

mehanika

pojmovi, načela i odabrani primjeri

Ovo radno izdanje udžbenika "Mehanika – pojmovi, načela i odabrani primjeri" nastalo je prilagodbom prvog izdanja istoimenog sveučilišnog udžbenika sadržaju predmeta *Fizika* koji se, počevši od ak. g. 2018./2019., izvodi u okviru nastavnog programa FER3 Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Podaci o prvom izdanju udžbenika:

Mehanika – pojmovi, načela i odabrani primjeri

Saša Ilijić, izv. prof. dr. sc., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

Udžbenik je proglašen sveučilišnim udžbenikom (Manualia Universitatis studiorum Zagrabiensis) Odlukom Senata Sveučilišta u Zagrebu, klasa 032-01/18-01/96, urbroj 380-062/250-19-5, od 10. rujna 2019.

Recenzenti:

Matko Milin, prof. dr. sc., Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno–matematički fakultet

Lana Horvat Dmitrović, doc. dr. sc., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

Dario Hrupec, doc. dr. sc., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera Osijek, Odjel za fiziku

Lektorica: Sanja Bezljaj Ilijić

Vlastita naklada autora, Zagreb, 2020.

ISBN: 978-953-49074-0-5

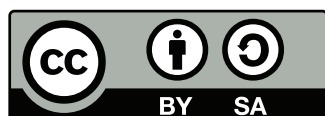
URL: <http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika.pdf>

Posljednja izmjena: 12. svibnja 2022.

URL: <http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf>

© 2020, Saša Ilijić

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License.



Predgovor

Zbog prilagodbe sadržaju predmeta *Fizika* nastavnog programa FER3 koja je u tijeku, ovaj udžbenik je podložan čestim promjenama i dopunama. Najnoviju inačicu ovog udžbenika uvijek možete pronaći putem poveznice:

<http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf>

Najvažnija promjena u odnosu na prvo izdanje udžbenika jest promjena u redoslijedu poglavlja. Prvih sedam poglavlja prema novom redoslijedu sadrži gradivo koje se obrađuje u prvom ciklusu nastave predmeta *Fizika*, dok se 13. poglavlje obrađuje početkom drugog ciklusa nastave. 8. i 9. poglavlje moglo bi biti zanimljivo studentima koji upišu predmet *Fizika 2*, dok 10., 11. i 12. poglavlje nisu gradivo predmeta opće fizike nastavnog programa FER3.

Autor

Predgovor prvom izdanju

Ovaj udžbenik namijenjen je studentima Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, a bavi se temama iz područja mehanike koje se obrađuju u predmetima *Fizika 1* i *Fizika 2*.¹ Gradivo je obrađeno uzimajući u obzir sljedeće:

- Prije upisa Fakulteta studenti su položili ispit državne mature iz fizike, a to znači da su upoznati s osnovnim pojmovima mehanike (vidi npr. [1]).
- Prije upisa predmeta *Fizika 1* studenti su odslušali predmet *Matematika 1* u okviru kojega su upoznali osnovne pojmove diferencijalnog računa (limes, derivacija i integral).

Cilj udžbenika je pojmove i načela mehanike koji su studentima poznati od ranije obraditi na višoj, sveučilišnoj razini koristeći vektorski i diferencijalni račun.

U usporedbi s udžbenicima sa službenog popisa literature predmeta *Fizika 1* i *Fizika 2*, a to su prvenstveno udžbenici profesora Dubravka Horvata [2] i [3] te udžbenici starije generacije nastavnika sa Zavoda za primijenjenu fiziku FER-a [4] i [5], ovaj udžbenik prikazuje gradivo mehanike na sažetiji način, a razmjerno velika pažnja posvećena je primjerima koji ilustriraju primjenu računskih tehnika u analizi fizičkih pojava.

Iskreno zahvaljujem kolegi doc. dr. sc. Zoranu Narančiću, dugogodišnjem koordinatorskom predmeta *Fizika 1* i *Fizika 2*, kao i svim kolegama sa Zavoda za primijenjenu fiziku i studentima FER-a koji su tijekom proteklih akademskih godina svojim primjedbama i prijedlozima doprinjeli unapređenju ovog udžbenika.

Saša Ilijić, Zagreb, proljeće 2018.

¹Prema nastavnom programu FER2, prvih deset poglavlja prvog izdanja ovog udžbenika ("Materija, prostor, vrijeme i fizičke veličine", "Kinematika čestice", "Dinamika čestice", "Rad, snaga i energija", "Mehanika sustava čestica", "Mehanika krutog tijela", "Centralna sila i gravitacija", "Neinerijski referentni okvir", "Specijalna teorija relativnosti" i "Mehanika fluida") sadržalo je gradivo predmeta *Fizika 1* (približno prvih 11 od ukupno 13 tjedana nastave u drugom semestru studija). Preostala tri poglavlja ("Elastičnost", "Titranje" i "Valovi") sadržala su gradivo predmeta *Fizika 2* (prvih 5 od ukupno 13 tjedana nastave u trećem semestru studija).

Napomena čitatelju

Velik broj studenata FER-a pri svom prvom susretu s predmetom Fizika, temeljem iskustva koje proizlazi iz pristupa fizici u nekim srednjim školama, očekuje da će gradivo svladati rješavanjem velikog broja jednostavnih, međusobno sličnih zadataka te da će teorijski dio gradiva biti dovoljno konzultirati tek u krajnjoj nuždi. Međutim, na fakultetu se od studenata očekuje drugačiji odnos prema gradivu fizike. Gradivo fizike nije dovoljno samo “vježbat”, već ga je potrebno proučiti sa što je moguće dubljim razumijevanjem.

Kroz predmete iz matematike studenti FER-a se najprije upoznaju s novim matematičkim alatima među kojima su vektorski i diferencijalni račun, a upravo nam oni omogućuju da zakone fizike izrazimo na stroži i općenitiji način od onog kakav je bio moguć u srednjoj školi. Kad su zakoni fizike izraženi korištenjem vektorskog i diferencijalnog računa, moguće je objasniti povezanosti među njima. Umjesto pukog iznošenja zakona fizike u obliku “formula”, u ovom se udžbeniku nastojalo pokazati da neke složenije tvrdnje slijede iz ranijih, jednostavnijih tvrdnji. Kao primjer uzmimo studentima od ranije poznat zakon očuvanja mehaničke energije. Dio gradiva fizike na fakultetu odnosi se na objašnjenje činjenice da taj zakon slijedi iz svojstva konzervativnosti sile koje se izražava integralima ili derivacijama vektorskog polja, iz teorema o radu i kinetičkoj energiji koji dokazujemo pokazujući jednakost diferencijala tih dviju fizičkih veličina, te iz definicija potencijalne energije i rada koje same po sebi koriste elemente diferencijalnog računa. Razumijevanje pozadine zakona očuvanja mehaničke energije možda nije nužno za njegovu primjenu pri rješavanju vrlo jednostavnih zadataka, ali ono jest nužno pri primjeni općenitog načela očuvanja energije u složenijim situacijama, primjerice kad su osim konzervativnih sila prisutne i sile koje nemaju to svojstvo. Nadalje, razumijevanje pozadine tog zakona studentima olakšava usvajanje daljnjih načela i poglavlja fizike, kao što je to npr. odnos električnog polja i električnog potencijala u elektromagnetizmu.

Na putu prema razumijevanju fizike pomoći će vam primjeri i zadaci različite složenosti. Neki od njih vrlo su jednostavni i služe samo kako biste upoznali novu mjernu jedinicu, dok se u nekima napredna načela mehanike primjenjuju u posve neočekivanim situacijama. Svakom složenijem zadatku pristupite s ozbiljnošću i shvatite ga kao inženjerski problem koji je postavljen pred vas. Sredstva koja su vam na raspolaganju za rješavanje problema su načela fizike i sve računske tehnike koje ste do sada upoznali. Na vama je da stečeno znanje fizike i matematike primijenite u za vas novoj situaciji. Ne uspijete li “od prve” riješiti zadatak, pročitajte teoriju još jednom i pokušajte ponovo, a ako je potrebno, potražite pomoć kolega i nastavnika. Imajte na umu da je mnoge zadatke moguće riješiti na različite načine, pri čemu je uputno provjeriti biste li rješavajući zadatak na različite načine dobili isti, točan rezultat. Neovisno o tome jesu li u zadatku navedene konkretne vrijednosti zadanih fizičkih veličina ili su navedeni samo njihovi simboli, traženu fizičku veličinu pokušajte najprije izraziti općenitim matematičkim izrazom i proučite oblik tog izraza. Prodiskutirajte način na koji veličina koju ste izračunali ovisi o zadanim veličinama. Razmislite o tome koje vrijednosti zadanih veličina su dopuštene, a koje nisu, odnosno koje biste vrijednosti zadanih veličina vi odabrali kako biste pojavu koju ste proučavali učinili, ovisno o situaciji, najbržom, najefikasnijom ili vama najzanimljivijom.

Učeći fiziku na predloženi način ostvarit ćete možda najvrjedniji ishod učenja fizike, a to je unaprjeđenje vaše vještine rješavanja inženjerskih problema primjenom načela fizike i matematičkog modeliranja.

Matematička notacija i mjerne jedinice

U ovom udžbeniku najvećim se dijelom koristi matematička notacija kakva je uobičajena u nastavnoj literaturi iz fizike i matematike te mjerne jedinice Međunarodnog sustava jedinica (sustav SI, *Système international d'unités*). Ipak, najčešće s ciljem izbjegavanja dvosmislenosti, notacija ponegdje odstupa od uobičajene. Osim toga, ponegdje se pojavljuju i jedinice izvan sustava SI. Kroz tekst udžbenika je dosljedno provedeno sljedeće:

- Skalarne veličine obilježavamo ukošenim simbolima poput a , A ili α , a vektorske veličine obilježavamo uspravnim masno otisnutim simbolima poput \mathbf{b} , \mathbf{B} ili β . Module vektora obilježavamo kao i skalare, npr. $a = |\mathbf{a}|$, a jedinične vektore obilježavamo "kapićom", npr. $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/a$. Jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava su \hat{x} , \hat{y} i \hat{z} .
- Kao operator skalarnog množenja vektora koristimo "točkicu", npr. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$. Kao operator vektorskog množenja vektora koristimo "križić", npr. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Pri množenju vektora skalarom ne pišemo simbol operatora, npr. $\alpha \mathbf{b}$.
- Imaginarnu jedinicu obilježavamo uspravnim simbolom i , a kompleksno konjugiranje broja označavamo "zvjezdicom", npr. z^* . Bazu prirodnog logaritma obilježavamo uspravnim simbolom e , npr. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.
- Uglate zagrade u matematičkim izrazima koristimo kao funkcijske, a okrugle zagrade koristimo kao algebarske.² Time se npr. u izrazu poput $f[x \pm vt]$, gdje funkcija f jedne varijable kao svoj argument ima dvočlani izraz $x \pm vt$ (vidi poglavlje 7 o valnom gibanju), otklanja opasnost od pogrešnog tumačenja tog izraza kao umnoška veličina f i $x - vt$, koja bi bila moguća kad bismo koristili isključivo okrugle zagrade.
- Kad se decimalni brojevi pojavljuju u matematičkim izrazima, kao decimalni separator koristimo točku. Zarez u matematičkim izrazima ima ulogu odvajanja. Time se osigurava jednoznačna interpretacija izraza poput $n = 1, 2, \dots$ kao varijable n koja poprima pozitivne cjelobrojne vrijednosti ili npr. izraza $f[1, 2]$ kao funkcije dvaju argumenata, pri čemu prvi ima vrijednost 1, a drugi ima vrijednost 2.
- Mjerne jedinice izvan sustava SI koriste se isključivo u primjerima koji se odnose na situacije u kojima je korištenje takvih jedinica uvriježno ili obavezno (npr. korištenje nautičkih milja u primjeru 1.5.1 u kojem se radi o akciji spašavanja na moru). U svim takvim slučajevima dani su potrebni podaci za prelaz u sustav SI.

²Konvencija o korištenju uglatih zagrada kao funkcijskih i okruglih zagrada kao algebarskih također se koristi u službenom *Pregledu formula iz Fizike i Fizike 2* (tzv. "zelene formule" dostupne u Skriptarnici FER-a) koji studenti FER-a koriste na pismenim ispitima iz tih predmeta.

Sadržaj

1	Materija, prostor, vrijeme i fizičke veličine	1
1.1	Tijela, čestice i gustoća mase	1
1.2	Prostor, vrijeme i odabir referentnog okvira	3
1.3	Fizičke dimenzije (masa, duljina i vrijeme) i mjerne jedinice	4
1.4	Skalarne i vektorske fizičke veličine i polja	5
1.5	Pravokutni koordinatni sustav	8
	Zadaci	10
2	Kinematika čestice	11
2.1	Položaj, putanja, brzina i akceleracija čestice	11
2.2	Inverzne relacije za brzinu i položaj te za duljinu puta (integrali)	17
2.3	Gibanje stalnom brzinom (jednoliko pravocrtno gibanje)	18
2.4	Gibanje stalnom akceleracijom (jednoliko ubrzano gibanje, kosi hitac)	19
2.5	Centripetalna i tangencijalna akceleracija	21
2.6	Kružno gibanje	23
2.7	Galilejeve transformacije	27
	Zadaci	31
3	Dinamika čestice	33
3.1	Prvi Newtonov zakon i inercijski referentni okvir	33
3.2	Drugi Newtonov zakon i jednadžba gibanja (NJG)	34
3.3	Računanje sile s pomoću NJG (težina, kružno gibanje, titranje)	36
3.4	Gibanje pod djelovanjem stalne sile (kolotura, kosina, trenje)	39
3.5	Sila ovisna o vremenu	42
3.6	Sila ovisna o brzini	44
	Zadaci	49
4	Rad, snaga i energija	51
4.1	Rad sile i snaga	51
4.2	Teorem o radu i kinetičkoj energiji	54
4.3	Konzervativna sila i potencijalna energija	57
4.4	Očuvanje mehaničke energije	61
4.5	Dijagram energije u 1D, stabilna i nestabilna ravnoteža	64
	Zadaci	67
5	Mehanika sustava čestica	69
5.1	Unutarnje i vanjske sile u sustavu čestica i treći Newtonov zakon	69
5.2	Očuvanje količine gibanja sustava	70
5.3	Središte mase sustava čestica	74
5.4	Referentni okvir središta mase (ROSM)	75
5.5	Općenit sudar dviju čestica u ROSM	77
5.6	Sudar dviju čestica u jednoj dimenziji (1D)	78
5.7	Očuvanje kutne količine gibanja sustava	81
	Zadaci	85
6	Titranje	87
6.1	Stabilna ravnoteža i titranje	87

6.2	Jednostavno harmonijsko titranje (tijelo na opruzi)	88
6.3	Energija pri harmonijskom titranju	91
6.4	Neharmonijski oscilatori i titranje malenom amplitudom	93
6.5	Prigušeno titranje	95
6.6	Titranje pod djelovanjem vanjske harmonijske sile	98
6.7	Slaganje titranja na pravcu i u ravni	100
6.8	Vezani oscilatori	104
	Zadaci	109
7	Mehanički valovi	113
7.1	Općenito o valnom gibanju	113
7.2	Transverzalni val na napetom užetu	114
7.3	Longitudinalni val u tankom štapu ili u fluidu	116
7.4	Superpozicija valova i refleksija na čvrstom i slobodnom kraju sredstva	119
7.5	Putujući i stojni harmonijski val	121
7.6	Energija i snaga vala	125
7.7	Refleksija i transmisija harmonijskog vala na granici dvaju sredstava	127
7.8	Zvuk i Dopplerova pojava	129
	Zadaci	133
8	Mehanika krutog tijela	135
8.1	Definicija i stupnjevi slobode krutog tijela	135
8.2	Statička ravnoteža i težište krutog tijela	137
8.3	Vrtnja tijela oko nepomične osi	140
8.4	Moment tromosti krutog tijela	141
8.5	Kutna količina gibanja krutog tijela	143
8.6	Jednadžba gibanja tijela pri vrtnji oko nepomične osi	144
8.7	Energija pri vrtnji tijela oko nepomične osi	146
8.8	Fizičko njihalo	148
8.9	Kotrljanje krutog tijela	150
	Zadaci	154
9	Mehanika fluida	157
9.1	Tlak i vrste fluida	157
9.2	Statika fluida i sila uzgona	158
9.3	Stacionarni i laminarni tok fluida i jednadžba kontinuiteta	162
9.4	Bernoullijeva jednadžba	164
9.5	Viskoznost fluida	167
	Zadaci	171
10	Elastičnost	173
10.1	Naprezanje, deformacija i linearno područje elastičnosti	173
10.2	Vlačno naprezanje (vlak)	175
10.3	Tlačno naprezanje (tlak)	177
10.4	Smično naprezanje (smicanje ili smik)	180
	Zadaci	183
11	Centralna sila i gravitacija	185
11.1	Svojstva centralne sile	185

11.2 Gibanje dvaju tijela	187
11.3 Gravitacijska sila i gravitacijsko polje	191
11.4 Gravitacijska potencijalna energija i gravitacijski potencijal	193
11.5 Keplerovi zakoni i gibanje nebeskih tijela	194
Zadaci	196
12 Neinerijski referentni okvir	197
12.1 Stvarne i prividne sile	197
12.2 Ubrzano translacijsko gibanje referentnog okvira	198
12.3 Referentni okvir u jednolikoj vrtnji, centrifugalna i Coriolisova sila	199
Zadaci	204
13 Specijalna teorija relativnosti	205
13.1 Općenito o načelu relativnosti	205
13.2 Lorentzove transformacije i neka njihova svojstva	206
13.3 Relativističko zbrajanje brzina	209
13.4 Relativistička količina gibanja i energija čestice	210
Zadaci	215
Literatura	217
A Mjerne jedinice sustava SI	219
B Necentralni sudar projektila i mirne mete	220
C Izvod izraza za centrifugalnu i Coriolisovu prividnu silu	221
D Izvod Lorentzovih transformacija	224
E Teorem o gravitacijskom polju sfernosimetrične raspodjele mase	226
F Izvod Poiseuilleovog zakona protjecanja	228
G Postupci rješavanja jednadžbi gibanja oscilatora	230
G.1 Jednostavni harmonijski oscilator	230
G.2 Harmonijski oscilator s prigušenjem	231
G.3 Oscilator s vanjskom silom	232
H Izvod vektorske formule za Dopplerovu pojavu	233

1 Materija, prostor, vrijeme i fizičke veličine

Mehanika je područje fizike koje proučava gibanje materijalnih tijela i sile koje među njima djeluju. Ovo poglavlje se bavi nizom temeljnih pojmova koji su nam potrebni kako bismo o mehanici mogli govoriti na sustavan način. Osim toga, ovo poglavlje pojašnjava neke potankosti matematičke notacije koju koristimo u ostalim poglavljima.

1.1 Tijela, čestice i gustoća mase

Materijalna tijela u mehanici prikazujemo kao kruta tijela nepromjenjivog oblika, kao elastična tijela koja pri naprezanjima mijenjaju svoj oblik te kao fluide (tekućine i plinove) koji nemaju vlastiti oblik već poprimaju oblik nekog drugog tijela u kojemu se nalaze.

Koncept čestice i njena masa: Materiju od koje su izgrađena tijela možemo shvatiti kao mnoštvo čestica (engl. *particle*) među kojima djeluju tzv. međučestične sile. Smatramo da su međučestične sile odgovorne za svojstva tijela kao što su elastičnost, viskoznost i sl. U strogom okviru mehanike, jedino svojstvo čestice je njena masa m koju smatramo nepromjenjivom veličinom, dok o veličini čestice ili o bilo kojem drugom njenom svojstvu nema potrebe govoriti. U fizičkom sustavu koji se sastoji od N čestica, mase čestica obilježavamo s m_1, m_2, \dots, m_N odnosno

$$m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Masa čestice ima središnju ulogu pri izražavanju zakona gibanja čestice kao i pri opisu gravitacije kao jedne od temeljnih sila u prirodi. Napustimo li strogi okvir mehanike, opis elektromagnetske sile koju također smatramo temeljnom prirodnim silom zahtijeva da čestici pridružimo električni naboj q kao njeno dodatno svojstvo. Nadalje, pri opisu prirode na mikroskopskoj razini, kvantna mehanika pridružuje čestici još jedno svojstvo poznato kao spin čestice.

Masa tijela koje se sastoji od N čestica čije su mase m_1, m_2, \dots, m_N je zbroj masa tih čestica,

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (1.2)$$

Volumna gustoća mase (gustoća): Kad je broj čestica koje čine neko tijelo velik, nepraktično je govoriti o pojedinim česticama. Raspored materije u prostoru jednostavnije je opisati s pomoću veličine koju zovemo volumnom gustoćom mase (engl. *mass density*) ili jednostavno gustoćom. Gustoća ρ je definirana kao limes omjera količine mase Δm i volumena ΔV u kojem se ta masa nalazi, kad $\Delta V \rightarrow 0$, odnosno

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (1.3)$$

To znači da element mase dm koji se nalazi u elementu volumena dV možemo izraziti kao $dm = \rho dV$, a masu tijela m možemo izraziti kao integral gustoće ρ po volumenu koji tijelo zauzima,

$$m = \int dm = \int \rho dV. \quad (1.4)$$

Homogeno tijelo je tijelo unutar kojega je gustoća ρ svuda jednaka. Masa homogenog tijela može se izraziti kao umnožak gustoće ρ i volumena tijela V ,

$$m = \rho \int dV = \rho V \quad (\rho = \text{konst}). \quad (1.5)$$

Primjer 1.1.1: *Aluminijska kuglica i broj atoma (čestica) u njoj*

Atome aluminija od kojih je kuglica izgrađena možemo shvatiti kao čestice. Najprije ćemo odrediti masu aluminijske kuglice polumjera $2R = 1$ cm, i broj atoma aluminija (čestica) u njoj. Zatim ćemo procijeniti udaljenost među atomima (česticama).

- *Masa:* S obzirom na to da kuglicu možemo smatrati homogenim tijelom, njenu masu možemo izračunati prema izrazu (1.5) koristeći gustoću aluminija $\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$ i izraz za volumen kugle $V = \frac{4}{3}R^3\pi$,

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \frac{4\pi}{3} \times (2.7 \text{ g cm}^{-3}) \times (0.5 \text{ cm})^3 = 1.41 \text{ g}.$$

- *Broj atoma (čestica):* Shvatimo li atome aluminija kao čestice od kojih je kuglica izgrađena, možemo odrediti od koliko se čestica ona sastoji. Masa atoma aluminija iznosi $m_{\text{Al}} = 27 \text{ u}$, gdje je $\text{u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ tzv. atomska jedinica mase (jedna dvanaestina mase neutralnog atoma ugljika-12). Prema tome je broj atoma aluminija u našoj kuglici

$$N = \frac{m}{m_{\text{Al}}} = \frac{1.41 \times 10^{-3} \text{ kg}}{27 \times (1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3.15 \times 10^{22}.$$

- *Udaljenost među atomima (česticama):* Sada možemo odrediti volumen koji pripada jednom atomu,

$$V_{\text{Al}} = \frac{V}{N} = \frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{N} = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{N} = \frac{4\pi}{3} \times \frac{(0.5 \text{ cm})^3}{3.15 \times 10^{22}} = 1.66 \times 10^{-23} \text{ cm}^3.$$

Izračunamo li duljinu brida kocke čiji je volumen V_{Al} ,

$$a_{\text{Al}} = (V_{\text{Al}})^{1/3} = (1.66 \times 10^{-23} \text{ cm}^3)^{1/3} = 2.55 \times 10^{-8} \text{ cm} = 2.55 \times 10^{-10} \text{ m},$$

možemo ju shvatiti kao grubu procjenu udaljenosti među središtima (jezgrama) susjednih atoma aluminija.

Tijela velikih dimenzija, kao što su npr. Sunce ili Zemlja (vidi poglavlje 11.5), u mehanici je ponekad opravdano prikazivati kao čestice. Suprotno tomu, npr. kad razmatramo kotrljanje tijela (vidi poglavlje 8), potrebno je neovisno o veličini tijela voditi računa o njegovu obliku te o rasporedu mase unutar njega.

1.2 Prostor, vrijeme i odabir referentnog okvira

Prostor i vrijeme: Gibanje čestica i materijalnih tijela se odvija u prostoru i u vremenu. S obzirom na to da česticu iz bilo koje točke u prostoru možemo pomaknuti duž tri različite međusobno okomite osi, kažemo da prostor ima tri dimenzije, odnosno da je trodimenzionalan. Vrijeme teče u jednom jedinom smjeru te ga smatramo jednodimenzionalnim.

Referentni okvir: Želimo li smisleno govoriti o mirovanju ili o gibanju nekog tijela, potrebno je reći u odnosu na što ono miruje ili se giba. U tu svrhu se u fizici koristi koncept referentnog okvira (engl. *frame of reference*). Referentni okvir je određen odabirom triju točaka u prostoru koje ne leže na istom pravcu i među kojima se udaljenosti ne mijenjaju u vremenu. Za česticu čija se udaljenost niti od koje od tih triju točaka tijekom vremena ne mijenja, kažemo da miruje u odnosu na odabrani referentni okvir. Ako se udaljenost promatrane čestice od bilo koje od triju točaka koje određuju referentni okvir u vremenu mijenja, kažemo da se čestica giba u odnosu na odabrani referentni okvir.

Referentni okvir se može odabrati na mnoštvo različitih načina. U većini situacija praktično je referentni okvir vezati uz neko kruto tijelo koje se nalazi u blizini fizičke pojave koju promatramo. To kruto tijelo je vrlo često Zemaljska kugla (zgrada, prostorija) ili neko vozilo u kojem se nalazi promatrač fizičke pojave.

Primjer 1.2.1: Referentni okvir vezan uz vrtuljak

Klinci se na dječjem igralištu zabavljaju vrteći se na vrtuljku, dok njihovi roditelji sjede na obližnjoj klupi. Vrtuljak napravi 10 okretaja u minuti, a najbliža zgrada udaljena je $r = 100 \text{ m}$ od vrtuljka. Lako je zamisliti da će roditelji i klinci pri opisu iste situacije odabrati različite referentne okvire.

- Za očekivati je da će roditelji, bez mnogo razmišljanja, kao referentni okvir odabrati dječje igralište. Smatrat će da je samo po sebi jasno da oni miruju, dok se njihovi klinci gibaju ne prevelikom brzinom duž kružnih putanja.
- Klinci bi svoj referentni okvir mogli vezati uz vrtuljak u odnosu na koji oni miruju. Uz takav odabir referentnog okvira, njihovi roditelji na klupi ne miruju, već zajedno s klupom kruže oko vrtuljka prilično velikom brzinom. Isto vrijedi i za zgradu. Nađe li se na vrtuljku neki malo stariji klinac (npr. iz sedmog be), s lakoćom bi mogao izračunati iznos brzine zgrade,

$$v = \frac{(\text{opseg putanje zgrade})}{(\text{ophodno vrijeme})} = \frac{2r\pi}{(1 \text{ min})/10} \simeq \frac{628 \text{ m}}{6 \text{ s}} \simeq 105 \text{ m s}^{-1} \simeq 377 \text{ km h}^{-1},$$

i zadiviti mlađe klince.

Izgled nekog gibanja u velikoj mjeri ovisi o odabiru referentnog okvira. Praktičnim odabirom referentnog okvira možemo značajno pojednostaviti izgled gibanja i time olakšati njegovu analizu.

1.3 Fizičke dimenzije (masa, duljina i vrijeme) i mjerne jedinice

Temeljne fizičke dimenzije: Masu, duljinu i vrijeme smatramo temeljnim fizičkim dimenzijama,³ a obilježavamo ih simbolima M , L i T . Fizička dimenzija fizičkih veličina koje susrećemo u mehanici može se izraziti kao umnožak potencija temeljnih fizičkih dimenzija. Općenito možemo napisati

$$[\text{fizička veličina}] = M^\alpha L^\beta T^\gamma, \quad (1.6)$$

gdje uglate zagrade znače da se jednakost odnosi isključivo na fizičku dimenziju fizičke veličine, a ne na njen iznos ili smjer, a eksponenti α , β i γ su realni brojevi. Uzmemo li brzinu kao primjer, s obzirom na to da je ona omjer duljine i vremena, njena je fizička dimenzija $[v] = LT^{-1}$, odnosno $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Za fizičke veličine čija dimenzija je 1 (odnosno $\alpha = \beta = \gamma = 0$) kažemo da nemaju dimenziju ili da su bezdimenzijske.

Mjerna jedinica: Fizička dimenzija nam govori kakvu je mjernu jedinicu potrebno odabrati za iskazivanje iznosa neke fizičke veličine. S obzirom na to da sustav SI (vidi dodatak A i [10]) propisuje kilogram, metar i sekundu kao mjerne jedinice za masu, duljinu i vrijeme, kao mjernu jedinicu za fizičku veličinu iz (1.6) možemo koristiti $\text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma$.

Primjer 1.3.1: Fizička dimenzija sile

Pri određivanju fizičke dimenzije fizičkih veličina nerijetko se moramo poslužiti definicijama ili zakonima fizike. Kao primjer fizičke veličine uzmimo silu,

$$[\text{sila}] = [\text{masa} \times \text{akceleracija}] = \left[\text{masa} \times \frac{\text{brzina}}{\text{vrijeme}} \right] = \left[\text{masa} \times \frac{\text{duljina/vrijeme}}{\text{vrijeme}} \right] = MLT^{-2}.$$

Podrazumijevamo da je sila umnožak mase i akceleracije te da je akceleracija po definiciji omjer brzine i vremena. Slijedi da je odgovarajuća mjerna jedinica u sustavu SI kg m s^{-2} koja je još poznata kao njutn (engl. *newton*), odnosno

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}.$$

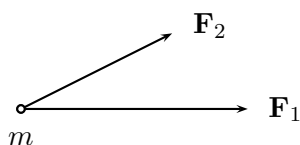
Osim fizičkih dimenzija M , L i T u elektromagnetizmu se pojavljuje i električni naboj Q kao četvrta temeljna fizička dimenzija. Mjerna jedinica za naboj u sustavu SI je kulon (C).

³Riječ dimenzija u fizici poprma barem tri različita značenja, što može biti zbunjujuće. Dimenzija prostora govori o broju međusobno okomitih smjerova koje on dopušta, dimenzije tijela govore o njegovoj veličini, dok u ovom poglavlju govorimo o tzv. fizičkim dimenzijama fizičkih veličina, što nije izravno povezano s prva dva značenja iste riječi.

1.4 Skalarne i vektorske fizičke veličine i polja

Skalarne fizičke veličine: Fizičke veličine koje nose informaciju isključivo o iznosu neke pojave, ali ne i o smjeru u prostoru, zovemo skalarnim fizičkim veličinama. Primjeri skalarnih fizičkih veličina, odnosno veličina kod kojih nema smisla govoriti o njihovom smjeru, su masa m , rad W , temperatura T , tlak p itd. U matematičkom zapisu ih obilježavamo ukošenim (običnim) simbolima.

Vektorske fizičke veličine osim o iznosu neke veličine sadrže i podatak o njenu smjeru. Primjeri vektorskih fizičkih veličina su brzina \mathbf{v} , akceleracija \mathbf{a} , sila \mathbf{F} itd. U ovom tekstu vektorske fizičke veličine obilježavamo masno otisnutim uspravnim simbolima, a na slikama ih prikazujemo strelicama čija je duljina razmjerna njihovom iznosu. Slika prikazuje sile \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 koje djeluju na česticu mase m .



Kad nas zanima isključivo iznos neke vektorske fizičke veličine, a ne i njen smjer, koristimo znakove apsolutne vrijednosti ili samo običan ukošeni simbol. Na primjer, iznos vektorske fizičke veličine \mathbf{a} obilježavamo s $|\mathbf{a}|$ ili jednostavno a .

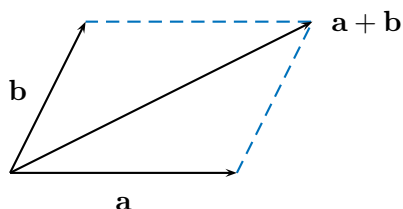
Kad nas zanima isključivo smjer, a ne i iznos neke vektorske fizičke veličine, koristimo tzv. jedinični vektor odnosno vektor čiji je iznos jednak jedinici. Jedinični vektor koji odgovara nekom vektoru obilježavamo dodavanjem kapice iznad odgovarajućeg simbola. Na primjer, jedinični vektor koji odgovara vektorskoj fizičkoj veličini \mathbf{a} obilježavamo s $\hat{\mathbf{a}}$.

Svaki vektor može se napisati kao umnožak njegovog iznosa i jediničnog vektora koji određuje smjer, na primjer

$$\mathbf{a} = a \hat{\mathbf{a}}. \quad (1.7)$$

Računske operacije: Pri izražavanju zakona fizike koristimo matematičke relacije u kojima se fizičke veličine pojavljuju kao skalari i vektori. Najvažnije računske operacije koje pritom koristimo su sljedeće:

- **Zbrajanje skalara** daje skalar, $\alpha + \beta = \gamma$, a **zbrajanje vektora** daje vektor, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Operacije zbrajanja imaju smisla samo ako pribrojnici imaju jednaku fizičku dimenziju. Fizička dimenzija zbroja jednaka je fizičkoj dimenziji pribrojnika. Zbrajanje vektora provodi se prema poznatom "pravilu paralelograma" prikazanom na slici.



- **Množenje vektora skalarom:** Množenje vektora \mathbf{a} skalarom λ daje vektor $\lambda\mathbf{a}$. Smjer umnoška $\lambda\mathbf{a}$ jednak je smjeru vektora \mathbf{a} ako je $\lambda > 0$, a suprotan je ako je $\lambda < 0$. Iznos vektora $\lambda\mathbf{a}$ jednak je umnošku apsolutne vrijednosti skalara λ i iznosa vektora \mathbf{a} odnosno $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| = |\lambda|a$. Fizička dimenzija vektora $\lambda\mathbf{a}$ jednaka je umnošku fizičkih dimenzija skalara λ i vektora \mathbf{a} .
- **Skalarno množenje** vektora \mathbf{a} i vektora \mathbf{b} daje skalar,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \gamma, \quad (1.8)$$

gdje je γ kut među vektorima \mathbf{a} i \mathbf{b} , a $a = |\mathbf{a}|$ i $b = |\mathbf{b}|$ su njihovi iznosi. Pisanje točkice kao operatora skalarnog množenja je obavezno. Iz definicije (1.8) slijedi da je skalarni umnožak okomitih vektora jednak nuli, dok je skalarni umnožak vektora istog smjera jednak jednostavnom umnošku njihovih modula. Skalarni umnožak omogućuje da se modul vektora napiše kao korijen iz skalarnog umnoška vektora sa samim sobom,

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.9)$$

- **Jedinični vektor** koji odgovara vektoru \mathbf{a} dobiva se množenjem tog vektora recipročnom vrijednošću njegova iznosa,

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{a} \mathbf{a}. \quad (1.10)$$

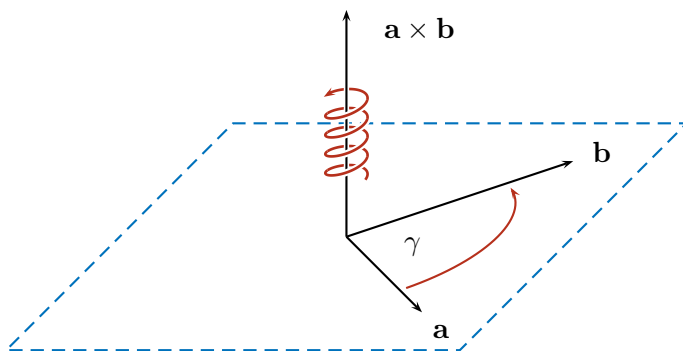
- **Vektorsko množenje** vektora \mathbf{a} vektorom \mathbf{b} ,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

daje vektor. Pisanje operatora \times je obavezno jer se po tome zapis vektorskog umnoška razlikuje od skalarnog umnoška. Iznos vektorskog umnoška dan je s

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \gamma, \quad (1.12)$$

gdje je γ kut među vektorima \mathbf{a} i \mathbf{b} , a fizička dimenzija je jednaka umnošku fizičkih dimenzija \mathbf{a} i \mathbf{b} . Smjer vektorskog umnoška je određen "pravilom desnog vijka". To znači da je vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ okomit na ravninu u kojoj leže vektori \mathbf{a} i \mathbf{b} te da je usmjeren onako kako bi napredovao desni vijak kad bismo ga okretali u smjeru u kojem se \mathbf{a} najkraćim putem zakreće prema \mathbf{b} . Slika prikazuje vektore \mathbf{a} i \mathbf{b} koji leže u ravnini naznačenoj plavim četverokutom i njihov vektorski umnožak $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



Vektorski umnožak je antikomutativan,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (1.13)$$

a općenito vrijede jednakosti

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (1.15)$$

Skalarna i vektorska fizička polja: Fizičke veličine koje opisuju pojave koje su sve vrijeme prisutne u svim točkama prostora i pritom u različitim točkama prostora mogu poprimiti različite vrijednosti (iznos ili smjer) zovemo fizičkim poljima. U ovom udžbeniku ćemo susresti skalarna i vektorska fizička

polja (engl. *scalar and vector physical fields*). Primjeri skalarnih polja su gustoća, temperatura i tlak fluida, a primjeri vektorskih polja su brzina toka fluida, jakost gravitacijskog polja ili, u elektromagnetizmu, električno i magnetsko polje. Najjednostavnija polja koja susrećemo su ona koja svim točkama prostora pridružuju istu skalarnu ili vektorsku vrijednost. Takva polja zovemo homogenim poljima.

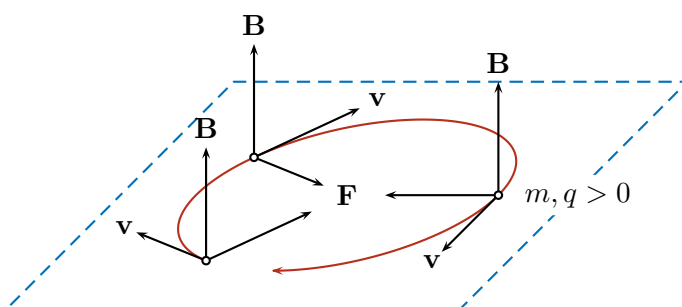
Primjer 1.4.1: Lorentzova sila

Vjerojatno najpoznatiji izraz u fizici u kojem susrećemo vektorski umnožak je izraz za Lorentzovu silu. Radi se o sili \mathbf{F} koja djeluje na česticu naboja q kada se ona brzinom \mathbf{v} giba kroz prostor u kojem je prisutno električno polje \mathbf{E} i magnetsko polje \mathbf{B} . Lorentzovu silu opisujemo izrazom

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Uočavamo da prisutnost električnog polja \mathbf{E} dovodi do sile $q\mathbf{E}$ koja djeluje u smjeru samog polja ako je $q > 0$, odnosno u suprotnom smjeru ako je $q < 0$. Nasuprot tomu, prisutnost magnetskog polja \mathbf{B} dovodi do sile $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ koja je okomita kako na smjer polja, tako i na vektor brzine čestice \mathbf{v} odnosno na njenu putanju.

Kao primjer uzmimo slučaj u kojem električno polje nije prisutno, $\mathbf{E} = 0$, a magnetsko polje \mathbf{B} je homogeno što znači da svuda u prostoru ima isti iznos i smjer. Brzina \mathbf{v} naboja $q > 0$ neka leži u ravnini koja je okomita na \mathbf{B} .



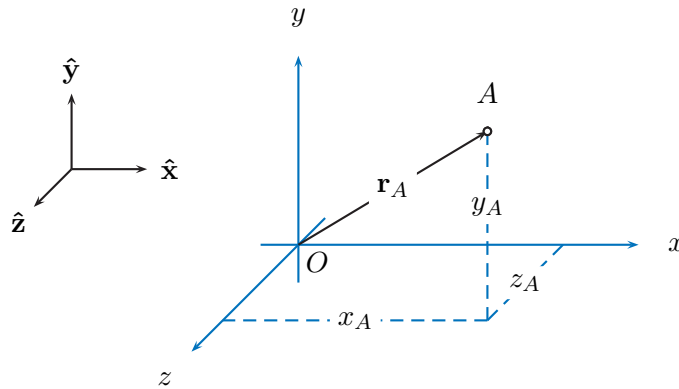
Sila $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ prikazana na slici okomita je na brzinu čestice što dovodi do njena skretanja u smjeru sile te do kružnog gibanja čestice u ravnini naznačenoj plavim pravokutnikom.

1.5 Pravokutni koordinatni sustav

Koordinatni sustav (engl. *coordinate system*) svakoj točki prostora u odabranom referentnom okviru jednoznačno pridružuje tri broja koje zovemo koordinatama te točke. On nam omogućuje da položaj čestice u prostoru izrazimo trima koordinatama točke prostora u kojoj se ona nalazi. Ako se čestica giba, koordinate njenog položaja se u vremenu mijenjaju, a ako ona miruje, njene su koordinate u vremenu stalne.

Koordinatni sustav je moguće konstruirati na različite načine, a najjednostavniji među njima je tzv. pravokutni koordinatni sustav.

Pravokutni koordinatni sustav (engl. *rectangular coordinate system*) koristi tri međusobno okomite usmjerene osi koje se sijeku u točki O koju zovemo ishodištem te tri jedinična vektora koji gledaju u smjeru tih osi. Uobičajene oznake za osi su x , y i z -os, dok jedinične vektore obilježavamo simbolima \hat{x} , \hat{y} i \hat{z} . Također se podrazumijeva tzv. "desna orijentacija" pravokutnog koordinatnog sustava što znači da vrijedi $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$.



Vektor \mathbf{r}_A koji opisuje položaj točke A u odnosu na ishodište možemo napisati kao

$$\mathbf{r}_A = x_A \hat{x} + y_A \hat{y} + z_A \hat{z}, \quad (1.16)$$

gdje su veličine x_A , y_A i z_A koordinate točke A . Udaljenost točke A od ishodišta jest modul tog vektora,

$$r_A = |\mathbf{r}_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}. \quad (1.17)$$

Položaj točke B u odnosu na točku A opisujemo vektorom

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B - x_A) \hat{x} + (y_B - y_A) \hat{y} + (z_B - z_A) \hat{z}, \quad (1.18)$$

a udaljenost među tim točkama je

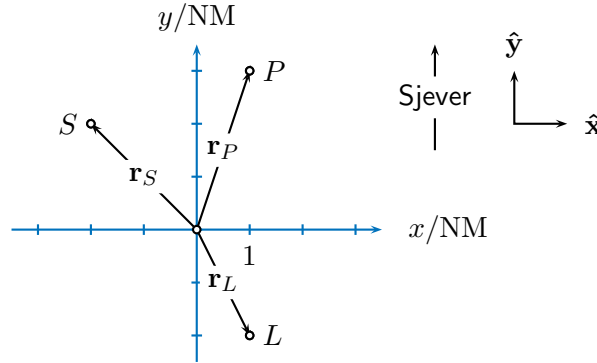
$$r_{AB} = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (1.19)$$

Primjer 1.5.1: Akcija spašavanja na moru

M/B (motorni brod) Lokarda traži pomoć zbog havarije, a nalazi se 2 NM (NM je kratica za nautičku milju, engl. *nautical mile*, 1 NM = 1852 m) južno i 1 NM istočno u odnosu na hrid. Dva najbliža broda mjestu havarije su M/B Skuša koji se nalazi 2 NM zapadno i 2 NM sjeverno i M/B Plavica koji se nalazi 1 NM istočno i 3 NM sjeverno u odnosu na istu hrid. Najveća brzina koju postiže Skuša iznosi 10 kn (kn je oznaka za čvor, engl. *knot*, 1 kn = 1 NM/h), a najveća

brzina Plavice je 8 kn. Koji od ta dva broda može u kraćem vremenu stići u pomoć posadi Lokarde?

Uvodimo pravokutni koordinatni sustav tako da mu se ishodište podudara s hridi, x -os neka je usmjerena prema istoku, a y -os prema sjeveru. Položaje brodova prikazujemo točkama L , S i P .



Položaje brodova u odnosu na ishodište sada možemo prikazati vektorima

$$\mathbf{r}_L = (1 \text{ NM}) \hat{\mathbf{x}} + (-2 \text{ NM}) \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_S = (-2 \text{ NM}) \hat{\mathbf{x}} + (2 \text{ NM}) \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_P = (1 \text{ NM}) \hat{\mathbf{x}} + (3 \text{ NM}) \hat{\mathbf{y}}.$$

Položaj Lokarde u odnosu na Skušu i položaj Lokarde u odnosu na Plavicu dani su vektorima

$$\mathbf{r}_{SL} = \mathbf{r}_L - \mathbf{r}_S = \dots = (3 \text{ NM}) \hat{\mathbf{x}} + (-4 \text{ NM}) \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_{PL} = \mathbf{r}_L - \mathbf{r}_P = \dots = (-5 \text{ NM}) \hat{\mathbf{y}},$$

a moduli tih vektora su udaljenosti među brodovima,

$$r_{SL} = \sqrt{(3 \text{ NM})^2 + (-4 \text{ NM})^2} = 5 \text{ NM}, \quad r_{PL} = \sqrt{(-5 \text{ NM})^2} = 5 \text{ NM}.$$

Kako su brodovi Skuša i Plavica jednako udaljeni od mjesta havarije broda Lokarde, na mjesto havarije će u kraćem vremenu stići brži od tih dvaju brodova. To je ovdje M/B Skuša koji na mjesto havarije može stići za 30 min.

Ako vektor \mathbf{a} opisuje neku fizičku veličinu, u pravokutnom koordinatnom sustavu ga možemo prikazati kao

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.20)$$

gdje veličine a_x , a_y i a_z zovemo x , y i z -komponentom vektora \mathbf{a} . Zbroj vektora i umnožak vektora i skalara dani su izrazima

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \hat{\mathbf{x}} + (a_y + b_y) \hat{\mathbf{y}} + (a_z + b_z) \hat{\mathbf{z}}, \quad \lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \hat{\mathbf{x}} + \lambda a_y \hat{\mathbf{y}} + \lambda a_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.21)$$

Skalarni umnožak dvaju vektora može se izraziti kao

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.22)$$

dok se vektorski umnožak može izraziti kao

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\mathbf{y}} (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{\mathbf{z}} (a_x b_y - a_y b_x). \quad (1.23)$$

Zadaci

Z.1.1: Od kapljice sapunice čija je masa $m = 10 \text{ mg}$ nastao je balon oblika sfere polumjera $R = 5 \text{ cm}$. Pretpostavljajući da je gustoća sapunice jednaka gustoći vode ($\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$) procijenite debljinu stijenke balona.

$$\text{Rj: } d = m/(4\pi R^2 \rho) \simeq 320 \text{ nm}.$$

Z.1.2: Brzina kojom se klinci na vrtuljku iz primjera 1.2.1 gibaju u odnosu na referentni okvir vezan uz igralište manja je od brzine kojom se njihovi roditelji koji sjede na klupi gibaju u odnosu na referentni okvir vezan uz vrtuljak. Pokušajte (bez računanja) objasniti zašto je to tako.

Z.1.3: Koristeći definicije koje znate iz srednje škole, odredite fizičke dimenzije sljedećih fizičkih veličina: brzina v , volumen V , gustoća ρ , tlak p i kinetička energija $K = \frac{1}{2}mv^2$.

$$\text{Rj: } [v] = LT^{-1}, [V] = L^3, [\rho] = ML^{-3}, [p] = ML^{-1}T^{-2}, [K] = ML^2T^{-2}$$

Z.1.4: Poštanski avion koji polijeće s aerodroma A mora obići aerodrome B , C i D i potom se vratiti na aerodrom A . Položaji aerodroma B , C i D u odnosu na A dani su vektorima

$$\mathbf{r}_{AB} = (150 \text{ km}) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_{AC} = (250 \text{ km}) \frac{3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}}}{5}, \quad \mathbf{r}_{AD} = (250 \text{ km}) \frac{4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}}}{5},$$

gdje $\hat{\mathbf{x}}$ gleda prema istoku, a $\hat{\mathbf{y}}$ gleda prema sjeveru. Kojim redoslijedom avion mora obići aerodrome B , C i D da putovanje bude što je moguće kraće?

$$\text{Rj: } C, B, D \text{ ili } D, B, C, d \simeq 858 \text{ km}.$$

Z.1.5: Udaljenost točke C od pravca na kojem leže točke A i B može se izraziti kao

$$d = |\mathbf{r}_{AC}| \sqrt{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{AC} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{AB})^2},$$

gdje su \mathbf{r}_{AC} i \mathbf{r}_{AB} vektori položaja točaka C i B u odnosu na točku A , a $\hat{\mathbf{r}}_{AC}$ i $\hat{\mathbf{r}}_{AB}$ su jedinični vektori. Najprije se uvjerite u valjanost gornjeg izraza (izvedite ga), a zatim s pomoću njega odredite koliko blizu hridi će proći M/B Skuša iz primjera 1.5.1 u akciji spašavanja posade M/B Lokarde.

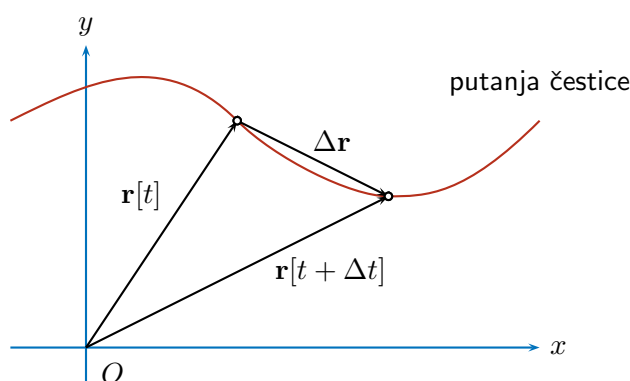
$$\text{Rj: } d = 0.4 \text{ NM}$$

2 Kinematika čestice

Kinematika čestice bavi se matematičkim opisom gibanja čestice u prostoru i vremenu. U ovom poglavlju najprije uvodimo pojmove kao što su putanja, vektor brzine i vektor akceleracije čestice, a nakon toga posebna je pažnja posvećena gibanju stalnom brzinom, gibanju stalnom akceleracijom te kružnom gibanju.

2.1 Položaj, putanja, brzina i akceleracija čestice

Položaj i putanja čestice: Položaj (engl. *position*) čestice u odnosu na odabranu ishodišnu točku O opisujemo vektorom \mathbf{r} . Kad želimo naglasiti da se čestica giba odnosno da vektor njenog položaja \mathbf{r} ovisi o vremenu t , kažemo da je položaj čestice opisan vektorskom funkcijom $\mathbf{r}[t]$. Krivulja koju vektorska funkcija $\mathbf{r}[t]$ tijekom vremena opisuje u prostoru jest putanja čestice (engl. *trajectory*). Slika prikazuje putanju čestice te vektor položaja \mathbf{r} u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$.



Pomak (engl. *displacement*) $\Delta \mathbf{r}$ je vektor koji opisuje promjenu položaja čestice koja nastupa u vremenskom intervalu od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$,

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}[t + \Delta t] - \mathbf{r}[t]. \quad (2.1)$$

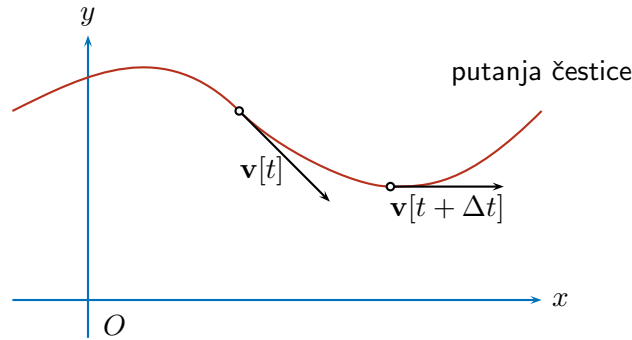
S obzirom na to da čestica ne može nestati i iznenada se pojaviti na nekom drugom mjestu, kad $\Delta t \rightarrow 0$, onda i $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$.

Brzina čestice: Neka je $\Delta \mathbf{r}$ pomak čestice koji se dogodio u vremenskom intervalu Δt . Brzina čestice (engl. *velocity*) je vektorska veličina definirana kao limes “omjera” $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ kad Δt teži u nulu, odnosno

$$\mathbf{v}[t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}[t + \Delta t] - \mathbf{r}[t]}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}[t], \quad (2.2)$$

što prepoznamo kao derivaciju položaja čestice opisanog vektorskom funkcijom $\mathbf{r}[t]$ po vremenu t .

Slika prikazuje vektore brzine čestice u trenucima t i $t + \Delta t$.



Smjer brzine: Vektor brzine je u svakoj točki putanje paralelan tangenti na putanju pa se još kaže i da on “leži na tangenti” ili da je “paralelan samoj putanji”. Također je dopušteno reći da vektor brzine \mathbf{v} i odgovarajući jedinični vektor $\hat{\mathbf{v}}$ “gledaju u smjeru gibanja”.

Iznos brzine čestice (engl. *speed*) može se povezati s duljinom puta koji čestica prealjuje duž svoje putanje. Diferencijal duljine puta ds jednak je iznosu diferencijala pomaka čestice, $ds = |d\mathbf{r}|$, a to znači da iznos brzine možemo napisati kao

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}, \quad (2.3)$$

što je derivacija duljine prealjenog puta po vremenu.

Promjena brzine čestice koja nastupa u vremenskom intervalu od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$ je

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}[t + \Delta t] - \mathbf{v}[t]. \quad (2.4)$$

Kad $\Delta t \rightarrow 0$, onda i $\Delta \mathbf{v} \rightarrow 0$.

Akceleracija čestice: Neka je $\Delta \mathbf{v}$ promjena brzine koja je nastupila u vremenskom intervalu Δt . Akceleracija (engl. *acceleration*) je vektorska veličina definirana kao limes “omjera” $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$ kad $\Delta t \rightarrow 0$ teži u nulu, odnosno

$$\mathbf{a}[t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}[t + \Delta t] - \mathbf{v}[t]}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}[t], \quad (2.5)$$

što prepoznajemo kao derivaciju brzine čestice $\mathbf{v}[t]$ po vremenu t .

S obzirom na to da je brzina derivacija položaja po vremenu, akceleraciju možemo izraziti i kao drugu derivaciju položaja po vremenu,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{d}{dt} \mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{r}[t] \right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}[t]. \quad (2.6)$$

Smjer akceleracije: Kad se čestica giba duž zakrivljene putanje, smjer vektora akceleracije nije paralelan tangenti na putanju, već je više ili manje “zakrenut” u smjeru u kojem čestica u danom trenutku “skreće”.

Primjer 2.1.1: Položaj, brzina i akceleracija u pravokutnom koordinatnom sustavu

- **Položaj:** Koristimo li pravokutni koordinatni sustav, položaj čestice u trenutku t opisujemo vektorskom funkcijom

$$\mathbf{r}[t] = x[t] \hat{\mathbf{x}} + y[t] \hat{\mathbf{y}} + z[t] \hat{\mathbf{z}},$$

gdje funkcije $x[t]$, $y[t]$ i $z[t]$ predstavljaju x , y i z -koordinatu položaja čestice u trenutku t .

- **Brzina:** Deriviranjem položaja $\mathbf{r}[t]$ po vremenu t dobivamo vektor brzine,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt} \mathbf{r}[t] = \frac{dx[t]}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dy[t]}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dz[t]}{dt} \hat{\mathbf{z}},$$

što još zapisujemo kao

$$\mathbf{v}[t] = v_x[t] \hat{\mathbf{x}} + v_y[t] \hat{\mathbf{y}} + v_z[t] \hat{\mathbf{z}},$$

gdje funkcije $v_x[t] = \frac{d}{dt}x[t]$, $v_y[t] = \frac{d}{dt}y[t]$ i $v_z[t] = \frac{d}{dt}z[t]$ predstavljaju x , y i z -komponentu vektora brzine.

- **Akceleracija:** Deriviranjem brzine $\mathbf{v}[t]$ po vremenu dobivamo vektor akceleracije,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{d}{dt} \mathbf{v}[t] = \frac{dv_x[t]}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dv_y[t]}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dv_z[t]}{dt} \hat{\mathbf{z}},$$

što još zapisujemo kao

$$\mathbf{a}[t] = a_x[t] \hat{\mathbf{x}} + a_y[t] \hat{\mathbf{y}} + a_z[t] \hat{\mathbf{z}},$$

gdje su $a_x[t] = \frac{d}{dt}v_x[t] = \frac{d^2}{dt^2}x[t]$ itd., x , y i z -komponenta akceleracije.

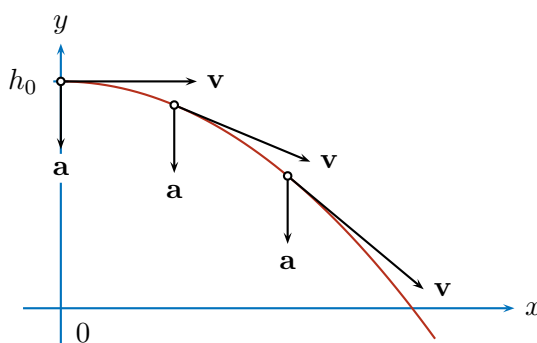
- **Skraćeni zapis:** Često se koristi skraćeni zapis vektora položaja, brzine i akceleracije u kojem se izostavlja oznaka ovisnosti funkcije o vremenu, a prva i druga derivacija funkcije po vremenu se označavaju se jednom ili dvjema točkama iznad simbola. Položaj, brzinu i akceleraciju možemo zapisati kao

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{v} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} + \dot{y} \hat{\mathbf{y}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}} + \ddot{y} \hat{\mathbf{y}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}},$$

odnosno $v_x = \dot{x}$, $a_x = \ddot{x}$ itd.

Primjer 2.1.2: Vodoravni hitac

Razmotrit ćemo gibanje sitnog tijela (čestice) koje je s visine h_0 bačeno u vodoravnom smjeru brzinom iznosa v_0 (tzv. vodoravni hitac). Slika prikazuje putanju tijela te vektore njegove brzine i akceleracije u početnom trenutku te u dvama kasnijim trenucima.



Uočavamo da vektor akceleracije \mathbf{a} gleda u smjeru u kojem tijelo skreće, dok vektor brzine \mathbf{v} gleda u smjeru gibanja. U nastavku ćemo upoznati matematičke izraze koji opisuju gibanje sa slike.

- **Vektor položaja:** Položaj tijela u x, y -ravnini pravokutnog koordinatnog sustava (x -os je vodoravna, y -os je usmjerena uvis, a kao početni trenutak odabiremo $t = 0$) opisujemo vektorom

$$\mathbf{r}[t] = v_0 t \hat{\mathbf{x}} + \left(h_0 - \frac{g}{2} t^2 \right) \hat{\mathbf{y}},$$

gdje je g iznos akceleracije slobodnog pada.

- **Jednadžba putanje:** U izrazu za vektor položaja tijela $\mathbf{r}[t]$ prepoznamo koordinate položaja

$$x[t] = v_0 t \quad \text{i} \quad y[t] = h_0 - \frac{g}{2} t^2.$$

Eliminacijom vremena t iz gornjih dviju jednadžbi dobivamo jednadžbu putanje u obliku

$$y[x] = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Prepoznamo da je riječ o paraboli s tjemenom u $x = 0$ i $y = h_0$.

- **Brzina:** Vektor brzine dobivamo deriviranjem izraza za vektor položaja $\mathbf{r}[t]$ po vremenu, pri čemu s jediničnim vektorima $\hat{\mathbf{x}}$ i $\hat{\mathbf{y}}$ pravokutnog koordinatnog sustava postupamo kao s konstantnim veličinama,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt} \mathbf{r}[t] = \frac{d}{dt} \left(v_0 t \hat{\mathbf{x}} + \left(h_0 - \frac{g}{2} t^2 \right) \hat{\mathbf{y}} \right) = v_0 \hat{\mathbf{x}} - gt \hat{\mathbf{y}}.$$

Uočavamo da je x -komponenta brzine $v_x[t] = v_0$ stalna u vremenu, dok je y -komponenta brzine $v_y[t] = -gt$ usmjerena prema dolje i s vremenom se po iznosu povećava.

- **Akceleracija:** Vektor akceleracije dobivamo deriviranjem vektora brzine $\mathbf{v}[t]$ po vremenu,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{d}{dt} \mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt} (v_0 \hat{\mathbf{x}} - gt \hat{\mathbf{y}}) = -g \hat{\mathbf{y}},$$

što je očekivani vektor akceleracije slobodnog pada koji je stalan u vremenu i jednak svuda u prostoru.

Gibanje duž pravca: U posebnom slučaju u kojem se čestica giba isključivo duž pravca (tzv. pravocrtno gibanje, engl. *rectilinear motion*), vektor brzine i vektor akceleracije čestice paralelni su s tim pravcem. Ako se gibanje odvija duž x -osi, položaj, brzinu i akceleraciju opisujemo vektorima

$$\mathbf{r}[t] = x[t] \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}[t] = v_x[t] \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}[t] = a_x[t] \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.7)$$

čije su y i z -komponente jednake nuli. Zbog jednostavnosti tih vektorskih izraza, uvriježeno je izostaviti jedinični vektor $\hat{\mathbf{x}}$ te o njihovim x -komponentama, a to su veličine

$$x[t], \quad v_x[t] = \frac{d}{dt} x[t], \quad a_x[t] = \frac{d}{dt} v_x[t], \quad (2.8)$$

govoriti kao o “položaju”, “brzini” i “akceleraciji” tijela. Pritom valja voditi računa o tome da brzina $v_x[t]$ može biti pozitivna ili negativna, ovisno o smjeru gibanja. Akceleracija $a_x[t]$ također može

biti pozitivna ili negativna, ovisno o tome povećava li se x -komponenta brzine u vremenu ili se ona smanjuje. Suprotno tomu, iznos brzine i iznos akceleracije su veličine koje ne mogu biti negativne, a ovdje ih možemo izraziti kao

$$v[t] = |v_x[t]|, \quad a[t] = |a_x[t]|. \quad (2.9)$$

Primjer 2.1.3: *Položaj, brzina i akceleracija pri harmonijskom titranju*

Jedno od najvažnijih gibanja u fizici koje se može odvijati duž pravca je tzv. harmonijsko titranje (vidi poglavlje 6). Položaj čestice koja harmonijski titra duž x -osi između točaka $x = \pm A$ možemo opisati izrazom za x -koordinatu

$$x[t] = A \cos \omega t,$$

gdje konstante $A > 0$ i $\omega > 0$ zovemo *amplitudom* i *kutnom frekvencijom* titranja.

Amplituda A ima fizičku dimenziju L (duljina). Krajnje točke titranja $x = \pm A$ još zovemo i *točkama obrata* jer se u njima čestica na trenutak zaustavlja i obrće smjer svojeg gibanja.

Kutna frekvencija ima dimenziju T^{-1} (inveržno vrijeme), a s obzirom na to da pomnožena vremenom predstavlja argument trigonometrijske funkcije, kao mjerna jedinica kutne frekvencije koristi se radijan u sekundi (rad/s).

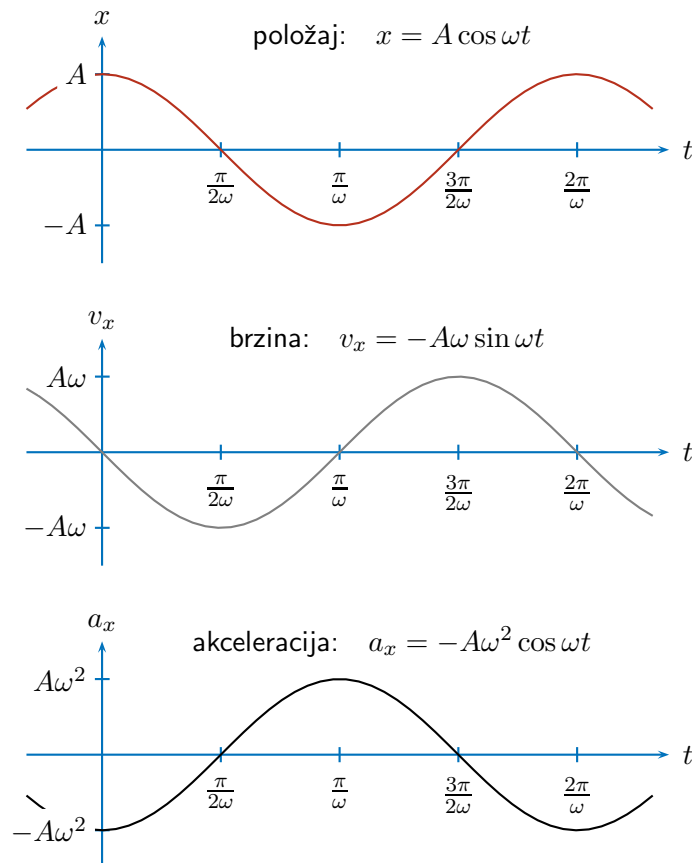
Deriviranjem izraza za x -koordinatu položaja čestice po vremenu dobivamo izraz za x -komponentu njene brzine,

$$v_x[t] = \frac{d}{dt}x[t] = \frac{d}{dt}(A \cos \omega t) = -A\omega \sin \omega t,$$

a deriviranjem x -komponente brzine po vremenu dobivamo x -komponentu akceleracije,

$$a_x[t] = \frac{d}{dt}v_x[t] = \frac{d}{dt}(-A\omega \sin \omega t) = -A\omega^2 \cos \omega t.$$

Slika prikazuje ovisnost x -komponente položaja (crvena linija), brzine (siva linija) i akceleracije (crna linija) čestice o vremenu.



