

*Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования*  
**«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

**К о н с п е к т л е к ц и й**  
по механике сплошных сред

Москва 2017

## Предисловие

# Оглавление

Введение . . . . .	4
Лекция 1 . . . . .	5
1.1    Теория конечных деформаций . . . . .	9
Лекция 2 . . . . .	12
2.1    Простой сдвиг . . . . .	12
2.2    Растяжение и сжатие в некотором направлении	13
2.3    Малые деформации и скоростные деформаци- онные величины . . . . .	15
Лекция 3 . . . . .	22
3.1    Уравнения совместности . . . . .	22

## Введение

Постулируется непрерывность преобразования из одного состояния в другое. И не может быть так, что часть конечного объема после трансформации стала бесконечной. Если есть последовательность состояний тела и эта последовательность имела предел, то так будет и в любом другом состоянии системы. Это и есть сплошность, фактически, непрерывность.

Итак, принципиальное различие механики сплошных сред (МСС) от механики дискретных сред (МДС) состоит в том, что вещество в МДС представляется в виде набора материальных точек в конкретных точках пространства, в то время как в МСС материальные точки полностью заполняют предоставленный объем: свойства задаются не для конкретной точки, а для набора, т.е. для некоторого объема.

Как и в механике дискретных сред, масса тела неизменна, положительна, если объем положителен, и аддитивна т.е. если части тела не пересекаются или пересекаются по множеству нулевой меры, то масса всех этих частей равна сумме масс этих частей в отдельности.

Важное понятие, используемое нами в дальнейшем — отсчётное описание. Это способ идентификации материальных точек (в дальнейшем **мт**). Среди всех состояний (конфигураций) тела в какой-то момент времени  $t$  существует одно, которое мы мысленно фиксируем. Эту конфигурацию будем называть **отсчётной** и обозначать  $\mathfrak{x}$ , она неизменна. Остальные же конфигурации зависят от времени, поэтому **актуальную** конфигурацию (в данный момент времени) обозначим  $\chi(t)$ . Местоположение мт в отсчётной конфигурации служит «именем» этой мт.

Выбирается некоторое состояние тела (отсчётная конфигурация)

в какой-то момент времени  $t$ , именами точек служит радиус-векторы. Этот метод похож на учет населения с помощью постоянной прописки. Для того, чтобы узнать текущую (актуальную) конфигурацию, для обозначения которой мы будем использовать  $\chi(t)$  мы должны задаться отображением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Движение материальной точки — это отображение  $\mathbf{r}$  при фиксированном  $\mathbf{x}$ . В дальнейшем предполагается, что  $\mathbf{r} \in C^2$ , или хотя бы кусочно-непрерывно дифференцируемо по  $\mathbf{x}$ . И действительно, рассмотрим стержень, одну часть которого растянем, а другую сожмем. Градиент тут будет разрывен, по-этому естественно, что в МСС присутствуют разрывы производных.

## Лекция 1

Введем градиент  $\mathbf{r}$  по  $\mathbf{x}$ :

$$F(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{r}((\mathbf{x}, t)) \quad (1.2)$$

Индекс при векторе набла указывает, что дифференцирование идет по  $\mathbf{x}$  т. е. по радиусу вектору отсчётной конфигурации. Что означает на самом деле формула (1.2)? Вспомнив определение дифференциала, не трудно понять, что  $F$  — это линейный оператор, отображающий  $d\mathbf{x}$  в  $d\mathbf{r}$ .

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F$$

В этом градиенте содержится все, что происходит с окрестностью точки. Договоримся, что  $\det F$  — коэффициент преобразования объема. В дальнейшем будем считать, что  $\det F \neq 0$ , иными словами:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{r} \cdot F^{-1}$$

Раз определитель отличен от 0 и по нашему договору все меняется непрерывно, то детерминант не может менять знак ( иначе он обратился бы в 0 в какой-то момент). Какой же он, больше или меньше нуля? Если  $\mathbf{r}_{\text{отс}} = \mathbf{x} \Rightarrow F \equiv I, \det I = 1 > 0$ .

