

习题——数学分析

HJY

2020 年 9 月 26 日

第一部分

单变量微积分

第一章 数列极限

第二章 连续函数

第三章 导数与微分

第四章 导数的应用

第五章 一元函数的积分

问题 5.1. Assume f is defined on $[a, b]$. If $f^2(x)$ is integrable, then $|f(x)|$ is integrable.

解答. Solution 1: Hint: Use the Lebesgue criterion.

Solution 2: Hint: Consider composite functions $\varphi(x) = \sqrt{x}, \psi(x) = f^2(x)$.

Solution 3: Hint: Consider Darboux upper sum and Darboux lower sum.

$f^2(x)$ is integrable, so f is bounded. Let $m = \inf f^2$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ partition π , s.t. $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$.

Let $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f^2(x) = f^2(\xi_i), m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f^2(x) = f^2(\eta_i)$,

Darboux upper sum of $|f(x)|$ is $S'(\pi)$, Darboux lower sum of $|f(x)|$ is $s'(\pi)$.

$$\begin{aligned} S(\pi) - s(\pi) &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\eta_i) \Delta x_i &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) - f^2(\eta_i) \right) \Delta x_i &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i)) (f(\xi_i) + f(\eta_i)) \Delta x_i &< \varepsilon \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) - f(\eta_i)) 2\sqrt{m} \Delta x_i &< \varepsilon \\ \Rightarrow S'(\pi) - s'(\pi) &< \varepsilon / 2\sqrt{m} \end{aligned}$$

So, $|f| \in R[a, b]$.

问题 5.2. 计算积分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr$.

解答. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} dt =$
 $\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sin \theta}{\cos \theta} d \sin \theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \theta) d \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

第六章 积分的应用

第二部分

级数

第七章 广义积分

问题 7.1. (梅 [7.2] 5(1)) 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 的敛散性.

解答. tentative: $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{1/e} \frac{dx}{\ln x} + \int_{1/e}^1 \frac{dx}{\ln x}$. 其中 $\int_0^{1/e} \frac{dx}{\ln x} \stackrel{x=1/t}{=} \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln t}$ 收敛. 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln(1+(x-1))} \sim \frac{1}{x-1}$, 而 $\int_{1/e}^1 \frac{1}{x-1}$ 发散. 故原积分发散.

问题 7.2. (梅 [7.2] 8) (1) 设 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上一致连续, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(梅 [7.2] 12) (2) 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 不一定有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

解答. (1) (提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列)

(法二提示: 反证法)

(2) (提示: 考虑 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 或分段函数)

问题 7.3. (梅 [7.2] 11) (1) 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 不一定收敛.

(2) 对于瑕积分, 证明: 平方收敛一定绝对收敛, 但逆命题不成立.

解答. (1) 提示: 若本题不要求 $f(x)$ 连续, 则可以取分段函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} n, & x \in \bigcup_{n=2}^{+\infty} [n, n + \frac{1}{n^3}] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

然后在此基础上进行改进.

(2) 注意到 $2|f(x)| \leq 1 + f^2(x)$

问题 7.4. (梅 [7.3] 7) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$.

证明. 提示: 由 Cauchy 收敛准则, 在区间 $[A, A/2]$ 估计积分. □

问题 7.5. (梅 [7.3] 8) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减趋于 0, 且 $\int_a^{+\infty} \sqrt{f(x)/x} dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛.

提示: 利用上题, 比较被积函数 (相除取极限)

问题 7.6. (梅 [7.3] 9) 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 如果 $x \rightarrow +\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于 0, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0$$

解答. 提示: 利用 Cauchy 准则, 考虑积分 $\int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt = \int_{\sqrt{x}}^x t f(t) \frac{1}{t} dt$.

问题 7.7. (梅 [7.3] 10) 设 $f(x) > 0$ 在 $[0, \infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ 收敛, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) dx = +\infty$$

证明. 提示: 使用 Cauchy 不等式:

$$\left(\int_0^\lambda f(x) dx \right) \left(\int_0^\lambda \frac{dx}{f(x)} \right) \geq \left(\int_0^\lambda 1 dx \right)^2$$

□

问题 7.8. (梅 [7.3] 10) 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

的敛散性.

解答. $p > 1$ 收敛; $p = 1, q > 1$ 收敛. 其余均发散.

