



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## SEMINAR

OPTIMALNA SINTEZA MEHANIZMA TLAČNOG CILINDRA

Mentor:

prof. dr. sc. Pero Perić, dip. ing.

Student:

Marko Markić

ZAGREB, 2022.

---

# SEMINARSKI ZADATAK

Kolegij:

Optimiranje

Student:

Marko Markić

---

**Zadatak:**

Staviti opis zadatka

---

Seminar zadao:prof. dr. sc. Pero Perić

---

# Sadržaj

Sadržaj	i
Popis slika	ii
Popis tablica	iii
Popis simbola	iv
Popis kratica	v
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Izvod matematičkog modela</b>	<b>2</b>
2.1 Izvod funkcije cilja . . . . .	2
2.2 Kinematika mehanizma . . . . .	4
<b>3 Optimiranje mehanizma</b>	<b>6</b>
<b>4 Rezultati</b>	<b>7</b>
4.1 Minimizacija najvećeg odstupanja . . . . .	7
4.2 Suma kvadrata pogreške . . . . .	8
<b>Literatura</b>	<b>12</b>

# Popis slika

2.1	Skica mehanizma za optimiranje . . . . .	2
4.1	Dijagrama odstupanja momenta od traženog (prvi set parametra) . . . . .	7
4.2	Prikaz funkcije cilja (prvi set parametra) . . . . .	8
4.3	Dijagrama odstupanja momenta od traženog (drugi set parametra) . . . . .	9
4.4	Prikaz funkcije cilja (drugi set parametra) . . . . .	9
4.5	Dijagrama odstupanja momenta od traženog (treći set parametra) . . . . .	10
4.6	Prikaz funkcije cilja (treći set parametra) . . . . .	10
4.7	Dijagrama odstupanja momenta od traženog (četvrti set parametra) . . . . .	11
4.8	Prikaz funkcije cilja (četvrti set parametra) . . . . .	11

# Popis tablica

1.1	Primjer tablice . . . . .	<a href="#">1</a>
-----	---------------------------	-------------------

# Popis simbola

$A$	površina	$\text{m}/\text{m}^2$
$F$	sila	N
$h$	pozicija klipa	m
$M$	moment	$\text{N} \cdot \text{m}$
$T$	temperatura	K

## Konstante

$g$	gravitacijsko ubrzanje	$9,81 \text{ m}/\text{s}^2$
-----	------------------------	-----------------------------

## Grčka slova

$\varphi$	kut zakreta	rad
-----------	-------------	-----

# Popis kratica

**GA** genetski algoritmi (eng. *Genetic Algorithms*).

# 1 Uvod

Jedan od najznačajnijih problema kod konstruiranja mehanizama je optimalna sinteza mehanizma. Tijekom godina razvijeno je nekoliko metoda za sintezu mehanizama [1, 2] ali svaka od njih primjenjiva je samo na određenim tipovima mehanizma. Zbog toga odabir odgovarajuće metode optimiranja mehanizma ovisi o samom mehanizmu koji se želi optimirati tj. aplikaciji mehanizma, potrebnoj numeričkoj točnosti te vremenu koje je potrebno da se postigne optimalno rješenje.

Primjena mehanizma utječe na optimizacijski problem, tj. ograničuje ga. U industrijskim aplikacijama ta ograničenja su dužine elemenata, prostor u koji mehanizam mora stati...

Možemo razlikovati dvije vrsta optimalne sinteze mehanizma: dimenzionalna i strukturalna sinteza. Dimenzionalna sinteza svodi se na određivanje dimenzija linkova mehanizma koji će omogućiti slijeđenje željene trajektorije ili funkcije, dok su mehanizam i veze između linkova poznati. Strukturalna sinteza teži je problem jer nam nije poznat mehanizam ni veze između linkova te stoga moramo optimirati i topologiju i dimenzije mehanizma.

U ovom radu koristiti će se genetski algoritmi (eng. *Genetic Algorithms*) ili GA [3, 4] za optimiranje mehanizma. Referenca na primjer tablice 1.1.

