Julián D. Osorio Carrillo

Asignación 04

juosorioca@unal.edu.co

1. Demostrar los teoremas dados.

Definition 0.1 (Homomorfismo)**.** Un homomorfismo de grupos G y H es una aplicación $f: G \longrightarrow H$ tal que para cualesquiera $a, b \in G$ se cumple:

$$f(a \cdot b) = f(a) \times f(b)$$

Corollary 0.0.1. $\Theta(1_G) = 1_H$

Demostración. En H se tiene que,

$$\begin{aligned}
&\Theta(1_G) = \Theta(1_G \cdot 1_G) = \Theta(1_G) \times \Theta(1_G) \quad \text{, definición homomorfismo} \\
&\Theta(1_G) = \Theta(1_G) \times \Theta(1_G) \\
&\Theta(1_G)^{-1} \times \Theta(1_G) = \Theta(1_G) \times \Theta(1_G) \times \Theta(1_G)^{-1} \\
&1_H = \Theta(1_G) \times 1_H \\
&\Theta(1_G) = 1_H
\end{aligned}$$

□

Corollary 0.0.2. $\Theta(a)^{-1} = \Theta(a^{-1})$

Demostración. Sea $a \in G$ cualquiera, tales que,

$$\Theta(a) \times \Theta(a^{-1}) = \Theta(a \cdot a^{-1}) = \Theta(1) = 1$$

Y como el inverso de un grupo es único para cada $\Theta(a) \in H$, entonces para el inverso de $\Theta(a)$ se tiene que $\Theta(a^{-1}) = \Theta(a)^{-1}$. □

Estos colorarios nos ayudaran a demostrar el teorema en cuestión.

Theorem 0.1. *Si $\Theta: G \longrightarrow H$ es homomorfismo, entonces $Img(\Theta)$ es subgrupo de H.*

Demostración. Para que $Img(\Theta)$ hace falta que cumpla la definición de grupo.
$Img(\Theta)$ es cerrado:
Sea $a, b \in G$, como G es grupo, $a \cdot b = c \in G$, tales que,

$$\Theta(a) \times \Theta(b) = \Theta(c) \in Img(\Theta) \quad \text{, Por definición de imagen}$$

$Img(\Theta)$ tiene elemento neutro:
Como G es grupo, $1_G \in G$, tales que,

$$\Theta(1_G) = 1_H \in Img(\Theta) \quad \text{, Por definición de imagen y corolario}$$

Existe un inverso para cada $a \in Img(\Theta)$:
Sea $a \in G$, como G es grupo, $a^{-1} \in G$, tales que para $\Theta(a)$,

$$\Theta(a^{-1}) = \Theta(a)^{-1} \in Img(\Theta) \quad \text{, Por definición de imagen y corolario}$$

Adicionalmente como $Img(\Theta)$ hereda la operación binaria $\times$ de H que es grupo, se cumple asociatividad por definición de grupo.
Así pues, $Img(\Theta)$ es subgrupo de H.

□

Theorem 0.2. *Si $\Theta : G \longrightarrow H$ es homomorfismo, entonces $Kernel(\Theta)$ es subgrupo de H.*

Demostración. Veamos que $Kernel(\Theta)$ es subgrupo de G.
Sea $a, b \in Kernel(\Theta)$ cualesquiera. Por definición de Kernel, $\Theta(a) = 1_H = \Theta(b)$, dado lo anterior visto:

$$\begin{aligned} \Theta(a \cdot b^{-1}) &= \Theta(a) \times \Theta(b^{-1}) && \text{, Por definición de homomorfismo} \\ &= \Theta(a) \times \Theta(b)^{-1} && \text{, Por corolario} \\ &= 1_H \times 1_H = 1_H \end{aligned}$$

De modo que $ab^{-1} \in Kernel(\Theta)$.
Sabemos que un subconjunto S de G es subgrupo, si y solo si, cada que $a, b \in S$ implica que $ab^{-1} \in S$. Así pues, $Kernel(\Theta)$ es subgrupo de G.

□

Theorem 0.3. *Sea $X \subset G$. Existe subgrupo S tales que $X \subseteq S$.*

Demostración. Equivale a decir que al tener un conjunto $X \subset G$, existe subgrupo S tales que $X \subset S$, donde para T cualquier otro subgrupo que contiene a X; $S \subseteq T$.
Siendo S subconjunto que contiene a X, en cualquier caso, es posible definir el subgrupo $T \equiv G$, tales que por definición de subgrupo $X \subseteq T$, fuera de ello, al ser X subconjunto de G, se tendrá de igual forma $X \subset T$.

□