U odnosu položaja (crvena linija) i brzine (siva linija) prepoznavamo sljedeće:

- Kad x -koordinata položaja raste u vremenu (crvena linija se uspinje), brzina v_x je pozitivna (siva linija je "iznad nule").
- Kad se čestica nalazi u točki obrata (maksimum ili minimum crvene linije) brzina v_x je jednaka nuli (siva linija ima nul-točku odnosno mijenja predznak).

U odnosu brzine (siva linija) i akceleracije (crna linija) uočavamo:

- Kad se brzina v_x povećava (siva linija se uspinje), akceleracija a_x je pozitivna (crna linija "iznad nule").
- Kad brzina v_x (siva linija) dosegne minimum ili maksimum, akceleracija a_x je jednaka nuli (crna linija ima nul-točku odnosno mijenja predznak).

2.2 Inverzne relacije za brzinu i položaj te za duljinu puta (integrali)

Brzina: Relaciju (2.5) koja definira akceleraciju možemo napisati u obliku $d\mathbf{v}[t'] = \mathbf{a}[t'] dt'$, što možemo integrirati u vremenu t' od početnog trenutka $t' = t_0$ do trenutka $t' = t$. Time dobivamo izraz za brzinu čestice u trenutku t koji možemo napisati u obliku

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}[t_0] + \int_{t_0}^t \mathbf{a}[t'] dt', \quad (2.10)$$

gdje je $\mathbf{v}[t_0]$ brzina čestice u početnom trenutku $t = t_0$. Za razliku od relacije (2.5) koja nam omogućuje da deriviranjem brzine po vremenu izračunamo akceleraciju, relacija (2.10) nam omogućuje da u slučajevima u kojima je poznata ovisnost akceleracije čestice o vremenu te brzina čestice u početnom trenutku $t = t_0$, integriranjem akceleracije izračunamo brzinu čestice u bilo kojem kasnijem trenutku. Zato kažemo da je (2.10) inverzna relacija u odnosu na relaciju (2.5). Kad je akceleracija dana njenim koomponentama $a_x[t]$, $a_y[t]$ i $a_z[t]$ u pravokutnom koordinatnom sustavu, integracija akceleracije po vremenu u inverznoj relaciji (2.10) svodi se na integraciju komponenata akceleracije po vremenu,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathbf{a}[t'] dt' &= \int_{t_0}^t (a_x[t'] \hat{\mathbf{x}} + a_y[t'] \hat{\mathbf{y}} + a_z[t'] \hat{\mathbf{z}}) dt' \\ &= \hat{\mathbf{x}} \int_{t_0}^t a_x[t'] dt' + \hat{\mathbf{y}} \int_{t_0}^t a_y[t'] dt' + \hat{\mathbf{z}} \int_{t_0}^t a_z[t'] dt'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Položaj: Relaciju (2.2) koja definira brzinu možemo napisati u obliku $d\mathbf{r}[t'] = \mathbf{v}[t'] dt'$, a integracijom od početnog trenutka $t' = t_0$ do trenutka $t' = t$ dobivamo izraz za položaj čestice

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \int_{t_0}^t \mathbf{v}[t'] dt', \quad (2.12)$$

gdje je $\mathbf{r}[t_0]$ položaj čestice u početnom trenutku $t = t_0$. Kažemo da je (2.12) inverzna relacija u odnosu na relaciju (2.2). Kad je brzina dana njenim koomponentama $v_x[t]$, $v_y[t]$ i $v_z[t]$ u pravokutnom koordinatnom sustavu, integral u (2.12) svodi se na

$$\int_{t_0}^t \mathbf{v}[t'] dt' = \hat{\mathbf{x}} \int_{t_0}^t v_x[t'] dt' + \hat{\mathbf{y}} \int_{t_0}^t v_y[t'] dt' + \hat{\mathbf{z}} \int_{t_0}^t v_z[t'] dt'. \quad (2.13)$$

Duljina puta: Diferencijal duljine puta koji čestica prevoli gibajući se duž svoje putanje možemo izraziti kao

$$ds = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{v} dt| = |\mathbf{v}| dt = v dt,$$

gdje je \mathbf{v} brzina čestice, a $v = |\mathbf{v}|$ je iznos brzine. Duljinu puta koju čestica prevoli od trenutka $t = t_1$ do trenutka $t = t_2$ možemo izraziti integralom

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v[t] dt, \quad (2.14)$$

a ako je brzina dana njenim koomponentama $v_x[t]$, $v_y[t]$ i $v_z[t]$ u pravokutnom koordinatnom sustavu, taj se integral se može izraziti kao

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(v_x[t])^2 + (v_y[t])^2 + (v_z[t])^2} dt. \quad (2.15)$$

2.3 Gibanje stalnom brzinom (jednoliko pravocrtno gibanje)

Gibanje stalnom brzinom je gibanje pri kojem se ni smjer ni iznos brzine u vremenu ne mijenjaju. S obzirom na to da se smjer brzine ne mijenja čestica ne skreće s pravca svog gibanja pa ovo gibanje još zovemo jednolikim pravocrtnim gibanjem (engl. *uniform rectilinear motion*). Označimo li stalnu brzinu čestice s \mathbf{v}_0 , akceleracija, brzina i položaj čestice su

$$\mathbf{a}[t] = 0, \quad \mathbf{v}[t] = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}_0(t - t_0), \quad (2.16)$$

gdje je $\mathbf{r}[t_0]$ položaj čestice u početnom trenutku $t = t_0$.

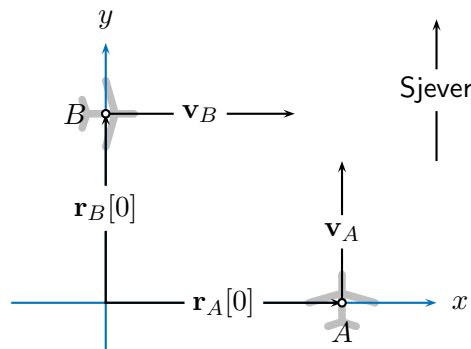
Putanja čestice je pravac koji prolazi točkom $\mathbf{r}[t_0]$, a smjer mu je određen smjerom brzine \mathbf{v}_0 . Iako je izraz za vektor položaja $\mathbf{r}[t]$ očigledan, napomenimo da do njega možemo doći uvrštavanjem stalne brzine \mathbf{v}_0 u inverznu relaciju (2.12).

Primjer 2.3.1: Izbjegavanje sudara u zračnom prometu

Avioni A i B lete na istoj visini. Avion A se u trenutku $t = 0$ nalazi $d_A = 5$ km istočno od aerodroma i leti prema sjeveru brzinom iznosa $v_A = 300$ km h⁻¹, a avion B se u tom trenutku nalazi $d_B = 4$ km sjeverno od aerodroma i leti prema istoku brzinom iznosa $v_B = 400$ km h⁻¹. Očigledno je da se pravci duž kojih avioni lete sijeku, ali s obzirom na to da avioni samim presjecištem općenito prolaze u dvama različitim trenucima, presjecanje pravaca ne znači da će se oni nužno sudariti. Kako bismo procijenili rizik od sudara aviona moramo odrediti najmanju udaljenost na kojoj će se ta dva aviona naći nastave li letjeti nepromijenjenim brzinama.

Gibanje možemo opisati u x, y -ravnini pri čemu se ishodište podudara s položajem aerodroma, x -os je usmjerena prema istoku, a y -os je usmjerena prema sjeveru. Slika prikazuje vektore položaja aviona u $t = 0$ te vektore njihovih brzina,

$$\mathbf{r}_A[0] = d_A \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_A = v_A \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_B[0] = d_B \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}_B = v_B \hat{\mathbf{x}}.$$



Koristeći (2.16), položaje aviona A i B u trenutku t opisujemo vektorima

$$\mathbf{r}_A[t] = \mathbf{r}_A[0] + \mathbf{v}_A t = d_A \hat{\mathbf{x}} + v_A t \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_B[t] = \mathbf{r}_B[0] + \mathbf{v}_B t = d_B \hat{\mathbf{y}} + v_B t \hat{\mathbf{x}}.$$

Položaj aviona B u odnosu na avion A je

$$\mathbf{r}_{AB}[t] = \mathbf{r}_B[t] - \mathbf{r}_A[t] = (v_B t - d_A) \hat{\mathbf{x}} + (d_B - v_A t) \hat{\mathbf{y}},$$

a kvadrat udaljenosti među njima je

$$r_{AB}^2[t] = \mathbf{r}_{AB}[t] \cdot \mathbf{r}_{AB}[t] = (v_B t - d_A)^2 + (d_B - v_A t)^2.$$

Trenutak t' u kojem r_{AB}^2 postiže minimum nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{d}{dt'} r_{AB}^2[t'] = \dots = 2(v_B^2 + v_A^2)t' - 2(v_B d_A + v_A d_B)$$

koji daje

$$t' = \frac{v_B d_A + v_A d_B}{v_B^2 + v_A^2}.$$

Slijedi da je najmanja vrijednost kvadrata udaljenosti među avionima

$$(r_{AB}^2)_{\min} = r_{AB}^2[t'] = \dots = \frac{(d_A v_A - d_B v_B)^2}{v_A^2 + v_B^2}$$

odnosno najmanja udaljenost među njima je

$$(r_{AB})_{\min} = \frac{|d_A v_A - d_B v_B|}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}} = \frac{|(5 \text{ km}) \times (300 \text{ km h}^{-1}) - (4 \text{ km}) \times (400 \text{ km h}^{-1})|}{\sqrt{(300 \text{ km h}^{-1})^2 + (400 \text{ km h}^{-1})^2}} = 200 \text{ m}.$$

S obzirom na to da se radi o vrlo maloj udaljenosti, a time i velikoj opasnosti od sudara, vjerojatno je da će kontrola leta tražiti promjenu visine leta za barem jedan od ovih dvaju aviona.

2.4 Gibanje stalnom akceleracijom (jednoliko ubrzano gibanje, kosi hitac)

Gibanje stalnom akceleracijom je gibanje pri kojem je vektor akceleracije čestice stalan u vremenu, a još ga zovemo jednoliko ubrzanim gibanjem (engl. *uniformly accelerated motion*). Označimo li stalnu akceleraciju s \mathbf{a}_0 , akceleracija, brzina i položaj čestice dani su izrazima

$$\mathbf{a}[t] = \mathbf{a}_0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}[t_0] + \mathbf{a}_0(t - t_0), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}[t_0](t - t_0) + \frac{\mathbf{a}_0}{2}(t - t_0)^2, \quad (2.19)$$

gdje su $\mathbf{v}[t_0]$ i $\mathbf{r}[t_0]$ brzina i položaj čestice u početnom trenutku $t = t_0$.

Izraz za brzinu (2.18) dobivamo uvrštavanjem stalne akceleracije \mathbf{a}_0 u inverznu relaciju (2.10) i integracijom, a izraz za položaj (2.19) dobivamo uvrštavanjem izraza za brzinu (2.18) u inverznu relaciju (2.12) i integracijom.

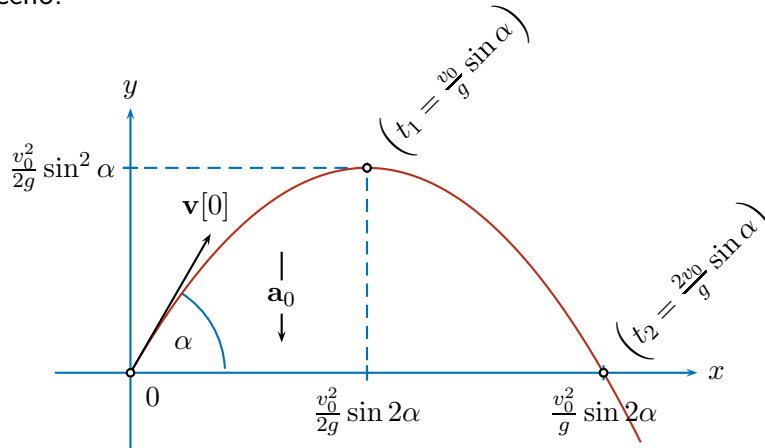
Gibanje stalnom akceleracijom odvija se duž pravca ako su \mathbf{a}_0 i $\mathbf{v}[t_0]$ istog ili suprotnog smjera. Ako \mathbf{a}_0 i $\mathbf{v}[t_0]$ zatvaraju kut različit od 0 ili π , gibanje se odvija u ravnini određenoj vektorom početnog položaja $\mathbf{r}[0]$ i razapetoj vektorima \mathbf{a}_0 i $\mathbf{v}[t_0]$, a sama putanja ima oblik parabole.

Primjer 2.4.1: Kosi hitac

Zanemarimo li sile otpora zraka, neke potankosti vezane uz prirodu gravitacijske sile te neke učinke vezane uz činjenicu da se Zemlja vrti oko svoje osi, možemo reći da se tijela u slobodnom

padu u blizini Zemljine površine gibaju jednoliko ubrzano akceleracijom iznosa $g \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$ koja je usmjerena prema tlu. Ovdje ćemo razmotriti tzv. kosi hitac odnosno slobodni pad tijela koje je u trenutku $t = 0$ bačeno brzinom početnog iznosa v_0 pod kutom α u odnosu na vodoravnu ravninu.

Gibanje prikazujemo u x, y -ravnini pri čemu se ishodište podudara s točkom iz koje je tijelo bačeno, x -os je vodoravna, y -os je usmjerena uvis, a zbog jednostavnosti uzimamo da je tijelo bačeno u trenutku $t = 0$. Slika prikazuje vektor početne brzine, putanju tijela te položaj tijela u trenutku $t = t_1$ u kojem ono postiže najveću visinu i u trenutku $t = t_2$ u kojem se nalazi na istoj visini s koje je bačeno.



Akceleraciju, početnu brzinu i početni položaj tijela možemo napisati kao

$$\mathbf{a}_0 = -g \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{v}[0] = v_0(\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{r}[0] = 0,$$

a uvrštavanjem tih veličina u (2.18) dobivamo izraz za brzinu

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}[0] + \mathbf{a}_0 t = v_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + (v_0 \sin \alpha - gt) \hat{\mathbf{y}}$$

te uvrštavanjem u (2.19) dobivamo izraz za položaj tijela

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[0] + \mathbf{v}[0]t + \frac{\mathbf{a}_0}{2}t^2 = v_0 t \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \left(v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2}t^2 \right) \hat{\mathbf{y}}.$$

Koordinate položaja su $x[t] = v_0 t \cos \alpha$ i $y[t] = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2}t^2$, a eliminacijom vremena iz njih dobivamo jednadžbu putanje koju možemo napisati u obliku

$$y[x] = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha).$$

Prepoznamo da je putanja tijela parabola u x, y -ravnini. Njeno tjeme odgovara najvišoj točki koju tijelo postiže. Jedna od njenih nultočka nalazi se u ishodištu, što odgovara točki iz koje je tijelo bačeno, a druga nultočka odgovara točki u kojoj bi tijelo palo na vodoravno tlo. Koordinate tih točaka su na gornjoj slici navedene uz x i y -os.

Trenutak t_1 u kojem se tijelo nalazi u najvišoj točki putanje dobivamo iz uvjeta da je y -komponenta brzine tom trenutku jednaka nuli,

$$v_y[t_1] = 0 \quad \implies \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \sin \alpha.$$

Koordinate najviše točke putanje možemo dobiti uvrštavanjem trenutka t_1 u izraz za položaj čestice ili pronalaženjem tjemena parabole koja predstavlja putanju čestice.

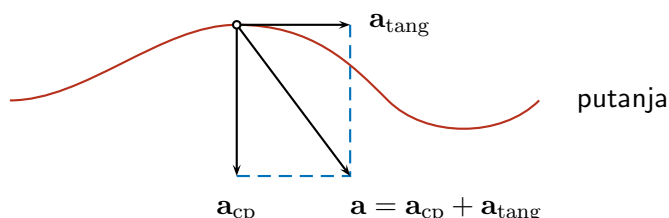
Trenutak t_2 u kojem se tijelo nalazi na visini s koje je bačeno dobivamo iz uvjeta da je y -koordinata položaja jednaka nuli,

$$y[t_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha.$$

Udaljenost te točke od ishodišta koju još zovemo “dometom projektila” dobivamo uvrštavanjem trenutka t_2 u izraz za x -koordinatu čestice ili pronalaženjem nultočke parabole koja predstavlja putanju čestice.

2.5 Centripetalna i tangencijalna akceleracija

Akceleraciju čestice definiranu izrazom (2.5) često prikazujemo kao zbroj dvaju međusobno okomitih vektora koje zovemo centripetalnom akceleracijom, \mathbf{a}_{cp} , i tangencijalnom akceleracijom, \mathbf{a}_{tang} .



Centripetalna akceleracija (engl. *centripetal acceleration*) je prisutna kad se čestica giba duž zakrivljene putanje, okomita je na putanju i odražava promjenu smjera gibanja čestice. Možemo ju izraziti kao

$$\mathbf{a}_{cp} = v \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}, \quad (2.20)$$

gdje je v iznos brzine čestice, a $\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$ je derivacija jediničnog vektora $\hat{\mathbf{v}}$ po vremenu.

Kad se čestica giba duž zakrivljene putanje, jedinični vektor $\hat{\mathbf{v}}$ tijekom vremena mijenja smjer, a njegova derivacija gleda u smjeru te promjene. S obzirom na to da diferencijalna promjena $d\hat{\mathbf{v}}$ jediničnog vektora $\hat{\mathbf{v}}$ može biti jedino okomita na njega, isto vrijedi i za derivaciju $\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$, odnosno za centripetalnu akceleraciju opisanu izrazom (2.20). Kad se čestica giba duž pravca centripetalna akceleracija je jednaka nuli.

Tangencijalna akceleracija (engl. *tangential acceleration*) leži na tangenti na putanju i govori o promjeni iznosa brzine čestice. Možemo ju izraziti kao

$$\mathbf{a}_{tang} = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{v}}, \quad (2.21)$$

gdje je $\frac{dv}{dt}$ derivacija iznosa brzine po vremenu, a $\hat{\mathbf{v}}$ je jedinični vektor vektora brzine koji gleda u smjeru gibanja.

Kad se čestica giba brzinom stalnog iznosa, neovisno o tome je li putanja zakrivljena ili nije, tangen-

cijalna akceleracija čestice jednaka je nuli. Kad se iznos brzine čestice povećava ($dv/dt > 0$) tangencijalna akceleracija čestice “gleda u smjeru gibanja” a kad se iznos brzine smanjuje ($dv/dt < 0$) ona “gleda unazad”.

Izraze (2.20) i (2.21) možemo izvesti pišući brzinu čestice \mathbf{v} kao umnožak njenog iznosa v i jediničnog vektora $\hat{\mathbf{v}}$ te računajući akceleraciju \mathbf{a} deriviranjem tog umnoška po vremenu,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\mathbf{v}}) = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{v}} + v\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}, \quad (2.22)$$

pri čemu smo koristili pravilo za deriviranje umnoška funkcija. Prvi član na desnoj strani prepoznamo kao tangencijalnu, a drugi član kao centripetalnu akceleraciju.

Primjer 2.5.1: Centripetalna akceleracija pri vožnji zavojitom cestom

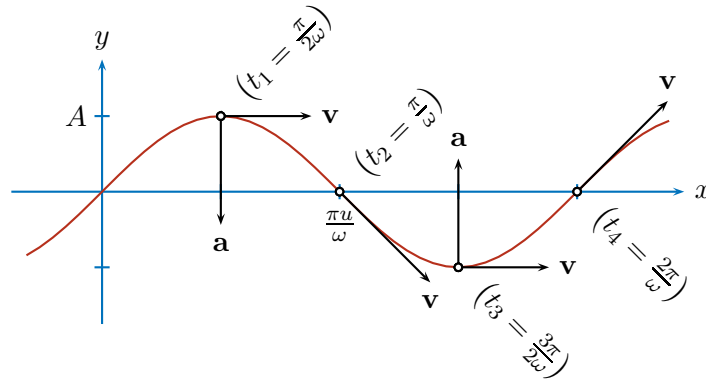
Prisutnost centripetalne akceleracije možemo pokazati u vrlo jednostavnom gibanju koje je opisano vektorom položaja

$$\mathbf{r}[t] = ut \hat{\mathbf{x}} + A \sin \omega t \hat{\mathbf{y}},$$

gdje su u , A i ω pozitivne konstante. Gibanje se odvija u x, y -ravnini, a možemo ga shvatiti kao gibanje u smjeru x -osi brzinom iznosa u uz “vijuganje” amplitudom A i kutnom frekvencijom ω , što je nalik vožnji vodoravnom cestom duž koje se izmjenjuju lijevi i desni zavoji. Koordinate položaja čestice su $x[t] = ut$ i $y[t] = A \sin \omega t$ iz čega dobivamo jednadžbu putanje

$$y[x] = A \sin \frac{\omega x}{u}.$$

Slika prikazuje putanju čestice te njen položaj, brzinu i akceleraciju u nekoliko uzastopnih trenutaka označenih s t_1 do t_4 .



Na slici uočavamo sljedeće:

- U trenutku t_1 u kojem čestica prolazi sredinom desnog zavoja i u trenutku t_3 u kojem ona prolazi sredinom lijevog zavoja, njena je akceleracija okomita na smjer njenog gibanja. To znači da se njena akceleracija u tim trenucima sastoji isključivo od centripetalne akceleracije odnosno da je njena tangencijalna akceleracija jednaka nuli. U desnom zavoju akceleracija je usmjerena nadesno, dok je u lijevom zavoju ona usmjerena ulijevo u odnosu na smjer gibanja, što odgovara smjeru u kojem čestica “skreće” odnosno smjeru derivacije $\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{v}}$ u izrazu (2.20).
- U trenutku t_2 u kojem čestica napušta desni i ulazi u lijevi zavoj, akceleracija čestice jednaka je nuli te zbog toga nije nacrtana. To znači da su u tom trenutku obje komponente akceleracije jednake nuli odnosno da se u tom trenutku ne mijenjaju niti smjer niti iznos brzine. Isto nalazimo i u trenutku t_4 u kojem čestica napušta lijevi i ulazi u desni zavoj.

Gornje navode potvrđuje sljedeći račun. Vektor brzine dobivamo deriviranjem vektora položaja,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt}\mathbf{r}[t] = \frac{d}{dt}(ut\hat{\mathbf{x}} + A\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}) = u\hat{\mathbf{x}} + A\omega\cos\omega t\hat{\mathbf{y}},$$

a vektor akceleracije dobivamo deriviranjem vektora brzine,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{d}{dt}\mathbf{v}[t] = \frac{d}{dt}(u\hat{\mathbf{x}} + A\omega\cos\omega t\hat{\mathbf{y}}) = -A\omega^2\sin\omega t\hat{\mathbf{y}}.$$

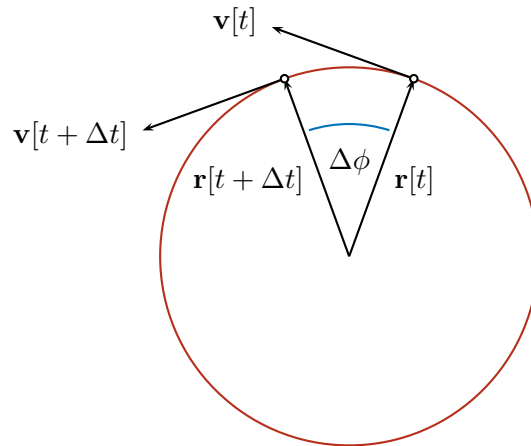
Dobivene izraze za brzinu i akceleraciju sada možemo izvrijediti u trenucima t_1 do t_4 ,

$t_1 = \pi/2\omega,$	$\mathbf{v}[t_1] = u\hat{\mathbf{x}},$	$\mathbf{a}[t_1] = -A\omega^2\hat{\mathbf{y}},$
$t_2 = \pi/\omega,$	$\mathbf{v}[t_2] = u\hat{\mathbf{x}} - A\omega\hat{\mathbf{y}},$	$\mathbf{a}[t_2] = 0,$
$t_3 = 3\pi/2\omega,$	$\mathbf{v}[t_3] = u\hat{\mathbf{x}},$	$\mathbf{a}[t_3] = A\omega^2\hat{\mathbf{y}},$
$t_4 = 2\pi/\omega,$	$\mathbf{v}[t_4] = u\hat{\mathbf{x}} + A\omega\hat{\mathbf{y}},$	$\mathbf{a}[t_4] = 0,$

Lako je uvjeriti se da su rezultati u skladu sa slikom.

2.6 Kružno gibanje

Kružno gibanje: Slika prikazuje kružnu putanju čestice, vektore položaja čestice u odnosu na središte putanje te vektore brzine čestice u dvama trenucima koji su u vremenu razmaknuti za Δt .

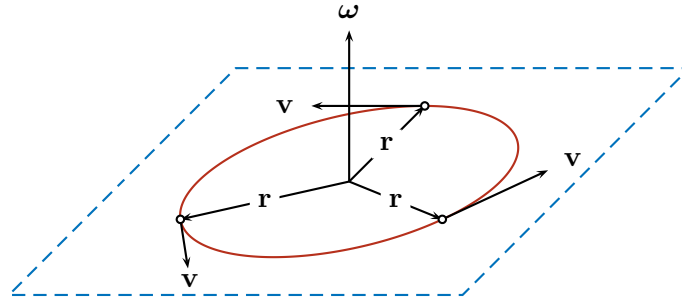


Iznos vektora položaja je stalan u vremenu i jednak je polumjeru kružnice $R = |\mathbf{r}|$, a smjer mu se mijenja tijekom gibanja. Na slici je naznačen kut $\Delta\phi$ za koji se vektor položaja \mathbf{r} zakrenuo u intervalu vremena Δt . (Također se kaže da je \mathbf{r} “prebrisao” kut $\Delta\phi$.)

Kutna brzina (engl. *angular velocity*) je vektorska fizička veličina kojom opisujemo kružno gibanje. Smjer vektora kutne brzine je po definiciji okomit na ravninu gibanja, a orijentiran je u skladu s pravilom desnog vijka, tj. onako kako bi napredovao desni vijak kad bismo ga okretali u smjeru kružnog gibanja čestice. Iznos vektora kutne brzine jest limes omjera kuta zakreta $\Delta\phi$ izraženog u radijanima (puni krug iznosi 2π rad) i vremena Δt u kojem je zakret nastupio, kad $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.23)$$

Slika prikazuje vektor kutne brzine ω za koji pretpostavljamo da je stalan te vektor položaja \mathbf{r} i vektor brzine \mathbf{v} u nekoliko različitih trenutaka u vremenu.



S obzirom na to da pri zakretu vektora \mathbf{r} za kut $\Delta\phi$ čestica duž kružnice prevali put duljine $\Delta s = R\Delta\phi$, iznos njene brzine možemo izraziti kao

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\phi}{\Delta t} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega, \quad (2.24)$$

gdje je ω iznos kutne brzine.

Brzina čestice: Smjer vektora brzine se pri kružnom gibanju podudara sa smjerom vektora $\omega \times \mathbf{r}$ (vidi gornju sliku), a s obzirom na to da zbog okomitosti ω i \mathbf{r} vrijedi $|\omega \times \mathbf{r}| = \omega R = v$, vektor brzine možemo izraziti kao

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (2.25)$$

Centripetalna akceleracija: Vektor centripetalne akceleracije je pri kružnom gibanju usmjeren prema središtu kružnice, a opisuju ga izrazi

$$\mathbf{a}_{cp} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad a_{cp} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \quad (2.26)$$

Tangencijalna i kutna akceleracija: Vektor tangencijalne akceleracije pri kružnom gibanju može se izraziti kao

$$\mathbf{a}_{tang} = \alpha \times \mathbf{r}, \quad (2.27)$$

gdje vektorsku veličinu

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.28)$$

zovemo kutnom akceleracijom.

S obzirom na to da je vektor kutne akceleracije α derivacija vektora ω koji je po definiciji okomit na ravninu gibanja, vektor α je i sam okomit na tu ravninu, a s obzirom na to da su α i \mathbf{r} međusobno okomiti, vrijedi $|\alpha \times \mathbf{r}| = \alpha R$. To znači da iznos tangencijalne akceleracije možemo napisati kao

$$a_{tang} = \alpha R. \quad (2.29)$$

Izraz za centripetalnu akceleraciju (2.26) i izraz za tangencijalnu akceleraciju (2.27) možemo izvesti deriviranjem izraza za brzinu (2.25),

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.30)$$

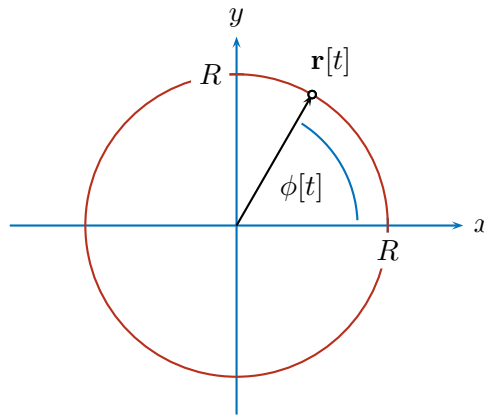
(primijenili smo pravilo za deriviranje vektorskog umnoška funkcija). Prvi član na desnoj strani prepoznamo kao tangencijalnu akceleraciju (2.27), a u nekoliko jednostavnih koraka pokazujemo da drugi član na desnoj strani gornje jednačbe odgovara centripetalnoj akceleraciji (2.26),

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (2.31)$$

U gornjem računu smo najprije koristili izraz za brzinu (2.25), zatim opći identitet (1.15), te konačno činjenicu da su $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{r} okomiti vektori, a što znači da je $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$.

Primjer 2.6.1: Prikaz kružnog gibanja u pravokutnom koordinatnom sustavu

Ovdje ćemo vektore položaja \mathbf{r} , kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$, brzine \mathbf{v} , centripetalne akceleracije \mathbf{a}_{cp} , kutne akceleracije α i tangencijalne akceleracije \mathbf{a}_{tang} pri kružnom gibanju izraziti u pravokutnom koordinatnom sustavu. Slika prikazuje česticu koja se giba duž kružnice polumjera R u x, y -ravnini.



- Položaj čestice možemo opisati vektorom

$$\mathbf{r}[t] = R \hat{\mathbf{r}}[t] = R(\cos \phi[t] \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi[t] \hat{\mathbf{y}}).$$

Dvočlani izraz u okruglim zagradama je jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}[t]$, a kut $\phi[t]$ koji vektor $\mathbf{r}[t]$ zatvara s x -osi shvaćamo kao kutnu koordinatu položaja čestice.

- Vektor kutne brzine je okomit na ravninu u kojoj leži kružnica te ga možemo napisati kao

$$\boldsymbol{\omega}[t] = \omega_z[t] \hat{\mathbf{z}},$$

gdje je

$$\omega_z[t] = \frac{d}{dt} \phi[t]$$

njegova z -komponenta. Kad se kutna koordinata položaja $\phi[t]$ povećava u vremenu, z -komponenta kutne brzine ω_z je pozitivna te vektor $\boldsymbol{\omega}$ gleda u pozitivnom smjeru z -osi, što je u skladu s definicijom vektora kutne brzine (pravilo desnog vijka).

- Brzinu čestice možemo izračunati deriviranjem vektora položaja po vremenu (zbog preglednosti zapisa izostavljamo oznake ovisnosti veličina o vremenu),

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} &= R \frac{d}{dt}(\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}) = R(-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}) \frac{d}{dt}\phi \\ &= R\omega_z(-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}),\end{aligned}$$

ili s pomoću jednadžbe (2.25) računanjem vektorskog umnoška kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$ i vektora položaja \mathbf{r} . Koristeći izraz (1.23) za vektorski umnožak u pravokutnom koordinatnom sustavu dobivamo

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ R \cos \phi & R \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}(-\omega_z R \sin \phi) + \hat{\mathbf{y}}(\omega_z R \cos \phi),$$

što je istovjetno rezultatu dobivenom deriviranjem vektora položaja.

- Centripetalna akceleracija je dana izrazom (2.26) te ju ovdje možemo izraziti kao

$$\mathbf{a}_{cp} = -\omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2 R(\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}),$$

gdje je $\omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_z^2$ kvadrat iznosa kutne brzine.

- Kutnu akceleraciju (2.28) možemo napisati kao $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_z \hat{\mathbf{z}}$, gdje je

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\omega_z$$

njena z -komponenta.

- Tangencijalnu akceleraciju možemo izračunati deriviranjem brzine po vremenu čime dobivamo (ukupnu) akceleraciju od koje zatim oduzimamo centripetalnu komponentu akceleracije,

$$\mathbf{a}_{tang} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{cp} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} - (-\omega^2 \mathbf{r}) = \dots = R\alpha_z(-\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}),$$

a isti rezultat dobivamo i primjenom jednadžbe (2.27),

$$\mathbf{a}_{tang} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \alpha_z \\ R \cos \phi & R \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}(-\alpha_z R \sin \phi) + \hat{\mathbf{y}}(\alpha_z R \cos \phi).$$

Jednoliko kružno gibanje je najjednostavniji slučaj kružnog gibanja pri kojem je vektor kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$, a time i iznos brzine v , stalan u vremenu. Pri jednolikom kružnom gibanju su kutna i tangencijalna akceleracija jednake nuli, a prisutna je isključivo centripetalna akceleracija.

Primjer 2.6.2: Iznos akceleracije pri jednolikoj vožnji automobila rotorom

Automobil vozi srednjim prometnim trakom remetinečkog rotora (Zagreb) pri čemu kazaljka njegovog brzinomjera cijelo vrijeme pokazuje iznos $v = 60 \text{ km h}^{-1}$ (jednoliko kružno gibanje).

Promjer srednjeg prometnog traka je $2R = 140$ m. Iznos akceleracije tog automobila želimo usporediti s iznosom akceleracije slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

S obzirom na to da se radi o jednolikom kružnom gibanju, akceleracija automobila se sastoji isključivo od centripetalne akceleracije koja je usmjerena prema središtu rotora. Iznos te akceleracije računamo koristeći izraz (2.26),

$$a = a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(60 \text{ km h}^{-1})^2}{70 \text{ m}} = \frac{(16.7 \text{ m s}^{-1})^2}{70 \text{ m}} = 3.97 \text{ m s}^{-2}.$$

Usporedimo li dobivenu vrijednost s akceleracijom slobodnog pada,

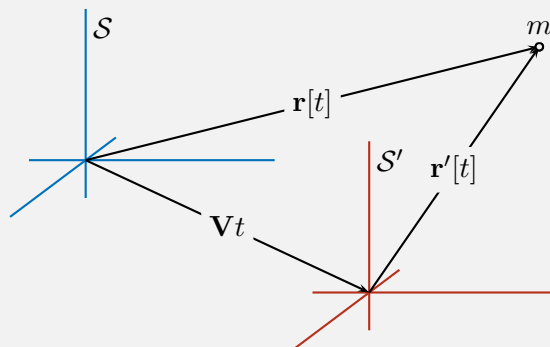
$$\frac{a}{g} = \frac{3.97 \text{ m s}^{-2}}{9.81 \text{ m s}^{-2}} = 0.40,$$

vidimo da iznos centripetalne akceleracije pri takvoj vožnji postiže 40% iznosa akceleracije slobodnog pada.

2.7 Galilejeve transformacije

Galilejeve transformacije su relacije koje povezuju vektore položaja, brzine i akceleracije čestice u dvama referentnim okvirima koji se, jedan u odnosu na drugog, gibaju stalnom brzinom (jednoliko pravocrtno). Važno je naglasiti da podrazumijevamo isključivo translacijsko gibanje jednog referentnog okvira u odnosu na drugi. Time isključujemo mogućnost da se tijekom vremena jedan referentni okvir u odnosu na drugog zakreće.

Slika prikazuje referentni okvir S' koji se u odnosu na S giba translacijski stalnom brzinom \mathbf{V} . Slika također prikazuje vektore položaja čestice u ta dva referentna okvira.



Zbog jednostavnosti uzimamo da je položaj ishodišta u referentnom okviru S' u odnosu na ishodište u S dan vektorom $\mathbf{V}t$, što znači da se ishodišta u trenutku $t = 0$ preklapaju. Iz slike izravno vidimo da vrijedi

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{V}t + \mathbf{r}'[t]. \quad (2.32)$$

Deriviramo li relaciju (2.32) po vremenu dobivamo transformaciju vektora brzine čestice

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{V} + \mathbf{v}'[t] \quad (2.33)$$

koja nam govori da je vektor brzine čestice u referentnom okviru S jednak zbroju vektora brzine referentnog okvira S' u odnosu na S i vektora brzine čestice u odnosu na S' . Deriviranjem

relacije (2.33) po vremenu nalazimo da su vektori akceleracije u dvama referentnim okvirima međusobno jednaki

$$\mathbf{a}[t] = \mathbf{a}'[t]. \quad (2.34)$$

Relacije (2.32), (2.33) i (2.34) zovemo Galilejevim transformacijama.

Primjer 2.7.1: *Situacija iz primjera 2.3.1 promatrana iz aviona A*

U primjeru 2.3.1 smo gibanje aviona A i B razmatrali u referentnom okviru \mathcal{S} vezanom uz Zemlju. Ovdje ćemo primjenom Galilejevih transformacija gibanje aviona B prikazati u referentnom okviru \mathcal{S}' vezanom uz avion A. Time ćemo pokazati kako pilot aviona A, gledajući kroz svoj prozor ili u ekran svog radara, vidi gibanje aviona B.

U referentnom okviru vezanom uz Zemlju, položaje aviona smo prikazali u vodoravnoj x, y -ravnini pravokutnog koordinatnog sustava vektorima položaja

$$\mathbf{r}_A[t] = d_A \hat{\mathbf{x}} + v_A t \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_B[t] = d_B \hat{\mathbf{y}} + v_B t \hat{\mathbf{x}}.$$

Ovdje ćemo koristiti referentni okvir \mathcal{S}' koji se giba zajedno s avionom A. To znači da se \mathcal{S}' giba u odnosu na \mathcal{S} brzinom \mathbf{V} koja je jednaka brzini koju avion A ima u referentnom okviru \mathcal{S} ,

$$\mathbf{V} = v_A \hat{\mathbf{y}}.$$

Položaj aviona B u referentnom okviru \mathcal{S}' računamo s pomoću Galilejeve transformacije (2.32),

$$\mathbf{r}'_B[t] = \mathbf{r}_B[t] - \mathbf{V}t = d_B \hat{\mathbf{y}} + (v_B \hat{\mathbf{x}} - v_A \hat{\mathbf{y}})t.$$

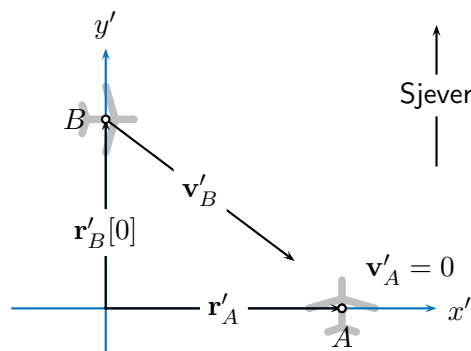
Prepoznamo početni položaj $\mathbf{r}'_B[0] = d_B \hat{\mathbf{y}}$ u $t = 0$ te jednoliko pravocrtno gibanje brzinom

$$\mathbf{v}'_B = v_B \hat{\mathbf{x}} - v_A \hat{\mathbf{y}}.$$

Istovjetnim postupkom za položaj aviona A dobivamo

$$\mathbf{r}'_A[t] = \mathbf{r}_A[t] - \mathbf{V}t = d_A \hat{\mathbf{x}},$$

što znači da avion A u referentnom okviru \mathcal{S}' miruje. Slika prikazuje položaje aviona A i B u trenutku $t = 0$ u x', y' -ravnini pravokutnog koordinatnog sustava u referentnom okviru \mathcal{S}' . Također je prikazan i vektor brzine aviona B, a vektor brzine aviona A nije prikazan jer taj avion u referentnom okviru \mathcal{S}' miruje.

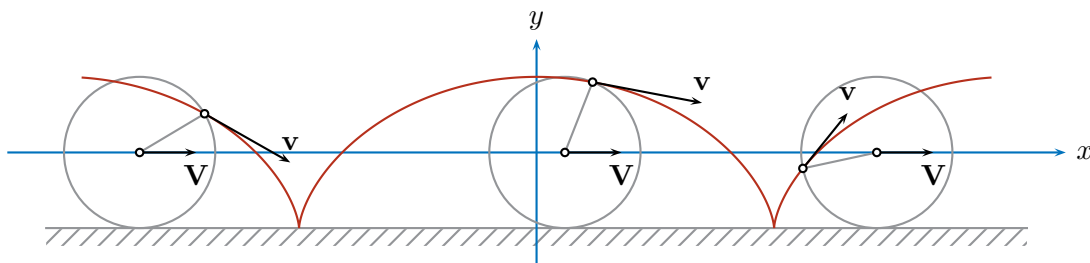


Gornju sliku treba usporediti sa slikom iz primjera 2.3.1 na kojoj smo gibanje aviona prikazali u referentnom okviru \mathcal{S} u kojem se oba aviona gibaju.

U referentnom okviru \mathcal{S}' tlo i zračna masa nad njim gibaju brzinom $-\mathbf{V} = -v_a \hat{\mathbf{y}}$. Zbog toga možemo reći da u odnosu na avion A , koji u tom referentnom okviru miruje, puše “vjetar” iz smjera sjevera brzine iznosa V , što ujedno objašnjava i njegov let (bez tog “vjetra”, avion bi se srušio na tlo). Isti “vjetar” također objašnjava činjenicu da trup aviona B ne gleda u smjeru u kojem se taj avion giba, već je prisutno “bočno kretanje” tog aviona.

Primjer 2.7.2: Gibanje točke na obodu kotača (cikloida)

Slika prikazuje putanju čestice koja se zalijepila za obod biciklističkog kotača koji se stalnom brzinom kotrlja po ravnoj cesti. Kotač je nacrtan u nekoliko različitih trenutaka u vremenu, vektor brzine promatrane čestice označen je s \mathbf{v} , a vektor brzine bicikla (središta kotača) je stalan u vremenu i označen je s \mathbf{V} .



Funkcija koja opisuje nacrtanu putanju u matematici je poznata kao cikloida, a do nje možemo doći primjenom Galilejeve transformacije na kružno gibanje opisano u pravokutnom koordinatnom sustavu (vidi primjer 2.6.1).

Gibanje čestice najprije opisujemo u referentnom okviru \mathcal{S}' vezanom uz bicikl u kojem se čestica na obodu kotača kružno giba. Neka se kotač okreće u x', y' -ravnini pravokutnog koordinatnog sustava, pri čemu x' -os gleda u smjeru vožnje, y' -os gleda uvis, a ishodište se podudara sa središtem kotača. Ako se promatrana čestica u trenutku $t = 0$ nalazi u najvišoj točki kotača, njeno gibanje možemo opisati vektorom položaja

$$\mathbf{r}'[t] = R(\sin \omega t \hat{\mathbf{x}} + \cos \omega t \hat{\mathbf{y}}),$$

gdje je ω kutna brzina vrtnje kotača. To znači da je trajanje jednog punog okreta kotača

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

te s obzirom na to da za jednog okreta kotača bicikl prevari duljinu puta koja je jednaka opsegu kotača, iznos brzine bicikla V možemo povezati s kutnom brzinom ω i polumjerom kotača R ,

$$V = \frac{(\text{opseg kotača})}{(\text{trajanje okreta})} = \frac{2R\pi}{T} = \omega R.$$

Kako bismo gibanje čestice opisali u referentnom okviru \mathcal{S} vezanom uz cestu u odnosu na koji se referentni okvir \mathcal{S}' giba brzinom

$$\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}} = \omega R \hat{\mathbf{x}},$$

primjenjujemo Galilejevu transformaciju (2.32). Za položaj čestice u referentnom okviru ceste dobivamo

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{V}t + \mathbf{r}'[t] = R(\omega t + \sin \omega t) \hat{\mathbf{x}} + R \cos \omega t \hat{\mathbf{y}},$$

a deriviranjem tog izraza po vremenu dobivamo brzinu čestice

$$\mathbf{v}[t] = R\omega(1 + \cos \omega t) \hat{\mathbf{x}} - R\omega \sin \omega t \hat{\mathbf{y}}.$$

Izračunamo li tu brzinu u trenutku $t = \pi/\omega$ u kojem se čestica nalazi u najnižoj točki svoje putanje, a to znači da u tom trenutku dodiruje (mirnu) cestu, dobit ćemo $\mathbf{v} = 0$. Tu točku na grafičkom prikazu putanje čestice prepoznamo kao šiljak.

Zadaci

Z.2.1: Raketa je lansirana sa Zemlje vertikalno uvis. Početna brzina rakete jednaka je nuli. Prvih $\tau = 15$ s, koliko traje rad motora, ona se uspinje s akceleracijom iznosa $2g$. Po prestanku rada motora raketa se neko vrijeme nastavlja uspinjati, a nakon što dosegne najvišu točku nad tlom, raketa pada na tlo. Odredite najveću visinu nad tlom koju raketa postiže te ukupno trajanje njenog leta. (Uzimamo da je iznos akceleracije slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ isti pri svim visinama te zanemarujemo učinak otpora zraka.)

$$\text{Rj: } h_{\max} = 3g\tau^2 \simeq 6.62 \text{ km}, \tau_{\text{uk}} = (3 + \sqrt{6})\tau \simeq 81.7 \text{ s} \quad [\text{P}]$$

Z.2.2: Tijelo je izbačeno s visine $h_0 = 2 \text{ m}$ u vodoravnom smjeru brzinom početnog iznosa $v_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$. Odredite domet tijela na vodoravnoj podlozi te iznos brzine i kut koji vektor brzine zatvara s podlogom neposredno prije udara u podlogu. (Vidi primjer 2.1.2.)

$$\text{Rj: } d = v_0 \sqrt{2h_0/g} \simeq 3.192 \text{ m}, v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \simeq 8.015 \text{ m s}^{-1}, \text{tg } \alpha' = \sqrt{2gh_0}/v_0, \alpha' = 51.40^\circ \quad [\text{P}]$$

Z.2.3: Pokažite da je pri kosom hicu (vidi primjer 2.4.1) domet projektila na vodoravnoj podlozi najveći bacimo li ga pod kutom $\alpha = 45^\circ$.

Z.2.4: Klinac ima pračku kojom može izbaciti kamen brzinom početnog iznosa $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$. On stoji na udaljenosti $d = 5 \text{ m}$ od uspravnog zida i želi pogoditi što je moguće višu točku na tom zidu. Odredite kut u odnosu na vodoravnu ravninu pod kojim on mora izbaciti kamen.

$$\text{Rj: } \text{tg } \alpha = v_0^2/gd, \alpha = 64^\circ \quad [\text{P}]$$

Z.2.5: Odredi najmanji mogući iznos početne brzine projektila v_0 i odgovarajući kut izbačaja α (u odnosu na vodoravnu ravninu) kojime možemo pogoditi metu koja se nalazi na visini h i na vodoravnoj udaljenosti d u odnosu na točku izbačaja.

$$\text{Rj: } \text{tg } \alpha = h/d + \sqrt{1 + (h/d)^2}, v_0^2 = g \left(h + \sqrt{h^2 + d^2} \right) \quad [\text{P}]$$

Z.2.6: Nalazimo se u podnožju kosine koja s vodoravnom ravninom zatvara kut β . Lukom namjeravamo ispaliti strelicu početnom brzinom iznosa v_0 i želimo da se ona zabije u kosinu pod pravim kutom. Pod kojim kutom α u odnosu na vodoravnu ravninu moramo ispaliti strelicu?

$$\text{Rj: } \text{tg } \alpha = 2 \text{tg } \beta + 1/\text{tg } \beta \quad [\text{P}]$$

Z.2.7: Fenjer koji proizvodi tanak vodoravan snop svjetlosti visi na niti i jednoliko se okreće oko uspravne osi čineći 30 okretaja u minuti. Snop svjetlosti pada na ravan uspravan zid koji je od fenjera udaljen $D = 2 \text{ m}$. Odredi brzinu gibanja svijetle mrlje koju snop čini na zidu u trenutku u kojem snop pada na zid pod kutem $\phi_0 = 45^\circ$ u odnosu na okomicu na zid.

$$\text{Rj: } v = 2D\omega = 2D(30 \times 2\pi \text{ rad}/60 \text{ s}) \simeq 12.57 \text{ m s}^{-1} \quad [\text{P}]$$

Z.2.8: U trenutku $t = 0$ automobil kreće iz mirovanja u vožnju rotorom polumjera R tangencijalnom akceleracijom stalnog iznosa a_{tang} . Izvedi izraz za iznos akceleracije automobila a te izraz za kut γ koji vektor akceleracije automobila zatvara s vektorom njegove brzine. (Vidi primjer 2.6.2.)

$$\text{Rj: } a = a_{\text{tang}} \sqrt{1 + a_{\text{tang}}^2 t^4 / R^2}, \text{tg } \gamma = a_{\text{tang}} t^2 / R \quad [\text{P}]$$

Z.2.9: Odredite trajanje leta helikopterom od grada A do grada B koji se nalazi $d = 160 \text{ km}$ sjeverno u odnosu na grad A , ako brzina helikoptera u odnosu na zrak iznosi $v' = 80 \text{ km h}^{-1}$, a prisutan je vjetar iz smjera sjeveroistoka brzine iznosa $V = 40 \text{ km h}^{-1}$.

$$\text{Rj: } t = (d/v')2\sqrt{2}/(\sqrt{7} - 1) \simeq 3.43 \text{ h} \quad [\text{P}]$$

Z.2.10: Veslač želi preći nabujalu rijeku tako da ga rijeka tijekom prelaska što je moguće manje "odnese" nizvodno. Odredite kut koji s okomicom na obalu mora tijekom prelaska rijeke zatvarati trup čamca ako je iznos brzine rijeke u odnosu na obalu dva puta veći od iznosa brzine čamca u odnosu na vodu.

Rj: 30° [P]

Z.2.11: U referentnom okviru vezanom uz cestu promatramo kotrljanje kotača polumjera R čije se središte giba brzinom stalnog iznosa V (vidi primjer 2.7.2). Odredite najmanji i najveći iznos brzine čestice koja se nalazi na obodu kotača. Zatim odredite duljinu puta koju ta čestica prevari za jednog punog okreta kotača.

Rj: $v_{\min} = 0$, $v_{\max} = 2V$, $s = 8R$

Z.2.12: Avion A leti na visini $h_A = 8 \text{ km}$ u smjeru sjevera brzinom iznosa $v_A = 500 \text{ km h}^{-1}$, a avion B se u nekom trenutku nalazi $d = 10 \text{ km}$ sjeverozapadno u odnosu na avion A te leti na visini $h_B = 10 \text{ km}$ brzinom iznosa $v_B = 700 \text{ km h}^{-1}$ prema istoku. Kolika će biti najmanja udaljenost među avionima nastave li letjeti nepromijenjenim brzinama?

$$\text{Rj: } r_{\min} = \sqrt{(h_B - h_A)^2 + d^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{v_A v_B}{v_A^2 + v_B^2} \right)} \simeq 2.60 \text{ km} \quad [\text{P}]$$

3 Dinamika čestice

Dinamika čestice se bavi zakonima koji povezuju sile koje djeluju na česticu s njihovim učincima na gibanje čestice. Ovo poglavlje uvodi prva dva Newtonova zakona i Newtonovu jednadžbu gibanja čestice. Newtonova jednadžba gibanja vrijedi isključivo u tzv. inercijskim referentnim okvirima, a osim na česticu, možemo ju primijeniti i na fizička tijela. Ona omogućuje računanje sile koja ostvaruje neko gibanje ili računanje akceleracije, brzine i položaja čestice u slučajevima u kojima je poznato kakva sila djeluje na česticu ili tijelo.

3.1 Prvi Newtonov zakon i inercijski referentni okvir

Prvi Newtonov zakon u vrlo sažetom obliku glasi:

“Čestica na koju ne djeluje sila giba se stalnom brzinom ili miruje.”

Smatramo da je pojam sile razumljiv sam po sebi odnosno da je riječ o vektorskoj fizičkoj veličini mjerljivoj dinamometrom ili nekim sličnim uređajem. Djeluje li na česticu više sila, prvi Newtonov zakon odnosi se na njihov (vektorski) zbroj koji zovemo ukupnom ili rezultantnom silom. Kad je rezultantna sila jednaka nuli, odnosno kad ona ne djeluje pa se čestica giba stalnom brzinom ili miruje, još kažemo i da je čestica u stanju ravnoteže.

Osim za česticu, prvi Newtonov zakon vrijedi i za tijela koja se sastoje od mnoštva čestica. U tom slučaju je rezultantna sila zbroj svih sila koje djeluju na sve čestice tijela, a gibanje stalnom brzinom ili mirovanje se odnosi na točku poznatu kao središte mase tijela (više o tome u poglavljima 5 i 8).

Prvi Newtonov zakon ne vrijedi u svim referentnim okvirima. Zamislimo dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugi okreću oko neke osi. Zamislimo također česticu koja miruje u odnosu na jednog od njih, a giba se kružno u odnosu na onog drugog. U referentnom okviru u kojem čestica miruje, na nju, prema prvom Newtonovom zakonu, *ne djeluje sila*. U referentnom okviru u kojem se ista čestica giba kružno, što znači da se ne giba stalnom brzinom niti miruje, prema prvom Newtonovom zakonu na nju *sila djeluje*. Prihvatimo li kao samo po sebi razumljivo da djelovanje ili ne djelovanje sile ne može ovisiti o našem odabiru referentnog okvira, zaključujemo da, ako prvi Newtonov zakon u jednom od ta dva referentna okvira vrijedi, onda u onom drugom referentnom okviru on ne vrijedi. Iz toga slijedi da postoje referentni okviri u kojima prvi Newtonov zakon ne vrijedi.

Inercijski i neinercijski referentni okviri: Može se reći da prvi Newtonov zakon pretpostavlja postojanje barem jednog referentnog okvira u kojem on vrijedi. Takav referentni okvir nazivamo inercijskim referentnim okvirom, dok referentne okvire u kojima prvi Newtonov zakon ne vrijedi zovemo neinercijskim referentnim okvirima.

Nije posve jasno postoji li igdje u prirodi idealni inercijski referentni okvir. Na primjer, referentni okvir vezan uz površinu Zemlje često smatramo inercijskim, iako je vrlo jednostavnim eksperimentom moguće pokazati prisutnost učinaka Zemljine vrtnje koji, strogo govoreći, taj referentni okvir čine neinercijskim. (Gibanjem u neinercijskim referentnim okvirima bavimo se u poglavlju 12.)

Beskonačno mnoštvo inercijskih referentnih okvira: Pretpostavimo li da je S inercijski referentni okvir, onda je svaki referentni okvir S' koji se u odnosu na S giba translacijski stalnom brzinom također inercijski referentni okvir. Ta tvrdnja slijedi iz Galilejeve transformacije (2.34) prema kojoj su akceleracije čestice u tim dvama referentnim okvirima jednake. To znači da gibanju čestice stalnom brzinom u inercijskom referentnom okviru S (akceleracija $a = 0$) odgovara isto takvo gibanje u referentnom okviru S' (akceleracija $a' = 0$) odnosno da je S' također inercijski referentni okvir.

3.2 Drugi Newtonov zakon i jednačba gibanja (NJG)

Količina gibanja čestice (engl. *momentum*) je vektorska fizička veličina definirana kao umnožak mase čestice m i vektora njene brzine \mathbf{v} ,

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Fizička dimenzija količine gibanja je MLT^{-1} , a mjerna jedinica je kg m s^{-1} .

Drugi Newtonov zakon:

“Brzina promjene količine gibanja čestice jednaka je sili koja djeluje na česticu.”

Pod “brzinom promjene” (engl. *rate of change*) neke fizičke veličine po vremenu (ovdje je to količina gibanja) misli se na derivaciju te veličine po vremenu.

Newtonova jednačba gibanja (NJG) je bilo koji od mogućih matematičkih zapisa drugog Newtonovog aksioma,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{a}, \quad (3.2)$$

gdje je \mathbf{F} resultantna sila koja djeluje na česticu, a \mathbf{p} , \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} i m su redom količina gibanja, položaj, brzina, akceleracija i masa čestice.

Prema NJG, jednolikom pravocrtnom gibanju ($\mathbf{a} = 0$) odgovara sila $\mathbf{F} = 0$, što je u skladu s prvim Newtonovim zakonom. Poput prvog Newtonovog zakona, NJG vrijedi isključivo u inercijskim referentnim okvirima.

U situacijama u kojima je poznato kako se čestica mase m giba, a to znači da je poznata akceleracija čestice \mathbf{a} , NJG nam omogućuje da izravno izračunamo silu \mathbf{F} koja na nju djeluje.

Centripetalna i tangencijalna sila: Kao što akceleraciju čestice prikazujemo kao zbroj centripetalne i tangencijalne akceleracije, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{cp}} + \mathbf{a}_{\text{tang}}$ (vidi poglavlje 2.5), resultantnu silu \mathbf{F} koja djeluje na česticu možemo prikazati kao zbroj centripetalne i tangencijalne sile,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cp}} + \mathbf{F}_{\text{tang}}, \quad \mathbf{F}_{\text{cp}} = m\mathbf{a}_{\text{cp}} = mv \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}, \quad \mathbf{F}_{\text{tang}} = m\mathbf{a}_{\text{tang}} = m \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{v}}. \quad (3.3)$$

Pritom možemo reći da centripetalna sila djeluje okomito na putanju i uzrokuje centripetalnu akceleraciju odnosno skretanje čestice (zakrivljenost putanje), dok tangencijalna sila djeluje duž putanje i uzrokuje tangencijalnu akceleraciju odnosno promjenu iznosa brzine čestice. Nekoliko primjera u kojima nam NJG razotkriva svojstva sile koja djeluje na česticu i u kojima nam može pomoći rastavljanje resultantne sile na centripetalnu silu i na tangencijalnu silu nalazi se u poglavlju 3.3.

U situacijama u kojima polazimo od poznate sile \mathbf{F} koja djeluje na česticu, a cilj nam je odrediti funkcije $\mathbf{r}[t]$ ili $\mathbf{v}[t]$ koje opisuju gibanje čestice pod djelovanjem te sile, suočavamo se sa činjenicom da je NJG po svojoj matematičkoj prirodi diferencijalna jednačba. To znači da se funkcije koje želimo odrediti, a to su $\mathbf{r}[t]$ ili $\mathbf{v}[t]$, u jednačbi pojavljuju kao derivacije $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}[t]$ ili $\frac{d}{dt}\mathbf{v}[t]$. Kako bismo odredili “nederivirane” $\mathbf{r}[t]$ i $\mathbf{v}[t]$, potrebno je provesti postupak rješavanja diferencijalne jednačbe.

Početni uvjeti: Opće rješenje NJG za neku česticu je vektorska funkcija $\mathbf{r}[t]$ koja opisuje gibanje te čestice u prostoru i vremenu. Ona ovisi o prirodi sile koja djeluje na česticu, a u njoj se pojavljuju i konstante koje zovemo početnim uvjetima (engl. *initial conditions*). Odaberemo li kao početni trenutak $t = t_0$, početni uvjeti su položaj i brzina čestice u tom trenutku,

$$\mathbf{v}[t_0] \quad \text{i} \quad \mathbf{r}[t_0]. \quad (3.4)$$

U sustavu s više čestica ili tijela, opće rješenje sadrži početne uvjete gibanja svih čestica ili tijela.

S obzirom na to da sila \mathbf{F} može ovisiti o vremenu, o položaju i o brzini čestice u danom trenutku, a u složenijim fizičkim sustavima također i o gibanju svih ostalih čestica u sustavu, postupak rješavanja NJG može biti vrlo složen. U ovom i u sljedećim poglavljima prikazat ćemo niz jednostavnih ali važnih slučajeva u kojima je moguće pronaći rješenja NJG.

- Kad na česticu ne djeluje sila, akceleracija čestice je, prema NJG, jednaka nuli. To znači da se čestica giba stalnom brzinom (jednoliko pravocrtno gibanje, vidi poglavlje 2.3). Opće rješenje NJG u tom slučaju glasi $\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}[t_0](t - t_0)$, a $\mathbf{r}[t_0]$ i $\mathbf{v}[t_0]$ su početni uvjeti u trenutku $t = t_0$.
- Kad na česticu mase m djeluje stalna sila \mathbf{F}_0 , čestica se, prema NJG, giba stalnom akceleracijom $\mathbf{a}_0 = \mathbf{F}_0/m$ (jednoliko ubrzano gibanje, vidi poglavlje 2.4). Opće rješenje NJG je $\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}[t_0](t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2$, gdje su $\mathbf{r}[t_0]$ i $\mathbf{v}[t_0]$ početni uvjeti.
- Kad na česticu mase m djeluje sila $\mathbf{F}[t]$ koja ovisi isključivo o vremenu, NJG nam daje akceleraciju čestice $\mathbf{a}[t] = \mathbf{F}[t]/m$. Brzinu čestice $\mathbf{v}[t]$ računamo primjenom inverzne relacije (2.10), nakon čega inverznom relacijom (2.12) računamo položaj čestice $\mathbf{r}[t]$. U općem rješenju pojavljuju se početni uvjeti $\mathbf{r}[t_0]$ i $\mathbf{v}[t_0]$. Primjeri rješavanja NJG uz sile koje ovise o vremenu nalaze se u poglavlju 3.5.
- Kad na česticu mase m djeluje sila $\mathbf{F}[\mathbf{v}]$ koja ovisi isključivo o brzini čestice, NJG pišemo u obliku $m \frac{d}{dt} \mathbf{v}[t] = \mathbf{F}[\mathbf{v}[t]]$, što je diferencijalna jednadžba prvog reda. Rješavanjem te jednadžbe dobivamo opće rješenje $\mathbf{v}[t]$ u kojem se pojavljuje početni uvjet $\mathbf{v}[t_0]$. Zatim inverznom relacijom (2.12) računamo položaj $\mathbf{r}[t]$ u kojem se osim $\mathbf{v}[t_0]$ pojavljuje i početni uvjet $\mathbf{r}[t_0]$. Nekoliko primjera rješavanja NJG za silu koja ovisi o brzini nalazi se u poglavlju 3.6.
- Kad na česticu mase m djeluje sila $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ koja ovisi isključivo o položaju čestice, NJG ima oblik $m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}[t] = \mathbf{F}[\mathbf{r}[t]]$ što je diferencijalna jednadžba drugog reda, a njeno opće rješenje $\mathbf{r}[t]$ sadrži početne uvjete $\mathbf{r}[t_0]$ i $\mathbf{v}[t_0]$. Kad je riječ o silama koje ovise o položaju, fizičke veličine kao što su rad sile i kinetička energija omogućuju nam da predvidimo neke ishode nekih fizičkih zbivanja čak i u situacijama u kojima nismo u mogućnosti pronaći opće rješenje NJG. Više o tome u poglavlju 4.

3.3 Računanje sile s pomoću NJG (težina, kružno gibanje, titranje)

Izmjerimo li masu i akceleraciju neke čestice u inercijskom referentnom okviru, umnožak mase i akceleracije nam prema NJG (3.2) daje silu koja djeluje na česticu i ostvaruje opaženo gibanje. Isto tako, opišemo li gibanje koje želimo ostvariti vektorom $\mathbf{r}[t]$, dvostrukim deriviranjem tog vektora po vremenu dobivamo akceleraciju čestice, a umnožak akceleracije i mase daje nam potrebnu silu.

Primjer 3.3.1: *Akceleracija slobodnog pada pri Zemljinoj površini i težina tijela*

Pri slobodnom padu tijela u blizini Zemljine površine opaža se akceleracija usmjerena prema tlu iznosa približno $g \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Pretpostavljajući da je referentni okvir vezan uz Zemlju inercijski referentni okvir, primjenom NJG nalazimo da na tijelo mase m djeluje sila

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g},$$

gdje je vektor \mathbf{g} **akceleracija slobodnog pada**. Ta sila je razmjerna masi tijela, a zovemo ju težinom tijela, silom težom, ili ponešto pojednostavljeno, gravitacijskom silom koja djeluje na tijelo.

