Zadatak 1 (VIS-R; ZI 2022/2023). *Neka su X i Y nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom 1 te neka je $U = X + Y$ i $V = \frac{X}{X+Y}$.*

(a) Odredite gustoću g slučajnog vektora (U, V).

(b) Odredite marginalne gustoće slučajnih varijabli U i V.

Rješenje.

(a) Budući da se radi o eksponencijalnim slučajnim varijablama s parametrom 1, gustoće od X i Y su

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0$$

a gustoća slučajnog vektora (X, Y) je

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-(x+y)}, \quad x > 0,\, y > 0$$

jer su X i Y nezavisne. Da bismo odredili gustoću slučajnog vektora (U, V), treba nam jakobijan inverznog preslikavanja $(u, v) \mapsto (x, y)$. Inverzno preslikavanje je

$$x(u, v) = \frac{x}{x+y} \cdot (x + y) = v \cdot u = uv$$

$$y(u, v) = u - x = u - uv = u(1 - v),$$

parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 - v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -u,$$

pa je jakobijan

$$\begin{vmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1 - v) = -u.$$

Gustoću od (U, V) sada jednostavno računamo kao umnožak gustoće od (X, Y) i apsolutne vrijednosti izračunatog jakobijana inverznog preslikavanja

$$g_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\left(x(u, v), y(u, v)\right) \cdot |-u| =$$

$$= f_{X,Y}(uv, u - uv) \cdot u = e^{-(uv+u-uv)} \cdot u = ue^{-u}.$$

Preostaje odrediti područje na kojemu se slučajni vektor (U, V) realizira kako bi upotpunili značenje ove gustoće. Budući da se X i Y realiziraju na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$, tada je jasno da se U, koji je njihov zbroj, također realizira na $\langle 0, \infty\rangle$. Za V situacija nije toliko jednostavna. Primijetimo da su brojnik i nazivnik uvijek pozitivni, tako da će sigurno vrijediti $V > 0$. Također primijetimo da za bilo koji X možemo izabrati Y na način da razlomak bude proizvoljno mali, tako da sigurno ne postoji nijedna donja međa za V koja je veća od 0. Konačno, za bilo koji X možemo izabrati dovoljno mali Y tako da razlomak bude proizvoljno blizu 1, ali ne jednak ili veći od 1. Zato konačno pišemo da je gustoća

$$g_{U,V}(u, v) = ue^{-u}, \quad u > 0,\, 0 < v < 1.$$

(b) Marginalne gustoće se jednostavno računaju integriranjem:

$$g_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{U,V}(u,v)dv = \int_0^1 ue^{-u}dv = ue^{-u}, \quad u > 0$$

$$g_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{U,V}(u,v)du = \int_0^{\infty} ue^{-u}du = 1, \quad 0 < v < 1.$$

□

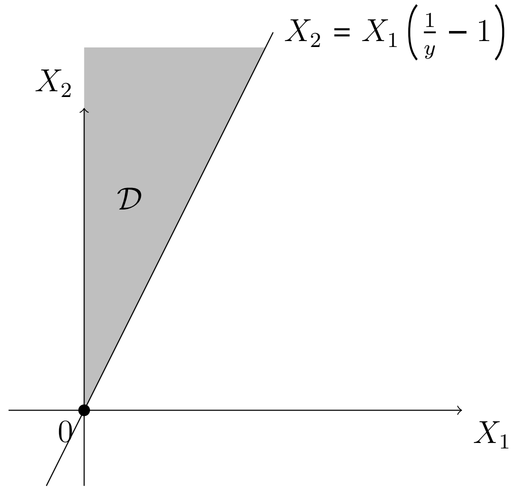
Zadatak 2 (ZIR 2020/2021)**.** *Slučajne varijable X_1 i X_2 su nezavisne s eksponencijalnom razdiobom s parametrima λ_1 i λ_2. Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$.*

