Федеральное государственное автономное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Конспект лекций

по механике сплошных сред

Москва 2017

Предисловие

Оглавление

Введение

Постулируется непрерывность преобразования из одного состояния в другое. И не может быть так, что часть конечного объема после трансформации стала бесконечной. Если есть последовательность состояний тела и эта последовательность имела предел, то так будет и в любом другом состоянии системы. Это и есть сплошность, фактически, непрерывность.

Итак, принципиальное различие механики сплошных сред (МСС) от механики дискретных сред (МДС) состоит в том, что вещество в МДС представляется в виде набора материальных точек в конкретных точках пространства, в то время как в МСС материальные точки полностью заполняют предоставленный объем: свойства задаются не для конкретной точки, а для набора, т.е. для некоторого объема.

Как и в механике дискретных сред, масса тела неизменна, положительна, если объем положителен, и аддитивна т.е. если части тела не пересекаются или пересекаются по множеству нулевой меры, то масса всех этих частей равна сумме масс этих частей в отдельности.

Важное понятие, используемое нами в дальнейшем — отсчётное описание. Это способ идентификации материальных точек (в дальнейшем **мт**). Среди всех состояний (конфигураций) тела в какой-то момент времени t существует одно, котрое мы мысленно фиксируем. Эту конфигурацию будем называть **отсчётной** и обозначать $\varkappa$, она неизменна. Остальные же конфигурации зависят от времени, поэтому **актуальную** конфигурацию (в данный момент времени) обозначим $\chi(t)$. Местоположение мт в отсчётной конфигурации служит «именем» этой мт.

Выбирается некоторое состояние тела (отсчётная конфигурация) в какой-то момент времени t, именами точек служит радиус-векторы. Этот метод похож на учет населения с помощью постоянной прописки. Для того, чтобы узнать текущую (актуальную) конфигурацию, для обозначения которой мы будем использовать $\chi(t)$ мы должны задаться отображением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(\mathbf{x}{,}t\right) \tag{1}$$

Движение материальной точки — это отображение $\mathbf{r}$ при фиксированном $\mathbf{x}$. В дальнейшем предполагается, что $\mathbf{r} \in C^2$, или хотя бы кусочно-непрерывно дифференцируемо по $\mathbf{x}$. И действительно, рассмотрим стержень, одну часть которого растянем, а другую сожмем Градиент тут будет разрывен, по-этому естественно, что в МСС присутствуют разрывы производных.

Лекция 1

Введем градиент $\mathbf{r}$ по $\mathbf{x}$:

$$F\left(\mathbf{x}, t\right) \equiv \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{r}\left(\left(\mathbf{x}, t\right)\right) \tag{1.2}$$

Индекс при векторе набла указывает, что дифференцирование идет по $\mathbf{x}$ т. е. по радиусу вектору отсчётной конфигурации. Что означает на самом деле формула (1.2)? Вспомнив определение дифференциала, не трудно понять, что F — это линейный оператор, отображающий $d\mathbf{x}$ в $d\mathbf{r}$.

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F$$

В этом градиенте содержится все, что происходит с окрестностью точки. Договоримся, что $\det F$ — коэффициент преобразования объема. В дальнейшем будем считать, что $\det F \neq 0$, иными словами:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{r} \cdot F^{-1}$$

Раз определитель отличен от 0 и по нашему договору все меняется непрерывно, то детерминант не может менять знак (иначе он обратился бы в 0 в какой-то момент). Какой же он, больше или меньше нуля? Если $\mathbf{r}_{\text{отс}} = \mathbf{x} \Rightarrow F \equiv I$, $\det I = 1 > 0$.

Мы всегда будем полагать, что определитель больше нуля, тогда это к тому же и коэффициент преобразования объема:

$$dV = (\det F)\, dV_{\varkappa}$$

Предположения о массе сделанные выше влекут за собой соображения о плотности массы. Масса есть интеграл этой плотности по окрестности $dm = \rho_{\varkappa} dV_{\varkappa} = \rho dV = \rho \det F\, dV_{\varkappa}$:

$$\boxed{\rho_{\varkappa}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, t) \det F(\mathbf{x}, t)} \tag{1.3}$$

Есть два типа описания физических величин:

Отсчётное описание физической величины $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$$

Пространственное описание, выражающееся формулами от t и $\mathbf{r}$, чаще всего такое описание используется в гидромеханике. Мы тоже будем иногда прибегать к такому способу. Для этого вводится специальная функция

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$$

Производную по времени будем называть материальной производной:

$$\dot{\Psi} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}}$$

Пространственной производной будем называть величину:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}}$$

