

FH Aachen

Fachbereich 6: Luft- u. Raumfahrttechnik

Studiengang: Luft- u. Raumfahrttechnik

Studienrichtung: Raumfahrttechnik

Praxisbericht

Thema: Erstellung eines Programms zur Berechnung der
Verweildauer von Weltraumschrott im Erdorbit

Andre Röthling

Matrikelnummer: 399108

Aachen, Januar 2022

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	1
Abkürzungsverzeichnis	2
Konstanten	2
Symbolverzeichnis	3
1 Einleitung	5
2 Benutzeroberfläche und Bedienung	6
2.1 Der Eingabebereich	6
2.2 Der Ausgabebereich.....	10
2.3 Die Menüleiste	13
3 Verwendete Module und Funktionen	15
4 Verifizierung der Daten	16
4.1 Mathematischer und physikalischer Hintergrund	16
4.2 Plausibilitätsprüfung	21
4.3 Bestätigung der Resultate mit der Software „FreeFlyer“	25
5 Ausblick	27
Downloadlinks	28
Literatur	29

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Gesamtübersicht	6
Abbildung 2: Orbital Parameters	7
Abbildung 3: Final Values.....	11
Abbildung 4: Data Table	11
Abbildung 5: Diagramm.....	12
Abbildung 6: 2D Plot	12
Abbildung 7: 3D Plot	12
Abbildung 8: Konstanter Orbit	23
Abbildung 9: Höhenverlust bei exponentieller Atmosphäre.....	24
Abbildung 10: Knotenpräzession	25

Abkürzungsverzeichnis

ECI	Earth-centered inertial
ECEF	Earth centered Earth fixed
aph	magnetic index data
f107	Solar Radio Flux
f107a	Solar Radio Flux 81Tage Durchschnitt
ODE	Ordinary Differential Equations
UTC	Coordinated Universal Time
TLE	Two Line Elements
NRLMSISE-00	2001 United States Naval Research Laboratory Mass Spectrometer and Incoherent Scatter Radar Exosphere

Konstanten

Gravitationsparameter der Erde:

$$\mu = 398600.4418 \cdot 10^9 \frac{m^3}{s^2}$$

J2 Konstante:

$$J_2 = 1.75553 \cdot 10^{25} \frac{m^5}{s^2}$$

Einheitenlose J2 Konstante:

$$J_{2,dl} = 1.08262668 \cdot 10^{-3}$$

Anzahl der Sekunden für einen siderischen Tag:

$$d_{sid} = 86164.0989s$$

Große Halbachse des WGS-84 Ellipsoiden:

$$R_a = 6378137m$$

Kleine Halbachse des WGS-84 Ellipsoiden:

$$R_b = 6356752.1342m$$

Erdradius für den Sphäroiden:

$$R_E = 6378.137km$$

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

<i>a</i>	Große Halbachse oder Beschleunigung
<i>A</i>	Fläche
<i>AL</i>	Argument of Latitude
<i>AP</i>	Argument of Pericenter
<i>b</i>	Ballistischer Koeffizient
<i>c_D</i>	Widerstandsbeiwert
<i>e</i>	Exzentrizität
<i>f</i>	True Anomaly
<i>F</i>	Kraft
<i>g</i>	Gravitationsbeschleunigung
<i>H</i>	Höhe
<i>i</i>	Inklination
<i>LAN</i>	Longitude of the ascending Node
<i>LP</i>	Longitude of Pericenter
<i>LtD</i>	Lift to Drag Ratio
<i>m</i>	Masse
<i>phi</i>	Azimutwinkel
<i>r</i>	Radius
<i>R</i>	Momentaner Radius d. Erdoberfläche
<i>revs</i>	Umdrehungen um die Erde
<i>rl</i>	Höhenverlust
<i>t</i>	Zeit
<i>TL</i>	True Longitude
<i>u</i>	Hilfsvektor für Liftberechnung
<i>v</i>	Geschwindigkeit
<i>x</i>	x in kartesischen Koordinaten
<i>y</i>	y in kartesischen Koordinaten
<i>z</i>	z in kartesischen Koordinaten

Griechische Symbole

ε	spezifische Bahnenergie
θ	Elevationswinkel
$\dot{\theta}$	Winkelgeschwindigkeit Elevationswinkel
ρ	Dichte
φ	Azimutwinkel
$\dot{\varphi}$	Winkelgeschwindigkeit Azimutwinkel
Ω	Knotenpräzession

1 Einleitung

Das Praxisprojekt mit dem Thema „Erstellung eines Programms zur Berechnung der Verweildauer von Weltraumschrott im Erdorbit“ wurde mit der Software Matlab R2021a und R2021b erstellt. Hierfür wurde auch der Matlab App Designer benutzt. Ausgehend von der Datei „LTTrajSimulator3.mlx“ ist das bestehende Programm zunächst erweitert, später komplett neu aufgesetzt und als App konzipiert worden. Dies ermöglichte ein deutlich komplexeres Programm mit einer übersichtlicheren Ergebnisausgabe.

Dieses Tool bietet die Möglichkeit Vorhersagen zu treffen, wann ein Objekt mit bestimmtem ballistischem Koeffizienten und falls gewollt mit bestimmtem Auftrieb wieder in die Atmosphäre eintritt.

Zusätzlich besteht die Möglichkeit verschiedene Atmosphärenmodelle zu vergleichen, sowie zwei verschiedene Modelle für die Gravitation auszuwählen. Die Ergebnisse können in einem anpassbaren Ausgabebereich begutachtet werden.

Für eine weitere Verarbeitung der Daten besteht die Option diese in verschiedenen Formaten zu exportieren.

Im Weiteren werde ich auf die einzelnen Funktionen eingehen und den physikalischen und mathematischen Hintergrund vorstellen.

2 Benutzeroberfläche und Bedienung

Die Benutzeroberfläche ist in zwei Teile unterteilt (siehe Abb. 1). Auf der linken Seite sind alle für die Simulation nötigen Eingaben zu tätigen. Auf der rechten Seite können die Ergebnisse begutachtet und analysiert werden. In diesem Kapitel wird nun auf jede Funktion eingegangen und diese kurz erläutert. Die meisten Funktionen sind jedoch selbsterklärend und mit Tooltips versehen.

