Algoritmer

Sortera en mängd

Ett problem att lösa: sortera element i en mängd

Det finns en mängd U, vars element kan jämföras med varandra med operatorn $<$. Det går att bestämma det mindre av två godtyckliga element i mängden. Mängden X är en ändlig, icke-tom delmängd i mängden U.

Sortera element i mängden X i stigande ordning.

En algoritm som löser problemet – utbytessortering

Algoritm: *sortera*

Förvillkor:

U *är* en mängd vars element kan jämföras med operatorn $<$,

N är mängden av alla naturliga heltal,

$n \in N, n \geq 1, X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset U,$

för ett godtyckligt heltal i, $1 \leq i \leq n$, betecknar x_i det element som finns på positionen i

Eftervillkor:

$x_1 < x_2 < ... < x_n$

Stegen i algoritmen:

```
sortera (n, X)
{
    i = 1
    while i < n
    {
        j = i + 1
        while j ≤ n
        {
            if (xj < xi)
                utbyt xj och xi
            j++
        }

        i++
    }
}
```

Uppgifter i samband med problemet och algoritmen

1. Åskådliggör algoritmen: rita en serie bilder som visar hur en mängd sorteras.

2. Bestäm algoritmens tidskomplexitet när det gäller antalet elementjämförelser: bestäm motsvarande komplexitetsfunktion. Till vilken θ–mängd tillhör denna komplexitetsfunktion?

3. Bestäm algoritmens tidskomplexitet när det gäller antalet elementutbyten. Bestäm komplexiteten i bästa fall, i värsta fall och i ett genomsnittligt fall. Anta att sannolikheten för ett utbyte i ett genomsnittligt fall är 0.5.

Kategorisera de motsvarande komplexitetsfunktionerna: till vilken θ–mängd tillhör dem?

4. Jämför tidskomplexiteten mellan utbytessorteringen och urvalssorteringen. Både antalet jämförelser och antalet utbyten ska betraktas.

5. Bevisa algoritmen.

Beviset ska ha följande struktur:

A) INRE LOOPEN

ETT PÅSTÅENDE OM INRE LOOPEN

När den inre loopen har utförts, gäller följande:

$x_i = minimum\ \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$

BEVIS

Här ska beviset finnas. Man ska fastställa ett påstående om variablerna, och bevisa att detta påstående är en loopinvariant för den inre loopen. Med hjälp av denna loopinvariant ska beviset sedan härledas.

B) HUVUDLOOPEN

ETT PÅSTÅENDE OM HUVUDLOOPEN

När huvudloopen har utförts, gäller följande:

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

BEVIS

Här ska beviset, som utnyttjar påståendet om den inre loopen, finnas. Man ska fastställa ett påstående om variablerna, och bevisa att detta påstående är en loopinvariant för huvudloopen. Med hjälp av denna loopinvariant ska beviset sedan härledas.