Чтобы понять в чем разница, можно привести пример с рекой и температурой. Если ставить термометр на якорь, то это все равно, что пространственная производная, то есть фиксировано положение термометра в реке и измеряется температура конкретной точки пространства. Если термометр пустить по течению, то будет измерятся температура конкретной точки реки, это соответствует временной производной. Заметим, что $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}\left(\mathbf{x}, t\right)$. Найдем связь между временной и пространственной производной (формула Эйлера):

$$\dot{\Psi} \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \Psi$$

Формула получается применением дифференцирования сложной функции, если подставить в выражение $\Psi = \Psi\left(\mathbf{x}, t\right)$ формулу (1).

$$\Psi = \Psi\left(\mathbf{r}\left(\mathbf{x}, t\right), t\right)$$

В частности:

$$\dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$$

В стационарном течении получаем $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$, так же можно рассмотреть сдвиговое течение (ярким примером которого может служить скосившаяся стопка бумаг или колода карт), тогда $\mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$

Найдем связь между градиентами в отсчётной и актуальной конфигурациях:

$$(d\Psi)_t = d\mathbf{x} \cdot \nabla_{\varkappa} \otimes \Psi = \mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \Psi \overset{(1)}{=} d\mathbf{x} \cdot F \cdot \nabla \otimes \Psi$$

$$\nabla_{\varkappa} = F \cdot \nabla \tag{1.4}$$

Вспомним о независимости порядка дифференцирования независимых переменных и получим выражение, которое понадобится нам для вывода закона сохранения массы (ЗСМ):

$$\dot{F}(\mathbf{x}, t) = (\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^{\cdot} = \nabla_{\varkappa} \otimes \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{1.5}$$

Также, перед выводом ЗСМ полезно вспомнить следующую формулу:

$$(\det F)^{\cdot} = \dot{F} : \det F \left(F^{-1}\right)^T \tag{1.6}$$

Теперь у нас есть все, для вывода ЗСМ. Продифференцируем выражение (1.3) :

$$\dot{\rho} \det F + \rho (\det F)^{\cdot} = 0$$

Вспомнив выражение (1.6) получаем:

$$\dot{\rho} \det F + \rho (\det F) \dot{F} : \left(F^{-1}\right)^T = 0$$

Так как мы обговаривали что определитель считаем положительным, то на него можно поделить, так же вспомнив про выражение (1.5) приходим к равенству:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\varkappa} \otimes \dot{\mathbf{v}} : \left(F^{-1}\right)^T = 0$$

Из тензорной алгебры известно соотношение $A : B = I : \left(A \cdot B^T\right) = I : \left(B^T \cdot A\right)$, тогда наше выражение примет вид:

$$\dot{\rho} + \rho I : F^{-1} \cdot \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v} = 0$$

Если вспомнить соотношение между градиентами (формула (1.4)) и свойства двойного скалярного произведения, мы получим окончательно:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

Займемся выводом еще одной интересной формулы (скорость изменения объема) $(\det F)^{\cdot} = (\det F)\,\nabla\cdot\mathbf{v}$. Пусть тело занимает в актуальной конфигурации область B.

$$V\left(t\right) = \int\limits_{B} dV = \int\limits_{B_{\varkappa}} \left(\det F\right) dV_{\varkappa}$$

$$\dot{V}\left(t\right) = \left(\int\limits_{B} dV\right)^{\cdot} = \left(\int\limits_{B_{\varkappa}} \left(\det F\right) dV_{\varkappa}\right)^{\cdot} =$$

$$= \int\limits_{B_{\varkappa}} \left(\det F\right)^{\cdot} dV_{\varkappa} = \int\limits_{B_{\varkappa}} \left(\det F\,\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\frac{dV_{\varkappa}}{dV} =$$

$$= \int\limits_{B} \nabla\cdot\mathbf{v}dV = \int\limits_{\partial B} \left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\right) d\Sigma$$

1.1 Теория конечных деформаций

Вспомним теорему Коши о полярном разложении

$$F = U\cdot R = R\cdot U',$$

где U — симметричный положительно определенный тензор, а R — ортогональный. Если представить U в главных осях, то его детерминант будет произведением собственных чисел ($\det U = u_1 u_2 u_3$):

$$U = u_1\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$$

Так как U положительно определенный, то и его собственные числа положительны, тогда:

$\det F = \det U \det R > 0 \Rightarrow \det R > 0 \Rightarrow \det R = 1$ т.к. R ортоганален.

Вспомним как связаны между собой U' и U:

$$U' = R^T U R = U * R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U' = u_1 \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_1 + u_2 \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2 + u_3 \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{e}'_3,$$

где $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i \cdot R$. Вспоминая формулу (1) можем получить: $d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{x} \cdot UR = d\mathbf{x} \cdot RU'$. Тогда можно дать следующую физическую интерпретацию. U — левый тензор чистого растяжения (растяжение происходит вдоль осей $\mathbf{e}_i$ — осей растяжения в актуальной конфигурации, с коэффициентом u_i), R — тензор поворота. U' — правый тензор чистого растяжения (растяжение происходит вдоль осей $\mathbf{e}'_i$ — осей растяжения в отсчётной конфигурации, с коэффициентом u_i).