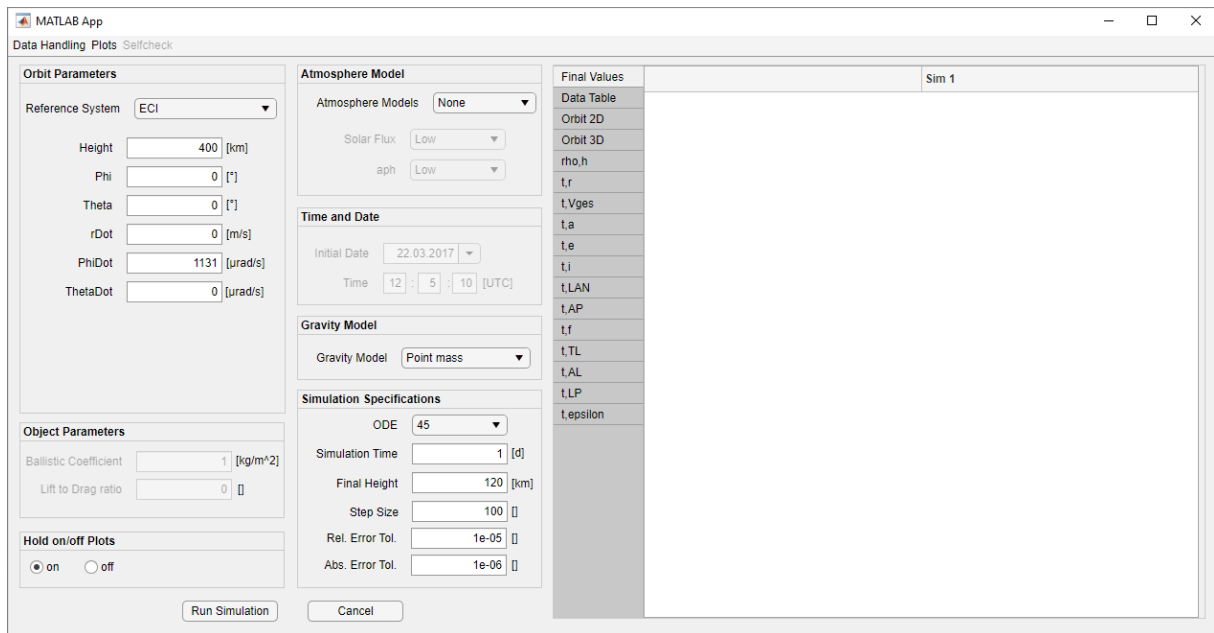


Abbildung 1: Gesamtübersicht

2.1 Der Eingabebereich

Der Eingabebereich ist in 7 Bereiche, den sogenannten „Panels“, unterteilt. Einige Panels sind je nach Einstellung der Atmosphäre aktiviert oder deaktiviert.

- Orbit Parameters
- Object Parameters
- Hold on/off Plots
- Atmosphere Model
- Time and Date
- Gravity Models
- Simulation Specifications

2.1.1 Das Panel „Orbit Parameters“

Im Panel „Orbit Parameters“ (siehe Abb. 2) lassen sich zwei verschiedene Referenzsysteme auswählen. Zum einen das „Spherical Coordinates“ System und zum anderen das System „Orbit Elements“.

Das System „Spherical Coordinates“ benutzt die typischen Kugelkoordinaten im ECI Bezugssystem. Eine Ausnahme bildet der Radius, welcher zur besseren Anschaulichkeit durch die Höhe über Grund ersetzt wurde. Die Bezeichnungen rDot, PhiDot und ThetaDot stehen für die jeweiligen Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten.

Das System „Orbit Elements“ bietet die Standardbahnelemente zur Eingabe an, sowie verschiedene äquinoktische Elemente für Sonderfälle bei den Startbedingungen. Diese Elemente werden nur bei entsprechender Eingabe in den Feldern für die Exzentrizität und Inklination aktiviert.

The image displays four screenshots of the 'Orbit Parameters' panel, each showing a different configuration of orbital elements. The panel is titled 'Orbit Parameters' and has a dropdown menu for 'Reference System' set to 'Orbital Elements'. The parameters are as follows:

Parameter	Value	Unit
Semi-major Axis	7000	[km]
Eccentricity	0	[]
Inclination	0	[°]
LAN	0	[°]
AP	0	[°]
True Anomaly	0	[°]
TL	0	[°]
AL	0	[°]
LP	0	[°]

Abbildung 2: Orbital Parameters (1. $e=0$ u. ($i=0^\circ$ o. $i=180^\circ$)) 2. $e \neq 0$ u. $i \neq 0^\circ$ 3. $e=0$ u. $i \neq 0^\circ$ 4. $e \neq 0$ u. ($i=0^\circ$ o. $i=180^\circ$))

2.1.2 Das Panel „Object Parameters“

Im Panel „Object Parameters“ werden die Objektbezogenen Werte eingegeben. Hierzu gehören der „Ballistic Coefficient“ und das „Lift to Drag Ratio“. Im Feld für den ballistischen Koeffizienten können mehrere Parameter gleichzeitig eingegeben werden. Diese müssen mit einem Leerzeichen getrennt sein. Dadurch wird das Programm bei Simulationsstart für jeden Wert eine eigene Simulation durchlaufen und auch Ergebnisse ausgeben.

Dieses Panel wird nur aktiviert, falls es eine zu berücksichtigende Atmosphäre gibt. Ansonsten hat das „Lift to Drag Ratio“ und der „Ballistic Coefficient“ keinen Einfluss auf das Simulationsergebnis und wird daher deaktiviert.

2.1.3 Das Panel „Hold on/off Plots“

Dieses Panel bietet die Möglichkeit eine oder mehrere Simulationen im Ausgabefenster anzuzeigen.

Für die Einstellung „On“ werden alle folgenden Simulationsergebnisse den bereits vorhandenen hinzugefügt.

Für die Einstellung „Off“ werden alle bisherigen Simulationsergebnisse bei erneutem Simulationsdurchlauf gelöscht und nur die aktuelle Simulation angezeigt.

2.1.4 Das Panel „Atmosphere Model“

Das Panel „Atmosphere Model“ ermöglicht Simulationen unter Berücksichtigung verschiedener Atmosphären Modelle. Im Folgenden werden die drei Auswahlmöglichkeiten vorgestellt.

- „None“
Keine Berücksichtigung der Atmosphäre und somit kein Verlust der Bahnenergie.
- „Exponential“
Hier wurde eine exponentielle Atmosphäre verwendet. Diese wurde in 10 Skalenhöhen unterteilt. Die Werte zwischen zwei Skalenhöhen werden linear interpoliert.¹
- „Nrlmsise00“
Dieses Modell bietet die Möglichkeit noch weitere Einstellungen vorzunehmen. Es lassen sich Werte zum „Solar Flux“, „aph“ und für das Startdatum eingeben.
Es gibt drei Stufen für den „Solar Flux“ die folgende Werte beinhalten.
 - „Low“
 $f_{107}^2 = 70$
 $f_{107a} = 70$
 - „Medium“
 $f_{107} = 140$
 $f_{107a} = 140$
 - „High“
 $f_{107} = 380$
 $f_{107} = 380$

Auch für die Einstellung „aph“ gibt es drei Einstellungsmöglichkeiten

- „Low“
 $aph = 0$
- „Medium“
 $aph = 15$
- „High“
 $aph = 300$

¹ https://ai-solutions.com/_help_Files/analyticdensitymodel.htm

² Der solare Radioflussindex (englisch *Solar Radio Flux*, verkürzt Solar Flux, auch F10.7 Index) ist die spektrale Flussdichte der solaren Radiostrahlung bei der Frequenz 2800 MHz, entsprechend einer Wellenlänge von 10,7 cm. Der solare Radioflussindex wird auch als 10,7-cm-Strahlung, Radioflussindex $F_{10.7}$

2.1.5 Das Panel „Time and Date“

Hier sind Eingaben bzgl. der Uhrzeit und des Datums für den Startzeitpunkt der Simulation möglich. Diese werden nur im Falle einer Atmosphäre, welche vom Breiten- bzw. Längengrad abhängig ist, benötigt. Aktuell kommt hierfür nur die Atmosphäre „Nrlmsise00“ infrage. Bei allen anderen Modellen sind die Werte für die Dichte über alle Längengrade konstant und nur von der Höhe abhängig. Außerdem berücksichtigen diese keine Zeitabhängigen Parameter, wie z.B. „Solar Flux“ und „aph“. Die Zeitangabe erfolgt nach der koordinierten Weltzeit in UTC.

