Julián D. Osorio Carrillo

Asignación 01

juosorioca@unal.edu.co

1. Determinar si $(\mathcal{P}, \times)$ es grupo.

Con $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$ y $M = \times$, la tabla de Cayhey.

$\times$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Tomemos $a, b, c \in \mathcal{P}$, donde tenemos que.

$$(b \times c) \times a = b \times (c \times a)$$
$$d \times a = b \times a$$
$$a \neq c$$

De modo que por contraejemplo $\times$ no es una operación asociativa.
Así pues, al no ser $\times$ asociativa, por definición de grupo, $(\mathcal{P}, \times)$, **no** es un grupo.

$\blacksquare$

2. Determinar si la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

Sea $\mathcal{M}$ conjunto de las matrices cuadradas y $\cdot$ el producto de matrices.
Sea ahora $x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$, $z = \begin{vmatrix} i & j \\ k & l \end{vmatrix} \in \mathcal{M}$ matrices cualesquiera. Operando basado en lo anterior:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$$\left(\begin{vmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{vmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{vmatrix} \right)$$
$$\begin{vmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdn & jce + jdg + lcf + ldh \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdn & jce + jdg + lcf + ldh \end{vmatrix}$$

De modo que por definición de asociatividad, $\cdot$ es asociativa en $\mathcal{M}$.

$\blacksquare$

3. Determinar si $(\mathbb{C}, \cdot)$ es grupo.

Sea $a, b, c \in \mathbb{C}$ complejos cualesquiera.
Entiéndase a un numero complejo z como el vector de magnitud r, resultante de un componente real x y una componente imaginaria iy, donde $x, y \in \mathbb{R}$; formando un ángulo ϕ, de modo que $z = x + iy$.

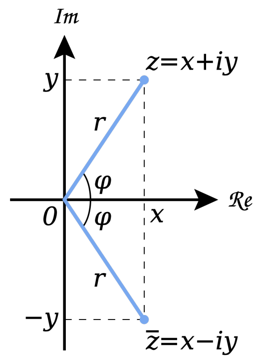

Figura 1: Representación del vector complejo en el plano.

Así, las componentes del vector $x = r\cos\phi$ y $y = r\sin\phi$, tal que, $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$; que por *identidad de Euler*, $z = re^{i\phi}$.
Así pues, $a = r_1e^{i\theta}$, $b = r_2e^{i\alpha}$ y $a = r_3e^{i\beta}$. Operando basado en lo anterior:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$
$$\left[r_1r_2e^{i(\theta+\alpha)}\right]\cdot r_3e^{i\beta} = r_1e^{i\theta}\cdot\left[r_2r_3e^{i(\alpha+\beta)}\right]$$
$$r_1r_2r_3e^{i(\theta+\alpha+\beta)} = r_1r_2r_3e^{i(\theta+\alpha+\beta)}$$

De modo que por definición de asociatividad, $\cdot$ es asociativa en $\mathbb{C}$.

Veamos ahora si existe un elemento neutro.
Téngase $e = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1 + i0 = 1 \in \mathbb{C}$ y sea $z = x + iy \in \mathbf{C}$ complejo cualquiera. Tales que:

$$\begin{aligned} z\cdot e &= (x+iy)\cdot(1+i0)\\ &= x + 0 + iy + 0\\ &= x + iy \end{aligned}$$

Entonces, por definición de elemento neutro, e es elemento neutro de $(\mathbb{C},\cdot)$.

Veamos que existan elementos simétricos.
Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ complejo cualquiera. Definamos ahora $z^{-1} = (x - iy)/(x^2 + y^2) \in \mathbb{C}$; de modo que:

$$\begin{aligned} z\cdot z^{-1} &= (x+iy)\cdot\frac{x-iy}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2 - ixy + ixy - i^2y^2}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2-(-1)y^2}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\\ &= 1 \end{aligned}$$

De tal forma que por definición de elemento simétrico, z^{-1} es elemento simétrico de $z \in \mathbb{C}$ cualquiera.

Entonces, por definición de Grupo, $(\mathbb{C},\cdot)$ es un Grupo.

$\blacksquare$