Пусть $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|\mathbf{e}_i$, тогда:

$$d\mathbf{r} = |d\mathbf{x}|\mathbf{e}_i \cdot F = |d\mathbf{x}| \cdot UR = |d\mathbf{x}|u_i\mathbf{e}_i \cdot R = |d\mathbf{x}|u'_i\mathbf{e}_i$$

А что если $d\mathbf{x} \nparallel \mathbf{e}_i$? Какой будет коэффициент растяжения? Введем два тензора $F \cdot F^T = U \cdot R \cdot R^T \cdot U = U^2$ — левый тензор Коши-Грина. Аналогично $F \cdot F^T = U'^2$ — правый тензор Коши-Грина. Возьмем направленный вектор $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|\mathbf{e}$.

$$|d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot F \cdot d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F^T \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot U^2 \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|^2 \mathbf{e} \cdot U^2 \cdot \mathbf{e}$$

$$\frac{|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{x}|} = \sqrt{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}}$$

Введем понятие угла сдвига. Возьмем в отсчётной конфигурации два взаимно-ортогональных элемента $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$, тогда:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}' = |d\mathbf{r}||d\mathbf{r}'| \cos\alpha = |d\mathbf{r}||d\mathbf{r}'| \sin\gamma$$

С другой стороны:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}' = d\mathbf{x} \cdot F \cdot d\mathbf{x}' \cdot F = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F^T \cdot d\mathbf{x}' =$$
$$= |d\mathbf{x}||d\mathbf{x}'|\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}' = |d\mathbf{r}||d\mathbf{r}'| \sin\gamma$$

Таким образом получаем выражение для синуса угла сдвига:

$$\sin\gamma = \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{|d\mathbf{r}||d\mathbf{r}\,'|} \cdot |d\mathbf{x}||d\mathbf{x}'| = \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{\frac{|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{x}|}\frac{|d\mathbf{r}'|}{|d\mathbf{x}'|}}$$

$$\sin\gamma = \frac{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}{\sqrt{\mathbf{e} \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}}\sqrt{\mathbf{e}' \cdot F \cdot F^T \cdot \mathbf{e}'}} \tag{1.7}$$

Если $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}' = \mathbf{e}_2$, тогда в выражении (1.7) будет стоять 0. Таким образом, главные векторы только поворачиваются, а углы между ними не меняются.

Получим тензор конечных деформаций. Для этого введем понятие вектора смещения $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Выразим из него вектор $\mathbf{r}$ и подставим в (1.2).

$$F = I + \nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w}, \qquad F^T = I + (\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w})^T$$

$$F \cdot F^T = I + \nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w} + (\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w})^T + \nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w} \cdot (\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w})^T$$

И тензором конечных деформаций назовем величину:

$$\frac{F \cdot F^T - I}{2} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w} + (\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w})^T + \nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w} \cdot (\nabla_\varkappa \otimes \mathbf{w})^T\right)$$

Лекция 2

Продолжим тему предыдущей лекции. $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) R_0 + \mathbf{w}_0$, где тензор R_0 — тензор поворота(без параллельного переноса). Что происходит с точкой $\mathbf{x}_0$? Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, то $\mathbf{r}_= (\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}_0 = \mathbf{r}_0 (\mathbf{x}_0)$. Получим поле смещений:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (R_0 - I) + \mathbf{w}_0$$

$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{x}) = R_0 - I$$

Будем называть трансформацию однородной, если ее градиент постоянен. Заменим поворот тензором F_0, в смысл которого вложим и поворот и растяжение Для этого тензора справедливо полярное разложение Коши.

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) F_0 + \mathbf{w}_0 = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) F_0.$$

Рассмотрим два вида деформаций.

2.1 Простой сдвиг

Для лучшего понимания и представление возьмем стопку бумаг, которую мы однородно перекосим. Это и будет простым сдвигом. Будем считать, что параллельный перенос $\mathbf{w}_0 = 0$, он не интересен. Обозначим за направление смещения единичный вектор $\mathbf{m}$, который будет перпендикулярный нормали к поверхности бумаги $\mathbf{n}$. Тогда запишем смещение:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{m}\gamma = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m})$$
$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w} = \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{n} \otimes (\gamma \mathbf{m}),$$

где вектор $\gamma\mathbf{m}$ — вектор вдоль которого смещается плоскость, находящаяся на единичном расстоянии от опорной плоскости. Тензор сдвига будет соответственно выглядеть:

$$F = I + \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \tag{2.8}$$

2.2 Растяжение и сжатие в некотором направлении

Будем пользоваться той же моделью (стопкой бумаг). Введем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ так, чтобы третья ось была со-направленна с нормалью к поверхности, тогда

$$\mathbf{r}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) \cdot \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \left(1 + \varepsilon\right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\right) = I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