问题 7.9. (梅 [7.4] 8) (1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且对任意 $c > 0$, 积分 $\int_c^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

(梅 [7.4] 9) (2) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 如果对于任意 $b > a > 0$, 积分 $\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (L - M) \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha, \beta > 0)$$

解答. 本题为伏汝兰尼积分, 备忘: 整理伏汝兰尼积分的详细讨论 (梅书同一页第 10 题, 菲砖卷二 P531)

提示: 考虑 $\int_A^B \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx$, 做变量替换, 最后令 $A \rightarrow 0^+, B \rightarrow +\infty$ 即可.

第八章 数项级数

问题 8.1. (梅 [8.2] 6, 9) 设 $a_n > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明:

- (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 总收敛; 更一般地, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ ($p > 1$) 总收敛.
 (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 更一般地, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ ($p \leq 1$) 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明. 只证一般的结果.

- (1) $S_n \uparrow$, 对 $\frac{1}{x^{p-1}}$ 在 $[S_{n-1}, S_n]$ 上使用 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}} &= \frac{p-1}{\xi^p} (S_n - S_{n-1}), \quad \xi \in [S_{n-1}, S_n] \\ &= \frac{p-1}{\xi^p} a_n \\ &\geq (p-1) \frac{a_n}{S_n^p} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{S_k^p} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{S_{k-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_k^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{S_1^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}} \right) \leq \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{S_1^{p-1}} \text{ 有界} \end{aligned}$$

故收敛.

- (2) 充分性是容易的. 下证必要性:

i) $p \geq 0$ 时. $\forall \epsilon < 1$, $\exists N$ s.t. $m > n > N$ 时, $\epsilon > \sum_{k=n+1}^m \frac{a_k}{S_k^p} > \frac{S_m - S_n}{S_m^p}$, 即 $S_m - \epsilon S_m^p < S_n$. 则 S_m 必然有界, 否则固定 n , 令 $m \rightarrow \infty$ 矛盾.

ii) $p < 0$ 时. $\epsilon > \sum_{k=n+1}^m \frac{a_k}{S_k^p} \geq (S_m - S_n) S_n^{-\alpha}$. 同样 S_m 必然有界, 否则固定 n , 令 $m \rightarrow \infty$ 矛盾.

由 S_m 单调增加且有界可得 S_m 收敛. □

问题 8.2. (梅 [8.2] 7) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 试用积分的方法证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$ 也发散, 其中 S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和.

证明. 其部分和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{S_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{1}{S_k} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{S_{n+1}}{S_1} \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

□

问题 8.3. (梅 [8.2] 8(1)) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 的敛散性.

解答. (法一)

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})-1} \\ &= 1 + \left[(n+p)\ln(1+\frac{1}{n}) - 1\right] + O\left[(n+p)\ln(1+\frac{1}{n}) - 1\right]^2 \\ &= 1 + \left[(n+p)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{(2p-1)/2}{n} + \frac{p^2 - \frac{3p}{2} + \frac{7}{12}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

由 Gauss 判别法, $p - \frac{1}{2} > 1$ 时收敛, $p - \frac{1}{2} \leq 1$ 时发散.

(法二) 利用 Stirling 公式: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ 代入即可

问题 8.4. 设 a_n 单调递减趋于 0, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\}$ 也发散.

证明. (法一)

i) 如果 $\exists N$, s.t. $a_n \leq \frac{1}{n}, \forall n > N$, 则结论成立.

ii) 可以找到无穷多 n_k ($k \geq 1$), s.t. $a_{n_k} > \frac{1}{n_k}$. 由于 a_n 单调减, 所以当 $n < n_k$ 时, $a_n > \frac{1}{n_k}$, $\min\left\{\frac{1}{n}, a_n\right\} > \frac{1}{n_k}$.

在 $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ 中取子列 $N_1, N_2, \dots, N_k, \dots$ s.t. $N_{t+1} > 2N_t$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=N_1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=N_t}^{N_{t+1}-1} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} \\ &> \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=N_t}^{N_{t+1}-1} \frac{1}{N_{t+1}} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N_{t+1} - N_t}{N_{t+1}} > \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此级数发散.

(法二) 注意到 $a_n \downarrow 0$, 故可以使用柯西凝聚判别法.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 发散, 而要证的 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, \frac{1}{n}\}$ 发散 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \min\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\}$ 发散.

令 $b_k = 2^k a_{2^k}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 只要证 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{b_n, 1\}$ 发散. 这是容易证明的. \square

问题 8.5. (梅 [8.2] 14) (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 则存在另一收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.

(梅 [8.2] 15) (2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的正项级数, 则存在另一发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$.