Мы всегда будем полагать, что определитель больше нуля, тогда это к тому же и коэффициент преобразования объема:

$$dV = (\det F) dV_{\mathcal{K}}$$

Предположения о массе сделанные выше влекут за собой соображения о плотности массы. Масса есть интеграл этой плотности по окрестности  $dm = \rho_{\mathcal{K}} dV_{\mathcal{K}} = \rho dV = \rho \det F dV_{\mathcal{K}}$ :

$$\boxed{\rho_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, t) \det F(\mathbf{x}, t)} \quad (1.3)$$

Есть два типа описания физических величин:

Отсчётное описание физической величины  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$$

Пространственное описание, выражающееся формулами от  $t$  и  $\mathbf{r}$ , чаще всего такое описание используется в гидромеханике. Мы тоже будем иногда прибегать к такому способу. Для этого вводится специальная функция

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Производную по времени будем называть материальной производной:

$$\dot{\Psi} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}$$

Пространственной производной будем называть величину:

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}}$$

Чтобы понять в чем разница, можно привести пример с рекой и температурой. Если ставить термометр на якорь, то это все равно, что пространственная производная, то есть фиксировано положение термометра в реке и измеряется температура конкретной точки пространства. Если термометр пустить по течению, то будет измеряться температура конкретной точки реки, это соответствует временной производной. Заметим, что  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Найдем связь между временной и пространственной производной (формула Эйлера):

$$\dot{\Psi} \equiv \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \Psi$$

Формула получается применением дифференцирования сложной функции, если подставить в выражение  $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$  формулу (1).

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}(\mathbf{x}, t), t)$$

В частности:

$$\dot{\mathbf{v}} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$$

В стационарном течении получаем  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$ , так же можно рассмотреть сдвиговое течение (ярким примером которого может служить скосившаяся стопка бумаг или колода карт), тогда  $\mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$

Найдем связь между градиентами в отсчётной и актуальной конфигурациях:

$$(d\Psi)_t = d\mathbf{x} \cdot \nabla_{\varkappa} \otimes \Psi = \mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \Psi \stackrel{(1)}{=} d\mathbf{x} \cdot F \cdot \nabla \otimes \Psi$$

$$\nabla_{\varkappa} = F \cdot \nabla \quad (1.4)$$

Вспомним о независимости порядка дифференцирования независимых переменных и получим выражение, которое понадобится нам для вывода закона сохранения массы (ЗСМ):

$$\dot{F}(\mathbf{x}, t) = (\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^\cdot = \nabla_{\varkappa} \otimes \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

Также, перед выводом ЗСМ полезно вспомнить следующую формулу:

$$(\det F)^\cdot = \dot{F} : \det F (F^{-1})^T \quad (1.6)$$

Теперь у нас есть все, для вывода ЗСМ. Продифференцируем выражение (1.3) :

$$\dot{\rho} \det F + \rho (\det F)^\cdot = 0$$

Вспомнив выражение (1.6) получаем:

$$\dot{\rho} \det F + \rho (\det F) \dot{F} : (F^{-1})^T = 0$$

Так как мы обговаривали что определитель считаем положительным, то на него можно поделить, так же вспомнив про выражение (1.5) приходим к равенству:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\varkappa} \otimes \dot{\mathbf{v}} : (F^{-1})^T = 0$$

Из тензорной алгебры известно соотношение  $A : B = I : (A \cdot B^T) = I : (B^T \cdot A)$ , тогда наше выражение примет вид:

$$\dot{\rho} + \rho I : F^{-1} \cdot \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v} = 0$$



Если вспомнить соотношение между градиентами (формула (1.4)) и свойства двойного скалярного произведения, мы получим окончательно:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Займемся выводом еще одной интересной формулы (скорость изменения объема)  $(\det F)^\cdot = (\det F) \nabla \cdot \mathbf{v}$ . Пусть тело занимает в актуальной конфигурации область  $B$ .

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_B dV = \int_{B_\varkappa} (\det F) dV_\varkappa \\ \dot{V}(t) &= \left( \int_B dV \right)^\cdot = \left( \int_{B_\varkappa} (\det F) dV_\varkappa \right)^\cdot = \\ &= \int_{B_\varkappa} (\det F)^\cdot dV_\varkappa = \int_{B_\varkappa} (\det F \nabla \cdot \mathbf{v}) \frac{dV_\varkappa}{dV} = \\ &= \int_B \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_{\partial B} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) d\Sigma \end{aligned}$$

## 1.1 Теория конечных деформаций

Вспомним теорему Коши о полярном разложении

$$F = U \cdot R = R \cdot U',$$

где  $U$  — симметричный положительно определенный тензор, а  $R$  — ортогональный. Если представить  $U$  в главных осях, то его детерминант будет произведением собственных чисел ( $\det U = u_1 u_2 u_3$ ):

$$U = u_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

Так как  $U$  положительно определенный, то и его собственные числа положительны, тогда:

$$\det F = \det U \det R > 0 \Rightarrow \det R > 0 \Rightarrow \det R = 1 \text{ т.к. } R \text{ ортогонален.}$$