Последнее выражение описывает трансформацию растяжения или сжатия в направлении вектора нормали на величину ε. Тогда поле смещений:

$$\mathbf{w}\left(\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) \left(F_0 - I\right) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) \mathbf{n} \otimes \varepsilon \mathbf{n}.$$
$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{n} \otimes \left(\varepsilon \mathbf{n}\right).$$

Таким образом тензор растяжений выглядит следующим образом:

$$F = I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{2.9}$$

Когда градиент поля смещений диада, как в этом случае, то такую трансформацию мы назовем диадной. Вектор $\varepsilon \mathbf{n}$ — вектор смещения плоскости, находящейся на единичном расстоянии от опорной плоскости на коэффициент ε.

Если трансформации осуществлять последовательно, то соответствующие им тензоры будут перемножаться. Это легко доказать, $d\mathbf{x} \cdot F = d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r} \cdot F' = d\mathbf{r}' = d\mathbf{x} \cdot F \cdot F'$. Если теперь перемножить (2.8) и (2.9) (сдвиг на растяжение), то мы получим комбинацию (тензор, который отвечает и за сдвиг и за растяжение). Будем считать что мы работаем с малыми деформациями и отбрасывать члены, содержащие произведение коэффициентов сдвига и растяжения γ и ε.

$$F = (I + \gamma\,[\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}]) \cdot (I + \varepsilon\,[\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]) = \\ = I + \varepsilon \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + 0 = \\ = I + \mathbf{n} \otimes (\varepsilon \mathbf{n} + \gamma \mathbf{m})$$

$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{n} \otimes (\gamma \mathbf{m} + \varepsilon \mathbf{n})\,.$$

Получили комбинацию сдвига и деформации, которая так же является диадной трансформацией. Чем более сложные примеры мы будем выбирать, тем проще будут формулы.

Будем теперь продолжать мысль со стопкой бумаги, но, если раньше мы с ней аккуратно обращались (сдвигали, утолщали или сжимали) какими-то упорядоченными однородными движениями, то теперь произведем над стопкой беспорядочные действия: в одном месте сдвинем в одну сторону, в другом в другую, в третьем в третью, где-то сожмем, где-то утолщим... Тогда с этой системой опорных плоскостей произойдет какая-то линейная комбинация движений, но в каждом тонком слое своя. А все это записывается такой формулой:

$$\mathbf{w}\,(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\,((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n})\,.$$

То есть все зависит от аргумента $((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n})$, который можно назвать z. Этот z задает ту или иную плоскость в системе опорных плоскостей. И для каждой плоскости будет свой вектор смещения. Давайте убедимся в том, что локально это есть комбинация сдвига и растяжения. Найдем $\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w}$:

$$\mathbf{w}\,(\mathbf{x}) = dz \cdot \mathbf{f}'\,(z) = (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}'\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{f}'(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})$$

$$\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{f}'\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \otimes (\gamma(z)\mathbf{m}(z) + \varepsilon(z)\mathbf{n})\,.$$

Усложним задачу еще: возьмем другую гладкую поверхность (не являющуюся плоскостью), каждый слой которой так же будет иметь свое смещение. Например, для сферы: $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=a^2$. Теперь, если мы будем менять a, получим систему концентрических сфер с центром в x_0. На самом деле, любая система поверхностей можеть быть задана аналогичным образом, а именно: $\varphi(\mathbf{x})=\alpha$. И при изменении α получим систему непересекающихся поверхностей, каждая из которых задается своим значением α. А теперь для этого случая зададим поле смещения примерно так же, как и раньше, только вместо $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$ зададим $\varphi(\mathbf{x})$. Тогда опишем трансформацию:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{x}))\\
\nabla_{\varkappa}\otimes\mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\varkappa}\varphi(\mathbf{x})\otimes\mathbf{f}'(\varphi(\mathbf{x}))\\
\nabla_{\varkappa}\varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x})\left|\nabla_{\varkappa}\varphi\nabla_{\varkappa}\otimes\mathbf{w}(\mathbf{x})\right|\\
\nabla_{\varkappa}\otimes\mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x})\otimes\{|\nabla_{\varkappa}\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{f}'\}\\
\nabla_{\varkappa}\otimes\mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \mathbf{n}(\mathbf{x})\otimes(\gamma(\mathbf{x})\,\mathbf{m}(\mathbf{x})+\varepsilon(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x}))\,.
\end{aligned}$$

Последнее выражение показывает, что каждый тонкий слой, прилегающий к поверхности, претерпевает комбинацию сдвигов и растяжений.