Sila teža koja djeluje na tijelo ili **težina tijela** (engl. *weight*) se prema dogovoru (vidi [6]) najvećim dijelom sastoji od stvarne gravitacijske sile kojom Zemlja privlači svako tijelo (više o gravitaciji u poglavlju 11), ali uključuje i učinak tzv. centrifugalne prividne sile koji je prisutan zbog Zemljine vrtnje oko svoje osi odnosno zbog toga što referentni okvir vezan uz Zemlju nije idealni inercijski referentni okvir (gibanjem tijela u neinercijskim referentnim okvirima se bavi poglavlje 12). Prema istom dogovoru, težina tijela *ne* uključuje silu uzgona kojom okolni zrak ili neki drugi fluid djeluje na tijelo, silu kojom podloga djeluje na tijelo ako je tijelo na nju oslonjeno, silu otpora sredstva kroz koje se tijelo giba, kao ni tzv. Coriolisovu prividnu silu koja je uz centrifugalnu prividnu silu prisutna zbog Zemljine vrtnje.

Primjer 3.3.2: *Sila pri kružnom gibanju*

Izračunat ćemo iznos sile koja djeluje na česticu mase m koja se giba duž kružnice polumjera R kutnom brzinom iznosa ω i kutnom akceleracijom iznosa α .

Centripetalna akceleracija pri kružnom gibanju dana je izrazom (2.26), a toj akceleraciji odgovara centripetalna sila

$$\mathbf{F}_{\text{cp}} = m\mathbf{a}_{\text{cp}} = -m\omega^2\mathbf{r},$$

gdje je \mathbf{r} vektor položaja čestice u odnosu na središte putanje ($|\mathbf{r}| = R$). Tangencijalna akceleracija pri kružnom gibanju je dana izrazom (2.27) i odgovara joj tangencijalna sila

$$\mathbf{F}_{\text{tang}} = m\mathbf{a}_{\text{tang}} = m\alpha \times \mathbf{r}.$$

Iznosi tih sila su

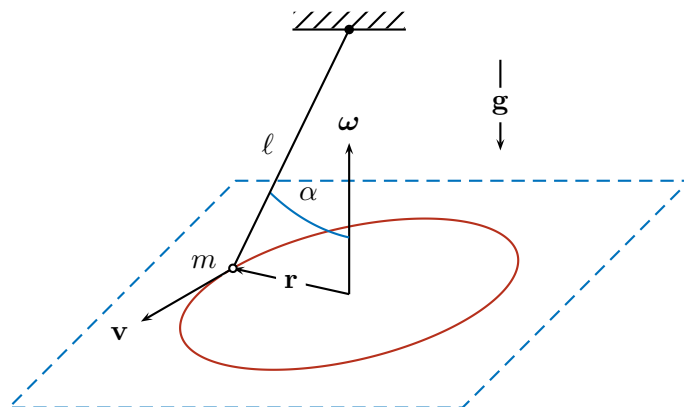
$$F_{\text{cp}} = m\omega^2 R, \quad F_{\text{tang}} = m\alpha R,$$

a s obzirom na to da su one međusobno okomite, iznos njihovog zbroja je

$$F = |\mathbf{F}_{\text{cp}} + \mathbf{F}_{\text{tang}}| = \sqrt{F_{\text{cp}}^2 + F_{\text{tang}}^2} = mR\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}.$$

Primjer 3.3.3: *Napetost niti i kutna brzina vrtnje tzv. “stožastog njihala”*

Stožasto ili konusno njihalo je (zbunjujući) naziv za sitno tijelo koje visi na niti, ali se ne njiše, već kruži u vodoravnoj ravnini, a sama nit pritom “prebrisuje” plašt stošca.

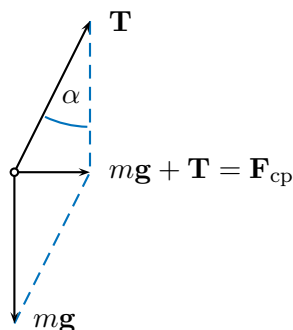


Odredit ćemo iznos sile napetosti niti T stožastog njihala i kutnu brzinu ω vrtnje sitnog tijela u vodoravnoj ravnini, ako je masa tijela m , duljina niti ℓ te ako nit s uspravnim pravcem zatvara kut α . To znači da je polumjer kružne putanje $R = |\mathbf{r}| = \ell \sin \alpha$.

Uočavamo sljedeće:

- Čestica se giba kružno, a to znači da zbroj stvarnih sila koje na nju djeluju odgovara centripetalnoj sili \mathbf{F}_{cp} čiji je iznos $m\omega^2 R$ (vidi prethodni primjer).
- Na česticu djeluju dvije stvarne sile. To su napetost niti \mathbf{T} i sila teža koju možemo izraziti kao umnožak mase m i akceleracije slobodnog pada \mathbf{g} .

Zaključujemo da zbroj stvarnih sila \mathbf{T} i $m\mathbf{g}$ mora biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili \mathbf{F}_{cp} . Slika prikazuje sile \mathbf{T} i $m\mathbf{g}$ te njihov zbroj.



Iz paralelograma na slici uočavamo da među iznosima sila vrijede relacije

$$T \cos \alpha = mg, \quad T \sin \alpha = F_{\text{cp}} = m\omega^2 R.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo iznos napetosti niti

$$T = \frac{mg}{\cos \alpha},$$

gdje uočavamo da za $\alpha \rightarrow 0$ napetosti niti teži u mg što odgovara težini tijela, dok za $\alpha \rightarrow \pi/2$ napetost niti teži u beskonačno. Iz druge jednadžbe, koristeći $F_{\text{cp}} = m\omega^2 R$ i $R = \ell \sin \alpha$, dobivamo kvadrat kutne brzine,

$$\omega^2 = \frac{T \sin \alpha}{mR} = \dots = \frac{g}{\ell \cos \alpha},$$

što također teži u beskonačno za $\alpha \rightarrow \pi/2$, dok pri vrlo malenom kutu α kutna brzina iznosi $\omega = \sqrt{g/\ell}$, što se podudara s kutnom frekvencijom tzv. matematičkog njihanja kada ono njiše vrlo malenom amplitudom (vidi primjer 6.4.1 u poglavlju o titranju).

Primjer 3.3.4: Sila pri harmonijskom titranju (sila linearne opruge)

Tzv. harmonijsko titranje čestice duž x -osi između krajnjih točaka $x = \pm A$ (vidi primjer 2.1.3 ili poglavlje 6) možemo opisati izrazom za x -koordinatu položaja

$$x[t] = A \cos \omega t,$$

gdje konstantu A zovemo amplitudom, a konstanta ω je tzv. kutna frekvencija titranja. Koristeći NJG možemo izračunati x -komponentu sile koja djeluje na česticu mase m ,

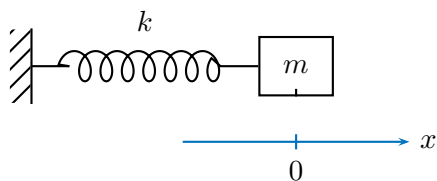
$$F_x[t] = ma_x[t] = m \frac{d^2}{dt^2} x[t] = \dots = -m\omega^2 A \cos \omega t = -m\omega^2 x[t].$$

U posljednjem koraku smo prepoznali da silu možemo izraziti s pomoću x -koordinate položaja odnosno uočavamo da vrijedi

$$F_x[x] = -kx, \quad \text{gdje je} \quad k = m\omega^2.$$

Kad se čestica nalazi pri $x = 0$, na nju ne djeluje sila. U tom položaju čestica može trajno mirovati pa taj položaj zovemo ravnotežnim položajem. Pri svim ostalim položajima na česticu djeluje sila čiji je iznos razmjernan njenom otklonu od ravnotežnog položaja i čiji je smjer suprotan smjeru otklona (negativni predznak u izrazu za F_x osigurava usmjerenost sile prema ravnotežnom položaju).

Upravo takvom silom na tijelo može djelovati tzv. linearna opruga konstante elastičnosti k . Slika prikazuje oprugu čiji je jedan kraj učvršćen, a na drugom se kraju nalazi tijelo mase m .



Kad bismo pomakli tijelo iz ravnotežnog položaja u bilo koju stranu i pustili ga u gibanje, tijelo bi harmonijski titralo kutnom frekvencijom $\omega = \sqrt{k/m}$.

3.4 Gibanje pod djelovanjem stalne sile (kolotura, kosina, trenje)

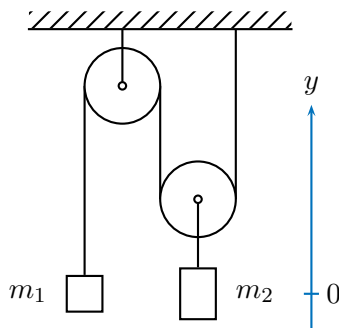
Prema NJG, čestica mase m na koju djeluje stalna sila \mathbf{F}_0 ima stalnu akceleraciju

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{F}_0}{m}. \quad (3.5)$$

Kinematiku gibanja stalnom akceleracijom (jednoliko ubrzano gibanje) te slobodni pad (kosi hitac) kao najpoznatiji primjer obradili smo u poglavlju 2.4, a ovdje ćemo upoznati neke složenije fizičke sustave koji se također gibaju pod djelovanjem stalnih sila.

Primjer 3.4.1: Sustav tijela, bezmasenih niti i bezmasenih kolotura

Sustav se sastoji od dvaju tijela čije su mase m_1 i m_2 koja su povezana s pomoću niti i kolotura. Masu niti i kolotura smatramo zanemarivom, a zanemarujemo i sile otpora pri vrtnji kolotura, što znači da je napetost niti svuda jednaka. (I najmanja razlika napetosti niti s dviju strana bilo koje koloture dovela bi do zakreta koloture koji bi poništio razliku napetosti.) Pokazat ćemo da se tijela m_1 i m_2 gibaju stalnim akceleracijama.



Najprije razmatramo geometrijske odnose u sustavu koji će nas dovesti do relacije među akceleracijama dvaju tijela. S obzirom na to da se tijela gibaju isključivo u smjeru y osi, dovoljno je baviti se y -koordinatama položaja te y -komponentama brzina i akceleracija. y -koordinate položaja tijela m_1 i m_2 označavamo s y_1 i y_2 , a iz geometrije sustava uočavamo da pri diferencijalnom pomaku tijela koji nastupa u diferencijalu vremena dt vrijedi

$$dy_1 = -2 dy_2$$

(malenom pomaku m_1 odgovara upola manji pomak m_2 u suprotnom smjeru). Podijelimo li gornju relaciju s dt , dobivamo relaciju među y -komponentama brzine dvaju tijela,

$$v_{1y} = -2 v_{2y},$$

a deriviranjem te relacije po vremenu dobivamo relaciju među y -komponentama akceleracija tijela,

$$a_{1y} = -2 a_{2y}.$$

Sada možemo napisati jednadžbe gibanja tijela. Ako je T iznos napetosti niti, jednadžba gibanja tijela m_1 glasi

$$m_1 a_{1y} = T - m_1 g.$$

Lijeva strana te jednadžbe je y -komponenta vektora $m_1 \mathbf{a}_1$, a desna strana je zbroj y -komponenta sila koje djeluju na tijelo (nit djeluje u pozitivnom, a sila teža u negativnom smjeru y -osi). Jednadžba gibanja tijela m_2 koje se giba zajedno s pripadajućom koloturom zanemarive mase glasi

$$m_2 a_{2y} = 2T - m_2 g.$$

Ovdje se na desnoj strani pojavljuje član $2T$ jer nit na koloturu djeluje silom s njene obje strane. Konačno, eliminacijom napetosti niti T iz dviju jednadžbi gibanja te korištenjem relacije $a_{1y} = -2a_{2y}$ dobivamo akceleracije tijela,

$$a_{1y} = \frac{2(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2}g, \quad a_{2y} = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

Uočavamo da su akceleracije stalne (ne ovise niti o vremenu niti o položaju niti o brzini tijela). Predznaci (smjerovi) akceleracija ovise o omjeru masa tijela, a u posebnom slučaju $m_2 = 2m_1$ obje su akceleracije jednake nuli, što znači da takav sustav može mirovati ili se gibati stalnom brzinom (kažemo da je sustav u ravnoteži).

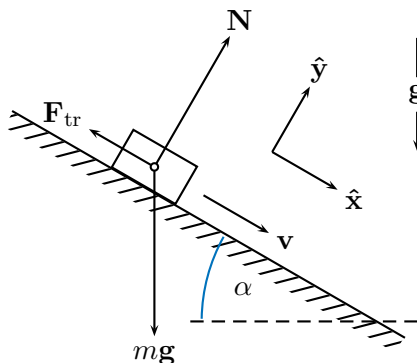
Sila (dinamičkog) trenja: Kad jedno tijelo tare (klizi, struže) po drugom tijelu (npr. po podlozi) može se pojaviti sila otpora koju zovemo silom trenja. Smjer sile trenja koja djeluje na neko tijelo suprotan je smjeru gibanja tog tijela u odnosu na tijelo po kojem ono tare. Često se, zbog jednostavnosti, uzima da je iznos sile trenja razmjernan iznosu sile N kojom, u smjeru okomitom na dodirnu plohu, tijela djeluju jedno na drugo. Pritom se zanemaruje moguća ovisnost iznosa sile trenja o iznosu brzine jednog tijela u odnosu na drugo kao i ovisnost o veličini (površini) dodirne plohe. Pišemo

$$F_{tr} = \mu_d N, \quad (3.6)$$

gdje je μ_d tzv. koeficijent dinamičkog trenja koji je karakteristika dodirnih ploha (materijal, obrađenost).

Primjer 3.4.2: Akceleracija tijela pri klizanju niz kosinu i uz nju

Slika prikazuje tijelo koje klizi niz kosinu nagiba α s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja μ_d i zbog čega je prisutna sila trenja. Pokazat ćemo da se radi o gibanju stalnom akceleracijom te ćemo odrediti njezin smjer i iznos. Također ćemo razmotriti i slučaj u kojem tijelo klizi u suprotnom smjeru (uz kosinu, suprotno od prikazanog na slici).



Sustav prikazujemo u x, y -ravnini tako da se tijelo giba duž x -osi koja je usmjerena niz kosinu, a y -os je okomita na kosinu i usmjerena je uvis. Zbog preglednosti, na slici su naznačeni samo jedinični vektori \hat{x} i \hat{y} . Na tijelo djeluju tri stvarne sile prikazane na slici, a to su sila teža iznosa mg , sila podloge N (koja je okomita na podlogu) i sila trenja F_{tr} koja ima suprotan smjer u odnosu na smjer brzine tijela v . Jednadžbu gibanja možemo napisati kao

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{tr},$$

odnosno rastavljajući sve vektore na njihove x i y -komponente,

$$ma_x \hat{x} = N \hat{y} + mg(\sin \alpha \hat{x} - \cos \alpha \hat{y}) \mp \mu_d N \hat{x} \quad (v_x \geq 0).$$

Akceleraciju tijela smo napisali kao $\mathbf{a} = a_x \hat{x}$ jer se gibanje tijela odvija isključivo duž x -osi. Silu kojom podloga djeluje na tijelo smo napisali kao $\mathbf{N} = N \hat{y}$ gdje je N iznos te sile. Drugi član na desnoj strani je težina tijela mg . Njen iznos je mg , a izraz u okruglim zagradama je jedinični vektor njezinog smjera. Posebnu pozornost treba obratiti na treći član s desne strane i dvostruki predznak ispred njega. Taj član opisuje silu trenja \mathbf{F}_{tr} čiji je iznos $F_{tr} = \mu_d N$, a smjer ovisi o smjeru gibanja. Kad tijelo klizi *niz* kosinu (kao na slici, $v_x > 0$), sila trenja usmjerena je uz kosinu odnosno u negativnom smjeru x -osi. Gornji (negativan) predznak odnosi se na taj slučaj. Donji (pozitivan) predznak odnosi se na slučaj u kojem tijelo klizi *uz* kosinu (suprotno od prikazanog na slici, $v_x < 0$) te je sila trenja usmjerena niz kosinu odnosno u pozitivnom smjeru x -osi. Napišemo li razdvojeno x i y -komponentu gornje jednadžbe dobivamo dvije jednadžbe koje glase

$$ma_x = mg \sin \alpha \mp \mu_d N \quad (v_x \gtrless 0), \quad 0 = N - mg \cos \alpha.$$

Iz druge jednadžbe vidimo da je iznos sile kojom podloga djeluje na tijelo $N = mg \cos \alpha$, a uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu dobivamo x -komponentu akceleracije tijela,

$$a_x = g(\sin \alpha \mp \mu_d \cos \alpha) \quad (v_x \gtrless 0).$$

Uočavamo tri važna slučaja:

- Gibanje *niz* kosinu (gornji predznak) pri čemu $\mu_d < \tan \alpha$: x -komponenta akceleracije je pozitivna, iznos brzine tijela se povećava.
- Gibanje *niz* kosinu (gornji predznak) pri čemu $\mu_d > \tan \alpha$: x -komponenta akceleracije je negativna, iznos brzine tijela se smanjuje, tijelo će se zaustaviti.
- Gibanje *uz* kosinu (donji predznak): x -komponenta akceleracije je pozitivna, iznos brzine se smanjuje, tijelo će se zaustaviti.

Sila statičkog trenja: Sila "trenja" može djelovati i kad se tijela jedno u odnosu na drugo ne gibaju (ne taru). Tada se sila trenja suprotstavlja vanjskim silama koje nastoje pokrenuti tijela u gibanje. Obično pretpostavljamo da jakost sile trenja može doseći najveću vrijednost koja je razmjerna iznosu sile N kojom tijela okomito na dodirnu plohu djeluju jedno na drugo,

$$F_{tr} \leq (F_{tr})_{\max} = \mu_s N, \quad (3.7)$$

gdje je μ_s koeficijent statičkog trenja. Ako je jakost vanjske sile veća od $(F_{tr})_{\max}$, sila trenja ne može spriječiti gibanje te nastupa ranije opisani slučaj klizanja jednog tijela po drugom. Napomenimo i to da u stvarnosti gotovo uvijek nalazimo da je koeficijent dinamičkog trenja μ_d među nekim površinama manji od koeficijenta statičkog trenja μ_s među tim površinama.

Primjer 3.4.3: Statičko trenje tijela na kosini

Ako je koeficijent statičkog trenja između tijela i kosine na koju je ono položeno dovoljno velik, tijelo može trajno mirovati na kosini. Odredit ćemo donju granicu vrijednosti koeficijenta statičkog trenja μ_s potrebnu za trajno mirovanje tijela na kosini nagiba α .

U prethodnom primjeru smo pokazali da je iznos sile kojom međudjeluju kosina i tijelo $N = mg \cos \alpha$. To ovdje znači da je najveći iznos koji sila statičkog trenja može postići

$$(F_{tr})_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha.$$

Iz prethodnog primjera se također vidi da komponenta težine tijela u smjeru mogućeg klizanja niz kosinu ima iznos

$$mg \sin \alpha.$$

Tijelo će trajno mirovati ako sila statičkog trenja može uravnotežiti silu koja djeluje u smjeru mogućeg klizanja. Taj uvjet možemo izraziti kao $(F_{\text{tr}})_{\text{max}} \geq mg \sin \alpha$, što vodi na

$$\mu_s \geq \tan \alpha.$$

3.5 Sila ovisna o vremenu

Kad sila koja djeluje na česticu mase m ovisi isključivo o vremenu, NJG nam daje akceleraciju čestice

$$\mathbf{a}[t] = \frac{1}{m} \mathbf{F}[t], \quad (3.8)$$

koja također ovisi isključivo o vremenu. Brzinu $\mathbf{v}[t]$ i položaj $\mathbf{r}[t]$ čestice dobivamo primjenom inverznih relacija (2.10) i (2.12). Funkcija $\mathbf{r}[t]$ predstavlja rješenje NJG, a u njoj se kao integracijske konstante pojavljuju početni uvjeti $\mathbf{v}[t_0]$ i $\mathbf{r}[t_0]$.

Primjer 3.5.1: Sila čija jakost eksponencijalno trne u vremenu

Razmotrit ćemo gibanje svemirskog broda mase $m = 15 \text{ t}$ čiji motor proizvodi potisak koji s vremenom postaje sve slabiji. Uzet ćemo da iznos sile potiska eksponencijalno trne u vremenu,

$$F[t] = F_0 e^{-t/\tau},$$

gdje je $F_0 = 90 \text{ kN}$ jakost sile u početnom trenutku $t = 0$, a $\tau = 120 \text{ s}$ je vrijeme nakon kojeg iznos sile pada na $1/e$ početne vrijednosti. Pretpostavit ćemo da svemirski brod u početnom trenutku $t = 0$ miruje te da potisak cijelo vrijeme djeluje u istom smjeru, a odredit ćemo iznos njegove brzine u trenutku $t = \tau$ te udaljenost koju će brod do tog trenutka prevaliti. Također ćemo odrediti iznos brzine koju će brod postići nakon “beskonačno dugog vremena”.

Koordinatni sustav odabiremo tako da se u početnom trenutku brod nalazi u ishodištu i da se gibanje odvija u pozitivnom smjeru x -osi. Početni uvjeti gibanja glase

$$t_0 = 0, \quad x[0] = 0, \quad v_x[0] = 0.$$

Prema NJG, x -komponenta akceleracije broda je

$$a_x[t] = \frac{1}{m} F_x[t] = \frac{1}{m} F_0 e^{-t/\tau}.$$

Najprije inverznom relacijom (2.10) računamo x -komponentu brzine svemirskog broda,

$$v_x[t] = v_x[0] + \int_0^t a_x[t'] dt' = \int_0^t \frac{1}{m} F_0 e^{-t'/\tau} dt' = \dots = \frac{F_0 \tau}{m} (1 - e^{-t/\tau}),$$

gdje smo osim izraza za x -komponentu akceleracije iskoristili i početni uvjet $v_x[0] = 0$, a zatim inverznom relacijom (2.12) računamo x -koordinatu položaja broda,

$$x[t] = x[0] + \int_0^t v_x[t'] dt' = \int_0^t \frac{F_0 \tau}{m} (1 - e^{-t'/\tau}) dt' = \dots = \frac{F_0 \tau}{m} \left(t - \tau (1 - e^{-t/\tau}) \right),$$

gdje smo iskoristili početni uvjet $x[0] = 0$.

U trenutku $t = \tau$ imamo

$$v_x[\tau] = \frac{F_0\tau}{m} (1 - e^{-1}) = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N}) \times (120 \text{ s})}{15 \times 10^3 \text{ kg}} \times (1 - 0.368) = 455 \text{ m s}^{-1},$$

$$x[\tau] = \frac{F_0\tau^2}{m} e^{-1} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N}) \times (120 \text{ s})^2}{15 \times 10^3 \text{ kg}} \times 0.368 = 31.8 \text{ km},$$

dok za $t \rightarrow \infty$ imamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x[t] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F_0\tau}{m} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{F_0\tau}{m} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N}) \times (120 \text{ s})}{15 \times 10^3 \text{ kg}} = 720 \text{ m s}^{-1}.$$

Primjer 3.5.2: Gibanje nabijene čestice u titrajućem električnom polju

Priključimo li na izmjenični napon $U[t] = U_0 \cos \omega t$ dvije paralelne vodljive ploče razmaknute d (kondenzator), među pločama nastaje promjenjivo električno polje koje možemo opisati izrazom

$$\mathbf{E}[t] = \frac{U[t]}{d} \hat{\mathbf{n}} = \frac{U_0}{d} \cos \omega t \hat{\mathbf{n}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{n}}$ jedinični vektor okomit na ploče. Nađe li se među pločama čestica mase m i naboja q , na nju djeluje sila

$$\mathbf{F}[t] = q\mathbf{E}[t] = \frac{qU_0}{d} \cos \omega t \hat{\mathbf{n}} = F_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{n}}, \quad F_0 = \frac{qU_0}{d},$$

(vidi primjer 1.4.1) te je prema NJG njena akceleracija

$$\mathbf{a}[t] = \frac{1}{m} \mathbf{F}[t] = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \hat{\mathbf{n}}.$$

Inverznim relacijama (2.10) i (2.12) dobivamo brzinu čestice

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}[0] + \int_0^t \mathbf{a}[t'] dt' = \mathbf{v}[0] + \int_0^t \frac{F_0}{m} \cos \omega t' \hat{\mathbf{n}} dt' = \dots = \mathbf{v}[0] + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \hat{\mathbf{n}}$$

i njen položaj

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[t] &= \mathbf{r}[0] + \int_0^t \mathbf{v}[t'] dt' = \mathbf{r}[0] + \int_0^t \left(\mathbf{v}[0] + \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t' \hat{\mathbf{n}} \right) dt' \\ &= \dots = \mathbf{r}[0] + \mathbf{v}[0]t + \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

gdje su konstante $\mathbf{r}[0]$ i $\mathbf{v}[0]$ početni uvjeti gibanja u trenutku $t = 0$. Gibanje opisano gornjim izrazom možemo shvatiti kao jednoliko pravocrtno gibanje određeno početnim uvjetima uz koje se istovremeno odvija titranje čestice u smjeru električnog polja amplitudom

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{qU_0}{dm\omega^2}$$

i frekvencijom ω .

3.6 Sila ovisna o brzini

Sila ovisna o brzini: Kad na česticu djeluje sila koja ovisi isključivo o brzini čestice, NJG se može napisati u obliku

$$m \frac{dv}{dt} = F[v], \quad (3.9)$$

gdje je m masa, a v brzina čestice.

Rješavanje NJG separacijom varijabli (1D): Kad se čestica giba duž pravca, npr. duž x -osi, NJG (3.9) se svodi na $m \frac{d}{dt} v_x = F_x[v_x]$, a taj oblik diferencijalne jednačbe dopušta provedbu postupka koji je u matematici poznat kao **separacija varijabli**. Najprije je potrebno jednačbu napisati tako da se varijabla v_x nalazi s jedne, a varijabla t s druge strane znaka jednakosti,

$$m \frac{dv_x}{F_x[v_x]} = dt, \quad (3.10)$$

nakon čega se integracijom od početnog stanja u trenutku $t = t_0$ do konačnog stanja u trenutku t dobiva x -komponenta brzine $v_x[t]$. Položaj čestice $x[t]$ dobivamo inverznom relacijom (2.12).

Primjer 3.6.1: Sila koja djeluje stalnom snagom

Kad sila koja ubrzava tijelo djeluje stalnom snagom, iznos same sile je obrnuto razmjern iznosu brzine tijela. Uzmemo li da se gibanje odvija duž x -osi, NJG možemo napisati u obliku

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x[v_x] = \frac{P}{v_x},$$

gdje je m masa tijela, konstanta P je snaga, a v_x je x -komponenta brzine tijela. Separacijom varijabli dobivamo $mv_x dv_x = P dt$ te provodimo integraciju od početnog do konačnog stanja,

$$\int_{\text{poč.}}^{\text{kon.}} mv_x dv_x = \int_{\text{poč.}}^{\text{kon.}} P dt',$$

što daje

$$\frac{m}{2} ((v_x^2)_{\text{kon.}} - (v_x^2)_{\text{poč.}}) = P(t_{\text{kon.}} - t_{\text{poč.}}).$$

Uzmemo li kao početni trenutak $t_{\text{poč.}} = t_0$ te kao konačni trenutak $t_{\text{kon.}} = t$, brzina tijela u trenutku t je

$$v_x[t] = \pm \sqrt{v_x[t_0]^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)} \quad (v_x \geq 0),$$

gdje predznak odabiremo ovisno o smjeru gibanja. Položaj tijela dobivamo primjenom inverzne relacije (2.12),

$$\begin{aligned} x[t] &= x[t_0] + \int_{t_0}^t v_x[t'] dt' = x[t_0] \pm \int_{t_0}^t \left(v_x[t_0]^2 + \frac{2P}{m}(t' - t_0) \right)^{1/2} dt' \\ &= x[t_0] \pm \frac{m}{3P} \left(v_x[t_0]^2 + \frac{2P}{m}(t' - t_0) \right)^{3/2} \Big|_{t_0}^t \\ &= x[t_0] \pm \frac{m}{3P} \left(v_x[t_0]^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0) \right)^{3/2} \mp \frac{m}{3P} v_x[t_0]^3. \end{aligned}$$

Izrazi za brzinu i položaj poprimaju vrlo jednostavne oblike uzmemo li da je čestica u početnom trenutku $t_0 = 0$ mirovala u ishodištu te da sila djeluje u pozitivnom smjeru x -osi. Uz početne uvjete $v_x[0] = 0$ i $x[0] = 0$ imamo

$$v_x[t] = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}, \quad x[t] = \frac{2}{3} \left(\frac{2P}{m} \right)^{1/2} t^{3/2}.$$

Sila otpora koja ovisi o brzini: Kad se tijelo giba kroz neko sredstvo (tekućinu ili plin), na njega djeluje sila otpora (engl. *drag*). Smjer sile otpora je suprotan smjeru gibanja tijela u odnosu na sredstvo, a njen iznos općenito ovisi o iznosu brzine tijela.

Sila otpora razmjerna brzini: Zbog matematičke jednostavnosti često se uzima da je iznos sile otpora razmjern iznosu brzine tijela. Kad na česticu mase m djeluje stalna sila \mathbf{F}_0 i sila otpora čiji je iznos razmjern brzini, NJG možemo napisati u obliku

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_0 - b\mathbf{v}. \quad (3.11)$$

Član $-b\mathbf{v}$ opisuje silu otpora. Negativan predznak u tom članu prisutan je jer je smjer sile otpora suprotan smjeru brzine tijela, a koeficijent $b > 0$ ovisi o obliku tijela te o svojstvima sredstva kroz koje se ono giba (fizička dimenzija koeficijenta b je MT^{-1}).

Rješenje jednadžbe gibanja (3.11) može se napisati u obliku

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}_\infty + (\mathbf{v}[t_0] - \mathbf{v}_\infty) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}, \quad (3.12)$$

gdje je $\mathbf{v}[t_0]$ brzina tijela u početnom trenutku $t = t_0$, a

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{1}{b} \mathbf{F}_0 \quad (3.13)$$

je brzina pri kojoj se sila otpora $-b\mathbf{v}$ i stalna sila \mathbf{F}_0 međusobno poništavaju. Iz izraza (3.12) se jasno vidi da, neovisno o početnoj brzini tijela $\mathbf{v}[t_0]$, njegova brzina tijekom vremena teži u \mathbf{v}_∞ , što znači da gibanje tijela postaje blisko jednolikom pravocrtnom gibanju upravo tom brzinom. (Drugi član na desnoj strani sadrži faktor $e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$ koji s vremenom asimptotski teži u nulu.) Zbog toga brzinu \mathbf{v}_∞ zovemo asimptotskom ili terminalnom brzinom. Valjanost izraza (3.12) možemo provjeriti uvrštavanjem trenutka $t = t_0$ za koji se desna strana svodi na $\mathbf{v}[t_0]$ te deriviranjem $\mathbf{v}[t]$ po vremenu i uvrštavanjem u jednadžbu gibanja (3.11) čime se pokazuje da on predstavlja njeno rješenje. Postupak rješavanja jednadžbe gibanja metodom separacije varijabli opisan je u primjeru 3.6.2.

Položaj tijela koje se giba u skladu s jednadžbom gibanja (3.11) može se napisati kao

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}_\infty(t - t_0) + \frac{m}{b} (\mathbf{v}[t_0] - \mathbf{v}_\infty) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}\right), \quad (3.14)$$

gdje su $\mathbf{r}[t_0]$ i $\mathbf{v}[t_0]$ položaj i brzina tijela u početnom trenutku $t = t_0$. Izraz (3.14) možemo provjeriti uvrštavanjem trenutka $t = t_0$ za koji se desna strana svodi na $\mathbf{r}[t_0]$ te deriviranjem tog izraza po vremenu čime dobivamo izraz za brzinu koji se podudara s (3.12). Izraz (3.14) možemo dobiti uvrštavanjem izraza za brzinu (3.12) u inverznu relaciju za položaj (2.12), vidi primjer 3.6.2.

Primjer 3.6.2: Postupak rješavanja NJG za stalnu silu uz silu otpora koja je razmjerna brzini

Pokazat ćemo postupak rješavanja jednadžbe gibanja (3.11) koja opisuje gibanje tijela na koje djeluje stalna sila i sila otpora razmjerna brzini tijela.

Najprije sve vektorske veličine u (3.11) prikazujemo kao vektore u pravokutnom koordinatnom sustavu te izjednačimo odgovarajuće komponente vektora s lijeve i s desne strane znaka jednakosti. Za x -komponentu dobivamo jednakost

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_{0x} - bv_x,$$

a analogne jednakosti dobivamo za y i z -komponentu. Separacijom varijabli dobivamo jednadžbu

$$\frac{m dv_x}{F_{0x} - bv_x} = dt$$

koju možemo integrirati od početnog do konačnog stanja,

$$\int_{\text{poč.}}^{\text{kon.}} \frac{m \, dv_x}{F_{0x} - bv_x} = \int_{\text{poč.}}^{\text{kon.}} dt.$$

Dobivamo

$$-\frac{m}{b} \ln[F_{0x} - bv_x] \Big|_{\text{poč.}}^{\text{kon.}} = t \Big|_{\text{poč.}}^{\text{kon.}}$$

odnosno

$$\ln \left[\frac{F_{0x} - bv_x[t_{\text{kon.}}]}{F_{0x} - bv_x[t_{\text{poč.}}]} \right] = -\frac{b}{m} (t_{\text{kon.}} - t_{\text{poč.}}).$$

Antilogaritmiranjem te uzimajući $t_{\text{poč.}} = t_0$ i $t_{\text{kon.}} = t$ imamo

$$\frac{F_{0x} - bv_x[t]}{F_{0x} - bv_x[t_0]} = e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

odnosno

$$v_x[t] = \frac{F_{0x}}{b} + \left(v_x[t_0] - \frac{F_{0x}}{b} \right) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}.$$

S obzirom na to da bismo analogne izraze dobili za y i z -komponentu brzine, konačni vektorski izraz za brzinu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{v}[t] = \mathbf{v}_\infty + (\mathbf{v}[0] - \mathbf{v}_\infty) e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)},$$

što je jednadžba (3.12), a $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{F}_0/b$ je asimptotska brzina (3.13).

Izraz za položaj (3.14) dobivamo uvrštavanjem izraza za brzinu (3.12) u inverznu relaciju (2.12),

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[t] &= \mathbf{r}[t_0] + \int_{t_0}^t \mathbf{v}[t'] \, dt' = \mathbf{r}[t_0] + \int_{t_0}^t \left(\mathbf{v}_\infty + (\mathbf{v}[t_0] - \mathbf{v}_\infty) e^{-\frac{b}{m}(t'-t_0)} \right) dt' \\ &= \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}_\infty \int_{t_0}^t dt' + (\mathbf{v}[t_0] - \mathbf{v}_\infty) \int_{t_0}^t e^{-\frac{b}{m}(t'-t_0)} dt' \\ &= \mathbf{r}[t_0] + \mathbf{v}_\infty(t - t_0) + \frac{m}{b}(\mathbf{v}[t_0] - \mathbf{v}_\infty) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \right), \end{aligned}$$

što je izraz (3.14).

Primjer 3.6.3: Gibanje uz silu otpora koja je razmjerna brzini bez prisustva stalne sile

Odredit ćemo duljinu puta koju bi nakon “beskonačno dugog vremena” prevalilo tijelo koje ima početnu brzinu iznosa v_0 , a giba se pod djelovanjem sile otpora koja je razmjerna brzini ako pritom stalna sila nije prisutna. Uzet ćemo da je masa tijela m te da je iznos sile otpora bv , gdje je b koeficijent otpora, a v je iznos brzine tijela.

Radi se o gibanju uz silu otpora razmjernu brzini, a s obzirom na to da stalna sila nije prisutna, asimptotska brzina (3.13) je u ovom slučaju jednaka nuli. Time se izraz (3.14) za položaj tijela svodi na

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}[t_0] + \frac{m}{b} \mathbf{v}[t_0] \left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \right),$$

a dodatno se pojednostavljuje odaberemo li početni trenutak $t_0 = 0$, početni položaj $\mathbf{r}[0] = 0$ te početnu brzinu koja gleda u smjeru x -osi, $\mathbf{v}[0] = v_0 \hat{\mathbf{x}}$. U tom se slučaju tijelo giba duž x -osi te je

dovoljno razmatrati x -koordinatu njegovog položaja,

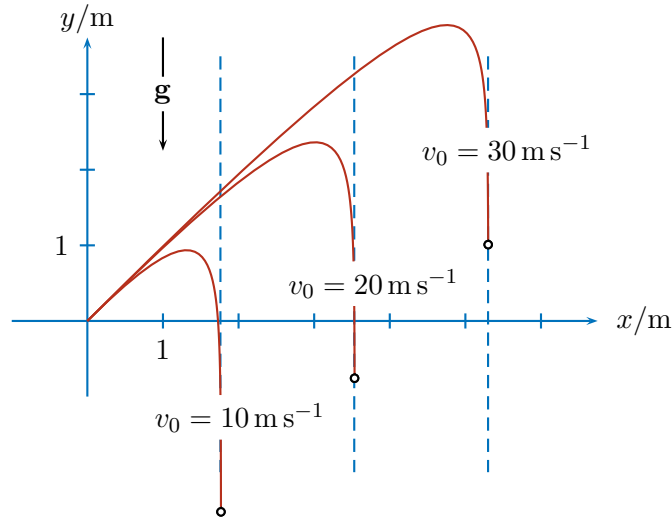
$$x[t] = \frac{mv_0}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right).$$

S obzirom na to da u $t = 0$ tijelo kreće iz $x[0] = 0$ te da je njegova brzina sve vrijeme pozitivna, duljinu puta koju ono prevoli do trenutka t možemo poistovjetiti s njegovom x -koordinatom, $s[t] = x[t]$, a nakon “beskonačno dugog vremena” to je

$$s_\infty = x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x[t] = \frac{mv_0}{b} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) = \frac{mv_0}{b}.$$

Primjer 3.6.4: Kosi hitac uz silu otpora razmjernu brzini

Slika prikazuje putanje triju projektila izračunate pretpostavljajući da na svaki od projektila uz silu težu djeluje i sila otpora razmjerna brzini projektila.



Prikazane putanje odnose se na tijela mase $m = 5 \text{ g}$ koja imaju koeficijent otpora $b = 20 \text{ g s}^{-1}$, a izbačena su pod kutom $\alpha = 45^\circ$ u odnosu na vodoravnu ravninu (x -os) brzinama početnih iznosa $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$, 20 m s^{-1} i 30 m s^{-1} (radi se npr. o pokušaju igre odbojke s najobičnijim balonom umjesto lopte). Prikazane su prve dvije sekunde leta tijela. Uočavamo da se putanje projektila s vremenom sve više približavaju uspravnim pravcima koje zovemo asimptotama. Odredit ćemo x -koordinate asimptota.

- Gibanje projektila s vremenom sve više nalikuje gibanju asimptotskom brzinom koju možemo izračunati korištenjem jednadžbe (3.13),

$$\mathbf{v}_\infty = \frac{1}{b} \mathbf{F}_0 = \frac{(-mg \hat{\mathbf{y}})}{b} = -\frac{(5 \text{ g}) \times (9.81 \text{ m s}^{-2})}{0.02 \text{ g s}^{-1}} \hat{\mathbf{y}} = -(2.45 \text{ m s}^{-1}) \hat{\mathbf{y}}.$$

Uočavamo da je njen iznos u ovom slučaju manji od početne brzine v_0 .

- Uzmemo li za početni trenutak $t_0 = 0$, uvrštavanjem gornjeg izraza za asimptotsku brzinu te početnih uvjeta

$$\mathbf{r}[0] = 0, \quad \mathbf{v}[0] = v_0(\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}),$$

u izraz za položaj čestice (3.14), nalazimo da je x -komponenta položaja

$$x[t] = \frac{m}{b} v_0 \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)} \right).$$

Uočavamo da u limesu $t \rightarrow \infty$ gornji izraz teži u vrijednost

$$x_{\infty} = \frac{mv_0 \cos \alpha}{b},$$

što predstavlja x -koordinatu uspravne asimptote putanje tijela.

Za početne brzine koje smo ovdje koristili kao x -koordinate asimptota dobivamo $x_{\infty} = 1.76 \text{ m}$, 3.53 m i 5.30 m , što ujedno predstavlja i grubu procjenu dometa ovih “projektila”.

Sila otpora razmjerna kvadratu brzine: Jednadžba gibanja čestice mase m na koju djeluje stalna sila \mathbf{F}_0 i sila otpora čiji je iznos razmjern kvadratu iznosa brzine čestice može se napisati u obliku

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_0 - bv^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (3.15)$$

gdje je b koeficijent sile otpora (fizička dimenzija koeficijenta b ovdje je ML^{-1}), a $\hat{\mathbf{v}}$ je jedinični vektor smjera gibanja. Lako je prepoznati da je iznos asimptotske brzine u ovom slučaju

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{F_0}{b}}. \quad (3.16)$$

U usporedbi sa silom otpora koja je razmjerna brzini, sila otpora razmjerna kvadratu brzine znatno vjerodostojnije opisuje stvarnu silu otpora koja djeluje npr. na tijela koja se gibaju kroz zrak. Na žalost, opće rješenje jednadžbe gibanja (3.16) moguće je napisati u analitičkom obliku jedino kad se gibanje odvija duž pravca, a i tada se radi o kompliciranom izrazu. Rješenje poprima vrlo jednostavan oblik jedino kad vanjska sila nije prisutna. Uzmemo li da se čestica giba duž x -osi, jednadžbu gibanja možemo napisati u obliku

$$m \frac{d}{dt} v_x = \mp bv_x^2 \quad (v_x \gtrless 0), \quad (3.17)$$

gdje se gornji predznak odnosi na slučaj u kojem se čestica giba udesno, a donji predznak se odnosi na slučaj u kojem se ona giba ulijevo. Separacijom varijabli te integracijom dobivamo

$$v_x[t] = \frac{v_x[t_0]}{1 \pm \frac{b}{m} v_x[t_0](t - t_0)} \quad (v_x \gtrless 0), \quad (3.18)$$

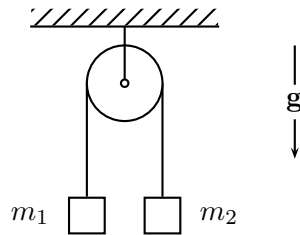
gdje je $v_x[t_0]$ brzina čestice u početnom trenutku $t = t_0$. Uočavamo da se tijekom vremena brzina čestice po iznosu smanjuje te da teži u nulu. Inverznom relacijom (2.12) dobivamo izraz za položaj čestice

$$x[t] = x[t_0] \pm \frac{m}{b} \ln \left[1 \pm \frac{b}{m} v_x[t_0](t - t_0) \right] \quad (v_x \gtrless 0), \quad (3.19)$$

gdje je $x[t_0]$ njen položaj u početnom trenutku. Gornji rezultat možemo usporediti s izrazom za duljinu puta koji tijelo na koje djeluje sila razmjerna brzini prevari “nakon beskonano dugog vremena” (vidi primjer 3.6.3). Unatoč činjenici da iznos brzine dan izrazom (3.19) kad je sila otpora razmjerna kvadratu brzine prevarljeni put može biti beskonačno dug, dok je uz otpor razmjern brzini taj put konačan.

Zadaci

Z.3.1: Dva tijela čije su mase $m_1 = M$ i $m_2 = M + \Delta M$ povezana su nerastezljivom niti koja je prebačena preko koloture.



Odredite iznos akceleracije tijela ako je $M = 500 \text{ g}$ i $\Delta M = 1 \text{ g}$. Masu niti, masu koloture i sile otpora smatramo zanemarivim. (Vidi primjer 3.4.1.)

$$\text{Rj: } a = \Delta M g / (2M + \Delta M) \simeq \Delta M g / 2M \simeq 9.81 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \quad [\text{P}]$$

Z.3.2: Izvedite izraz za napetost niti T u sustavu s koloturama iz primjera 3.4.1 te izračunajte njegovu vrijednost za slučaj (a) $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$ kao i za slučaj (b) u kojem ta tijela zamijene mjesta.

$$\text{Rj: (a) } T = 3m_1 m_2 g / (4m_1 + m_2) \simeq 12.6 \text{ N, (b) } T' \simeq 6.79 \text{ N}$$

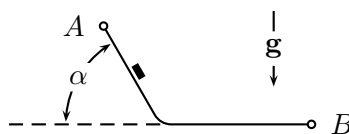
Z.3.3: Sanduk mase m vezali smo konopom i povlačimo ga brzinom stalnog iznosa po vodoravnoj podlozi s kojom sanduk ima koeficijent trenja μ . Izvedite izraz za napetost konopa T kad on s podlogom zatvara kut α . Zatim izvedite izraz za kut α' koji konop mora zatvarati s podlogom želimo li da napetost konopa pri povlačenju sanduka bude što je moguće manja te za samu napetost konopa T_{\min} u tom slučaju.

$$\text{Rj: } T = \mu m g / (\cos \alpha + \mu \sin \alpha), \alpha' = \arctan \mu, T_{\min} = \mu m g / \sqrt{1 + \mu^2} \quad [\text{P}]$$

Z.3.4: Tijelo je brzinom početnog iznosa v_0 pokrenuto u klizanje uz kosinu nagiba α s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja μ_d . Pretpostavljajući da je zadovoljen uvjet $\mu_d < \mu_s < \tan \alpha$, a koji osigurava da će tijelo čim se zaustavi početi kliziti niz kosinu, odredite koliko je vremena potrebno da se tijelo opet nađe u početnom položaju. (Vidi primjere 3.4.2 i 3.4.3.)

$$\text{Rj: } t = (v_0 / a_+) \left(1 + \sqrt{a_+ / a_-} \right), \text{ gdje su } a_{\pm} = g(\sin \alpha \pm \mu_d \cos \alpha) \quad [\text{P}]$$

Z.3.5: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se giba od točke A do točke B tako da prvi dio puta klizi bez trenja niz kosinu nagiba α , dok ostatak puta klizi bez trenja po vodoravnoj polozi.



Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo postiže pri dnu kosine. Odredi nagib α takav da čitavo gibanje traje što je moguće kraće.

$$\text{Rj: } \alpha = \pi/3 \quad [\text{P}]$$

Z.3.6: Na tijelo mase m koje miruje pri $x = 0$ u trenutku $t = 0$ počne djelovati sila ovisna o vremenu čija je x -komponenta dana izrazom $F_x[t] = \beta t e^{-\lambda t}$, gdje su β i λ pozitivne konstante. Odredite trenutak t' u kojem akceleracija tijela poprima najveći iznos te x -komponente akceleracije i brzine i x -koordinatu položaja u tom trenutku. Zatim odredite x -komponentu brzine nakon vrlo dugog vremena ($t \rightarrow \infty$).

$$\text{Rj: } t' = 1/\lambda, (a_x)_{\max} = a_x[t'] = \beta / e m \lambda, v_x[t'] = \beta(1 - 2/e) / m \lambda^2, \\ x[t'] = \beta(3/e - 1) / m \lambda^3, \lim_{t \rightarrow \infty} v_x[t] = \beta / m \lambda^2 \quad [\text{P}]$$

Z.3.7: U vrlo jednostavnom modelu možemo uzeti da se sila koja djeluje na brod koji brzinom iznosa v jedri niz vjetar brzine iznosa $w > v$ sastoji od sile otpora vode koja je razmjerna kvadratu iznosa brzine broda u odnosu na vodu te od sile potiska koji proizlazi iz strujanja vjetra oko jedara i koja je razmjerna površini jedara i kvadratu iznosa brzine vjetra u odnosu na brzinu broda. Ako pri vjetru brzine iznosa $w = 10 \text{ kn}$ (čvorova) brod dosiže brzinu iznosa $v = 5 \text{ kn}$, koliko puta treba povećati površinu jedara da bi brod uz vjetar nepromijenjene brzine dosegao brzinu iznosa $v' = 6 \text{ kn}$?

$$\text{Rj: } S'/S = (v'/v)^2((w-v)/(w-v'))^2 = 9/4 = 2.25 \quad [\text{P}]$$

Z.3.8: Električnom automobilu *Rimac Concept One* potrebno je $\tau = 2.5 \text{ s}$ da iz mirovanja postigne brzinu iznosa $v_k = 100 \text{ km h}^{-1}$. Odredi duljinu puta koju automobil prevali tijekom tog ubrzavanja pretpostavljajući (a) da je iznos akceleracije automobila stalan i (b) da je snaga kojom djeluje motor automobila stalna, a sve sile otpora su zanemarive. (Vidi primjer 3.6.1)

$$\text{Rj: (a) } s = \frac{1}{2}v_k\tau = 36 \text{ m, (b) } s = \frac{2}{3}v_k\tau = 48 \text{ m} \quad [\text{P}]$$

Z.3.9: Odredi najveći iznos brzine kojom automobil može voziti rotorom polumjera $R = 50 \text{ m}$ bez da nastupi bočno proklizavanje, ako je koeficijent (statičkog) trenja između njegovih guma i ceste $\mu_s = 0.5$.

$$\text{Rj: } v \leq \sqrt{\mu_s R g} \simeq 56.4 \text{ km h}^{-1} \quad [\text{P}]$$

Z.3.10: Promjena smjera gibanja zamišljenog svemirskog broda može se ostvariti uključivanjem “bočnog potiskivača” koji na brod djeluje silom koja djeluje okomito na putanju broda. Odredite koliko dugo mora djelovati bočni motor želimo li da brod mase $m = 10 \text{ t}$ i brzine iznosa $v = 1 \text{ km s}^{-1}$ skrene za kut $\Delta\phi = 60^\circ$, ako motor djeluje silom iznosa $F = 10 \text{ kN}$. Zatim odredite koliko bi trajalo skretanje istog broda kad bismo motorom koji djeluje silom istog iznosa kao i bočni motor najprije zaustavili brod, a zatim ga iz mirovanja ubrzali u željenom smjeru sve do brzine iznosa jednakog iznosu početne brzine.

$$\text{Rj: } \Delta t = mv\Delta\phi/F \simeq 17.5 \text{ min, } \Delta t' \simeq 2mv/F = 33.3 \text{ min}$$

Z.3.11: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n -terokut s polumjerom opisane kružnice R . Kad se taj n -terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n -terokuta i koja prolazi njegovim središtem, napetosti niti ostvaruju centripetalnu silu potrebnu za kružno gibanje tijela. Odredi napetost niti ako se n -terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω .)

$$\text{Rj: } T_n = M\omega^2 R/2n \sin[\pi/n], T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi \quad [\text{P}]$$

Z.3.12: Kut zakreta vodoravne rotirajuće platforme dan je izrazom $\phi[t] = \phi_0 \cos \Omega t$, gdje je $\phi_0 > 0$ amplituda (maksimalni kutni otklon od središnjeg položaja), a Ω je frekvencija titranja. Odredi minimalnu vrijednost koeficijenta trenja između platforme i tijela koje je položeno na platformu na udaljenosti R od osi vrtnje ako želimo da tijelo ne proklizuje pri gibanju platforme.

$$\text{Rj: } \mu \geq R\Omega^2\phi_0/g \text{ za } 0 < \phi_0 \leq 1, \mu \geq R\Omega^2\phi_0^2/g \text{ za } \phi_0 > 1 \quad [\text{P}]$$

4 Rad, snaga i energija

Fizičke veličine među kojima su rad, kinetička energija, konzervativna sila i potencijalna energija vode nas do zakona o očuvanju mehaničke energije. Taj zakon nam u nekim situacijama omogućuje predviđanje ishoda fizičkog zbivanja bez potrebe za rješavanjem Newtonove jednačbe gibanja.

4.1 Rad sile i snaga

Rad sile: Ako pod djelovanjem sile \mathbf{F} čestica napravi diferencijal pomaka $d\mathbf{r}$, kažemo da je sila obavila diferencijal rada dW definiran izrazom

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Rad (engl. *work*) je skalarna fizička veličina, njena fizička dimenzija je ML^2T^{-2} , a mjerna jedinica je džul (simbol J, engl. *joule*, $1\text{ J} = 1\text{ N m}$). Diferencijal rada još možemo izraziti kao $dW = F ds \cos \vartheta$, gdje je $F = |\mathbf{F}|$ iznos sile, $ds = |d\mathbf{r}|$ je diferencijal duljine prevaljenog puta, a ϑ je kut koji zatvaraju \mathbf{F} i $d\mathbf{r}$. Diferencijal rada jednak je nuli kad je sila okomita na pomak odnosno ako je $\vartheta = \pi/2$. Pozitivan je ako $\vartheta < \pi/2$, a negativan je ako $\vartheta > \pi/2$.

Ako je \mathbf{F} rezultantna (jedina) sila koja djeluje na tijelo, možemo ju prikazati kao zbroj centripetalne i tangencijalne sile, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cp}} + \mathbf{F}_{\text{tang}}$. S obzirom na to da je centripetalna sila okomita na pomak, možemo reći da ona ne obavlja rad odnosno da rad obavlja isključivo tangencijalna sila. Diferencijal rada pozitivan je kad tangencijalna sila djeluje u smjeru gibanja i time povećava iznos brzine tijela, a negativan je kad ona djelujući u suprotnom smjeru smanjuje iznos brzine tijela.

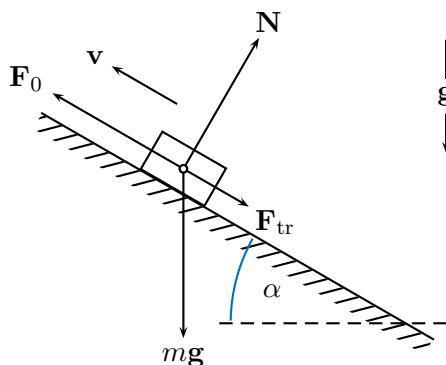
Ako čestica pod djelovanjem sile \mathbf{F} stigne iz točke P u točku Q , rad koji sila obavi je

$$W_{PQ} = \int_P^Q dW = \int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.2)$$

gdje je $d\mathbf{r}$ element putanje duž koje se čestica gibala. Općenito, integral kakav se pojavljuje u gornjem izrazu u matematici zovemo krivuljnim integralom vektorskog polja. On poprima jednostavan oblik kad je sila \mathbf{F} stalna, a čestica se giba pravocrtno ne mijenjajući smjer gibanja. Tada možemo napisati $W = Fs \cos \vartheta$, gdje je F iznos sile, s je duljina prevaljenog puta, a ϑ je kut koji smjer sile zatvara sa smjerom gibanja. Taj se izraz dodatno pojednostavljuje kad stalna sila iznosa F djeluje u smjeru gibanja ($\vartheta = 0$) te imamo pozitivan rad $W = Fs$ ili kad stalna sila djeluje u suprotnom smjeru od smjera gibanja ($\vartheta = \pi$) te imamo negativan rad $W = -Fs$.

Primjer 4.1.1: Rad sile pri guranju tijela uz kosinu

Odredit ćemo rad sile \mathbf{F}_0 koja brzinom stalnog iznosa gura tijelo mase m uz kosinu, ako tijelo pritom prevale visinsku razliku h . Nagib kosine je α , a tijelo s kosinom ima koeficijent trenja μ .



S obzirom na to da se tijelo giba stalnom brzinom, zaključujemo da je zbroj svih sila koje na njega djeluju jednak nuli. Sile koje djeluju na tijelo su sama sila \mathbf{F}_0 koja djeluje u smjeru gibanja i čiji rad želimo odrediti, sila podloge \mathbf{N} , sila teža $m\mathbf{g}$ te sila trenja \mathbf{F}_{tr} čiji je iznos $F_{\text{tr}} = \mu N$. Uvjet iščezavanja zbroja sila u vektorskom obliku glasi

$$\mathbf{F}_0 + \mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{tr}} = 0.$$

Iz uvjeta iščezavanja komponente zbroja sila u smjeru okomitom na kosinu dobivamo $N = mg \cos \alpha$, a iz uvjeta iščezavanja komponente zbroja sila u smjeru gibanja slijedi

$$F_0 = mg \sin \alpha + F_{\text{tr}} = mg \sin \alpha + \mu N = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Duljina puta koji tijelo prevali kličući uz kosinu nagiba α i koja odgovara visinskoj razlici h je

$$s = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Slijedi da je rad koji sila \mathbf{F}_0 obavi gurajući tijelo

$$W = F_0 s = mgh(1 + \mu \cot \alpha).$$

Dobiveni izraz za rad teži u beskonačno kad nagib kosine teži u nulu, što je razumljivo jer iznos sile \mathbf{F}_0 u tom slučaju teži u μmg , a duljina puta duž kosine teži u beskonačno. U suprotnom limesu, t.j. kad nagib kosine teži prema $\pi/2$, sila trenja postaje zanemariva, a rad teži u mgh , što odgovara radu sile koja poništava djelovanje gravitacijske sile iznosa mg duž puta čija duljina se svodi na visinsku razliku h .

Snaga (engl. *power*) kojom neka sila djeluje omjer je njenog rada ΔW i vremena Δt u kojem je on obavljen u limesu kad Δt teži u nulu, odnosno derivacija rada po vremenu. Snagu se još može izraziti kao skalarni umnožak sile i brzine čestice,

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.3)$$

Fizička dimenzija snage je ML^2T^{-3} , a mjerna jedinica je vat (simbol W, engl. *watt*, $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$). Snagu još možemo napisati kao $P = Fv \cos \vartheta$, gdje je F jakost sile, v je iznos brzine, a ϑ je kut među vektorima \mathbf{F} i \mathbf{v} . Snaga je pozitivna kad je $\vartheta < \pi/2$, a negativna je kad je $\vartheta > \pi/2$. Rad koji neka sila obavi djelujući snagom $P[t]$ u intervalu vremena od t_1 do t_2 može se izraziti integralom

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P[t'] dt', \quad (4.4)$$

koji se u slučaju u kojem je snaga stalna u vremenu svodi na $W_{12} = P(t_2 - t_1)$.

Primjer 4.1.2: Snaga pri guranju tijela uz kosinu

Preuzmemo li iz primjera 4.1.1 izraz za iznos sile koja stalnom brzinom v gura tijelo mase m uz kosinu nagiba α s kojom tijelo ima koeficijent trenja μ , snagu kojom ta sila djeluje možemo napisati kao

$$P = Fv = mgv(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

S obzirom na to da visinskoj razlici h odgovara duljina puta $s = h/\sin \alpha$, vrijeme koje je potrebno za

uspinjanje tijela na visinu h je

$$\tau = \frac{s}{v} = \frac{h}{v \sin \alpha},$$

a s obzirom na to da je snaga stalna u vremenu, rad koji sila pritom obavi je

$$W = P\tau = mgv(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \frac{h}{v \sin \alpha} = mgh(1 + \mu \cot \alpha),$$

što se podudara s izrazom za rad iz primjera 4.1.1.

Primjer 4.1.3: Snaga potrebna za svladavanje sile otpora razmjerne n -toj potenciji brzine

Odredit ćemo snagu djelovanja sile koja omogućuje gibanje tijela stalnom brzinom ako ona mora svladavati silu otpora čiji je iznos razmjern n -toj potenciji iznosa brzine.

Pretpostavimo li da se tijelo giba brzinom stalnog iznosa u pozitivnom smjeru x -osi, jednadžbu gibanja tijela možemo napisati u obliku

$$ma_x = F_x - bv_x^n = 0,$$

gdje je F_x sila čiju snagu ćemo odrediti, a bv_x^n je iznos sile otpora. Ispred člana bv_x^n je negativan predznak što osigurava da smjer sile otpora bude suprotan pretpostavljenom smjeru gibanja. Ako je brzina stalna, akceleracija je jednaka nuli, te slijedi

$$F_x = bv_x^n.$$

Snagu djelovanja te sile dobivamo iz (4.3),

$$P = F_x v_x = bv_x^{n+1},$$

gdje uočavamo da je ona razmjerna za jedan red višoj potenciji brzine od potencije n kojoj je razmjerna sama sila otpora.

Na primjer, uzmemo li da je sila otpora pri vožnji bicikla razmjerna kvadratu brzine, snaga potrebna za održavanje stalne brzine na vodoravnoj cesti razmjerna je trećoj potenciji iznosa brzine. Kako bi vozio dvostruko većom brzinom, biciklist mora djelovati osam puta većom snagom.

4.2 Teorem o radu i kinetičkoj energiji

Kinetička energija (engl. *kinetic energy*) čestice mase m koja se giba brzinom iznosa v je skalarna veličina definirana izrazom

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.5)$$

Fizička dimenzija kinetičke energije jednaka je fizičkoj dimenziji rada. Kinetička energija čestice ne može biti negativna, jednaka je nuli kad čestica miruje, a veća je od nule kad se čestica giba. Kinetičku energiju čestice možemo još izraziti i kao $K = p^2/2m$, gdje je $p = mv$ iznos količine gibanja čestice.

Teorem o radu i kinetičkoj energiji: Rad ΔW koji obavi rezultantna sila djelujući na česticu jednak je promjeni kinetičke energije čestice ΔK ,

$$\Delta W = \Delta K. \quad (4.6)$$

Teorem dokazujemo pokazujući jednakost diferencijala rada i diferencijala kinetičke energije,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \frac{dv^2}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK, \quad (4.7)$$

gdje smo najprije koristili Newtonovu jednadžbu gibanja $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, a zatim jednakost $dv^2 = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Integracijom $\int dW = \int dK$ od početnog do konačnog stanja slijedi (4.6), čime je teorem dokazan.

Primjer 4.2.1: Rad gravitacijske sile i konačna brzina tijela pri slobodnom padu

Najprije ćemo odrediti rad koji gravitacijska sila obavi tijekom slobodnog pada tijela s visine h , a nakon toga ćemo, zanemarujući učinak sila otpora i Zemljine vrtnje, primjenom teorema o radu i kinetičkoj energiji odrediti iznos brzine koju početno mirno tijelo koje padne s visine h ima neposredno prije udara u tlo. Pritom ćemo koristiti izraz za gravitacijsku silu koji uzima u obzir ovisnost njene jakosti o udaljenosti od Zemljine površine (visini nad tlom).

Neka je z -os usmjerena uvis te neka $z = 0$ odgovara razini tla. Gravitacijsku silu u točki \mathbf{r} možemo opisati izrazom

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -mg \frac{R^2}{(R+z)^2} \hat{\mathbf{z}},$$

gdje je m masa tijela, g je iznos akceleracije slobodnog pada pri Zemljinoj površini, a R je polumjer Zemlje (opravdanje za ovakav izraz može se naći u poglavlju 11.3 posvećenom gravitaciji). Tijekom pada početno mirnog tijela s visine h ta sila obavi rad

$$\Delta W = \int \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' = \int_h^0 -\frac{mgR^2}{(R+z)^2} dz = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dr}{r^2} = \frac{mgh}{1+h/R}$$

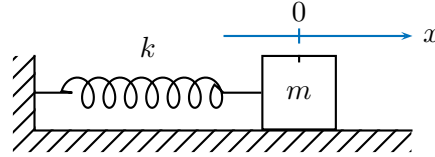
(diferencijal duljine prevaljenog puta smo izrazili kao $d\mathbf{r}' = dz \hat{\mathbf{z}}$, a kasnije smo zbog jednostavnije integracije koristili varijablu $r = R+z$ koja predstavlja udaljenost od Zemljina središta). Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, rad ΔW jednak je promjeni kinetičke energije tijela ΔK , a s obzirom na to da je tijelo početno mirovalo, promjena kinetičke energije jednaka je konačnoj kinetičkoj energiji tijela, $\Delta K = K = \frac{1}{2}mv^2$. Konačno, iz jednakosti $\Delta W = \Delta K$ dobivamo brzinu tijela neposredno prije udara u tlo,

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+h/R}}.$$

Uočavamo da se za $h \ll R$ taj izraz svodi na $v = \sqrt{2gh}$ što odgovara slučaju u kojem zanemarujemo ovisnost akceleracije slobodnog pada o visini.

Primjer 4.2.2: *Gibanje tijela pod djelovanjem sile opruge i sile trenja*

Slika prikazuje tijelo mase m koje je vodoravnom oprugom konstante k povezano s čvrstim uporištem, a leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ . Tijelo je prikazano u položaju $x = 0$ u kojem opruga na njega ne djeluje silom.



Primjenom teorema o radu i kinetičkoj energiji odredit ćemo položaj x_2 u kojem će se tijelo po prvi put zaustaviti pustimo li ga u gibanje iz mirovanja u položaju $x_1 = -A$ u kojem je opruga sabijena te djeluje na tijelo silom iznosa kA . Pretpostavljamo da je iznos sile kojom opruga djeluje u početnom položaju veći od iznosa sile trenja, $kA > \mu mg$, jer se u protivnom tijelo ne bi počelo gibati.