Вспомним как связаны между собой  $U'$  и  $U$ :

$$\begin{aligned} U' &= R^T U R = U * R \Rightarrow \\ &\Rightarrow U' = u_1 \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_1 + u_2 \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2 + u_3 \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_3, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i \cdot R$ . Вспоминая формулу (1) можем получить:  $d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{x} \cdot U R = d\mathbf{x} \cdot R U'$ . Тогда можно дать следующую физическую интерпретацию.  $U$  — левый тензор чистого растяжения (растяжение происходит вдоль осей  $\mathbf{e}_i$  — осей растяжения в актуальной конфигурации, с коэффициентом  $u_i$ ),  $R$  — тензор поворота.  $U'$  — правый тензор чистого растяжения (растяжение происходит вдоль осей  $\mathbf{e}'_i$  — осей растяжения в отсчётной конфигурации, с коэффициентом  $u_i$ ).

Пусть  $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| \mathbf{e}_i$ , тогда:

$$d\mathbf{r} = |d\mathbf{x}| \mathbf{e}_i \cdot F = |d\mathbf{x}| \cdot U R = |d\mathbf{x}| u_i \mathbf{e}_i \cdot R = |d\mathbf{x}| u'_i \mathbf{e}_i$$

А что если  $d\mathbf{x} \nparallel \mathbf{e}_i$ ? Какой будет коэффициент растяжения? Введем два тензора  $F \cdot F^T = U \cdot R \cdot R^T \cdot U = U^2$  — левый тензор Коши-Грина. Аналогично  $F \cdot F^T = U'^2$  — правый тензор Коши-Грина. Возьмем направленный вектор  $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| \mathbf{e}$ .

$$|d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F \cdot d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F^T \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot U^2 \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|^2 \mathbf{e} \cdot U^2 \cdot \mathbf{e}$$

$$\frac{|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{x}|} = \sqrt{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}}$$

Введем понятие угла сдвига. Возьмем в отсчётной конфигурации два взаимно-ортогональных элемента  $d\mathbf{x}$  и  $d\mathbf{x}'$ , тогда:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}' = |d\mathbf{r}| |d\mathbf{r}'| \cos \alpha = |d\mathbf{r}| |d\mathbf{r}'| \sin \gamma$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}' &= d\mathbf{x} \cdot F \cdot d\mathbf{x}' \cdot F = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F^T \cdot d\mathbf{x}' = \\ &= |d\mathbf{x}| |d\mathbf{x}'| \mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}' = |d\mathbf{r}| |d\mathbf{r}'| \sin \gamma \end{aligned}$$

Таким образом получаем выражение для синуса угла сдвига:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{|d\mathbf{r}| |d\mathbf{r}'|} \cdot |d\mathbf{x}| |d\mathbf{x}'| = \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{\frac{|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{x}|} \frac{|d\mathbf{r}'|}{|d\mathbf{x}'|}} \\ \sin \gamma &= \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{\sqrt{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}} \sqrt{\mathbf{e}' \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}' = \mathbf{e}_2$ , тогда в выражении (1.7) будет стоять 0. Таким образом, главные векторы только поворачиваются, а углы между ними не меняются.

Получим тензор конечных деформаций. Для этого введем понятие вектора смещения  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ . Выразим из него вектор  $\mathbf{r}$  и подставим в (1.2).

$$F = I + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w}, \quad F^T = I + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w})^T$$

$$F \cdot F^T = I + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w})^T + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w})^T$$

И тензором конечных деформаций назовем величину:

$$\frac{F \cdot F^T - I}{2} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w})^T + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w})^T \right)$$

## Лекция 2

Продолжим тему предыдущей лекции.  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) R_0 + \mathbf{w}_0$ , где тензор  $R_0$  — тензор поворота (без параллельного переноса). Что происходит с точкой  $\mathbf{x}_0$ ? Если  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{r} = (\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0)$ . Получим поле смещений:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (R_0 - I) + \mathbf{w}_0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) = R_0 - I$$

Будем называть трансформацию однородной, если ее градиент постоянен. Заменяем поворот тензором  $F_0$ , в смысл которого вложим и поворот и растяжение. Для этого тензора справедливо полярное разложение Коши.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) F_0 + \mathbf{w}_0 = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) F_0.$$

Рассмотрим два вида деформаций.