2.3 Малые деформации и скоростные деформационные величины

Перейдем к другому вопросу, связанному с малыми деформациями и скоростными деформационными величинами, которые характеризуют то, что происходит в окрестности данного состояния. Представим, что есть некоторое состояние и некотрое движение, в процессе которого это состояние изменяется мало. Во многих случаях интересно именно то, как этот процесс происходит. Для рассмотрения этого строится некая интересная теория, которую мы с вами сейчас и рассмотрим.

Прежде всего введем относительный градиент деформации. Сначала введем его формально, а потом разберем геометрический смысл. Все, что сейчас будет рассматриваться, будет относиться к точке с одинаковым $\mathbf{x}$, но к разным значениям t, поэтому аргумент $\mathbf{x}$ будем опускать

$$F(t) \equiv F(t, \mathbf{x})$$

Зафиксируем состояние в некоторый, вообще говоря, любой, момент t_0. Относительным градиентом трансформации будем называть величину

$$F_{t_0}(t) = (F(t_0))^{-1} \cdot F(t)$$

Сразу очевидно, что при $t = t_0$ $F_{t_o}(t_0) = I$. Фактически это градиент трансформации относительно новой конфигурации, которая совпадает с актуальной в момент времени t_0.

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}(t) &= d\mathbf{x} \cdot F(t) \\ d\mathbf{r}(t_0) &= d\mathbf{x} \cdot F(t_0) \\ d\mathbf{x} &= d\mathbf{r}(t_0) \cdot (F(t_0))^{-1} \end{aligned}$$

$$d\mathbf{r}(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot (F(t_0))^{-1} \cdot F(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot F_{t_0}(t)$$

Проделаем теперь некоторые манипуляции, подразумевая в дальнейшем под $F_{t_0}(t)$ тензор (относительный градиент трансформации), отображающий $d\mathbf{r}(t_0)$ в $d\mathbf{r}(t)$. Чтобы был более понятен смысл, давайте продифференцируем полученную ранее формулу

$$d\dot{\mathbf{r}}(t) = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{F}_{t_0}(t)$$

Получили скорость изменения элемента $d\mathbf{r}$ и от чего она зависит. Сразу напрашивается вопрос, что же будет в момент времени t_0. Эта формула будет так же справедлива

$$d\dot{\mathbf{r}}\left(t\right)|_{t=t_0} = d\mathbf{r}\left(t_0\right) \cdot \dot{F}_{t_0}\left(t\right)|_{t=t_0} \tag{2.10}$$

Эти манипуляции можно определить как случай, когда актуальная конфигурация берется за начало отсчета.
Теперь давайте проделаем некоторые вычисления, связанные с этим дифференцированием. Сначала просто продифференцируем $F_{t_0}(t)$, а потом положим $t = t_0$. Но прежде чем мы начнем это делать, мы запишем некоторые формулы, а именно: для относительного градиента, который является невырожденным тензором с положительным детерминантом, мы можем записать полярное разложение Коши таким образом

$$F_{t_0} = U_{t_0}\left(t\right) \cdot R_{t_0}\left(t\right)$$

Тензор U является симметричным положительно определенным, а тензор R является тензором ортогональным. Но если помнить, что в момент времени $t = t_0$, $F_{t_o}\left(t_0\right) = I$, то для I полярное разложение имеет вид $I \cdot I$, то есть

$$U_{t_0}\left(t_0\right) = I; R_{t_0}\left(t_0\right) = I \tag{2.11}$$

$$F_{t_0}\left(t_0\right) = I = U_{t_0}\left(t_0\right) \cdot R_{t_0}\left(t_0\right) = I \cdot I$$

Теперь давайте дифференцировать, но пока что при произвольном t

$$\dot{F}_{t_0}\left(t\right) = \dot{U}_{t_0}\left(t\right) \cdot R_{t_0}\left(t\right) + U_{t_0}\left(t\right) \cdot \dot{R}_{t_0}\left(t\right)$$

С учетом (2.11) в момент времени t_0

$$\dot{F}_{t_0}\left(t\right)|_{t=t_0} = \dot{U}_{t_0}\left(t\right)|_{t=t_0} + \dot{R}_{t_0}\left(t\right)|_{t=t_0}$$

U_{t_0} при любом t является симметричным тензором, значит, его производная по скалярному аргументу является им тоже. Его мы будем обозначать $\dot{\varepsilon}(t_0)$. Он характеризует скорость деформаций, и, соответственно, называется тензором скоростей деформаций. Второе же слагаемое — тензор антисимметричный, потому что является производной ортогонального тензора при том его значении, когда он сам равняется I. Это можно получить дифференцированием по времени тождества $R \cdot R^T = I$. Этот антисимметричный тензор мы обозначим $\dot{\omega}(t_0)$ и будем называть тензором скоростей поворота. Их сумму, то есть вектор $\dot{F}_{t_0}(t)\,|_{t=t_0}$, обозначим за $\dot{H}(t_0)$ и назовем тензором скоростей дисторсий. Теперь становится видно, что все перечисленные величины относятся к одному и тому же моменту времени t_0, который, вообще говоря, совершенно произвольный, поэтому мы могли бы писать здесь не t_0, а t: $\dot{\varepsilon}(t)$, $\dot{\omega}(t)$, $\dot{H}(t)$.