Tablica 1.1: Primjer tablice  
stupac 1   stupac 2   stupac 3

nesto	$a + b$	nesto
$a + b$	nesto	$a + b$



## 2 Izvod matematičkog modela

Za mehanizam sa slike 2.1 potrebno je izvršiti optimalnu sintezu dimenzija mehanizma tako da bi moment na ručici  $A_0A$  bio konstantan. U cilindru se nalazi idealni plin i cijeli proces se odvija pri konstantnoj temperaturi. Zadane su slijedeće vrijednosti:

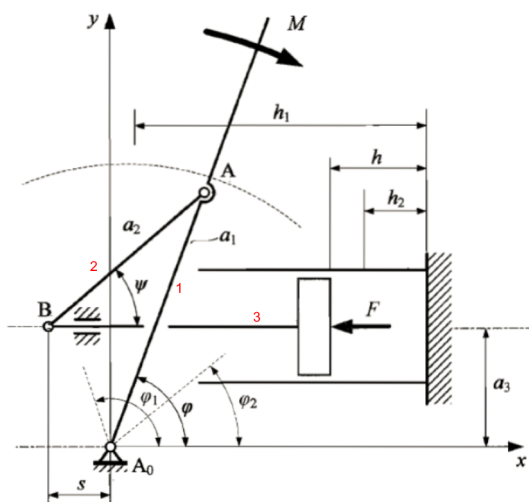
$$h_1 = 250 \text{ mm}$$

$$h_2 = 75 \text{ mm}$$

$$F_1 = 18 \text{ N}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$A = konst$$



Slika 2.1: Skica mehanizma za optimiranje

### 2.1 Izvod funkcije cilja

Za konstantu temperaturu i eksponent politrope  $n = 1$  dobivamo ravnotežnu promjenu stanja kod koje se temperatura radnog medija ne mijenja tj.  $T_1 = T_2 = T$  i  $\Delta T = 0$ .

Jednadžbe stanja:

$$p_1 V_1 = mRT_1 \quad (2.1)$$

i

$$p_2 V_2 = mRT_2 \quad (2.2)$$

povezane uvjetom  $T_1 = T_2 = T$  daju sljedeću jednadžbu stanja:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = pV \quad (2.3)$$

Volumen u cilindru računa se prema formuli 2.4 dok se sila na klip računa po izrazu 2.5.

$$V = Ah \quad (2.4)$$

$$F = pA \quad (2.5)$$

Uvrstimo li izraze 2.4 i 2.5 u jednadžbu 2.3 dobije se slijedeća jednadžba:

$$\frac{F_1}{A} h_1 A = \frac{F_2}{A} h_2 A = \frac{F}{A} h A \quad (2.6)$$

$$F_1 h_1 = F_2 h_2 = Fh \quad (2.7)$$

Iz zadanih vrijednosti i izraza 2.7 možemo izračunati silu  $F_2$  (2.9) te općeniti izraz za silu u ovisnosti o položaju klipa (2.11).

$$F_2 = F_1 \frac{h_1}{h_2} = 18 \frac{250}{75} \quad (2.8)$$

$$F_2 = 60 \text{ N} \quad (2.9)$$

$$F = F_1 \frac{h_1}{h} = 18 \frac{250}{h} \quad (2.10)$$

$$F = \frac{4500}{h} \text{ N/mm} \quad (2.11)$$

Nakon što smo dobili općeniti izraz za silu u ovisnosti o položaju možemo izraziti moment o ovisnosti o sili i položaju klipa preko elementarnih radova:

$$Md\varphi + Fdh = 0 \quad (2.12)$$

$$M = -F \frac{dh}{d\varphi} = -\frac{4500}{h} \frac{dh}{d\varphi} \quad (2.13)$$

Redukcijom sile na prvi član mehanizma (slika 2.1) dobije se reducirani moment

$$M_{red} = F \frac{dh}{d\varphi} = \frac{4500}{h} \frac{dh}{d\varphi} \quad (2.14)$$

tj. treba biti  $M + M_{red} = 0$ .

Zbog toga traži se minimalno odstupanje funkcije  $M(\varphi) = \frac{4500}{h} \frac{dh}{d\varphi}$  pri gibanju od  $\varphi_1$  do  $\varphi_2$ . Pomoću zadanog područja gibanja  $\delta\varphi$  možemo izračunati konstantni moment:

$$d\varphi = \frac{4500}{M(\varphi)} \frac{dh}{h} \quad (2.15)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4500}{M(\varphi)} \ln \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \quad (2.16)$$

$$M_{konst} = \frac{3 \cdot 4500}{\pi} \ln \left( \frac{250}{75} \right) = 5173,69 \text{ Nmm} \quad (2.17)$$

U ovom slučaju nam je zadatak minimizirati funkciju cilja  $f(\varphi) = M(\varphi) - M_{konst}$ .