S obzirom na to da u početnom i u konačnom položaju tijelo miruje, promjena kinetičke energije tijela je jednaka nuli,

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 0.$$

Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji to znači da je nuli jednak također i rad koji na putu od početnog do konačnog položaja obave sile koje djeluju na tijelo,

$$\Delta W = W_{12} = 0,$$

iz čega možemo odrediti položaj tijela u kojem će se ono zaustaviti.

x -komponentu sile kojom opruga djeluje na tijelo možemo napisati kao $-kx$, gdje je x koordinata položaja tijela, a s obzirom na to da se tijelo sve do njegovog prvog zaustavljanja giba u pozitivnom smjeru x -osi, x -komponentu sile trenja možemo napisati kao $-\mu mg$. x -komponenta rezultantne sile je prema tome

$$F_x[x] = -kx - \mu mg,$$

a rad koji ona obavlja gurajući tijelo od x_1 do x_2 je

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} F_x[x] dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx - \mu mg) dx \\ &= -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) - \mu mg(x_2 - x_1) \\ &= \left(\frac{k}{2}(x_1 + x_2) + \mu mg \right) (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

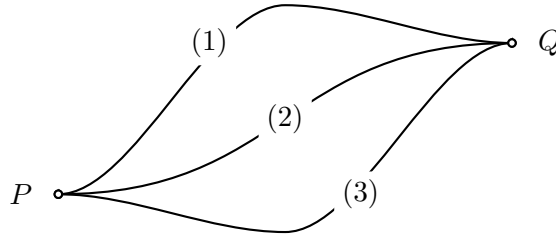
Uvjet $W_{12} = 0$ je zadovoljen za $x_2 = x_1 = -A$ što ne predstavlja rješenje postavljenog problema te za

$$x_2 = -x_1 - \frac{2\mu mg}{k} = A - \frac{2\mu mg}{k}.$$

Uočavamo da bi se u odsutnosti trenja ($\mu = 0$) tijelo po prvi put zaustavilo u položaju $x_2 = A$ pri kojem je opruga rastegnuta upravo onoliko koliko je u početnom položaju bila sabijena. Taj rezultat je u skladu s činjenicom da bi u odsutnosti trenja promatrani sustav titrao amplitudom A oko ravnotežnog položaja $x = 0$. Također uočavamo da u prisutnosti trenja tijelo do svog prvog zaustavljanja prevaljuje put koji je manji od $2A$ koliko bi iznosila duljina prevaljenog puta kad trenje ne bi bilo prisutno.

4.3 Konzervativna sila i potencijalna energija

Rad u polju sile: Kad na česticu djeluje sila koju možemo opisati vektorskom funkcijom $\mathbf{F}[\mathbf{r}, t]$ koja ovisi o položaju čestice \mathbf{r} i o vremenu t , funkciju $\mathbf{F}[\mathbf{r}, t]$ zovemo poljem sile (engl. *force field*), a za česticu kažemo da se “nalazi u polju” te sile. Slika pokazuje nekoliko različitih putanja označenih brojevima duž kojih čestica u polju neke sile može stići od točke P do točke Q .



Općenito, rad W_{PQ} koji polje sile $\mathbf{F}[\mathbf{r}, t]$ obavi pomičući česticu od P do Q osim o vremenu ovisi i o odabiru putanje.

Konzervativna sila: Ako sila opisana poljem $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ koje *ne* ovisi o vremenu i koje ima svojstvo da za bilo koji odabir točaka P i Q rad W_{PQ} koji sila obavi pomičući česticu od P do Q *ne* ovisi o odabiru putanje,

$$W_{PQ}^{(1)} = W_{PQ}^{(2)} = \dots = W_{PQ}, \quad (4.8)$$

kažemo da je $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ konzervativna sila (engl. *conservative force*) odnosno da je polje $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ konzervativno polje.

Rad W_{PQ} koji konzervativna sila obavi duž neke putanje od točke P do točke Q i rad W_{QP} koji ona obavi duž iste putanje u suprotnom smjeru jednaki su po apsolutnoj vrijednosti i suprotnog su predznaka,

$$W_{QP} + W_{PQ} = 0, \quad (4.9)$$

a s obzirom na to da rad konzervativne sile ne ovisi o odabiru putanje, gornja jednakost vrijedi i kada na putu od P do Q i u povratku od Q do P koristimo različite putanje. Nadalje, s obzirom na slobodu odabira točaka P i Q te na slobodu odabira polazne i povratne putanje, slijedi da je ukupni rad koji konzervativna sila obavi duž bilo koje zatvorene putanje (na bilo kojem “kružnom putovanju”) jednak nuli. Taj uvjet zapisujemo kao

$$\oint dW = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.10)$$

gdje kružić na znaku integrala označava da se radi o krivuljnom integralu vektorskog polja duž *zatvorene* putanje. Gornji uvjet je istovjetan uvjetu (4.8) koji smo koristili kao definiciju konzervativne sile.

Osim uvjetima (4.8) i (4.10), uvjet konzervativnosti vektorskog polja moguće je izraziti i na način koji proizlazi iz primjene teorema o rotaciji vektorskog polja (tzv. Stokesov teorem). Kako poznavanje tog teorema nadilazi očekivanu razinu matematičke pripremljenosti čitatelja, ovdje navodimo samo konačni rezultat u obliku koji možemo primijeniti kad je vektorsko polje $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ zadano njegovim komponentama $F_x[x, y, z]$, $F_y[x, y, z]$ i $F_z[x, y, z]$ u pravokutnom koordinatnom sustavu. U tom se slučaju uvjet konzervativnosti može izraziti trima jednakostima među parcijalnim derivacijama komponenta polja sile po koordinatama pravokutnog koordinatnog sustava,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (4.11)$$

Uvjeti (4.8), (4.10) i (4.11) su istovjetni.

Primjer 4.3.1: Konzervativnost polja sile teže pri Zemljinoj površini

Djelovanje sile teže na česticu mase m pri Zemljinoj površini možemo opisati homogenim poljem

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = \mathbf{F} = -mg \hat{\mathbf{z}},$$

gdje je g iznos akceleracije slobodnog pada, a z -os je usmjerena uvis. Pokazat ćemo da je to polje konzervativno na dva načina.

- Diferencijal pomaka čestice možemo izraziti kao

$$d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}},$$

nakon čega uočavamo da diferencijal rada

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg dz$$

koji sila teža obavi ovisi isključivo o z -komponenti diferencijala pomaka čestice. Rad koji sila teža obavi na putu od točke P do točke Q ,

$$W_{PQ} = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{z_P}^{z_Q} -mg dz = mg(z_P - z_Q),$$

ovisi isključivo o z -koordinatama točaka P i Q , odnosno o razlici visina tih točaka, a ne ovisi o odabiru putanje duž koje je čestica stigla od jedne do druge točke. Time smo pokazali da je zadovoljen uvjet (4.8).

- Budući da je polje homogeno, a to znači da ima jednak iznos i smjer u svim točkama prostora, njegove komponente u pravokutnom koordinatnom sustavu su konstante te je uvjet (4.11) očigledno zadovoljen (sve parcijalne derivacije jednake su nuli).

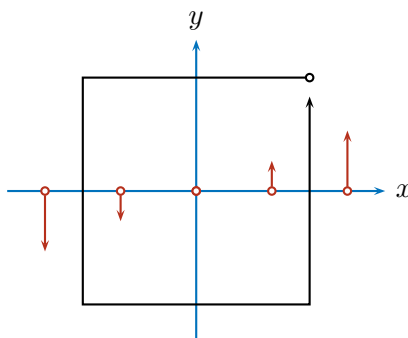
Primjer 4.3.2: Polje nekonzervativne sile

Razmotrit ćemo silu opisanu poljem

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = \kappa(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{y}} = \kappa x \hat{\mathbf{y}},$$

gdje je κ pozitivna konstanta, a $\hat{\mathbf{x}}$ i $\hat{\mathbf{y}}$ su uobičajeni jedinični vektori u x, y -ravnini. Na dva načina ćemo pokazati da ta sila nije konzervativna.

- Slika prikazuje vektore sile u nekoliko točaka na x -osi te zatvorenu putanju oblika kvadrata duž koje ćemo izračunati rad sile.



Računamo li rad duž kvadratne putanje u smjeru naznačenom na slici, nalazimo da duž obiju stranica kvadrata paralelnih s y -osi sila gleda u smjeru pomaka što znači da obavlja rad koji je veći od nule. Duž stranica koje su paralelne s x -osi rad sile je jednak nuli jer je sila okomita na te stranice. Slijedi da je rad sile duž zatvorene putanje veći od nule. To znači da uvjet (4.10) nije zadovoljen odnosno da sila nije konzervativna.

- Komponente ovog polja su $F_x = 0$, $F_y[x] = \kappa x$ i $F_z = 0$. Uočavamo da vrijedi

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \kappa, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

što znači da uvjet (4.11) nije zadovoljen odnosno da je sila nekonzervativna.

Napomena o polju sile u 1D: Kad je gibanje čestice ograničeno na gibanje duž pravca, kružnice ili neke druge krivulje, kažemo da se radi o gibanju u jednodimenzionalnom prostoru (1D). Kad ta krivulja nije zatvorena, postoji samo jedna putanja duž koje čestica može stići od neke točke P do neke druge točke Q na krivulji. Slijedi da u 1D svako polje sile koje ovisi isključivo o položaju čestice možemo smatrati konzervativnim poljem.

Potencijalna energija čestice (engl. *potential energy*) koja se nalazi u polju konzervativne sile $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ je skalarna fizička veličina $U[\mathbf{r}]$ definirana kao rad koji je potrebno obaviti kako bismo svladavajući konzervativnu silu prenijeli česticu od dogovorenog referentnog položaja \mathbf{r}_0 do položaja \mathbf{r} ,

$$U[\mathbf{r}] = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}'. \quad (4.12)$$

Samu potencijalnu energiju možemo shvatiti kao skalarno polje $U[\mathbf{r}]$ pridruženo nekom konzervativnom vektorskom polju $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$.

Negativan predznak ispred integrala u (4.12) je prisutan jer, prema definiciji potencijalne energije, računamo rad koji obavljamo suprotstavljajući se konzervativnoj sili \mathbf{F} , a to znači da djelujemo suprotnom silom.

S obzirom na svojstvo konzervativnosti polja sile, integraciju u (4.12) možemo provesti duž bilo koje putanje s referentnom točkom \mathbf{r}_0 kao početnom i \mathbf{r} kao konačnom točkom. Potencijalnu energiju nije moguće definirati za polje sile koja nije konzervativna jer bi u tom slučaju vrijednost integrala ovisila o odabiru putanje te $U[\mathbf{r}]$ više ne bi bila jednoznačno definirana veličina.

Sloboda odabira referentne točke \mathbf{r}_0 u definiciji potencijalne energije (4.12) istovjetna je dodavanju konstante potencijalnoj energiji. Odaberemo li "crtani" referentni položaj \mathbf{r}'_0 , kao putanju koju koristimo pri računanju "crtane" potencijalne energije $U'[\mathbf{r}]$ možemo odabrati putanju koja prolazi "necrtanim" referentnim položajem \mathbf{r}_0 . Tada integral možemo rastaviti na dva dijela,

$$U'[\mathbf{r}] = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' = \text{konst} + U[\mathbf{r}]. \quad (4.13)$$

U posljednjem koraku smo prvi član prepoznali kao konstantu, a drugi član kao "necrtanu" potencijalnu energiju $U[\mathbf{r}]$.

Diferencijal potencijalne energije možemo izraziti kao

$$dU = -\mathbf{F}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.14)$$

gdje je $\mathbf{F}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}$ diferencijal rada koji obavi konzervativna sila. Taj nam izraz dopušta da polje konzervativne

sile izrazimo kao negativnu derivaciju potencijalne energije po položaju,

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -\frac{d}{d\mathbf{r}}U[\mathbf{r}]. \quad (4.15)$$

Uočavamo da odabir referentnog položaja koji se prema (4.13) svodi na dodavanje konstante potencijalnoj energiji nema utjecaj pri računanju polja sile jer je derivacija konstante jednaka nuli. Koristimo li pravokutne koordinate, potencijalnu energiju možemo shvatiti kao funkciju koordinata x , y i z , a gornji izraz poprima jednostavan oblik

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.16)$$

Prepoznamo da su x , y i z -komponenta konzervativne sile jednake negativnim parcijalnim derivacijama potencijalne energije po koordinatama x , y i z .

Primjer 4.3.3: Gravitacijska potencijalna energija pri Zemljinoj površini

U primjeru 4.3.1 smo pokazali da je homogeno polje

$$\mathbf{F} = -mg \hat{\mathbf{z}}$$

kojim opisujemo gravitacijsku silu pri Zemljinoj površini konzervativno polje. To znači da čestici koja se nalazi u tom polju možemo pridružiti potencijalnu energiju. Koristeći (4.12) te uzimajući $\mathbf{r}_0 = 0$ kao referentnu točku imamo

$$U[\mathbf{r}] = -\int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = -\int_0^{\mathbf{r}} (-mg \hat{\mathbf{z}}) \cdot (dx' \hat{\mathbf{x}} + dy' \hat{\mathbf{y}} + dz' \hat{\mathbf{z}}) = mg \int_0^z dz' = mgz.$$

Primjenom izraza (4.16) iz dobivenog izraza za potencijalnu energiju možemo dobiti polazni izraz za polje gravitacijske sile,

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -\frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial}{\partial z}(mgz) \hat{\mathbf{z}} = -mg \hat{\mathbf{z}}$$

(parcijalne derivacije potencijalne energije U po koordinatama x i y nismo pisali jer U ovisi samo o z -koordinati).

Primjer 4.3.4: Potencijalna energija u polju elastične sile (potencijalna energija opruge)

Silu koja djeluje na česticu koja se giba duž x -osi i koja je oprugom konstante k povezana s čvrstim uporištem možemo opisati poljem

$$F_x[x] = -kx$$

(zbog jednostavnosti smo uzeli da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju čestice). To polje zovemo još i poljem elastične sile, a s obzirom da se radi o gibanju u jednodimenzionalnom prostoru smatramo ga konzervativnim poljem.

Potencijalna energija čestice u odnosu na referentno stanje $x = 0$ je prema definiciji

$$U[x] = -\int_0^x F_x[x'] dx' = -\int_0^x (-kx') dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2}kx^2.$$

Ona odgovara radu koji obavljamo sabijajući ili razvlačeći oprugu te ju još zovemo i potencijalnom energijom opruge ili potencijalnom energijom elastične sile ili jednostavno elastičnom potencijalnom energijom. Primjenom (4.16) iz potencijalne energije možemo dobiti polazni izraz za polje sile,

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x}U[x] = -kx.$$

4.4 Očuvanje mehaničke energije

Mehanička energija čestice (engl. *mechanical energy*) koja se giba pod djelovanjem konzervativne sile je zbroj njene kinetičke i njene potencijalne energije,

$$E = K + U. \quad (4.17)$$

Ukoliko istovremeno na česticu djeluje nekoliko konzervativnih sila, U predstavlja zbroj odgovarajućih potencijalnih energija.

Očuvanje mehaničke energije: Mehanička energija čestice koja se giba isključivo pod djelovanjem konzervativnih sila je stalna u vremenu (ne mijenja se) te kažemo da je ona očuvana fizička veličina. Pišemo $E = \text{konst.}$ ili

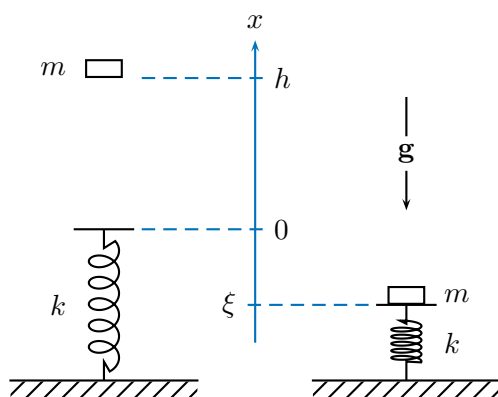
$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0. \quad (4.18)$$

Gornja tvrdnja slijedi iz dosadašnjih razmatranja. Na osnovu teorema o radu i kinetičkoj energiji imamo $\Delta K = \Delta W$, a na osnovu definicije potencijalne energije imamo $\Delta U = -\Delta W$, gdje je ΔW rad koji obavi konzervativna sila.

Načelo očuvanja mehaničke energije nam omogućuje rješavanje nekih problema bez da pritom moramo riješiti jednadžbu gibanja sustava (vidi primjer 4.4.1), a može nam pomoći i pri nalaženju same jednadžbe gibanja nekih mehaničkih sustava (vidi primjer 4.4.2).

Primjer 4.4.1: Jednostavan model trampolina

Tijelo mase m pada s visine h na platformu koja je oprugom konstante k oslonjena o čvrsto tlo. Masu platforme i opruge smatramo zanemarivim. Koristeći očuvanje mehaničke energije, odredit ćemo koliko je opruga sabijena u odnosu na njeno ravnotežno stanje u trenutku u kojem se tijelo po prvi puta zaustavi.



Najprije razmatramo mehaničku energiju u početnom stanju. Kinetička energija je jednaka nuli jer tijelo miruje, a s obzirom na to da opruga nije sabijena, potencijalna energija se sastoji isključivo od gravitacijske potencijalne energije tijela koje se nalazi pri $x = h$. Odaberemo li razinu platforme u početnom stanju kao referentnu razinu gravitacijske potencijalne energije, u početnom stanju imamo

$$K = 0, \quad U = mgh, \quad E_{\text{poč.}} = K + U = mgh.$$

Sada razmatramo mehaničku energiju u konačnom stanju. Kinetička energija je i ovdje jednaka nuli jer tijelo miruje, a potencijalna energija se sastoji od gravitacijske potencijalne energije tijela koje se nalazi

pri $x = \xi$ te od potencijalne energije opruge koja je sabijena za $|\xi|$,

$$K = 0, \quad U = mg\xi + \frac{1}{2}k\xi^2, \quad E_{\text{kon.}} = K + U = mg\xi + \frac{1}{2}k\xi^2.$$

Iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $E_{\text{kon.}} = E_{\text{poč.}}$, slijedi uvjet

$$mgh = mg\xi + \frac{1}{2}k\xi^2,$$

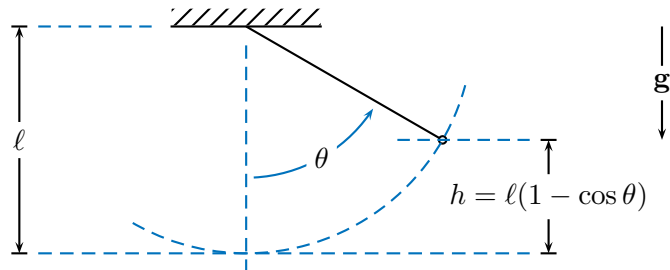
a rješavanjem kvadratne jednadžbe po ξ dobivamo

$$\xi_{1,2} = -\frac{mg}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2kh/mg} \right).$$

Prepoznamo da ξ_1 predstavlja rješenje zadanog problema jer je $\xi_2 > 0$ te odgovara gornjoj točki do koje bi tijelo došlo kada bi zalijepljeno za platformu nastavilo zajedno s njom titrati na opruzi. Također možemo uočiti da aritmetička sredina dvaju dobivenih rješenja, $x_0 = (\xi_1 + \xi_2)/2 = -mg/k$, odgovara ravnotežnom položaju tijela u kojem bi ono moglo trajno mirovati jer je gravitacijska sila iznosa mg uravnotežena silom opruge iznosa kx_0 .

Primjer 4.4.2: *Jednadžba gibanja matematičkog njihala*

Matematičko njihalo je idealizirani sustav koji se sastoji od sitnog tijela obješenog nerastezljivom bezmasenom niti duljine ℓ o čvrsto uporište i koje se njiše u uspravnoj ravnini (jednoliko kruženje u vodoravnoj ravnini sitnog tijela obješenog na isti način, tzv. stožasto njihalo, razmatrali smo u primjeru 3.3.3).



Koristeći načelo očuvanja mehaničke energije izvest ćemo jednadžbu gibanja ovog sustava. Shvatimo li tijelo kao česticu mase m te označimo li s θ odklon niti na kojoj ona visi (vidi sliku), mehanička energija sustava sastoji se od kinetičke energije čestice te od njene gravitacijske potencijalne energije,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell(1 - \cos\theta),$$

gdje smo, s obzirom da se čestica giba duž kružnice polumjera ℓ , iznos brzine čestice v izrazili kao umnožak polumjera i kutne brzine $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$. Uvjet očuvanja energije $0 = \frac{d}{dt}E$ nam daje

$$0 = \frac{d}{dt}E = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin\theta = m\ell^2\dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta\right).$$

S obzirom da gornji uvjet mora biti ispunjen u svim trenucima, dakle i onda kad je $\dot{\theta} \neq 0$, zaključujemo da izraz u zagradi mora u svim trenucima biti jednak nuli odnosno da mora vrijediti

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

što je jednadžba gibanja matematičkog njihala s niti duljine ℓ . U primjeru 6.4.1 pokazujemo da je frekvencija njihanja matematičkog njihala kad ono njiše malom amplitudom jednaka $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$.

Prisutnost nekonzervativnih sila: Kad uz konzervativne sile na česticu djeluju i nekonzervativne sile, mehanička energija čestice nije očuvana veličina. Konzervativne sile djelujući na česticu obavljaju rad $-\Delta U$, dok rad nekonzervativnih sila možemo označiti s $-\Delta Q$. Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, promjena kinetičke energije čestice ΔK jednaka je radu koji sve sile obave nad česticom pa ovdje imamo $\Delta K = -\Delta U - \Delta Q$, čemu odgovara promjena mehaničke energije

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = -\Delta Q. \quad (4.19)$$

Samu veličinu ΔQ možemo shvatiti kao dio mehaničke energije sustava koji se pretvorio u neke druge oblike energije kao što je npr. toplina.

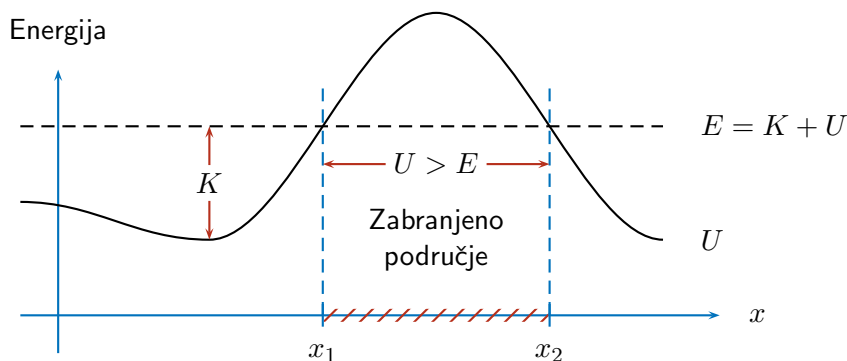
Disipativne sile: Najpoznatiji primjer nekonzervativnih sila su sile otpora. Njihov je smjer suprotan smjeru gibanja čestice u odnosu na sredstvo kroz koje se ona giba, a rad koji one obavljaju je negativan. Djelovanje takvih sila dovodi do smanjenja (ili rasipanja, disipacije) mehaničke energije čestice. NeKonzervativne sile poput sila otpora čiji je rad negativan još zovemo disipativnim silama.

4.5 Dijagram energije u 1D, stabilna i nestabilna ravnoteža

Dijagram energije za česticu koja se giba duž pravca, kružnice ili neke druge krivulje odnosno u bilo kojem jednodimenzionalnom prostoru (1D) pod djelovanjem konzervativne sile grafički je prikaz ovisnosti potencijalne energije čestice o koordinati položaja na kojem je također naznačena mehanička energija čestice. Dijagram energije jasno pokazuje smjer gibanja u kojem se kinetička energija čestica povećava što odgovara smjeru djelovanja konzervativne sile, područja u kojima se čestica može gibati, tzv. zabranjena područja u kojima se ona ne može naći jer njena mehanička energija nije dovoljno velika, točke obrata (engl. *turning points*) u kojima se čestica na trenutak zaustavlja i mijenja smjer svog gibanja te točke ravnoteže (engl. *equilibrium points*) u kojima bi čestica mogla trajno mirovati.

Primjer 4.5.1: Zabranjeno područje i točke obrata u dijagramu energije

Prikazan je mogući dijagram energije čestice koja se giba duž x -osi pod djelovanjem konzervativne sile. Prikazane su potencijalna energija $U[x]$ i mehanička energija čestice E . Mehaničku energiju smatramo očuvanom u vremenu, a samim time i jednakom u svim točkama u kojima se čestica može naći.



Na dijagramu prepoznamo sljedeće:

- U područjima $x < x_1$ i $x > x_2$ mehanička energija čestice $E = K + U$ veća je od potencijalne energije U . To znači da je kinetička energija K veća od nule odnosno da se čestica giba u jednom ili u drugom smjeru (sam dijagram energije ne govori o smjeru gibanja).
- U području $x_1 < x < x_2$ potencijalna energija U veća je od mehaničke energije $E = K + U$. S obzirom na to da kinetička energija K ne može biti negativna, čestica se ne može naći u ovom području. To područje zovemo zabranjenim područjem.
- U području u kojem je $E > U$, smjer gibanja u kojem se potencijalna energija čestice smanjuje odgovara smjeru u kojem kinetička energija čestice raste, a to znači da na česticu djeluje sila upravo tog smjera odnosno smjera u kojem se potencijalna energija smanjuje. Taj zaključak je u skladu s izrazom za x -komponentu sile

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x} U[x]$$

koji slijedi iz (4.16). Ovdje možemo uočiti da u neposrednoj blizini zabranjenog područja na česticu djeluje "odbojna sila".

- Kad čestica usporavajući naiđe na rubnu točku zabranjenog područja (ovdje su to točke $x = x_1$ i $x = x_2$), njena kinetička energija jednaka je nuli što znači da ona u tom trenutku miruje. Međutim, kako na nju djeluje "odbojna sila", njena akceleracija gleda u smjeru iz kojeg je čestica došla i čestica se počinje gibati unazad. Zbog toga rubne točke zabranjenog područja zovemo točkama obrata.

Stabilna i nestabilna ravnoteža: Točke u polju konzervativne sile u kojima čestica može trajno mirovati zovemo točkama ravnoteže. Kinetička energija čestice koja miruje u takvoj točki jednaka je nuli, a dodamo li joj malu količinu kinetičke energije, ona će se početi gibati u nekom smjeru. Ako se nakon toga kinetička energija počne smanjivati, čestica naiđe na točku obrata i počne se vraćati prema točki ravnoteže, kažemo da se radi o stabilnoj ravnoteži (engl. *stable equilibrium*). U suprotnom, ako se kinetička energija čestice počne povećavati, kažemo da se radi o nestabilnoj ravnoteži (engl. *unstable equilibrium*).

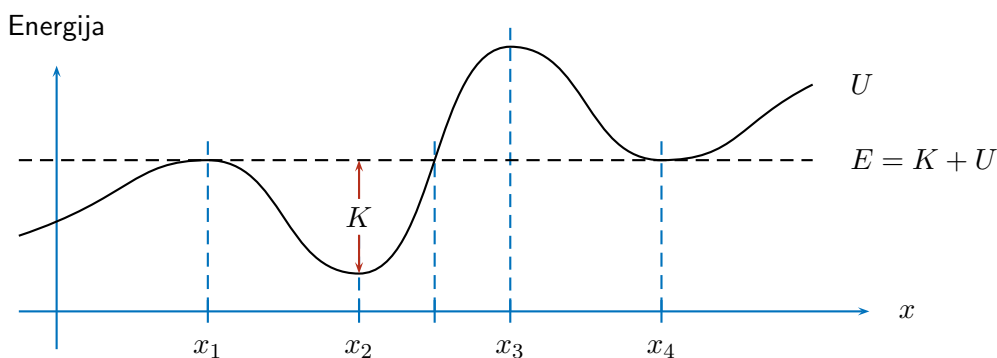
U točkama ravnoteže na česticu ne djeluje sila, te je prema (4.16) derivacija potencijalne energije po koordinati položaja u tim točkama jednaka nuli. To može značiti da se radi o minimumu ili o maksimumu

potencijalne energije. Ako se radi o minimumu potencijalne energije, udaljavanjem čestice od njega kinetička se energija smanjuje pa zaključujemo da minimum potencijalne energije odgovara točki stabilne ravnoteže. Udaljavanjem od maksimuma potencijalne energije kinetička se energija povećava što znači da se radi o točki nestabilne ravnoteže.

Također možemo reći da je sila u neposrednoj okolini točke stabilne ravnoteže usmjerena prema samoj točki ravnoteže (sila je privlačna), dok je u neposrednoj okolini točke nestabilne ravnoteže sila usmjerena od točke ravnoteže (sila je odbojna).

Primjer 4.5.2: Stabilna i nestabilna ravnoteža

Prikazan je dijagram energije čestice s nekoliko točaka ravnoteže.



Uočavamo sljedeće:

- U x_1 i x_3 potencijalna energija ima maksimume što znači da su to točke nestabilne ravnoteže.
- U x_2 i x_4 potencijalna energija ima minimume što znači da su to točke stabilne ravnoteže.
- Čestica s energijom E naznačenom na dijagramu može trajno mirovati u x_1 i u x_4 , ali ne i u x_2 gdje ima kinetičku energiju veću od nule kao ni u x_3 koja se nalazi u zabranjenom području.

Zadaci

Z.4.1: Električni automobil *Rimac Nevera* ubrzava iz mirovanja do brzine iznosa $v_1 = 100 \text{ km h}^{-1}$ za $\tau_1 = 1.97 \text{ s}$, a iz mirovanja do $v_2 = 300 \text{ km h}^{-1}$ potrebno mu je $\tau_2 = 9.3 \text{ s}$. Ne uzimajući u obzir sile otpora koje djeluju na automobil odredite srednju snagu kojom je u tim intervalima djelovao pogonski sustav te ju usporedite sa snagom $P_{\max} = 1408 \text{ kW}$ koja je navedena u specifikaciji. Za masu automobila s vozačem uzmite $m = 2150 \text{ kg}$.

$$\text{Rj: } \bar{P}_1 = mv_1^2/2\tau_1 \simeq 421 \text{ kW}, \bar{P}_1/P_{\max} \simeq 30\%, \bar{P}_2 = mv_2^2/2\tau_2 \simeq 802 \text{ kW}, \bar{P}_2/P_{\max} \simeq 57\% \quad [\text{P}]$$

Z.4.2: Najveća brzina koju automobil mase $m = 1000 \text{ kg}$ i snage motora $P_{\max} = 50 \text{ kW}$ može postići na vodoravnoj cesti iznosi $v_{\max} = 150 \text{ km h}^{-1}$. Pretpostavljajući da je sila otpora koja djeluje na automobil razmjerna kvadratu brzine, odredite asimptotsku brzinu kojom bi se on gibao s ugašenim motorom na nizbrdici nagiba $\alpha = 5^\circ$.

$$\text{Rj: } v_{\text{nizbrdica}} = \sqrt{mgv_{\max}^3 \sin \alpha / P_{\max}} \simeq 127 \text{ km h}^{-1} \quad [\text{P}]$$

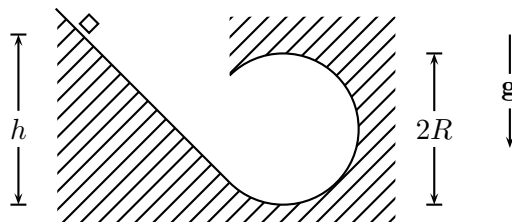
Z.4.3: Korištenjem postupka sličnog onome iz primjera 4.3.1 pokažite da je polje sile iz primjera 4.2.1 također konzervativno polje.

Z.4.4: Pokažite da vektorsko polje dano izrazom (4.16) zadovoljava uvjet konzervativnosti (4.11) za svako skalarno polje $U[\mathbf{r}]$.

Z.4.5: Sitno tijelo mase $m = 1 \text{ kg}$ obješeno je s pomoću bezmasene niti o čvrsto uporište (tzv. matematičko njihalo), otklonjeno je iz ravnotežnog položaja za kut $\alpha_0 = 45^\circ$ te je pušteno u gibanje iz mirovanja. Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem.

$$\text{Rj: } T = mg(3 - 2 \cos \alpha_0) = 15.6 \text{ N}$$

Z.4.6: Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakrivljenosti R . Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani.



Odredi najmanju visinu h u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu, želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom (stropom).

$$\text{Rj: } h_{\min} = 5R/2 \quad [\text{P}]$$

Z.4.7: Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50 \text{ N m}^{-1}$ je povezano sa čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3 \text{ N}$ usmjerena tako da rasteže oprugu. Odredite maksimalnu kinetičku energiju koju tijelo postiže prije nego što se zaustavi.

$$\text{Rj: } K = F_0^2/2k = 0.09 \text{ J}$$

Z.4.8: Bungee skakač mase $m = 75 \text{ kg}$ namjerava skočiti s platforme koja se nalazi na visini $H = 35 \text{ m}$ iznad tla. Skakač je za platformu vezan elastičnim užetom koje u nerastegnutom stanju ima duljinu $\ell = 12 \text{ m}$ i koje se pri rastezanju ponaša kao opruga konstante $k = 150 \text{ N m}^{-1}$. Zanimajući masu užeta i početnu brzinu skakača, odredite visinu nad tlom pri kojoj se on po prvi puta zaustavlja te iznos njegove akceleracije u tom trenutku.

$$\text{Rj: } h = H - \ell - (mg/k) \left(1 + \sqrt{1 + 2k\ell/mg}\right) = 6.2 \text{ m}, a = g\sqrt{1 + 2k\ell/mg} = 2.4g \quad [\text{P}]$$

Z.4.9: Vlak mase $m = 500 \text{ t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10 \text{ km h}^{-1}$, a narednih $\Delta t = 30 \text{ s}$ lokomotiva ubrzavala duž vodoravne pruge djelujući stalnom snagom $P = 2 \text{ MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

$$\text{Rj: } s = (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1 \text{ m}, \quad v_1 = (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7 \text{ km h}^{-1}$$

Z.4.10: Potencijalna energija čestice koja se giba duž x -osi je dana izrazom

$$U[x] = -\frac{U_0}{1 + (x/a)^2},$$

gdje su $U_0 > 0$ i a konstante. Kad se mehanička energija E čestice nalazi unutar intervala $-U_0 < E < 0$ čestica titra u području omeđenom krajnjim točkama $x = \pm A$. Odredite amplitudu titranja A te iznos sile koja djeluje na česticu pri $x = \pm A$.

$$\text{Rj: } A = a\sqrt{\frac{U_0}{|E|} - 1}, \quad F_x[\pm A] = \mp \frac{2|E|^2}{aU_0} \sqrt{\frac{U_0}{|E|} - 1}$$

Z.4.11: Prema specifikaciji električnog automobila *Rimac Nevera* najveća brzina koju on postiže iznosi $v_{\max} = 412 \text{ km h}^{-1}$, najveća snaga njegovog pogonskog sustava je $P_{\max} = 1408 \text{ kW}$, a energija pohranjena u bateriji je $Q = 120 \text{ kWh}$. Pretpostavljajući da je otpor zraka dominantna sila otpora pri gibanju automobila, da je iznos te sile razmjern kvadratu iznosa brzine automobila, te da pri vožnji brzinom iznosa v_{\max} pogonski sustav automobila djeluje snagom P_{\max} , odredi iznos brzine pri kojoj bi taj automobil mogao prevaliti udaljenost $s_{\max} = 550 \text{ km}$ koja je u specifikaciji navedena kao njegov maksimalni doseg.

$$\text{Rj: } v = \sqrt{Qv_{\max}^3/P_{\max}s_{\max}} \simeq 104 \text{ km h}^{-1} \quad [\text{P}]$$

5 Mehanika sustava čestica

U ovom poglavlju razmatramo gibanje sustava dviju ili više čestica u kojem je osim djelovanja tzv. vanjskih sila prisutno i međudjelovanje čestica tzv. međučestičnim silama. Ključnu ulogu pri opisu međudjelovanja čestica ima treći Newtonov zakon iz kojeg proizlaze zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja kutne količine gibanja sustava čestica. Ti zakoni nam, uz zakon o očuvanju mehaničke energije koji smo upoznali u prethodnom poglavlju, omogućuju da predvidimo neke ishode nekih fizičkih procesa bez poznavanja svih pojedinosti o međudjelovanju čestica. Osim toga ovo poglavlje uvodi pojmove središta mase sustava čestica te referentnog okvira vezanog uz središte mase, a kao primjer primjene zakona očuvanja količine gibanja detaljno su obrađeni sudari dviju čestica u jednoj dimenziji. Nekim svojstvima sudara čestica također se bavi dodatak B.

5.1 Unutarnje i vanjske sile u sustavu čestica i treći Newtonov zakon

Sustav čestica: Razmatramo fizički sustav koji se sastoji od $N \geq 2$ čestica koje obilježavamo indeksom $i = 1, \dots, N$. Masu i -te čestice obilježavamo s m_i , njen položaj u odnosu na odabrano ishodište s \mathbf{r}_i , brzinu s \mathbf{v}_i , količinu gibanja s $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$, i.t.d. Fizičke veličine koje govore o čitavom sustavu označavamo simbolima bez indeksa. Na primjer, masa sustava čestica je zbroj masa svih čestica u sustavu,

$$m = m_1 + \dots + m_N = \sum_i m_i. \quad (5.1)$$

Unutarnje i vanjske sile u sustavu čestica: Jednadžbu gibanja i -te čestice možemo napisati kao

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}, \quad (5.2)$$

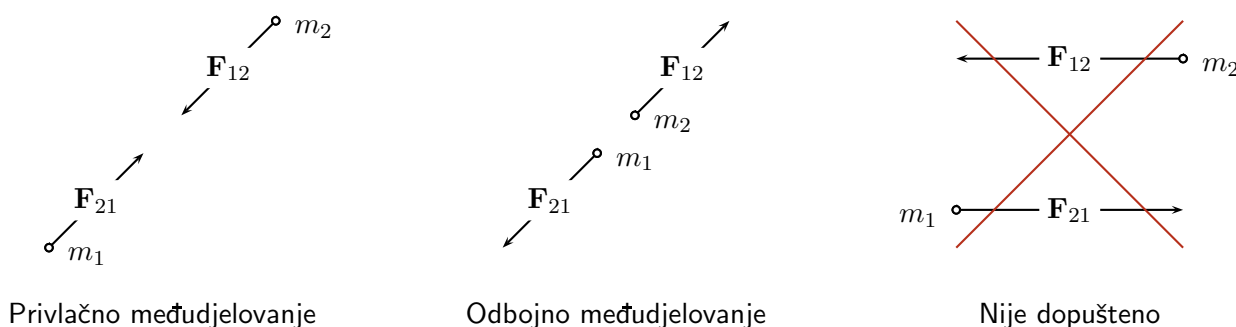
gdje je \mathbf{F}_i koja djeluje na česticu. Ta se sila sastoji od tzv. vanjske sile $\mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$ koja djeluje na i -tu česticu neovisno o prisutnosti drugih čestica te od zbroja tzv. unutarnjih sila, odn. sila kojima sve ostale čestice u sustavu djeluju na i -tu česticu. Unutarnju silu kojom j -ta čestica djeluje na i -tu česticu označavamo s \mathbf{F}_{ji} , a $\sum_{j \neq i}$ označava zbroj po svim vrijednostima indeksa j , uz izostavljanje vrijednosti $j = i$ jer silu kojom čestica djeluje na samu sebe nema smisla uzimati u obzir.

Treći Newtonov zakon sadrži temeljnu pretpostavku o međudjelovanju čestica:

Ako čestica 1 djeluje na česticu 2 silom \mathbf{F}_{12} , onda čestica 2 djeluje na česticu 1 silom

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

Podrazumijeva se da smjerovi sila kojima čestice djeluju jedna na drugu leže na pravcu koji prolazi točkama u kojima se čestice nalaze. Slika prikazuje privlačno i odbojno međudjelovanje čestica te situaciju koja nije dopuštena bez obzira na to što i u njoj vrijedi $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.



5.2 Očuvanje količine gibanja sustava

Količina gibanja sustava čestica čije su mase m_i i koje se gibaju brzinama \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, N$, je zbroj količina gibanja $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ svih čestica u sustavu,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (5.3)$$

Primjer 5.2.1: Količina gibanja čvrstog tijela u translacijskom gibanju

Shvatimo li čvrsto tijelo kao sustav velikog broja čestica, masa tijela m je zbroj masa m_i čestica koje čine tijelo, a kad se takvo tijelo giba translacijski (bez rotacije), brzine svih čestica su međusobno jednake te možemo pisati $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$. Količina gibanja sustava je

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \mathbf{v} = \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{v} = m \mathbf{v},$$

što opravdava uobičajenu primjenu izraza za količinu gibanja čestice na čvrsto tijelo koje se, strogo govoreći, sastoji od velikog broja čestica.

Vremenska derivacija količine gibanja sustava jednaka je zbroju vanjskih sila koje djeluju na čestice sustava,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) = \sum_i \mathbf{F}_i^{(\text{ext})} = \mathbf{F}^{(\text{ext})}, \quad (5.4)$$

dok unutarnje sile u sustavu nemaju nikakav utjecaj. U gornjem računu smo najprije koristili definiciju (5.3) i nakon toga jednadžbu gibanja i -te čestice (5.2). U posljednjem koraku smo prepoznali da je član $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}$ jednak nuli jer je svaka sila \mathbf{F}_{ij} , prema trećem Newtonovom zakonu, u zbroju poništena njoj suprotnom silom \mathbf{F}_{ji} .

Očuvanje količine gibanja sustava čestica: Prema (5.4), ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na čestice nekog sustava jednak nuli, onda je količina gibanja tog sustava očuvana veličina (stalna u vremenu),

$$\mathbf{F}^{(\text{ext})} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (5.5)$$

Ta tvrdnja još je poznata kao *zakon o očuvanju količine gibanja sustava čestica*.

Zakon o očuvanju količine gibanja sustava čestica nam pomaže, između ostalog, pri proučavanju sudara među tijelima. Ako sudar traje dovoljno kratko i ako se odvija u dovoljno malenom prostoru učinak vanjskih sila možemo zanemariti. Tada je, prema zakonu o očuvanju količine gibanja, količina gibanja sustava neposredno nakon sudara jednaka količini gibanja istog sustava neposredno prije sudara. Sudarima se bave neki od primjera koji slijede, a detaljnije su obrađeni u poglavljima 5.5 i 5.6 te u dodatku B.

Primjer 5.2.2: Sudar dvaju tijela jednake mase bez promjene kinetičke energije sustava

Razmotrit ćemo sudar u kojem tijelo koje zovemo projektilom nalijeće na tijelo jednake mase koje je do tog trenutka mirovalo i koje zovemo metom. Pretpostavit ćemo da u sudaru *ne* dolazi do promjene kinetičke energije sustava, već isključivo do preraspodjele kinetičke energije među tijelima. (U općenitom sudaru se dio kinetičke energije tijela može pretvoriti u druge oblike energije, a sudar u kojem je kinetička energija ostaje nepromijenjena zovemo elastičnim sudarom, više o vrstama sudara u poglavlju 5.5.)

Korištenjem zakona o očuvanju količine gibanja pokazat ćemo da nakon takvog sudara imamo jedno od ova dva stanja:

- (a) Projektil miruje, a meta se giba brzinom koja je jednaka brzini projektila prije sudara.
- (b) Projektil i meta se gibaju duž međusobno okomitih pravaca.

Najprije razmatramo očuvanje kinetičke energije sustava. S obzirom da meta prije sudara miruje, kinetička energija sustava K prije sudara sastoji se isključivo od kinetičke energije projektila,

$$K = K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

gdje je v_1 iznos brzine projektila prije sudara. Nakon sudara kinetička energija sustava K' jest zbroj kinetičkih energija projektila i mete,

$$K' = K'_1 + K'_2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2,$$

gdje su v_1' i v_2' iznosi njihovih brzina nakon sudara (vrijednosti veličina nakon sudara obilježavamo crticom). Uvjet očuvanja kinetičke energije, $K = K'$, daje jednakost

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Količine gibanja sustava prije i nakon sudara su

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1 \quad \text{i} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2'.$$

Uvjet očuvanja količine gibanja, $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, daje

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2',$$

a kvadriranjem gornje vektorske jednakost dobivamo

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' + v_2'^2.$$

Uočavamo da uvjet do kojeg nas je dovela pretpostavka o očuvanju kinetičke energije sustava i uvjet do kojeg nas je doveo zakon o očuvanju količine gibanja sustava mogu biti istovremeno zadovoljeni samo ako vrijedi

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0.$$

Gornji uvjet je ispunjen ako su vektori brzina međusobno okomiti, što je stanje (b), ili ako je barem jedna od brzina nakon sudara nul-vektor. Ako je $\mathbf{v}_1' = 0$, uvjet očuvanja količine gibanja daje $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$, a to je stanje (a). Ako je $\mathbf{v}_2' = 0$, tj. ako se meta nakon sudara ne giba, iz očuvanja količine gibanja imamo $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$, a to znači da se sudar nije ni dogodio.

Primjer 5.2.3: Gubitak kinetičke energije u sudaru dvaju tijela

Razmotrit ćemo sudar u kojem tijelo mase m_1 naliće brzinom iznosa v_1 na mirno tijelo mase m_2 , nakon čega nastaje novo tijelo mase $m_1 + m_2$ koje se nastavlja gibati brzinom iznosa v' (takav sudar zovemo savršeno neelastičnim sudarom, vidi poglavlje 5.5). Pokazat ćemo da u takvom sudaru nužno dolazi do gubitka kinetičke energije sustava čestica, odnosno do pretvorbe kinetičke energije u neki njen drugi oblik.

Kinetička energija K i iznos količine gibanja sustava p prije sudara su

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \text{i} \quad p = m_1v_1,$$

dok nakon sudara (oznaka $'$) možemo pisati

$$K' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \quad \text{i} \quad p' = (m_1 + m_2)v'.$$

Uvjet očuvanja količine gibanja $p' = p$ nam daje

$$v' = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

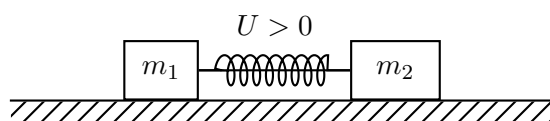
Sada možemo izvesti izraz za količinu kinetičke energije koja se u ovakvom sudaru pretvara u druge oblike energije, npr u toplinu Q ,

$$Q = K - K' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1v_1^2}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Uočavamo da nam je uvjet očuvanja količine gibanja sustava omogućio da odredimo toplinu Q bez poznavanja pojedinosti o međudjelovanju tijela tijekom samog sudara.

Primjer 5.2.4: Sabijena opruga među dvama tijelima ("mehanička eksplozija")

Jednostavan "mehanički model eksplozije" možemo zamisliti kao sabijenu oprugu pored koje se nalaze dva tijela koja se, dođe li do otpuštanja opruge, počinju gibati svako u svoju stranu. Možemo zamisliti da oprugu u sabijenom stanju drži tanka napeta nit te da u početnom stanju čitav sustav miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj tijela mogu klizati bez trenja. Pukne li nit, opruga će neko vrijeme djelovati silom na tijela koja će se sve brže gibati. Kad se tijela razmaknu toliko da opruga dosegne svoju ravnotežnu duljinu tijela će izgubiti kontakt s oprugom i nastaviti će se gibati stalnim brzinama, dok će opruga ostati mirovati u ravnotežnom (nesabijenom) stanju. Korištenjem očuvanja mehaničke energije i očuvanja količine gibanja sustava odredit ćemo iznose konačnih brzina tijela. Uzet ćemo da su mase tijela m_1 i m_2 te da je rad obavljen za početno sabijanje opruge W .



S obzirom da u početnom stanju tijela miruju, početna kinetička energija sustava jednaka je nuli, $K = 0$, a rad uložen u početno sabijanje opruge odgovara potencijalnoj početnoj potencijalnoj energiji $U = W$ sustava. Početna mehanička energija sustava je prema tome

$$E = K + U = W.$$

Nakon "eksplozije", opruga se nalazi u ravnotežnom stanju te je njena potencijalna energija jednaka nuli, $U' = 0$, dok je kinetička energija sustava

$$K' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2.$$

S obzirom da sile trenja prema pretpostavci nisu prisutne, mehanička energija sustava je očuvana veličina, $E = E'$, što ovdje znači da je ukupna početna potencijalna energija opruge $U = W$ pretvorena u kinetičku energiju,

Gornja jednakost nije dovoljna za određivanje iznosa brzina v'_1 i v'_2 te analizu nastavljamo razmatranjem količine gibanja u ovom sustavu čestica.

Djelovanje opruge možemo shvatiti kao djelovanje međučestične sile, a s obzirom na to da je zbroj vanjskih sila na sustav jednak nuli (djelovanje sile teže na tijela poništeno je protudjelovanjem podloge) količina gibanja ovog sustava očuvana je veličina. U početnom je stanju količina gibanja sustava p jednaka nuli jer tijela miruju, a u konačnom se stanju ona sastoji od količina gibanja dvaju tijela koja se gibaju u suprotnim smjerovima. Možemo pisati

$$0 = p = p' = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2.$$

Uvjet koji proizlazi iz očuvanja mehaničke energije i uvjet koji proizlazi iz očuvanja količine gibanja shvaćamo kao sustav dviju jednadžbi u kojima su iznosi brzina v'_1 i v'_2 nepoznanice. Rješavanjem sustava te odabirom pozitivnih rješenja (radi se o iznosima vektora) dobivamo

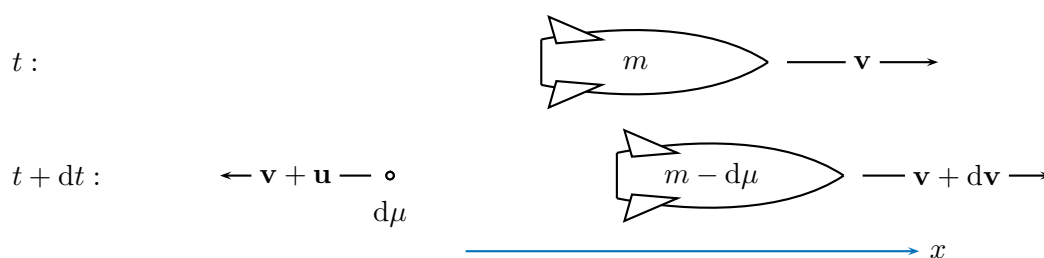
$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 W}{m_1(m_1 + m_2)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2m_1 W}{m_2(m_1 + m_2)}}.$$

Uočavamo da tijelo veće mase poprima brzinu manjeg iznosa.

Primjer 5.2.5: Načelo rada raketnog motora

Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru (unazad) izbacuje čestice plina nastalog izgaranjem goriva. S obzirom na to da gorivo koje se s vremenom troši čini značajan dio mase rakete, pri analizi gibanja rakete moramo uzeti u obzir promjenu njene mase.

Neka je $\mathbf{u} = -u \hat{\mathbf{x}}$ brzina kojom motor u odnosu na raketu izbacuje čestice plina (ovu brzinu smatramo stalnom u vremenu), neka su m i $\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}}$ masa i brzina rakete u nekom trenutku (obje veličine ovise o vremenu), a $d\mu$ neka je masa plina koju motor izbacuje u vremenu dt .



Promjenu količine gibanja sustava $d\mathbf{p}$ koja nastupa u vremenu dt , a koja mora biti jednaka nuli zbog očuvanja količine gibanja u sustavu u kojem ne djeluju vanjske sile, možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} 0 = d\mathbf{p} &= d\mu \mathbf{u} + (m - d\mu) d\mathbf{v} = d\mu (-u \hat{\mathbf{x}}) + (m - d\mu)(dv_x \hat{\mathbf{x}}) \\ &= (-u d\mu + m dv_x) \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Prvi član u prvom retku na desnoj strani opisuje promjenu količine gibanja mase $d\mu$ čija se brzina izbacivanjem iz rakete promijenila za u u negativnom smjeru x -osi, dok drugi član opisuje promjenu količine gibanja rakete čija je masa umanjena za $d\mu$, a x -komponenta brzine se povećala za dv_x . Pri prelasku u drugi redak izostavili smo član u kojem se pojavljuje umnožak diferencijala $d\mu$ i dv_x . Nadalje, kako se masa rakete m umanjuje upravo za masu izbačenog plina $d\mu$, promjenu mase rakete dm možemo izraziti kao

$$dm = -d\mu.$$

Eliminacijom $d\mu$ iz gornjih jednakosti slijedi

$$\frac{dv_x}{u} = -\frac{dm}{m}.$$

Promatramo li gibanje rakete čija je početna masa $m = m_0$ i koja u početnom trenutku miruje, gornju jednakost možemo integrirati od početnog stanja u kojem imamo $v_x = 0$ i $m = m_0$ do konačnog stanja u kojem imamo v_x i m ,

$$\int_0^{v_x} \frac{dv'_x}{u} = -\int_{m_0}^m \frac{dm'}{m'} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_x}{u} = -\ln \frac{m}{m_0},$$

odnosno

$$v_x = u \ln \frac{m_0}{m}.$$

Uočavamo da raketa koja kreće iz mirovanja postiže brzinu jednaku brzini u kojom motor izbacuje plin u trenutku u kojem njena masa zbog potrošnje goriva padne na $1/e$ njene početne mase. Daljnjim radom motora, ako goriva još ima, iznos brzine rakete v koja je krenula iz mirovanja može nadmašiti iznos brzine u . (Primijetimo da je brzina $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ na gornjoj slici usmjerena u skladu s pretpostavkom $v < u$ koja je zadovoljena u početnoj fazi gibanja, a nastupi li stanje $v > u$, taj vektor poprima isti smjer kao i vektor \mathbf{v} .)

5.3 Središte mase sustava čestica

Središte mase sustava čestica (engl. *centre of mass*, kratica CM) je točka u prostoru čiji je položaj definiran izrazom

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (5.6)$$

gdje je m masa sustava čestica (5.1), a \mathbf{r}_i i m_i su položaj i masa i -te čestice u sustavu.

Brzina središta mase: Deriviranjem (5.6) po vremenu pokazuje se da je brzina središta mase razmjerna količini gibanja sustava,

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (5.7)$$

odnosno da se količinu gibanja sustava može izraziti kao umnožak mase sustava i vektora brzine središta mase, $\mathbf{p} = m \mathbf{v}_{\text{cm}}$. Zbog "elegancije" tog rezultata količinu gibanja sustava \mathbf{p} nazivamo i "količinom gibanja središta mase" te koristimo oznaku \mathbf{p}_{cm} ,

$$\mathbf{p}_{\text{cm}} = \mathbf{p} = m \mathbf{v}_{\text{cm}}. \quad (5.8)$$

Jednadžba gibanja središta mase: Korištenjem (5.8) i (5.4) sastavljamo jednadžbu gibanja središta mase sustava čestica,

$$\mathbf{F}^{(\text{ext})} = \frac{d}{dt} \mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = m \mathbf{a}_{\text{cm}}. \quad (5.9)$$

Uočavamo da se središte mase sustava čestica giba onako kao što bi se gibala čestica mase m kad bi na nju djelovala sila $\mathbf{F}^{(\text{ext})}$.

Primjer 5.3.1: Središte mase dvaju projektila u letu

Razmotrit ćemo sustav dvaju projektila različitih masa koji su u nekom trenutku iz različitih točaka izbačeni različitim početnim brzinama. Pokazat ćemo da se središte mase sustava dvaju projektila ponaša kao što bi se ponašao jedan jedini projektil izbačen iz točke koja se podudara s početnim položajem središta mase brzinom koja se podudara s početnom brzinom središta mase.

Položaje projektila čije su mase m_1 i m_2 možemo opisati izrazima

$$\mathbf{r}_1[t] = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{v}_{10}t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2 \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_2[t] = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{v}_{20}t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2,$$

gdje su \mathbf{r}_{10} i \mathbf{r}_{20} početni položaji u $t = 0$, \mathbf{v}_{10} i \mathbf{v}_{20} su početne brzine, a \mathbf{g} je akceleracija slobodnog pada. Položaj središta mase računamo s pomoću izraza (5.6) te dobivamo

$$\mathbf{r}_{\text{cm}}[t] = \frac{m_1\mathbf{r}_1[t] + m_2\mathbf{r}_2[t]}{m_1 + m_2} = \dots = \frac{m_1\mathbf{r}_{10} + m_2\mathbf{r}_{20}}{m_1 + m_2} + \frac{m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}t + \frac{\mathbf{g}}{2}t^2.$$

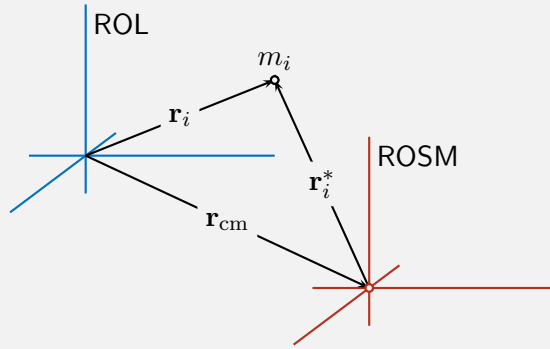
Prva dva člana na desnoj strani prepoznajemo kao početni položaj središta mase te kao početnu brzinu središta mase pomnoženu proteklom vremenom. Treći član na desnoj strani je uobičajeni član koji je u izrazu za položaj svakog projektila, a koji je prisutan zbog djelovanja gravitacijske sile. Uočavamo da se središte mase ovog sustava giba upravo onako kako bi se gibalo jedno tijelo mase $m = m_1 + m_2$ kad bi na njega djelovala sila $\mathbf{F}^{(\text{ext})} = (m_1 + m_2)\mathbf{g}$.

Ovaj jednostavni primjer gibanja dvaju tijela *ne* uključuje djelovanje međučestične sile, no prema jednadžbi gibanja (5.9), središte mase bi se gibalo na jednak način i kad bi takva sila bila prisutna. Međučestičnu silu bismo ovdje mogli uvesti zamislimo li da su projektili povezani tankom elastičnom niti zanemarive mase. Središte mase bi se gibalo na nepromijenjen način, ali sama tijela bi izvodila znatno kompliciranije gibanje.

5.4 Referentni okvir središta mase (ROSM)

Referentni okvir laboratorija (ROL) (engl. “lab frame”) je naziv za inercijski referentni okvir (vidi poglavlje 3.1) koji je vezan uz neki eksperimentalni uređaj kojim obavljamo mjerenja ili uz prostoriju (laboratorij) u kojoj se uređaj nalazi. Takav odabir referentnog okvira nameće se sam po sebi, iako opis fizičkih pojava u njemu nije nužno najjednostavniji mogući.

Referentni okvir središta mase (ROSM) (engl. “centre-of-mass frame”) nekog sustava čestica je inercijski referentni okvir odabran tako da se on u odnosu na ROL (ili bilo koji drugi inercijski referentni okvir) giba translacijski (bez vrtnje) brzinom kojom se u danom trenutku u odnosu na ROL (ili neki drugi inercijski referentni okvir) giba središte mase promatranog sustava čestica. Kao ishodište u odnosu na koje prikazujemo položaje čestica u ROSM koristimo samo središte mase sustava, a vektore položaja i brzina čestica te sve ostale fizičke veličine koje ovise o odabiru referentnog okvira, u ROSM obilježavamo zvjezdicom (*).



Razlog za uvođenje ROSM je činjenica da je neke pojave u mehanici znatno lakše razumjeti promatra li ih se upravo u tom referentnom okviru.

Transformacije položaja i brzina u ROL i ROSM: Položaj i -te čestice u ROL obilježavamo s \mathbf{r}_i , a možemo ga izraziti kao zbroj vektora koji opisuje položaj središta mase sustava \mathbf{r}_{cm} u ROL i vektora \mathbf{r}_i^* koji opisuje položaj čestice u ROSM,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}_i^*. \quad (5.10)$$

Deriviranjem gornje relacije po vremenu dobivamo relaciju među brzinama,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}_i^*, \quad (5.11)$$

gdje je \mathbf{v}_{cm} brzina središta mase u općenitom referentnom okviru, a \mathbf{v}_i^* je brzina i -te čestice u ROSM.

Prema definiciji ROSM, položaj i brzina središta mase su u ROSM nul-vektori, a to znači da u ROSM vrijede jednakosti

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i^* = 0 \quad \text{i} \quad \sum_i m_i \mathbf{v}_i^* = \sum_i \mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}^* = 0. \quad (5.12)$$

Posljednja jednakost nam govori da je količina gibanja sustava čestica promatranog u ROSM jednaka nuli.

Kinetička energija sustava čestica je zbroj kinetičkih energija čestica u sustavu,

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (5.13)$$

Ako je K kinetička energija sustava u ROL, a K^* je kinetička energija istog sustava u ROSM, vrijedi jednakost

$$K = K_{\text{cm}} + K^*, \quad (5.14)$$

gdje veličinu

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 \quad (5.15)$$

zovemo kinetičkom energijom centra mase.

Jednakost (5.14) možemo izvesti koristeći (5.11) i svojstvo (5.12),

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}_i^*|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (v_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{v}_i^* + v_i^{*2}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) v_{\text{cm}}^2 + \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i^* + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{*2}. \end{aligned}$$

Prvi član na desnoj strani prepoznamo kao kinetičku energiju središta mase (5.14), drugi član je prema (5.12) jednak nuli, a treći član je kinetička energija K^* sustava promatranog u ROSM.

5.5 Općenit sudar dviju čestica u ROSM

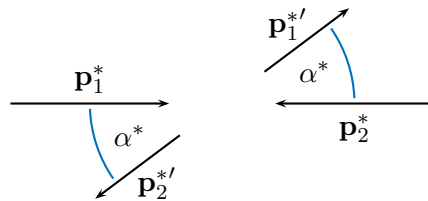
Sudar je kratkotrajno međudjelovanje čestica koje se odvija na malim prostornim udaljenostima odnosno pri njihovom kontaktu. Sile kojima čestice međudjeluju tijekom sudara su unutarnje sile sustava i one ne mijenjaju količinu gibanja sustava tijela. Količinu gibanja sustava čestica mogu promijeniti isključivo vanjske sile (npr. sile otpora), ali čak i kad one jesu prisutne, njihov učinak zbog kratkog trajanja sudara najčešće možemo zanemariti. Zbog svega navedenog, uzimamo da je količina gibanja sustava u sudarima očuvana veličina.

Razmotrit ćemo količine gibanja dviju čestica koje se sudaraju te ukupnu kinetičku energiju sustava prije i poslije njihovog sudara, ne ulazeći u detaljan opis njihovog međudjelovanja tijekom samog sudara.

Očuvanje količine gibanja: U referentnom okviru središta mase (ROSM, oznaka $*$) vrijedi $\mathbf{p}^* = 0 = \mathbf{p}^{*'}$, gdje je \mathbf{p}^* količina gibanja sustava prije sudara, a $\mathbf{p}^{*'}$ je količina gibanja sustava poslije sudara (oznaka $'$). Ako se sustav sastoji od samo dvije čestice možemo pisati

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0 = \mathbf{p}_1^{*'} + \mathbf{p}_2^{*'}, \quad (5.16)$$

gdje s lijeve strane imamo količine gibanja čestica prije, a s desne strane imamo količine gibanja čestica poslije sudara. Općenito, smjerovi gibanja čestica prije i poslije sudara određuju ravninu u prostoru. U toj ravnini jednadžbu (5.16) možemo prikazati slikom:



U posebnom slučaju u kojem su iznosi količina gibanja čestica nakon sudara jednaki nuli (vidi niže savršeno neelastičan sudar) te u slučaju u kojem se gibanja prije i poslije sudara odvijaju duž istog pravca (vidi niže sudar u 1D), sudar možemo promatrati na pravcu.

Kut otklona, $\alpha^* \in [0, \pi]$, pri sudaru dviju čestica promatranom u referentnom okviru središta mase je kut koji smjer gibanja čestice nakon sudara zatvara sa smjerom njena gibanja prije sudara. Iz (5.16), odn. iz gornje slike, može se zaključiti da se čestice otklanjaju pod jednakim kutem. O kutu otklona nema smisla govoriti u slučaju u kojem se čestice nakon sudara ne gibaju.