Rješenje. Funkciju razdiobe određujemo po njezinoj definiciji

$$G_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X_1}{X_1+X_2} < y\right) = P\left(X_1 < X_1 y + X_2 y\right) = P\left(X_1(1-y) < X_2 y\right) =$$

$$= P\left(X_1\left(\frac{1}{y}-1\right) < X_2\right) = \ldots$$

Sada treba izračunati ovu vjerojatnost. Najprije valja odrediti oblik područja integriranja o komu se radi. Istim razmišljanjem kao u prethodnom zadatku možemo zaključiti da vrijedi $0 < y < 1$. Stoga je izraz $\frac{1}{y} - 1$ pozitivna konstanta, a izraz $X_2 > X_1\left(\frac{1}{y}-1\right)$ predstavlja dio prvog kvadranta iznad pravca kroz ishodište s nagibom $\frac{1}{y} - 1$, kao što je prikazano na skici:



Traženu vjerojatnost računamo integriranjem gustoće slučajnog vektora (X_1, X_2) po ovom području:

$$\cdots = \iint_{\mathcal{D}} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_0^{\infty} \left(\int_{x_1\left(\frac{1}{y}-1\right)}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2\right) dx_1 =$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \left(\int_{x_1\left(\frac{1}{y}-1\right)}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2\right) dx_1 = \cdots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{1}{y}-1\right)}.$$

□

Zadatak 3 (LJIR 2020/2021)**.** *Neka su X i Y nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable koje prate normalnu razdiobu s parametrima 0 i σ^2, dakle $X, Y \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. Dokažite da je zbroj kvadrata od X i Y eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{2\sigma^2}$, tj.*

$$X^2 + Y^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right).$$

Rješenje. Slično kao i u prethodnom zadatku, po definiciji ćemo odrediti funkciju razdiobe od $Z = X^2 + Y^2$:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X^2 + Y^2 < z) = \iint_{\mathcal{D}} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \iint_{\mathcal{D}} f_X(x) \cdot f_Y(y)dxdy =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right]dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right]dxdy = \dots$$

Primijetimo, budući da X i Y mogu poprimiti sve realne vrijednosti (nema ograničenja na predznak), područje $\mathcal{D}$ je sada puni krug radijusa $\sqrt{z}$ sa središtem u ishodištu. Integral se sada jednostavno rješava prelaskom na polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ uz granice integriranja $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < \sqrt{z}$, te ne smijemo zaboraviti jakobijan preslikavanja $|\mathcal{J}| = r$:

$$\dots = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{z}} r \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] dr\right) d\varphi = \dots = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}z\right), \quad z > 0.$$

Iz dobivenog izraza prepoznajemo da se radi o funkciji razdiobe eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, čime je tvrdnja dokazana.
$\square$

Zadatak 4 (LJIR 2021/2022)**.** *Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće*

$$f_{X,Y}(x, y) = Cx, \quad (x, y) \in \mathcal{D},$$

a slučajna varijabla Z dana je s $Z = X - Y$. Odredite konstantu C, očekivanje i varijancu varijable Z ako je

(a) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$,

(b) $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x \le 1\}$.

Rješenje.

(a) Područje je kvadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Za računanje konstante C koristimo činjenicu da je integral gustoće po tom području jednak 1:

$$1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 Cxdy\right) dx = \dots = \frac{C}{2} \implies C = 2$$

Tada su gustoće marginalnih razdioba

$$f_X(x) = \int_0^1 2xdy = 2x, \quad x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 2xdx = 1, \quad y \in [0,1],$$

očekivanja

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot 1dy = \frac{1}{2}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 1dy = \frac{1}{3}$$

i varijance

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{1}{12}.$$

Tada očekivanje i varijancu od Z računamo koristeći poznata svojstva i činjenicu da su X i Y nezavisne:

$$E(Z) = E(X - Y) = EX - EY = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{36}.$$

S ovim načinom rješavanja valja biti oprezan, kao što je pokazano u idućem podzadatku!

(b) Sada je područje trokut s vrhovima $(0,0), (1,0), (1,1)$. Pokušajmo prvo riješiti zadatak kao i prethodni.

$$1 = \int_0^1 \left(\int_0^x Cxdy \right) dx = \cdots = \frac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

Gustoće marginalnih razdioba

$$f_X(x) = \int_0^x 3xdy = 3x^2, \quad x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 3xdx = \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right), \quad y \in [0,1],$$

očekivanja

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{5}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right) dy = \frac{3}{8}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right) dy = \frac{1}{5}$$

i varijance

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{3}{80}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{19}{320}.$$

Tako dobivamo:

$$E(Z) = E(X - Y) = EX - EY = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{5}{36}.$$

Očekivanje dobiveno na ovaj način je točno, ali varijanca je pogrešna!

