3D Računalna grafika
Zadaća 1
Osnove geometrijskog modeliranja

Zadatak 3

a) SJECIŠTE ZRAKE I SFERE:

- Sfera sa središtem $c = (x_c, y_c, z_c)$ i radijusom R ima jednadžbu: $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 - R^2 = 0$ tj. u vektorskom obliku: $(p-c) \cdot (p-c) - R^2 = 0$

- Ako ubacimo točke na zraci $p(t) = e + td$ u tu jednadžbu, dobivamo jednadžbu u ovisnosti o t koju zadovoljavaju svi t-ovi koji daju točke na sferi: $(e+td-c) \cdot (e+td-c) - R^2 = 0$

- Sređivanjem dobivamo: $(d \cdot d)t^2 + 2d \cdot (e-c)t + (e-c) \cdot (e-c) - R^2 = 0$

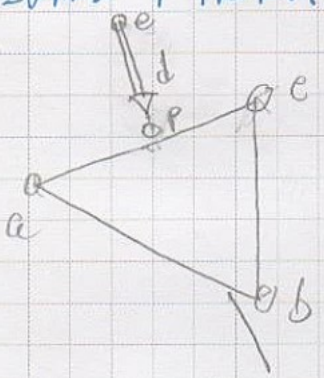
- Primjećujemo kako je ovo kvadratna jednadžba oblika $At^2 + Bt + C = 0$ pa t dobivamo rješavanjem ove jednadžbe

- Ubacivanjem izraza za sferu i kraćenjem, t dobivamo kao:

$$t_{1,2} = \frac{-d \cdot (e-c) \pm \sqrt{(d \cdot (e-c))^2 - (d \cdot d)((e-c) \cdot (e-c) - R^2)}}{d \cdot d}$$

- Ako je diskriminanta $(B^2 - 4AC) < 0$, to znači da nemamo realnih rješenja za t što znači da se zraka i sfera ne sijeku. Ako je $D > 0$, imamo 2 rješenja za t, tj. dobivamo gdje zraka ulazi u sferu i gdje izlazi iz sfere. Ako je $D = 0$, imamo samo jedno dvostruko rješenje, tj. t za koji zraka dodiruje sferu u točno jednoj točki

SJECIŠTE ZRAKE I TROKUTA:



- Sjecište trokuta Δabc i zrake pogleda $e + td$ može se formulirati kao rješavanje sustava jednadžbi uz pomoć baricentričnih koordinata $\alpha + \beta + \gamma = 1$:

$$e + td = \alpha a + \beta b + \gamma c = a + \beta(b-a) + \gamma(c-a) \quad (1)$$

- Sjecište je unutar trokuta $\Leftrightarrow \beta > 0, \gamma > 0, \beta + \gamma < 1$, inače zraka sječe ravninu izvan trokuta

- Ako nema rješenja, zraka je paralelna ravnini koja sadrži trokut

- Kako bi odredili t, β i γ u jednadžbi (1), raspisujemo ju iz vektorskog oblika u tri jednadžbe za tri koordinate:

$$x_e + t x_d = x_a + \beta(x_b - x_a) + \gamma(x_c - x_a),$$
$$y_e + t y_d = y_a + \beta(y_b - y_a) + \gamma(y_c - y_a),$$
$$z_e + t z_d = z_a + \beta(z_b - z_a) + \gamma(z_c - z_a)$$

- Ovo možemo zapisati kao linearni sustav:

$$\begin{bmatrix} x_a - x_b & x_a - x_c & x_d \\ y_a - y_b & y_a - y_c & y_d \\ z_a - z_b & z_a - z_c & z_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_e \\ y_a - y_e \\ z_a - z_e \end{bmatrix}$$

- To možemo zapisati i kao 3×3 sustav $AX = b$:

$$A = \begin{bmatrix} x_a - x_b & x_a - x_c & x_d \\ y_a - y_b & y_a - y_c & y_d \\ z_a - z_b & z_a - z_c & z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ t \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} x_a - x_e \\ y_a - y_e \\ z_a - z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