Поскольку мы с вами знаем, что представление произвольного тензора второго ранга в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров единственно. Тогда можно записать $\dot{H} = \dot{\varepsilon} + \dot{\omega}$ в любой момент времени и

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\dot{H} + \dot{H}^T\right) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2}\left(\dot{H} - \dot{H}^T\right).$$

Это не является определением, но, тем не менее, является свойством тензоров $\dot{\varepsilon}(t)$ и $\dot{\omega}(t)$.

Продолжая формулу (2.10), можно записать

$$d\dot{\mathbf{r}}(t)\,|_{t=t_0} = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{F}_{t_0}(t)\,|_{t=t_0} = d\mathbf{r}(t_0) \cdot \dot{H}(t_0) \tag{2.12}$$

А так как величины относятся к одному и тому же моменту времени в одной материальной точке, то, отбросив «внутренность», заметим, что все сводится к $d\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot \dot{H}$.

Попробуем выразить $\dot{H}$ и, соответственно, $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\omega}$ через поле скоростей. Раз это скоростные величины, наверное, они как-то связаны с полем скоростей. Это действительно так, и мы с вами сейчас эту зависимость получим.

В какой-то момент времени t

$$\dot{H} = F^{-1} \cdot \dot{F}$$

$\dot{F}$ найдем из соотношения (1.2) путем дифференцирования по времени:

$$(F(\mathbf{x}, t))^{\cdot} = (\nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{r}(\mathbf{x}, t))^{\cdot} = \nabla_{\varkappa} \otimes \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Таким образом, используя связь между отсчётным и пространственным градиентом, получаем:

$$\dot{H} = \dot{\varepsilon} + \dot{\omega} = F^{-1} \cdot \dot{F} = F^{-1} \cdot \nabla_{\varkappa} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \otimes \mathbf{v} \tag{2.13}$$

Значит, $\dot{H}$ есть градиент $\mathbf{v}$. Тогда, $\dot{\varepsilon}$ — симметризованный градиент $\mathbf{v}$

$$\dot{\varepsilon} = \nabla \overset{s}{\otimes} \mathbf{v}$$

А $\dot{\omega}$ — антисимметризованный градиент $\mathbf{v}$. Теперь можно ввести еще одну величину. Мы знаем, что с любым антисимметричным тензором связан вектор, например вот так:

$$\underline{\dot{\omega}} = \nabla \overset{a}{\otimes} \mathbf{v} = \underline{E \cdot \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \cdot E$$

Этот вектор $\dot{\varphi}$ называется вектором угловой скорости. Давайте выразим его через $\dot{\omega}$, а потом через $\dot{H}$. Для этого умножим подчеркнутое равенство двойным скалярным произведением слева на альтернирующий тензор E

$$E : \dot{\omega} = E : E \cdot \dot{\varphi} = 2I \cdot \dot{\varphi} = 2\dot{\varphi}$$

Заметим, что выражение $E : \dot{\varepsilon} = 0$, так как является произведением антисимметричного и симметричного тензоров. Поэтому, без ограничения общности, в следующее выражение можно добавить $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2} E : \dot{\omega} = \frac{1}{2} E : (\dot{\omega} + \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} E : \dot{H} = \frac{1}{2} E : \nabla \otimes \mathbf{v}$$

Продолжая цепочку рассуждений (2.10) и (2.12), с учетом того, что все величины относятся к одному и тому же моменту времени, можно записать

$$\dot{d\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot \dot{H} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + d\mathbf{r} \cdot \dot{\omega} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + d\mathbf{r} \cdot E \cdot \dot{\varphi}$$

Это выражение показывает, что происходит мгновенно с элементом $d\mathbf{r}$

$$\dot{d\mathbf{r}} = d\mathbf{r} \cdot \dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} \times d\mathbf{r}$$