Postavlja se pitanje zašto je pod (a) identičnim postupkom dobiveno točno rješenje, a ovdje nije. Odgovor leži u tome da je pod (a) prešućena jedna činjenica koja vrijedi i nužna je za točnost postupka, a to je ta da su u tom zadatku komponente slučajnog vektora X i Y međusobno nezavisne, dok to pod (b) nije slučaj. Zbog toga smijemo varijancu računati koristeći svojstvo $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. U (ne)zavisnost se možemo uvjeriti provjeravanjem vrijedi li $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Pod (a) je

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2x \cdot 1 = 2x = f_{X,Y}(x,y),$$

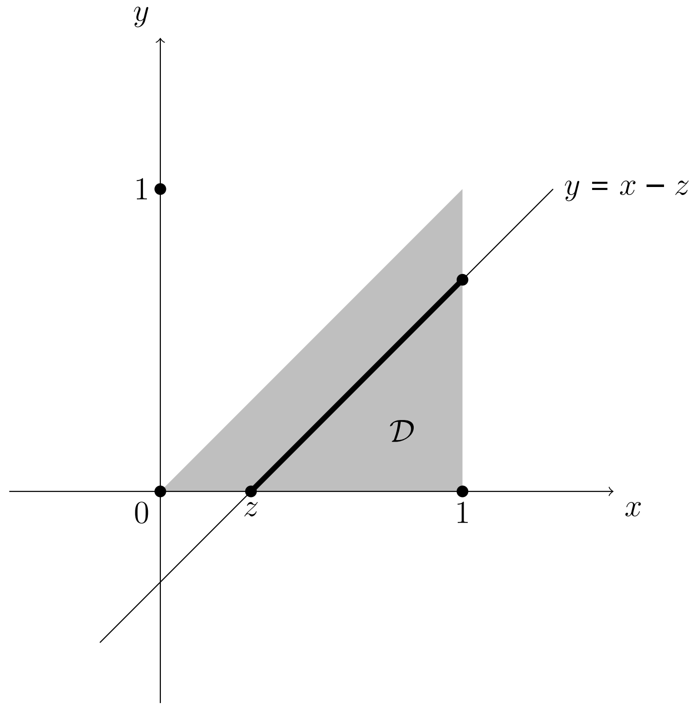
dok je pod (b)

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 3x^2 \cdot \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right) \neq 3x = f_{X,Y}(x,y).$$

Točan način rješavanja (koji funkcionira u oba slučaja) je taj da odredimo funkciju gustoće razdiobe od Z i iz nje odredimo očekivanje i varijancu:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx = \int_z^1 3x \, dx = \frac{3}{2}\left(1 - z^2\right), \quad z \in [0,1].$$

Nacrtajmo skicu da bismo razjasnili granice integriranja:



Naime, uzmemo li proizvoljan $z \in [0,1]$, možemo nacrtati pravac $z = x - y$, ili u ljepšem obliku $y = x - z$, koji je prikazan na skici. Sve točke koje leže na presjeku tog pravca i područja $\mathcal{D}$ u kojemu se realizira slučajni vektor, predstavljaju realizacije slučajnog vektora za koje vrijedi $X - Y = z$ (ovdje su X i Y slučajne varijable, a z je proizvoljna konstanta). Samim time, gustoća u svim tim točkama "doprinosi" iznosu gustoće g_Z u točki z i zato ćemo taj iznos dobiti integrirajući gustoću od (X, Y) po njima (tj. po podebljanoj dužini na skici). Na jednoj intuitivnoj razini, možemo povući analogiju sa diskretnim slučajnim vektorima. Na primjer, ako imamo tablicu razdiobe slučajnog vektora (X, Y) i trebamo odrediti razdiobu slučajne varijable $Z = X - Y$. Tada bismo vjerojatnosti, npr. $P(Z = 1)$, odredili tako da sumiramo vjerojatnosti po svim poljima tablice razdiobe (X, Y) u kojima vrijedi $X - Y = 1$, jer iznos vjerojatnosti u svakom od tih polja "doprinosi" vjerojatnosti $P(Z = 1)$ koju računamo. Nakon ove digresije, možemo se vratiti na računanje očekivanja i varijance od Z, koje je sada trivijalno:

$$E(Z) = \int_0^1 z \cdot \frac{3}{2}\left(1 - z^2\right)\, dz = \frac{3}{8}$$

$$E(Z^2) = \int_0^1 z^2 \cdot \frac{3}{2}\left(1 - z^2\right)\, dz = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2 = \frac{19}{320}.$$

□

Zadatak 5 (VIS-R; ZI 2020/2021)**.** *Nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable X i Y imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Dokažite da slučajne varijable*

$$Z = \max\{X, Y\}, \quad W = X + \frac{1}{2}Y$$

imaju jednaku razdiobu. Odredite tu razdiobu.

Rješenje. Odredimo funkciju razdiobe od Z po definiciji, uzimajući u obzir da su X i Y nezavisne:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\max(X, Y) < z) = P(X < z,\ Y < z) = P(X < z) \cdot P(Y < z) =$$
$$= F_X(z) \cdot F_Y(z) = (1 - e^{-\lambda z}) \cdot (1 - e^{-\lambda z}) = (1 - e^{-\lambda z})^2, \quad z > 0$$

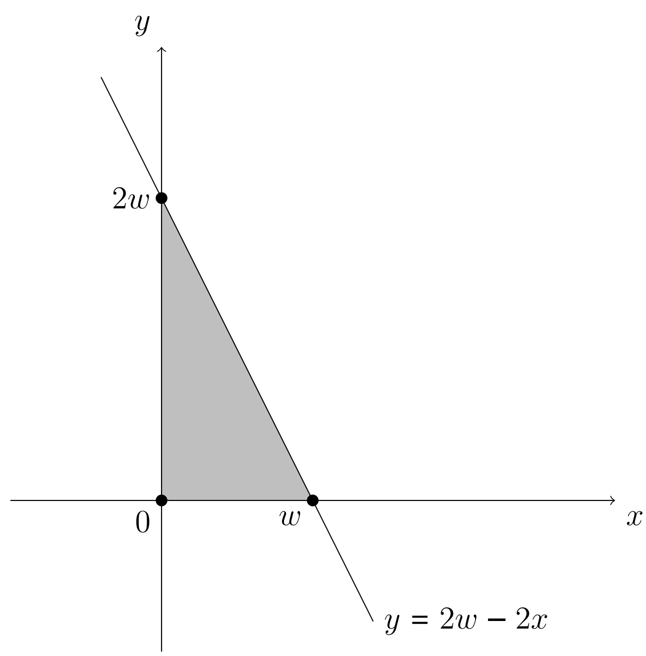
Na isti način učinimo i za W:

$$F_W(w) = P(W < w) = P\left(X + \frac{1}{2}Y < w\right) = P\left(Y < 2w - 2X\right) = \dots$$

Vjerojatnost ćemo odrediti integriranjem gustoće slučajnog vektora (X, Y) po području u kojemu je zadovoljen uvjet $Y < 2w - 2X$. Gustoća slučajnog vektora (X, Y) je

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y},$$

zbog toga što su X i Y nezavisne. Područje integriranja je prikazano na skici:



Nastavljamo s raspisivanjem funkcije razdiobe:

$$\dots = \int_0^w \left(\int_0^{2w-2x} f_{X,Y}(x, y)dy\right)dx = \int_0^w \left(\int_0^{2w-2x} \lambda^2 e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dy\right)dx =$$
$$= \dots = 1 - 2e^{-\lambda w} + e^{-2\lambda w} = (1 - e^{-\lambda w})^2, \quad z > 0,$$

iz čega je jasno da su razdiobe jednake i time je tvrdnja dokazana. $\square$

Zadatak 6 (DIR 2022/2023). *Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable, pri čemu je X jednoliko distribuirana na intervalu $[0,2]$, a Y eksponencijalno s parametrom $\lambda = 1$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Z = X - Y$.*