### 2.1 Простой сдвиг

Для лучшего понимания и представление возьмем стопку бумаг, которую мы однородно перекошим. Это и будет простым сдвигом. Будем считать, что параллельный перенос  $\mathbf{w}_0 = 0$ , он не интересен. Обозначим за направление смещения единичный вектор  $\mathbf{m}$ , который будет перпендикулярен нормали к поверхности бумаги  $\mathbf{n}$ . Тогда запишем смещение:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{m} \gamma = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w} &= \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{n} \otimes (\gamma \mathbf{m}), \end{aligned}$$

где вектор  $\gamma \mathbf{m}$  — вектор вдоль которого смещается плоскость, находящаяся на единичном расстоянии от опорной плоскости. Тензор

сдвига будет соответственно выглядеть:

$$F = I + \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (2.8)$$

## 2.2 Растяжение и сжатие в некотором направлении

Будем пользоваться той же моделью (стопкой бумаг). Введем базис  $\{\mathbf{e}_i\}$  так, чтобы третья ось была со-направлена с нормалью к поверхности, тогда

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (1 + \varepsilon) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

Последнее выражение описывает трансформацию растяжения или сжатия в направлении вектора нормали на величину  $\varepsilon$ . Тогда поле смещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) (F_0 - I) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathbf{n} \otimes \varepsilon \mathbf{n}. \\ \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n} \otimes (\varepsilon \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Таким образом тензор растяжений выглядит следующим образом:

$$F = I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

Когда градиент поля смещений диада, как в этом случае, то такую трансформацию мы назовем диадной. Вектор  $\varepsilon \mathbf{n}$  — вектор смещения плоскости, находящейся на единичном расстоянии от опорной плоскости на коэффициент  $\varepsilon$ .

Если трансформации осуществлять последовательно, то соответствующие им тензоры будут перемножаться. Это легко доказать,  $d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{r}$ ,  $d\mathbf{r} \cdot F' = d\mathbf{r}' = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F'$ . Если теперь перемножить (2.8) и (2.9) (сдвиг на растяжение), то мы получим комбинацию (тензор, который

отвечает и за сдвиг и за растяжение). Будем считать что мы работаем с малыми деформациями и отбрасывать члены, содержащие произведение коэффициентов сдвига и растяжения  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} F &= (I + \gamma [\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}]) \cdot (I + \varepsilon [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]) = \\ &= I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + 0 = \\ &= I + \mathbf{n} \otimes (\varepsilon \mathbf{n} + \gamma \mathbf{m}) \end{aligned}$$

$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{n} \otimes (\gamma \mathbf{m} + \varepsilon \mathbf{n}).$$

Получили комбинацию сдвига и деформации, которая так же является диадной трансформацией. Чем более сложные примеры мы будем выбирать, тем проще будут формулы.

Будем теперь продолжать мысль со стопкой бумаги, но, если раньше мы с ней аккуратно обращались (сдвигали, утолщали или сжимали) какими-то упорядоченными однородными движениями, то теперь произведем над стопкой беспорядочные действия: в одном месте сдвинем в одну сторону, в другом в другую, в третьем в третью, где-то сожмем, где-то утолщим... Тогда с этой системой опорных плоскостей произойдет какая-то линейная комбинация движений, но в каждом тонком слое своя. А все это записывается такой формулой:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}).$$

То есть все зависит от аргумента  $((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n})$ , который можно назвать  $z$ . Этот  $z$  задает ту или иную плоскость в системе опорных плоскостей. И для каждой плоскости будет свой вектор смещения. Давайте убедимся в том, что локально это есть комбинация сдвига и растяжения. Найдем  $\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= dz \cdot \mathbf{f}'(z) = (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{f}'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \\ \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w} &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{f}'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \otimes (\gamma(z)\mathbf{m}(z) + \varepsilon(z)\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Усложним задачу еще: возьмем другую гладкую поверхность (не являющуюся плоскостью), каждый слой которой так же будет иметь свое смещение. Например, для сферы:  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = a^2$ . Теперь, если мы будем менять  $a$ , получим систему концентрических сфер с центром в  $\mathbf{x}_0$ . На самом деле, любая система поверхностей может быть задана аналогичным образом, а именно:  $\varphi(\mathbf{x}) = \alpha$ . И при изменении  $\alpha$  получим систему непересекающихся поверхностей, каждая из которых задается своим значением  $\alpha$ . А теперь для этого случая зададим поле смещения примерно так же, как и раньше, только вместо  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})$  зададим  $\varphi(\mathbf{x})$ . Тогда опишем трансформацию:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{x})) \\ \nabla_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathcal{K}} \varphi(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{f}'(\varphi(\mathbf{x})) \\ \nabla_{\mathcal{K}} \varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x}) |\nabla_{\mathcal{K}} \varphi \nabla_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x})| \\ \nabla_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \{|\nabla_{\mathcal{K}} \varphi(\mathbf{x})| \mathbf{f}'\} \\ \nabla_{\mathcal{K}} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes (\gamma(\mathbf{x}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что каждый тонкий слой, прилегающий к поверхности, претерпевает комбинацию сдвигов и растяжений.