2.1.6 Das Panel „Gravity Models“

Im Panel „Gravity Models“ gibt es zwei Auswahlmöglichkeiten

- „Point Mass“
Die Erde wird als Punktmasse angenommen und hat sphärische Äquipotentialflächen.
- „J2 – Ellipsoid“
Die Erde wird als Ellipsoid angenommen und hat ellipsoide Äquipotentialflächen. Hieraus entstehen, mit Ausnahme von $i=90^\circ$, entsprechende Bahnstörungen.

2.1.7 Das Panel „Simulation Specifications“

In diesem Feld stehen verschiedene Optionen und Anpassung des Integrators zur Auswahl. Es gibt folgende Eingabemöglichkeiten.

- „ODE“
Auswahl des ODE-Integrators. Hierfür stehen folgende zur Verfügung
 - 23
Integrator 2. Ordnung, nicht steif³
 - 87
Integrator 8. Ordnung, nicht steif
Dieser Integrator arbeitet anders als der Rest und wurde speziell für dieses Programm umgeschrieben. Es ist auch nicht möglich die Intervalle selbst festzulegen. Er funktioniert mithilfe der Runge-Kutta Methode. **In der Version 1.0 gibt es einen Fehler bei Abbruch der Simulation, sodass auch die Daten bis zum Abbruch nicht dargestellt werden.**
 - 45
Integrator 4. Ordnung, nicht steif
 - 113
Integrator 1. Ordnung, nicht steif
 - 15s

³ Für einige ODE Probleme wird die Schrittweite vom Solver auf ein unverhältnismäßiges Level heruntergesetzt. Diese Schrittweite kann so klein werden, dass selbst ein kleines Zeitintervall Millionen von Rechenschritten benötigt. Die Gleichungen, welche dieses Problem hervorrufen werden als „Steif“ bezeichnet. Die anderen entsprechend als „nicht steif“. (<https://de.mathworks.com/help/matlab/math/solve-stiff-odes.html#d123e26279>)

- Integrator 1. Ordnung, steif
 - 23s
 - Integrator 2. Ordnung, steif
 - 23t
 - Integrator 2. Ordnung, steif
 - 23tb Integrator
 - Integrator 2. Ordnung, steif
 - 78 Integrator
 - Integrator 7. Ordnung, nicht steif
 - 89 Integrator
 - Integrator 8. Ordnung, nicht steif
- „Simulation Time“
Eingabe der Simulationsdauer in Tagen
- „Final Height“
Angabe der Höhe bei welcher die Simulation abbrechen soll. Die Höhe bezieht sich auf den WGS-84 Ellipsoiden.
- „Step Size“
Größe der Integrationsschritte. Bei dem Wert 0 legt der Integrator die Schritte selbst fest.
- „Rel. Error Tol.“
Toleranz für den relativen Fehler
- „Abs. Error Tol.“
Toleranz für den absoluten Fehler

2.2 Der Ausgabebereich

Im Ausgabebereich werden die erstellten Daten in einer Tabelle und verschiedenen Diagrammen dargestellt. Zusätzlich gibt es noch einen Tab für die abschließenden Werte und zwei weitere Tabs mit jeweils einem 2D und einem 3D Plot des Orbits.

2.2.1 Tabelle „Final Values“

In Abb. 3 ist der Bereich „Final Values“ zu erkennen. Hier werden alle Werte, welche am Ende der jeweiligen Simulation auftraten aufgetragen. Über Tabs kann zwischen den einzelnen Simulationen hin und her gewechselt werden.

- h [km]
- t [d]
- $revs$
- $r/$ [km]
- a [km]
- e []

Final Values	Sim 1	Sim 2	Sim 3	Sim 4
Data Table				
Orbit 2D	h [km]	395.9097	391.0932	621.6263
Orbit 3D	t [d]	1	1	1
rho.h	revs	15.5627	15.5728	14.8482
t,r	r/ [km]	4.0903	8.9068	-221.6263
t,Vges	a [km]	6.7750e+03	6.7693e+03	6.9998e+03
t,a	e []	1.5638e-04	2.6307e-05	3.9003e-07
t,e				
t,i				
t,LAN				
t,AP				
t,f				
t,TL				
t,AL				
t,LP				
t,epsilon				

Abbildung 3: Final Values

2.2.2 Tabelle „Data Table“

In Abb. 4 ist der Tab „Data Table“ dargestellt. Es werden dort alle Ergebnisse aus der Simulation eingetragen. Hierzu zählen folgende Variablen.

- t [d]
- r [km]
- phi [°]
- h [km]
- v_{ges} [km/s]
- a [km]
- e []
- f [°]
- AP [°]
- LAN [°]
- I [°]

Final Values	Sim 1	Sim 2	Sim 3	Sim 4				
Data Table	t [d]	r [km]	phi [°]	h [km]	vges [km/s]	a [km]		
Orbit 2D	1	0	6.7781e+03	0	400	7.6686	6	
Orbit 3D	2	0.0012	6.7781e+03	6.4823	400.0000	7.6686	6	
rho.h	3	0.0023	6.7781e+03	12.9645	399.9999	7.6686	6	
t,r	4	0.0035	6.7781e+03	19.4467	399.9997	7.6685	6	
t,Vges	5	0.0046	6.7781e+03	25.9290	399.9993	7.6685	6	
t,a	6	0.0058	6.7781e+03	32.4112	399.9986	7.6685	6	
t,e	7	0.0069	6.7781e+03	38.8935	399.9975	7.6685	6	
t,i	8	0.0081	6.7781e+03	45.3757	399.9960	7.6685	6	
t,LAN	9	0.0093	6.7781e+03	51.8580	399.9940	7.6685	6	
t,AP	10	0.0104	6.7781e+03	58.3402	399.9914	7.6685	6	
t,f	11	0.0116	6.7781e+03	64.8224	399.9883	7.6685	6	
t,TL	12	0.0127	6.7781e+03	71.3047	399.9845	7.6685	6	
t,AL	13	0.0139	6.7781e+03	77.7869	399.9800	7.6685	6	
t,LP	14	0.0150	6.7781e+03	84.2692	399.9748	7.6685	6	
t,epsilon	15	0.0162	6.7781e+03	90.7515	399.9689	7.6685	6	
	16	0.0174	6.7781e+03	97.2338	399.9623	7.6685	6	
	17	0.0185	6.7781e+03	103.7160	399.9551	7.6686	6	
	18	0.0197	6.7781e+03	110.1983	399.9472	7.6686	6	
	19	0.0208	6.7781e+03	116.6807	399.9387	7.6686	6	
	20	0.0220	6.7781e+03	123.1630	399.9297	7.6686	6	
	21	0.0231	6.7781e+03	129.6453	399.9203	7.6686	6	
	22	0.0243	6.7780e+03	136.1277	399.9105	7.6686	6	
	23	0.0255	6.7780e+03	142.6101	399.9005	7.6686	6	

Abbildung 4: Data Table

2.2.3 Diagramme

Abb. 5 zeigt ein typisches Diagramm. Dies ist nur ein Beispiel für die Art Diagramm, welche dargestellt werden kann. Die unterschiedlichen Simulationen werden in verschiedenen Farben dargestellt. Am oberen rechten Rand befinden sich verschiedene Buttons für die Bedienung. Diese ermöglichen z.B. das zoomen oder auch das speichern des Diagramms.