Скорость изменения элемента $d\mathbf{r}$ складывается из двух слагаемых. Первое связано с действием тензора скоростей деформаций, а другое связано с вращением, с угловой скоростью $\dot{\varphi}$.
Как уже говорилось ранее, теория деформаций является линеаризацией теории больших деформаций около отсчётной конфигурации. А то, что мы делали сейчас, есть не что иное как линеаризация всех возможных соотношений около актуальной конфигурации. Мы получили скоростные характеристики

$$\dot{H} = \nabla \otimes \mathbf{v}$$

$$\dot{\varepsilon} = \nabla \overset{s}{\otimes} \mathbf{v}$$

$$\dot{\omega} = \nabla \overset{a}{\otimes} \mathbf{v}$$

Если обе части любого из этих выражений мы умножим на δt, то мы получим уже не скорости, а приращения. Можно ввести тензор $\delta t \cdot \dot{H} = \delta H = \nabla \otimes \delta\mathbf{w}$ — тензор малых дисторсий, где $\delta\mathbf{w}$ — вектор малого смещения. И тем же образом тензор малых деформаций относительной актуальной конфигурации:

$$\delta\varepsilon = \nabla \overset{s}{\otimes} \delta\mathbf{w},$$

тензор малых поворотов

$$\delta\omega = \nabla \overset{a}{\otimes} \delta\mathbf{w}.$$

Очевидно, что все эти величины, называемые инкрементальными, при $\mathbf{v} = 0$ обратятся в нуль. Можно записать

$$\delta\left(d\mathbf{r}\right) = d\mathbf{r} \cdot \delta\varepsilon + \dot{\varphi} \times d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \delta\varepsilon + d\mathbf{r} \cdot \delta\omega$$

Пусть $\mathbf{e}_i$ — ОНБ, тогда для симметричного тензора существует спектральное разложение по базису: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1\, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\varepsilon}_2\, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \dot{\varepsilon}_3\, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$, где $\dot{\varepsilon}_i$ — собственные числа тензора скоростей деформаций, называемые главными скоростями деформации, $\dot{\mathbf{e}}_i$ — главные оси деформаций. Так же можно записать и для $\delta\varepsilon$:

$$\delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \delta\varepsilon_i \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_i}$$

Найдем для начала скорость изменения длины элемента $d\mathbf{r}$. Для этого продифференцируем по времени квадрат его модуля $|d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} 2|d\mathbf{r}||d\mathbf{r}|^{\cdot} &= d\dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \\ &= d\mathbf{r} \cdot \dot{H} \cdot d\mathbf{r} + d\mathbf{r} \cdot \dot{H}^T \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \left(\dot{H} + \dot{H}^T\right) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= d\mathbf{r} \cdot 2\dot{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Отсюда относительная скорость удлинения элемента $d\mathbf{r}$, которая не зависит от длины, а только от направляющего вектора

$$\frac{|d\mathbf{r}|^{\cdot}}{|d\mathbf{r}|} = \frac{d\mathbf{r} \cdot 2\dot{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|^2} = \mathbf{e} \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} \Leftrightarrow \frac{\delta|d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} = \mathbf{e} \cdot \delta\varepsilon \cdot \mathbf{e}$$

$$\frac{|d\mathbf{r}|^{\cdot}}{|d\mathbf{r}|} = \mathbf{e_i} \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \mathbf{e_i} = \dot{\varepsilon}_i$$

Главные оси растяжения это ни что иное как относительные скорости удлинения для переменных, направленных по главным осям. Они испытывают растяжение с такими относительными скоростями $\dot{\varepsilon_1}$, $\dot{\varepsilon_2}$, $\dot{\varepsilon_3}$

Лекция 3

$\gamma(t) = 0,\ \gamma(t+\tau) \neq 0$.Найдем скорость изменения объема:

$$\frac{(dV)^{\cdot}}{dV} = \frac{dV_{\varkappa}(\det F)^{\cdot}}{dV_{\varkappa}(\det F)} =$$
$$= \nabla \cdot \mathbf{v} = I : \dot{H} = I : (\dot{\varepsilon} + \dot{\omega}) =$$
$$= I : \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3$$

А теперь скорость сдвига. С одной стороны

$$d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = |d\dot{\mathbf{r}}_1||d\mathbf{r}_2| \sin\gamma +$$
$$+ |d\mathbf{r}_1||d\dot{\mathbf{r}}_2| \sin\gamma + |d\mathbf{r}_1||d\mathbf{r}_2|\dot{\gamma}\cos\gamma = |d\mathbf{r}_1||d\mathbf{r}_2|\dot{\gamma}$$

С другой стороны:

$$d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = d\mathbf{r}_1 \cdot \dot{H} \cdot d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \dot{H} =$$
$$= d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \left(\dot{H} + \dot{H}^T\right) \cdot d\mathbf{r}_2$$

Таким образом:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \left(\dot{H} + \dot{H}^T\right) \cdot d\mathbf{r}_2}{|d\mathbf{r}_1||d\mathbf{r}_2|}$$

3.1 Уравнения совместности

Умножим выражение (2.13) векторно слева на вектор набла:

$$\nabla \times \dot{H}(\mathbf{r}) \equiv 0$$

Только такие поля могут быть полями скоростей дисторсии. Основной задачей этой лекции является вывод уравнений совместности и доказательство теоремы Чизара. Но сначала придется доказать некоторые равенства и утверждения.