## 2.3 Малые деформации и скоростные деформационные величины

Перейдем к другому вопросу, связанному с малыми деформациями и скоростными деформационными величинами, которые характеризуют то, что происходит в окрестности данного состояния. Представим, что есть некоторое состояние и некоторое движение, в процессе которого это состояние изменяется мало. Во многих случаях интересно именно то, как этот процесс происходит. Для рассмотрения этого строится некая интересная теория, которую мы с вами

сейчас и рассмотрим.

Прежде всего введем относительный градиент деформации. Сначала введем его формально, а потом разберем геометрический смысл. Все, что сейчас будет рассматриваться, будет относиться к точке с одинаковым  $\mathbf{x}$ , но к разным значениям  $t$ , поэтому аргумент  $\mathbf{x}$  будем опускать

$$F(t) \equiv F(t, \mathbf{x})$$

Зафиксируем состояние в некоторый, вообще говоря, любой, момент  $t_0$ . Относительным градиентом трансформации будем называть величину

$$F_{t_0}(t) = (F(t_0))^{-1} \cdot F(t)$$

Сразу очевидно, что при  $t = t_0$   $F_{t_0}(t_0) = I$ . Фактически это градиент трансформации относительно новой конфигурации, которая совпадает с актуальной в момент времени  $t_0$ .

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}(t) &= d\mathbf{x} \cdot F(t) \\ d\mathbf{r}(t_0) &= d\mathbf{x} \cdot F(t_0) \\ d\mathbf{x} &= d\mathbf{r}(t_0) \cdot (F(t_0))^{-1} \end{aligned}$$

$$d\mathbf{r}(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot (F(t_0))^{-1} \cdot F(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot F_{t_0}(t)$$

Проделаем теперь некоторые манипуляции, подразумевая в дальнейшем под  $F_{t_0}(t)$  тензор (относительный градиент трансформации), отображающий  $d\mathbf{r}(t_0)$  в  $d\mathbf{r}(t)$ . Чтобы был более понятен смысл, давайте продифференцируем полученную ранее формулу

$$d\dot{\mathbf{r}}(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{F}_{t_0}(t)$$

Получили скорость изменения элемента  $d\mathbf{r}$  и от чего она зависит. Сразу напрашивается вопрос, что же будет в момент времени  $t_0$ . Эта



формула будет так же справедлива

$$d\dot{\mathbf{r}}(t)|_{t=t_0} = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{F}_{t_0}(t)|_{t=t_0} \quad (2.10)$$

Эти манипуляции можно определить как случай, когда актуальная конфигурация берется за начало отсчета.

Теперь давайте сделаем некоторые вычисления, связанные с этим дифференцированием. Сначала просто продифференцируем  $F_{t_0}(t)$ , а потом положим  $t = t_0$ . Но прежде чем мы начнем это делать, мы запишем некоторые формулы, а именно: для относительного градиента, который является невырожденным тензором с положительным детерминантом, мы можем записать полярное разложение Коши таким образом

$$F_{t_0} = U_{t_0}(t) \cdot R_{t_0}(t)$$

Тензор  $U$  является симметричным положительно определенным, а тензор  $R$  является тензором ортогональным. Но если помнить, что в момент времени  $t = t_0$ ,  $F_{t_0}(t_0) = I$ , то для  $I$  полярное разложение имеет вид  $I \cdot I$ , то есть

$$U_{t_0}(t_0) = I; R_{t_0}(t_0) = I \quad (2.11)$$

$$F_{t_0}(t_0) = I = U_{t_0}(t_0) \cdot R_{t_0}(t_0) = I \cdot I$$

Теперь давайте дифференцировать, но пока что при произвольном  $t$

$$\dot{F}_{t_0}(t) = \dot{U}_{t_0}(t) \cdot R_{t_0}(t) + U_{t_0}(t) \cdot \dot{R}_{t_0}(t)$$

С учетом (2.11) в момент времени  $t_0$

$$\dot{F}_{t_0}(t)|_{t=t_0} = \dot{U}_{t_0}(t)|_{t=t_0} + \dot{R}_{t_0}(t)|_{t=t_0}$$

$U_{t_0}$  при любом  $t$  является симметричным тензором, значит, его производная по скалярному аргументу является им тоже. Его мы будем