Koeficijent restitucije, $k \geq 0$, je omjer iznosa količine gibanja (ili brzine) koji u ROSM čestica ima nakon i iznosa koji je imala prije sudara. S obzirom na (5.16), koeficijent restitucije brzine jednak je za obje čestice pa možemo pisati

$$k = \frac{|\mathbf{p}_{1,2}^{*'}|}{|\mathbf{p}_{1,2}^*|} = \frac{|\mathbf{v}_{1,2}^{*'}|}{|\mathbf{v}_{1,2}^*|}. \quad (5.17)$$

Promjena kinetičke energije sustava u sudaru: Ako je K^* kinetička energija sustava u referentnom okviru središta mase prije sudara, onda, s obzirom na to da je kinetička energija čestice razmjerna kvadratu njene brzine, korištenjem (5.17), kinetičku energiju sustava nakon sudara možemo napisati kao

$$K^{*'} = k^2 K^*, \quad (5.18)$$

gdje je k koeficijent restitucije. Promjenu kinetičke energije sustava koja nastupa u sudaru možemo napisati kao

$$\Delta K^* = K^{*'} - K^* = (k^2 - 1)K^*. \quad (5.19)$$

Vrste sudara u odnosu na vrijednost koeficijenta restitucije:

- $k = 0$, *Savršeno neelastični sudar*: Čestice nakon sudara miruju što znači da ukupna kinetička energija koju one imaju prije sudara (u sustavu središta mase) prelazi u neki drugi oblik energije, $\Delta K^* = -K^*$, te da nema smisla govoriti o kutu otklona α^* .
- $0 < k < 1$: Iznosi brzina čestica su nakon sudara manji od onih prije sudara. Dio kinetičke energije čestica prelazi u neki drugi oblike energije, $-K^* < \Delta K^* < 0$.
- $k = 1$, *Elastični sudar*: Iznosi brzina čestica nakon sudara jednaki su onima prije sudara. Kinetička energija čestica ostaje nepromijenjena, $\Delta K^* = 0$
- $k > 1$: Iznosi brzina čestica nakon sudara veći su od onih prije sudara. Kinetička energija čestica se povećava što znači da se u sudaru neka količina energije iz nekog drugog oblika pretvara u kinetičku energiju, $\Delta K^* > 0$.

Koeficijent restitucije jednak je omjeru iznosa relativnih brzina čestica: Pokazuje se da vrijedi jednakost

$$k = \frac{|\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}|}{|\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*|} = \frac{|\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}, \quad (5.20)$$

gdje je k koeficijent restitucije, a $\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*$ i $\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}$ predstavljaju brzinu čestice 1 u odnosu na česticu 2 (tzv. relativnu brzinu) prije i poslije sudara. Prva jednakost u (5.20) slijedi iz činjenice da je iznos brzine jedne čestice u odnosu na drugu česticu razmjeran količini gibanja jedne (ili druge) čestice u ROSM,

$$|\mathbf{v}_1^* - \mathbf{v}_2^*| = \left| \frac{\mathbf{p}_1^*}{m_1} - \frac{\mathbf{p}_2^*}{m_2} \right| = \left| \frac{\mathbf{p}_1^*}{m_1} - \frac{(-\mathbf{p}_1^*)}{m_2} \right| = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} |\mathbf{p}_1^*|, \quad (5.21)$$

ili nakon sudara $|\mathbf{v}_1^{*'} - \mathbf{v}_2^{*'}| = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} |\mathbf{p}_1^{*'}|$. Druga jednakost u (5.20) proizlazi iz činjenice da je brzina jedne čestice u odnosu na drugu neovisna o odabiru referentnog okvira. Ovdje to znači da jednakost koeficijenta restitucije k i omjera iznosa relativnih brzina vrijedi u bilo kojem referentnom okviru, a ne samo u ROSM, te smo zbog toga izostavili oznaku $*$.

5.6 Sudar dviju čestica u jednoj dimenziji (1D)

Sudar dviju čestica u jednoj dimenziji (1D) ili kako ga još zovemo **centralni ili čeonni sudar** (engl. *central or head-on collision*) poseban je slučaj sudara u kojem količine gibanja čestica prije i nakon sudara leže na istom pravcu.

Sudar u 1D u ROSM: Promatramo li sudar dviju čestica u 1D u ROSM (oznaka $*$) u kojem se čestice “odbijaju unazad” (kut otklona $\alpha^* = \pi$), količine gibanja čestica nakon sudara (oznaka $'$) možemo izraziti kao

$$\mathbf{p}_1^{*'} = -k\mathbf{p}_1^* \quad \text{i} \quad \mathbf{p}_2^{*'} = -k\mathbf{p}_2^*, \quad (5.22)$$

gdje je k koeficijent restitucije. Podijelimo li gornje jednakosti masom čestice, dobivamo brzine

$$\mathbf{v}_1^{*'} = -k\mathbf{v}_1^* \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_2^{*'} = -k\mathbf{v}_2^*. \quad (5.23)$$

Ako se čestice u sudaru ne “odbijaju unazad” (kut otklona $\alpha^* = \pi$), već “prolaze jedna kroz drugu” (kut otklona $\alpha^* = 0$), jednadžbe (5.22) i (5.23) bismo morali napisati uz pozitivni predznak na desnoj strani, ili bismo koristili negativan koeficijent restitucije k . Na primjer, uz $k = -1$ u (5.22) i (5.23) dobili bismo “sudar” u kojem čestice “prolaze jedna kroz drugu” bez gubitka energije.

Sudar u 1D u ROL: Promatramo li sudar dviju čestica koji se odvija u 1D u ROL, najprije primjećujemo da se takav sudar odvija u 1D i kad ga promatramo u ROSM, a to znači da u ROSM vrijede relacije (5.23).⁴

⁴Tvrdnja da se svaki sudar dviju čestica koji se u ROL odvija u 1D odvija u 1D i kad ga promatramo u ROSM slijedi iz opažanja da se središte mase u ROL, a time i ROSM u odnosu na ROL, giba duž istog pravca duž kojeg se gibaju čestice. Zanimljivo je da obrat ne vrijedi. Odvija li se sudar u 1D u ROSM, promotrimo li ga u ROL koji se u odnosu na ROSM giba u smjeru koji ne leži na pravcu duž kojeg se odvija sudar, imat ćemo sudar koji se u ROL odvija u 2D (u ravnini).

Brzine čestica nakon sudara u ROL dobivamo primjenom transformacija (5.11) te koristeći (5.23),

$$\mathbf{v}_{1,2}' = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}_{1,2}^{*'} = \mathbf{v}_{\text{cm}} - k\mathbf{v}_{1,2}^* = \mathbf{v}_{\text{cm}} - k(\mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{v}_{\text{cm}}) \quad (5.24)$$

odnosno

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_{\text{cm}} - k(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{cm}}), \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_{\text{cm}} - k(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{\text{cm}}), \quad (5.25)$$

gdje je

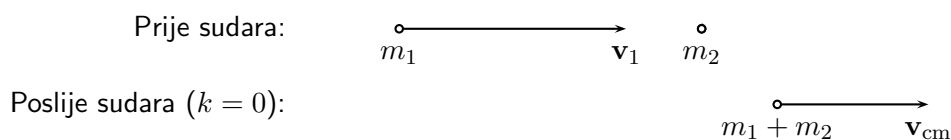
$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.26)$$

brzina središta mase koja se u sudaru ne mijenja.

Primjer 5.6.1: Sudar projektila i mirne mete u 1D u ROL

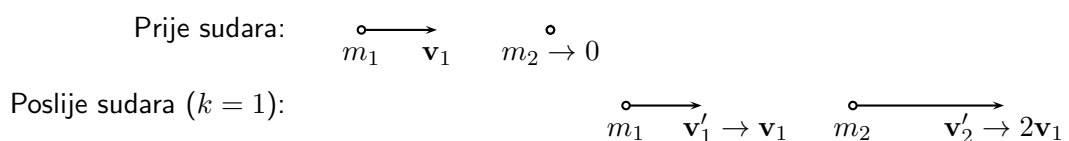
Izraze (5.25) primijenit ćemo u nekoliko jednostavnih situacija u kojima se čestica mase m_1 (projektil) sudara s mirnom česticom mase m_2 (meta).

- Savršeno neelastični sudar ($k = 0$) čestice s mirnom česticom ($\mathbf{v}_2 = 0$). Uz $k = 0$, izraz (5.25) pokazuje da se obje čestice poslije sudara gibaju brzinom središta mase, $\mathbf{v}_{1,2}' = \mathbf{v}_{\text{cm}}$, što znači da se one gibaju zajedno.

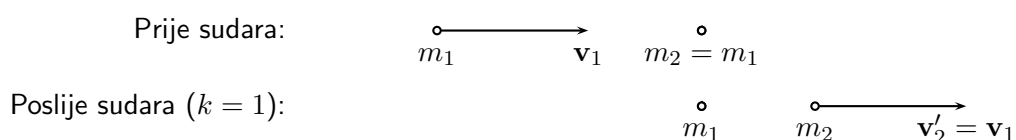


Brzina središta mase ovdje je $\mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{v}_1/(m_1 + m_2)$. Ona je po iznosu manja od v_1 , a teži u nulu kad m_1/m_2 teži u nulu.

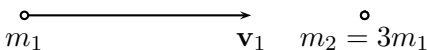
- Elastični ($k = 1$) centralni sudar čestice s mirnom česticom ($\mathbf{v}_2 = 0$) čija masa teži u nulu ($m_2 \rightarrow 0$). Kad $m_2 \rightarrow 0$, izraz (5.25) daje $\mathbf{v}_1' \rightarrow \mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2' \rightarrow 2\mathbf{v}_1$, što znači da se projektil nastavlja gibati gotovo nepromijenjenom brzinom, a meta poprima brzinu koja je gotovo dvostruko veća od brzine projektila prije sudara.




- Elastični ($k = 1$) centralni sudar čestice s mirnom česticom ($\mathbf{v}_2 = 0$) jednake mase ($m_2 = m_1$). Izraz (5.25) daje $\mathbf{v}_1' = 0$ i $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$, što znači da se projektil zaustavlja, a meta se nastavlja gibati brzinom koja je jednaka brzini projektila prije sudara.

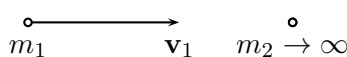


- Elastični ($k = 1$) centralni sudar čestice s mirnom česticom ($\mathbf{v}_2 = 0$) trostruko veće mase ($m_2 = 3m_1$). Poslije sudara čestice se gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakog iznosa. Izraz (5.25) daje $\mathbf{v}_{1,2}' = \mp\mathbf{v}_1/2$.

Prije sudara: 

Poslije sudara ($k = 1$): 

- Elastični ($k = 1$) centralni sudar čestice s mirnom česticom ($v_2 = 0$) čija masa teži u beskonačno ($m_2 \rightarrow \infty$). Projektil se odbija od mete i giba se unazad brzinom čiji iznos je gotovo jednak iznosu njegove brzine prije sudara, a meta ostaje gotovo nepomična. Izraz (5.25) u limesu $m_2 \rightarrow \infty$ daje $v_1' \rightarrow -v_1$ i $v_2' \rightarrow 0$.

Prije sudara: 

Poslije sudara ($k = 1$): 

Primjer 5.6.2: Određivanje mase klizača u sudaru na zračnoj tračnici

U aparaturi za laboratorijsku vježbu poznatoj kao “zračna tračnica” u vodoravnu se tračnicu upuhuje zrak koji iz tračnice izlazi kroz niz sitnih rupica s njene gornje strane. Položimo li na tračnicu jedan ili više klizača, oni lebde na struji zraka te mogu uz gotovo neprimjetno trenje klizati duž tračnice. Aparatura dopušta proučavanje sudara među klizačima.

Mogući zadatak u laboratorijskoj vježbi je odrediti nepoznatu masu jednog klizača ako je masa drugog klizača poznata te ako smo u mogućnosti izmjeriti brzine dvaju klizača prije i nakon sudara. Eksperiment možemo izvesti tako da klizač poznate mase m_1 , koji zovemo projektilom, sudarimo s mirnim klizačem nepoznate mase m_2 koji zovemo metom.

Ako je $m_1 = 300$ g te ako su mjerenja brzina pokazala da se projektil prije sudara gibao brzinom iznosa $v_1 = 70 \text{ cm s}^{-1}$, da se u sudaru projektil odbio od mete unazad brzinom iznosa $v_1' = 14 \text{ cm s}^{-1}$ te da se meta nakon sudara gibala brzinom iznosa $v_2' = 42 \text{ cm s}^{-1}$, jednadžbe (5.25) možemo napisati u obliku

$$-v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} - k \left(v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right), \quad v_2' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} + k \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

te iz njih možemo odrediti nepoznatu masu mete m_2 te vrijednost koeficijenta restitucije k u ovom sudaru. Dobivamo

$$m_2 = m_1 \frac{v_1 + v_1'}{v_2'} = (300 \text{ g}) \times \frac{70 + 14}{42} = 600 \text{ g},$$

$$k = \frac{v_1' + v_2'}{v_1} = \frac{14 + 42}{70} = 0.8.$$

Koeficijent restitucije mogli smo odrediti i iz omjera iznosa relativnih brzina klizača nakon i prije sudara prema jednadžbi (5.20).

5.7 Očuvanje kutne količine gibanja sustava

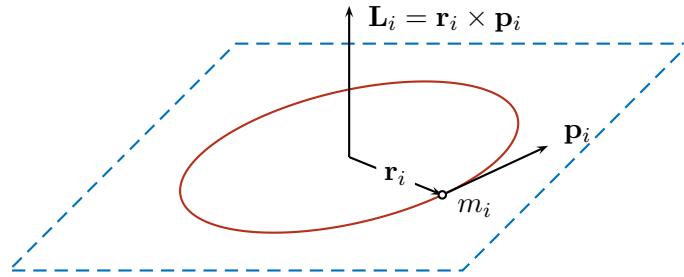
Kutna količina gibanja čestice (engl. *angular momentum*)⁵ čiji je položaj u odnosu na ishodišnu točku \mathbf{r}_i i čija je količina gibanja $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ vektorska je veličina definirana izrazom

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (5.27)$$

Važno je uočiti da kutna količina gibanja čestice ovisi o odabiru ishodišne točke u odnosu na koju vektor \mathbf{r}_i pokazuje položaj čestice.

Primjer 5.7.1: Kutna količina gibanja čestice pri kružnom gibanju

Slika prikazuje česticu mase m_i koja se giba duž kružnice polumjera R . Vektor \mathbf{r}_i opisuje položaj čestice u odnosu na središte kružnice (vrijedi $|\mathbf{r}_i| = R$). Na slici su nacrtani vektori količine gibanja \mathbf{p}_i i kutne količine gibanja \mathbf{L}_i čestice.



Smjer vektora kutne količine gibanja $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ je određen pravilom desnog vijka, a s obzirom na to da su vektori \mathbf{r}_i i $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ međusobno okomiti, iznos kutne količine gibanja možemo izraziti kao

$$L_i = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i| = |\mathbf{r}_i| |\mathbf{p}_i| = R m_i v_i$$

(koristili smo $R = |\mathbf{r}_i|$). Napišemo li iznos brzine čestice kao $v_i = R\omega$, gdje je ω iznos kutne brzine čestice, iznos kutne količine gibanja također možemo izraziti kao

$$L_i = m_i R^2 \omega.$$

Napišemo li vektor brzine kao $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, gdje je $\boldsymbol{\omega}$ vektor kutne brzine čestice, vektor kutne količine gibanja možemo izraziti kao

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - m_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i = m_i R^2 \boldsymbol{\omega}.$$

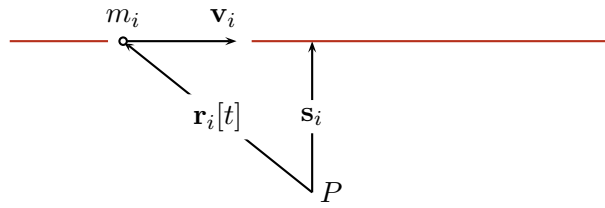
U gornjem računu smo koristili opći identitet 1.15 te smo prepoznali da je drugi član u pretposljednem koraku jednak nuli jer su vektori \mathbf{r}_i i $\boldsymbol{\omega}$ međusobno okomiti.

Vektor kutne količine gibanja čestice koja se brzinom stalnog iznosa giba duž kružnice stalan je samo ako kao ishodište koristimo središte kružnice. Kad bismo kao ishodište u odnosu na koje vektor \mathbf{r}_i pokazuje položaj čestice koristili bilo koju drugu točku u prostoru, kutna količina gibanja te čestice ne bi bila stalna u vremenu.

Primjer 5.7.2: Kutna količina gibanja čestice pri gibanju duž pravca

Slika prikazuje česticu mase m_i koja se giba stalnom brzinom \mathbf{v}_i (jednoliko pravocrtno gibanje). Pokazat ćemo da je vektor kutne količine gibanja te čestice u odnosu na točku P koja se nalazi na udaljenosti s od pravca duž kojeg se čestica giba stalan unatoč činjenici da se vektor položaja čestice $\mathbf{r}_i[t]$ mijenja u

vremenu.



Prema definiciji (5.27), kutna količina gibanja čestice je $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$, gdje je \mathbf{r}_i vektor položaja čestice koji se mijenja u vremenu, a $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ je njena količina gibanja koja je stalna u vremenu. Iz slike je vidljivo (primjenom pravila desnog vijka) da vektorski umnožak $\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$, a time i vektor kutne količine gibanja \mathbf{L}_i , gledaju u ravninu crteža. Iznos vektora \mathbf{L}_i možemo dobiti uvedemo li vektor \mathbf{s}_i kao najkraći vektor koji pokazuje pravac gibanja čestice u odnosu na točku P (\mathbf{s}_i je okomit na pravac, vidi sliku) te prikazemo li vektor $\mathbf{r}_i[t]$ kao zbroj stalnog vektora \mathbf{s}_i i vektora $\mathbf{t}_i[t]$ koji se mijenja u vremenu i koji leži na pravcu gibanja čestice (zbog preglednosti, vektor $\mathbf{t}_i[t]$ nije prikazan na slici). Sada možemo pisati

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = (\mathbf{s}_i + \mathbf{t}_i) \times \mathbf{v}_i = \mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i,$$

gdje smo prepoznali da je vektorski umnožak vektora \mathbf{t}_i i \mathbf{v}_i jednak nuli jer su \mathbf{t}_i i \mathbf{v}_i istog ili suprotnog smjera. Konačno, vektor kutne količine gibanja i njegov iznos možemo napisati kao

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{s}_i \times \mathbf{v}_i, \quad L_i = m_i s_i v_i,$$

čime smo potvrdili da je kutna količina gibanja čestice pri gibanju stalnom brzinom stalna veličina.

Moment sile: Kad sila \mathbf{F}_i djeluje na česticu čiji je položaj u odnosu na ishodišnu točku \mathbf{r}_i , moment sile (engl. *torque*) je vektorska veličina definirana izrazom

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (5.28)$$

Jednadžba gibanja kutne količine gibanja čestice: Brzina promjene kutne količine gibanja čestice u vremenu (derivacija po vremenu) jednaka je momentu sile koja na nju djeluje,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i. \quad (5.29)$$

U gornjem računu smo najprije koristili definiciju (5.27), zatim smo prepoznali da je član $\mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i$ jednak nuli jer su \mathbf{v}_i i \mathbf{p}_i istog smjera, zatim smo koristili Newtonovu jednadžbu gibanja i na kraju definiciju momenta sile (5.28).

Kutna količina gibanja sustava čestica je zbroj kutnih količina gibanja svih čestica u sustavu,

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i, \quad (5.30)$$

a brzina njene promjene u vremenu (derivacija po vremenu) jednaka je zbroju momenata vanjskih sila

koje djeluju na sustav,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i^{(\text{ext})} = \mathbf{M}^{(\text{ext})}, \quad (5.31)$$

što znači da unutarnje sile ne utječu na promjenu kutne količine gibanja sustava.

Jednadžbu (5.31) zovemo jednadžbom gibanja kutne količine gibanja sustava čestica, a možemo ju izvesti pišući

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \left(\mathbf{M}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{ji} \right) = \sum_i \mathbf{M}_i^{(\text{ext})} = \mathbf{M}^{(\text{ext})}. \quad (5.32)$$

Najprije smo koristili definiciju (5.30) i nakon toga jednadžbu gibanja (5.29). Zatim smo moment sile na i -tu česticu rastavili na moment vanjskih sila, $\mathbf{M}_i^{(\text{ext})} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(\text{ext})}$, i na moment unutarnjih sila, $\sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{ji} = \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}$, gdje je \mathbf{F}_{ji} sila kojom j -ta čestica djeluje na i -tu. Konačno, uočili smo da je zbroj svih momenata unutarnjih sila jednak nuli, $\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{ji} = 0$, jer svakom momentu unutarnje sile \mathbf{M}_{ji} odgovara suprotni moment $\mathbf{M}_{ij} = -\mathbf{M}_{ji}$. To pokazujemo pišući

$$\mathbf{M}_{ij} + \mathbf{M}_{ji} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{ij} = 0, \quad (5.33)$$

gdje smo najprije koristili osnovnu tvrdnju trećeg Newtonovog zakona, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, a zatim njegovo proširenje prema kojem su vektori $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ i \mathbf{F}_{ij} istog ili suprotnog smjera, te je njihov vektorski umnožak jednak nuli.

Očuvanje kutne količine gibanja sustava čestica: Prema (5.31), ako je zbroj momenata vanjskih sila koje djeluju na čestice sustava jednak nuli, onda je kutna količina gibanja sustava čestica očuvana veličina,

$$\mathbf{M}^{(\text{ext})} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (5.34)$$

Gornja tvrdnja još je poznata kao *zakon o očuvanju kutne količine gibanja sustava čestica*.

Primjer 5.7.3: Približavanje svemirskih brodova povezanih užetom

Dva jednaka svemirska broda čije su mase $m_1 = m_2 = 100 \text{ t}$ povezana su užetom zanemarive mase i kruže oko središta mase sustava brzinama iznosa $v = 10 \text{ m s}^{-1}$ (napetost užeta osigurava potrebnu centripetalnu silu). Odredit ćemo rad koji astronauti moraju obaviti žele li polaganim zatezanjem užeta prepoloviti početnu udaljenost među brodovima.

Svemirske brodove možemo shvatiti kao čestice, a silu kojom uže djeluje na brodove možemo smatrati međučestičnom silom. S obzirom na to da druge sile nisu prisutne, zaključujemo da nisu prisutni niti momenti vanjskih sila te da je kutna količina gibanja sustava dvaju brodova očuvana. Iz uvjeta očuvanja kutne količine gibanja možemo odrediti brzine brodova u konačnom stanju sustava te nakon toga izračunati razliku između konačne i početne kinetičke energije sustava. Prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, promjena kinetičke energije odgovara radu koji astronauti moraju obaviti.

U početnom se stanju brodovi gibaju duž kružnice polumjera $\ell/2$, gdje je ℓ početna duljina užeta. Iznos kutne količine gibanja sustava L u početnom stanju možemo izraziti kao (vidi primjer 5.7.1)

$$L = 2 \times \frac{\ell}{2} m_1 v = \ell m_1 v,$$

a s obzirom na to da je ta veličina očuvana, umnožak ℓv mora ostati nepromijenjen. To znači da upola manjoj duljini užeta $\ell' = \ell/2$ odgovara dvostruko veći iznos brzine gibanja svemirskih brodova,

$$v' = 2v.$$

Sada možemo odrediti razliku konačne i početne kinetičke energije,

$$\Delta K = K' - K = 2 \times \frac{m_1 v'^2}{2} - 2 \times \frac{m_1 v^2}{2} = 3m_1 v^2 = 3 \times (10^5 \text{ kg}) \times (10 \text{ m s}^{-1})^2 = 30 \text{ MJ},$$

koja odgovara radu koji astronauti moraju obaviti.

Kutna količina gibanja sustava čestica u ROL i u ROSM: Polazeći od definicije (5.30) koja vrijedi u bilo kojem referentnom okviru kao što je npr. referentni okvir laboratorija (ROL), koristeći transformacije (5.10), (5.11) i svojstva (5.12), kutnu količinu gibanja sustava čestica možemo napisati kao

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i (\mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}_i^*) \times m_i (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}_i^*) = \dots = \mathbf{L}_{\text{cm}} + \mathbf{L}^*, \quad (5.35)$$

gdje tri točke podrazumijevaju niz jednostavnih koraka koji su ovdje izostavljeni (koriste se svojstva (5.12)), veličinu

$$\mathbf{L}_{\text{cm}} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{cm}} \quad (5.36)$$

zovemo kutnom količinom gibanja središta mase, a

$$\mathbf{L}^* = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^* \quad (5.37)$$

je kutna količina gibanja sustava u referentnom okviru središta mase (ROSM).

Zadaci

Z.5.1: Svemirski brod mase m_0 i površine poprečnog presjeka A ulazi brzinom početnog iznosa v_0 u mirni oblak prašine gustoće ρ . Pretpostavljajući da su sudari broda s česticama prašine savršeno neelastični (prašina se "lijepi" za brod) te da je površina A konstantna, izvedite izraz koji opisuje ovisnost iznosa brzine broda v o duljini puta s koju brod prevaljuje gibajući se kroz oblak. Zatim izvedite izraz koji opisuje ovisnost duljine puta s o vremenu t koje je proteklo od trenutka u kojem je brod ušao u oblak.⁶

$$\text{Rj: } v[s] = v_0 / (1 + \rho A s / m_0), \quad s[t] = \frac{m_0}{\rho A} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\rho A v_0 t / m_0} \right) \quad [\text{P}]$$

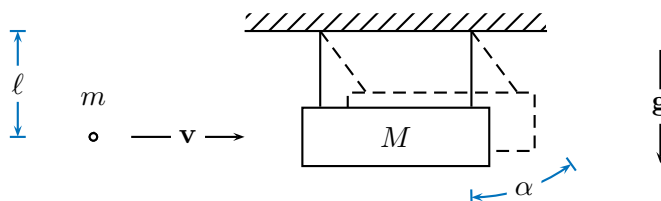
Z.5.2: Pijesak pada odozgo masenim tokom $\mu = 50 \text{ kg s}^{-1}$ na vodoravnu transportnu traku koja se giba brzinom iznosa $v = 1 \text{ m s}^{-1}$ (gibanje pijeska u vodoravnom smjeru prije kontakta s trakom je zanemarivo). Odredi minimalnu snagu kojom mora djelovati stroj koji pokreće traku kako bi održao brzinu trake stalnom.

$$\text{Rj: } P_{\min} = \mu v^2 \simeq 50 \text{ W} \quad [\text{P}]$$

Z.5.3: Tijela čije su mase $m_1 = 300 \text{ g}$ i $m_2 = 150 \text{ g}$ mogu klizati duž vodoravne tračnice uz zanemarivo trenje. Tijelo 1 naliće brzinom iznosa $v_1 = 25 \text{ cm s}^{-1}$ na mirno tijelo 2 nakon čega se tijelo 2 giba brzinom iznosa $v_2' = 30 \text{ cm s}^{-1}$. Odredite koeficijent restitucije k u ovom sudaru te izračunajte dio kinetičke energije koji se pretvorio u druge oblike energije.

$$\text{Rj: } k = \frac{(m_1 + m_2)v_{2x}' - m_1 v_{1x}}{m_1 v_{1x}} - 1 = 0.8, \quad Q = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = 1.125 \text{ mJ}$$

Z.5.4: U drveni kvadar mase $M = 5 \text{ kg}$ koji mirno visi na nitima, tako da se središte mase kvadra nalazi $\ell = 1 \text{ m}$ ispod objesa, vodoravno se prema središtu mase ispali projektil mase $m = 25 \text{ g}$. Projektil se zabije u kvadar te ostaje "zarobljen" u njemu uslijed čega se kvadar zajedno s projektilom zanjše do maksimalnog odklona niti $\alpha = 35^\circ$.



Odredite iznos brzine koju je projektil imao prije nego što se zabio u kvadar.

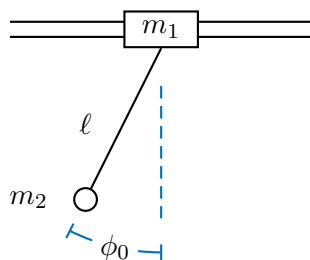
$$\text{Rj: } v = \frac{M+m}{m} \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha)} \simeq 378 \text{ m s}^{-1}$$

Z.5.5: Mačak mase $m_1 = 4 \text{ kg}$ sjedi na jednom kraju skateboarda mase $m_2 = 3 \text{ kg}$. Premjesti li se mačak na drugi kraj skateboarda i pritom svoje središte mase pomakne za $\Delta x_1' = 35 \text{ cm}$ u odnosu na skateboard, koliko i u kojem smjeru će se skateboard pomaknuti u odnosu na tlo? Učinak sila otpora i masu kotača smatramo zanemarivima.

$$\text{Rj: } \text{Skateboard se pomiče u suprotnu stranu za } \Delta x_1' / (1 + m_2 / m_1) = 20 \text{ cm}. \quad [\text{P}]$$

Z.5.6: Tijelo mase m_1 može slobodno klizati vodoravnom tračnicom, a na njega je pričvršćeno njihalo koje se sastoji od sitnog tijela mase m_2 na niti duljine ℓ . Sustav puštamo u gibanje iz položaja prikazanog na slici u kojem oba tijela miruju, a njihalo je otklonjeno za kut ϕ_0 .

⁶Ideja za ovaj zadatak je preuzeta iz [7], zadatak 1.2.



Odredite iznos brzine tijela mase m_1 u trenutku u kojem je nit uspravna.

$$\text{Rj: } v_{1x} = \sqrt{2(m_2/m_1)g\ell(1 - \cos \phi_0)/(1 + m_1/m_2)} \quad [\text{P}]$$

Z.5.7: Hokejski pak se sudario s mirnim pakom nakon čega je, gibajući se duž pravca koji zatvara kut α_1 s pravcem svog prvobitnog gibanja, a prije nego što se zaustavio zbog trenja s ledom, prevalio put duljine s_1 . Pak koji je početno mirovao se nakon sudara gibao duž pravca koji zatvara kut α_2 s pravcem prvobitnog gibanja prvog paka. Pretpostavljajući da su pakovi identični, odredite koliki je put prevalio drugi pak prije zaustavljanja.

$$\text{Rj: } s_2 = s_1(\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2)^2 \quad [\text{P}]$$

Z.5.8: Čestica mase m_1 sudara se s česticom mase m_2 koja je do tada mirovala. Nakon sudara čestica mase m_1 giba se duž pravca koji s pravcem njenog prvobitnog gibanja zatvara kut $\alpha_1 = 30^\circ$, dok pravac gibanja čestice mase m_2 s istim pravcem zatvara kut $\alpha_2 = 45^\circ$. Pretpostavljajući da je sudar elastičan odredite omjer masa m_1/m_2 .

$$\text{Rj: } m_1/m_2 = \sqrt{3} \quad [\text{P}]$$

Z.5.9: Dvije čestice se gibaju duž dva usporedna pravca razmaknuta a u suprotnim smjerovima. Mase čestica su m_1 i m_2 , a iznosi njihovih brzina su v_1 i v_2 . Odredi iznos ukupne kutne količine gibanja čestica u referentnom sustavu središta mase.

$$\text{Rj: } L_\Sigma^* = m_1 m_2 a (v_1 + v_2) / (m_1 + m_2)$$

Z.5.10: Odredite koliko puta bi se povećala napetost užeta koje povezuje svemirske brodove iz primjera 5.7.3 kad bi astronauti duljinu užeta polaganim zatezanjem smanjili na jednu polovinu početne duljine.

$$\text{Rj: osam puta}$$

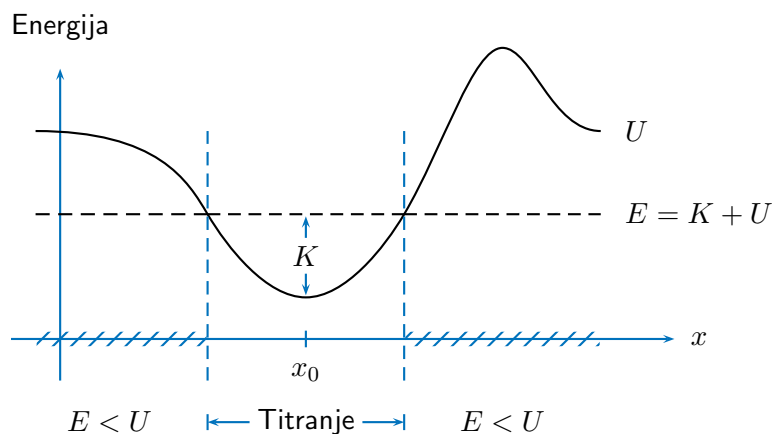
6 Titranje

U mnogim mehaničkim sustavima moguće je pronaći položaj stabilne ravnoteže. U tom položaju sustav može trajno mirovati, a u neposrednoj okolini tog položaja može izvoditi periodičko gibanje koje zovemo titranjem ili oscilacijom.

Ovdje ćemo najprije upoznati tzv. jednostavni harmonijski oscilator. Zatim ćemo upoznati oscilator u kojem su prisutne sile otpora i oscilator na koji djeluje vanjska periodička sila te pojavu rezonancije. Na kraju ćemo upoznati i tzv. vezane oscilatore, odnosno sustave oscilatora, koji u većoj ili manjoj mjeri djeluju silama jedan na drugog.

6.1 Stabilna ravnoteža i titranje

Slika pokazuje moguću ovisnost potencijalne energije U o x -koordinati položaja nekog tijela te mehaničku energiju tijela E koja je zbroj njegove kinetičke energije K i njegove potencijalne energije U . Pretpostavljamo da je mehanička energija očuvana što znači da ona sve vrijeme i svugdje ima istu vrijednost.



Podsjetimo se sljedećih činjenica:

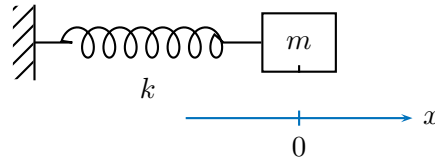
- Sila koja djeluje na tijelo ima smjer u kojem se potencijalna energija tijela smanjuje, a u minimumu potencijalne energije, ako on postoji, sila ne djeluje. To znači da u okolini minimuma potencijalne energije sila djeluje prema samom minimumu odnosno da je minimum potencijalne energije *položaj stabilne ravnoteže* tijela.
- Kinetička energija K prema definiciji ne može biti negativna. To znači da mehanička energija $E = K + U$ ne može biti manja od potencijalne energije U odnosno da se tijelo ne može naći u području u kojem je $E < U$. Područje u kojem je $E < U$ zovemo *zabranjenim područjem*.

Položaj stabilne ravnoteže je na gornjoj slici označen s x_0 , a zabranjena područja su označena iscrtkanim dijelom x -osi. Tijelo se može nalaziti samo ondje gdje je $E \geq U$, što je na gornjoj slici područje između dviju uspravnih isprekidanih linija. Razlika između mehaničke i potencijalne energije u tom području jest kinetička energija tijela. Ona je najveća u samom položaju ravnoteže, a smanjuje se prema rubovima područja. Krajnje točke koje tijelo dosiže su one u kojima vrijedi $E = U$, odnosno $K = 0$, a zovemo ih *točkama obrata*.

Prođe li tijelo ravnotežnim položajem gibajući se udesno, na njega počinje djelovati sila usmjerena ulijevo, usporava ga, te se kinetička energija smanjuje. Kad tijelo stigne do desne točke obrata, na trenutak se zaustavlja, nakon čega ga sila koja ga je do tada usporavala, sada počinje ubrzavati natrag prema ravnotežnom položaju. Isto se događa i s lijeve strane ravnotežnog položaja. Zaključujemo da dolazi do periodičkog gibanja tijela među dvjema točkama obrata. Takvo gibanje zovemo titranjem.

6.2 Jednostavno harmonijsko titranje (tijelo na opruzi)

Tijelo na opruzi: Najzorniji primjer mehaničkog sustava koji titra oko ravnotežnog položaja je tijelo mase m koje je oprugom zanemarive mase i konstante k povezano s čvrstim uporištem.



Koordinatu x možemo uvesti tako da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju tijela, odnosno položaju u kojem opruga na njega ne djeluje silom. Kad se tijelo nalazi izvan položaja ravnoteže, x -komponenta sile kojom opruga na njega djeluje, F_x , te potencijalna energija same opruge, U , dane su izrazima

$$F_x = -kx, \quad U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.1)$$

Jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora: Jednadžbu gibanja tijela mase m na opruzi konstante k , $ma_x = F_x$, možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (6.2)$$

gdje je $x = x[t]$ funkcija vremena koja opisuje x -koordinatu položaja mase, a $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x[t]$ je njena druga derivacija po vremenu, odnosno x -komponenta akceleracije tijela. Podijelimo li gornju jednadžbu s m i uvedemo li oznaku

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (6.3)$$

možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.4)$$

Gornja jednadžba poznata je kao jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora. Pokazat će se da je koeficijent ω_0^2 ispred funkcije x jednak kvadratu kutne frekvencije titranja ovog sustava.

Harmonijsko titranje (rješenje jednadžbe gibanja): Opće rješenje jednadžbe gibanja (6.4) jest titranje kutnom frekvencijom ω_0 koje se može napisati u obliku

$$x[t] = A \cos[\omega_0 t + \phi], \quad (6.5)$$

gdje su A i ϕ konstante. Konstanta $A \geq 0$ je tzv. **amplituda titranja** odnosno najveći otklon od ravnotežnog položaja koji tijelo postiže tijekom titranja. Veličinu $\omega_0 t + \phi$, koja ovisi o vremenu, zovemo **faznim kutom** ili kraće **fazom**, a konstantu ϕ koja odgovara fazi u trenutku $t = 0$ zovemo **početnom fazom**. Titranje opisano s (6.5) zovemo harmonijskim (suglasnim) jer kutna frekvencija titranja ne ovisi o amplitudi titranja.

Izrazi za brzinu i akceleraciju tijela pri harmonijskom titranju glase

$$\dot{x}[t] = \frac{d}{dt}x[t] = -\omega_0 A \sin[\omega_0 t + \phi], \quad \ddot{x}[t] = \frac{d^2}{dt^2}x[t] = -\omega_0^2 A \cos[\omega_0 t + \phi] = -\omega_0^2 x[t]. \quad (6.6)$$

Odnos položaja, brzine i akceleracije pri harmonijskom titranju grafički je prikazan u primjeru 2.1.3. Valjanost rješenja (6.5) možemo provjeriti uvrštavanjem rješenja u diferencijalnu jednadžbu (6.4), a sam postupak rješavanja diferencijalne jednadžbe je prikazan u dodatku G.1.

Napomene o rješenju (6.5) jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora:

- Kutna frekvencija koju obilježavamo simbolom ω_0 izražava brzinu kojom se fazni kut mijenja u vremenu. Ona ima dimenziju T^{-1} (inveržno vrijeme), a kao mjernu jedinicu koristimo radijan u sekundi (rad s^{-1}). Trajanje jednog ciklusa pri titranju oscilatora,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (6.7)$$

zovemo periodom titranja.

- Frekvencija koju obilježavamo s f_0 također ima dimenziju T^{-1} , ali ona izražava broj ciklusa koje oscilator napravi u jedinici vremena. Kao mjernu jedinicu za frekvenciju f koristi se herc ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Frekvencije ω_0 i f_0 su povezane relacijom $\omega_0 = 2\pi f_0$.
- U općem rješenju (6.5) umjesto trigonometrijske funkcije kosinus može se koristiti i funkcija sinus. Odabir između tih dviju mogućnosti povezan je s vrijednošću početne faze ϕ . Koristeći trigonometrijski identitet $\cos \alpha = \sin[\alpha + \pi/2]$ možemo napisati

$$\cos[\omega_0 t + \phi] = \sin[\omega_0 t + \phi + \pi/2] = \sin[\omega_0 t + \phi'], \quad \text{gdje je} \quad \phi' = \phi + \pi/2. \quad (6.8)$$

- U mnogim situacijama pokazuje se praktičnim rješenje (6.5) napisati u proširenom obliku korištenjem kompleksne funkcije

$$\hat{x}[t] = \hat{A}e^{i\omega_0 t}, \quad \text{gdje je} \quad \hat{A} = |\hat{A}|e^{i\phi} = Ae^{i\phi} \quad (6.9)$$

tzv. kompleksna amplituda čiji modul $A = |\hat{A}|$ odgovara amplitudi titranja, a kompleksni argument ϕ odgovara početnoj fazi. Koristeći Eulerovu formulu $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ pokazuje se da se realni dio funkcije $\hat{x}[t]$ podudara s polaznim izrazom $x[t]$,

$$\text{Re}[\hat{x}[t]] = \text{Re}[\hat{A}e^{i\omega_0 t}] = \text{Re}[|\hat{A}|e^{i(\omega_0 t + \phi)}] = A \cos[\omega_0 t + \phi] = x[t]. \quad (6.10)$$

Kapica iznad simbola x i A označava da je riječ o kompleksnim veličinama.

Početni uvjeti: Amplituda A i početna faza ϕ u izrazu (6.5) određeni su početnim uvjetima, a to su položaj $x[t_0]$ i brzina $\dot{x}[t_0]$ tijela u početnom trenutku $t = t_0$. Odaberemo li zbog jednostavnosti $t_0 = 0$, imamo

$$x[0] = A \cos \phi \quad \text{i} \quad \dot{x}[0] = -\omega_0 A \sin \phi. \quad (6.11)$$

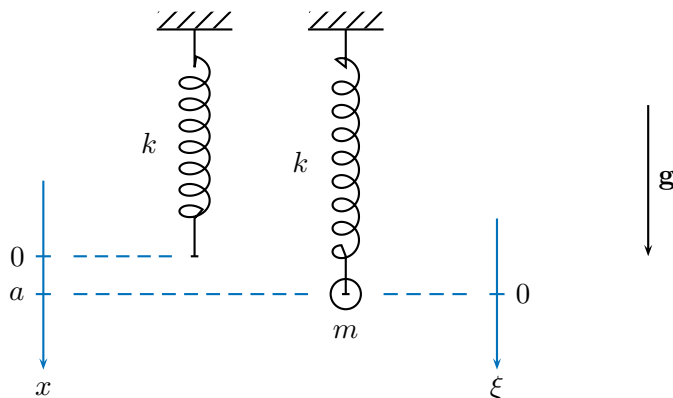
Kvadriranjem gornjih jednadžbi te koristeći $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ dobivamo izraz za amplitudu

$$A = \sqrt{x[0]^2 + \frac{\dot{x}[0]^2}{\omega_0^2}} \geq 0, \quad (6.12)$$

nakon čega iz sustava (6.11) možemo odrediti početnu fazu ϕ , pritom vodeći računa o tome da obje jednadžbe budu zadovoljene.

Primjer 6.2.1: Uteg na opruzi i položaj ravnoteže

Slika prikazuje neopterećenu oprugu konstante k te istu oprugu kad je opterećena utegom mase m .



Kad uteg miruje u svom ravnotežnom položaju, opruga je produljena za

$$a = \frac{mg}{k}$$

u odnosu na svoju neopterećenu duljinu, jer djelujući na tijelo silom iznosa ka usmjerenom uvis opruga uravnotežuje težinu tijela mg . Cilj nam je pokazati da je frekvencija titranja utega mase m koji visi na opruzi konstante k dana poznatim izrazom (6.3), bez obzira na prisutnost sile teže.

- Napišemo li jednadžbu gibanja utega koristeći koordinatu ξ koja opisuje otklon utega u odnosu na njegov ravnotežni položaj (vidi sliku), jednadžba gibanja glasi

$$m\ddot{\xi} = mg - k(a + \xi) = -k\xi,$$

gdje je mg iznos gravitacijske sile koja djeluje na tijelo, a $k(a + \xi)$ je iznos sile kojom na tijelo djeluje opruga. Nakon dijeljenja s m , jednadžbu gibanja možemo napisati kao

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

što se u potpunosti podudara s (6.4) i (6.3). Rješenje te jednadžbe gibanja je harmonijsko titranje $\xi[t] = A \cos[\omega_0 t + \phi]$.

- Kad bismo koristili koordinatu x koja opisuje produljenje opruge u odnosu na njeno nerastegnuto stanje (vidi sliku), jednadžba gibanja bi glasila

$$m\ddot{x} = mg - kx,$$

a nakon dijeljenja s m imali bismo

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

S obzirom na to da desna strana gornje jednadžbe nije jednaka nuli, to nije jednadžba harmonijskog oscilatora u njenom osnovnom obliku (6.4). Ipak, lako je uvjeriti se da je njeno rješenje

$$x[t] = a + A \cos[\omega_0 t + \phi], \quad a = \frac{mg}{k},$$

što je također harmonijsko titranje frekvencijom ω_0 .

6.3 Energija pri harmonijskom titranju

Mehanička energija pri titranju tijela na opruzi zanemarive mase sastoji se od kinetičke energije tijela $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ i od potencijalne energije opruge $U = \frac{1}{2}kx^2$,

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.13)$$

S obzirom na to da u sustavu nije prisutan nijedan mehanizam kojim bi se mehanička energija pretvarala u druge oblike energije, ona je očuvana veličina. Vrijednost mehaničke energije najlakše je izračunati u trenutku u kojem se tijelo nalazi u točki obrata odnosno pri maksimalnom otklonu od ravnotežnog položaja. U tom trenutku imamo $x = \pm A$ i $\dot{x} = 0$ te slijedi

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \quad (6.14)$$

Isti rezultat dobili bismo i uvrštenjem općeg rješenja (6.5) u izraz za energiju (6.13).

Srednja potencijalna i srednja kinetička energija: Srednju potencijalnu energiju $\langle U \rangle$ dobivamo integracijom potencijalne energije $U[t]$ kroz jedan puni period titranja, $T = 2\pi/\omega_0$, te dijeljenjem s periodom,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T U[t] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}k(x[t])^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kA^2 \cos^2[\omega_0 t + \phi] dt \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2[\omega_0 t + \phi] dt \\ &= \frac{1}{4}kA^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

U računu smo koristili rješenje (6.5) jednadžbe gibanja, a u posljednjem smo koraku iskoristili poznatu činjenicu da srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije iznosi $1/2$. Uspoređujući dobiveni rezultat s (6.14), vidimo da je srednja potencijalna energija jednaka polovini (ukupne) mehaničke energije, a to znači da preostalu polovicu čini srednja kinetička energija. Zaključujemo da pri titranju tijela na opruzi vrijedi

$$\langle U \rangle = \langle K \rangle = \frac{1}{2}E. \quad (6.16)$$

Nalaženje jednadžbe gibanja iz izraza za energiju: Izraz za energiju tijela na opruzi (6.13) i uvjet očuvanja energije mogu nas dovesti do jednadžbe gibanja tog sustava. Krenemo li od uvjeta očuvanja energije, slijedi

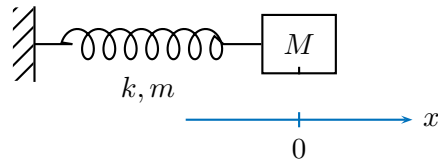
$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x} \left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x \right). \quad (6.17)$$

Uočavamo da konačni izraz sve vrijeme može biti jednak nuli jedino ako je dvočlani izraz u zagradama jednak nuli. Izjednačimo li taj izraz s nulom, dobivamo jednadžbu gibanja harmonijskog oscilatora pri čemu koeficijent uz funkciju x prepoznamo kao kvadrat frekvencije titranja.

Nalaženje jednadžbe gibanja iz izraza za mehaničku energiju može se kod složenijih oscilatora pokazati jednostavnijim od izravnog razmatranja sila koje djeluju u sustavu.

Primjer 6.3.1: Titranje tijela na opruzi nezanemarive mase

Kad masu opruge na kojoj titra neko tijelo *nije* opravdano u cijelosti zanemariti, frekvenciju titranja možemo odrediti pretpostavljajući da je masa opruge ravnomjerno raspoređena duž čitave duljine opruge te da se opruga tijekom titranja jednoliko rasteže i sažima. Slika prikazuje tijelo mase M koje je oprugom konstante k i mase m vezano s čvrstim uporištem. Koordinata x opisuje otklon tijela mase M od ravnotežnog položaja, a \dot{x} je brzina tijela.



Shvatimo li oprugu kao niz elemenata mase dm' i označimo li brzinu elementa opruge s v'_x , kinetička energija elementa opruge je

$$dK' = \frac{dm'}{2} v'^2_x.$$

S obzirom na pretpostavku o jednolikom rastezanju opruge, brzinu elementa možemo izraziti kao

$$v_x = \frac{m'}{m} \dot{x},$$

gdje je m' masa dijela opruge koji se nalazi između promatranog elementa opruge i njenog učvršćenog kraja, m je ukupna masa opruge, a \dot{x} brzina pomičnog kraja opruge odnosno tijela mase M . Kinetičku energiju elementa opruge sada možemo izraziti kao

$$dK' = \frac{dm'}{2} \left(\frac{m'}{m} \dot{x} \right)^2 = \frac{\dot{x}^2}{2m^2} m'^2 dm',$$

a integracijom po svojoj masi opruge dobivamo njenu ukupnu kinetičku energiju,

$$K' = \int dK' = \frac{\dot{x}^2}{2m^2} \int_0^m m'^2 dm' = \frac{1}{6} m \dot{x}^2.$$

Mehanička energija sustava je zbroj kinetičke energije tijela $K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$, kinetičke energije opruge K' koja je dana gornjim izrazom i potencijalne energije opruge $U = \frac{1}{2} k x^2$,

$$E = K + K' + U = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{6} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Prepoznamo da je gornji izraz istovjetan izrazu za energiju tijela mase $M + m/3$ koje titra na bezmasenoj opruzi konstante k , a to znači da njegova jednadžba gibanja ima oblik jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, gdje je

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M + m/3}.$$

6.4 Neharmonijski oscilatori i titranje malenom amplitudom

Neharmonijski oscilator: Jednadžba gibanja mehaničkog sustava koji može bez gubitka mehaničke energije titrati oko svog ravnotežnog položaja može imati oblik koji je složeniji od jednadžbe gibanja jednostavnog harmonijskog oscilatora (6.4). Takav sustav zovemo neharmonijskim oscilatorom. Jednadžbu gibanja mnogih neharmonijskih oscilatora možemo napisati u obliku

$$\ddot{x} + \omega^2[x] x = 0, \quad (6.18)$$

gdje $x = x[t]$ opisuje otklon sustava od položaja ravnoteže, a koeficijent $\omega^2[x]$ je konačna pozitivna veličina koja ovisi o x . Jednadžba gibanja (6.18) je nelinearna diferencijalna jednadžba te nalaženje njenog rješenja ovdje nećemo razmatrati osim približnog (aproksimativnog) rješenja koje vrijedi u slučaju titranja vrlo malenom amplitudom.

Titranje malenom amplitudom: Ograničimo li razmatranje titranja neharmonijskog oscilatora čija jednadžba gibanja ima oblik (6.18) na titranje "vrlo malenom amplitudom", koeficijent $\omega^2[x]$ možemo zamijeniti konstantom

$$\omega_0^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \omega^2[x]. \quad (6.19)$$

Time polazna jednadžba gibanja poprima oblik jednadžbe gibanja jednostavnog harmonijskog oscilatora čije je rješenje harmonijsko titranje frekvencijom ω_0 . Čim je amplituda titranja manja, takvo približno (aproksimativno) rješenje bolje opisuje stvarno gibanje neharmonijskog oscilatora.

Dobijemo li u (6.19) $\omega_0^2 = 0$, gibanje neharmonijskog oscilatora opisanog jednadžbom (6.18) ne možemo aproksimirati harmonijskim titranjem čak ni pri malenim amplitudama titranja, a isto vrijedi i u slučaju u kojem limes veličine $\omega^2[x]$ slijeva ($x \rightarrow -0$) i sdesna ($x \rightarrow +0$) nisu međusobno jednaki.

Primjer 6.4.1: Frekvencija matematičkog njihala pri njihanju malenom amplitudom

U primjeru 4.4.2 smo izveli jednadžbu gibanja matematičkog njihala s niti duljine ℓ čiji otklon od ravnotežnog položaja opisan kutnom koordinatom θ . Napišemo li tu jednadžbu u obliku (6.18) ona glasi

$$\ddot{\theta} + \omega^2[\theta] \theta = 0, \quad \text{gdje je} \quad \omega^2[\theta] = \frac{g \sin \theta}{\ell \theta}.$$

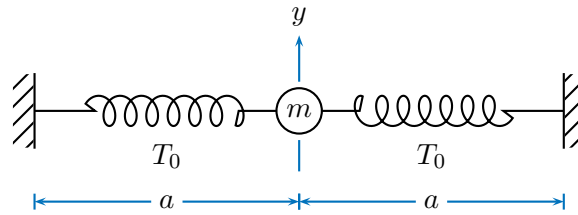
Uočavamo da je koeficijent $\omega^2[\theta]$ za dovoljno male vrijednosti θ pozitivan, što znači da je matematičko njihalo neharmonijski oscilator. Pri titranju malenom amplitudom, frekvencija njegovog titranja teži u vrijednost

$$\omega_0^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \omega^2[\theta] = \frac{g}{\ell} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{g}{\ell}.$$

Toj frekvenciji odgovara period njihanja $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ koji za nit duljine $\ell = 1 \text{ m}$ iznosi $T \simeq 2.01 \text{ s}$.

Primjer 6.4.2: Transverzalno titranje mase na dvjema napetim oprugama

Sitno tijelo mase m dvjema je jednakim oprugama vezano s čvrstim uporištima razmaknutim za $\ell = 2a$ (sustav u kojem su dva tijela vezana trima oprugama razmatramo u primjeru 6.8.2). Sila napetosti opruga u ravnotežnom stanju je T_0 .



Odredit ćemo frekvenciju titranja tijela malom amplitudom duž osi koja je okomita na pravac na kojem opruge leže u ravnotežnom stanju. Takvo titranje ovog sustava zovemo transverzalnim titranjem.

Transverzalni otklon tijela y i odgovarajući kutni otklon opruga θ povezani su s

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{a},$$

a napetost opruga pri takvom otklonu možemo izraziti s

$$T = T_0 + k \left(\sqrt{a^2 + y^2} - a \right),$$

gdje je T_0 napetost opruge u ravnotežnom stanju, k konstanta opruge, a izraz u zagradama je produljenje opruge. Sada možemo sastaviti jednadžbu gibanja tijela. S obzirom da razmatramo gibanje tijela duž transverzalne y -osi, potrebna nam je y -komponenta (projekcija na transverzalnu y -os) sila kojima opruge djeluju na tijelo, a ona je razmjerna napetosti opruga T i sinusu kuta θ . Jednadžba gibanja je

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -2T \sin \theta = -2 \left(T_0 + k \left(\sqrt{a^2 + y^2} - a \right) \right) \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \\ &= -2 \left(T_0 + k \left(\sqrt{a^2 + y^2} - a \right) \right) \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

a možemo ju napisati u obliku (6.18) kao

$$\ddot{y} + \omega^2[y] y = 0, \quad \text{gdje je} \quad \omega^2[y] = \frac{2}{m} \left(T_0 + k \left(\sqrt{a^2 + y^2} - a \right) \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

S obzirom da koeficijent $\omega^2[y]$ ovisi o y -koordinati zaključujemo da transverzalno titranje tijela neharmonijsko te da ga pri malim amplitudama titranja možemo aproksimirati harmonijskim titranjem frekvencije

$$\omega_0^2 = \lim_{y \rightarrow 0} \omega^2[y] = \frac{2T_0}{ma} = \frac{4T_0}{m\ell},$$

koja ne ovisi o konstanti opruga, već isključivo o njihovoj napetosti T_0 u ravnotežnom stanju. Isti rezultat dobili bismo izravnijim putem da smo pri sastavljanju jednadžbe gibanja pretpostavili da je pri malim otklonima

- (a) povećanje napetosti opruga izazvano njihovim produljenjem zanemarivo
- (b) te da je sinus kutnog otklona opruge približno jednak njegovom tangensu.

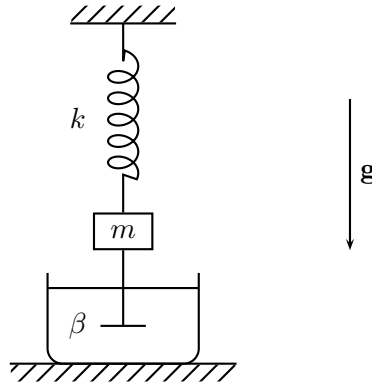
Provedeni postupak možemo uzeti kao dokaz da su gornje pretpostavke opravdane.

Uz $T_0 = 0$, tj. kad opruge ne bi bile napete u ravnotežnom stanju sustava, dobili bismo $\omega_0^2 = 0$, a to znači da transverzalno titranje ovakvog oscilatora ne bismo mogli smatrati harmonijskim oscilatorom čak ni pri malenim amplitudama titranja.

6.5 Prigušeno titranje

U mnogim fizičkim sustavima koji titraju oko svog ravnotežnog položaja prisutne su nezanemarive sile koje pružaju otpor gibanju. Mehanička energija takvih sustava se s vremenom gubi na svladavanje tih sila. Kad sile otpora nisu prejake, amplituda titranja se u vremenu smanjuje i takvo gibanje zovemo prigušenim titranjem. Kad su sile otpora dovoljno jake, prigušeno titranje prelazi u tzv. aperiodičko gibanje.

Slika prikazuje tijelo mase m koje visi na opruzi konstante k s čije je donje strane pričvršćen predmet koji se pri titranju giba kroz tekućinu u posudi.



U prikazanom sustavu razumno je pretpostaviti da je sila otpora razmjerna iznosu brzine tijela. Konstantu proporcionalnosti između iznosa brzine tijela i jakosti sile otpora označit ćemo sa β .

Jednadžba gibanja oscilatora s prigušenjem: Jednadžba gibanja tijela mase m na opruzi konstante k na koju djeluje sila otpora čija je jakost razmjerna iznosu brzine s konstantom proporcionalnosti β glasi

$$m\ddot{x} = F_x = -kx - \beta\dot{x}. \quad (6.20)$$

Član $-\beta\dot{x}$ na desnoj strani predstavlja silu otpora. Negativan predznak prisutan je zato što su sila otpora i brzina suprotnog smjera. Gornju jednadžbu dijelimo s m te koristimo od ranije poznatu oznaku $\omega_0^2 = k/m$ za kvadrat tzv. prirodne frekvencije ovog oscilatora odnosno frekvencije kojom bi ovaj sustav titrao kad sila otpora ne bi bila prisutna. Uvodimo novu oznaku

$$2\delta = \frac{\beta}{m}, \quad (6.21)$$

gdje veličinu δ zovemo koeficijentom prigušenja te jednadžbu gibanja pišemo u obliku

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.22)$$

koji je poznat kao jednadžba gibanja oscilatora s prigušenjem.

Rješenja gornje jednadžbe u velikoj mjeri ovise o odnosu veličina δ i ω_0 . Sam postupak rješavanja gornje jednadžbe gibanja je zbog složenosti opisan u dodatku G.2, a u nastavku ovog poglavlja navodimo samo konačne izraze i njihova najvažnija svojstva.

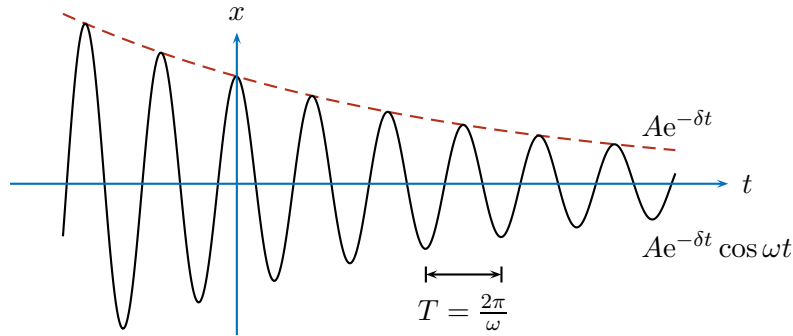
Prigušeno titranje (podkritično prigušenje): Kad je $\delta < \omega_0$, rješenje jednadžbe gibanja oscilatora s prigušenjem (6.22) je

$$x[t] = Ae^{-\delta t} \cos[\omega t + \phi], \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0, \quad (6.23)$$

gdje su A i ϕ su konstante.

Gornje rješenje predstavlja titranje frekvencijom $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ koja je manja je od tzv. prirodne frekvencije

ω_0 kojom bi oscilator titrao kad prigušenje ne bi bilo prisutno te s amplitudom koja se u vremenu smanjuje razmjerno faktoru $e^{-\delta t}$. Slika prikazuje takvo gibanje.



Faktor $Ae^{-\delta t}$ koji još nazivamo ovojnicom ili envelopom je na gornjoj slici prikazan isprekidanom, a čitavo rješenje $x[t] = Ae^{-\delta t} \cos \omega t$ je prikazano punom linijom.

Također primjećujemo da se za $\delta \rightarrow 0$ gornji izrazi svode na poznate izraze za harmonijski oscilator.

Energija prigušenog titranja sastoji se od kinetičke energije $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ i od potencijalne energije $U = \frac{k}{2}x^2$. Mehanička energija $E = K + U$ ovdje nije očuvana veličina, već se smanjuje zbog svladavanja sile otpora. Najlakše ju je procijeniti u trenucima u kojima se tijelo zaustavlja ($K = 0$, $E = U > 0$). U tim trenucima je njegov otklon od ravnotežnog položaja približno $x[t] \simeq Ae^{-\delta t}$ te je energija

$$E = U \simeq \frac{1}{2}kA^2e^{-2\delta t}. \quad (6.24)$$

Iako je taj rezultat samo približan, važno je uočiti da je energija prigušenog titranja, promatramo li ju na vremenskoj skali znatno duljoj od perioda titranja, razmjerna faktoru $e^{-2\delta t}$.

Logaritamski dekrement je veličina kojom je moguće izraziti jakost podkritičnog prigušenja oscilatora. Definiran je kao prirodni logaritam omjera dviju uzastopnih maksimalnih otklona oscilatora,

$$\lambda = \ln \frac{x[t]}{x[t+T]} = \ln \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = \delta T, \quad (6.25)$$

gdje je $T = 2\pi/\omega$ period prigušenog titranja. Logaritamski dekrement još možemo napisati kao $\lambda = 2\pi\delta/\omega$, a pri vrlo slabom prigušenju može se uzeti da je $\omega = \omega_0$ i napisati $\lambda \simeq 2\pi\delta/\omega_0$.

Q-faktor ili faktor kakvoće još je jedna veličina kojom iskazujemo jakost podkritičnog prigušenja oscilatora, a definiran je kao recipročna vrijednost prosječnog relativnog gubitka energije oscilatora u vremenskom intervalu koji odgovara promjeni faze oscilatora od jednog radijana,

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\Delta E}{E} \right|_{\text{Period}} = \frac{1}{2\pi} \frac{E[t] - E[t+T]}{E[t]} = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-2\delta T}) \simeq \frac{\delta T}{\pi}. \quad (6.26)$$

U gornjem izvodu smo najprije koristili izraz (6.24) za energiju prigušenog oscilatora, a nakon toga razvoj u red $e^{-\epsilon} \simeq 1 - \epsilon$. Q-faktor još možemo napisati i kao

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta} \simeq \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (6.27)$$

Što je prigušenje slabije, vrijednost Q-faktora je veća.

Aperiodičko gibanje (nadkritično i kritično prigušenje): Kad je koeficijent prigušenja veći od slobodne frekvencije oscilatora, $\delta > \omega_0$, govorimo o tzv. nadkritičnom prigušenju, a rješenje jednadžbe

gibanja (6.22) može se napisati u obliku

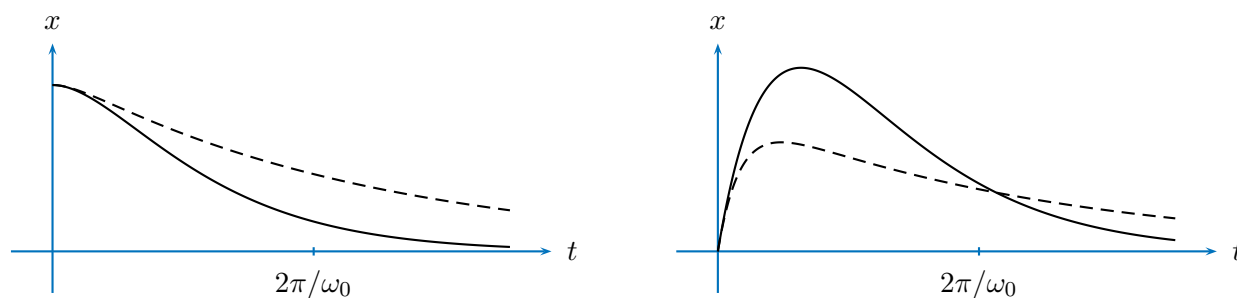
$$x[t] = x[0]e^{-\delta t} \left(\operatorname{ch} qt + \frac{\delta}{q} \operatorname{sh} qt \right) + \frac{1}{q} \dot{x}[0]e^{-\delta t} \operatorname{sh} qt, \quad q^2 = \delta^2 - \omega_0^2 > 0, \quad (6.28)$$

gdje su $x[0]$ i $\dot{x}[0]$ početni uvjeti gibanja odnosno otklon i brzina tijela u trenutku $t = 0$. Važno je uočiti da bez obzira na činjenicu da hiperbolne funkcije $\operatorname{ch} qt$ i $\operatorname{sh} qt$ divergiraju za $t \rightarrow \infty$, s obzirom na to da vrijedi $\delta > q$, faktor $e^{-\delta t}$ osigurava da čitav izraz trne u vremenu. To rješenje ne opisuje titranje, već aperiodičko gibanje. U graničnom slučaju koji razdvaja prigušeno titranje od aperiodičkog gibanja, tj. kad je koeficijent prigušenja jednak slobodnoj frekvenciji oscilatora, $\delta = \omega_0$, govorimo o kritičnom prigušenju, a rješenje jednadžbe gibanja poprima posebno jednostavan oblik,

$$x[t] = x[0]e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t) + \dot{x}[0]e^{-\omega_0 t}t, \quad \delta = \omega_0, \quad (6.29)$$

koji također opisuje aperiodičko gibanje koje trne u vremenu.