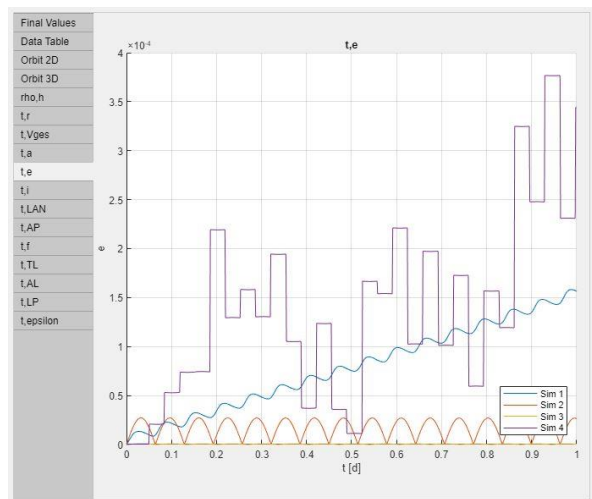


Abbildung 5: Diagramm

2.2.4 2D Plot

In der folgenden Abb. 6 ist der 2D Plot des Orbits zu erkennen. Falls die Inklination sich im Verlauf ändert, wird der Orbit trotzdem in eine 2D Ebene übersetzt. Für diesen Fall eignet sich die 3 Dimensionale Darstellung besser. Auch hier befindet sich am oberen rechten Rand ein kleines Steuerungspanel um z.B. zu zoomen.

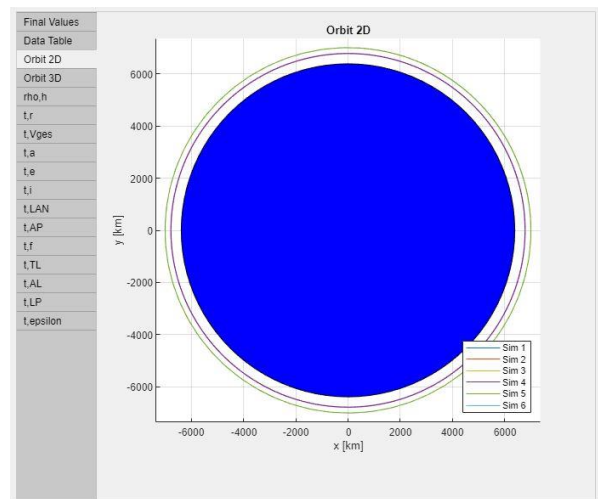


Abbildung 6: 2D Plot

2.2.5 3D Plot

Der Orbit wird neben dem 2D Plot auch im 3D Plot dargestellt (siehe Abb. 7). Hier besteht die Möglichkeit die Erdkugel ein- und auszublenden. Sowie die farbliche Darstellung zu ändern. Diese Optionen dienen der Übersichtlichkeit. Auch hier kann über den rechten oberen Rand die Darstellung verändert werden. Z.B. durch zoomen oder drehen.

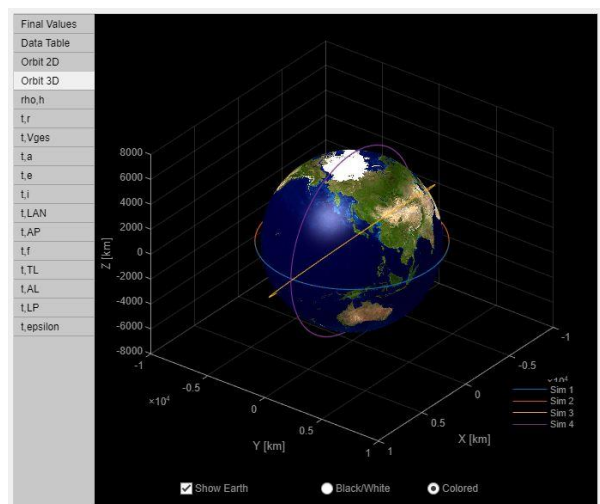


Abbildung 7: 3D Plot

2.3 Die Menüleiste

In der Menüleiste gibt es zwei Reiter. Diese besitzen diverse Unterpunkte.

- Data Handling
 - „Save Data“

Alle Daten werden unter dem Namen „Solution-“ gespeichert, gefolgt vom aktuellen Datum und der Uhrzeit im Format DD-MMM-JJJJ-HH-MM-SS. Dies ergibt beispielsweise einen solchen Namen „Solution-02-Dec-2021-12-41-54“. Der Speicherort befindet sich in folgendem relativen Pfad „.\Output\“.
 - „Save Data as“

Die Daten können als .csv und .xlsx gespeichert werden. Der Name ist frei wählbar. Bei mehreren Simulationen und dem Format .csv werden mehrere Dateien erzeugt und ihnen eine Nummer angehängt. Mit dem Namen „Bahndaten“ würden dann beispielsweise folgende Dateien erzeugt werden.

 - DebrisOrbit.csv
 - DebrisOrbit_2.csv
 - „Save Settings“

Die Einstellungen werden in einer INI Datei gespeichert und können dort auch verändert werden. Ausgenommen von der Speicherung sind die Einstellungen, welche die Ausgabe betreffen.
 - „Load Settings“

Es wird ein Fenster geöffnet für die Dateiauswahl. Es muss nun eine INI Datei mit den jeweiligen Settings ausgewählt werden.
 - „Load TLE“

Es können TLE Dateien geladen werden. Im Folgenden ein Beispiel für das benötigte Format.

