# 2.

# Uvjetna vjerojatnost

**Sadržaj poglavlja**



## 2.1. Uvjetna vjerojatnost

Pri bacanju jedne kocke, vjerojatnost da se pojavi broj $1$ jednaka je $\frac{1}{6}$. Nakon bacanja mi sa sigurnošću znamo je li se taj događaj realizirao ili nije. Pretpostavimo međutim da je netko pogledao na kocku koju mi ne vidimo i kazao nam: kocka je pala na neparan broj. Kolika je sad vjerojatnost da je ona pala na broj $1$? Očito, ta se vjerojatnost promijenila. Budući da su nam preostale samo tri mogućnosti, brojevi $1$, $3$ i $5$, ta je vjerojatnost sad $\frac{1}{3}$.

— ◆ —

Evo još jednog primjera.

Bacamo dvije kocke. Neka je:

$$A = \{\text{na prvoj kocki pao je broj } 2\},$$
$$B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je } 6\}.$$

Od 36 elementarnih događaja, događajima $A$ i $B$ pripadaju sljedeći

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\},$$
$$B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Zato je:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{6}{36}, \qquad \boldsymbol{P}(B) = \frac{5}{36}.$$

Kolika je vjerojatnost događaja $A$, ako je poznato da se realizirao događaj $B$? U tom je slučaju dovoljno samo promotriti elementarne događaje koji sačinjavaju $B$ (jer samo neki od njih dolazi u obzir) i među njima tražiti one povoljne za događaj $A$ — time tražimo elementarne događaje za umnožak $AB$ tih događaja. Ova vjerojatnost ovisi o događaju $B$, nazivamo je **uvjetna vjerojatnost** i bilježimo ju simbolom $\boldsymbol{P}_B$. Uvjetnu vjerojatnost $\boldsymbol{P}_B(A)$ događaja $A$ čitamo: vjerojatnost od $A$ uz uvjet $B$. Imamo:

$$\boldsymbol{P}_B(A) = \frac{1}{5}$$

jer je samo događaj $(2,4)$ povoljan za $A$.

### 2.1.1. Definicija uvjetne vjerojatnosti

Da bismo došli do općenite formule za uvjetnu vjerojatnost, primijetimo da brojnik 1 označava broj elementarnih događaja koji su povoljni i za događaj $A$ i za događaj $B$. Naime, vrijedi $AB = \{(2,4)\}$. Stoga ovu vjerojatnost možemo pisati i u obliku:

$$\boldsymbol{P}_B(A) = \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)}.$$

Ovo razmatranje ukazuje na opravdanost sljedeće definicije.

**Definicija 2.1. ■ Uvjetna vjerojatnost**

Neka je $B \in \mathscr{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti: $\boldsymbol{P}(B) > 0$. **Uvjetna vjerojatnost** uz uvjet $B$ je funkcija $\boldsymbol{P}_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ definirana formulom

$$\boldsymbol{P}_B(A) := \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)}, \qquad \forall A \in \mathscr{F}. \tag{1}$$

Lako se je uvjeriti da je formulom (1) uistinu definirana vjerojatnosna funkcija. Naime vrijedi,

$$\boldsymbol{P}_B(\Omega) = \frac{\boldsymbol{P}(B \cap \Omega)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(B)} = 1$$

i slično za $\boldsymbol{P}(\emptyset)$. Monotonost i aditivnost dokazuju se također po definiciji (1), korištenjem istovjetnih svojstava vjerojatnosne funkcije $\boldsymbol{P}$.

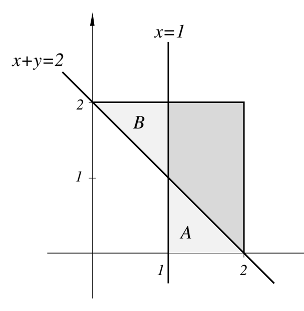
— ◆ —

Uobičajeno je da se uvjetna vjerojatnost $\boldsymbol{P}_B$ označava i formulom $\boldsymbol{P}(\,\cdot \mid B)$, dakle za vjerojatnost događaja $A$ uz uvjet $B$ pisat ćemo $\boldsymbol{P}(A \mid B)$ umjesto $\boldsymbol{P}_B(A)$.