## 2.2 Kinematika mehanizma

Kinematička shema mehanizma s ishodištem koordinatnog sustava u točki  $A_0$  prikazana je na slici 2.1. Kod kinematičke analize mehanizma važno je unaprijed definirati koordinatni sustav i u skladu s njim paziti na predznake pomaka, sila itd.

Na osnovi kinematičkog modela sastavlja se matematički model za računanje kinematičkih veličina potrebnih za optimizaciju. To su položaj klipa  $s$  odnosno  $h$ , kut  $\varphi$  i derivacija  $ds/dh = dh/d\varphi$ .

Računanje položaja klipa  $s$  pomoću prijenosnih funkcija mehanizma:

$$a_1 \sin(\varphi) + a_2 \sin(180 + \psi) - a_3 = 0 \quad (2.18)$$

$$\sin(\psi) = \frac{a_1}{a_2} \sin(\varphi) - \frac{a_3}{a_2} \quad (2.19)$$

$$\sin(\psi) = k_1 \sin(\varphi) - k_2 \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

gdje su:

- $a_1 = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
- $a_2 = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}$
- $\varphi = \text{atan} \left( \frac{A_y}{A_x} \right)$

- $k_1 = \frac{a_1}{a_2}$
- $k_2 = \frac{a_3}{a_2}$

$$a_1 \cos(\varphi) + a_2 \cos(180^\circ + \psi) + s \cos(0) = 0 \quad (2.22)$$

$$s = a_2 \cos(\psi) - a_1 \cos(\varphi) \quad (2.23)$$

$$s = -a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sqrt{1 - (k_1 \sin(\varphi) - k_2)^2} \quad (2.24)$$

Iz jednačbe [2.24](#) moramo izračunati derivaciju  $ds/d\varphi$ :

$$\frac{ds}{d\varphi} = a_1 \sin(\varphi) - \frac{a_2 k_1 \cos(\varphi) (k_1 \sin(\varphi) - k_2)^2}{\sqrt{1 - (k_1 \sin(\varphi) - k_2)^2}} \quad (2.25)$$

### 3 Optimiranje mehanizma

Nakon što smo dobili matematički model kinematike mehanizma moramo odrediti projektne varijable. U ovom slučaju će projektne varijable biti koordinate točaka  $A$  i  $B$  mehanizma:  $x_1 = A_x$ ,  $x_2 = A_y$ ,  $x_3 = B_x$  i  $x_4 = B_y = a_3$ .

Nakon što smo odredili projektne varijable moramo odabrati slučajni početni položaj mehanizma za koji ćemo izračunati dužine linkova mehanizma, početni kut mehanizma te za odabrano područje gibanja i odabrani broj koraka u području gibanja računa se vrijednost funkcije cilja uz zadana ograničenja mehanizma.

Ograničenja mehanizma za ovaj zadatak su slijedeća:

$$\begin{array}{ll} g_1 = x_1 - 25 \geq 0 & g_2 = 45 - x_1 \geq 0 \\ g_3 = x_3 + 15 \geq 0 & g_4 = 5 - x_3 \geq 0 \\ g_5 = x_2 - 5 \geq 0 & g_6 = 25 - x_2 \geq 0 \\ g_7 = x_4 - 5 \geq 0 & g_8 = 25 - x_4 \geq 0 \end{array}$$

U ovom radu usporediti će se dvije funkcije cilja:

1.  $f(\varphi) = \max(|M_{konst} - M(\varphi)|)$
2.  $f(\varphi) = \sum_{i=1}^n (M_{konst} - M_i(\varphi))$

Da bi mehanizam mogli optimirati pomoću genetskog algoritma moramo problem minimizacije svesti za na problem maksimizacije te tada optimizacijski problem za genetski algoritam glasi:

$$\max \rightarrow \frac{1}{1 + f(\varphi)} \quad (3.1)$$

# 4 Rezultati

## 4.1 Minimizacija najvećeg odstupanja

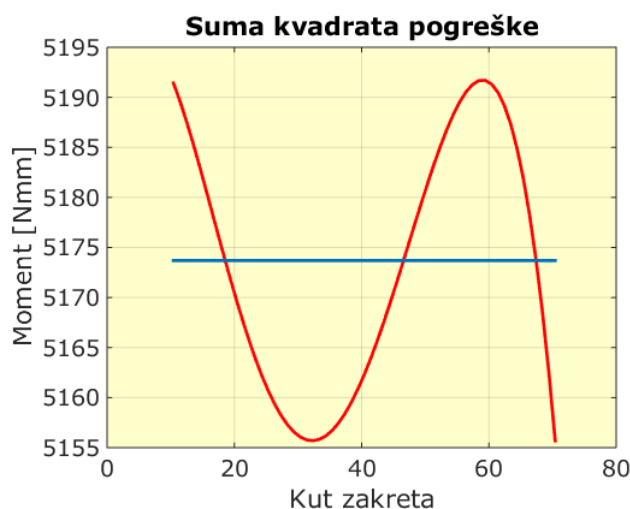
Za genetski algoritma sa slijedećim parametrima:

- vjerojatnost križanja 0,7
- vjerojatnost mutacije 0,02
- veličina populacije 100
- broj iteracija 50000
- funkcija cilja  $f(\varphi) = \max(|M_{konst} - M(\varphi)|)$

dobiveni su slijedeći rezultati:

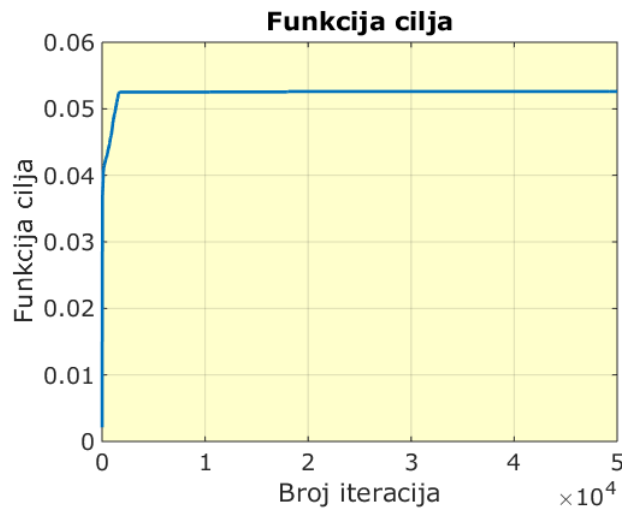
- početne koordinate točke  $A(383,46 \quad 70,47)$  i točke  $B(-138,45 \quad 92,32)$  u mm
- maksimalni moment od 5191,7 Nmm te minimalni moment od 5155,7 Nmm
- vrijednost funkcije cilja 0,0526

Prikaz dijagrama momenta može se vidjeti na slici 4.1, a funkcije cilja na slici 4.2. Najveća apsolutna razlika u odstupanju od željene vrijednosti momenta iznosi približno 18 Nmm što je vrlo zadovoljavajuće za ovaj mehanizam.



Slika 4.1: Dijagrama odstupanja momenta od traženog (prvi set parametra)

Drugi set parametara algoritma dan je sa slijedećim parametrima:



Slika 4.2: Prikaz funkcije cilja (prvi set parametara)

- vjerojatnost križanja 0,7
- vjerojatnost mutacije 0,01
- veličina populacije 100
- broj iteracija 10000
- funkcija cilja  $f(\varphi) = \max(|M_{konst} - M(\varphi)|)$

te su dobiveni su slijedeći rezultati:

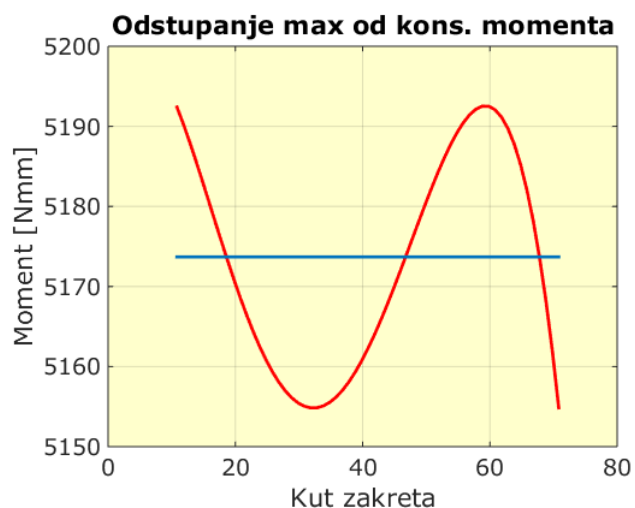
- početne koordinate točke  $A(380, 28 \quad 72, 63)$  i točke  $B(-137, 51 \quad 91, 57)$  u mm
- maksimalni moment od 5192,5 Nmm te minimalni moment od 5154,8 Nmm
- vrijednost funkcije cilja 0,0606

Prikaz rezultata za drugi set parametara može se vidjeti na slikama 4.3 i 4.4. Najveća apsolutna razlika u odstupanju od željene vrijednosti momenta iznosi približno 18,8 Nmm što je vrlo zadovoljavajuće za ovaj mehanizam.