解答. (思路) (1) 记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和为 T_n . 设 S_n 收敛于 S . 将 $0 \sim S$ 不断二等分. 若 $S_n \in (0, \frac{1}{2}S]$, 取 $b_n = \sqrt{2}a_n$, 若 $S_n \in (\frac{2^{k-1}}{2^k}S, \frac{2^k}{2^{k+1}}S]$, $k = 1, 2, \dots$ 取 $b_n = (\sqrt{2})^{k+1}a_n$. 则 $T \approx \frac{1}{2}S \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2^2}S \cdot (\sqrt{2})^2 + \dots = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots \right] S$ 有界.

(2) 取 $M > 0$, 将 $(M, +\infty)$ 分段: $(M, 2M], (2M, 2^2M], \dots$. 若 $S_n \in (2^{k-1}M, 2^kM]$, $k = 1, 2, \dots$, 取 $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}a_n$. 则 $T_n \approx M + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2M + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 2^2M + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cdot 2^kM = \left[1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{2})^k\right] M$ 发散.

问题 8.6. (梅 [8.2] 17) 设 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ 也收敛.

解答. (法一)

分析: 如果对于任意的 n , 能够找到一个公共的 M , 使得 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \leq M \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ 成立, 那么结论就成立. 由 Cauchy 不等式, 我们可以知道

$(\sum_{k=1}^n a_k) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$, 即 $\frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$, 两边求和, 得到

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} \right)$$

可惜的是, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 无界. 所以我们需要对不等式进行调整, 为了得到更精确的放缩, 使用待定系数法.

由 Cauchy 不等式, $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$, $x_i > 0$. 化简后得到 $\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{n}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)$. 然后取不同的数列 x_i 进行尝试.

取 $x_i = i$, 则 $\frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{n}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i}\right)$, 两边求和得到

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{a_k}$$

其中

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{i^2 \cdot i}{\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2} + \frac{i^2 \cdot (i+1)}{\left(\frac{(i+1)(i+2)}{2}\right)^2} + \cdots + \frac{i^2 \cdot n}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \\ &= 4i^2 \sum_{j=i}^n \frac{1}{j(j+1)^2} \leq 2i^2 \sum_{j=i}^n \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2} \\ &= 2i^2 \sum_{j=i}^n \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+1)^2} \right) = 2 - \frac{2i^2}{(n+1)^2} < 2 \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

(法二)

参见 [谢惠民下册 P16]

问题 8.7. (梅 [8.3] 7) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是否也收敛?

解答. 否. 反例如下: 取

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, & n = 3k \\ \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, & n = 3k+1 \\ \frac{-2}{\sqrt[3]{n}}, & n = 3k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

由 Cauchy 收敛准则容易验证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但是

$$a_n^3 = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 3k \\ \frac{1}{n}, & n = 3k+1 \\ \frac{-8}{n}, & n = 3k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^n \frac{-6}{k}$$

发散. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

问题 8.8. (梅 [8.3] 12) 设 $a_n > 0$, $na_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: $(n \ln n)a_n \rightarrow 0$.

证明. 记 $b_n = na_n$, 则 $b_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛.

因此 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 > 0$, 当 $m > n > N_1$ 时,

$$\begin{aligned}\epsilon &> \sum_{k=n+1}^m \frac{b_k}{k} > b_m \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \\ &= b_m \left[\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) + \ln \frac{m}{n} \right] \\ &= b_m (c_m - c_n) + b_m \ln m - b_m \ln n\end{aligned}$$

其中 $c_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$, 则 $c_n \rightarrow \gamma$ as $n \rightarrow \infty$. 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_2 > 0$, 当 $m > n > N_2$ 时,

$$|c_m - c_n| < \frac{\epsilon}{b_1}$$

故 $m > n > \max\{N_1, N_2\}$ 时

$$\begin{aligned}|b_m \ln m| &< |\epsilon - b_m (c_m - c_n) + b_m \ln n| \\ &< \epsilon + |b_m (c_m - c_n)| + |b_m \ln n| \\ &< 2\epsilon + |b_m \ln n|\end{aligned}$$

固定 n , 令 $m \rightarrow \infty$, 得 $|b_m \ln m| \leq 2\epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln n) a_n = 0$

□

第九章 函数项级数

第十章 幂级数

第十一章 Fourier 分析

第十二章 含参变量的积分

第三部分

多变量微积分

第十三章 度量空间与连续映射

问题 13.1. 证明: \mathbb{R}^n 上有界无限点集必有聚点.

证明. (提示: Heine-Borel: S 是 \mathbb{R}^n 上的紧致集合的充分必要条件是 S 是有界闭集.)