**Primjer 2.1.**

Dva broja $x$ i $y$, biramo na sreću unutar intervala $[0,2]$. Kolika je vjerojatnost da je $x > 1$ ako je poznato da vrijedi $x + y > 2$?

▶ Označimo događaje $A = \{x > 1\}$, $B = \{x + y > 2\}$. Tražimo uvjetnu vjerojatnost $\boldsymbol{P}(A \mid B)$. Točka s koordinatama $(x,y)$ je na sreću odabrana točka unutar kvadrata $\Omega$ stranice 2 (slika 2.1). Izračunajmo vjerojatnost događaja $B$ i $AB$:




*Sl. 2.1.*

$$\boldsymbol{P}(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{P}(AB) = \frac{m(AB)}{m(\Omega)} = \frac{3/2}{4} = \frac{3}{8}.$$

Zato je

$$\boldsymbol{P}(A \mid B) = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}. \ ◀$$

— ◆ —

Uvjetna se vjerojatnost u mnogim primjerima lakše računa nego vjerojatnost umnoška. Zato se definicijsku formula za uvjetnu vjerojatnost (1) koristi u računanju vjerojatnosti umnoška dvaju događaja:

**Teorem 2.1. ■ Vjerojatnost umnoška**

Vjerojatnost umnoška dvaju događaja računa se formulom

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(A \mid B) \tag{2}$$

Ako zamijenimo događaje $A$ i $B$ (koji oboje imaju pozitivnu vjerojatnost), dobit ćemo istovrsnu formulu

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A). \tag{3}$$

**Primjer 2.2.**

U urni se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije kuglice koje izvučemo biti bijele?

▶ Možemo zamisliti da kuglice izvlačimo jednu po jednu. Neka su $A$ i $B$ događaji

$$A = \{\text{prva kuglica je bijela}\},$$
$$B = \{\text{druga kuglica je bijela}\}.$$

Tad je $AB$ događaj čiju vjerojatnost tražimo. Očito je:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{6}{10}.$$

Nakon što izvučemo prvu kuglicu, u urni je preostalo devet kuglica, od kojih je pet bijelih. Stoga je:

$$\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{5}{9}$$

i po formuli (3) slijedi:

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}. \ ◀$$

— ◆ —

Na sličan ćemo način računati i vjerojatnost produkta više događaja. Na primjer

$$\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A)\boldsymbol{P}(C \mid AB).$$

Moguće su i druge kombinacije događaja s desne strane.

**Primjer 2.3.**

Kolika je vjerojatnost da tri na sreću odabrane karte iz snopa od $52$ karte budu tref boje?

▶ Označimo s $A$ traženi događaj i neka je $A_i = \{i\text{-ta karta je tref boje}\}$, $i = 1,2,3$. Tad je $A = A_1A_2A_3$ i računamo vjerojatnost po formuli:

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1)\boldsymbol{P}(A_2 \mid A_1)\boldsymbol{P}(A_3 \mid A_1A_2).$$

Pojedine vjerojatnosti su

$\boldsymbol{P}(A_1) = \dfrac{13}{52}$, u snopu ima 13 karata tref boje,

$\boldsymbol{P}(A_2 \mid A_1) = \dfrac{12}{51}$, nakon što je prva izvučena, preostalo ih je 51 od kojih je 12 tref boje,

$\boldsymbol{P}(A_3 \mid A_1A_2) = \dfrac{11}{50}$.