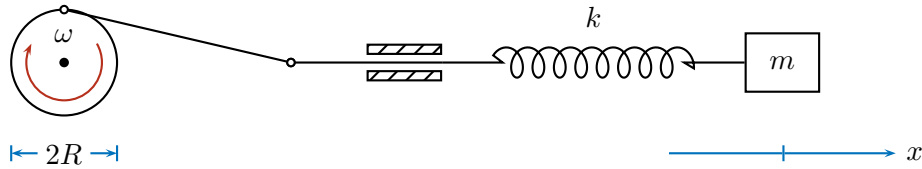
Slike prikazuju aperiodičko gibanje kritično prigušenog oscilatora (puna linija) te oscilatora iste slobodne frekvencije ω_0 koji je nadkritično prigušen koeficijentom prigušenja $\delta = 2\omega_0$ (isprekidana linija) i to za slučaj početnih uvjeta $x[0] > 0$, $\dot{x}[0] = 0$ (lijeva slika) te za slučaj $x[0] = 0$, $\dot{x}[0] > 0$ (desna slika).



Iz grafova je vidljivo da se kritično prigušeni oscilator brže približava ravnotežnom položaju od nadkritično prigušenog oscilatora.

6.6 Titranje pod djelovanjem vanjske harmonijske sile

Na oscilatore osim sila otpora mogu djelovati i vanjske sile. Ovdje razmatramo slučaj u kojem je vanjska sila periodična te dovodi to tzv. prisilnog titranja oscilatora. Slika prikazuje oscilator koji se sastoji od tijela mase m i opruge konstante k u kojem, zbog vrtnje kotača polumjera R na lijevoj strani frekvencijom ω , lijeva strana opruge titra u vodoravnom smjeru amplitudom R i frekvencijom ω .



Titranje lijevog kraja opruge unosi dodatnu silu koja djeluje na masu m . Tu silu smatramo vanjskom silom, a kad njenu x -komponentu možemo opisati jednostavnim izrazom

$$F_x^{(\text{ext.})} = F_p \cos \omega t, \quad (6.30)$$

kažemo da je riječ o vanjskoj harmonijskoj sili amplitude F_p i frekvencije ω . Djelovanje takve sile dovodi do tzv. prisilnog titranja oscilatora na slici.

Jednadžba gibanja oscilatora s vanjskom harmonijskom silom može se napisati u obliku

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_p \cos \omega t, \quad (6.31)$$

gdje članovi na desnoj strani opisuju silu opruge razmjernu otklonu x , silu prigušenja razmjernu brzini \dot{x} i vanjsku harmonijsku silu amplitude F_p i frekvencije ω . Uz uobičajene pokrate

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\delta = \frac{\beta}{m}, \quad f_p = \frac{F_p}{m}, \quad (6.32)$$

jednadžbu gibanja možemo sažetije napisati u obliku

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_p \cos \omega t. \quad (6.33)$$

Prisilno titranje: Rješenje jednadžbe gibanja (6.33) oscilatora s vanjskom harmonijskom silom jest titranje frekvencijom vanjske sile ω koje opisujemo izrazom

$$x[t] = A \cos[\omega t - \phi], \quad (6.34)$$

gdje je amplituda titranja dana izrazom

$$A = \frac{f_p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad (6.35)$$

a tangens faznog kuta ϕ koji opisuje kašnjenje titranja odnosu na vanjsku silu je dan s

$$\text{tg } \phi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{pri čemu} \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (6.36)$$

Izvod izraza (6.35) i (6.36) se zbog složenosti nalazi u dodatku G.3.

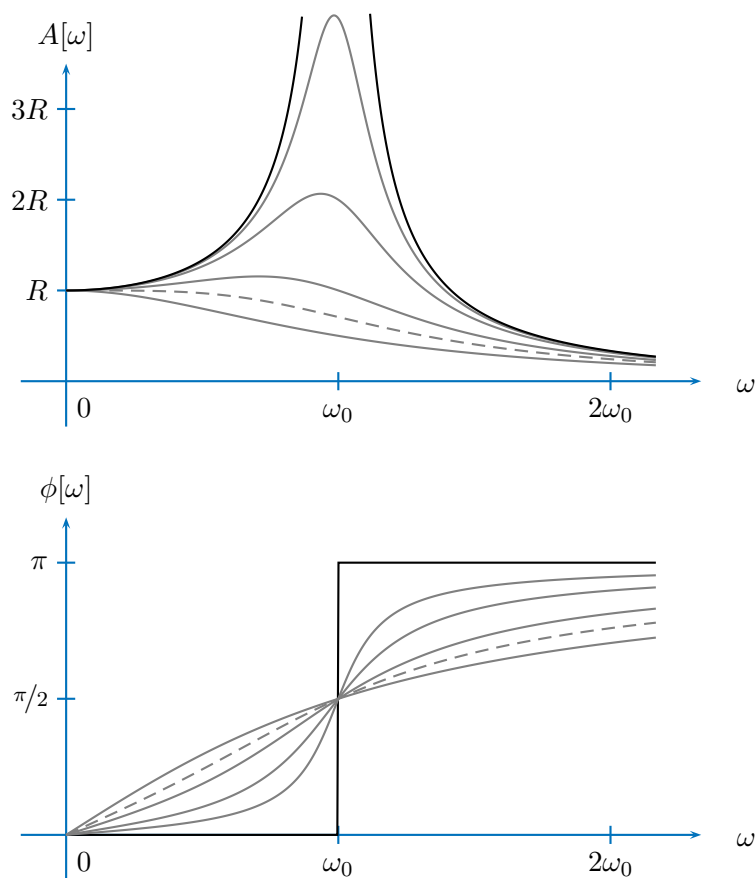
U modelu oscilatora u kojem je tijelo mase m pričvršćeno za jedan kraj opruge konstante k , a drugi kraj opruge titra amplitudom R i frekvencijom ω , vrijedi $f_p = kR$, odn. $f_p = F_p/m = kR/m = R\omega_0^2$, te amplitudu prisilnog titranja tijela (6.35) možemo izraziti kao

$$A[\omega] = \frac{R}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (2\delta\omega/\omega_0^2)^2}}. \quad (6.37)$$

Gornji izraz za amplitudu titranja te izraz (6.36) koji opisuje kašnjenje titranja u fazi u odnosu na silu najprije razmatramo u dvama graničnim slučajevima:

- Kad je frekvencija vanjske sile ω znatno manja od slobodne frekvencije oscilatora ω_0 , odnosno u limesu u kojem $\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, amplituda titranja tijela teži u vrijednost R . U istom limesu fazni kut ϕ također teži u nulu pa kažemo da oscilator titra u fazi s vanjskom silom.
- Kad je frekvencija vanjske sile ω znatno veća od slobodne frekvencije oscilatora ω_0 , odnosno u limesu u kojem $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$, amplituda prisilnog titranja teži u nulu. U istom limesu fazni kut ϕ teži u π , što znači da se titranje iščezavajućom amplitudom odvija u protufazi u odnosu na vanjsku silu.

Grafovi koji slijede prikazuju ovisnost amplitude $A[\omega]$ i faznog kuta $\phi[\omega]$ prisilnog titranja o frekvenciji vanjske sile ω . Slučaj iščezavajućeg prigušenja ($\delta = 0$) prikazan je crnom linijom, dok su slučajevi koji odgovaraju vrijednostima omjera $\delta/\omega_0 = 1/8, 1/4, 1/2, 1/\sqrt{2}$ i 1 prikazani sivom bojom (slučaj $\delta/\omega_0 = 1$ odgovara kritično prigušenom oscilatoru, a slučaj $\delta/\omega_0 = 1/\sqrt{2}$ posebno je istaknut isprekidanom linijom).



Pojava rezonancije: Kad na oscilator s dovoljno slabim koeficijentom gušenja djeluje vanjska harmonijska sila s frekvencijom ω koja je bliska prirodnoj frekvenciji oscilatora ω_0 može doći do titranja oscilatora vrlo velikom amplitudom. Tu pojavu zovemo rezonancijom, a ona je izraženija čim je omjer δ/ω_0 manji, a nije prisutna kad je $\delta/\omega_0 \geq 1/\sqrt{2}$. Frekvenciju vanjske sile ω pri kojoj amplituda prisilnog titranja poprima najveću

moguću vrijednost nazivamo rezonantnom frekvencijom, a možemo ju odrediti iz uvjeta $dA/d\omega = 0$. Samu rezonantnu frekvenciju te amplitudu prisilnog titranja i tangens faznog kuta ϕ pri djelovanju vanjske sile rezonantnom frekvencijom možemo opisati izrazima

$$(\omega)_{\text{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad A_{\text{rez.}} = \frac{R\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (\text{tg } \phi)_{\text{rez.}} = \frac{1}{\delta} (\omega)_{\text{rez.}}. \quad (6.38)$$

Uočavamo da u limesu u kojem prigušenje oscilatora teži u nulu, rezonantna frekvencija teži u prirodnu frekvenciju oscilatora, dok amplituda titranja teži u beskonačno. Također uočavamo da u istom limesu tangens faznog kuta ϕ teži u beskonačno što znači da fazni kut ϕ teži u $\pi/2$, odn. da titranje tijela zostaje u fazi u odnosu na vanjsku silu za približno četvrtinu perioda. Na primjer, u trenutku u kojem sila najvećom jakošću djeluje udesno tijelo tek prolazi ravnotežnim položajem gibajući udesno.

Primjer 6.6.1: Rezonancija pri njihanju štapa

Pojavu rezonancije lako je pokazati uhvatimo li tanak lagani štap duljine približno 1 m za njegov kraj i pustimo ga da visi. Zanjismo li štap, on će se nastaviti njihati frekvencijom ω_0 kojoj odgovara period njihanja od približno 1.5 s.

Pomičemo li vrlo polako kraj štapa lijevo–desno, štap će sve vrijeme biti uspravan i pratiti kretanje ruke. Time pokazujemo da za $\omega \ll \omega_0$ štap titra amplitudom pobude i to u fazi s njom.

Trešemo li gornji kraj štapa što je moguće većom frekvencijom, ali naravno, malenom amplitudom, vidljivo je da njegov donji kraj titra u protufazi s gornjim krajem, čime pokazujemo da za $\omega \gg \omega_0$ fazni pomak teži u π .

Konačno, pomičemo li gornji kraj štapa frekvencijom $\omega \simeq \omega_0$, odnosno frekvencijom bliskom onoj kojom se štap ‘sam želi njihati’, amplituda njegovog njihanja ubrzo postaje vrlo velika. Time pokazujemo pojavu rezonancije. Pojavom rezonancije služi se i dijete na ljuljači kad želi povećati amplitudu svog ljuljanja.

6.7 Slaganje titranja na pravcu i u ravnini

Slaganje (superpozicija) titranja na pravcu (1D): Gibanje koje je zbroj dvaju titranja koja se odvijaju duž iste prostorne osi (odnosno u jednoj prostornoj dimenziji, 1D) opisujemo izrazom

$$x[t] = A_1 \cos[\omega_1 t + \phi_1] + A_2 \cos[\omega_2 t + \phi_2], \quad (6.39)$$

gdje su $A_{1,2}$ amplitude, $\omega_{1,2}$ su kutne frekvencije, a $\phi_{1,2}$ su početne faze titranja koja zbrajamo. Očigledno je da se može uključiti i više od dva titranja te da resultantno gibanje može poprimiti vrlo komplicirane oblike.

Primjer 6.7.1: Slaganje dvaju titranja u 1D: $A_1 = A_2$, $\omega_1 \simeq \omega_2$, pojava udara

Gibanje koje nastaje slaganjem dvaju titranja jednake amplitude, ali različite frekvencije, možemo opisati izrazom

$$x[t] = A \cos[\omega_1 t] + A \cos[\omega_2 t].$$

Početne faze su izostavljene zbog jednostavnosti. Zanima nas slučaj u kojem su frekvencije ω_1 i ω_2 međusobno bliske.

Kako bismo gibanje koje razmatramo prikazali na zorniji način uvodimo frekvencije

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \text{i} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

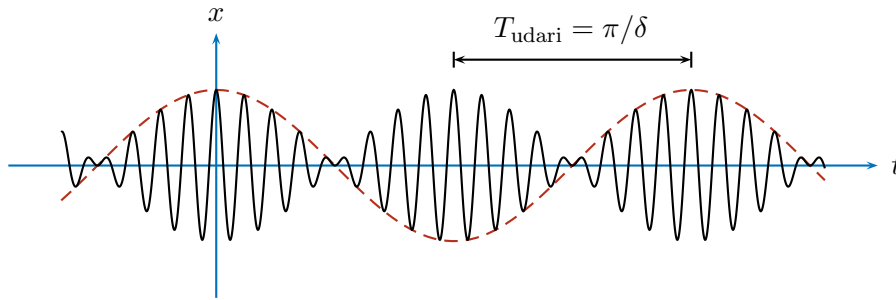
Inverzne relacije glase $\omega_{1,2} = \bar{\omega} \pm \delta$ te s pomoću njih složeno gibanje $x[t]$ možemo napisati kao

$$x[t] = A \cos[(\bar{\omega} + \delta)t] + A \cos[(\bar{\omega} - \delta)t].$$

Korištenjem Eulerove formule $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ gornji izraz možemo napisati kao

$$x[t] = A \operatorname{Re} \left[e^{i(\bar{\omega}+\delta)t} + e^{i(\bar{\omega}-\delta)t} \right] = A \operatorname{Re} \left[e^{i\bar{\omega}t} (e^{i\delta t} + e^{-i\delta t}) \right] = A \operatorname{Re} \left[e^{i\bar{\omega}t} (2 \cos \delta t) \right] \\ = 2A \cos \bar{\omega}t \cos \delta t.$$

U konačnom izrazu prepoznavamo umnožak titranja frekvencijom $\bar{\omega}$ i titranja frekvencijom δ . Kad su frekvencije ω_1 i ω_2 bliske jedna drugoj, vrijedi $\bar{\omega} \gg \delta$. U takvom slučaju rezultatno gibanje možemo shvatiti kao titranje frekvencijom $\bar{\omega}$ čija je amplituda modulirana faktorom $\cos \delta t$ odnosno kao “brzo titranje” čija se amplituda “sporo mijenja”. Slika prikazuje rezultatno gibanje za omjer frekvencija $\omega_1 : \omega_2 = 9 : 8$. Faktor $2A \cos \delta t$ prikazan je isprekidanom, a funkcija $x[t]$ punom linijom.



Uočavamo da amplituda brzog titranja postiže svoj maksimum dva puta unutar svakog perioda titranja modulirajućeg faktora $\cos \delta t$. Tu pojavu zovemo udarima, njena frekvencija je $\omega_{\text{udari}} = 2\delta$, odnosno njen period je

$$T_{\text{udari}} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Primjer 6.7.2: Slaganje titranja iste frekvencije (1D)

Gibanje koje nastaje slaganjem titranja jednakih frekvencija, ali različitih amplituda i početnih faza, možemo napisati kao

$$x[t] = A_1 \cos[\omega t + \phi_1] + A_2 \cos[\omega t + \phi_2] + \dots$$

Rezultatno gibanje će biti titranje frekvencijom ω s amplitudom i početnom fazom koje tek treba odrediti. U tu svrhu vrlo je praktično upotrijebiti kompleksne brojeve odnosno Eulerovu formulu $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Ona nam omogućuje da promatrano gibanje napišemo kao

$$x[t] = \operatorname{Re}[A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} + \dots] = \operatorname{Re}[(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + \dots) e^{i\omega t}].$$

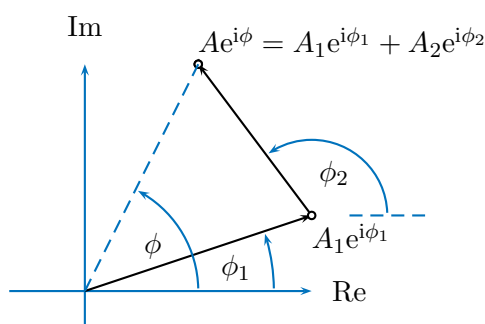
Izraz u okruglim zagradama jest zbroj tzv. kompleksnih amplituda $A_1 e^{i\phi_1}$, $A_2 e^{i\phi_2}$, itd. koji shvaćamo kao rezultatnu kompleksnu amplitudu

$$A e^{i\phi} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} + \dots$$

Izračunamo li rezultatnu kompleksnu amplitudu $A e^{i\phi}$, odnosno realni broj $A > 0$ i početnu fazu ϕ , promatrano gibanje možemo napisati kao

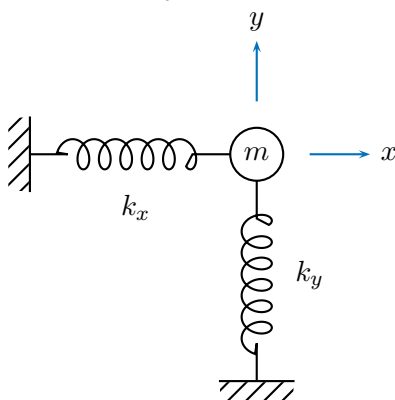
$$x[t] = \operatorname{Re}[A e^{i\phi} e^{i\omega t}] = A \cos[\omega t + \phi].$$

Zbrajanje kompleksnih amplituda možemo prikazati u kompleksnoj ravnini. Slika prikazuje slučaj u kojem zbrajamo samo dvije kompleksne amplitude.



Važno je uočiti da zbrajanjem dvaju ili više titranja jednake frekvencije, uz pažljivo podešavanje njihovih amplituda i faznih pomaka, može doći i do potpunog poništavanja rezultantnog titranja.

Slaganje (superpozicija) titranja u ravni (2D): Slika prikazuje tijelo mase m koje se giba u x, y -ravni i koje je dvjema oprugama čije su konstante k_x i k_y povezano s čvrstim uporištima.



Jednadžba gibanja tijela se pri malim otklonima od ravnotežnog položaja svodi na dvije neovisne jednadžbe, $m\ddot{x} = -k_x x$ i $m\ddot{y} = -k_y y$, čija su rješenja harmonička titranja,

$$x[t] = A_x \cos[\omega_x t + \phi_x], \quad y[t] = A_y \cos[\omega_y t + \phi_y],$$

a frekvencije su dane izrazima

$$\omega_x^2 = \frac{k_x}{m}, \quad \omega_y^2 = \frac{k_y}{m}.$$

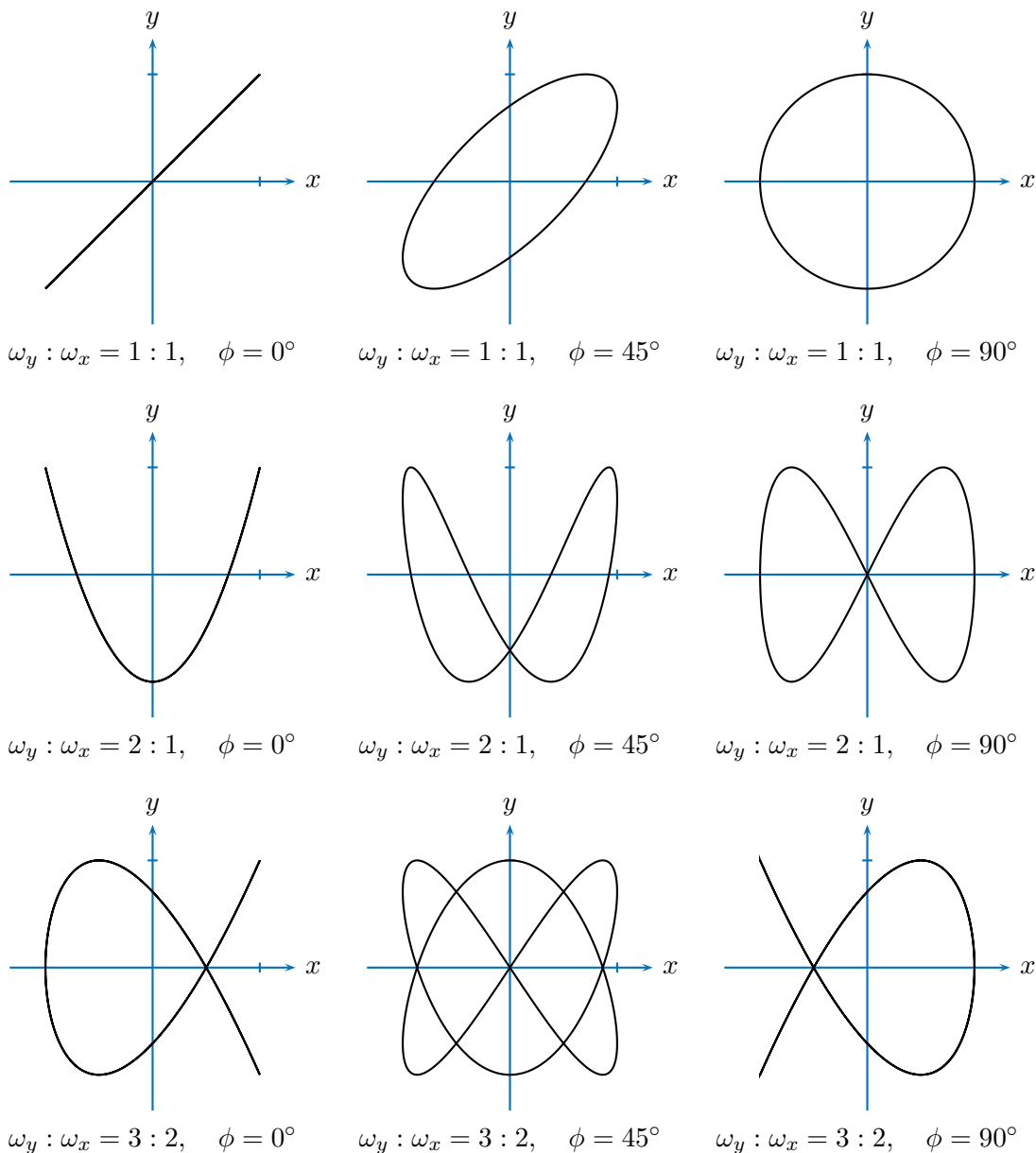
Kad su frekvencije međusobno jednake, putanja tijela je elipsa, odnosno u posebnom slučaju kružnica ili dio pravca. Kad se frekvencije odnose kao cijeli brojevi, gibanje tijela je periodičko, što znači da je putanja zatvorena, a ima oblik tzv. **Lissajousove krivulje**. U suprotnom, putanja tijela nije zatvorena krivulja.

Primjer 6.7.3: Lissajousove krivulje

Slike prikazuju Lissajousove krivulje nastale slaganjem titranja

$$x[t] = \cos \omega_x t \quad \text{i} \quad y[t] = \cos[\omega_y t - \phi]$$

za nekoliko cjelobrojnih omjera frekvencija ω_x i ω_y te različitih iznosa faznog kašnjenja ϕ titranja u y -smjeru u odnosu na titranje u x -smjeru.



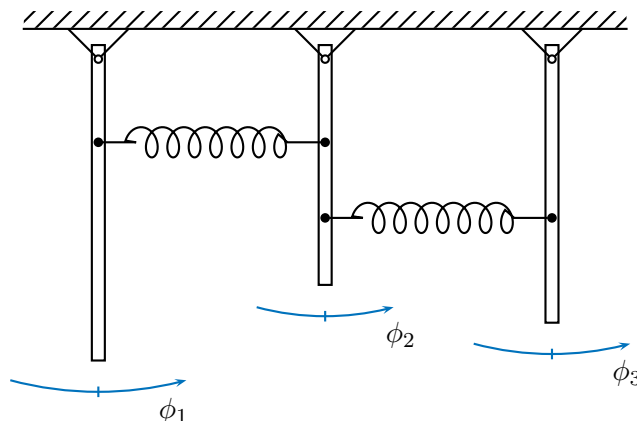
Treći po redu graf u prvom redu je kružnica koju dobivamo kad su frekvencije jednake, a fazni pomak među titranjima je 90° , što znači da imamo $x[t] = \cos \omega t$ i $y[t] = \sin \omega t$.

Prvi po redu graf u drugom redu nastaje superpozicijom titranja $x[t] = \cos \omega t$ u x -smjeru te $y[t] = \cos 2\omega t$ u y -smjeru. U ovom jednostavnom slučaju putanju tijela možemo napisati kao $y = \cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = \cos^2 \omega t - (1 - \cos^2 \omega t) = 2 \cos^2 \omega t - 1 = 2x^2 - 1$.

U općenitom slučaju, Lissajousove krivulje nije moguće napisati u obliku $y = f[x]$.

6.8 Vezani oscilatori

Stupnjevi slobode vezanih oscilatora: Među dvama oscilatorima ili između više njih mogu djelovati sile uslijed kojih oni ne titraju neovisno jedan o drugom, već se gibaju na znatno složeniji način. Slika prikazuje ravnotežni položaj sustava triju njihala povezanih oprugama. Otklonimo li bilo koje njihalo iz ravnotežnog položaja i pustimo li ga u gibanje, sva tri njihala će se početi gibati.



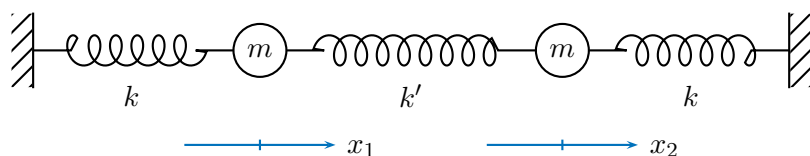
Za sustav vezanih oscilatora, poput prikazanog, kažemo da ima tri stupnja slobode jer su potrebne tri koordinate kako bismo opisali njegovo gibanje. Ovdje su to kutevi otklona ϕ_1 , ϕ_2 i ϕ_3 .

Vlastiti modovi i frekvencije titranja: U sustavu vezanih oscilatora s N stupnjeva slobode postoji N modova (načina) titranja koji su posebni po tome što u određenom modu titranja svi stupnjevi slobode oscilatora harmonički titraju jednakom frekvencijom. Zovemo ih vlastitim modovima titranja sustava, a pripadajuće frekvencije zovemo vlastitim frekvencijama. Pronalaženje vlastitih modova titranja zadanog sustava vezanih oscilatora može biti vrlo složen matematički problem koji ovdje ne obrađujemo.

Općenito gibanje sustava vezanih oscilatora može se prikazati kao superpozicija titranja vlastitih modova danog sustava. Pri tome svaki mod titra svojom amplitudom i početnom fazom.

Primjer 6.8.1: Longitudinalno titranje dviju masa povezanih oprugom

Slika prikazuje sustav s dva stupnja slobode u kojem ćemo pronaći njegova dva vlastita moda titranja.



Sustav se sastoji od dvaju tijela mase m koja su oprugama konstante k vezana s čvrstim uporištima te od opruge konstante k' kojom su tijela vezana međusobno. Razmotrit ćemo titranje tijela duž osi na kojoj u ravnotežnom stanju leže opruge. Takvo titranje zovemo uzdužnim ili longitudinalnim titranjem, dok poprečno ili transversalno titranje sličnog sustava s dva stupnja slobode razmatramo u idućem primjeru. Longitudinalne otklone tijela od njihovih ravnotežnih položaja opisujemo koordinatama x_1 i x_2 . Zbog simetrije sustava (mase dvaju tijela i konstante dviju bočnih opruga su jednake) nalaženje dvaju vlastitih modova titranja ovog sustava vrlo je jednostavno.

- Prvi vlastiti mod titranja koji prepoznamo u ovom sustavu je onaj u kojem tijela titraju jednakom amplitudom u fazi jedno s drugim (to znači $x_1 = x_2$). Pri takvom titranju središnja opruga ne mijenja svoju duljinu te je frekvencija titranja jednaka onoj ona koju bismo imali kad bismo središnju oprugu zamijenili krutom bezmasenom šipkom. Tada bi tijelo ukupne mase $2m$ titralo na dvjema oprugama konstante k , što je istovjetno titranju tijela mase $2m$ na jednoj opruzi

konstante $2k$. Frekvencija titranja u ovom vlastitom modu je

$$\omega_A = \sqrt{k/m},$$

a otklone tijela možemo napisati kao

$$x_1[t] = x_2[t] = A \cos[\omega_A t + \phi_A],$$

gdje je A amplituda, a ϕ_A je početna faza titranja.

- Drugi vlastiti mod je onaj u kojem tijela titraju jednakom amplitudom u *protufazi* ($x_1 = -x_2$). Kad se bočne opruge rastegnu za Δx i djeluju silom iznosa $k\Delta x$, središnja se opruga sabije za $2\Delta x$ i djeluje silom iznosa $2k'\Delta x$. Slijedi da je iznos ukupne sile koja djeluje na tijela $(k + 2k')\Delta x$ te da tijela u ovom modu titraju frekvencijom

$$\omega_B = \sqrt{(k + 2k')/m}.$$

Otklone pri titranju u protufazi možemo opisati izrazom

$$x_1[t] = -x_2[t] = B \cos[\omega_B t + \phi_B],$$

gdje je B je amplituda, a ϕ_B je početna faza.

Općenito gibanje ovog sustava možemo shvatiti kao istovremeno titranje njegovih dvaju vlastitih modova. Na osnovu gornjih izraza možemo napisati

$$\begin{aligned} x_1[t] &= A \cos[\omega_A t + \phi_A] + B \cos[\omega_B t + \phi_B], \\ x_2[t] &= A \cos[\omega_A t + \phi_A] - B \cos[\omega_B t + \phi_B]. \end{aligned}$$

Razmotrit ćemo zanimljivu pojavu koju opažamo u ovom sustavu kad je opruga koja povezuje oscilatore "vrlo slaba", tj. kad vrijedi $k' \ll k$. U tom slučaju frekvencije dvaju vlastitih modova međusobno vrlo su bliske. Otklonimo li prvo tijelo na udaljenost a od ravnotežnog položaja i pustimo li ga u gibanje, pri čemu drugo tijelo miruje u svom ravnotežnom položaju, početni uvjeti gibanja su

$$x_1[0] = a, \quad \dot{x}_1[0] = 0, \quad x_2[0] = 0, \quad \dot{x}_2[0] = 0.$$

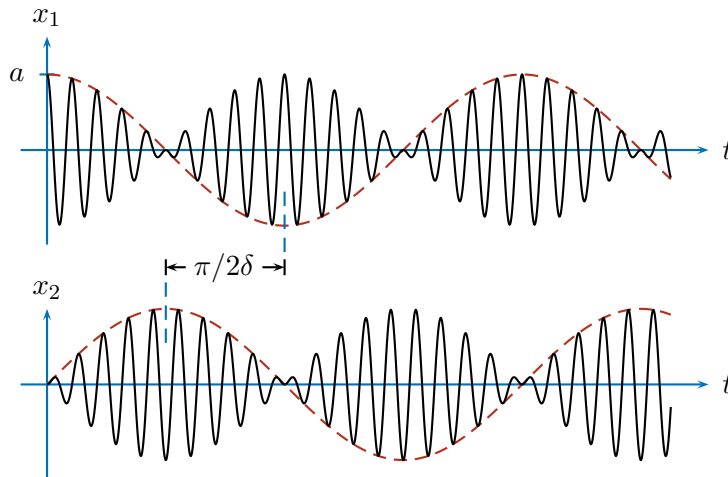
Oni su zadovoljeni uz početne faze $\phi_A = \phi_B = 0$ i amplitude $A = B = a/2$. Takvim odabirom dobivamo

$$x_1[t] = \frac{a}{2} \cos \omega_A t + \frac{a}{2} \cos \omega_B t, \quad x_2[t] = \frac{a}{2} \cos \omega_A t - \frac{a}{2} \cos \omega_B t.$$

Uočavamo da su ta titranja zbroj dvaju titranja jednakih amplituda i bliskih frekvencija, što dovodi do pojave udara. Uz oznake $\bar{\omega} = (\omega_A + \omega_B)/2$ i $\delta = (\omega_A - \omega_B)/2$ te uz postupak sličan onome iz primjera 6.7.1 o superpoziciji titranja dobivamo

$$x_1[t] = a \cos \delta t \cos \bar{\omega} t, \quad x_2[t] = a \sin \delta t \sin \bar{\omega} t.$$

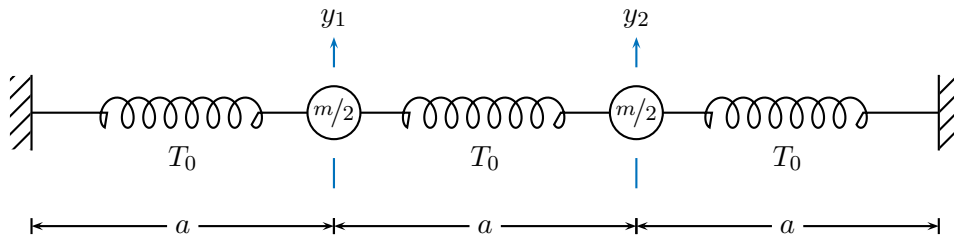
Slika prikazuje takvo titranje.



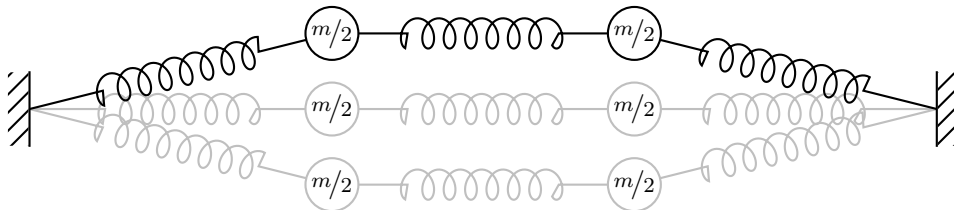
Uočavamo da energija titranja oscilatora koji smo početno pokrenuli postupno prelazi na suprotni oscilator, sve dok u potpunosti ne prijeđe na njega. Nakon toga se uloge oscilatora zamjenjuju, energija se postupno vraća na prvi oscilator, i tako u nedogled.

Primjer 6.8.2: Transverzalno titranje dviju masa na trima napetim oprugama

Odredit ćemo frekvencije vlastitih modova pri transversalnom titranju "lanca" koji se sastoji od dvaju jednakih sitnih tijela ukupne mase m i triju jednakih opruga zanemarive mase. Lanac je razapet među dvama čvrstim uporištima razmaknutim za $\ell = 3a$, a napetost lanca u ravnotežnom stanju je T_0 . (Transverzalno titranje sustava s jednim tijelom i dvije napete opruge razmatrali smo u primjeru 6.4.2.) Transverzalne otklone tijela od njihovih ravnotežnih položaja opisujemo koordinatama y_1 i y_2 , pri čemu $y_1 = y_2 = 0$ odgovara ravnotežnom stanju lanca.



Najprije razmatramo vlastiti mod u kojem tijela titraju jednakom amplitudom u fazi ($y_1 = y_2$).



U ovom modu titranja središnja opruga je svo vrijeme okomita na smjer titranja tijela, a to znači da je y -komponenta sile kojom ona djeluje na tijela svo vrijeme jednaka nuli. Bočne opruge djeluju na tijela silama čije y -komponente možemo izraziti kao $-(y_{1,2}/a)T_0$, pri čemu smo pretpostavili da je kutni otklon opruga od njihovih ravnotežnih položaja dovoljno malen da sinus kuta možemo zamijeniti tangensom te da je povećanje napetosti bočnih opruga do kojeg dolazi zbog njihovog produljenja također zanemarivo.

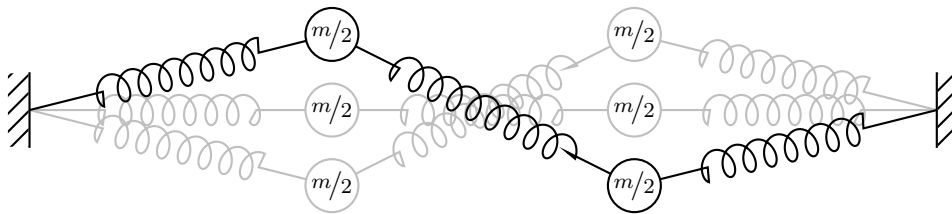
Jednadžbu gibanja tijela možemo napisati kao

$$\frac{m}{2} \ddot{y}_{1,2} = -\frac{y_{1,2}}{a} T_0,$$

a nakon dijeljenja jednadžbe s $m/2$ nalazimo kvadrat frekvencije titranja

$$\omega_A^2 = \frac{2T_0}{ma} = \frac{6T_0}{m\ell}.$$

Kad tijela titraju u protufazi ($y_1 = -y_2$), y -komponentama sila koje djeluju na tijela uz napetosti bočnih opruga doprinosi i središnja opruga.



Zanemarujući povećanje napetosti opruga izazvano njihovim produljenjem te zamijenjujući sinus kuta njegovim tangensom, jednadžba gibanja tijela glasi

$$\frac{m}{2} \ddot{y}_{1,2} = -\frac{y_{1,2}}{a} T_0 - \frac{y_{1,2}}{a/2} T_0,$$

a nakon dijeljenja s $m/2$ i sređivanja desne strane nalazimo kvadrat frekvencije titranja

$$\omega_B^2 = \frac{6T_0}{ma} = \frac{18T_0}{m\ell}.$$

Kad bismo razmatrali transversalno titranje lanca koji se sastoji od N tijela i $N + 1$ napetih opruga, pronašli bismo N vlastitih modova. U limesu $N \rightarrow \infty$, ti modovi odgovarali bi stojnim harmonijskim valovima koji titraju na napetoj žici (vidi poglavlje 7.5).

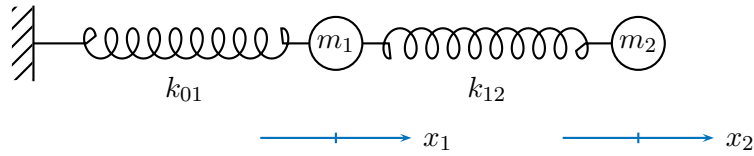
Nalaženje vlastitih modova (harmonijsko probno rješenje): Kad sustav vezanih oscilatora nije simetričan poput onih koje smo razmatrali u primjerima 6.8.1 i 6.8.2, pri nalaženju vlastitih modova potrebno je primijeniti složenije matematičke postupke. Jedan od mogućih postupaka polazi od probnog rješenja koje sadrži zahtjev da u vlastitom modu titranja svi stupnjevi slobode sustava titraju istom frekvencijom. Ako su x_i , $i = 1, \dots, N$, koordinate kojima opisujemo sustav s N stupnjeva slobode, probno rješenje pišemo u obliku

$$\hat{x}_i[t] = \hat{A}_i e^{i\omega t} \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.40)$$

gdje je ω nepoznata vlastita frekvencija, a kompleksne amplitude $\hat{A}_i = A_i e^{i\phi_i}$ sadrže informaciju o odnosima amplituda te o faznim odnosima titranja pojedinih stupnjeva slobode. Uvrštavanjem probnog rješenja u (diferencijalne) jednadžbe gibanja sustava dolazimo do sustava tzv. karakterističnih (algebarskih) jednadžbi koje nam, uspijemo li ga riješiti, daju N rješenja za vlastitu frekvenciju ω te za odgovarajuće amplitude A_i i faze ϕ_i . Svako rješenje karakterističnih jednadžbi odgovara jednom vlastitom modu titranja.

Primjer 6.8.3: *Vlastiti modovi titranja općenitog dvostrukog oscilatora*

Naći ćemo vlastite modove longitudinalnog titranja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slici.



Longitudinalne otklone tijela od njihovih ravnotežnih položaja opisujemo koordinatama x_1 i x_2 . Jednadžbe gibanja tijela su

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_{01}x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \quad \text{i} \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k_{12}(x_2 - x_1).$$

Uvrstimo li u jednadžbe gibanja probno rješenje oblika

$$x_1 = \hat{A}_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = \hat{A}_2 e^{i\omega t},$$

nalazimo karakteristične jednadžbe

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 \hat{A}_1 &= -k_{01} \hat{A}_1 + k_{12}(\hat{A}_2 - \hat{A}_1), \\ -m_2 \omega^2 \hat{A}_2 &= -k_{12}(\hat{A}_2 - \hat{A}_1), \end{aligned}$$

čija dva rješenja odgovaraju vlastitim modovima titranja. Označimo li vlastite modove s A i B te koristeći oznake

$$\kappa = \frac{k_{01}}{k_{12}}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \Delta = (1 + \kappa - \mu)^2 + 4\mu,$$

kvadrata frekvencija titranja i omjere kompleksnih amplituda možemo izraziti kao

$$\omega_{A,B}^2 = \frac{k_{12}}{2m_1} (1 + \kappa + \mu \mp \sqrt{\Delta}), \quad (\hat{A}_2/\hat{A}_1)_{A,B} = \frac{1}{2} (1 + \kappa - \mu \pm \sqrt{\Delta}).$$

S obzirom da vrijedi $\Delta > 0$, može se pokazati da također vrijede odnosi

$$0 < \omega_A^2 < \omega_B^2 \quad \text{i} \quad (\hat{A}_2/\hat{A}_1)_B < 0 < (\hat{A}_2/\hat{A}_1)_A.$$

U vlastitom modu A imamo manju od dvije vlastite frekvencije te pozitivan omjer \hat{A}_2/\hat{A}_1 , što znači da u tom modu tijela titraju u fazi. U vlastitom modu B sustav titra većom frekvencijom, a negativan omjer \hat{A}_2/\hat{A}_1 nam govori da tijela titraju u protufazi.

Zadaci

Z.6.1: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4$ cm. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6$ cm. Odredi periode kojima bi taj uteg titrao (a) kad bi bio obješen na oprugu 1 i kad bi bio obješen na oprugu 2, (b) kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i (c) kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno.

$$\begin{aligned} \text{Rj: (a) } T_1 &= 2\pi\sqrt{\Delta x_1/g} \simeq 0.401 \text{ s}, T_2 = 2\pi\sqrt{\Delta x_2/g} \simeq 0.491 \text{ s}, \\ \text{(b) } T_s &= 2\pi\sqrt{\Delta x_1 + \Delta x_2/g} \simeq 0.634 \text{ s}, \\ \text{(c) } T_p &= 2\pi\sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2/g(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \simeq 0.311 \text{ s} \quad [\text{P}] \end{aligned}$$

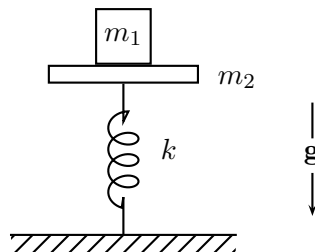
Z.6.2: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra duž uspravne osi. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_{\min} = 3$ N i $T_{\max} = 7$ N, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase.)

$$\text{Rj: } m = (T_{\max} + T_{\min})/2g \simeq 0.510 \text{ kg}, A = g\omega_0^{-2}(T_{\max} - T_{\min})/(T_{\max} + T_{\min}) \simeq 9.94 \text{ cm} \quad [\text{P}]$$

Z.6.3: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmonijskom titranju je $v_{\max} = 5 \text{ cm s}^{-1}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_{\max} = 10 \text{ cm s}^{-2}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0 . Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

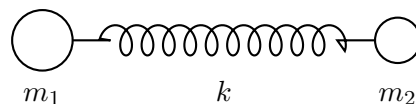
$$\text{Rj: } \omega_0 = a_{\max}/v_{\max} = 2 \text{ rad s}^{-1}, A = v_{\max}^2/a_{\max} = 2.5 \text{ cm}, v_{x=A/2} = v_{\max}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33 \text{ cm s}^{-1} \quad [\text{P}]$$

Z.6.4: Tijelo mase $m_1 = 3$ kg položeno je na tijelo mase $m_2 = 2$ kg koje je s pomoću opruge konstante $k = 5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$ oslonjeno o čvrsto tlo. Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2 .



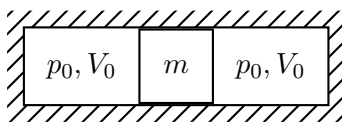
$$\text{Rj: } A_{\max} = g(m_1 + m_2)/k \simeq 0.98 \text{ cm} \quad [\text{P}]$$

Z.6.5: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k . Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



$$\text{Rj: } \omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2} \quad [\text{P}]$$

Z.6.6: U nepomičnom, s obje strane zatvorenom, toplinski izoliranom cilindru, nalazi se pomični klip mase $m = 3$ kg i površine poprečnog presijeka $S = 10 \text{ cm}^2$ (vidi sliku). Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina idealnog plina adijabatske konstante $\gamma = 1.4$. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i plin s druge strane klipa iste su temperature te svaki zauzimaju obujam $V_0 = 5 \text{ dm}^3$ pri tlaku od $p_0 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$. Pretpostavljajući da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, a to znači da vrijedi $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja. (Za $\epsilon \ll 1$ može se koristiti razvoj $(1 \pm \epsilon)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha\epsilon$.)



$$\text{Rj: } \omega_0 = \sqrt{2p_0\gamma S^2/mV_0} \simeq 6.11 \text{ rad s}^{-1}$$

Z.6.7: Čestica mase m giba se u x, y -ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k(x\hat{\mathbf{x}} + 4y\hat{\mathbf{y}})$, a puštena je u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tijekom gibanja.

$$\text{Rj: } y[x] = y_0(2x^2/x_0^2 - 1), v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0 \text{ za } x_0^2/16y_0^2 \leq 1, v_{\max} = \omega_0 x_0 \text{ za } x_0^2/16y_0^2 > 1$$

Z.6.8: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = Ae^{-\delta t} \cos[\omega t + \phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (početnu fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

$$\text{Rj: } \phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0], A = x_0 \sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$$

Z.6.9: Čestica prigušeno titra duž x -osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20 \text{ cm}$, $x_2 = 5.6 \text{ cm}$ i $x_3 = 12.8 \text{ cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

$$\text{Rj: } x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4 \text{ cm} \quad [\text{P}]$$

Z.6.10: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1 \text{ cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica prijeći do "konačnog zaustavljanja".

$$\text{Rj: } s = x_0(-1 + 2/(1 - e^{-\lambda/2})) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20 \text{ m}$$

Z.6.11: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440 \text{ Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4 \text{ s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3 \text{ s}$.

$$\text{Rj: } \Delta f = f' - f = (\ln 2)^2 (\tau_{1/2}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}) / 8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7} \text{ Hz}$$

Z.6.12: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0 . Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tijekom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

$$\text{Rj: } x_{\max} = v_0/e\omega_0, v_{\max} = v_0/e^2$$

Z.6.13: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120 \text{ t}$ ispaljuje projektil mase $m_p = 1 \text{ t}$ brzinom iznosa $v_p = 800 \text{ m s}^{-1}$. Ovjes topa dopušta topu da se on, po ispaljenju projektila, pomakne unazad i time ublaži djelovanje "povratnog udarca" na konstrukciju broda. Ovjes je podešen tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_{\max} = 1.5 \text{ m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

$$\text{Rj: } t = eMx_{\max}/m_p v_p \simeq 0.612 \text{ s}, F_{\max} = 2(m_p v_p)^2/eMx_{\max} \simeq 2.61 \times 10^6 \text{ N}$$

Z.6.14: Kuglica mase $m = 12 \text{ g}$ i polumjera $r = 1 \text{ cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kutna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4 \text{ Pa s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

$$\begin{aligned} \text{Rj: } \lambda &= 2\pi((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1)^{-1/2} \simeq 3.63, \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44 \text{ rad s}^{-1}, \\ \omega_{\text{rez.}} &= \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Z.6.15: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m . Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom ω_p . Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tijekom gibanja ovog sustava.

$$\text{Rj: } \omega_0^2 = k/m, A = R/|1 - (\omega_p/\omega_0)^2|, (\Delta\ell)_{\max} = R/|1 - (\omega_0/\omega_p)^2|$$

Z.6.16: Kad na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonijska sila amplitude F_p i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_{\text{rez.}}$. Kad na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_p , ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0 . Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_{\text{rez.}}/A_0$.

$$\text{Rj: } \lambda = 2\pi\sqrt{(1 - \sqrt{1 - q^{-2}})/(1 + \sqrt{1 - q^{-2}})}$$

Z.6.17: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200 \text{ kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400 \text{ kg}$ ako se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10 \text{ cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem.)

$$\text{Rj: } \omega_{\text{rez.}} = (M/(M + m))\sqrt{(g/H)(1 - m/M)} \simeq 4.67 \text{ rad s}^{-1}$$

Z.6.18: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H \cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2 \text{ cm}$ je "amplituda", a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onoga koje bi odgovaralo kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem.)

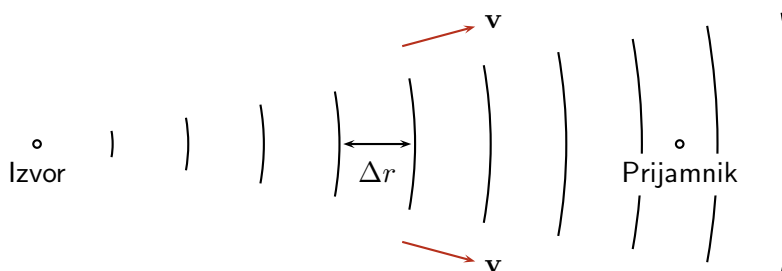
$$\text{Rj: } A_r = (H/2) \left(q^2 / \sqrt{q^2 - 1} \right) \simeq 5.103 \text{ cm}$$

7 Mehanički valovi

Pomaknemo li čestice nekog elastičnog sredstva (materijala) iz njihovog ravnotežnog položaja i pustimo li ih u gibanje, poremećaj ravnoteže se prenosi na susjedne čestice, a s vremenom on može, putujući sredstvom, prevaliti značajne udaljenosti. Pojavu putovanja poremećaja ravnotežnog položaja čestica elastičnim sredstvom zovemo valnim gibanjem ili jednostavno valom. U ovom poglavlju ćemo upoznati transversalni val na napetom užetu, longitudinalni val u tankom štapu ili u fluidu (zvuk), te niz općih svojstava valnih gibanja.

7.1 Općenito o valnom gibanju

Slika prikazuje izvor koji u pravilnim vremenskim razmacima Δt izaziva poremećaj ravnotežnog položaja čestica elastičnog sredstva. Taj poremećaj putuje sredstvom brzinom iznosa v .



Valne fronte su zamišljene plohe koje su okomite na smjer putovanja vala i kreću se sredstvom prateći njegovo putovanje. Valne fronte su na gornjoj slici prikazane segmentima kružnica čije je središte u izvoru vala. Udaljenost promatrane valne fronte od izvora iznosi $r = vt$, gdje je v brzina kojom val putuje, odnosno brzina same valne fronte, a t vrijeme koje je proteklo od trenutka u kojem se valna fronta počela putovati. Razmak među susjednim valnim frontama je $\Delta r = v \Delta t$.

Harmonijski val: Kad izvor harmonijski titra frekvencijom ω izazivajući otklon čestica sredstva od njihovog ravnotežnog položaja koji je razmjerni izrazu $\cos \omega t$, prijamnik u svojoj okolini opaža titranje čestica istom frekvencijom ω . Zbog prostorne udaljenosti r između izvora i prijarnika, prijamnik opaža titranje uz "kašnjenje u vremenu" u iznosu r/v , koje odgovara trajanju putovanja valne fronte od izvora do prijarnika. Slijedi da prijamnik opaža titranje razmjerno izrazu

$$\cos[\omega(t - r/v)] \quad (7.1)$$

koji opisuje prostornu i vremensku ovisnost otklona čestica sredstva od njihovog ravnotežnog položaja izazvanog harmonijskim titranjem izvora. Takav val nazivamo harmonijskim valom.

Intenzitet i amplituda harmonijskog vala: Intenzitet harmonijskog vala je veličina koja govori o količini energije koja u jedinici vremena prolazi jediničnom površinom okomitom na smjer u kojem val putuje, a kako je energija harmonijskog titranja razmjerna kvadratu amplitude titranja, isto vrijedi i za intenzitet vala. Ukupna snaga vala je integral intenziteta vala po površini valne fronte, odnosno u jednostavnom slučaju kad je intenzitet svuda na valnoj fronti jednak, snaga je umnožak intenziteta i ukupne površine valne fronte. Nadalje, pretpostavimo li da izvor titra stalnom amplitudom i frekvencijom te zanemarimo li gubitke mehaničke energije koji su u stvarnosti prisutni, ukupna snaga vala mora biti jednaka na svim valnim frontama, odnosno na jednoj odabranoj valnoj fronti tijekom njena putovanja kroz sredstvo. Na osnovi geometrije sredstva kroz koje val putuje možemo zaključiti sljedeće:

- 3D: Kad val putuje iz nekog malenog izvora jednakom brzinom u svim smjerovima u prostoru, valna fronta je sfera čija je površina razmjerna kvadratu njene udaljenosti od izvora vala. Kako bi ukupna snaga vala bila neovisna o udaljenosti, intenzitet vala u ovom slučaju mora biti obrnuto razmjerni kvadratu udaljenosti od izvora, dok amplituda vala mora biti obrnuto razmjerna samoj udaljenosti,

$$I \propto \frac{1}{r^2}, \quad A \propto \frac{1}{r}.$$

- 2D: Kad val putuje u sredstvu s dvije prostorne dimenzije, kao što je to površina tekućine ili membrana bubnja, površina valne fronte je razmjerna polumjeru kružnice odnosno udaljenosti valne fronte od izvora. Kako bi ukupna snaga bila neovisna o udaljenosti od izvora, intenzitet mora biti obrnuto razmjeran udaljenosti, a amplituda mora biti obrnuto razmjerna korijenu iz udaljenosti,

$$I \propto \frac{1}{r}, \quad A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

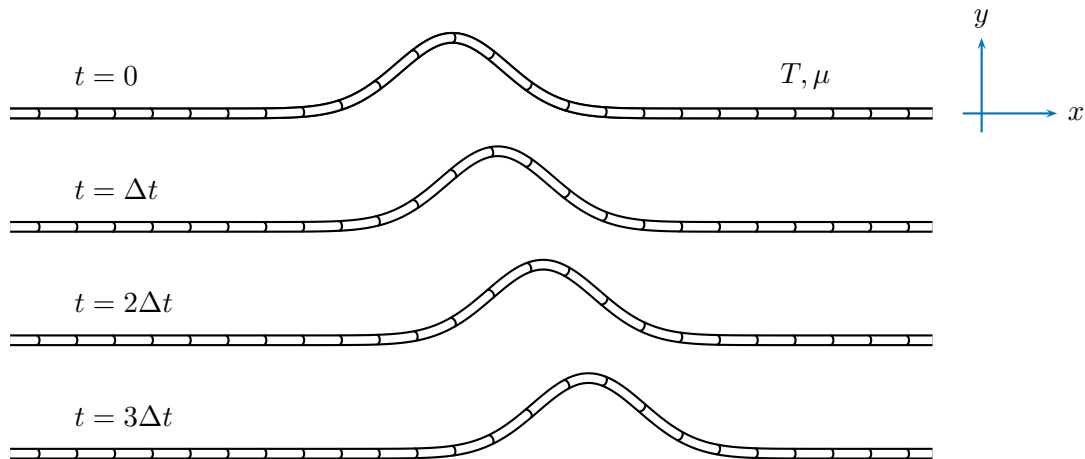
- 1D: Kad val putuje jednodimenzionalnim sredstvom, npr. napetim užetom ili plinom u cijevi, valne fronte pri svim udaljenostima imaju jednaku površinu. U tom su slučaju intenzitet i amplituda vala neovisni o prevaljenoj udaljenosti,

$$I = \text{konst.}, \quad A = \text{konst.}$$

7.2 Transverzalni val na napetom užetu

Transverzalni val je valno gibanje pri kojem se čestice sredstva gibaju u smjeru koji je okomit na smjer u kojem putuje valni poremećaj. Takav val može, na primjer, putovati napetim užetom.

Napeto uže možemo prikazati kao niz elemenata duljine Δx i mase Δm . Veličinu $\mu = \Delta m / \Delta x$ zovemo linijskom gustoćom mase užeta. Uzimamo da je uže u ravnotežnom stanju napeto silom iznosa T . Slika prikazuje transversalni valni poremećaj koji duž takvog užeta putuje s lijeva nadesno. Uže je prikazano u nizu trenutaka u vremenu.



Usporedbom položaja elemenata užeta u uzastopnim trenucima vremena vidi se da oni prilikom prolaska valnog poremećaja nakratko napuštaju svoj ravnotežni položaj, a potom se u njega vraćaju.

Jednadžba gibanja transversalnog vala na napetom užetu (valna jednadžba): Transverzalni otklon elementa užeta od njegovog ravnotežnog položaja možemo opisati funkcijom $y[x, t]$, gdje je x koordinata položaja na užetu, a t je trenutak u vremenu. Primjenom Newtonovog zakona (vidi niže) pokazuje se da funkcija $y[x, t]$ zadovoljava jednadžbu gibanja

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x, t] - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y[x, t] = 0, \quad (7.2)$$

koju još možemo kraće zapisati kao

$$\ddot{y} - v^2 y'' = 0, \quad v^2 = \frac{T}{\mu}, \quad \mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}, \quad (7.3)$$

pri čemu točkice označavaju parcijalno deriviranje po vremenu, crtice označavaju parcijalno deriviranje po x -koordinati, T je napetost, a μ je linijska gustoća mase užeta. Vidjet ćemo da parametar $v = \sqrt{T/\mu}$ odgovara brzini kojom valni poremećaj putuje užetom.

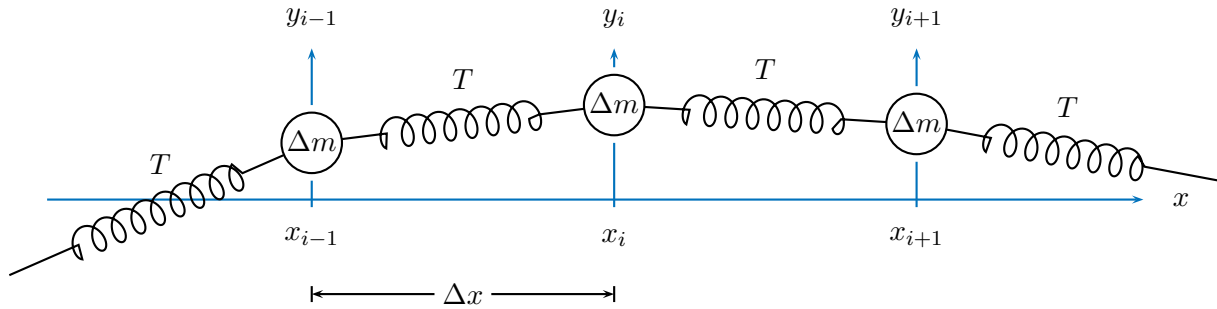
Putujući val kao opće rješenje valne jednadžbe: Bilo koja funkcija koordinate položaja x i vremena t koju možemo napisati u obliku

$$y[x, t] = f[x \pm vt], \quad (7.4)$$

gdje je f funkcija jedne varijable, rješenje je valne jednadžbe (7.3).

Tvrđnju dokazujemo uvrštavanjem (7.4) u (7.3). Odaberemo li pozitivan predznak u argumentu funkcije, $f[x + vt]$, valni poremećaj čiji je oblik određen odabirom funkcije f kreće se ulijevo brzinom iznosa v . Odaberemo li negativan predznak, $f[x - vt]$, isti se valni poremećaj kreće brzinom iznosa v udesno. Kako bi rješenje imalo smisla, funkcija f mora biti "razumnog oblika", što znači da mora biti glatka i ograničena.

Izvod valne jednadžbe za transversalni val na napetom užetu: Uže linijske gustoće mase μ i napetosti T prikazujemo kao beskonačni "lanac čestica" koje su razmaknute za Δx , čije su mase $\Delta m = \mu \Delta x$ i koje su povezane oprugama čija je napetost T . Pretpostavljamo da se čestice mogu gibati u transversalnom smjeru, a otklon i -te čestice od njenog ravnotežnog položaja označavamo s y_i . Slika prikazuje dio takvog lanca čije su čestice otklonjene iz položaja ravnoteže.



Jednadžba gibanja i -te čestice može se napisati kao

$$\Delta m \ddot{y}_i = T \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + T \frac{y_{i-1} - y_i}{\Delta x}, \quad (7.5)$$

gdje su članovi na desnoj strani transversalne komponente sila kojima opruga s lijeve i opruga s desne strane i -te čestice djeluju na i -tu česticu. Pri računanju transversalnih kompenata tih sila pretpostavljamo da su kutevi koje opruge zatvaraju s x -osi maleni, što nam dopušta da sinuse tih kuteva zamijenimo tangensima te da zanemarimo povećanja napetosti opruga izazvana njihovim produljenjem. Koristeći $\Delta m = \mu \Delta x$ jednadžba gibanja se može sažetije napisati kao

$$\ddot{y}_i = \frac{T}{\mu} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \quad (7.6)$$

a pretpostavimo li da se transversalni otklon bilo koje čestice lanca može opisati glatkom funkcijom $y[x, t]$ čiji su argumenti x -koordinata čestice i vrijeme t , gornja jednadžba gibanja može se napisati u obliku

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x_i, t] = \frac{T}{\mu} \frac{y[x_i + \Delta x, t] - 2y[x_i, t] + y[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}. \quad (7.7)$$

Prepoznamo da je limes razlomka na desnoj strani kad $\Delta x \rightarrow 0$ druga (parcijalna) derivacija funkcije

$y[x, t]$ po x -koordinati u točki $x = x_i$.⁷ Time dobivamo upravo jednadžbu gibanja (7.3).

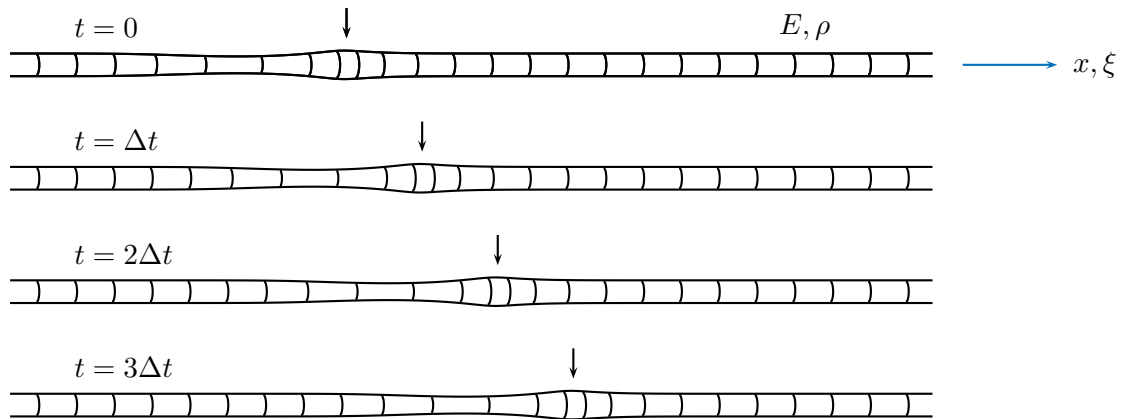
7.3 Longitudinalni val u tankom štapu ili u fluidu

Longitudinalni val je val koji putuje u istom smjeru u kojem se odvija i titranje čestica oko njihovog ravnotežnog položaja. Longitudinalni val može putovati, na primjer, duž tankog elastičnog štapa ili fluidom (plinom ili stlačivom tekućinom) u krutoj cijevi.

Tanki elastični štap načinjen od materijala gustoće ρ i Youngovog modula elastičnosti E možemo shvatiti kao niz elemenata jednake ravnotežne duljine Δx . Ako je S površina poprečnog presijeka štapa, masa elementa štapa je $\Delta m = \rho S \Delta x$, a pri longitudinalnom sažimanju i rastezanju element štapa se ponaša kao opruga konstante

$$k = \frac{SE}{\Delta x}. \quad (7.8)$$

(više o tzv. vlačnom naprezanju materijala vidi u poglavlju 10.2). Slika prikazuje elemente štapa duž kojeg longitudinalni val putuje udesno u nizu trenutaka u vremenu.