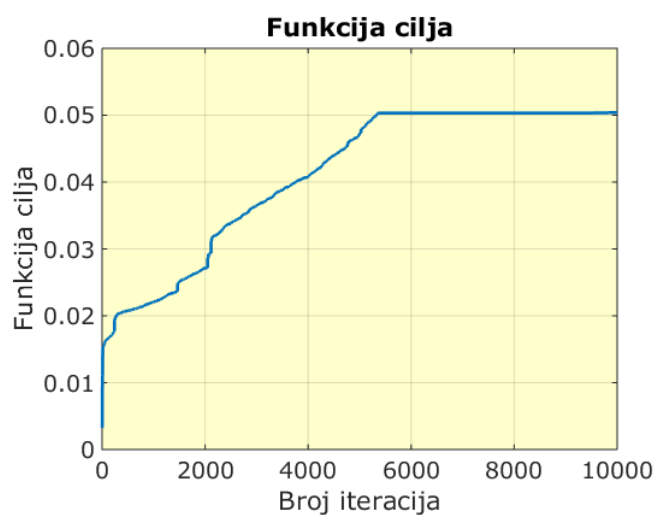
## 4.2 Suma kvadrata pogreške

Treći set parametara algoritma dan je sa slijedećim parametrima:

- vjerojatnost križanja 0,7
- vjerojatnost mutacije 0,02



Slika 4.3: Dijagrama odstupanja momenta od traženog (drugi set parametra)



Slika 4.4: Prikaz funkcije cilja (drugi set parametra)

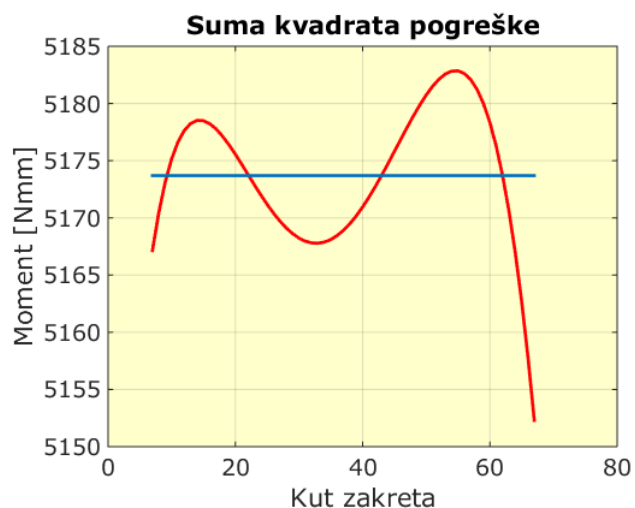
- veličina populacije 100
- broj iteracija 50000
- funkcija cilja  $f(\varphi) = \sum_{i=1}^n (M_{konst} - M_i(\varphi))$

te su dobiveni su slijedeći rezultati:

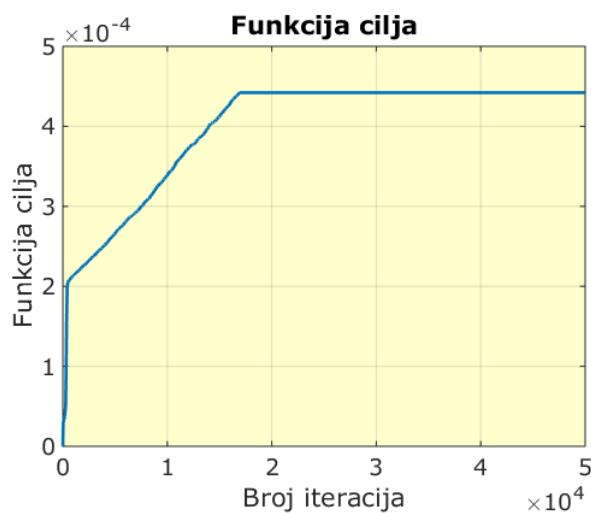
- početne koordinate točke  $A(409, 21 \quad 50)$  i točke  $B(-148, 88 \quad 99, 26)$  u mm
- maksimalni moment od 5182,9 Nmm te minimalni moment od 5152,3 Nmm
- najveća apsolutna razlika u odstupanju od željene vrijednosti iznosi 21,39 Nmm