Dakle,

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = 0.013. \ ◀$$

## 2.2. Nezavisnost događaja

Promotrimo sljedeću inačicu primjera iz prethodnog odjeljka:

**Primjer 2.4.**

U urni se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da će druga kuglica biti bijela, ako je prva kuglica bila bijela. Kolika je ta vjerojatnost ako je prva kuglica bila crna? Izračunajmo obje ove vjerojatnosti u sljedeće dvije situacije:

**a)** prva se kuglica nakon izvlačenja ne vraća u urnu

**b)** prva se kuglica nakon izvlačenja vraća u urnu.

► Označimo s $A$ i $B$ događaje

$$A = \{\text{prva kuglica je bijela}\},$$
$$B = \{\text{druga kuglica je bijela}\}.$$

Tražimo uvjetne vjerojatnosti $\boldsymbol{P}(B \mid A)$ i $\boldsymbol{P}(B \mid \overline{A})$. Očito je

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{6}{10}, \qquad \boldsymbol{P}(\overline{A}) = \frac{4}{10}.$$

**a)** Nakon izvlačenja prve kuglice, u urni imamo jednu kuglicu manje. Zato je

$$\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{5}{9}, \qquad \boldsymbol{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{6}{9}.$$

**b)** Ako kuglicu nakon izvlačenja vratimo u urnu, prije izvlačenja druge kuglice imat ćemo identičnu situaciju: šest bijelih i četiri crne kuglice, bez obzira je li se ostvario događaj $A$ ili nije:

$$\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{6}{10}, \qquad \boldsymbol{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{6}{10}$$

Kažemo da *realizacija događaja $A$ ne utječe na vjerojatnost realizacije događaja $B$.* ◄

— ◆ —

Neka događaji $A$ i $B$ imaju pozitivnu vjerojatnost.

Neka je $\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(B)$, tj. vjerojatnost događaja $B$ ne mijenja se nakon što nam je poznato da se realizirao događaj $A$. Tad kažemo da su $A$ i $B$ **nezavisni događaji**.

U tom slučaju vrijedi

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B).$$

Ako je pak ispunjena ova jednakost, onda za uvjetnu vrijedi

$$\boldsymbol{P}(B \mid A) = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(A)} = \boldsymbol{P}(B).$$

Isto tako, bit će

$$\boldsymbol{P}(A \mid B) = \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(B)} = \boldsymbol{P}(A).$$

**Definicija i kriterij nezavisnosti događaja**

Za događaje $A$ i $B$ kažemo da su **nezavisni**, ako vrijedi bilo koja od jednakosti: $\boldsymbol{P}(A \mid B) = \boldsymbol{P}(A)$ ili $\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(B)$.

Nuždan i dovoljan uvjet za nezavisnost jest da bude:

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B). \tag{4}$$

**Primjer 2.5.**

Ako su događaji $A$ i $B$ nezavisni, tad nije posve očito da su nezavisni i njihovi komplementi $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Pokažimo to koristeći ovaj kriterij nezavisnosti.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\overline{A})\boldsymbol{P}(\overline{B}) &= (1-\boldsymbol{P}(A))(1-\boldsymbol{P}(B)) \\
&= 1-\boldsymbol{P}(A)-\boldsymbol{P}(B)+\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B) && (\text{nezavisnost od } A \text{ i } B) \\
&= 1-\boldsymbol{P}(A)-\boldsymbol{P}(B)+\boldsymbol{P}(AB) && (\text{vjerojatnost unije događaja}) \\
&= 1-\boldsymbol{P}(A\cup B) && (\text{vjerojatnost komplementa}) \\
&= \boldsymbol{P}(\overline{A\cup B}) && (\text{de Morganov zakon}) \\
&= \boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B})
\end{aligned}$$

Dobili smo $\boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{A})\boldsymbol{P}(\overline{B})$ pa su $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni. ◄

**Primjer 2.6.**

Bacamo dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da broj na prvoj bude paran, a na drugoj manji od $3$?

► Rezultat na jednoj kocki nezavisan je od toga što će se pojaviti na drugoj kocki. Vjerojatnost pojave parnog broja na prvoj kocki je $\frac{1}{2}$, vjerojatnost da broj na drugoj bude manji od $3$ je $\frac{1}{3}$. Traženi događaj produkt je ovih dvaju. Stoga je njegova vjerojatnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. ◄

— ◆ —

Nezavisnost skupine događaja definira se na složeniji način.