обозначать  $\dot{\varepsilon}(t_0)$ . Он характеризует скорость деформаций, и, соответственно, называется тензором скоростей деформаций. Второе же слагаемое — тензор антисимметричный, потому что является производной ортогонального тензора при том его значении, когда он сам равняется  $I$ . Это можно получить дифференцированием по времени тождества  $R \cdot R^T = I$ . Этот антисимметричный тензор мы обозначим  $\dot{\omega}(t_0)$  и будем называть тензором скоростей поворота. Их сумму, то есть вектор  $\dot{F}_{t_0}(t)|_{t=t_0}$ , обозначим за  $\dot{H}(t_0)$  и назовем тензором скоростей дисторсий. Теперь становится видно, что все перечисленные величины относятся к одному и тому же моменту времени  $t_0$ , который, вообще говоря, совершенно произвольный, поэтому мы могли бы писать здесь не  $t_0$ , а  $t$ :  $\dot{\varepsilon}(t)$ ,  $\dot{\omega}(t)$ ,  $\dot{H}(t)$ .

Поскольку мы с вами знаем, что представление произвольного тензора второго ранга в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров единственно. Тогда можно записать  $\dot{H} = \dot{\varepsilon} + \dot{\omega}$  в любой момент времени и

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\dot{H} + \dot{H}^T) \quad \dot{\omega} = \frac{1}{2} (\dot{H} - \dot{H}^T).$$

Это не является определением, но, тем не менее, является свойством тензоров  $\dot{\varepsilon}(t)$  и  $\dot{\omega}(t)$ .

Продолжая формулу (2.10), можно записать

$$d\dot{\mathbf{r}}(t)|_{t=t_0} = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{F}_{t_0}(t)|_{t=t_0} = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{H}(t_0) \quad (2.12)$$

А так как величины относятся к одному и тому же моменту времени в одной материальной точке, то, отбросив «внутренность», заметим, что все сводится к  $d\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot \dot{H}$ .

Попробуем выразить  $\dot{H}$  и, соответственно,  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\omega}$  через поле скоростей. Раз это скоростные величины, наверное, они как-то связаны с полем скоростей. Это действительно так, и мы с вами сейчас эту зависимость получим.

В какой-то момент времени  $t$

$$\dot{H} = F^{-1} \cdot \dot{F}$$

$\dot{F}$  найдем из соотношения (1.2) путем дифференцирования по времени:

$$(F(\mathbf{x}, t))' = (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t))' = \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Таким образом, используя связь между отсчётным и пространственным градиентом, получаем:

$$\dot{H} = \dot{\varepsilon} + \dot{\omega} = F^{-1} \cdot \dot{F} = F^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \otimes \mathbf{v} \quad (2.13)$$

Значит,  $\dot{H}$  есть градиент  $\mathbf{v}$ . Тогда,  $\dot{\varepsilon}$  — симметризованный градиент  $\mathbf{v}$

$$\dot{\varepsilon} = \nabla \overset{s}{\otimes} \mathbf{v}$$

А  $\dot{\omega}$  — антисимметризованный градиент  $\mathbf{v}$ . Теперь можно ввести еще одну величину. Мы знаем, что с любым антисимметричным тензором связан вектор, например вот так:

$$\underline{\dot{\omega}} = \nabla \overset{a}{\otimes} \mathbf{v} = \underline{E \cdot \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \cdot E$$

Этот вектор  $\dot{\varphi}$  называется вектором угловой скорости. Давайте выразим его через  $\dot{\omega}$ , а потом через  $\dot{H}$ . Для этого умножим подчеркнутое равенство двойным скалярным произведением слева на альтернирующий тензор  $E$

$$E : \dot{\omega} = E : E \cdot \dot{\varphi} = 2I \cdot \dot{\varphi} = 2\dot{\varphi}$$

Заметим, что выражение  $E : \dot{\varepsilon} = 0$ , так как является произведением антисимметричного и симметричного тензоров. Поэтому, без ограничения общности, в следующее выражение можно добавить  $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}E : \dot{\omega} = \frac{1}{2}E : (\dot{\omega} + \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2}E : \dot{H} = \frac{1}{2}E : \nabla \otimes \mathbf{v}$$

Продолжая цепочку рассуждений (2.10) и (2.12), с учетом того, что все величины относятся к одному и тому же моменту времени, можно записать

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \dot{H} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + d\mathbf{r} \cdot \dot{\omega} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + d\mathbf{r} \cdot E \cdot \dot{\varphi}$$

Это выражение показывает, что происходит мгновенно с элементом  $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} \times d\mathbf{r}$$

Скорость изменения элемента  $d\mathbf{r}$  складывается из двух слагаемых. Первое связано с действием тензора скоростей деформаций, а другое связано с вращением, с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ .

Как уже говорилось ранее, теория деформаций является линеаризацией теории больших деформаций около отсчётной конфигурации. А то, что мы делали сейчас, есть не что иное как линеаризация всех возможных соотношений около актуальной конфигурации. Мы получили скоростные характеристики

$$\dot{H} = \nabla \otimes \mathbf{v}$$

$$\dot{\varepsilon} = \nabla \overset{s}{\otimes} \mathbf{v}$$

$$\dot{\omega} = \nabla \overset{a}{\otimes} \mathbf{v}$$

Если обе части любого из этих выражений мы умножим на  $\delta t$ , то мы получим уже не скорости, а приращения. Можно ввести тензор  $\delta t \cdot \dot{H} = \delta H = \nabla \otimes \delta \mathbf{w}$  — тензор малых дисторсий, где  $\delta \mathbf{w}$  — вектор малого смещения. И тем же образом тензор малых деформаций относительно актуальной конфигурации:

$$\delta \varepsilon = \nabla \overset{s}{\otimes} \delta \mathbf{w},$$

тензор малых поворотов

$$\delta \omega = \nabla \overset{a}{\otimes} \delta \mathbf{w}.$$

Очевидно, что все эти величины, называемые инкрементальными, при  $\mathbf{v} = 0$  обратятся в нуль. Можно записать

$$\delta(d\mathbf{r}) = d\mathbf{r} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} + d\mathbf{r} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}$$

Пусть  $\mathbf{e}_i$  — ОНБ, тогда для симметричного тензора существует спектральное разложение по базису:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \dot{\varepsilon}_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ , где  $\dot{\varepsilon}_i$  — собственные числа тензора скоростей деформаций, называемые главными скоростями деформации,  $\dot{\mathbf{e}}_i$  — главные оси деформаций. Так же можно записать и для  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \delta\varepsilon_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Найдем для начала скорость изменения длины элемента  $d\mathbf{r}$ . Для этого продифференцируем по времени квадрат его модуля  $|d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} 2|d\mathbf{r}||d\mathbf{r}|^\cdot &= d\dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \\ &= d\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{H}}^T \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^T) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= d\mathbf{r} \cdot 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Отсюда относительная скорость удлинения элемента  $d\mathbf{r}$ , которая не зависит от длины, а только от направляющего вектора

$$\begin{aligned} \frac{|d\mathbf{r}|^\cdot}{|d\mathbf{r}|} &= \frac{d\mathbf{r} \cdot 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|^2} = \mathbf{e} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e} \Leftrightarrow \frac{\delta|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} = \mathbf{e} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} \\ \frac{|d\mathbf{r}|^\cdot}{|d\mathbf{r}|} &= \mathbf{e}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{e}_i = \dot{\varepsilon}_i \end{aligned}$$

Главные оси растяжения это ни что иное как относительные скорости удлинения для переменных, направленных по главным осям. Они испытывают растяжение с такими относительными скоростями  $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$

## Лекция 3

$\gamma(t) = 0$ ,  $\gamma(t + \tau) \neq 0$ . Найдём скорость изменения объема:

$$\begin{aligned} \frac{(dV)^{\cdot}}{dV} &= \frac{dV_{\varkappa}(\det F)^{\cdot}}{dV_{\varkappa}(\det F)} = \\ &= \nabla \cdot \mathbf{v} = I : \dot{H} = I : (\dot{\varepsilon} + \dot{\omega}) = \\ &= I : \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

А теперь скорость сдвига. С одной стороны

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 &= |d\dot{\mathbf{r}}_1| |d\mathbf{r}_2| \sin \gamma + \\ &+ |d\mathbf{r}_1| |d\dot{\mathbf{r}}_2| \sin \gamma + |d\mathbf{r}_1| |d\mathbf{r}_2| \dot{\gamma} \cos \gamma = |d\mathbf{r}_1| |d\mathbf{r}_2| \dot{\gamma} \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 &= d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{H} \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \dot{H} = \\ &= d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \left( \dot{H} + \dot{H}^T \right) \cdot d\mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \left( \dot{H} + \dot{H}^T \right) \cdot d\mathbf{r}_2}{|d\mathbf{r}_1| |d\mathbf{r}_2|}$$

### 3.1 Уравнения совместности

Умножим выражение (2.13) векторно слева на вектор набла:

$$\nabla \times \dot{H}(\mathbf{r}) \equiv 0$$

Только такие поля могут быть полями скоростей дисторсии. Основной задачей этой лекции является вывод уравнений совместности и

доказательство теоремы Чизара. Но сначала придется доказать некоторые равенства и утверждения.

