

Resolución de ecuaciones no lineales

- Solucionan ecuaciones no lineales tipo $f(x)=0$
- Normalmente cada método tiene sus requisitos
- Métodos son iterativos

Métodos iterativos para resolver $f(x)=0$

En general métodos iterativos consisten en

1. Obtener una aproximación inicial x_0
2. Refinar la aproximación inicial mediante una fórmula iterativa que genera nuevos valores x_1, x_2, \dots , que, idealmente, convergerán a la solución buscada x^* .
3. Establecer un criterio de parada o test de finalización, satisfecho el cual, se detiene el proceso de obtención de iterados.

x_k se llama iterado k - esimo y el error de esta aproximación viene determinado por

$$\varepsilon_k = |x_k - x^*|$$

Método de punto fijo

- Resuelve la ecuación $g(x)=x$

Concepto de iteración. Repetir un proceso hasta que se obtiene un resultado.

Idea del método: Partiendo de punto inicial aplicando la formula o función $g(x)$ calcularemos los términos sucesivos:

$$\begin{aligned} & x_0 \\ & x_1 = g(x_0) \\ & x_2 = g(x_1) \\ & \dots \\ \{x_k\}: & \dots \\ & x_k = g(x_{k-1}) \\ & x_{k+1} = g(x_k) \\ & \dots \end{aligned}$$

Definición. Un punto fijo de una función $g(x)$ es un número real P tal que $P = g(P)$.

Definición. La iteración $x_n = g(x_{n-1})$ para $n = 0, 1, \dots$ se llama iteración de punto fijo.

Ejemplos:

- 1) La ecuación $\cos x - x = 0$ se puede transformar en $\cos x = x$.
- 2) La ecuación $\tan x - e^{-x} = 0$ se puede transformar en $x + \tan x - e^{-x} = x$.

Convergencia del método punto fijo.

Teorema de punto fijo. Supongamos que

- (i) $g, g' \in C[a, b]$,
- (ii) K es una constante positiva,
- (iii) $x_0 \in (a, b)$
- (iv) $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.

Entonces hay un punto fijo P de g en $[a, b]$.

- Si $|g'(x)| \leq K < 1$ para todo $x \in [a, b]$, entonces P es el único punto fijo de g en $[a, b]$ y la iteración $x_n = g(x_{n-1})$ converge a dicho punto fijo P . En este caso, se dice que P es un punto fijo atractivo.
- Si $|g'(x)| > 1$ y $x_0 \neq P$ entonces la iteración $x_n = g(x_{n-1})$ no converge a P . En este caso se dice que P es un punto fijo repulsivo y la iteración presenta divergencia local.

Ejemplos:

- En el ejemplo 1, $g(x) = \cos x$ claramente se cumple la condición de que $|g'(x)| < 1$ en el intervalo $[0,1]$.

Por lo tanto el método sí converge a la raíz.

- En el ejemplo 2, $g(x) = x + \tan x - e^{-x}$ en $[0,1]$. En este caso, $|g'(x)| = |1 + \sec^2 x + e^{-x}| > 1$. Por lo tanto, el método no converge a la raíz.

Interpretación grafica de la iteración de punto fijo:

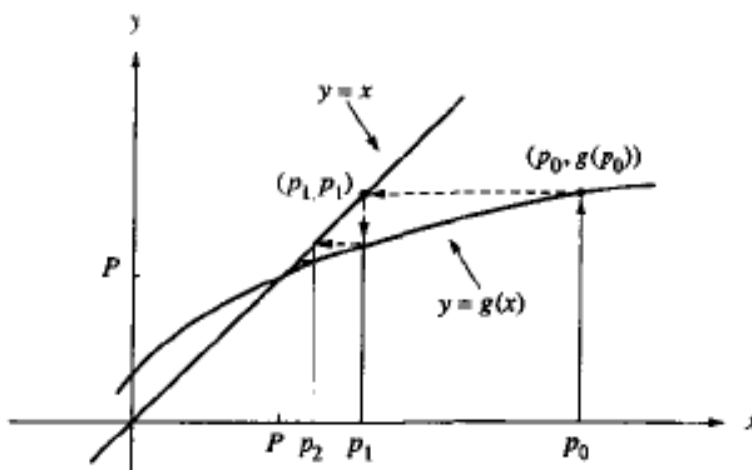


Figure 2.4 (a) Monotone convergence when $0 < g'(P) < 1$.