Для достижении нашей цели в первую очередь на надо вспомнить утверждение прошлого семестра, потому что им мы будем активно пользоваться в этой лекции:

$$\nabla \otimes \left(L\left(\mathbf{r}\right)^{(i_1 i_2 \dots i_k)} \right) = \nabla \otimes L^{(1(i_1+1)(i_2+1)\dots(i_k+1))} \tag{3.14}$$

Тогда применим формулу (3.14) к следующим выражениям:

$$\nabla \otimes \left(\nabla \otimes \mathbf{v}^T\right) = \nabla \otimes \left(\nabla \otimes \mathbf{v}^{(21)}\right) = \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)}$$
$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)}\right)$$
$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(132)} = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}$$

Последнее выражение является следствием симметрии тензора скоростей деформаций. Тогда разных изомеров будет всего 3: $\nabla\otimes\dot{\varepsilon}^{(132)} = \nabla\otimes\dot{\varepsilon}$, $\nabla\otimes\dot{\varepsilon}^{(213)} = \nabla\otimes\dot{\varepsilon}^{(312)}$, $\nabla\otimes\dot{\varepsilon}^{(321)} = \nabla\otimes\dot{\varepsilon}^{(231)}$. Аналогично для‘$\mathbf{v}$: $\nabla\otimes\mathbf{v}^{(213)} = \nabla\otimes\mathbf{v}$, $\nabla\otimes\mathbf{v}^{(321)} = \nabla\otimes\mathbf{v}^{(312)}$, $\nabla\otimes\mathbf{v}^{(132)} = \nabla\otimes\mathbf{v}^{(231)}$. Запишем выражения для разных изомеров градиента тензора скоростей деформации:

$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(132)}\right)$$
$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(312)}\right)$$
$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(231)} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(231)} + \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v}^{(321)}\right)$$

Сложим первую и вторую строчки и вычтем первую:

$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon} + \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} - \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(231)} = \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} \tag{3.15}$$

Получается, что если тензор скоростей трансформации тождественный ноль, то его градиент и подавно, но тогда $\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) = const = \dot{\omega}(\mathbf{r}) = \dot{\omega}_0$. Тогда получаем формулу Эйлера, которая пользуется большой популярностью в аналитической механики:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \dot{\omega}_0 = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot E \cdot \dot{\varphi}_0 = \mathbf{v}_0 + \dot{\varphi}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Возьмем еще один градиент от выражения (3.15) и умножим слева и справа двойным скалярным произведением на альтернирующий тензор:

$$\begin{aligned} E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon} : E + E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E - \\ - E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1342)} : E = E : \nabla \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{v} : E \end{aligned}$$

Первое слагаемое и правая часть равенства равно нулю как произведение антисимметричных и симметричного тензора, по свойствам альтернирующего тензора $E = -E^{(213)}$, тогда:

$$E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1342)} : E = E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E^{(213)}.$$

В итоге получим уравнение совместности:

$$E : \nabla \otimes \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(1324)} : E = 0 \tag{3.16}$$

В другой форме уравнение запишется следующим образом:

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\varepsilon})^T = 0$$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему Чизара.

Теорема 3.1.1 (Чизара). *Необходимым и достаточным условием существования поля скоростей является выражение* (3.16).

$\triangleright$

Попытаемся построить еще одно такое антисимметричное поле, чтобы в сумме их градиент удовлетворял уравнению ротор суммы равен нулю из чего будет следовать по теореме об потенциальности нужное утверждение:

$$E : \nabla \otimes \left(\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{(213)} : E\right)$$
$$\nabla \times \left(\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} : E\right) = 0$$

$$\nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} : E = \nabla \otimes \dot{\varphi}$$

$$\nabla \otimes \dot{\omega} = \nabla \otimes \dot{\varphi} \cdot E = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} : \mathbb{E} \cdot E = \\ = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} : \left(\mathbf{1} - \mathbf{1}^{\mathbf{T}}\right) = \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} - \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{231} \quad (3.17)$$

Умножим градиент тензора скоростей дисторсии слева дважды скалярно на альтернирующий тензор:

$$E : (\nabla \otimes \dot{\varepsilon} + \nabla \otimes \dot{\omega}) \overset{(3.17)}{=} E : \left(\nabla \otimes \dot{\varepsilon} + \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{213} - \nabla \otimes \dot{\varepsilon}^{231}\right) = 0$$

Первое и второе слагаемое равны, но противоположны по знаку, а третье равно нулю, как произведение антисимметричного тензора на симметричный. Следовательно, $\exists\, \mathbf{v}\,(\mathbf{r})$:

$$\dot{\varepsilon} + \dot{\omega} = \nabla \otimes \mathbf{v}\,(\mathbf{r})$$

1