**Definicija 2.2.** ■ **Nezavisnost događaja**

Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su **nezavisni** ako za svaki $k$, $2 \leqslant k \leqslant n$ i svaki izbor $A_{i_1}$, $A_{i_2}, \ldots$, $A_{i_k}$ nekolicine tih događaja vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \boldsymbol{P}(A_{i_1})\boldsymbol{P}(A_{i_2})\cdots\boldsymbol{P}(A_{i_k}).$$

Neka su $A$, $B$ i $C$ nezavisni. Onda vrijedi, na primjer

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B),$$

pa su $A$ i $B$ nezavisni. Pročitavši još jednom definiciju, zaključujemo da su događaji u svakom podskupu skupa nezavisnih događaja također nezavisni.

Računajmo sad uvjetnu vjerojatnost sljedećeg tipa:

$$\boldsymbol{P}(A \mid BC) = \frac{\boldsymbol{P}(ABC)}{\boldsymbol{P}(BC)} = \frac{\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C)}{\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C)} = \boldsymbol{P}(A).$$

Vidimo da je uvjetna vjerojatnost jednaka bezuvjetnoj.

Ako su $A$, $B$ i $C$ po volji odabrani događaji, onda imamo

$$\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B \mid A)\cdot\boldsymbol{P}(C \mid AB).$$

Nezavisnost triju događaja znači da će sve uvjetne vjerojatnosti u kojima se ti događaji javljaju biti jednake bezuvjetnima: $\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(B)$, $\boldsymbol{P}(C \mid AB) = \boldsymbol{P}(C)$ i slično za druge moguće kombinacije. Tako za nezavisne događaje $A$, $B$ i $C$ vrijedi

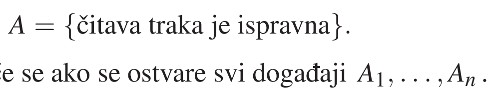
$$\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C).$$

Naglasimo da obrnuta tvrdnja nije istinita: ako je za tri događaja vjerojatnost umnoška događaja jednaka umnošku vjerojatnosti, oni ne moraju biti nezavisni.

— ◆ —

**Primjer 2.7.**

**Serijski spoj.** Proizvodnja nekog proizvoda organizirana je na traci koja se sastoji od $n$ dijelova, od kojih svaki radi neovisno o ostalima. Ako barem jedan od dijelova prestane s radom, prestaje i cjelina:




*Sl. 2.2.*

Vjerojatnost da $j$-ti dio neće otkazati tijekom dana jednaka je $r_j$. Kolika je vjerojatnost da će čitava traka raditi ispravno u tom danu?

► Označimo s $A_j$ događaj

$$A_j = \{j\text{-ti dio je ispravan}\}$$

i neka je

$$A = \{\text{čitava traka je ispravna}\}.$$

Događaj $A$ ostvarit će se ako se ostvare svi događaji $A_1, \ldots, A_n$. Dakle,

$$A = A_1 A_2 \cdots A_n.$$

Zbog nezavisnosti

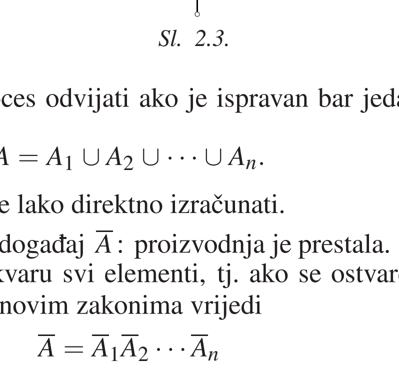
$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1)\cdots\boldsymbol{P}(A_n) = r_1 \cdots r_n.$$

Na primjer, za $n = 5$ i $r_1 = \ldots = r_5 = 0.9$ dobivamo $\boldsymbol{P}(A) = 0.9^n = 0.59$.