设 S 是 \mathbb{R}^n 上有界无限点集. $\bar{S} = S \cup S^d$ 是闭集, 如果 S 没有聚点, 则 $S^d = \emptyset$, $\bar{S} = S$. 因此, 由 Heine-Borel, S 为紧致集合.

但是, S 没有聚点表明 $\forall x \in S, \exists \delta(x) > 0$, s.t. $B_{\delta(x)}(x)$ 只含有 S 中有限个点. 而 $B_{\delta(x)}(x)$ 形成了 S 的一个开覆盖, 它有有限子覆盖, 这个有限子覆盖中至多含有 S 中有限个点, 这与 S 是无限点集矛盾. \square

问题 13.2. (陈纪修 [11.3] 7) 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续映射. 证明: 对于 \mathbb{R}^n 中的任意子集 A , 都有 $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. 并举例说明 $f(\bar{A})$ 能够是 $\overline{f(A)}$ 的真子集.

证明. 提示: 利用闭包的性质: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A$, s.t. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$.

举例: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. 令 $A = \mathbb{R}^2$, 则 $\bar{A} = A$, 但是

$$f(\bar{A}) = (0, +\infty), \quad \overline{f(A)} = [0, +\infty)$$

\square

问题 13.3. Is the function $F(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$ continuous at $(0, 0)$? Or does the limit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$ exist?

解答. No.

$$\lim_{y=0, (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y=x^3-x^2, (x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(x^2-x)^3] = 1$$

第十四章 多元函数的微分

第十五章 多元函数的积分

问题 15.1. (陈纪修 [13.2] 9) 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解答. (此类题有个小技巧, 利用对称性) 记 $D=[0,1]\times[0,1]$, 由对称性得

$$\iint_D x dx dy = \iint_D y dx dy$$

于是

$$V = \iint_D (6-2x-3y) dx dy = 6 - 5 \iint_D x dx dy = 6 - 5 \int_0^1 x dx \int_0^1 dy = \frac{7}{2}$$

问题 15.2. (陈纪修 [13.2] 17) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明: $\left[\int_a^b f(x) dx\right]^2 \leq (b-a) \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

解答. 法一: 使用重积分

法二: 两边同除 $(b-a)^2$, 可以看出这是积分形式的均值不等式 (算术平均 \leq 平方平均). 分割取模求极限转化为离散形式即可.

问题 15.3. (陈纪修 [13.3] 2) 计算图形的面积:

(1) 三叶玫瑰线 $(x^2+y^2)^2 = a(x^3-3xy^2), (a>0)$ 所围成的图形.

(2) 曲线 $\left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k}\right)^4 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, h, k, a, b > 0$ 所围图形在 $x>0, y>0$ 的部分.

解答. (1) 回忆三倍角公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \cos 3\alpha = 3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha$.

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 将三叶玫瑰线化为极坐标形式 $r = a\cos 3\theta$. 注意这里 $r \geq 0$, 因此 θ 的取值范围是 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \cup [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \cup [-\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$ (只有一半可以取值). 然后用重积分的变量代换公式不难计算.

(2) 提示: 作变换 $\begin{cases} x = hr\cos\theta \\ y = kr\sin\theta \end{cases}$, 其 Jacobbi 行列式 $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = |hkr\sin 2\theta| \neq 0, (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$

问题 15.4. (陈纪修 [13.3] 5 (5)) 计算重积分 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 (a > 0)$ 所围的区域.

解答. 此题的一个重要技巧是利用对称性. 注意到积分区域关于 yz 平面和 xz 平面都对称. 于是

$$\iiint_{\Omega} xy dx dy dz = \iiint_{\Omega} yz dx dy dz = \iiint_{\Omega} zx dx dy dz = 0$$

因此

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

然后再使用柱坐标变换, (计算过程较为复杂, 不再赘述). 结果是 $\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5$.

第十六章 曲线积分与曲面积分

问题 16.1. 求第一型曲线积分:

$$\int_L |x| \, ds, \text{ 其中 } L \text{ 为双纽线 } (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

解答. 化为极坐标方程 $L : r^2 = \cos 2\theta$. 则 $\int_L |x| \, ds = \int_L |r \cos \theta| \, ds = 4 \int_0^{\pi/4} |r \cos \theta| \sqrt{1 + (r')^2} \, dr = 4 \int_0^{\pi/4} \cos \theta \, d\theta = 2\sqrt{2}$

第十七章 微分形式的积分