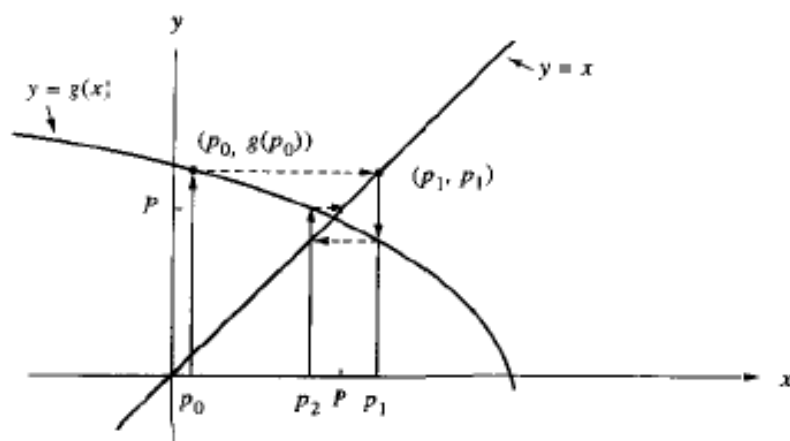


Figure 2.4 (b) Oscillating convergence when $-1 < g'(P) < 0$.

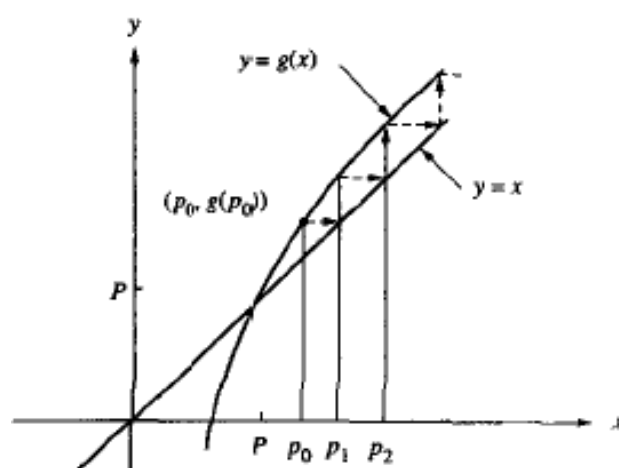


Figure 2.5 (a) Monotone divergence when $1 < g'(P)$.

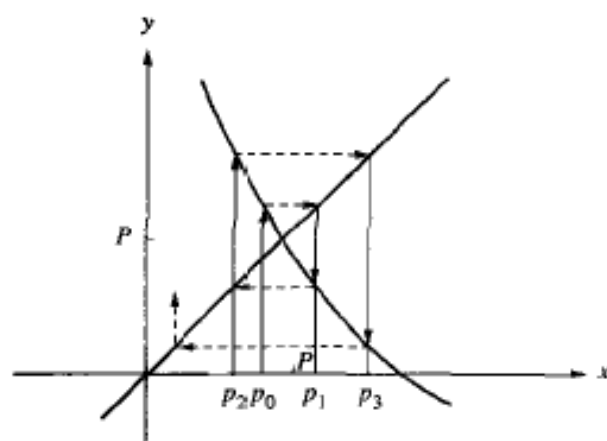


Figure 2.5 (b) Divergent oscillation when $g'(P) < -1$.

Ejemplo (verificar):

1. Para la función $g(x) = 1/2(10 - x^3)^{1/2}$

$|g'(2)| \approx 2.12$ no hay convergencia a punto fijo.

2. Empezando con $x=1.5$ y cambiando (disminuyendo) intervalo a $[1,1.5]$. Aquí g siga decreciente y además $|g'(1.5)| \approx 0.66$, entonces hay convergencia.

Ejercicio. Hallar la raíz de la ecuación $x = 2\cos x$ partiendo desde $x = 1$ por el método de punto fijo, estudiar el valor de la derivada.

Ejercicio: Usar el método de iteración del punto fijo para aproximar la raíz de $f(x) = x^2 - 5x - e^x$, comenzando con $x_0 = 0$. Hacer 5 iteraciones.

Ejercicio: Averiguar si hay convergencia a punto fijo para la función $g(x) = (10/(4+x))^{1/2}$ en el intervalo $[1,2]$

Formula adicional: el error de la iteración n-esima esta acotado por

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_2| \quad \text{para } n \geq 2$$

Método de bisección.