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A   06040.85138889   .00012260   00000-0   86027-4 0   3194
2 25544   51.6448 122.3522 0008835 257.3473 251.7436 15.74622749413094
```

- Plots
 - „Add Plot“

Hier können verschiedene Diagramme hinzugefügt werden. Aus einer Liste werden die Variablen ausgewählt, welche man gegenüberstellen möchte. Zusätzlich besteht die Möglichkeit zwischen einer linearen und logarithmischen Darstellung zu wählen.

- „Delete Plot“

Alle Plots, bis auf die in der folgenden Liste gezeigten, können einzeln gelöscht werden.

- Final Values
- Data Table
- 2D Plot
- 3D Plot
- ρ, h
- t, r

3 **Verwendete Module und Funktionen**

Dieses Programm wurde, wie bereits in der Einleitung erwähnt, mithilfe von Matlab 2021a und 2021b erzeugt. Hierfür ist im speziellen der Matlab App Designer verwendet worden. Neben der Benutzeroberfläche, welche ausschließlich im App Designer erzeugt wurde, wurden zusätzlich diverse Module im Editor erstellt.

- Atmosphere
- SpaceDebrisSimulatorX3D
- EoM3D
- NewPlotSettings
- stopode
- Delete_Plot

Zusätzlich zu diesen Modulen war es auch nötig, verschiedene bereits existierende Module zu verwenden. Diese wurden angepasst und zum Teil umgeschrieben. Hierzu zählen:

- Ode87.m
- Odeprog.m
- Two_line_Element.m
- IniConfig.m

Im Folgenden die wichtigsten verwendeten Funktionen aus den Matlab Bibliotheken.

- dcmeci2ecef
- atmosnrlmsise00
- ecef2lla
- keplerian2ijk

4 Verifizierung der Daten

4.1 Mathematischer und physikalischer Hintergrund

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten zugrundeliegenden Gleichungen für alle Module beschrieben und ggf. hergeleitet.

4.1.1 Modul „EoM3D“

Im Folgenden geht es um die verwendeten Gleichungen für das Modul EoM3D, welches für die Berechnung der Simulation hauptsächlich verantwortlich ist.

Der Geschwindigkeitsvektor der Atmosphäre, welcher aus der Erdrotation resultiert, ergibt sich wie folgt.

$$\vec{v}_{Atmosphere} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\pi}{d_{sid}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Bahngeschwindigkeit erhält man mit der Gleichung.

$$\vec{v}_{Orbit} = \begin{pmatrix} r \\ r\dot{\phi}\cos\theta \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Die Differenz dieser Vektoren liefert uns die Relativgeschwindigkeit (Gl. 3). Diese benötigen wir später, um den momentanen Luftwiderstand zu berechnen.

$$\vec{v}_{Orbit} - \vec{v}_{Atmosphere} = \vec{v}_{rel} \quad (3)$$

Für die Berechnung des Luftwiderstandes brauchen wir zusätzlich noch den Betrag der Relativgeschwindigkeit (Gl. 4) und den Widerstandsbeiwert (Gl. 5).

$$|v_{rel}| = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\cos\theta \left(\dot{\phi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) \right)^2 + (r\dot{\theta})^2} \quad (4)$$

$$b = \frac{m}{c_D A} \quad \Rightarrow \quad c_D = \frac{m}{bA} \quad (5)$$

Eingesetzt in Gl. 6 lässt sich nun der Luftwiderstand ermitteln.

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} c_D \rho |v_{rel}|^2 \hat{v}_{rel} A \quad (6)$$

Geteilt durch die Masse erhalten wir die durch den Luftwiderstand verursachte Beschleunigung.

$$\vec{a}_D = -\frac{1}{2} \frac{1}{m} c_D \rho |v_{rel}|^2 \hat{v}_{rel} A \quad (7)$$

$$(5) \text{ in } (7) \quad \vec{a}_D = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho |v_{rel}| \vec{v}_{rel} \quad (8)$$

Daraus folgt in Komponentenschreibweise.

$$a_D(1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho \dot{r} \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} \quad (9)$$

$$a_D(2) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} / r \cos \theta \quad (10)$$

$$a_D(3) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho r \dot{\theta} \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} / r \quad (11)$$

Nach der Umwandlung der Beschleunigungen in Winkelbeschleunigungen erhalten wir folgende Gleichungen.

$$a_{r,D}(1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho \dot{r} \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} \quad (12)$$

$$a_{\varphi,D}(2) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} \quad (13)$$

$$a_{\theta,D}(3) = -\frac{1}{2} \frac{1}{b} \rho \dot{\theta} r \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \cos \theta \left(\dot{\varphi} - \frac{2\pi}{d_{sid}} \right) + (r\dot{\theta})^2 \right)} \quad (14)$$

Hieraus lässt sich mit Hilfe des „Lift to Drag Ratio“, kurz L/D, der Auftrieb berechnen. Hier wird die Vereinfachung gewählt, dass der Auftrieb nur in der Bahnebene wirkt. Zunächst wird der Vektor komponentenweise um den L/D Wert geändert, um betragsmäßig auf die Größe des Auftriebsvektors zu kommen.

$$\vec{u}_L = L / D \vec{a}_D \quad (15)$$