- Cramerovim pravilom riješimo sustav:

$$\beta = \frac{\det[b\, A_2 A_3]}{\det A}, \quad \gamma = \frac{\det[A_1 b A_3]}{\det A}, \quad t = \frac{\det[A_1 A_2 b]}{\det A}$$

tj. kada zapišemo:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} x_a - x_e & x_a - x_c & x_d \\ y_a - y_e & y_a - y_c & y_d \\ z_a - z_e & z_a - z_c & z_d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} j & d & g \\ k & e & h \\ l & f & i \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} x_a - x_b & x_a - x_e & x_d \\ y_a - y_b & y_a - y_e & y_d \\ z_a - z_b & z_a - z_e & z_d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & i & g \\ b & j & h \\ c & k & l \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} x_a - x_b & x_a - x_c & x_a - x_e \\ y_a - y_b & y_a - y_c & y_a - y_e \\ z_a - z_b & z_a - z_c & z_a - z_e \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & d & j \\ b & e & k \\ c & f & l \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) + b(gf - di) + c(dh - eg)$$

$$\begin{vmatrix} j & d & g \\ k & e & h \\ l & f & i \end{vmatrix} = j \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

$$= j(ei - hf) + k(gf - di) + l(dh - eg)$$

$$\begin{vmatrix} a & j & g \\ b & k & h \\ c & l & i \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & k \\ c & l \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & j \\ c & l \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & j \\ b & k \end{vmatrix}$$

$$= i(ak - jb) + h(jc - al) + g(bl - kc)$$

$$\begin{vmatrix} a & d & j \\ b & e & k \\ c & f & l \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & k \\ c & l \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & j \\ c & l \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & j \\ b & k \end{vmatrix}$$

$$= -f(ak - jb) + e(al - jc) - d(bl - kc)$$

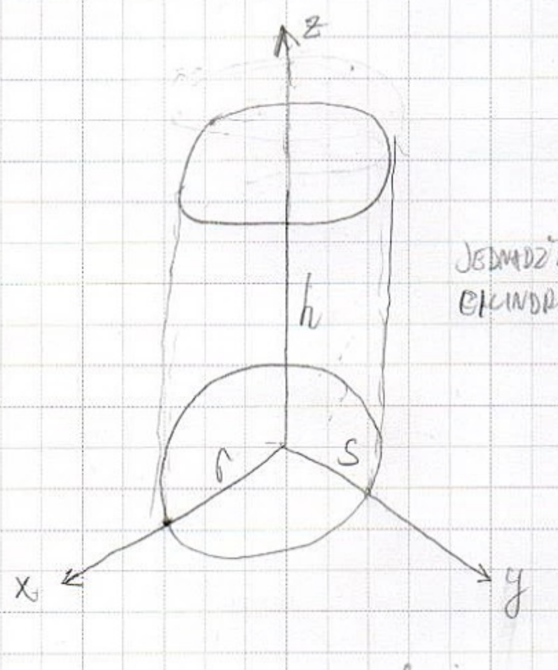
$$= -\left(f(ak - jb) + e(jc - al) + d(bl - kc)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{j(ei - hf) + k(gf - di) + l(dh - eg)}{a(ei - hf) + b(gf - di) + c(dh - eg)}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{i(ak - jb) + h(jc - al) + g(bl - kc)}{a(ei - hf) + b(gf - di) + c(dh - eg)}$$

$$t = -\frac{f(ak - jb) + e(jc - al) + d(bl - kc)}{a(ei - hf) + b(gf - di) + c(dh - eg)}$$

b)



$P = (x, y, z) \rightarrow$ TOČKA CILINDRA

JEDNADŽBA CILINDRA $\boxed{\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{s^2} = 1, \quad 0 \leq z \leq h}$

$e = (e_1, e_2, e_3), \quad d = (d_1, d_2, d_3)$

$p(t) = e + \lambda d$

- Pošto promatramo projekciju zrake na xy ravninu, z komponentu zrake ćemo zanemariti

- Parametriziramo zraku na xy-ravnini:

$x(\lambda) = e_1 + \lambda d_1$

$y(\lambda) = e_2 + \lambda d_2$

- Provjeravamo siječe li projicirana zraka eliptičnu bazu cilindra:

$$\frac{x(\lambda)^2}{r^2} + \frac{y(\lambda)^2}{s^2} \le 1$$

- Ako je gornji uvjet zadovoljen za bilo koju vrijednost λ, to znači da projicirana zraka na xy-ravninu siječe neograničenu elipsu

- Zatim računamo odgovarajuće z komponente sjecišta:

$z(\lambda) = e_3 + \lambda d_3$

- Ako je $0 \le z(\lambda) \le h$, zraka $e + \lambda d$ siječe eliptični cilindar.

- Ukoliko neki od ovih uvjeta nije ispunjen, zraka ne siječe cilindar.