Rješenje. Iz distribucija znamo funkcije gustoće od X i Y

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 2$$

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0,$$

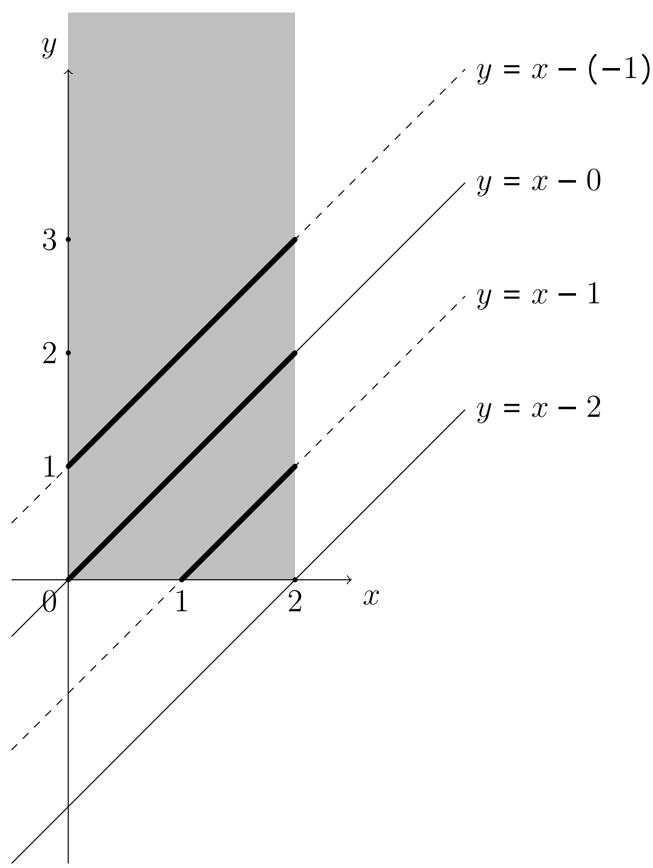
a zbog nezavisnosti znamo i gustoću slučajnog vektora (X,Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y}, \quad 0 \le x \le 2,\ y > 0.$$

Da bismo odredili gustoću slučajne varijable Z, iskoristit ćemo poznatu formulu

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| \, dx.$$

Budući da iz $Z = X - Y$ slijedi $Y = X - Z$, jasno je da derivacija pod apsolutnom vrijednosti iznosi -1. Ostaje problem određivanja granica integrala. Kao što to inače biva, valja nacrtati skicu područja na kojemu se realizira (X,Y) te na njoj pravac $y = x - z$ za proizvoljan z.



Za svaki od skiciranih pravaca, integriramo gustoću slučajnog vektora po podebljanoj liniji. Također, jasno je da za $z > 2$ pravac uopće neće sjeći osjenčano područje, pa smo time već riješili prvi dio definicije gustoće:

$$g_Z(z) = 0, \quad z > 2$$

Ako je $0 \le z \le 2$, primjećujemo da tada pravac siječe područje u točkama $(z, 0)$ i $(2, 2 - z)$, pa će tada granice integrala biti z i 2 (integral ide po x). **Ovdje obavezno paziti na to da je y funkcija od x jer se integrira po pravcu!**

$$g_Z(z) = \int_z^2 \frac{1}{2} e^{-y}\, dx = \int_z^2 \frac{1}{2} e^{-(x-z)}\, dx = \cdots = -\frac{1}{2} e^{z-2} + \frac{1}{2}, \quad 0 \le z \le 2$$

Preostaje slučaj $z < 0$, gdje pravac siječe područje u točkama $(0, -z)$ i $(2, 2 - z)$. Naravno, to znači da su granice integrala 0 i 2, što daje rezultat

$$g_Z(z) = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-y}\, dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-(x-z)}\, dx = \cdots = -\frac{1}{2} e^{z-2} + \frac{1}{2} e^{z}, \quad z < 0.$$

□