Problem 3:

Na predavanjima je opisana de Casteljau metoda za efikasno računanje Bezierovog splajna. Pokažite da je metoda ispravna, tj. da za proizvoljni $u \in [0,1]$ i

$$\vartheta_i = (1-u)\,p_i + u\,p_{i+1}, \quad i = 0,1,2$$
$$s_i = (1-u)\,\vartheta_i + u\,\vartheta_{i+1}, \quad i = 0,1$$
$$t_0 = (1-u)\,s_0 + u\,s_1,$$

vrijedi: $f(u) = t_0$.

Dokaz:

$f(u) = b_0(u)\,\vartheta_0 + b_1(u)\,\vartheta_1 + b_2(u)\,\vartheta_2 + b_3(u)\,\vartheta_3$

$b_0(u) = (1-u)^3$, $b_1(u) = 3u(1-u)^2$, $b_2(u) = 3u^2(1-u)$, $b_3(u) = u^3$ [Bernstein polinomi za Bezierov splajn trećeg stupnja, dobiveni iz $b_k(u) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$]

Uvrštavanjem definiranih Bernsteinovih polinoma $\Rightarrow f(u) = (1-u)^3\,\vartheta_0 + 3u(1-u)^2\,\vartheta_1 + 3u^2(1-u)\,\vartheta_2 + u^3\,\vartheta_3$

$t_0 = (1-u)\,s_0 + u\,s_1 = (1-u)\cdot\left[(1-u)\big[(1-u)\,\vartheta_0 + u\,\vartheta_1\big] + u\big((1-u)\,\vartheta_1 + u\,\vartheta_2\big)\right]$

$\qquad = (1-u)\left[(1-u)\big[(1-u)\,\vartheta_0 + u\,\vartheta_1\big] + u\big((1-u)\,\vartheta_1 + u\,\vartheta_2\big)\right]$

$\qquad + u\cdot\left[(1-u)\big[(1-u)\,\vartheta_1 + u\,\vartheta_2\big] + u\big((1-u)\,\vartheta_2 + u\,\vartheta_3\big)\right]$

$\qquad = (1-u)^3\,\vartheta_0 + u(1-u)^2\,\vartheta_1 + u(1-u)^2\,\vartheta_1 + u^2(1-u)\,\vartheta_2 +$

$\qquad\quad u(1-u)^2\,\vartheta_1 + u^2(1-u)\,\vartheta_2 + u^2(1-u)\,\vartheta_2 + u^3\,\vartheta_3$

$\qquad = (1-u)^3\,\vartheta_0 + 3u(1-u)^2\,\vartheta_1 + 3u^2(1-u)\,\vartheta_2 + u^3\,\vartheta_3 = f(u)$