Vjerojatnost ispravnog rada serijski spojenog sklopa brzo opada s brojem elemenata u sklopu. ◄

**Primjer 2.8.**

**Paralelni spoj.** Uz iste oznake kao i prije, izračunajmo vjerojatnost ispravnog rada za proces proizvodnje u kojem se na nekoliko mjesta obavlja istovrsna radnja:




*Sl. 2.3.*

► Ovaj će se put proces odvijati ako je ispravan bar jedan njegov dio. Zato je

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Vjerojatnost ove unije nije lako direktno izračunati.

Promotrimo suprotan događaj $\overline{A}$: proizvodnja je prestala. Očigledno, on će se ostvariti ako su u kvaru svi elementi, tj. ako se ostvare svi događaji $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$. Po de Morganovim zakonima vrijedi

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n$$

Događaji $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ također su nezavisni. Zato je

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = \boldsymbol{P}(\overline{A}_1)\cdots\boldsymbol{P}(\overline{A}_n),$$

tj.

$$\begin{aligned}
1-\boldsymbol{P}(A) &= (1-\boldsymbol{P}(A_1))\cdots(1-\boldsymbol{P}(A_n)), \\
\boldsymbol{P}(A) &= 1-(1-r_1)\cdots(1-r_n).
\end{aligned}$$

S vrijednostima iz prošlog primjera imali bismo $\boldsymbol{P}(A) = 1 - 0.1^5 \approx 1$. Paralelnim organiziranjem procesa postiže se velika pouzdanost ispravnog rada. ◄

Ako je $\boldsymbol{P}(A) \approx 1$, onda kažemo da je taj događaj *praktički siguran*. Rezultat $\boldsymbol{P}(A) \approx 1$ ne znači da sklop ne može nikako biti u kvaru, već samo da je vjerojatnost kvara zanemariva.

## 2.3. Formula potpune vjerojatnosti

Pri računanju vjerojatnosti ponekad moramo sve moguće ishode podijeliti u različite klase. Ilustrirajmo to primjerom.

**Primjer 2.9.**

Voćarnica se opskrbljuje jabukama iz dvaju voćnjaka, i to 60% potrebne količine iz prvog i 40% iz drugog voćnjaka. 15% jabuka prvog voćnjaka prve su kvalitete, dok to vrijedi za 25% jabuka drugog voćnjaka. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana jabuka bude prve kvalitete?

► Odaberemo na sreću jednu jabuku u voćarnici. Dvije su mogućnosti:

$$H_1 = \{\text{odabrana je jabuka iz prvog voćnjaka}\}.$$
$$H_2 = \{\text{odabrana je jabuka iz drugog voćnjaka}\}.$$

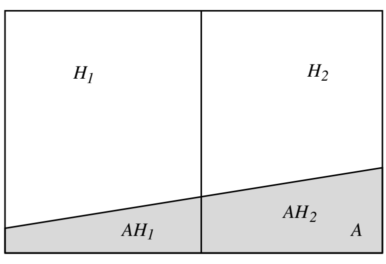
Vjerojatnosti da se ostvari neki od ovih događaja su

$$\boldsymbol{P}(H_1) = 0.6, \qquad \boldsymbol{P}(H_2) = 0.4\,.$$

Neka je $A$ traženi događaj:

$$A = \{\text{odabrana jabuka prve je kvalitete}\}.$$

Ilustrirajmo ovu situaciju slikom:




*Sl. 2.4. Vjerojatnost događaja lakše se računa ako promotrimo zasebno različite situacije koje se pri njegovoj realizaciji mogu ostvariti*

Događaj $A$ razbili smo na dva disjunktna događaja:

$AH_1 = \{$odabrana jabuka prve kvalitete potječe iz prvog voćnjaka$\}$,
$AH_1 = \{$odabrana jabuka prve kvalitete potječe iz drugog voćnjaka$\}$.