Longitudinalni val dovodi do pomaka elemenata štapa te do njihovog izobličenja. Strelica pokazuje područje štapa u kojem su njegovi elementi skraćeni i zadebljani, a u blizini tog područja s njegove lijeve strane nalazi se područje u kojem su elementi štapa produljeni i stanjeni. Prolaskom vala elementi štapa se vraćaju u svoj ravnotežni položaj te poprimaju svoju ravnotežnu duljinu i debljinu.

Jednadžba gibanja longitudinalnog vala (valna jednadžba) u tankom elastičnom štapu: Longitudinalni otklon čestice tankog elastičnog štapa od njenog ravnotežnog položaja opisujemo funkcijom $\xi[x, t]$, gdje je x koordinata ravnotežnog položaja čestice, a t je vrijeme. Označimo li s x' koordinatu položaja te čestice u nekom trenutku, možemo napisati

$$x \rightarrow x' = x + \xi[x, t]. \quad (7.9)$$

⁷Prva derivacija funkcije $f[x]$ u točki $x = x_0$ definirana je s

$$f'[x_0] = \left. \frac{d}{dx} f[x] \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + \Delta x/2] - f[x_0 - \Delta x/2]}{\Delta x}.$$

Druge derivacije funkcije $f[x]$ u $x = x_0$ je prema tome

$$f''[x_0] = \left. \frac{d}{dx} f'[x] \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'[x_0 + \Delta x/2] - f'[x_0 - \Delta x/2]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[x_0 + \Delta x] - 2f[x_0] + f[x_0 - \Delta x]}{(\Delta x)^2}.$$

Kad se radi o tankom štapu načinjenom od elastičnog materijala Youngovog modula E i gustoće ρ , funkcija $\xi[x, t]$ zadovoljava jednadžbu gibanja

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi[x, t] - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi[x, t] = 0 \quad (7.10)$$

koju zovemo valnom jednadžbom longitudinalnog vala, a skraćeno ju zapisujemo kao

$$\ddot{\xi} - v^2 \xi'' = 0, \quad v^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (7.11)$$

U ravnotežnom stanju štapa može biti pristuna napetost T_0 bilo kojeg predznaka, ali ona se ne pojavljuje u jednadžbi gibanja jer ne utječe na transversalno valno gibanje u štapu.

Uočavamo da je valna jednadžba longitudinalnog vala matematički istovjetna valnoj jednadžbi transversalnog vala (7.3), a to znači da je val koji putuje brzinom iznosa v ,

$$\xi[x, t] = f[x \pm vt], \quad (7.12)$$

njeno opće rješenje.

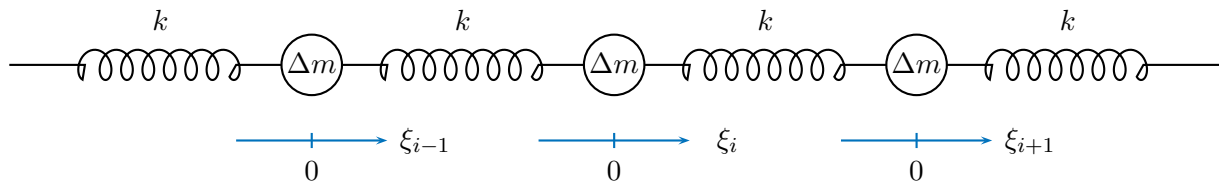
Longitudinalni val u fluidu: Gibanje longitudinalnog vala u dugačkom stupcu fluida, npr. u krutoj cijevi, slično je gibanju longitudinalnog vala u tankom štapu, ali s tom razlikom što poprečno širenje i sažimanje stupca fluida nije prisutno. Element fluida duljine Δx i mase $\Delta m = \rho S \Delta x$, gdje je ρ gustoća fluida i S je površina poprečnog presijeka stupca fluida, ponaša se poput opruge čija je konstanta

$$k = \frac{SB}{\Delta x}, \quad (7.13)$$

gdje je B volumni modul stlačivosti fluida (više o tlačnom naprezanju materijala vidi u poglavlju 10.3). Valna jednadžba poprima oblik (7.11), pri čemu je brzina vala dana izrazom

$$v^2 = \frac{B}{\rho}. \quad (7.14)$$

Izvod valne jednadžbe longitudinalnog vala: Elastični štap ili stupac stlačivog fluida gustoće ρ i površine poprečnog presijeka S duž kojeg putuje longitudinalni val prikazujemo kao lanac čestica povezanih oprugama. Uzimamo da su čestice u ravnotežnom stanju razmaknute za Δx što znači da je njihova masa $\Delta m = \rho S \Delta x$. Opruge kojima su čestice povezane tada imaju konstantu k danu izrazom (7.8) ili izrazom (7.13), ovisno o tome radi li se o štapu ili o stupcu fluida. Otklon i -te čestice od njenog ravnotežnog položaja opisujemo koordinatom ξ_i . Slika prikazuje dio takvog lanca u njegovom ravnotežnom stanju.



Jednadžba gibanja i -te čestice glasi

$$\Delta m \ddot{\xi}_i = -k(\xi_i - \xi_{i+1}) - k(\xi_i - \xi_{i-1}), \quad (7.15)$$

gdje članovi na desnoj strani proizlaze iz sila kojima opruga s desne i opruga s lijeve strane i -te čestice djeluju na i -tu česticu. U lancu osim sila izazvanih longitudinalnim pomacima čestica može biti prisutna i ravnotežna sila napetosti lanca T_0 (ona može biti pozitivna ili negativna), međutim ona se ne pojavljuje

u jednadžbi gibanja jer na česticu lanca djeluje jednakom jakošću s lijeva i s desna pa se njeno djelovanje poništava. Koristeći $\Delta m = \rho S \Delta x$ te izraz (7.8) za konstantu opruge (alternativno može se koristiti (7.13)) gornju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\ddot{\xi}_i = \frac{E}{\rho} \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \quad (7.16)$$

a pretpostavimo li da se otklon čestice od njenog ravnotežnog položaja može opisati glatkom funkcijom $\xi[x, t]$, gdje je x koordinata ravnotežnog položaja čestice, a t je vrijeme, jednadžba gibanja poprima oblik

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi[x, t] = \frac{E}{\rho} \frac{\xi[x_i + \Delta x, t] - 2\xi[x_i, t] + \xi[x_i - \Delta x, t]}{(\Delta x)^2}. \quad (7.17)$$

Prepoznamo li da je razlomak na desnoj strani u limesu kad $\Delta x \rightarrow 0$ druga parcijalna derivacija funkcije $f[x, t]$ po koordinati x u točki $x = x_i$, dobivamo jednadžbu gibanja (7.11).

Sila i tlak pri longitudinalnom valnom gibanju: Silu F_+ koja djeluje s lijeve strane na česticu mase Δm možemo izraziti s

$$F_+ = -T_0 - k(\xi_i - \xi_{i-1}) = -T_0 - \frac{SE}{\Delta x}(\xi_i - \xi_{i-1}) = -T_0 + SE \xi'[x, t], \quad (7.18)$$

gdje je T_0 ravnotežna napetost lanca, a konstantu opruge k smo izrazili korištenjem relacije (7.8) koja vrijedi za element tankog štapa. U posljednjem koraku smo prepoznali da u limesu $\Delta x \rightarrow 0$ omjer $(\xi_i - \xi_{i-1})/\Delta x$ odgovara derivaciji funkcije $\xi[x, t]$ po x -koordinati. Podijelimo li tu silu površinom poprečnog presjeka štapa S dobivamo tlak

$$p = \frac{F_+}{S} = -\frac{T_0}{S} - E \xi'[x, t] = p_0 - E \xi'[x, t], \quad (7.19)$$

gdje tlak $p_0 = -T_0/S$ proizlazi iz ravnotežne napetosti lanca (pozitivna ravnotežna napetost T_0 podrazumijeva negativan ravnotežni tlak p_0), dok član $-E \xi'[x, t]$ opisuje promjenu tlaka u odnosu na ravnotežnu vrijednost izazvanu longitudinalnim valnim gibanjem.

Izraz za silu (7.18) i izraz za tlak (7.19) izvedeni su korištenjem relacije (7.8) koja vrijedi za element tankog štapa. Da smo koristili relaciju (7.13) koja vrijedi za element fluida u cijevi dobili bismo izraze istog oblika, ali bi se na mjestu Youngovog modula E nalazio modul stlačivosti fluida B .

7.4 Superpozicija valova i refleksija na čvrstom i slobodnom kraju sredstva

Princip superpozicije valova: Bilo koje valno gibanje koje je dopušteno u nekom sredstvu, može se u istom sredstvu odvijati istovremeno s bilo kojim drugim valnim gibanjem koje je u tom sredstvu dopušteno. Istovremenu prisutnost različitih valnih gibanja u istom sredstvu zovemo superpozicijom valova.

Matematičkim rječnikom, bilo kojem rješenju valne jednadžbe oblika (7.3) ili (7.11) možemo dodati (superponirati) bilo koje drugo njeno rješenje, a da zbroj rješenja i dalje bude rješenje iste valne jednadžbe. To svojstvo je posljedica linearnosti valnih jednadžbi.

Princip superpozicije omogućuje nam da niz valnih pojava objasnimo na jednostavan način. Među njima su i pojave refleksije vala na učvršćenom i na slobodnom kraju sredstva.

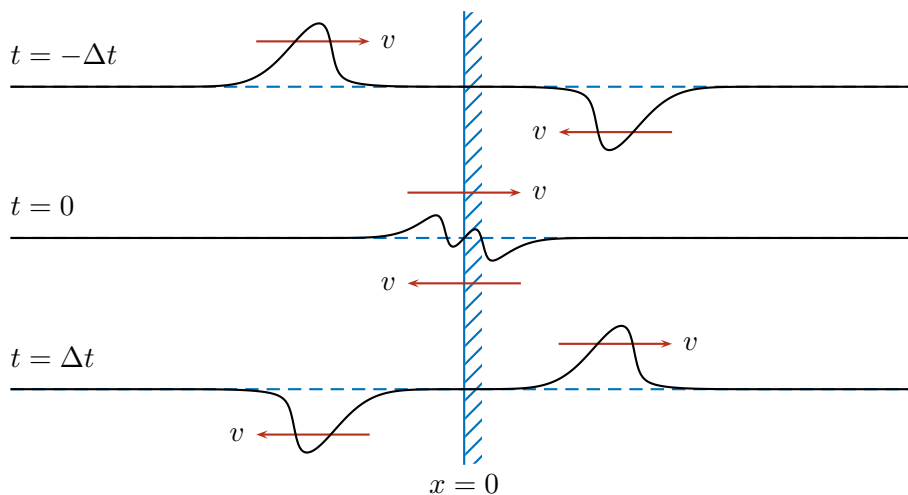
Refleksija vala na čvrstom kraju sredstva: Ponašanje transversalnog vala opisanog funkcijom $y[x, t]$ pri čvrstom kraju sredstva u $x = x_0$ opisujemo tzv. **rubnim uvjetom čvrstog kraja** koji glasi

$$y[x, t] \Big|_{x=x_0} = y[x_0, t] = 0, \quad (7.20)$$

a odražava zahtjev da je čestica pri čvrstom kraju sredstva nepomična. Ponašanje longitudinalnog vala pri čvrstom kraju sredstva opisujemo rubnim uvjetom istog oblika uz zamjenu $y[x, t]$ s $\xi[x, t]$. Transverzalni ili longitudinalni val koji se giba kroz područje $x < 0$ brzinom iznosa v udesno prema čvrstom kraju sredstva u $x = 0$ možemo opisati funkcijom $f[x - vt]$. Sam po sebi taj val ne zadovoljava rubni uvjet čvrstog kraja, ali pozivajući se na princip superpozicije možemo mu dodati val $-f[-(x + vt)]$ koji je istog oblika, ali ima suprotni predznak i giba se u suprotnom smjeru. Time nastaje val

$$y[x, t] = f[x - vt] - f[-(x + vt)] \quad (7.21)$$

koji u svim trenucima vremena zadovoljava rubni uvjet čvrstog kraja (7.20) u $x = 0$. Slika prikazuje superpoziciju (7.21) u nekoliko uzastopnih trenutaka u vremenu.



Promatramo li val (7.21) u području $x < 0$, možemo ga shvatiti kao superpoziciju upadnog vala $f[x - vt]$ i vala $-f[-(x + vt)]$ koji je nastao refleksijom u čvrstom kraju pri $x = 0$. Uočavamo da refleksijom nastaje val istog oblika, ali suprotnog predznaka, u odnosu na upadni val.

Refleksija vala na slobodnom kraju sredstva: Kad se radi o transversalnom valu na napetom užetu, slobodan kraj užeta podrazumijeva njegovo slobodno gibanje u transversalnom smjeru, dok u longitudinalnom smjeru kraj užeta mora biti (na neki način) učvršćen kako bi se osigurala napetost užeta T neophodna za transversalno valno gibanje. Pritom nagib funkcije $y[x, t]$ koja opisuje otklon užeta pri slobodnom kraju mora biti jednak nuli jer bi u protivnom na element mase $\Delta m \rightarrow 0$ koji se nalazi na samom kraju užeta djelovala transversalna sila približnog iznosa $Ty'[x, t]$, a time bi taj element poprimio akceleraciju $Ty'[x, t]/\Delta m$

koja teži u beskonačno, a to nije dopušteno. Zbog toga ponašanje transversalnog vala pri slobodnom kraju sredstva u $x = x_0$ opisujemo tzv. **rubnim uvjetom slobodnog kraja** koji glasi

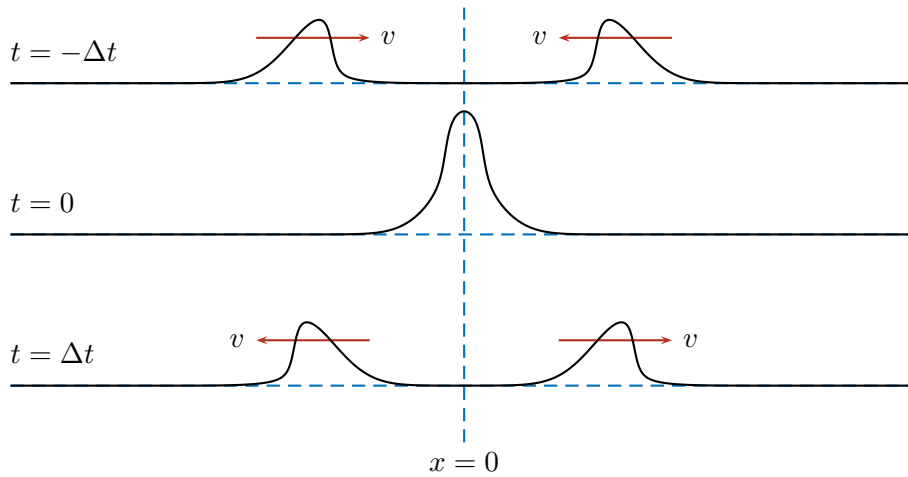
$$\left. \frac{\partial y[x, t]}{\partial x} \right|_{x=x_0} = y'[x_0, t] = 0. \quad (7.22)$$

Kad se radi o longitudinalnom valu, rubni uvjet slobodnog kraja ima nepromijenjen oblik uz zamjenu $y[x, t]$ s $\xi[x, t]$. On također proizlazi iz opažanja da akceleracija čestice mase $\Delta m \rightarrow 0$ na slobodnom kraju sredstva ne može biti beskonačna. Sila koja djeluje na tu česticu dana je izrazom (7.18) te je akceleracija čestice $-E\xi'[x, t]/\Delta m$, a kako bi u limesu $\Delta m \rightarrow 0$ akceleracija ostala konačna, mora vrijediti $\xi'[x, t] \rightarrow 0$.

Val $f[x - vt]$ koji se kroz područje $x < 0$ giba udesno prema slobodnom kraju sredstva koji se nalazi pri $x = 0$ sam po sebi ne zadovoljava rubni uvjet slobodnog kraja (7.22). Međutim, dodamo li tom valu val $f[-(x + vt)]$ koji je istog oblika i predznaka, a giba se u suprotnom smjeru, dobivamo val

$$y[x, t] = f[x - vt] + f[-(x + vt)] \quad (7.23)$$

koji u svim trenucima vremena zadovoljava rubni uvjet slobodnog kraja (7.22) u $x = 0$.



Promatramo li val (7.23) u području $x < 0$, možemo ga shvatiti kao superpoziciju upadnog vala $f[x - vt]$ i reflektiranog vala $f[-(x + vt)]$. Uočavamo da pri refleksiji na slobodnom kraju reflektirani val zadržava oblik i predznak upadnog vala.

7.5 Putujući i stojni harmonijski val

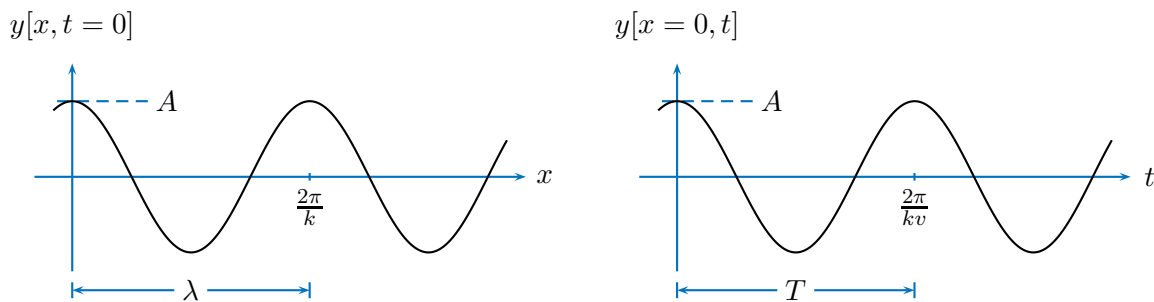
Putujući harmonijski val je putujući val u kojem čestice elastičnog sredstva harmonijski titraju, bilo u transverzalnom, bilo u longitudinalnom smjeru.

Amplituda, valni broj i faza putujućeg harmonijskog vala: Kao funkciju f koja opisuje oblik vala koji duž x -osi putuje brzinom iznosa v odabiremo trigonometrijsku funkciju \cos . Transverzalni otklon čestice pri koordinati x u trenutku t pri titranju putujućeg transverznog harmonijskog vala možemo napisati kao

$$y[x, t] = f[x \pm vt] = A \cos[k(x \pm vt) + \phi], \quad (7.24)$$

gdje je $A > 0$ amplituda titranja, k je tzv. valni broj, a ϕ je uobičajeni fazni pomak. Čitav argument funkcije \cos zovemo fazom harmonijskog vala. Na istovjetan način napisali bismo i pomak $\xi[x, t]$ pri longitudinalnom valnom gibanju.

Valna duljina i frekvencija harmonijskog vala: Pri titranju harmonijskog vala (7.24) možemo prikazati ovisnost otklona čestice o prostornoj koordinati x u odabranom trenutku vremena, a možemo prikazati i vremensku ovisnost otklona odabrane čestice. Lijeva slika prikazuje harmonijski val (7.24) u trenutku $t = 0$, a desna slika prikazuje titranje čestice koja se nalazi pri $x = 0$. Zbog jednostavnosti smo uzeli fazni pomak jednak nuli, $\phi = 0$.



Kako duž prostorne osi, tako i u vremenu, uočavamo očekivanu periodičnost. Period duž prostorne osi zovemo valnom duljinom harmonijskog vala,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (7.25)$$

gdje je k valni broj. Period $T = 2\pi/kv$ duž vremenske osi povezujemo s frekvencijom titranja čestice ω ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = kv. \quad (7.26)$$

Konačno, eliminacijom valnog broja k iz (7.25) i (7.26) dobivamo relaciju

$$\lambda\omega = 2\pi v \quad (7.27)$$

koja povezuje valnu duljinu λ , frekvenciju ω i iznos brzine v harmonijskog vala.

Primjer 7.5.1: Različiti načini izražavanja faze harmonijskog vala

Fazu harmonijskog vala $k(x \pm vt) + \phi$ moguće je napisati na niz različitih načina što može biti vrlo zbunjujuće. Na primjer, uzmemo li zbog jednostavnosti $\phi = 0$,

$$k(x \pm vt) = kx \pm \omega t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right).$$

Veličinu ω koju u ovom tekstu zovemo jednostavno frekvencijom, morali bismo punim imenom zvati kutnom frekvencijom (engl. *angular frequency*). Ona govori o kutu prevaljenom u jedinici vremena, čemu odgovara mjerna jedinica 1 rad s^{-1} . Za iskazivanje iste veličine koristi se i veličina koju također

zovemo frekvencijom, obično ju obilježavamo simbolom f ili ν (grčko slovo “ni”), a koja govori o broju ciklusa koje oscilator napravi u jedinici vremena. Ako je period titranja $T = 2\pi/\omega$ vrijedi $f = 1/T$, a mjerna jedinica za frekvenciju f je $1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$. Dvije frekvencije povezane su relacijom

$$\omega = 2\pi f,$$

što znači da fazu harmonijskog vala možemo susresti i u obliku

$$k(x \pm vt) = kx \pm 2\pi ft = 2\pi (x/\lambda \pm ft).$$

Općenito, pri čitanju izraza koji opisuju fazu harmonijskog vala potrebno je, uz mnogo pažnje, iz konteksta razotkriti točno značenje svih simbola.

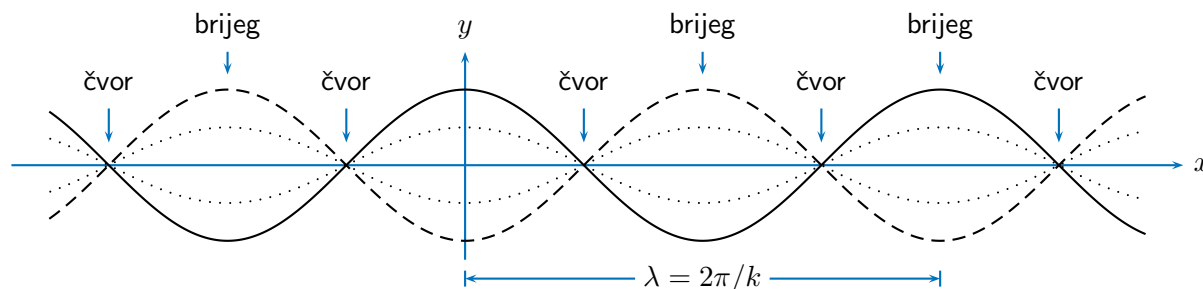
Stojni harmonijski val: Kad se dva transversalna ili longitudinalna harmonijska vala jednake frekvencije i amplitude putuju istim sredstvom u suprotnim smjerovima, njihovom superpozicijom nastaje gibanje u kojem više ne prepoznamo gibanje vala u jednom ili u drugom smjeru, već isključivo transversalno ili longitudinalno titranje čestica oko njihovog ravnotežnog položaja. Takvo gibanje zovemo stojnim harmonijskim valom.

Superpoziciju dvaju harmonijskih valova valne duljine $\lambda = 2\pi/k$, frekvencije ω i amplitude $A/2$, koji putuju u suprotnim smjerovima, možemo napisati kao

$$y[x, t] = \frac{A}{2} \cos[kx - \omega t] + \frac{A}{2} \cos[kx + \omega t] = \dots = A \cos kx \cos \omega t. \quad (7.28)$$

U konačnom izrazu, faktor $\cos \omega t$ govori o tome da čestice titraju frekvencijom ω , dok faktor $A \cos kx$ govori o tome da amplituda titranja ovisi o x -koordinati.

Valna duljina, čvorovi i brjegovi stojnog harmonijskog vala: Slika prikazuje otklon čestice od ravnotežnog položaja pri titranju transversalnog stojnog vala opisanog izrazom (7.28). Puna crta prikazuje otklon čestica u trenutku $t = 0$, a isprekidane crte prikazuju otklon u nekim drugim trenucima vremena.



Uočavamo da je valna duljina stojnog vala, $\lambda = 2\pi/k$, jednaka valnoj duljini putujućih harmonijskih valova koji superpozicijom tvore stojni val. Zatim uočavamo da postoje položaji pri kojima čestice niti u kojem trenutku ne napuštaju svoj ravnotežni položaj. Takve točke zovemo čvorovima stojnog vala. Točke u kojima čestice titraju najvećom amplitudom zovemo brjegovima stojnog vala.

Stojni harmonijski val u sredstvu s čvrstim krajevima: Bilo koji čvor stojnog vala možemo shvatiti kao čvrst kraj sredstva u kojemu taj stojni val titra. Odaberemo li dva čvora stojnog vala i učvrstimo li sredstvo u tim točkama, stojni val može nastaviti titrati u području između tih točaka na nepromijenjen način, dok sredstvo izvan tog područja možemo ukloniti. Na taj smo način dobili stojni val koji titra u sredstvu konačne duljine L s čvrstim krajevima. Kad je riječ o transversalnom valu, vjerojatno najpoznatiji primjer ovakvog gibanja je titranje gitarske žice.

S obzirom na to da je udaljenost među čvorovima stojnog vala cjelobrojni umnožak polovice valne duljine

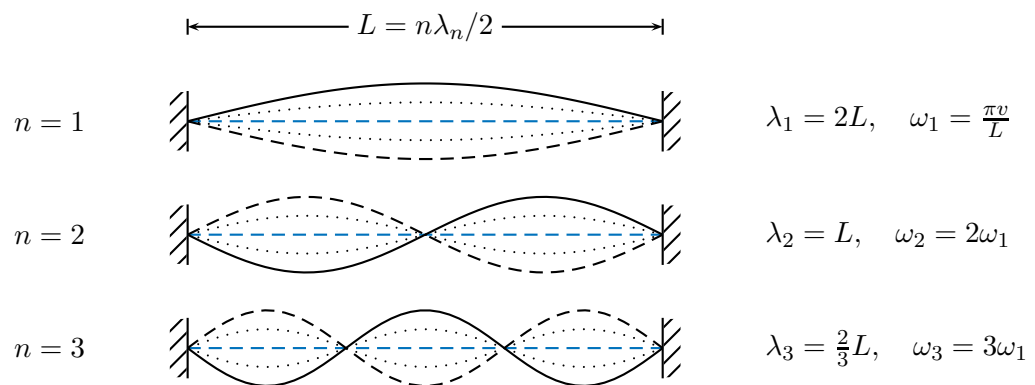
(vidi gornju sliku), nameće se uvjet

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.29)$$

koji povezuje duljinu sredstva L i valnu duljinu stojnog vala λ . Na osnovu tog uvjeta možemo odrediti dopuštene valne duljine λ_n i frekvencije titranja ω_n stojnog vala u sredstvu zadane duljine L s čvrstim krajevima. Možemo pisati

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = n \frac{\pi v}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.30)$$

gdje smo koristili relaciju (7.27) koja povezuje valnu duljinu λ i frekvenciju ω harmonijskog vala koji brzinom v putuje u danom sredstvu. Slika prikazuje titranje stojnog harmonijskog vala u sredstvu s čvrstim krajevima.



Primjer 7.5.2: Ugađanje i napetost gitarske žice

Gitara se obično ugađa tako da njena najtanja žica (1E) titra frekvencijom $f = 330 \text{ Hz}$, uobičajena duljina titrajućeg dijela žice na gitari (razmak među čvrstim uporištima) iznosi $L = 25.5''$, a mnogi gitaristi odabiru najtanju žicu promjera $2r = 0.01''$ ($1'' = 1 \text{ in} = 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}$). Pretpostavljajući da je žica napravljena od čelika (možemo uzeti $\rho = 7700 \text{ kg m}^{-3}$) procijenit ćemo silu kojom je ona napeta.

U osnovnom modu titranja ($n = 1$) vrijedi

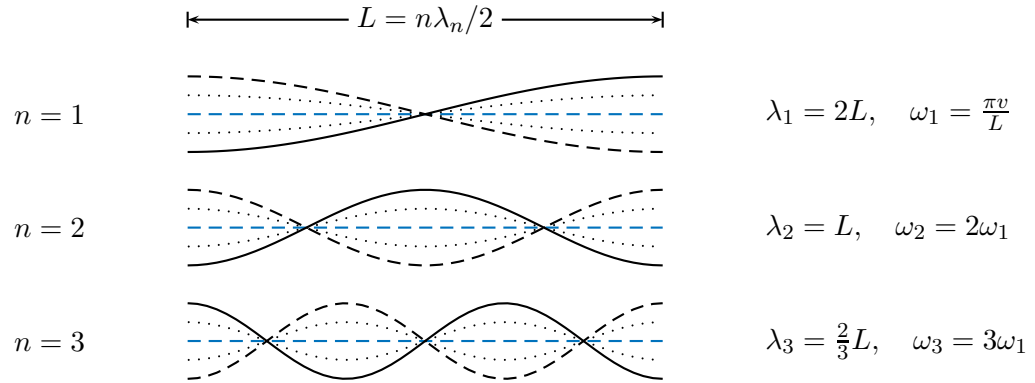
$$2\pi f = \omega_1 = \frac{\pi v}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho r^2 \pi}}.$$

gdje smo koristili (7.30) i izraz za brzinu vala na napetom užetu (7.3), nakon čega smo linijsku gustoću mase napisali kao $\mu = \rho S = \rho r^2 \pi$. Iz gornjeg izraza slijedi napetost žice

$$\begin{aligned} T &= 4\pi r^2 \rho L^2 f^2 \\ &= 4\pi \times (1.27 \times 10^{-4})^2 \times (7700 \text{ kg m}^{-3}) \times (0.648 \text{ m})^2 \times (330 \text{ s}^{-1})^2 \\ &\simeq 71 \text{ N}. \end{aligned}$$

Stojni harmonijski val u sredstvu sa slobodnim krajevima: Kad se radi o slobodnom kraju elastičnog sredstva podrazumijeva se da u njemu ne dolazi do naprezanja sredstva (materijala). To znači da se čestice na samom kraju sredstva i njima susjedne čestice otklanjaju podjednako odnosno da funkcija koja opisuje otklon čestica na samom kraju mora imati prostornu derivaciju sve vrijeme jednaku nuli. S obzirom na to da je taj uvjet je zadovoljen pri svakom brijegu stojnog vala, slijedi da bilo koji brijeg stojnog vala možemo poistovjetiti sa slobodnim krajem sredstva u kojem titra stojni val. Nadalje, s obzirom na to da je udaljenost među brjegovima stojnog vala cjelobrojni umnožak polovice valne duljine (vidi raniju sliku), a isto vrijedi

i za udaljenost među čvorovima stojnog vala, izrazi (7.29) i (7.30) koji povezuju duljinu sredstva (razmak među krajevima) s valnom duljinom i frekvencijom stojnog vala vrijede bez izmjena i ovdje.



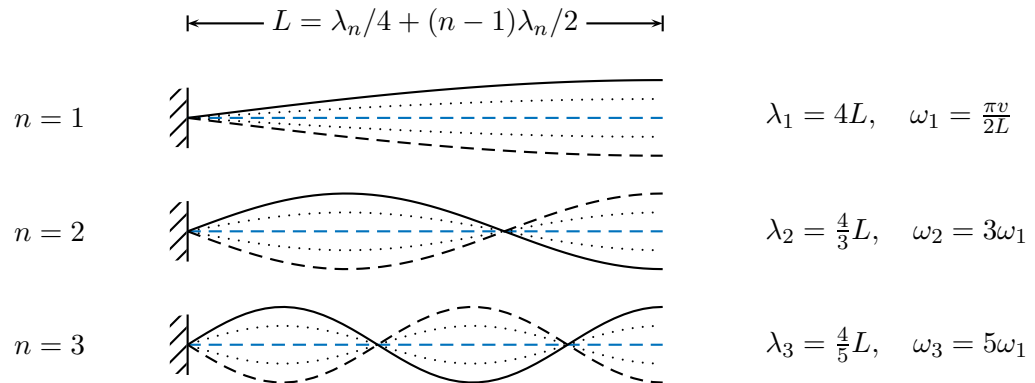
Stojni harmonijski val u sredstvu s jednim čvrstim i jednim slobodnim krajem: Čvor stojnog vala možemo shvatiti kao čvrst kraj sredstva, a brijeg možemo shvatiti kao slobodni kraj sredstva u kojem on titra. Udaljenost L između čvora i brijega stojnog vala valne duljine λ općenito se može napisati kao

$$L = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.31)$$

Slijedi da u sredstvu duljine L s jednim čvrstim i jednim slobodnim krajem može titrati stojni val čija su valna duljina i frekvencija dane izrazima

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi v}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.32)$$

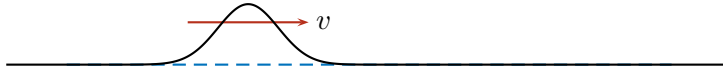
gdje je v brzina kojom val putuje sredstvom. Slika prikazuje otklon čestica pri titranju stojnog vala u sredstvu s jednim čvrstim i jednim slobodnim krajem.



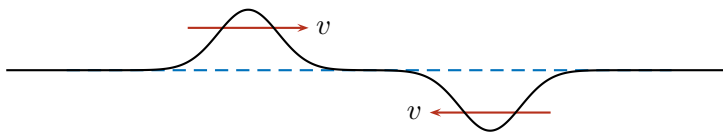
7.6 Energija i snaga vala

Energija vala sastoji se od kinetičke energije čestica koje se gibaju i od elastične potencijalne energije uslijed naprezanja sredstva. Načelo superpozicije valova omogućuje nam da izraz za energiju putujućeg transverzalnog vala na napetom užetu ili longitudinalnog vala u tankom štapu ili u fluidu izvedemo na jednostavan način, računajući samo kinetičku komponentu.

Energija putujućeg vala: Polazimo od vala u kojem je otklon čestica od ravnotežnog položaja dan s $f[x - vt]$, koji putuje udesno, te čiju energiju E želimo odrediti.



Tom valu dodajemo val $-f[x + vt]$ koji putuje u suprotnom smjeru i očekujemo da superpoziciji valova odgovara energija $2E$.



Takvu superpoziciju smo odabrali zato što se u trenutku $t = 0$ otkloni čestica dvaju valova poništavaju, što se jasno vidi iz izraza

$$y[x, t] = f[x - vt] - f[x + vt] \quad (7.33)$$

koji za $t = 0$ daje $y[x, 0] = 0$. S obzirom na to da se u tom trenutku sredstvo nalazi u ravnotežnom stanju, njegova je potencijalna energija jednaka nuli. Slijedi da se ukupna energija superpozicije, $2E$, u tom trenutku sastoji isključivo od kinetičke energije,

$$2E = \int \frac{1}{2} (\dot{y}[x, 0])^2 dm, \quad (7.34)$$

gdje je dm element mase sredstva, a $\dot{y}[x, 0]$ je njegova brzina u trenutku $t = 0$. Brzinu čestica $\dot{y}[x, 0]$ računamo iz izraza (7.33), $\dot{y}[x, t] = \frac{d}{dt}y[x, t] = -vf'[x - vt] - vf'[x + vt]$, što za $t = 0$ daje $\dot{y}[x, 0] = -2vf'[x]$. Konačno, pišući element mase sredstva kao $dm = \mu dx$, gdje je μ linijska gustoća mase sredstva, dobivamo izraz za energiju E putujućeg vala $f[x - vt]$,

$$E = \mu v^2 \int (f'[x])^2 dx. \quad (7.35)$$

Integracija se provodi po čitavom sredstvu ili po onom njegovom dijelu u kojem je prisutno valno gibanje.

Gornje razmatranje vrijedi, kako za transverzalne valove na napetom užetu, tako i za longitudinalne valove u tankom štapu ili u fluidu. Kad se radi o longitudinalnim valovima, linijsku gustoću mase sredstva možemo napisati kao $\mu = \rho S$, gdje je ρ volumna gustoća mase sredstva, a S je površina njegovog poprečnog presjeka. Izraz za energiju vala tada glasi

$$E = \rho S v^2 \int (f'[x])^2 dx. \quad (7.36)$$

Srednja linijska gustoća energije putujućeg harmonijskog vala: Energija putujućeg harmonijskog vala (7.24) može se izraziti s pomoću općeg izraza (7.35), uzmemo li da je $f[x] = A \cos kx$, odnosno $f'[x] = -kA \sin kx$ (zbog jednostavnosti je izostavljen fazni pomak ϕ). Izraz za energiju daje

$$E = \mu v^2 \int (-kA \sin kx)^2 dx = \mu v^2 k^2 A^2 \int \sin^2 kx dx = \mu \omega^2 A^2 \int \sin^2 kx dx, \quad (7.37)$$

gdje je μ linijska gustoća mase sredstva, $\omega = kv$ je frekvencija, a A je amplituda vala. S obzirom na to da je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije jednaka jednoj polovini, srednja linijska gustoća energije tog vala je

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2. \quad (7.38)$$

Kad se radi o longitudinalnom valu, linijsku gustoću mase možemo napisati kao $\mu = \rho S$, gde je ρ volumna gustoća mase sredstva, a S je površina njegovog poprečnog presjeka, pa imamo

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 A^2. \quad (7.39)$$

Srednja snaga putujućeg harmonijskog vala: Ako val putuje brzinom v , smatramo da njegova energija teče sredstvom istom brzinom. Srednju snagu vala definiramo kao srednju količinu energije vala koja u jedinici vremena protječe sredstvom. U intervalu vremena Δt , val prevali udaljenost $\Delta x = v \Delta t$, a toj udaljenosti odgovara srednja energija koju možemo izraziti kao

$$\langle \Delta E \rangle = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \Delta x = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle v \Delta t. \quad (7.40)$$

Slijedi da je srednja snaga putujućeg harmonijskog vala

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta t} = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle v, \quad (7.41)$$

gdje je srednja linijska gustoća energije vala $\langle dE/dx \rangle$ dana izrazima (7.38) ili (7.39).

Primjer 7.6.1: *Konstruktivna i destruktivna interferencija valova*

Srednja snaga superpozicije dvaju putujućih harmonijskih valova koji se razlikuju jedino po početnoj fazi može biti jednaka nuli, a može biti i dvostruko veća od jednostavnog zbroja snaga dvaju valova promatranih zasebno.

Razlog tomu je kvadratična ovisnost snage o amplitudi vala. Pri tzv. konstruktivnoj interferenciji valova, amplituda superpozicije je dvostruko veća od amplituda polaznih valova te je snaga četiri puta veća od snage polaznog vala odnosno dva puta veća od zbrojenih snaga dvaju polaznih valova. Pri destruktivnoj interferenciji valova, amplituda superpozicije jednaka je nuli te je snaga također jednaka nuli.

Ako su valovi opisani izrazima

$$y_1[x, t] = A \cos[kx - \omega t + \phi_1] \quad \text{ i } \quad y_2[x, t] = A \cos[kx - \omega t + \phi_2]$$

njihove srednje snage su, kad ih promatramo zasebno,

$$\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v.$$

Kako bismo izrazili srednju snagu superpozicije tih valova, najprije moramo odrediti njenu amplitudu A_s . Koristeći kompleksan zapis valova imamo

$$\begin{aligned} y_s[x, t] &= y_1[x, t] + y_2[x, t] = A e^{i(kx - \omega t + \phi_1)} + A e^{i(kx - \omega t + \phi_2)} \\ &= A (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) e^{i(kx - \omega t)}, \end{aligned}$$

gdje kompleksnu veličinu $A(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2})$ prepoznavamo kao kompleksnu amplitudu harmonijskog titranja. Realna amplituda superpozicije $A_s > 0$ jest modul kompleksne amplitude. Uz oznaku $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, kvadrat amplitude A_s dobivamo množenjem kompleksne amplitude s njom kompleksno konjugiranom amplitudom,

$$A_s^2 = A^2 (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2})(e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2}) = A^2 (2 + e^{i\Delta\phi} + e^{-i\Delta\phi}) = 2A^2 (1 + \cos \Delta\phi).$$

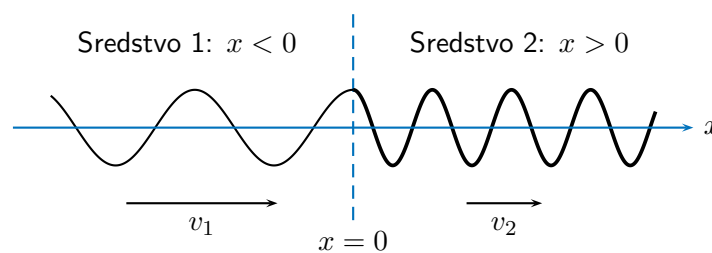
Srednju snagu superpozicije sada možemo izraziti kao

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A_s^2 v = \mu \omega^2 A^2 (1 + \cos \Delta\phi) v.$$

Uočavamo da je za $\Delta\phi = \pi$ (kod valova u protufazi) snaga superpozicije valova jednaka nuli. Takvu pojavu zovemo destruktivnom interferencijom valova. Za $\Delta\phi = 0$ (kod valova u fazi) snaga superpozicije dvostruko je veća od zbroja srednjih snaga $\langle P_1 \rangle$ i $\langle P_2 \rangle$ te takvu pojavu zovemo konstruktivnom interferencijom valova.

7.7 Refleksija i transmisija harmonijskog vala na granici dvaju sredstava

Refleksija i transmisija transversalnog harmonijskog vala na napetom užetu: Slika prikazuje napeto uže čija lijeva strana (sredstvo 1, $x < 0$) ima manju linijsku gustoću mase od njegove desne strane (sredstvo 2, $x > 0$) i duž kojega putuje transversalni harmonijski val. Uže je svuda napeto jednakom napetošću T , a zbog razlike u linijskim gustoćama mase μ_1 s lijeve i $\mu_2 > \mu_1$ s desne strane, brzina $v_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ kojom val putuje lijevom stranom veća je od brzine $v_2 = \sqrt{T/\mu_2}$ kojom val putuje desnom stranom užeta.



Lijevom stranom užeta nadesno putuje tzv. **incidentni ili upadni harmonijski val** te nailazi na granicu sredstava pri $x = 0$. Pritom nastaje tzv. **reflektirani val** koji lijevom stranom putuje nalijevo (unazad) i zajedno s incidentnim valom čini superpoziciju prikazanu na lijevoj strani gornje slike. Na desnoj strani užeta nastaje tzv. **transmitirani val** koji putuje nadesno. Sva tri harmonijska vala titraju istom frekvencijom ω , dok njihovi valni brojevi k_1 s lijeve i k_2 s desne strane užeta nisu međusobno jednaki jer ovise o brzini putovanja vala u sredstvu. Prema relaciji (7.26) imamo

$$k_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}} = \frac{\omega}{v_{1,2}}. \quad (7.42)$$

Incidentni, reflektirani i transmitirani val možemo opisati izrazima

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{A_i \cos[k_1 x - \omega t]} & | & \xrightarrow{A_t \cos[k_2 x - \omega t + \phi_t]} \\ \xleftarrow{A_r \cos[k_1 x + \omega t + \phi_r]} & | & \\ & x = 0 & \end{array}$$

a možemo ih napisati i u kompleksnom obliku kao

$$y_1[x, t] = A_i e^{i(k_1 x - \omega t)} + A_r e^{-i(k_1 x + \omega t + \phi_r)} \quad (x < 0) \quad (7.43)$$

$$y_2[x, t] = A_t e^{i(k_2 x - \omega t + \phi_t)} \quad (x > 0) \quad (7.44)$$

gdje podrazumijevamo da realni dio izraza opisuje stvarni otklon čestica od ravnotežnog položaja, dok imaginarni dio nema izravnu fizičku interpretaciju. S obzirom da predznak imaginarnog argumenta eksponencijalne funkcije ne utječe na njen realni dio, on je u gornjim je izrazima podešen tako da nam omogući da iz svih titrajućih veličina izlučimo zajednički faktor $e^{-i\omega t}$. Izrazi pripremljeni na takav način uvelike će olakšati račun u nastavku.

Spojni uvjeti: Omjere amplituda A_r/A_i i A_t/A_i te fazne pomake ϕ_r i ϕ_t reflektiranog i transmitiranog vala u odnosu na incidentni val određujemo na osnovu tzv. spojnih uvjeta. Riječ je o uvjetima koji proizlaze iz zahtjeva na ponašanje funkcija y_1 i y_2 na samoj granici dvaju sredstava. **Prvi spojni uvjet** proizlazi iz

zahtijeva da uže ostane neprekinuto, odnosno da u limesu $x \rightarrow 0$ odklon superpozicije valova u sredstvu 1 bude jednak odklonu vala u sredstvu 2. Taj uvjet ovdje kompaktno izražavamo kao $y_1[0, t] = y_2[0, t]$ što vodi na

$$A_i + A_r e^{-i\phi_r} = A_t e^{i\phi_t}. \quad (7.45)$$

Drugi spojni uvjet proizlazi iz zahtjeva da ukupna sila koja djeluje na element sredstva mase Δm koji se nalazi na samom spoju teži u nulu kad $\Delta m \rightarrow 0$. U protivnom bi akceleracija tog elementa mase težila u beskonačno, što nije prihvatljivo. S obzirom na to da je napetost užeta s obje strana elementa Δm jednaka, kako bi sila na Δm težila u nulu, u nulu mora težiti i razlika među nagibima užeta s dviju strana spoja. Taj uvjet izražavamo kao jednakost parcijalnih derivacija funkcije $y_{1,2}[x, t]$ po koordinati x kad $x \rightarrow 0$ s lijeve i s desne strane spoja, a što kompaktno zapisujemo kao $y'_1[0, t] = y'_2[0, t]$. Drugi spojni uvjet ovdje vodi na jednakost

$$k_1 A_i - k_1 A_r e^{-i\phi_r} = k_2 A_t e^{i\phi_t}, \quad (7.46)$$

koju korištenjem (7.42) još možemo izraziti kao

$$v_2 A_i - v_2 A_r e^{-i\phi_r} = v_1 A_t e^{i\phi_t}. \quad (7.47)$$

Iz sustava (7.45) i (7.47) možemo izračunati omjere amplituda

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} e^{-i\phi_t}, \quad \frac{A_r}{A_i} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} e^{i\phi_r}. \quad (7.48)$$

Lijeve strane obje jednadžbi su pozitivni realni brojevi te isto mora vrijediti i za desne strane tih jednadžbi. Iz prve jednadžbe izravno zaključujemo da mora vrijediti $e^{-i\phi_t} = 1$, odn. $\phi_t = 0, \pm 2\pi, \dots$, što znači da transmitirani val u $x = 0$ titra u fazi s upadnim valom. U drugoj jednadžbi uočavamo da za $v_2 < v_1$ mora vrijediti $e^{i\phi_r} = -1$, odn. $\phi_r = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$, što znači da reflektirani val u $x = 0$ titra u protufazi s upadnim valom, dok za $v_2 > v_1$ imamo $e^{i\phi_t} = 1$ te reflektirani val u $x = 0$ titra u fazi s upadnim valom.

Korištenjem izraza (7.41) i (7.38) te omjera amplituda iz (7.48) srednju snagu incidentnog, reflektiranog i transmitiranog vala možemo izraziti kao

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_i^2 v_1, \quad (7.49)$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 A_t^2 v_2 = \dots = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} \langle P_i \rangle, \quad (7.50)$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_r^2 v_1 = \dots = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \right)^2 \langle P_i \rangle. \quad (7.51)$$

Lako je uvjeriti se da vrijedi $\langle P_i \rangle = \langle P_r \rangle + \langle P_t \rangle$, što govori o tome da je energija očuvana. Moguće je također definirati koeficijent transmisije snage \mathcal{T} i koeficijent refleksije snage \mathcal{R} kao

$$\mathcal{T} = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2}, \quad \mathcal{R} = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \right)^2, \quad (7.52)$$

gdje vidimo da vrijedi $\mathcal{T} < 1$ i $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$.

Primjer 7.7.1: Specijalni slučajevi refleksije i transmisije vala

Pokazat ćemo da su relacije (7.48) i (7.52) u skladu s od ranije poznatim rezultatima koji opisuju refleksiju vala na čvrstom i na slobodnom kraju sredstva.

- Slučaj $\mu_2 \gg \mu_1$, odn. $v_2 \ll v_1$: Desni dio užeta ima toliko veliku linijsku gustoću mase da se gotovo i ne pomiče. Relacije (7.48) i (7.52) predviđaju

$$A_t \rightarrow 0, \quad A_r \rightarrow A_u, \quad \phi_r = \pi, \quad \mathcal{T} \rightarrow 0, \quad \mathcal{R} \rightarrow 1,$$

što znači da transmitiranog vala nema, a reflektirani val ima amplitudu jednaku upadnom i s njim je u protufazi. Time se osigurava mirovanje kraja užeta te je situacija istovjetna refleksiji vala na čvrstom kraju sredstva.

- Slučaj $\mu_2 = \mu_1$, odn. $v_2 = v_1$: Desni dio užeta ne razlikuje se od lijevog. Relacije (7.48) i (7.52) daju

$$A_t \rightarrow A_u, \quad A_r \rightarrow 0, \quad \mathcal{T} \rightarrow 1, \quad \mathcal{R} \rightarrow 0,$$

što potvrđuje da se refleksija nije dogodila zbog čega nema smisla ni razmatrati fazu ϕ_r .

- Slučaj $\mu_2 \ll \mu_1$, odn. $v_2 \gg v_1$: Desni dio užeta ima toliko malenu linijsku gustoću mase da gotovo ne utječe na transversalno gibanje lijevog dijela užeta, već isključivo osigurava potrebnu napetost. Ovdje dobivamo

$$A_t \rightarrow 2A_u, \quad A_r \rightarrow A_u, \quad \phi_r = 0, \quad \mathcal{T} \rightarrow 0, \quad \mathcal{R} \rightarrow 1.$$

Vidimo da reflektirani val ima amplitudu jednaku upadnom te je s njim u fazi. Snaga transmitiranog vala jednaka je nuli bez obzira na to što on titra dvostruko većom amplitudom od amplitude upadnog vala. Ova situacija istovjetna je refleksiji vala na slobodnom kraju sredstva.

7.8 Zvuk i Dopplerova pojava

Zvuk je u fizici sinonim za longitudinalno valno gibanje u čvrstom sredstvu ili u fluidu (u stlačivoj tekućini ili plinu). U užem smislu, kad se misli na zvuk koji čujemo ušima, riječ je o longitudinalnom valu u zraku s frekvencijama unutar područja od približno 20 Hz do približno 20 kHz.

Brzina zvuka u plinu: Pri opisu zvuka opravdano je pretpostaviti da se promjene tlaka i temperature elementa plina odvijaju toliko brzo da između susjednih elemenata plina ne dolazi do značajnog prijenosa toplinske energije. To znači da promjene stanja plina možemo smatrati adijabatskim promjenama, a tada je modul stlačivosti plina dan izrazom

$$B = \kappa p_0, \quad (7.53)$$

gdje je κ tzv. adijabatski koeficijent plina, a p_0 je ravnotežni tlak plina (gornji izraz za B izveden je u poglavlju 10.3, primjer 10.3.2). Iz toga slijedi da je brzina zvuka

$$v_z = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{\kappa p_0/\rho}, \quad (7.54)$$

gdje je ρ gustoća plina. Koristeći jednadžbu stanja idealnog plina $pV = nRT$ i definiciju molarne mase $M = m/n$, brzinu zvuka još možemo izraziti i kao

$$v_z = \sqrt{\kappa RT/M}. \quad (7.55)$$

Primjer 7.8.1: Brzina zvuka u zraku

Brzinu zvuka u zraku pri standardnim uvjetima možemo procijeniti na temelju podatka o atmosferskom tlaku, $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, podatka o gustoći zraka, $\rho = 1.22 \text{ kg m}^{-3}$ (srednja vrijednost na razini mora pri temperaturi 15°C), a s obzirom na to da glavninu zraka čine dvoatomne molekule dušika, možemo koristiti i vrijednost adijabatskog koeficijenta za dvoatomni plin, $\kappa = 7/5 = 1.4$. Iz toga slijedi

$$v_z = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.40 \times (1.01 \times 10^5 \text{ Pa})}{1.22 \text{ kg m}^{-3}}} \simeq 340 \text{ m s}^{-1} \simeq 1220 \text{ km h}^{-1}.$$

Gornjoj i donjoj granici frekvencijskog područja čujnosti odgovaraju valne duljine

$$\lambda_{\min} = \frac{v_z}{f_{\max}} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{20\,000 \text{ Hz}} = 1.7 \text{ cm} \quad \text{i} \quad \lambda_{\max} = \frac{v_z}{f_{\min}} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m}.$$

Amplituda oscilacije tlaka: Pretpostavimo li da plinom putuje zvuk frekvencije ω , pri čemu čestice titraju amplitudom A , odklon čestica od ravnotežnog položaja možemo opisati funkcijom

$$\xi[x, t] = A \cos[kx - \omega t], \quad (7.56)$$

gdje je $k = \omega/v_z$. Relacija (7.19) koja govori o tlačnom naprezanju izazvanom longitudinalnim valom omogućuje nam da titranje tlaka plina $p[x, t]$ oko ravnotežne vrijednosti p_0 izrazimo kao

$$\Delta p[x, t] = p[x, t] - p_0 = -B\xi'[x, t] = BkA \sin[kx - \omega t], \quad (7.57)$$

gdje veličinu BkA prepoznamo kao amplitudu titranja tlaka Δp_{\max} koju još ju možemo izraziti i kao

$$\Delta p_{\max} = BkA = \rho v_z \omega A, \quad (7.58)$$

gdje smo koristili $B = \rho v_z^2$ i $k = \omega/v_z$. U tom izrazu faktor ρv_z ovisi isključivo o svojstvima zraka, dok faktor ωA ovisi o valu.

Intenzitet zvuka je veličina definirana omjerom prosječne snage vala $\langle P \rangle$ i površine poprečnog presjeka S sredstva kojim val putuje. Prosječna snaga longitudinalnog vala dana je izrazima (7.41) i (7.39) koji nam omogućuju da intenzitet zvuka izrazimo kao

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v_z = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2 \rho v_z}. \quad (7.59)$$

U posljednjem smo koraku intenzitet zvuka izrazili s pomoću amplitude titranja tlaka Δp_{\max} te parametara koji ovise isključivo o svojstvu plina.

Razina jakosti buke je veličina definirana izrazom

$$L_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}, \quad (7.60)$$

gdje se za intenzitet I_0 uzima tzv. granica čujnosti koja npr. pri frekvenciji 1 kHz iznosi $10^{-12} \text{ W m}^{-2}$. Mjerna jedinica jakosti buke je 1 dB (decibel).

Primjer 7.8.2: Jakost buke i snaga zvučnika

Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000 \text{ Hz}$, ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Na udaljenosti $r = 30 \text{ m}$ od zvučnika jakost buke iznosi $L_{\text{dB}} = 100 \text{ dB}$. Želimo odrediti srednju snagu kojom zvučnik pobuđuje zrak na titranje.

Najprije, na temelju definicije jakosti buke (7.60), računamo intenzitet zvuka pri udaljenosti r od izvora. Koristeći $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ dobivamo

$$I = I_0 \times 10^{L_{\text{dB}}/10} \simeq 0.01 \text{ W m}^{-2}.$$

Nadalje, s obzirom na to da je val zvuka jednoliko raspoređen po površini koja je jednaka polovini površine sfere polumjera r (gornja hemisfera), imamo $S = 2r^2\pi$, te na osnovi definicije intenziteta (7.59) slijedi da je srednja snaga vala

$$\langle P \rangle = SI = 2r^2\pi I \simeq 56.5 \text{ W}.$$

Tu snagu možemo poistovjetiti sa srednjom snagom kojom djeluje zvučnik.

Zanimljivo je odrediti i amplitudu titranja tlaka Δp_{\max} pri udaljenosti r , gdje koristeći (7.59) dobivamo

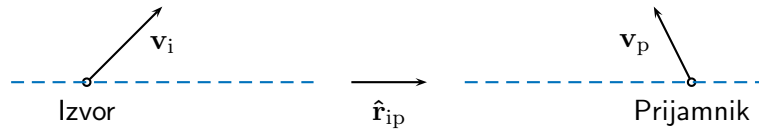
$$\Delta p_{\max} = \sqrt{2\rho v_z I} \simeq 2.88 \text{ Pa},$$

te amplitudu titranja čestica A koju možemo dobiti iz (7.58),

$$A = \frac{\Delta p_{\max}}{\rho v_z \omega} = \frac{\Delta p_{\max}}{2\pi \rho v_z f} \simeq 1.10 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

(Podaci o gustoći zraka i o brzini zvuka u zraku preuzeti su iz ranijeg primjera.)

Dopplerova pojava: U situacijama u kojima se izvor zvuka ili prijamnik gibaju u odnosu na zrak, prijamnik može čuti frekvenciju koja je različita od frekvencije kojom titra izvor. Slika prikazuje položaj izvora zvuka u trenutku u kojem je on emitirao zvuk te položaj prijamnika u kasnijem trenutku u kojem je prijamnik taj zvuk primio. Osim toga, prikazani su vektor brzine izvora \mathbf{v}_i (u odnosu na mirni zrak) u trenutku emisije i vektor brzine prijamnika \mathbf{v}_p (u odnosu na mirni zrak) u trenutku prijama.



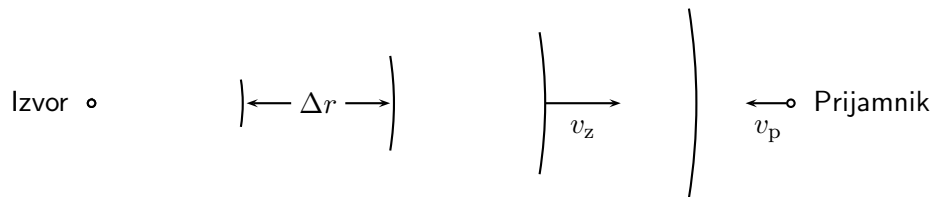
Na slici je također nacrtan jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}_{ip}$ koji je usmjeren od točke u kojoj je signal emitiran prema točki u kojoj je signal, u kasnijem trenutku, primljen. Frekvencija f_i kojom titra izvor i frekvencija f_p koju čuje prijamnik povezane su relacijom

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_p}{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_i}, \quad (7.61)$$

gdje je v_z iznos brzine zvuka u zraku. Zbog svoje složenosti izvod gornje formule nalazi se u dodatku H.

Primjer 7.8.3: Dopplerova pojava pri gibanju prijamnika prema mirnom izvoru

Dopplerovu pojavu najlakše je objasniti na slučaju u kojem izvor miruje, a prijamnik se giba izravno prema njemu.



Ako izvor odašilje signal u pravilnim vremenskim razmacima Δt_i , razmak među valnim frontama koje odgovaraju uzastopno odaslanim signalima je

$$\Delta r = v_z \Delta t_i.$$

Prijamnik čuje signal svaki put kad na svom putu susretne valnu frontu. Zbog gibanja prijamnika prema izvoru, brzina prijamnika u odnosu na valne fronte je $v_z + v_p$, pa vrijeme koje protječe između uzastopnih susreta prijamnika s valnim frontama možemo napisati kao

$$\Delta t_p = \frac{\Delta r}{v_z + v_p}.$$

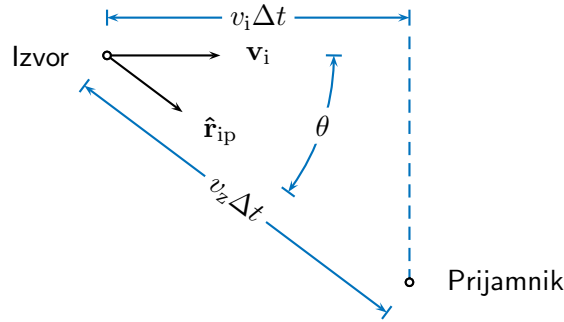
Eliminacijom Δr iz gornjih jednažbi te pišući $f_i = 1/\Delta t_i$ i $f_p = 1/\Delta t_p$ slijedi

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} = \frac{v_z + v_p}{v_z}.$$

Dobiveni izraz je u skladu s (7.61), gdje bismo imali $\mathbf{v}_i = 0$ i $\hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_p = -v_p$, jer su ovdje $\hat{\mathbf{r}}_{ip}$ i \mathbf{v}_p suprotnog smjera.

Primjer 7.8.4: Dopplerova pojava pri prolasku izvora pored prijarnika

Avion leti vodoravno brzinom iznosa $v_i = 0.8 v_z$ pritom proizvodeći zvuk frekvencije $f_i = 100$ Hz. Želimo odrediti frekvenciju koju čuje mirni prijarnik u trenutku u kojem avion prolazi iznad njega. Opisana situacija prikazana je na slici.



U trenutku u kojem se avion nalazi iznad prijarnika, prijarnik čuje zvuk emitiran u trenutku prije toga. Označimo li s Δt interval vremena koje protječe od trenutka emitiranja do trenutka prijama zvuka, avion u tom intervalu prevaljuje vodoravnu udaljenost $v_i \Delta t$, dok zvuk u istom intervalu prevaljuje udaljenost $v_z \Delta t$. Na gornjoj slici te dvije udaljenosti prepoznajemo kao vodoravnu katetu i kao hipotenuzu pravokutnog trokuta. To nam omogućuje da kosinus kuta θ što ga zatvaraju vektor brzine izvora \mathbf{v}_i i vektor $\hat{\mathbf{r}}_{ip}$ usmjeren od točke emitiranja prema točki prijama izrazimo kao

$$\cos \theta = \frac{v_i}{v_z}.$$

Sada možemo iskoristiti formulu (7.61) s pomoću koje dobivamo

$$f_p = f_i \frac{v_z}{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_i} = f_i \frac{v_z}{v_z - v_i \cos \theta} = \frac{f_i}{1 - (v_i/v_z)^2} = \frac{100 \text{ Hz}}{1 - (0.8)^2} \simeq 278 \text{ Hz}.$$

Zadaci

Z.7.1: Uteg mase $M = 2 \text{ kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10 \text{ m}$ i mase $m = 0.5 \text{ kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj užeta.

$$\text{Rj: } \tau = 2\sqrt{\ell/g} \left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m} \right) \simeq 0.477 \text{ s} \quad [\text{P}]$$

Z.7.2: Napetim užetom, brzinom iznosa v putuje transverzalni valni poremećaj koji u trenutku $t = 0$ ima oblik $y[x] = \alpha x e^{-x^2/2b^2}$, gdje su $\alpha > 0$ i $b > 0$ konstante. Skicirajte funkciju $y[x]$ te odredite maksimalne otklone od ravnotežnog položaja koje čestice užeta postižu pri ovom gibanju. Zatim odredite maksimum iznosa brzine koju čestice užeta postižu pri ovom valnom gibanju.

$$\text{Rj: } |y|_{\max} = \alpha b / \sqrt{e}, \quad |v_y|_{\max} = \alpha v \quad [\text{P}]$$

Z.7.3: Užetom napetosti $T = 2 \text{ kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trenutku $t = 0$ opisan s $y[x] = a e^{-x^2/2b^2}$, gdje su $a = 1 \text{ cm}$ i $b = 10 \text{ cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.)

$$\text{Rj: } E = \sqrt{\pi} T a^2 / 2b \simeq 1.772 \text{ J} \quad [\text{P}]$$

Z.7.4: Odredite (a) relativno produljenje gitarske žice iz primjera 7.5.2 u odnosu na stanje u kojem žica nije napeta (za Youngov modul čelika uzmite $E = 2.2 \times 10^{11} \text{ Pa}$). Zatim (b) odredite dodatno relativno produljenje žice koje bismo morali ostvariti u odnosu na njeno napeto stanje iz primjera, želimo li da ona "svira pola tona višim tonom" odnosno da titra frekvencijom koja je viša za faktor $\sqrt[12]{2}$ (dvanaesti korijen iz dva).

$$\text{Rj: (a) } \delta_L = 4\rho \ell^2 f^2 / E \simeq 6.40 \times 10^{-3} \quad (\text{b) } \delta'_L = \delta_L (2^{1/6} - 1) \simeq 7.8 \times 10^{-4}$$

Z.7.5: Čelična žica promjera $d = 1 \text{ mm}$ i duljine $\ell = 3 \text{ m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200 \text{ Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2 \text{ cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$.)

$$\text{Rj: } E = d^2 \pi^3 \rho f^2 A^2 \ell / 4 \simeq 2.90 \text{ J} \quad [\text{P}]$$

Z.7.6: Stojni valovi zvuka titraju u dvjema cijevima s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1 \text{ m}$, a druga cijev je za $\Delta \ell = 1 \text{ mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_z = 340 \text{ m s}^{-1}$)

$$\text{Rj: } f_u = v_z \Delta \ell / 2\ell(\ell + \Delta \ell) \simeq v_z \Delta \ell / 2\ell^2 \simeq 0.170 \text{ Hz} \quad [\text{P}]$$

Z.7.7: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za "pola tona". (Jednu "oktavu" čini dvanaest uzastopnih "polutonova", dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se "polutonova" sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

$$\text{Rj: } m = 12 \times \ln 3 / \ln 2 \simeq 19.02 \quad [\text{P}]$$

Z.7.8: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_i = 60 \text{ km h}^{-1}$ sve vrijeme trubeći frekvencijom $f_i = 250 \text{ Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_p = 120 \text{ km h}^{-1}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_z = 1240 \text{ km h}^{-1}$)

$$\begin{aligned} \text{Rj: (a) } f_p &= f_i (1 + v_p/v_z) / (1 - v_i/v_z) \simeq 288 \text{ Hz}, \\ \text{(b) } f_p &= f_i (1 - v_p/v_z) / (1 + v_i/v_z) \simeq 215 \text{ Hz}, \\ \text{(c) } f_p &= f_i (1 - v_p/v_z) / (1 - v_i/v_z) \simeq 237 \text{ Hz} \quad [\text{P}] \end{aligned}$$

Z.7.9: Dijete se u parkiću pred zgradom igra zviždaljkom koja titra frekvencijom $f = 500 \text{ Hz}$. Dijete je zviždaljku zavezalo pomoću niti i jednoliko je vrti iznad svoje glave po vodoravnoj kružnici polumjera $R = 0.6 \text{ m}$ čineći tri puna kruga u sekundi. Dijete je od zgrade udaljeno $d = 20 \text{ m}$, a s balkona na visini $h = 15 \text{ m}$ gledaju ga roditelji. Odredi najveću i najmanju frekvenciju zvuka zviždaljke koju čuju roditelji. (Kružnicu kojom se giba zviždaljka smatrajte malenom u odnosu na udaljenost djeteta i roditelja. Brzina zvuka u zraku $v_s = 340 \text{ m s}^{-1}$.)

$$\text{Rj: } 483.9 \text{ Hz} \lesssim f' \lesssim 513.7 \text{ Hz} \quad [\text{P}]$$

Z.7.10: Izvor zvuka koji titra frekvencijom f_i i prijamnik nalaze se u istoj točki sve do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počinje gibati duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a , a prijamnik ostaje na mjestu. Odredi frekvenciju zvuka koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

$$\text{Rj: } f_p(t) = f_i / \sqrt{1 + 2at/v_z} \quad [\text{P}]$$

8 Mehanika krutog tijela

Stvarna tijela se pod djelovanjem sila gibaju te u većoj ili manjoj mjeri mijenjaju svoj oblik. Kad u mehanici, zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je neko tijelo toliko čvrsto da promjene njegovog oblika možemo zanemariti, kažemo da se radi o krutom tijelu. U ovom poglavlju upoznajemo osnovne zakone gibanja krutog tijela.