Die Radiale Komponente erhalten wir aus dem Betrag des Vektors u_L .

$$a_{r,L}(1) = \sqrt{(u_L(2)r)^2 + (u_L(3)r)^2} \quad (16)$$

Normalisierung der Phi- und Thetakomponente und applizieren der ehemaligen Länge der radialen Komponente liefert uns Gl. 7 und Gl. 8.

$$a_{\ddot{\phi},L}(2) = -\frac{r \cos \theta u_L(2)}{a_L(1)} u_L(1) \quad (17)$$

$$a_{\ddot{\theta},L}(3) = -\frac{r u_L(3)}{a_L(1)} u_L(1) \quad (18)$$

Die Komponenten für die Gravitation sind je nach Wahl des Gravitationsmodells für eine Punktmasse

$$g(1) = -\frac{\mu}{r^2} \quad (19)$$

$$g(2) = 0 \quad (20)$$

$$g(3) = 0 \quad (21)$$

oder Unter Berücksichtigung des J2 Terms nach Wikipedia („Geopotential model“, 2022)

$$g(1) = -\left(\frac{\mu}{r^2} + J_2 \frac{1}{r^4} \frac{3}{2} (3 \sin^2 \theta - 1)\right) \quad (22)$$

$$g(2) = 0 \quad (23)$$

$$g(3) = -J_2 \frac{3}{r^5} \cos \theta \sin \theta \quad (24)$$

Diese Gleichungen lassen sich nun in die Bewegungsgleichungen einsetzen und die Simulation kann mit Hilfe der ODEs durchgeführt werden. Dafür werden die Bewegungsgleichungen für das sphärische Koordinatensystem benutzt und die Kontrollgrößen durch die Störgrößen für den Auftrieb und den Luftwiderstand ersetzt (Dachwald, 2004, S. 17, Gl 2.35a bis c).

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + g(1) + a_{r,D}(1) + a_{r,L}(1) \quad (25)$$

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \tan \theta + g(2) + a_{\phi,D}(2) + a_{\phi,L}(2) \quad (26)$$

$$\ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + g(3) + a_{\theta,D}(3) + a_{\theta,L}(3) \quad (27)$$

4.1.2 Modul „SpaceDebrisSimulatorX3D“

In diesem Modul werden die Daten für die Simulation vorbereitet und für die weitere Verarbeitung nach der Simulation aufbereitet. Neben weiteren verschiedenen Schritten gibt es ein paar wichtige Gleichungen und zwei Koordinatentransformationen, diese werden hier noch einmal aufgeführt.

Berechnung des WGS-84 Ellipsoiden.

$$R = \sqrt{(R_a \cos \theta_0)^2 + (R_b \sin \theta_0)^2} \quad (28)$$

Koordinatentransformation von IJK in sphärische Koordinaten.

$$r_0 = \sqrt{r_{IJK}(1)^2 + r_{IJK}(2)^2 + r_{IJK}(3)^2} \quad (29)$$

$$\varphi_0 = \arctan 2 \left(\frac{r_{IJK}(2)}{r_{IJK}(1)} \right) \quad (30)$$

$$\theta_0 = \arcsin \left(\frac{r_{IJK}(3)}{r_0} \right) \quad (31)$$

$$\dot{r}_0 = v_{IJK}(1) \cos \varphi_0 \cos \theta_0 + v_{IJK}(2) \sin \varphi_0 \cos \theta_0 + v_{IJK}(3) \sin \theta_0 \quad (32)$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{-v_{LK}(1)\sin\varphi_0 + v_{LK}(2)\cos\varphi_0}{r_0} \quad (33)$$

$$\dot{\theta}_0 = \frac{-v_{LK}(1)\cos\varphi_0\sin\theta_0 - v_{LK}(2)\sin\varphi_0\sin\theta_0 + v_{LK}(3)\cos\theta_0}{r_0} \quad (34)$$

Koordinatentransformation von sphärischen in IJK Koordinaten.

$$z_{3D} = r \sin \theta \quad (35)$$

$$y_{3D} = r \sin \varphi \cos \theta \quad (36)$$

$$z_{3D} = r \sin \theta \quad (37)$$

$$v_{x,3D} = v_r \cos \varphi \cos \theta + r v_\varphi \cos \theta (-\sin \varphi) + r v_\theta (-\cos \varphi) \sin \theta \quad (38)$$

$$v_{y,3D} = v_r \sin \varphi \cos \theta + r v_\varphi \cos \theta \cos \varphi + r v_\theta (-\sin \varphi) \sin \theta \quad (39)$$

$$v_{z,3D} = v_r \sin \theta + r v_\theta \cos \theta \quad (40)$$

Bei der Berechnung der spezifischen Bahnenergie gibt es zwei Fälle. Die spezifische Bahnenergie für die Erde in Form einer Punktmasse entspricht der ersten Gleichung (Gl. 41). Falls der WGS-84 Ellipsoid als Grundlage für das Gravitationsmodell dient, benötigt man zusätzlich einen J2 Term. Dies entspricht der zweiten Gleichung (Gl. 42).

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} v_{ges}^2 - \frac{\mu}{r} \quad (41)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} v_{ges}^2 + J_2 \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) - \frac{\mu}{r} \quad (42)$$

Bei der Konvertierung der 3D Daten für den 2D Plot gibt es auch wieder zwei Fälle. Je nachdem welche Bahnelemente vorliegen, berechnen sich x und y mithilfe der „Longitude of Pericenter“ und der „True Anomaly“ oder mithilfe der „Longitude of the Ascending Node“ und der „True Anomaly“.

$$x_{2D} = r \cos\left((LP + f) \frac{\pi}{180}\right) \quad (43)$$

$$y_{2D} = r \sin\left((LAN + AP + f) \frac{\pi}{180}\right) \quad (44)$$

$$x_{2D} = r \cos\left((LP + f) \frac{\pi}{180}\right) \quad (45)$$

$$y_{2D} = r \sin\left((LAN + AP + f) \frac{\pi}{180}\right) \quad (46)$$

4.1.3 Modul „Atmosphere“

Neben den aus implementierten Funktionen benutzten Koordinatentransformationen, wurde hier an einer Stelle noch einmal eine Transformation von sphärischen in kartesische Koordinaten durchgeführt. Diese wurde bereits im Abschnitt 4.1.2 erläutert.