Zato je

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(AH_1) + \boldsymbol{P}(AH_2).$$

Vjerojatnosti umnoška događaja računamo na poznati način:

$$\boldsymbol{P}(AH_1) = \boldsymbol{P}(H_1) \cdot \boldsymbol{P}(A \mid H_1).$$

Vjerojatnost da je jabuka prve kvalitete, ako je poznato da potječe iz prvog voćnjaka je, prema podacima

$$\boldsymbol{P}(A \mid H_1) = 0.15 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{P}(AH_1) = 0.6 \cdot 0.15 = 0.09\,.$$

Analogno tome vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A \mid H_2) = 0.25 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{P}(AH_2) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.10\,.$$

Sad dobivamo

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(AH_1) + \boldsymbol{P}(AH_2) = 0.09 + 0.10 = 0.19\,. \ ◄$$

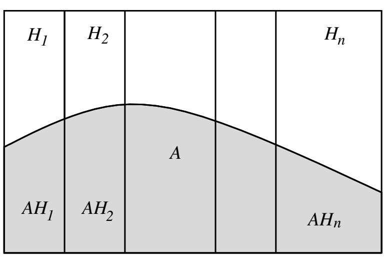
— ◆ —

Poopćimo ovo razmatranje na slučaj kad se može pojaviti više različitih mogućnosti.

Pretpostavimo da skup elementarnih događaja možemo rastaviti u $n$ međusobno disjunktnih događaja:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$$

pri čemu su događaji $H_i$, $H_j$ disjunktni za $i \neq j$ i vrijedi $P(H_i) > 0$ za svaki $i$. Ovakav rastav nazivamo **particija vjerojatnosnog prostora**. Kažemo još da familija $H_1, \ldots, H_n$ čini **potpun sustav događaja**.




*Sl. 2.5. Particija vjerojatnosnog prostora. Skup $\Omega$ razbijen je na međusobno disjunktne skupove. Time je i svaki događaj $A$ razbijen na međusobno disjunktne događaje*

Neka je $A \subseteq \Omega$ bilo koji događaj. Familijom $H_1, \ldots, H_n$ i on je razbijen na događaje:

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup \cdots \cup AH_n.$$

Budući da su događaji $AH_i$ međusobno disjunktni, vrijedi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) &= \boldsymbol{P}(AH_1) + \boldsymbol{P}(AH_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(AH_n) \\ &= \boldsymbol{P}(H_1)\boldsymbol{P}(A \mid H_1) + \ldots + \boldsymbol{P}(H_n)\boldsymbol{P}(A \mid H_n). \end{aligned}$$

**Teorem 2.2.** ■ **Formula potpune vjerojatnosti**

Neka je $\{H_1, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subseteq \Omega$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(H_i)\boldsymbol{P}(A \mid H_i).$$

Korisno je, zbog razloga koji će kroz primjere i zadatke postati jasnim, događaje $H_1, \ldots, H_n$ zvati **hipotezama**. Tijekom realizacije nekog pokusa ostvaruje se točno jedna hipoteza.

**Primjer 2.10.**

U prvoj kutiji nalaze se tri bijele i dvije crne kuglice, a u drugoj četiri bijele i dvije crne. Odaberemo na sreću jednu kuglicu iz prve kutije i prebacimo je u drugu. Kolika je vjerojatnost da će kuglica nakon toga izvučena iz druge kutije biti crna?

► Vjerojatnost izbora plave kuglice ovisi o tome koje je boje kuglica koja je prebačena iz prve kutije u drugu. Postavimo sljedeće hipoteze:

$$H_1 = \{\text{prva kuglica je bijela}\}, \qquad \boldsymbol{P}(H_1) = \frac{3}{5},$$
$$H_2 = \{\text{prva kuglica je crna}\}, \qquad \boldsymbol{P}(H_2) = \frac{2}{5}.$$

Označimo s $A$ događaj čiju vjerojatnost tražimo: kuglica izvučena iz druge kutije je plava. Ako se ostvari prva hipoteza, tad se u drugoj kutiji nalazi pet crvenih i dvije plave kuglice. Zato je

$$\boldsymbol{P}(A \mid H_1) = \frac{2}{7}.$$

Ako se ostvari druga hipoteza, tad se u drugoj kutiji nalaze četiri crvene i tri plave kuglice. Zato je

$$\boldsymbol{P}(A \mid H_2) = \frac{3}{7}.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti, vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(H_1)\boldsymbol{P}(A \mid H_1) + \boldsymbol{P}(H_2)\boldsymbol{P}(A \mid H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}. \ ◄$$

**Primjer 2.11.**

U prvoj urni nalaze se 2 bijele i 4 plave, a u drugoj 3 bijele i 2 plave kuglice. Iz prve urne na sreću izabiremo dvije kuglice i prebacimo ih u drugu. Kolika je vjerojatnost da potom izvučena kuglica iz druge urne bude bijela?

