mellan stationerna  $X$  och  $Y$  går genom en station i zonen  $Z_2$  och en station i zonen  $Z_3$ . En mellanstation i var och en av zonerna  $Z_2$  och  $Z_3$  ska väljas, så att vägen mellan stationen  $X$  och stationen  $Y$  blir så kort som möjligt.

Det kan hända att det finns flera vägar som har den kortaste längden. I så fall ska mellanstationer på en av dessa vägar bestämmas.

### Uppgifter i samband med problemet

1. Bestäm en instans av det här problemet i fallet att  $m = 3$  och  $n = 4$  – välj väglängderna. Specificera den instansen med en bild. Det ska framgå vilka stationer och vägar som finns, och hur långa vägarna är.

2. Specificera den valda instansen även med en tabell. Tabellen ska vara av följande form:

$Z_1$	$a_i$	$Z_2$	$b_{ij}$	$Z_3$	$c_j$	$Z_4$	Längd
$X$		$U_1$		$V_1$		$Y$	
$X$		$U_1$		$V_2$		$Y$	
$X$		$U_1$		$V_3$		$Y$	
$X$		$U_1$		$V_4$		$Y$	
$X$		$U_2$		$V_1$		$Y$	
$X$		$U_2$		$V_2$		$Y$	
$X$		$U_2$		$V_3$		$Y$	
$X$		$U_2$		$V_4$		$Y$	
$X$		$U_3$		$V_1$		$Y$	
$X$		$U_3$		$V_2$		$Y$	
$X$		$U_3$		$V_3$		$Y$	
$X$		$U_3$		$V_4$		$Y$	

Lös den aktuella instansen av problemet med papper och penna: undersök alla möjliga vägar och bestäm mellanstationerna för den kortaste vägen (för in längderna i kolumnen "Längd" och välj de mellanstationer som motsvarar den minsta längden).

3. Hitta en minneseffektiv algoritm som löser det här problemet i ett allmänt fall – använd uppdateringsstrategi. Beskriv den algoritmen på två olika sätt: med ord och med pseudokod.

Beskrivningen ska vara på följande form:

#### PROBLEM

Problembeskrivning

#### ALGORITM

##### FÖRVILLKOR

Precisera algoritmens förvillkor

##### EFTERVILLKOR

Precisera algoritmens eftervillkor

##### STEG I ALGORITMEN

Beskriv steg i algoritmen med ord

##### STEG I ALGORITMEN – PSEUDOKOD

Beskriv steg i algoritmen med symboler

4. Skapa ett Javaprogram som kan lösa olika instanser av det här problemet. Använd programmet i samband med två instanser, och förklara de resultat som erhålls.

Det ska finnas två klasser: `DenKortasteVagen` och `BestamDenKortasteVagen`. Den första klassen ska se ut så här:

```
class DenKortasteVagen
{
    // mellanstationer returnerar en vektor med de mellanstationer som finns på den kortaste
    // vägen. Ordningsnummer av den första mellanstationen finns på index 1, och ordningsnummer
    // av den andra mellanstationen på index 2 i vektorn.
    public static int[] mellanstationer (double[] a, double[][] b, double[] c)
    {
        // koden här
    }

    // langd returnerar längden av den kortaste vägen.
    public static double langd (double[] a, double[][] b, double[] c)
    {
        // koden här
    }
}
```

Klassen `BestamDenKortasteVagen` ska innehålla metoden `main`, där instansspecifika uppgifter matas in, och metoder i klassen `DenKortasteVagen` anropas.