Četvrti set parametara algoritma dan je sa slijedećim parametrima:





Slika 4.5: Dijagrama odstupanja momenta od traženog (treći set parametra)

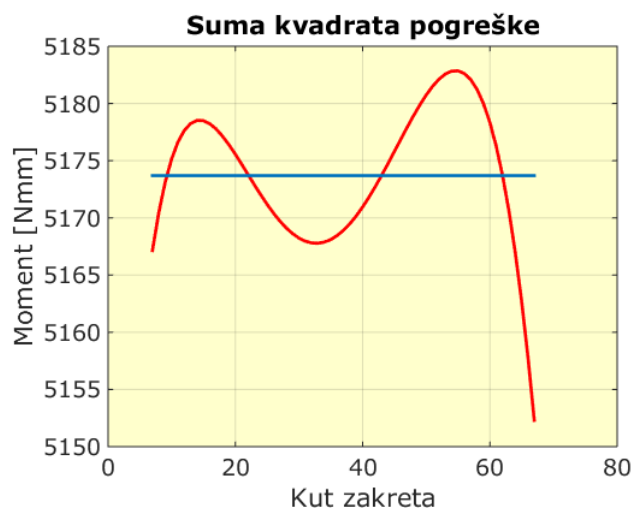


Slika 4.6: Prikaz funkcije cilja (treći set parametra)

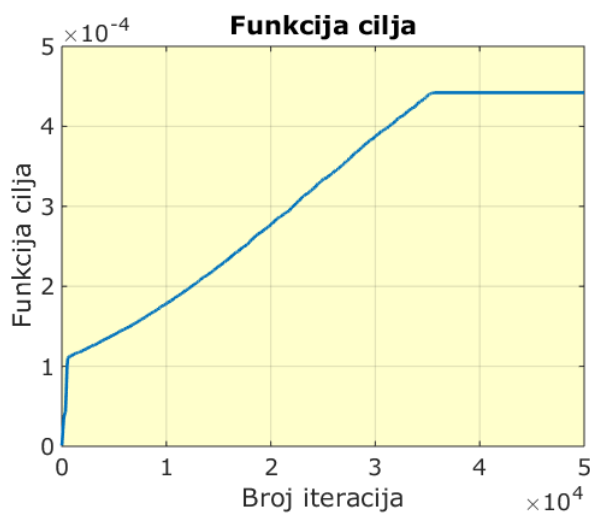
- vjerojatnost križanja 0,7
- vjerojatnost mutacije 0,01
- veličina populacije 100
- broj iteracija 50000
- funkcija cilja  $f(\varphi) = \sum_{i=1}^n (M_{konst} - M_i(\varphi))$

te su dobiveni su slijedeći rezultati:

- početne koordinate točke  $A(409, 21 \quad 50)$  i točke  $B(-148, 88 \quad 99, 26)$  u mm
- maksimalni moment od 5182,9 Nmm te minimalni moment od 5152,3 Nmm



Slika 4.7: Dijagrama odstupanja momenta od traženog (četvrti set parametra)



Slika 4.8: Prikaz funkcije cilja (četvrti set parametra)

- najveća apsolutna razlika u odstupanju od željene vrijednosti iznosi 21,38 Nmm

Sa slika 4.5 i 4.7 možemo vidjeti da momentni dijagrama za sumu kvadrata izgledaju isto i imaju iste vrijednosti. Isto tako možemo vidjeti da za vjerojatnost križanja od 0,01 algoritmu treba puno više iteracija za konvergenciju ka točnom rješenju.

# Literatura

- [1] C. H. Chiang. *Kinematics and design of planar mechanisms*. Krieger Pub, Malabar, FL, 2000.
- [2] John M. Hansen. Synthesis of mechanisms. In *Advanced Design of Mechanical Systems: From Analysis to Optimization*, pages 39–66. Springer Vienna, 2009.
- [3] John McCall. Genetic algorithms for modelling and optimisation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 184(1):205–222, dec 2005.
- [4] J.A. Cabrera, A. Simon, and M. Prado. Optimal synthesis of mechanisms with genetic algorithms. *Mechanism and Machine Theory*, 37(10):1165–1177, oct 2002.