► Nazovimo traženi događaj

$$A = \{\text{kuglica izvučena iz druge urne je bijela}\}.$$

Pri prebacivanju dviju kuglica u drugu urnu postoje tri mogućnosti:

$$H_0 = \{\text{niti jedna prebačena kuglica nije bijela}\}, \quad \boldsymbol{P}(H_0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5},$$
$$H_1 = \{\text{jedna prebačena kuglica je bijela}\}, \quad \boldsymbol{P}(H_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2,$$
$$H_2 = \{\text{obje prebačena kuglice su bijele}\}, \quad \boldsymbol{P}(H_0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}.$$

Vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A|H_0) = \frac{3}{7}, \qquad \boldsymbol{P}(A|H_1) = \frac{4}{7}, \qquad \boldsymbol{P}(A|H_2) = \frac{5}{7}.$$

Po formuli potpune vjerojatnosti dobivamo

$$\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \boldsymbol{P}(H_i)\boldsymbol{P}(A|H_i) = \frac{3}{7} \cdot \frac{12}{30} + \frac{4}{7} \cdot \frac{16}{30} + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{30} = \frac{11}{21}. \ ◄$$

Iz poznatih relacija

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

možemo napisati

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}.$$

Ovu formulu koristimo uglavnom onda kad je događaj $B$ jedna od hipoteza $H_1, \dots, H_n$ na koje je razbijen skup $\Omega$.

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Pritom se vjerojatnost $P(A)$ računa uglavnom pomoću formule potpune vjerojatnosti. Tako dobivamo **Bayesovu**[1] **formulu**.

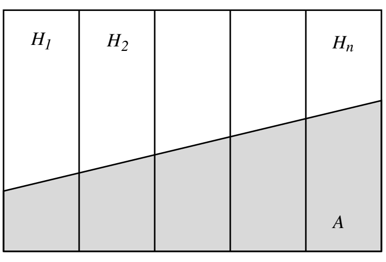
**Teorem 2.3. Bayesova formula**

Vrijedi

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}.$$

Bayesovu formulu koristimo pri računanju *aposteriornih* vjerojatnosti pojedinih hipoteza. Prije početka pokusa svaka hipoteza ima svoju vjerojatnost realizacije $P(H_i)$. Nakon realizacije pokusa, ako znamo koji se elementarni događaj ostvario, tad je nestala neizvjesnost: ostvarila se samo jedna od mogućih hipoteza $H_1, \dots, H_n$, dok za sve ostale znamo sa sigurnošću da se nisu ostvarile.

Pretpostavimo međutim da nam nije poznato koji se elementarni događaj ostvario, već umjesto toga znamo da se ostvario događaj $A \subseteq \Omega$. U tom slučaju ne znamo točno koja je od hipoteza $H_1, \dots, H_n$ nastupila, ali dodatna informacija o realizaciji događaja $A$ mijenja **apriorne vjerojatnosti** pojedinih hipoteza. Pomoću Bayesove formule računamo uvjetne vjerojatnosti $P(H_1 \mid A), \dots, P(H_n \mid A)$, koje nazivamo **aposteriornim vjerojatnostima** pojedinih hipoteza.