Für die exponentielle Atmosphäre wurde ein Modell verwendet, welches mit 10 Skalenhöhen arbeitet und für die Zwischenwerte eine Interpolation benutzt. Dieses Modell orientiert sich an einem Modell aus dem Programm „Free Flyer“.⁴

4.2 Plausibilitätsprüfung

Zunächst wird anhand von analytischen Gleichungen und Randbedingungen gezeigt, dass die erhaltenen Daten plausibel sind. Dafür werden die folgenden Fälle betrachtet.

- Konstant bleibender störungsfreier Orbit
- Verlust an Bahnenergie bei exponentieller Atmosphäre
- Vergleich Knotenpräzession mit Ergebnis aus Gleichung

⁴ https://ai-solutions.com/_help_Files/analyticdensitymodel.htm

4.2.1 Konstant bleibender, störungsfreier Orbit

Hier überprüfen wir, ob der Orbit ohne Störungen tatsächlich konstant bleibt. Es wird hier auch die Annahme getroffen, dass die Erde eine Punktmasse ist.

Parameter, welche beispielsweise hierfür herangezogen werden sollten, sind die große Halbachse a , die Inklination i und die Bahnenergie ε . Hier sollten die Werte über die komplette Laufzeit annähernd konstant bleiben. Im Weiteren wurde eine Simulation durchgeführt mit folgenden Werten für die Bahnelemente.

- $A = 7000\text{km}$
- $e = 0$
- $i = 45^\circ$
- $LAN = 0^\circ$
- $AP = 0^\circ$
- $f = 0^\circ$

Die Spezifikationen für die Simulation sind folgende.

- ODE 87
- Simulation Time = 100d
- Final Height = 120km
- Step Size = 0
- Rel. Error Tol. = 10^{-15}
- Abs. Error Tol. = 10^{-16}

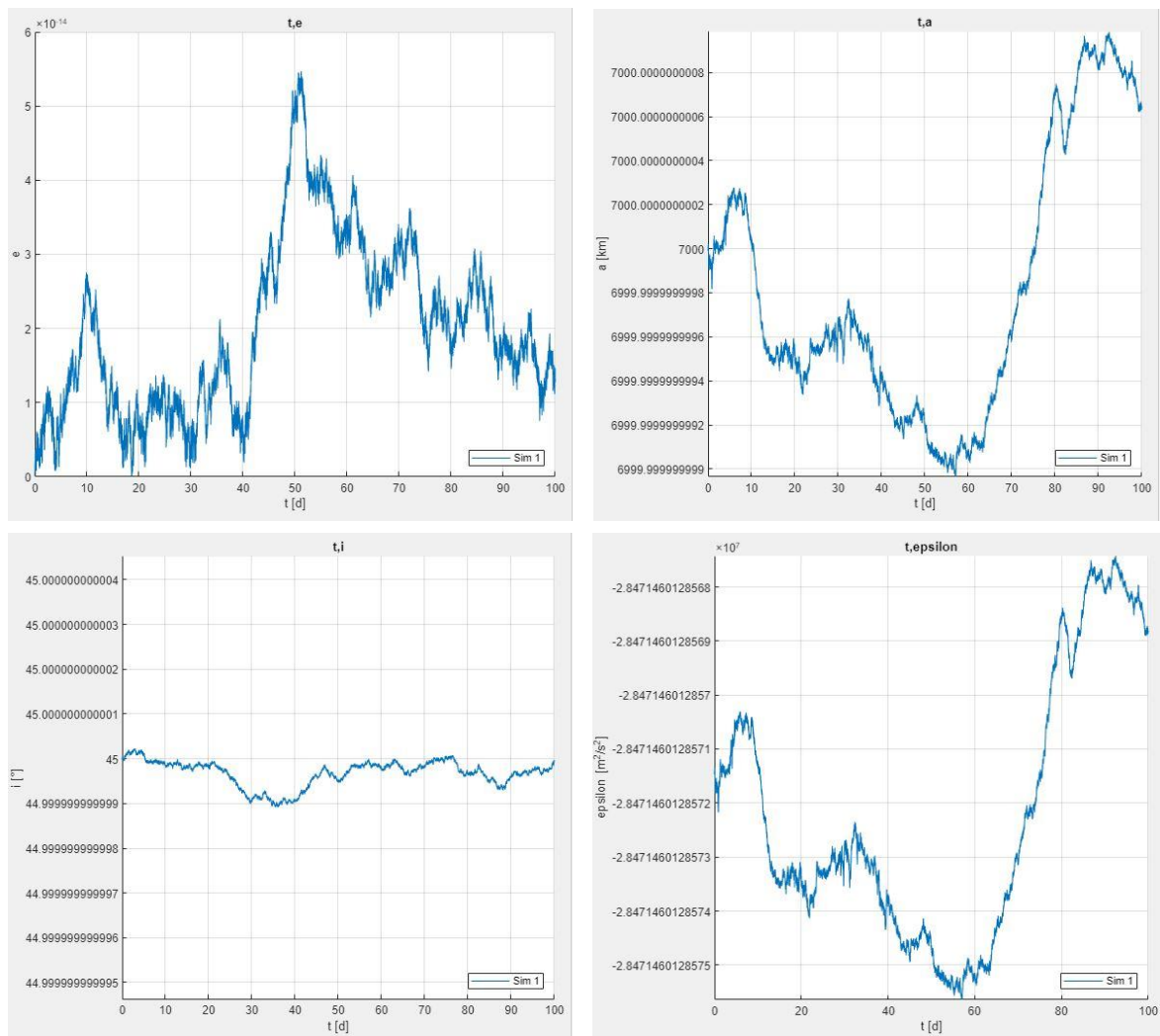


Abbildung 8: Konstanter Orbit

Im Ergebnis (siehe Abb. 8) ist zu erkennen, dass es über einen Zeitraum von 100 Tagen nur eine minimale Abweichung gibt. Daraus folgt, dass die Simulation den Orbit ohne Störungen weitestgehend stabil hält. Dieser Fehler wird bei eingestellter Atmosphäre vernachlässigbar sein. Weitere Verbesserungen können unter Umständen mit einer höheren Fehlertoleranz oder einem anderen Integrator erzielt werden.

4.2.2 Verlust an Bahnenergie bei exponentieller Atmosphäre

Um zu überprüfen, ob sich der Orbit bei eingestellter Atmosphäre plausibel verhält, wird der Verlauf der Großen Halbachse betrachtet. Die Inklination sollte annähernd konstant bleiben. Es werden folgende Werte verwendet.

- $a=7000\text{km}$
- $e=0$
- $i=45$
- $\text{LAN}=0^\circ$
- $\text{AP}=0^\circ$
- $\text{AL}=0^\circ$

Das betrachtete Objekt hat einen ballistischen Koeffizienten von 1. Die Spezifikationen für die Simulation sind folgende.

- ODE 87
- Simulation Time = 100d
- Final Height = 120km
- Step Size = 0
- Rel. Error Tol. = 10^{-15}
- Abs. Error Tol. = 10^{-16}

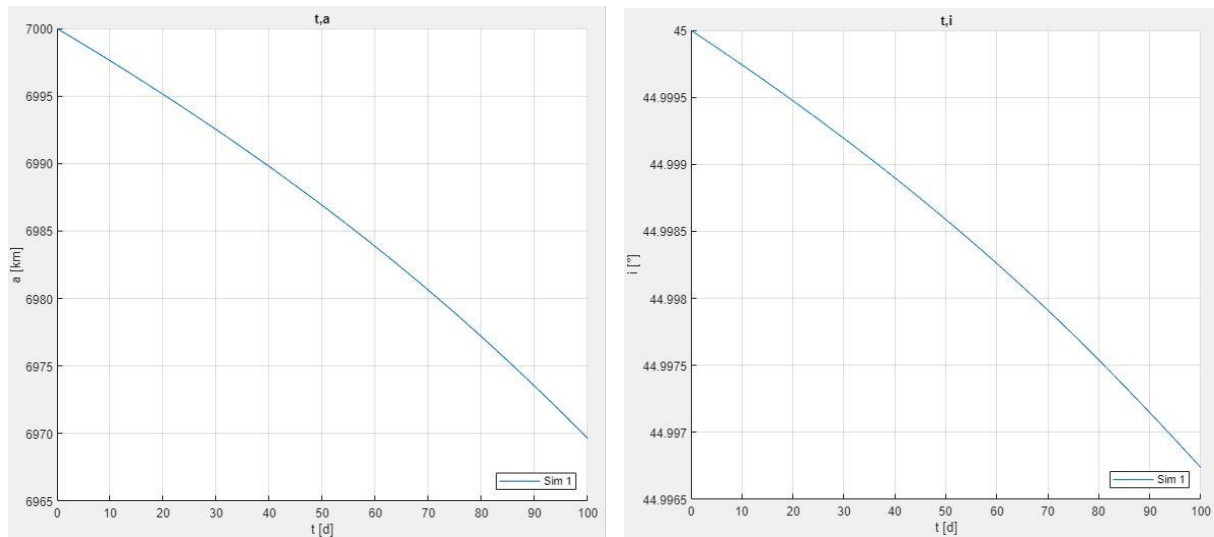


Abbildung 9: Höhenverlust bei exponentieller Atmosphäre

Die Ergebnisse (siehe Abb. 9) zeigen einen plausiblen Verlauf der Halbachse und eine annähernd konstante Inklination. Auf die Genauigkeit dieser Simulation wird im Abschnitt 4.3 eingegangen.

4.2.3 Vergleich Knotenpräzession mit Ergebnis aus analytischer Gleichung

Bei dieser Einstellung können die Daten am einfachsten mit der folgenden analytischen Gleichung verifiziert werden.

$$\Delta\Omega = \frac{-3}{2} J_{2,dl} \left(\frac{R_E}{a(1-e^2)} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_E}{a^3}} \cos(i) t_{simulation}^5 \quad (47)$$

⁵ https://ai-solutions.com/_freelyflyeruniversityguide/j2_perturbation.htm

Mit dieser Gleichung erhält man die sogenannte Knotenpräzession. Dies ist der Winkel, um den sich die Position der Knoten ändert, wenn man von einer Bahnstörung, durch die nicht sphärische Form der Erde ausgeht. Genauer gesagt, wenn man berücksichtigt, dass die Erde ein Ellipsoid ist.

$$\Delta\Omega_{analytic} = \frac{-3}{2} \cdot J_{2,dl} \cdot \left(\frac{R_E}{7000km} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu_E}{7000km^3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Delta t = -0.8879rad \quad (48)$$

Dieses Ergebnis muss nun mit den Werten der Simulation verglichen werden. Bei einer Inklination von 45° , einer Halbachse von 7000km in einem Kreisorbit erhält man den in Abbildung 10 zu erkennenden Verlauf. Die beiden Punkte (P1 u. P2) entsprechen einem Intervall von 10 Tagen.

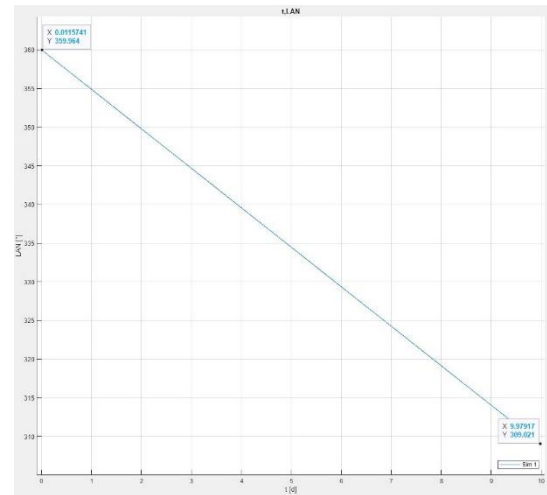


Abbildung 10: Knotenpräzession

$$\Delta\Omega_{simulation} = \frac{\pi}{180} \cdot (P2 - P1) = \frac{\pi}{180} \cdot (309.021^\circ - 360^\circ) = -0.8898rad \quad (49)$$

$$\Delta_{abs} = \Delta\Omega_{simulation} - \Delta\Omega_{analytic} = -0.8898rad - (-0.8879rad) = -0.0019rad \quad (50)$$

4.3 Bestätigung der Resultate mit der Software „FreeFlyer“

Die Software „FreeFlyer“ ist ein professionelles Tool, welches für die Simulation von Bahndaten verwendet werden kann⁶. In diesem Fall wurde „FreeFlyer“ benutzt, um die Ergebnisse aus beiden Simulatoren bei gleichen Bedingungen zu vergleichen. Die Ergebnisse aus „FreeFlyer“ werden als richtig angenommen. Im Weiteren werden 3 Fälle betrachtet. Bei ansonsten gleichen Eingaben, wie in Abschnitt 4.2.2, wird die Inklination variiert und ein Fehler für die finalen Werte der großen Halbachse errechnet.