- Se usa para resolver ecuaciones no lineales $f(x)=0$

Teorema. Una función $f(x)$ monótona y continua tiene el único cero en el intervalo $[a,b]$ si y solo si ella tiene signos diferentes en los extremos de este intervalo.

- Ventaja es que siempre converge si partimos de intervalo que contiene la raíz.

Link para leer descripción del método:

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/SitioWebEcuaciones/node3.html>

Ejemplo (completar líneas):

Resolver la ecuación no lineal: $h(x) = x \operatorname{sen}(x) - 1$, $[0, 2]$

K	a_k	Punto medio c_k	b_k	$f(c_k)$
0	0	1	2	-0.158529
1	1		2	0.496242
2		1.25		
3				
4				

Ejercicios:

1. Encontrar la raíz de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en $[1, 2]$.

Respuesta: 1.36511

2. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. ¿A cual cero de f converge el método de bisecciones los siguientes intervalos?

a) $[-3, 2.5]$

b) $[-2.5, 3]$

3. Dibujar la grafica de $g(x)$, la recta $y = x$ y el punto fijo dado P en un mismo sistema de coordenadas. Usando el valor inicial dado p_0 calcular p_1, p_2 . Basándose en su dibujo determinar geométricamente si la iteración de punto fijo correspondiente converge. Verificar eso analíticamente basándose en el teorema de punto fijo.

$$g(x) = (6+x)^{1/2}, \quad P=3 \text{ y } p_0=7$$

Tarea Casa:

1. Para la siguiente función halle un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo.

$$f(x) = \cos(x) + 1 - x$$

2. Dibujar la grafica de $g(x)$, la recta $y=x$ y el punto fijo dado P en un mismo sistema de coordenadas. Usando el valor inicial dado p_0 calcular p_1, p_2 . Basándose en su dibujo determinar geométricamente si la iteración de punto fijo correspondiente converge. Verificar eso analíticamente basándose en el teorema de punto fijo.

$$g(x) = x^2 / 3, \quad P = 3 \text{ y } p_0 = 3.5$$

Solución

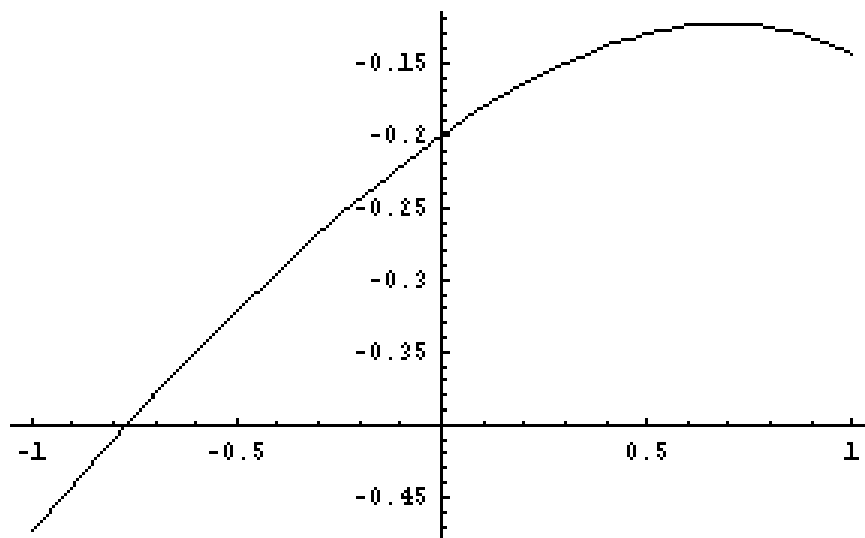
Si despejamos la x del término lineal, vemos que la ecuación equivale a

$$\frac{x^2 - e^x}{5} = x$$

de donde,

$$g(x) = \frac{x^2 - e^x}{5}$$

En este caso, tenemos que $g'(x) = \frac{2x - e^x}{5}$. Un vistazo a la gráfica,



nos convence que $|g'(x)| < 1$, para $x \in [-1, 1]$, lo que es suficiente para deducir que el método sí converge a la raíz buscada.

Aplicando la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_1 = g(x_0) = -0.2$$

Aplicando nuevamente la fórmula iterativa, tenemos:

$$x_2 = g(x_1) = -0.1557461506$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz
0
-0.2
-0.1557461506
-0.1663039075
-0.163826372
-0.164410064

De donde vemos que la aproximación buscada es:

$$x_5 = -0.164410064$$