*Sl. 2.6. Bayesova formula. Na slici je interpretirana situacija kad su apriorne vjerojatnosti svih hipoteza jednake. Nakon realizacije događaja A (sivo područje) vjerojatnosti se pojedinih hipoteza mijenjaju*

**Primjer 2.12.**

Bacamo kocku. Neka su $H_1$ i $H_2$ hipoteze

$$H_1 = \{\text{pao je parni broj}\},$$
$$H_2 = \{\text{pao je neparni broj}\}.$$

Prije bacanja kocke vjerojatnosti (apriorne) pojedinih hipoteza su

$$P(H_1) = \tfrac{1}{2}, \quad P(H_2) = \tfrac{1}{2}.$$

Bacili smo kocku i netko nam je priopćio da se ostvario događaj

$$A = \{\text{pao je broj veći od } 3\}.$$

On sadrži tri elementarna događaja, $A = \{4, 5, 6\}$. Očigledno, sad hipoteza $H_1$ postaje vjerojatnija od $H_2$, budući da događaj $A$ sadrži dva parna i samo jedan neparan broj. Nove, aposteriorne vjerojatnosti su

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ako je pak poznato da se ostvario npr. događaj

$$B = \{\text{kocka je pala na broj } 5\},$$

tad nestaje svaka neizvjesnost. Naime, vrijedi

$$P(B \mid H_1) = 0, \quad P(B \mid H_2) = \tfrac{1}{3}, \quad P(B) = \tfrac{1}{6}$$

i Bayesova formula daje očekivani rezultat:

$$P(H_1 \mid B) = 0,$$

$$P(H_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 1,$$

budući da uz ovu informaciju sa sigurnošću znamo da se ostvarila hipoteza $H_2$.

**Primjer 2.13.**

U urni se nalaze tri kuglice. Znamo da je svaka od njih bijele ili crne boje. Točan broj kuglica pojedine boje nepoznat je i pretpostavljamo da je svaka mogućnost jednako vjerojatna. Pretpostavimo četiri hipoteze:

$$H_i = \{\text{u urni se nalazi } i \text{ bijelih kuglica}\}, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Po pretpostavci je

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \tfrac{1}{4}.$$

Izaberimo na sreću jednu kuglicu iz urne. Pri tom se ostvario događaj

$$A = \{\text{izvučena je bijela kuglica}\}.$$

Što se sada može reći o vjerojatnostima pojedinih hipoteza? Hipoteza $H_0$ postaje nemoguća, a vjerojatnosti ostalih hipoteza će se također promijeniti. Logično je da poraste vjerojatnost onih hipoteza koje zastupaju veći broj bijelih kuglica. Vrijedi

$$P(A \mid H_0) = 0, \qquad P(A \mid H_1) = \tfrac{1}{3},$$
$$P(A \mid H_2) = \tfrac{2}{3}, \qquad P(A \mid H_3) = 1.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti je

$$P(A) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Bayesova formula sada daje $P(H_0 \mid A) = 0$, $P(H_1 \mid A) = \frac{1}{6}$, $P(H_2 \mid A) = \frac{1}{3}$, $P(H_3 \mid A) = \frac{1}{2}$. ◄

**Primjer 2.14.**

Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0.6, vjerojatnost emitiranja znaka 0 je 0.4. Na izlazu iz kanala 10% znakova se pogrešno interpretira. Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

► Označimo događaje

$$A = \{\text{primljen je znak } 0\},$$
$$B = \{\text{primljen je znak } 1\},$$
$$H_0 = \{\text{poslan je znak } 0\},$$
$$H_1 = \{\text{poslan je znak } 1\},$$
$$D = \{\text{poslana je poruka 101, ako je primljena poruka 101}\}.$$

Vrijedi

$P(H_0) = 0.4, \qquad P(H_1) = 0.6,$

$P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) = 0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.1 = 0.42,$

$P(B) = 1 - P(A) = 0.58.$

Izračunajmo sada vjerojatnosti da su pojedini znakovi bili pravilno primljeni.

$$P(H_0|A) = \frac{P(H_0)P(A|H_0)}{P(A)} = \frac{0.36}{0.42} = 0.857,$$

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)P(B|H_1)}{P(B)} = \frac{0.54}{0.58} = 0.931.$$

Prijemi pojedinih znakova su nezavisni događaji, zato je

$$P(D) = P(H_1|B)P(H_0|A)P(H_1|B) = 0.931 \cdot 0.857 \cdot 0.931 = 0.743. \quad ◄$$