Для достижения нашей цели в первую очередь надо вспомнить утверждение прошлого семестра, потому что им мы будем активно пользоваться в этой лекции:

$$\nabla \otimes \left( L(\mathbf{r})^{(i_1 i_2 \dots i_k)} \right) = \nabla \otimes L^{(1(i_1+1)(i_2+1) \dots (i_k+1))} \quad (3.14)$$

Тогда применим формулу (3.14) к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \nabla \otimes (\nabla \otimes \mathbf{v}^T) &= \nabla \otimes (\nabla \otimes \mathbf{v}^{(21)}) = \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)} \\ \nabla \otimes \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)} \right) \\ \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(132)} &= \nabla \otimes \dot{\varepsilon} \end{aligned}$$

Последнее выражение является следствием симметрии тензора скоростей деформаций. Тогда разных изомеров будет всего 3:  $\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(132)} = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}$ ,  $\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(312)}$ ,  $\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(321)} = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(231)}$ . Аналогично для  $\mathbf{v}$ :  $\nabla \otimes \mathbf{v}^{(213)} = \nabla \otimes \mathbf{v}$ ,  $\nabla \otimes \mathbf{v}^{(321)} = \nabla \otimes \mathbf{v}^{(312)}$ ,  $\nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)} = \nabla \otimes \mathbf{v}^{(231)}$ . Запишем выражения для разных изомеров градиента тензора скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)} \right) \\ \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} &= \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(312)} \right) \\ \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(231)} &= \frac{1}{2} \left( \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(231)} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(321)} \right) \end{aligned}$$

Сложим первую и вторую строчки и вычтем первую:

$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon} + \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} - \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(231)} = \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} \quad (3.15)$$

Получается, что если тензор скоростей трансформации тождественный ноль, то его градиент и подавно, но тогда  $\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{const} = \dot{\omega}(\mathbf{r}) = \dot{\omega}_0$ . Тогда получаем формулу Эйлера, которая пользуется большой популярностью в аналитической механики:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \dot{\omega}_0 = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot E \cdot \dot{\varphi}_0 = \mathbf{v}_0 + \dot{\varphi}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Возьмем еще один градиент от выражения (3.15) и умножим слева и справа двойным скалярным произведением на альтернирующий тензор:

$$\begin{aligned} E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon} : E + E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E - \\ - E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1342)} : E = E : \nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} : E \end{aligned}$$

Первое слагаемое и правая часть равенства равно нулю как произведение антисимметричных и симметричного тензора, по свойствам альтернирующего тензора  $E = -E^{(213)}$ , тогда:

$$E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1342)} : E = E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E^{(213)}.$$

В итоге получим уравнение совместности:

$$E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E = 0 \quad (3.16)$$

В другой форме уравнение запишется следующим образом:

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\varepsilon})^T = 0$$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему Чизара.

**Теорема 3.1.1 (Чизара).** *Необходимым и достаточным условием существования поля скоростей является выражение (3.16).*



▷

Попробуем построить еще одно такое антисимметричное поле, чтобы в сумме их градиент удовлетворял уравнению ротор суммы равен нулю из чего будет следовать по теореме об потенциальности нужное утверждение:

$$\begin{aligned} E : \nabla \otimes \left( \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{(213)} : E \right) \\ \nabla \times \left( \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} : E \right) = 0 \\ \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} : E = \nabla \otimes \dot{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \dot{\omega} = \nabla \otimes \dot{\phi} \cdot E = \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} : \mathbb{E} \cdot E = \\ = \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} : (\mathbf{1} - \mathbf{1}^T) = \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} - \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{231} \quad (3.17) \end{aligned}$$

Умножим градиент тензора скоростей дисторсии слева дважды скалярно на альтернирующий тензор:

$$E : (\nabla \otimes \dot{\epsilon} + \nabla \otimes \dot{\omega}) \stackrel{(3.17)}{=} E : (\nabla \otimes \dot{\epsilon} + \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{213} - \nabla \otimes \dot{\epsilon}^{231}) = 0$$

Первое и второе слагаемое равны, но противоположны по знаку, а третье равно нулю, как произведение антисимметричного тензора на симметричный. Следовательно,  $\exists \mathbf{v}(\mathbf{r})$ :

$$\dot{\epsilon} + \dot{\omega} = \nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r})$$