Inklination = 0°

$$\Delta_{abs} = \Delta a_{SDS} - \Delta a_{Freeflyer} = 6967.774405181km - 6967.7766536km = -2.24842m \quad (51)$$

⁶ A.i. solutions. (2022). FreeFlyer (7.7) [Software]. <https://ai-solutions.com/freeflyer-astrodynamic-software/>

Inklination = 45°

$$\Delta_{abs} = \Delta a_{SDS} - \Delta a_{Freeflyer} = 6969.654383955km - 6969.6706193km = -16.235345m \quad (52)$$

Inklination = 90°

$$\Delta_{abs} = \Delta a_{SDS} - \Delta a_{Freeflyer} = 6969.24100486km - 6969.2686937km = -27.688840m \quad (53)$$

Hieraus lässt sich schließen, dass das Ergebnis bei einer Inklination von 0° am genauesten ist und bei steigender Inklination bis 90° um etwas mehr als eine Zehnerpotenz an Genauigkeit verliert.

Ein Lösungsvorschlag hierfür ist das sphärische Koordinatensystem für Inklinationen von größer 45° auf eine andere Achse zu beziehen, unter anderem auch um einen Tangens von 90° in den Bewegungsgleichungen zu umgehen. In der aktuellen Version wird dieses Problem dadurch umgangen, dass dieser Term für einen kleinen Winkelbereich nicht berücksichtigt wird.

5 Ausblick

Diese Software lässt sich nun auf vielerlei Arten erweitern. Aus einigen der nun folgenden Punkte, würde sich auch Themen für eine weiterführende Bachelorarbeit ableiten lassen. Eine komfortablere Eingabe für die Erstellung von Plots oder ein informativerer und optisch ansprechenderer Fortschrittsbalken wären z.B. möglich. Hier ein kleiner Überblick über weitere, den Komfort und die Optik betreffende Änderungsmöglichkeiten.

- Bessere Strukturierung der Panels
- Speichern der Ausgabeeinstellungen
- Laden von alten Simulationsdaten ermöglichen
- Plausibilitätsprüfung für den Ballistischen Koeffizienten und das „Lift to Drag Ratio“
- View in den Plots wiederherstellen, wenn „Hold off“ gewählt wurde
- Hinzufügen und Löschen aller Plots ermöglichen
- Neuer Desktop Icon
- Logo mit Schriftzug

Je nach gewünschter Anwendung lassen sich die unterschiedlichsten Optionen hinzufügen. Durch die folgenden Beispiele wäre die Gewinnung weiterer Daten möglich.

- Weitere Atmosphärenmodelle
- Höhere Genauigkeit für einen Orbit mit der Inklination von 90° durch angepasstes Koordinatensystem.
- Gravitationsmodell „Spherical Harmonics“
- Auswahl von verschiedenen in der Integration verwendeten Koordinatensystemen
- Hinzufügen weiterer, für die Ausgabe interessanter, Variablen
- Ein Selfcheck welcher überprüft, ob das Programm nach Änderungen im Code noch valide Daten produziert
- Laden von echten Bahndaten, um diese mit der Simulation zu vergleichen
- ODE 87 Fehler bei Abbruch der Simulation entfernen
- Weitere „Final Values“ hinzufügen
- Option zur Auswahl der ausgegebenen Variablen in der Tabelle
- Weitere Variablen für die Tabelle hinzufügen
- Fehler bei Erzeugung von nicht brauchbaren Daten an Hauptmodul weitergeben. Dieser entsteht z.B. falls zu geringe Fehlertoleranzen gewählt werden

Downloadlinks

Mit den nun aufgeführten Downloadlinks lässt sich die in diesem Praxisprojekt erstellte Software herunterladen.

Mit dem folgenden Downloadlink kann das Programm als Matlab App installiert werden.

<https://github.com/Jupiter03121973/OrbitSimulator-Installation/blob/42f01dc57c4dd3abfd0ccad2dedf29661e905a71/MyAppInstaller.web.exe>

Mit diesem Downloadlink kann die Software als eigenständiges Programm installiert werden.

<https://github.com/Jupiter03121973/OrbitSimulator-Installation/blob/42f01dc57c4dd3abfd0ccad2dedf29661e905a71/OrbitSimulator.mlappinstall>

Literatur

- B. Dachwald (2004): Low-Thrust Trajectory Optimization and Interplanetary Mission Analysis Using Evolutionary Neurocontrol
- B. Dachwald (2020/21): Vorlesung Raumflugmechanik
- B. Dachwald (2021): Vorlesung Hypersonic Aerodynamics and Atmospheric Entry
- H. Klinkrad (2006): Space Debris
- a.i. solutions (2022): Analytic Density Model. Abgerufen 20.03.2022, von https://ai-solutions.com/_help_Files/analyticdensitymodel.htm
- a.i. solutions (2022): J2 Perturbation. Abgerufen 20.03.2022, von https://ai-solutions.com/_freeflyeruniversityguide/j2_perturbation.htm
- Solarer Radioflussindex. (2022, 20. März). In Wikipedia. [https://de.wikipedia.org/wiki/Solarer_Radioflussindex#:~:text=Der%20solar%20Radioflussindex%20\(englisch%20Solar,Wellenl%C3%A4nge%20von%20010%2C7%20cm](https://de.wikipedia.org/wiki/Solarer_Radioflussindex#:~:text=Der%20solar%20Radioflussindex%20(englisch%20Solar,Wellenl%C3%A4nge%20von%20010%2C7%20cm)
- Geopotential Model. (2022, 20. März). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Geopotential_model