8.1 Definicija i stupnjevi slobode krutog tijela

Kruto tijelo je tijelo nepromjenjivog oblika. Smatramo da vanjske sile koje na njega djeluju mogu izazvati gibanje tijela kao cjeline, ali ne i promjene njegovog oblika. Shvatimo li kruto tijelo kao sustav čestica, podrazumijevamo da je nepromjenjivost njegova oblika osigurana djelovanjem unutarnjih (međučestičnih) sila koje sprječavaju promjene udaljenosti među česticama. Masu tijela i položaj njegovog središta mase možemo opisati izrazima

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (8.1)$$

a možemo koristiti i volumnu gustoću mase ρ . U tom slučaju mase čestica m_i zamjenjujemo diferencijalima mase tijela, $m_i \rightarrow dm = \rho dV$, gdje je ρ volumna gustoća mase, dV je diferencijal volumena tijela, a sumaciju po česticama zamjenjujemo integracijom po masi odnosno po volumenu tijela. Izraze (8.1), za masu i položaj središta mase zamjenjujemo izrazima

$$m = \int dm = \int \rho dV, \quad \mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} \rho dV. \quad (8.2)$$

Podrazumijeva se da je područje integracije ograničeno na dio prostora koji zauzima tijelo.

Na kruto se tijelo također odnose mnogi rezultati koje smo upoznali u prethodnom poglavlju baveći se općenitim sustavom čestica. Najvažniji među njima su izraz za količinu gibanja tijela (5.8), izraz za kutnu količinu gibanja tijela (5.35) te za njegovu kinetičku energiju (5.14), koje ovdje ponavljamo zbog preglednosti,

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{cm}} \quad \mathbf{P}_{\text{cm}} = m \mathbf{v}_{\text{cm}}, \quad (8.3)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{cm}} + \mathbf{L}^* \quad \mathbf{L}_{\text{cm}} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{p}_{\text{cm}}, \quad (8.4)$$

$$K = K_{\text{cm}} + K^* \quad K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2, \quad (8.5)$$

gdje su \mathbf{L}^* i K^* kutna količina gibanja i kinetička energija tijela izražene u odnosu na njegovo središte mase. Osim toga tu su i jednačba gibanja središta mase tijela (5.9),

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{cm}}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = m \mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{F}, \quad (8.6)$$

gdje je \mathbf{F} zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo te zakon očuvanja količine gibanja (5.5), prema kojemu se središte mase tijela giba jednoliko pravocrtno ili miruje ako je zbroj vanjskih sila na tijelo jednak nuli. Također imamo i jednačbu gibanja kutne količine gibanja tijela (5.31), koju ovdje možemo napisati kao

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (8.7)$$

gdje je \mathbf{M} zbroj momenata vanjskih sila koje djeluju na tijelo. Prema zakonu očuvanja kutne količine gibanja (5.34), kutna količina gibanja tijela je stalna u vremenu ako je zbroj momenata vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednak nuli.

Šest stupnjeva slobode krutog tijela: Položaj krutog tijela koje se sastoji od $N \geq 3$ čestica koje ne leže na istom pravcu u trodimenzionalnom se prostoru u potpunosti može odrediti s pomoću šest parametara. Svaki se od tih šest parametara može mijenjati u vremenu neovisno o ostalim parametrima, pa kažemo da kruto tijelo posjeduje šest stupnjeva slobode. Parametri se mogu odabrati na različite načine, a najzornije je ovako:

- Odabiremo jednu (prvu) česticu tijela. Ona se može nalaziti bilo gdje u trodimenzionalnom prostoru pa kažemo da na nju otpadaju *tri* stupnja slobode te je od sada smatramo učvršćenom (nepomičnom u prostoru). Međutim, s obzirom na to da se tijelo i dalje može gibati (vrtjeti oko bilo koje osi koja prolazi tom točkom), njegov položaj nije u potpunosti određen.
- Odabiremo iduću (drugu) česticu tijela te uočavamo da se ona, ovisno o orijentaciji tijela, nalazi negdje na sferi čiji je polumjer jednak njenoj nepromjenjivoj udaljenosti od prve čestice. S obzirom na to da je sfera dvodimenzionalan prostor, položaj druge čestice određen je dvama parametrima (poput geografske duljine i širine na globusu) pa kažemo da na određivanje njena položaja otpadaju *dva* stupnja slobode. Učvrstimo li drugu česticu u nekoj točki sfere, tijelo se može okretati oko pravca određenog položajem prve i druge čestice.
- Odabiremo još jednu (treću) česticu tijela koja se ne nalazi na pravcu na kojem leže prve dvije. Ona se, ovisno o položaju tijela nakon što su prve dvije čestice učvršćene, nalazi negdje na kružnici sa središtem na pravcu koji prolazi prvim dvjema česticama. Kružnica je jednodimenzionalan prostor te je dovoljan jedan parametar kako bismo odredili položaj treće čestice. Kažemo da na treću česticu otpada *jedan* stupanj slobode. Sada su tri čestice tijela učvršćene i tijelo se više ne može pomicati.

Prebrojimo li u gornjem razmatranju stupnjeve slobode prve, druge i treće čestice, dolazimo do šest stupnjeva slobode krutog tijela, neovisno o broju čestica od kojih se ono sastoji.

Šest stupnjeva slobode gibanja tijela očituje se i u dvjema jednadžbama gibanja (8.6) i (8.7) koje govore o vremenskim derivacijama dvaju vektorskih veličina od kojih svaka ima tri neovisne komponente.

Općenito gibanje krutog tijela može se shvatiti kao gibanje njegovog središta mase uz koje se odvija vrtnja tijela oko osi koja prolazi njegovim središtem mase. Valja naglasiti da os vrtnje tijela može u vremenu mijenjati svoju orijentaciju u prostoru. Matematički opis općenitog gibanja krutog tijela vrlo je složen te u ovom poglavlju razmatramo samo neke posebne slučajeve gibanja krutog tijela:

- U poglavlju (8.2) se bavimo uvjetima statičke ravnoteže krutog tijela odnosno uvjetima koji moraju biti zadovoljeni kako bi ono trajno mirovalo.
- Gibanje središta mase krutog tijela koje nije popraćeno vrtnjom krutog tijela još se naziva i translacijskim gibanjem. U tom slučaju imamo $\mathbf{L}^* = 0$ i $\mathbf{K}^* = 0$, a jedina relevantna jednadžba gibanja odnosi se na gibanje samog središta mase tijela.
- Vrtanju krutog tijela oko nepomične osi razmatramo u poglavlju 8.3.
- U poglavlju 8.9 razmatramo kotrljanje simetričnog tijela po podlozi pri čemu razlikujemo slučaj kotrljanja bez klizanja i kotrljanja s klizanjem.

8.2 Statička ravnoteža i težište krutog tijela

Uvjeti statičke ravnoteže krutog tijela: Kad kruto tijelo trajno miruje, količina gibanja i kutna količina gibanja tijela, kao i derivacije tih veličina po vremenu, jednake su nuli. Prema zakonu očuvanja količine gibanja sustava čestica (5.5), zbroj vanjskih sila \mathbf{F}_i koje djeluju na tijelo koje trajno miruje mora biti trajno jednak nuli,

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0. \quad (8.8)$$

Nadalje, prema zakonu očuvanja kutne količine gibanja sustava čestica (5.34), zbroj momenata \mathbf{M}_i vanjskih sila \mathbf{F}_i koje u točkama \mathbf{r}_i djeluju na tijelo koje trajno miruje također mora biti trajno jednak nuli,

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (8.9)$$

Uvjetima (8.8) i (8.9) zovemo uvjetima statičke ravnoteže krutog tijela.

Težište tijela: S obzirom da su tijela koja razmatramo znatno manja od polumjera zakrivljenosti Zemlje, silu težu koja djeluje i -tu česticu tijela opisujemo izrazom $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$, gdje je \mathbf{g} konstantni vektor akceleracije slobodnog pada ili kako ga još zovemo, vektor polja sile teže (polje sile teže u maloj okolini neke točke smatramo homogenim poljem). Ukupno djelovanje sile teže na tijelo tada je

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{g} = m \mathbf{g}, \quad (8.10)$$

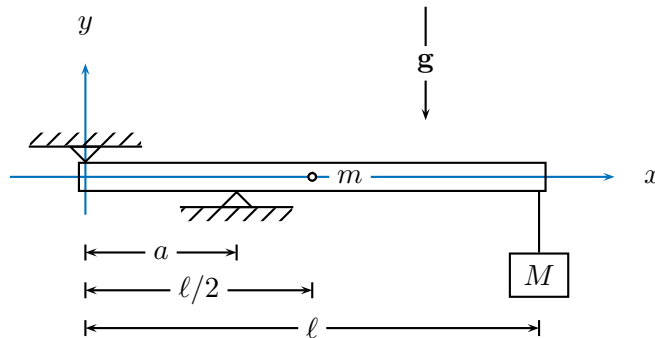
gdje je m masa tijela. Ukupni moment sile teže koja djeluje na čestice tijela možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_i \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g} \\ &= m \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times m \mathbf{g} = \mathbf{r}_{\text{cm}} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

gdje smo koristili definiciju središta mase tijela (8.1). Gornji rezultat nam govori da ukupno djelovanje sile teže na tijelo možemo poistovijetiti s djelovanjem ukupne težine tijela s hvatištem u središtu mase tijela. Zbog tog svojstva središte mase još zovemo "težištem" tijela.

Primjer 8.2.1: Sile u osloncima grede s teretom

Vodoravna homogena greda duljine ℓ i mase m poduprta je na svom lijevom kraju te u točki udaljenoj $a < \ell/2$ od lijevog kraja, a na njenom desnom kraju visi teret mase M . Odredit ćemo iznose sila koje djeluju na gredu u dvama osloncima.



Koordinatni sustav postavljamo tako da greda leži na x -osi, ishodište se nalazi pri lijevom kraju grede, a y -os je uspravna i usmjerena uvis.

Prepoznavamo da na gredu djeluju četiri sile:

1. U osloncu pri lijevom kraju grede na gredu djeluje sila \mathbf{F}_1 uspravnog smjera. Možemo ju izraziti kao $\mathbf{F}_1 = F_{1y} \hat{\mathbf{y}}$. S obzirom na to da smo lijevi kraj grede odabrali kao ishodište, "krak" \mathbf{r}_1 sile \mathbf{F}_1 je nul-vektor, $\mathbf{r}_1 = 0$. Time je i moment $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ sile \mathbf{F}_1 nul-vektor, $\mathbf{M}_1 = 0$. Zbog preglednosti pišemo

$$\mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{F}_1 = F_{1y} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = 0.$$

(Očekujemo da \mathbf{F}_1 djeluje prema dolje što znači da očekujemo $F_{1y} < 0$.)

2. U osloncu koji se nalazi na udaljenosti a od lijevog kraja grede odnosno u točki $\mathbf{r}_2 = a \hat{\mathbf{x}}$ ("krak" sile) djeluje sila uspravnog smjera $\mathbf{F}_2 = F_{2y} \hat{\mathbf{y}}$. Njen moment je $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (a \hat{\mathbf{x}}) \times (F_{2y} \hat{\mathbf{y}}) = aF_{2y} \hat{\mathbf{z}}$. Zbog preglednosti,

$$\mathbf{r}_2 = a \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}_2 = F_{2y} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = aF_{2y} \hat{\mathbf{z}}.$$

(Očekujemo da \mathbf{F}_2 djeluje prema gore odnosno $F_{2y} > 0$.)

3. Djelovanje sile teže na gredu shvaćamo kao djelovanje sile $m\mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{y}}$ u težištu (središtu mase) tijela koje se u odnosu na ishodište nalazi pri $(\ell/2) \hat{\mathbf{x}}$. Možemo pisati

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\ell}{2} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}_3 = -mg \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = -\frac{mg\ell}{2} \hat{\mathbf{z}}.$$

4. Djelovanje niti na kojoj visi teret mase M shvaćamo kao silu $M\mathbf{g} = -Mg \hat{\mathbf{y}}$ koja djeluje pri $\ell \hat{\mathbf{x}}$. Pišemo

$$\mathbf{r}_4 = \ell \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}_4 = -Mg \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_4 = \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 = -Mg\ell \hat{\mathbf{z}}.$$

Uvjeti statičke ravnoteže (8.8) i (8.9) daju nam jednadžbe

$$F_{1y} + F_{2y} - (m + M)g = 0, \quad aF_{2y} - mg\ell/2 - Mg\ell = 0,$$

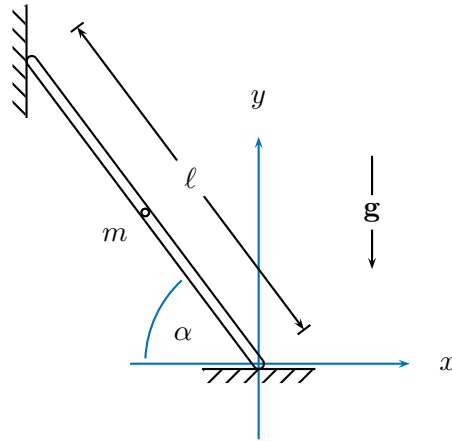
iz kojih možemo izračunati y -komponente sila \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 . Dobivamo

$$F_{1y} = (m + M)g - \frac{\ell}{2a}(m + 2M)g, \quad F_{2y} = \frac{\ell}{2a}(m + 2M)g.$$

Uočavamo da za $a < \ell/2$ vrijedi $F_{1y} < 0$, što znači da \mathbf{F}_1 djeluje prema dolje, te da vrijedi $F_{2y} > 0$, što znači da \mathbf{F}_2 djeluje prema gore. Također uočavamo da kad udaljenost među osloncima teži u nulu, iznosi sila koje djeluju u osloncima teži u beskonačno.

Primjer 8.2.2: Granični kut pri naslanjanju štapa na zid

Tanki homogeni štap jednim je krajem oslonjen na vodoravnu podlogu s kojom ima koeficijent statičkog trenja μ , a drugim krajem naslonjen je na uspravan zid s kojim ima zanemarivo trenje, tako da štap s podlogom zatvara kut α .



Trajno mirovanje štapa u opisanom položaju moguće je ako je kut α veći od granične vrijednosti α_{\min} koja ovisi o koeficijentu trenja μ (kad bismo štap oslonili o zid uz $\alpha < \alpha_{\min}$, štap bi kliznuo i pao na tlo). Odredit ćemo graničnu vrijednost α_{\min} .

Sustav razmatramo pod pretpostavkom da on trajno miruje, t.j. da su zadovoljeni uvjeti statičke ravnoteže (8.8) i (8.9). Koristit ćemo koordinatni sustav postavljen tako da se ishodište nalazi pri donjem kraju štapa, x -os je vodoravna i usmjerena od zida udesno, a y -os je uspravna i usmjerena uvis (vidi sliku). Najprije prepoznamo sile \mathbf{F}_i i točke \mathbf{r}_i ("hvatišta") u kojima sile djeluju te računamo momente sile $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Masu i duljinu štapa obilježavamo s m i ℓ .

1. Zid djeluje na gornji kraj štapa vodoravnom silom iznosa N_{zid} usmjerenom udesno,

$$\mathbf{F}_1 = N_{\text{zid}} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_1 = -\ell \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \ell \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = -N_{\text{zid}} \ell \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}.$$

2. Djelovanje sile teže na štap shvaćamo kao djelovanje sile $\mathbf{F}_2 = m\mathbf{g} = -mg \hat{\mathbf{y}}$ u središtu mase (težištu) štapa,

$$\mathbf{F}_2 = -mg \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{\ell}{2} \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \frac{\ell}{2} \sin \alpha \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \frac{mg\ell}{2} \cos \alpha \hat{\mathbf{z}}.$$

3. Podloga djeluje na donji kraj štapa silom iznosa N_{pod} usmjerenom uvis:

$$\mathbf{F}_3 = N_{\text{pod}} \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_3 = 0, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = 0.$$

4. Osim podloge, na donji kraj štapa također djeluje sila statičkog trenja iznosa F_{tr} prema zidu odnosno nalijevo,

$$\mathbf{F}_4 = -F_{\text{tr}} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_4 = 0, \quad \mathbf{M}_4 = \mathbf{r}_4 \times \mathbf{F}_4 = 0.$$

Uvjeti statičke ravnoteže (8.8) i (8.9) koji su zadovoljeni prema polaznoj pretpostavci ovdje daju tri jednadžbe,

$$N_{\text{zid}} - F_{\text{tr}} = 0, \quad -mg + N_{\text{pod}} = 0, \quad -N_{\text{zid}} \ell \sin \alpha + \frac{mg\ell}{2} \cos \alpha = 0.$$

Eliminiramo li N_{zid} iz tog sustava dobivamo $N_{\text{pod}} = mg$ te uvjet

$$F_{\text{tr}} = \frac{1}{2} N_{\text{pod}} \cot \alpha,$$

gdje uočavamo da iznos sile statičkog trenja potreban za trajno mirovanje štapa raste (teži u beskonačno) kad se kut α smanjuje (teži u nulu), a s obzirom na to da je najveći iznos sile statičkog trenja određen

umnoškom koeficijenta trenja μ i sile N_{pod} kojom štap i podloga jedno drugo pritišću, također imamo uvjet

$$F_{\text{tr}} \leq \mu N_{\text{pod}}.$$

Oba uvjeta su zadovoljena ako vrijedi

$$\frac{1}{2} \cot \alpha \leq \mu$$

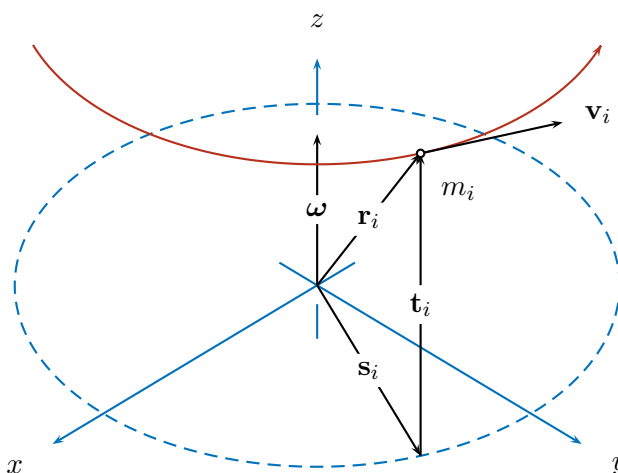
što još možemo izraziti kao

$$\alpha \geq \alpha_{\min} \quad \text{gdje je} \quad \alpha_{\min} = \arctan \frac{1}{2\mu}.$$

Na primjer, koeficijentu statičkog trenja $\mu = 0.5$ odgovara granični kut $\alpha_{\min} = 45^\circ$.

8.3 Vrtanja tijela oko nepomične osi

Vrtanja oko nepomične osi: Kad je gibanje tijela ograničeno na vrtanju oko nepomične osi, čestice koje se nalaze na samoj osi (ako takvih ima) miruju, dok se preostale čestice gibaju kružno oko osi. Slika prikazuje dio kružne putanje i -te čestice pri vrtanju krutog tijela oko z -osi:



Pri vrtanju krutog tijela oko čvrste osi sve čestice tijela imaju istu kutnu brzinu

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \omega_z = \frac{d\phi_z}{dt}, \quad (8.12)$$

i istu kutnu akceleraciju

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\phi_z}{dt^2}, \quad (8.13)$$

gdje je ϕ_z kut kojim prikazujemo položaj krutog tijela i koji predstavlja njegov jedini stupanj slobode. Položaj i -te čestice u odnosu na ishodišnu točku koja se nalazi na osi vrtanje opisujemo vektorom \mathbf{r}_i , a možemo ga prikazati kao zbroj vektora \mathbf{s}_i koji je okomit na os vrtanje i vektora \mathbf{t}_i koji je paralelan s osi,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i + \mathbf{t}_i, \quad (8.14)$$

(vidi sliku). Možemo reći da \mathbf{s}_i pokazuje položaj i -te čestice u odnosu na os vrtanje te uočavamo da se njegov smjer tijekom vrtanja tijela mijenja, dok mu je iznos stalan. Vektor \mathbf{t}_i pokazuje položaj te čestice u odnosu na ravninu $z = 0$ i u vremenu ima stalan smjer i iznos. Brzinu i -te čestice sada možemo izraziti kao (vidi poglavlje 2.6)

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i \quad (8.15)$$

te akceleraciju kao

$$\mathbf{a}_i = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}_i - \omega^2 \mathbf{s}_i, \quad (8.16)$$

gdje prvi član predstavlja tangencijalnu, a drugi član centripetalnu akceleraciju čestice.

8.4 Moment tromosti krutog tijela

Moment tromosti krutog tijela u odnosu na zadanu os vrtnje, a ovdje uzimamo da je to z -os, je veličina definirana izrazom

$$I_z = \sum_i m_i s_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (8.17)$$

gdje je m_i masa, a $s_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ je kvadrat udaljenosti i -te čestice od osi.

Kad je tijelo opisano volumnom gustoćom mase ρ , moment tromosti dan je izrazom

$$I_z = \int s^2 dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV \quad (8.18)$$

Moment tromosti nam omogućuje da pri vrtnji krutog tijela na jednostavan način izrazimo njegovu kutnu količinu gibanja i kinetičku energiju (vidi poglavlja 8.5 i 8.7).

Primjer 8.4.1: Momenti tromosti nekih jednostavnih tijela

- Moment tromosti tankog homogenog obruča mase m i polumjera a , u odnosu na os koja je okomita na ravninu obruča i prolazi njegovim središtem je

$$I_z^* = ma^2,$$

jer se sva masa obruča nalazi na udaljenosti $s = a$ od osi.

- Moment tromosti tankog homogenog štapa duljine ℓ i mase m u odnosu na os koja je okomita na štap i koja prolazi njegovim krajem je

$$I_z = \int s^2 dm = \int_0^\ell s^2 \lambda ds = \int_0^\ell s^2 \frac{m}{\ell} ds = \dots = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

Diferencijal mase koja se nalazi unutar intervala udaljenosti od osi širine ds napisali smo kao $dm = \lambda ds$, gdje je $\lambda = m/\ell$ linijska gustoća mase štapa.

- Moment tromosti tankog homogenog štapa duljine ℓ i mase m u odnosu na os koja je okomita na štap i koja prolazi njegovim središtem je

$$I_z^* = \int s^2 dm = 2 \int_0^{\ell/2} s^2 \lambda ds = 2 \int_0^{\ell/2} s^2 \frac{m}{\ell} ds = \dots = \frac{1}{12} m \ell^2.$$

Faktor 2 ispred integrala nakon drugog po redu znaka integracije prisutan je jer imamo dvije polovice štapa.

- Moment tromosti homogenog valjka mase m i polumjera a u odnosu na njegovu os jednak je

$$I_z^* = \int s^2 dm = \int s^2 \sigma dS = \int_0^a s^2 \frac{m}{a^2 \pi} 2s\pi ds = \dots = \frac{1}{2} ma^2.$$

Diferencijal mase valjka koja se nalazi između udaljenosti od osi s i udaljenosti $s + ds$ ovdje smo napisali kao $dm = \sigma dS$, gdje je $\sigma = m/(a^2 \pi)$ površinska gustoća mase pri projekciji valjka na x, y -ravninu, a $dS = 2s\pi ds$ je površina kružnog vijenca polumjera s (opsega $2s\pi$) i širine ds .

- Moment tromosti homogene kugle mase m i polumjera a u odnosu na os koja prolazi središtem kugle je

$$I_z^* = \int s^2 dm = \int s^2 \rho dV = \int_0^a s^2 \frac{m}{\frac{4}{3}a^3\pi} 2s\pi \sqrt{a^2 - s^2} ds = \dots = \frac{2}{5}ma^2.$$

Diferencijal mase koji se nalazi pri udaljenosti od osi s i $s + ds$ napisali smo kao $dm = \rho dV$, gdje je $\rho = m/(\frac{4}{3}a^3\pi)$ volumna gustoća mase, a dV je volumen stijenke cilindra polumjera s (opsega $2s\pi$), visine $2\sqrt{a^2 - s^2}$ i debljine ds .

Zvjezdica u oznaci I_z^* naglašava da je riječ o osi koja prolazi središtem mase tijela.

Teorem o paralelnim osima (Steinerov teorem): Moment tromosti krutog tijela u odnosu na z -os može se napisati kao

$$I_z = ms_{\text{cm}}^2 + I_z^*, \quad (8.19)$$

gdje je m masa tijela, s_{cm} je udaljenost središta mase tijela od z -osi, a I_z^* je moment tromosti tijela u odnosu na os koja je paralelna sa z -osi te prolazi središtem mase tijela. Član ms_{cm}^2 ponekad nazivamo "momentom tromosti središta mase".

Teorem dokazujemo izravno raspisujući moment tromosti tijela u odnosu na z -os kao

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_i m_i s_i^2 = \sum_i m_i |\mathbf{s}_{\text{cm}} + \mathbf{s}_i^*|^2 = \sum_i m_i (s_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{s}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{s}_i^* + s_i^{*2}) \\ &= \left(\sum_i m_i \right) s_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{s}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{s}_i^* + \sum_i m_i s_i^{*2}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

gdje smo koristili $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{\text{cm}} + \mathbf{s}_i^*$. U posljednjem izrazu prvi član prepoznamo kao ms_{cm}^2 , suma u drugom članu jednaka je nuli zbog svojstva (5.12), a treći član prepoznamo kao moment tromosti I_z^* , čime je teorem dokazan.

Primjer 8.4.2: Moment tromosti štapa u odnosu na os koja prolazi njegovim krajem

Moment tromosti tankog homogenog štapa mase m i duljine ℓ u odnosu os koja je okomita na štap i koja prolazi njegovim krajem možemo izračunati korištenjem vrijednosti momenta tromosti I_z^* u odnosu na os koja prolazi središtem mase štapa i teorema o paralelnim osima,

$$I_z = m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + I_z^* = \frac{1}{4}m\ell^2 + \frac{1}{12}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2,$$

gdje je $\ell/2$ udaljenost središta mase štapa od osi vrtnje, vrijednost $I_z^* = \frac{1}{12}m\ell^2$ smo preuzeli iz primjera (8.4.1), a rezultat koji smo dobili je u skladu s istim primjerom.

Teorem o okomitim osima: Razmatramo li plošno tijelo koje leži u x, y -ravnini pravokutnog koordinatnog sustava, među momentima tromosti u odnosu na x, y i z -os vrijedi relacija

$$I_z = \sum_i m_i s_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x, \quad (8.21)$$

ili riječima, moment tromosti plošnog tijela u odnosu na z -os koja je okomita na tijelo jednak je zbroju momenata tromosti istog tijela u odnosu na bilo koje dvije međusobno okomite osi koje leže u ravnini tijela i sijeku se u točki u kojoj ga z -os probada.

Primjer 8.4.3: Moment tromosti tankog obruča u odnosu na tangentu

Korištenjem teorema o okomitim osima i teorema o paralelnim osima ćemo na jednostavan način odrediti moment tromosti tankog obruča u odnosu na os koja tangira obruč.

Polazimo od očiglednog izraza za moment tromosti obruča mase M i polumjera R u odnosu na z -os koja je okomita na ravninu obruča i koja prolazi njegovim središtem, $I_z^* = MR^2$. Prema teoremu o okomitim osima ona je dvostruko veća od momenta tromosti istog obruča u odnosu na bilo koju os koja leži u ravnini obruča i prolazi njegovim središtem,

$$I_z^* = I_x^* + I_y^* = 2I_x^* = MR^2.$$

Nadalje, primjenom teorema o paralelnim osima računamo moment tromosti prstena u odnosu na os koja leži u ravnini prstena, ali ne prolazi njegovim središtem, već ga tangira odnosno prolazi na udaljenosti R od osi koja prolazi središtem,

$$I_x = MR^2 + I_x^* = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

8.5 Kutna količina gibanja krutog tijela

Kutna količina gibanja: Projekciju vektora kutne količine gibanja na os vrtnje krutog tijela (uzimamo da je to z -os) možemo izraziti kao

$$L_z = I_z \omega_z, \quad (8.22)$$

gdje je I_z moment tromosti u odnosu na os vrtnje, a ω_z je kutna brzina vrtnje.

Tvrđnju (8.22) dokazujemo raspisujući kutnu količinu gibanja i -te čestice u odnosu na ishodišnu točku na osi vrtnje kao

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = (\mathbf{s}_i + \mathbf{t}_i) \times \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{t}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (8.23)$$

Koristeći $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i)$ te opći vektorski identitet $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ pokazujemo da je prvi član na desnoj strani paralelan s osi vrtnje,

$$\mathbf{s}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) = m_i s_i^2 \boldsymbol{\omega} = m_i s_i^2 \omega_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (8.24)$$

dok je drugi član u izrazu (8.23) okomit na os,

$$\mathbf{t}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{t}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) = -m_i (\mathbf{t}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{s}_i \quad (8.25)$$

jer gleda u smjeru vektora \mathbf{s}_i . Komponentu količine gibanja krutog tijela u smjeru osi vrtnje sada možemo napisati kao

$$L_z = \sum_i (\mathbf{L}_i)_z = \sum_i (\mathbf{s}_i \times \mathbf{p}_i)_z = \sum_i m_i s_i^2 \omega_z = \left(\sum_i m_i s_i^2 \right) \omega_z = I_z \omega_z, \quad (8.26)$$

gdje smo sumu u zagradama prepoznali kao moment tromosti krutog tijela u odnosu na z -os (8.17). Time je tvrdnja (8.22) dokazana.

Napomena o glavnim osima krutog tijela: Izraz (8.25) pokazuje da vektor kutne količine gibanja krutog tijela i vektor njegove kutne brzine nisu nužno istog smjera. Ta dva vektora imaju isti smjer jedino kad se kruto tijelo vrti oko jedne od svojih "glavnih osi". Svako kruto tijelo posjeduje barem tri takve osi. One su međusobno okomite i prolaze središtem mase tijela. (Dokaz posljednjih dviju tvrdnji složenošću nadilazi namjenu ovog teksta.) Simetrična tijela mogu imati više od triju glavnih osi. Na primjer, kugla ima

beskonačno mnogo glavnih osi jer svaku os koja prolazi njenim središtem možemo smatrati glavnom osi. Općenito, os rotacijske simetrije tijela, ukoliko ju tijelo posjeduje, ujedno je jedna od njegovih glavnih osi.

8.6 Jednadžba gibanja tijela pri vrtnji oko nepomične osi

Jednadžba gibanja za vrtnju krutog tijela oko nepomične osi: U svakom sustavu čestica vrijedi jednadžba gibanja (8.7) prema kojoj je derivacija kutne količine gibanja po vremenu jednaka zbroju momenata vanjskih sila. Pri vrtnji krutog tijela oko nepomične osi razmatramo isključivo projekciju kutne količine gibanja na os vrtnje te koristeći (8.22) možemo napisati

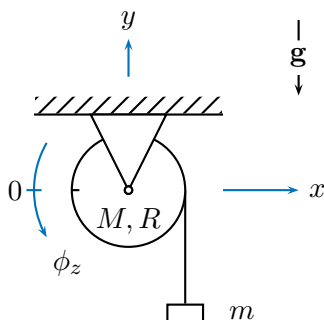
$$\frac{d}{dt}L_z = I_z \frac{d\omega_z}{dt} = I_z \alpha_z = M_z, \quad (8.27)$$

gdje je M_z zbroj z -komponenta momenata vanjskih sila u odnosu na ishodišnu točku na z -osi. Jednadžbu (8.27) zovemo jednadžbom gibanja za vrtnju krutog tijela oko nepomične osi.

Preostale komponente zbroja momenata vanjskih sila ovdje nema potrebe razmatrati jer prema pretpostavci o vrtnji tijela oko nepomične osi one ne mogu utjecati na gibanje tijela.

Primjer 8.6.1: Vrtanja valjka s namotanom niti i utegom na njenom kraju

Oko homogenog valjka mase $M = 10 \text{ kg}$ i polumjera $R = 0.1 \text{ m}$ koji se može vrtjeti oko vodoravne osi namotana je bezmasena nit na čijem kraju visi uteg mase $m = 1 \text{ kg}$. Odredit ćemo trajanje prvog punog okreta valjka ako sustav u početnom trenutku miruje.



Na slici su ucrtane x i y -os pravokutnog koordinatnog sustava koje su smještene tako da se vrtnja valjka odvija oko z -osi koja je usmjerena prema čitatelju. Na slici je također naznačen pozitivan smjer kutne koordinate ϕ_z kojom opisujemo položaj valjka pri njegovoj vrtnji oko z -osi. Ako je u početnom trenutku $\phi_z = 0$, kutna koordinata ϕ_z će s vremenom postati negativna, a također očekujemo negativnu kutnu brzinu ω_z i kutnu akceleraciju α_z .

Najprije uočavamo da zakretu valjka $d\phi_z$ oko z -osi odgovara pomak utega duž y -osi $dy = R d\phi_z$. Podijelimo li tu relaciju s diferencijalom vremena dt u kojemu su se zakret $d\phi_z$ i pomak dy dogodili, dobivamo relaciju koja povezuje kutnu brzinu valjka i brzinu utega $v_y = R\omega_z$, a deriviranjem te relacije po vremenu dobivamo relaciju koja povezuje kutnu akceleraciju valjka i akceleraciju utega,

$$a_y = R\alpha_z.$$

Jednadžbu gibanja valjka možemo napisati kao

$$I_z^* \alpha_z = M_z = ((R\hat{x}) \times (-T\hat{y}))_z = (-RT\hat{z})_z = -RT,$$

gdje je $I_z^* = \frac{1}{2}MR^2$ moment tromosti valjka u odnosu na z -os oko koje se on okreće, (vidi primjer 8.4.1), α_z je kutna akceleracija valjka pri vrtnji oko z -osi, M_z je z -komponenta momenata vanjskih sila

koje djeluju na valjak, a ovdje je prisutan jedino moment sile napetosti niti T čije se hvatište nalazi na obodu valjka.

Jednadžbu gibanja utega možemo napisati kao

$$ma_y = -mg + T,$$

gdje je a_y njegova akceleracija.

Eliminacijom napetosti niti T i akceleracije utega a_y iz gornjih triju jednadžbi, kutnu akceleraciju valjka α_z možemo izraziti kao

$$\alpha_z = -\frac{mg}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R}.$$

S obzirom na to da je kutna akceleracija stalna u vremenu, kutnu brzinu ω_z i kutnu koordinatu ϕ_z možemo izraziti oslanjajući se na analogiju s relacijama koje opisuju kinematiku gibanja stalnom akceleracijom (jednoliko ubrzano gibanje). Kutnu brzinu koja odgovara stalnoj kutnoj akceleraciji možemo opisati izrazom $\omega_z[t] = \alpha_z t$, gdje je t vrijeme koje je proteklo od početka gibanja, a kut ϕ_z za koji se tijelo u tom vremenu zakrenulo je

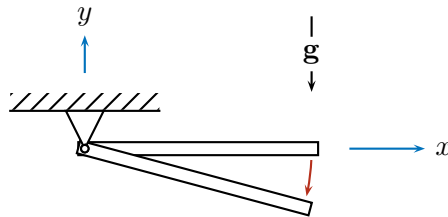
$$\phi_z[t] = \frac{1}{2}\alpha_z t^2.$$

Prvom punom okretu odgovara $\phi_z[t_1] = -2\pi$ iz čega dobivamo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \times (-2\pi)}{\alpha_z}} = \sqrt{\frac{4\pi R}{g} \left(\frac{M}{2m} + 1\right)} = \sqrt{\frac{4\pi \times (0.1 \text{ m})}{9.81 \text{ m s}^{-2}} \left(\frac{10 \text{ kg}}{2 \times (1 \text{ kg})} + 1\right)} = 0.87 \text{ s}.$$

Primjer 8.6.2: Njihanje štapa, početna akceleracija slobodnog kraja

Tanki homogeni štap koji se može slobodno njihati oko jednog svog kraja pušten je u gibanje iz mirovanja u vodoravnom položaju. Odredit ćemo iznos akceleracije slobodnog kraja štapa netom nakon početka gibanja.



Njihanje štapa mase m i duljine ℓ možemo shvatiti kao njegovu vrtnju oko vodoravne nepomične z -osi koja prolazi njegovim krajem. Jedina sila koja djeluje na štap izvan osi je gravitacijska sila $m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{y}}$ s hvatištem u težištu štapa koje se nalazi pri $\mathbf{r}_{\text{cm}} = (\ell/2)\hat{\mathbf{x}}$. Jednadžbu gibanja štapa možemo napisati kao

$$I_z \alpha_z = M_z = (\mathbf{r}_{\text{cm}} \times m\mathbf{g})_z = \left(\frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{x}} \times (-mg\hat{\mathbf{y}})\right)_z = \left(-\frac{\ell mg}{2}\hat{\mathbf{z}}\right)_z = -\frac{\ell mg}{2},$$

gdje je $I_z = \frac{1}{3}m\ell^2$ moment tromosti štapa u odnosu na njegov kraj (vidi primjere 8.4.1 i 8.4.2), α_z je kutna akceleracija, a $\mathbf{r}_{\text{cm}} \times m\mathbf{g}$ je moment gravitacijske sile. Slijedi

$$\alpha_z = -\frac{3g}{2\ell}.$$

Akceleraciju kraja štapa računamo prema jednadžbi (8.16). Na samom početku gibanja prisutan je samo

prvi član jer su brzina čestice \mathbf{v}_i i kutna brzina tijela $\boldsymbol{\omega}$ nul-vektori. Dobivamo

$$\mathbf{a}_{\text{kraj}} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{s}_{\text{kraj}} = \left(-\frac{3g}{2\ell} \hat{\mathbf{z}} \right) \times (\ell \hat{\mathbf{x}}) = -\frac{3g}{2} \hat{\mathbf{y}}.$$

Uočavamo da je iznos akceleracije kraja štapa, $a_{\text{kraj}} = \frac{3}{2}g$, veći od iznosa akceleracije gravitacijske sile.

8.7 Energija pri vrtnji tijela oko nepomične osi

Kinetička energija pri vrtnji krutog tijela oko nepomične osi može se napisati kao

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega_z^2 s_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i s_i^2 \right) \omega_z^2 = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2, \quad (8.28)$$

gdje smo sumu u zagradama prepoznali kao moment tromosti krutog tijela.

Diferencijal kinetičke energije možemo izraziti kao umnožak z -komponente momenta vanjskih sila i diferencijala kuta zakreta $d\phi_z$ koji je pritom nastupio,

$$dK = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega_z^2\right) = I_z \omega_z d\omega_z = I_z \omega_z \alpha_z dt = M_z d\phi_z. \quad (8.29)$$

U računu smo na osnovu (8.12) koristili $d\omega_z = \alpha_z dt$ i $\omega_z dt = d\phi_z$, te na osnovu (8.27) $I_z \alpha_z = M_z$.

Rad momenta vanjskih sila pri vrtnji krutog tijela oko nepomične osi: Diferencijal rada koji obave vanjske sile se možemo napisati kao

$$\begin{aligned} dW &= \sum_i dW_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}_i) dt = \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{s}_i \times \mathbf{F}_i) dt \\ &= (\boldsymbol{\omega} dt) \cdot \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{t}_i) \times \mathbf{F}_i = (\boldsymbol{\omega} dt) \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (\boldsymbol{\omega} dt) \cdot \sum_i \mathbf{M}_i \\ &= \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_z \omega_z dt = M_z d\phi_z, \end{aligned} \quad (8.30)$$

gdje prepoznamo izraz koji je istovjetan izrazu za diferencijal kinetičke energije. Jednakost diferencijala dK i dW nam govori da je rad ΔW koji vanjske sile obave djelujući na tijelo jednak promjeni kinetičke energije tijela ΔK , što je u skladu s od ranije poznatim teoremom o radu i kinetičkoj energiji (vidi poglavlje 4.2). Dodatno, kad je riječ o konzervativnim silama, rad koji sile obave djelujući na tijelo jednak je negativnoj promjeni potencijalne energije tijela te vrijedi

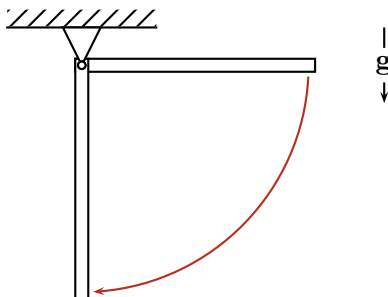
$$\Delta K = \Delta W = -\Delta U. \quad (8.31)$$

Snaga: Izraz za diferencijal rada momenta vanjskih sila (8.30) nam omogućuje da snagu djelovanja momenta vanjskih sila izrazimo kao

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \omega_z. \quad (8.32)$$

Primjer 8.7.1: Njihanje štapa, kutna brzina u ravnotežnom položaju

Kao i u prethodnom primjeru i ovdje razmatramo tanki homogeni štap koji se može slobodno njihati oko jednog svog kraja i koji je pušten u gibanje iz mirovanja u vodoravnom položaju.



Zanima nas odrediti kutnu brzinu vrtnje štapa u trenutku u kojem on prolazi ravnotežnim položajem.

Poslužit ćemo se načelom očuvanja mehaničke energije. Prema (8.28), kinetička energija štapa mase m i duljine ℓ je

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \ell^2 \right) \omega_z^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \omega_z^2$$

(koristili smo od ranije poznat izraz za moment tromosti štapa). Gravitacijsku potencijalnu energiju možemo izraziti kao

$$U = mg \left(\frac{\ell}{2} \sin \phi_z \right) = \frac{1}{2} mg \ell \sin \phi_z,$$

gdje je ϕ_z kut kojim opisujemo zakret tijela oko z -osi u odnosu na njegov početni položaj. Ako na gornjoj slici z -os gleda prema čitatelju, kut ϕ_z će biti negativan. Izraz u zagradama jest promjena visine središta mase štapa. Koristeći gornje izraze za K i U , mehanička energija ovog sustava je

$$E = K + U = \frac{1}{6} m \ell^2 \omega_z^2 + \frac{1}{2} mg \ell \sin \phi_z.$$

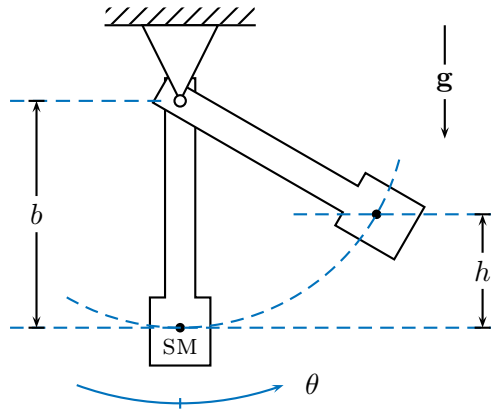
Na početku gibanja imamo $\omega_z = 0$ i $\phi = 0$, dakle $E = 0$, te na osnovu očuvanja energije zaključujemo

$$\omega_z^2 = -\frac{3g}{\ell} \sin \phi_z$$

($\sin \phi_z \leq 0$). Ako z -os gleda prema čitatelju, u ravnotežnom položaju imamo $\phi_z = -\frac{1}{2}\pi$, odnosno $\omega_z^2 = 3g/\ell$.

8.8 Fizičko njihalo

Fizičko njihalo je kruto tijelo koje se može slobodno gibati oko čvrste vodoravne osi koja ne prolazi njegovim središtem mase (težištem).



Udaljenost središta mase od osi njihala na gornjoj slici označena je s b . Kad se središte mase njihala nalazi ispod osi, odnosno u najnižoj točki svoje kružne putanje, njihalo je u svom ravnotežnom položaju. Kad se njihalo zakrene za kut θ u odnosu na ravnotežni položaj, središte mase se popne na visinu

$$h = b(1 - \cos \theta) \quad (8.33)$$

u odnosu na ravnotežni položaj. Slijedi da gravitacijsku potencijalnu energiju pri zakretu njihala za kut θ možemo napisati kao

$$U = mgh = mgb(1 - \cos \theta). \quad (8.34)$$

Kinetička energija njihala je

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad (8.35)$$

gdje je I moment tromosti njihala u odnosu na os vrtnje, a $\dot{\theta}$ je derivacija kuta θ po vremenu odnosno kutna brzina kojom se njihalo u danom trenutku okreće oko osi.

Jednadžba gibanja njihala: Iz očuvanja mehaničke energije slijedi

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(K + U) = I\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgb \sin \theta \dot{\theta} = I\dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I} \sin \theta \right), \quad (8.36)$$

gdje prepoznavamo jednadžbu gibanja njihala

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I} \sin \theta = 0. \quad (8.37)$$

Uočavamo da se funkcija θ ovdje pojavljuje kao argument trigonometrijske funkcije \sin te da gornja jednadžba nema oblik jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora. Njeno rješenje, koje zbog složenosti ovdje ne prikazujemo, nije harmonijsko titranje, već se radi o titranju čija frekvencija ovisi o amplitudi.

Njihanje vrlo malim amplitudama: Ograničimo li razmatranje njihanja na vrlo male otklone, $\theta \ll 1$, možemo iskoristiti svojstvo $\sin \theta \simeq \theta$. Time jednadžba gibanja (8.37) izravno poprima oblik jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I} \theta = 0, \quad (8.38)$$

gdje konstantni koeficijent koji množi funkciju θ predstavlja kvadrat kutne frekvencije titranja njihala,

$$\omega_0^2 = \frac{mgb}{I}. \quad (8.39)$$

To znači da pri njihanju vrlo malim amplitudama njihalo možemo smatrati harmonijskim oscilatorom. Rješenje gornje jednadžbe gibanja možemo napisati kao

$$\theta[t] = \Theta \cos[\omega_0 t + \phi], \quad (8.40)$$

gdje je kut Θ amplituda titranja, odnosno najveći otklon koji njihalo postiže, a ϕ je uobičajena početna faza.

Primjer 8.8.1: Reducirana duljina fizičkog njihala

Tzv. **reducirana duljina fizičkog njihala** je duljina niti koju bi matematičko njihalo moralo imati da se pri njihanju vrlo malenom amplitudom njiše istom frekvencijom kao promatrano fizičko njihalo.

Izjednačavanjem kvadrata frekvencije matematičkog njihala duljine $\ell_{\text{red.}}$, $\omega_0^2 = g/\ell_{\text{red.}}$ (vidi prethodni primjer), i kvadrata frekvencije fizičkog njihala koji je dan izrazom (8.39), slijedi

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell_{\text{red.}}} = \frac{mgb}{I},$$

odnosno

$$\ell_{\text{red.}} = \frac{I}{mb}.$$

Kao primjer odredit ćemo reduciranu duljinu njihala koje se sastoji od tankog homogenog štapa duljine ℓ koji njiše oko osi koja prolazi njegovim krajem odnosno na udaljenosti $b = \ell/2$ od njegova središta mase. Moment tromosti štapa mase m i duljine ℓ u odnosu na os koja prolazi njegovim krajem poznat je iz ranijeg primjera i iznosi $I = \frac{1}{3}m\ell^2$. Slijedi

$$\ell_{\text{red.}} = \frac{I}{mb} = \frac{m\ell^2/3}{m\ell/2} = \frac{2}{3}\ell,$$

što znači da tanki homogeni štapa duljine ℓ koji njiše oko svog kraja i matematičko njihalo duljine $\frac{2}{3}\ell$ njišu jednakim frekvencijama.

Primjer 8.8.2: Njihanje tankog homogenog štapa

Tanki homogeni štapa duljine ℓ može se njhati oko osi koja ga probada na udaljenosti b od njegova središta mase (polovišta). Odredite udaljenost b za koju će frekvencija njihanja štapa biti najveća moguća te odgovarajući period njihanja.

Moment tromosti štapa u odnosu na os koja ga probada na udaljenosti b od njegova središta mase možemo napisati korištenjem teorema o paralelnim osima kao

$$I = \frac{1}{12}m\ell^2 + mb^2.$$

Prema (8.39) kvadrat frekvencije njihanja štapa oko te osi je

$$\omega_0^2 = \frac{mgb}{I} = \frac{mgb}{m\ell^2/12 + mb^2} = g \frac{b}{\ell^2/12 + b^2}.$$

Maksimum (kvadrata) frekvencije pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{d}{db}\omega_0^2 = \dots = 12g \frac{\ell^2 - 12b^2}{(\ell^2 + 12b^2)^2}$$

koji je zadovoljen za

$$b = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u izraz za kvadrat frekvencije dobivamo

$$\omega_0^2 = \sqrt{3} \frac{g}{\ell},$$

čemu odgovara period titranja

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\sqrt{\ell/g}}{3^{1/4}}.$$

Na primjer, za štap duljine $\ell = 1$ m period bi iznosio $T \simeq 1.52$ s.

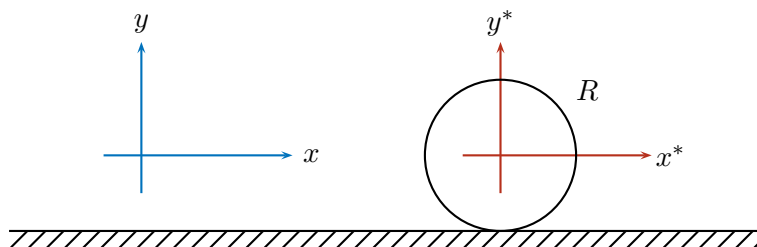
8.9 Kotrljanje krutog tijela

Kotač je naziv koji ćemo koristiti za bilo koje rotacijski simetrično kruto tijelo odnosno tijelo koje u ravni okomitom na os simetrije ima kružni presjek i koje se može kotrljati po podlozi. Os rotacijske simetrije tijela prolazi središtem mase tijela, a označavat ćemo ju kao z^* -os. Primjeri “kotača” su obruč, puni ili šuplji valjak, kugla, sfera (šuplja kugla), itd. Općenito, moment tromosti kotača mase M i polumjera R u odnosu na njegovu z^* -os možemo napisati kao

$$I_z^* = \kappa M R^2, \quad (8.41)$$

gdje koeficijent κ poprima vrijednosti od 0 do 1. Za obruč i za šuplji valjak imamo $\kappa = 1$, za puni valjak $\kappa = 1/2$, za punu kuglu $\kappa = 2/5$ (vidi primjer 8.4.1), a kad bi se sva masa kotača nalazila u njegovom središtu, imali bismo $\kappa = 0$.

Kotrljanje kotača bez klizanja je kotrljanje pri kojem točka kotača koja u nekom trenutku dodiruje podlogu, miruje u odnosu na nju. Slika prikazuje kotač polumjera R na podlozi te osi x^* i y^* koordinatnog sustava u referentnom okviru kotača (ROSM, vidi poglavlje 5.4) čija je z^* -os usmjerena prema čitatelju. Slika također prikazuje x i y osi koordinatnog sustava u referentnom okviru vezanom uz podlogu.



Zakretu kotača $d\phi_z^*$ oko njegove z^* -osi, u referentnom okviru vezanom uz podlogu odgovara pomak središta mase kotača

$$dx_{cm} = -R d\phi_z^*, \quad (8.42)$$

gdje je R polumjer kotača. Podijelimo li tu relaciju diferencijalom vremena dt unutar kojeg su se pomak dx_{cm} i zakret $d\phi_z^*$ dogodili, dobivamo relaciju koja povezuje brzinu središta mase $v_{cmx} = dx_{cm}/dt$ i kutnu brzinu kotača $\omega_z^* = d\phi_z^*/dt$,

$$v_{cmx} = -R\omega_z^*. \quad (8.43)$$

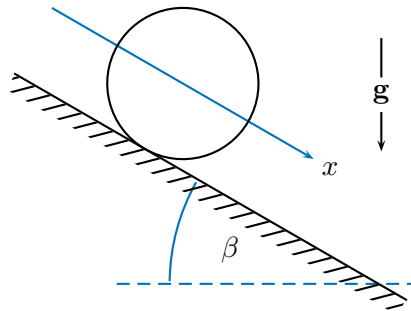
Gornju relaciju zovemo uvjetom kotrljanja bez klizanja, a deriviranjem te relacije po vremenu dobivamo relaciju koja pri kotrljanju bez klizanja povezuje akceleraciju središta mase a_{cmx} i kutnu akceleraciju kotača α_z^*

$$a_{cmx} = -R\alpha_z^*. \quad (8.44)$$

Primjer 8.9.1: Kotrljanje bez klizanja niz kosinu, koeficijent trenja

Pretpostavit ćemo da se kotač čiji je moment tromosti dan izrazom (8.41) pod djelovanjem sile teže kotrlja bez klizanja niz kosinu nagiba β . Odredit ćemo akceleraciju središta mase kotača, iznos sile

statičkog trenja koja djeluje između kotača i kosine te minimalnu vrijednost koju mora imati koeficijent statičkog trenja kako ne bi nastupilo klizanje.



Na kotač djeluju gravitacijska sila Mg s hvatištem u središtu mase kotača (težištu) te sila podloge N i sila trenja F_{tr} s hvatištima u točki u kojoj kotač dodiruje kosinu.

Jednadžba gibanja središta mase kotača u potpunom (vektorskom) obliku glasi

$$Ma_{cm} = F = Mg + N + F_{tr},$$

a njenu x -komponentu možemo napisati kao

$$Ma_{cmx} = Mg \sin \beta - F_{tr}.$$

Jednadžba gibanja za vrtnju kotača oko njegove z^* -osi (uzimamo da je ta os usmjerena prema čitatelju), s obzirom na to da jedino sila trenja ima moment u odnosu na tu os različit od nule, glasi

$$I_z^* \alpha_z^* = M_z^* = -RF_{tr}.$$

Uz korištenje uvjeta kotrljanja bez klizanja (8.44) i izraza za moment tromosti kotača (8.41), iz posljednje dvije jednadžbe možemo eliminirati kutnu akceleraciju α_z te izraziti akceleraciju središta mase i iznos sile trenja kao

$$a_{cmx} = \frac{1}{1 + \kappa} g \sin \beta, \quad F_{tr} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} Mg \sin \beta.$$

Uočavamo da iznos akceleracije kotača koji se kotrlja bez klizanja niz kosinu ne ovisi o masi kotača, ali ovisi o koeficijentu κ odnosno o načinu na koji je masa unutar njega raspoređena. Kotač čija je masa raspoređena uz njegovu z^* -os ($\kappa \rightarrow 0$) akcelerirao bi poput tijela koje bez trenja translacijski klizi niz kosinu, dok bi akceleracija kotača čija je masa raspoređena pri njegovu obodu ($\kappa \rightarrow 1$) bila upola manja.

Budući da je sila trenja, čiji smo iznos F_{tr} odredili, po svojoj prirodi sila statičkog trenja, njen iznos zadovoljava nejednakost

$$F_{tr} \leq \mu N,$$

gdje je N iznos sile kojom kotač i podloga međudjeluju u smjeru okomitom na kosinu. S obzirom na to da iz jednadžbe gibanja središta mase kotača slijedi

$$N = Mg \cos \beta,$$

možemo zaključiti da koeficijent statičkog trenja mora zadovoljavati nejednakost

$$\mu \geq \frac{F_{tr}}{N} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \tan \beta.$$

Uz nedovoljno velik koeficijent statičkog trenja kotača i kosine sila trenja ne bi mogla postići potrebnu vrijednost te bi pri gibanju kotača niz kosinu došlo do klizanja.

Kinetička energija pri kotrljanju bez klizanja: Prema općenitim relacijama (5.14) ili (8.5), kinetičku energiju tijela možemo izraziti kao zbroj kinetičke energije centra mase K_{cm} i kinetičke energije tijela u referentnom okviru njegova središta mase K^* . Kad se radi o kotaču čiji je moment tromosti dan izrazom (8.41) i koji se kotrlja bez klizanja, što znači da je zadovoljen uvjet (8.43), kinetičku energiju možemo izraziti kao

$$K = K_{\text{cm}} + K^* = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_z^*\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}\kappa MR^2 \left(\frac{v_{\text{cm}}}{R}\right)^2 = \frac{1+\kappa}{2}Mv_{\text{cm}}^2. \quad (8.45)$$

Uočavamo da je kinetička energija kotača u kotrljanju do dva puta veća od kinetičke energije tijela iste mase koje se brzinom istog iznosa giba translacijski.

Primjer 8.9.2: *Kotrljanje bez klizanja niz kosinu, konačna brzina*

Primjenom očuvanja mehaničke energije odredit ćemo konačni iznos brzine središta mase kotača koji se, krenuvši iz mirovanja pri vrhu kosine visine H , dokotrlja bez klizanja u podnožje kosine.

Važno je uočiti da sila statičkog trenja koja osigurava kotrljanje bez klizanja ne obavlja rad, a s obzirom na to da u sustavu nema daljnjih sila koje bi mogle dio mehaničke energije pretvoriti u druge oblike energije, zaključujemo da je mehanička energija sustava očuvana.

U početnom stanju imamo kinetičku energiju kotača jednaku nuli, jer on miruje, te gravitacijsku potencijalnu energiju kotača koju možemo izraziti u odnosu na referentnu razinu podnožja kosine,

$$K = 0, \quad U = Mgh, \quad E_{\text{poč.}} = K + U = Mgh.$$

U konačnom stanju imamo kinetičku energiju kotača koja je dana izrazom (8.45) te gravitacijsku potencijalnu energiju kotača koja je jednaka nuli jer smo podnožje kosine odabrali kao referentnu razinu,

$$K = \frac{1+\kappa}{2}Mv_{\text{cm}}^2, \quad U = 0, \quad E_{\text{kon.}} = K + U = \frac{1+\kappa}{2}Mv_{\text{cm}}^2.$$

Primjenom uvjeta očuvanja mehaničke energije, $E_{\text{kon.}} = E_{\text{poč.}}$, dobivamo

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\kappa}}.$$

Kao i u prethodnom primjeru, gdje smo uočili ovisnost akceleracije središta mase o koeficijentu κ , ovdje uočavamo da se tijela čija je masa raspoređena bliže njihovom obodu i koja zbog toga imaju veći koeficijent κ , kotrljaju sporije od onih čija je masa raspoređena bliže z^* -osi.

Kotrljanje s klizanjem: Kad brzina središta mase kotača $v_{\text{cm}x}$ i kutna brzina njegove vrtnje ω_z ne zadovoljavaju uvjet (8.43), dolazi do klizanja kotača po podlozi. To znači da na kotač djeluje sila dinamičkog trenja čiji je smjer suprotan smjeru brzine koju točka kotača koja dira podlogu ima u odnosu na samu podlogu. Ako se u referentnom okviru podloge gibanje središta mase kotača odvija duž x -osi, možemo pisati

$$v_{\text{cm}x} \gtrless -R\omega_z \quad \implies \quad F_{\text{tr}x} = \mp \mu_D N, \quad (8.46)$$

gdje je N iznos sile kojom kotač i podloga međudjeluju u smjeru okomitom na podlogu. Gornji simboli ($>$ i $-$) odnose se na slučaj u kojem je x -komponenta brzine središta mase kotača veća, a donji simboli ($<$ i $+$) odnose se na slučaj u kojem je ta brzina manja od one koja zadovoljava uvjet (8.43).

Primjer 8.9.3: *Kotrljanje biljarske kugle uz klizanje*

Neposredno nakon što je primila udarac štapom, biljarska kugla klizi po vodoravnoj podlozi brzinom iznosa $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ bez vrtnje. Kugla s podlogom ima koeficijent trenja $\mu = 0.1$. Sila trenja koja

djeluje na kuglu će tijekom vremena smanjiti brzinu središta mase kugle te dovesti do njene vrtnje, zbog čega će u nekom trenutku nastupiti kotrljanje kugle bez klizanja. Odredit ćemo nakon koliko će vremena nastupiti kotrljanje bez klizanja i koliki put će do tog trenutka kugla prevaliti.

Uzmemo li da se kugla giba u pozitivnom smjeru x -osi, u početnom trenutku možemo napisati

$$x_{\text{cm}}[0] = 0, \quad v_{\text{cm}x}[0] = v_0, \quad \omega_z[0] = 0.$$

Jednadžbu gibanja središta mase kugle možemo napisati u obliku

$$Ma_{\text{cm}x} = -F_{\text{tr}} = -\mu Mg,$$

što daje stalnu akceleraciju $a_{\text{cm}x} = -\mu g$ odnosno jednoliko ubrzano gibanje. To znači da brzinu središta mase i x -koordinatu položaja središta mase sada možemo opisati izrazima (2.18) i (2.19) koji uz naše početne uvjete daju

$$v_{\text{cm}x}[t] = v_0 - \mu g t, \quad x_{\text{cm}}[t] = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2.$$

Jednadžba gibanja za vrtnju kugle oko z^* -osi glasi

$$I_z^* \alpha_z = M_z = -R F_{\text{tr}} = -R \mu Mg,$$

što daje stalnu kutnu akceleraciju

$$\alpha_z = -\frac{R \mu Mg}{I_z^*} = -\frac{R \mu Mg}{\frac{2}{5} M R^2} = -\frac{5 \mu g}{2 R},$$

gdje smo koristili poznati izraz za moment tromosti homogene kugle u odnosu na os koja prolazi njenim središtem (vidi primjer 8.4.1). Kako je početna kutna brzina jednaka nuli možemo napisati

$$\omega_z[t] = \alpha_z t = -\frac{5 \mu g}{2 R} t.$$

Sada možemo odrediti trenutak t' u kojem gibanje kugle prelazi u kotrljanje bez klizanja. Uvjet (8.43) koji glasi $v_{\text{cm}x} = -R \omega_z$ ovdje vodi na

$$v_0 - \mu g t' = \frac{5 \mu g}{2} t'$$

iz čega dobivamo

$$t' = \frac{2 v_0}{7 \mu g},$$

a put koji do tog trenutka prevaljuje središte mase kugle je

$$s' = x_{\text{cm}}[t'] - x_{\text{cm}}[0] = v_0 t' - \frac{1}{2} \mu g t'^2 = \dots = \frac{12 v_0^2}{49 \mu g} = \frac{12 \times (2 \text{ m s}^{-1})^2}{49 \times 0.1 \times (9.81 \text{ m s}^{-2})} = 1 \text{ m}.$$

Zadaci

Z.8.1: Homogena vodoravna greda duljine $L = 6\text{ m}$ i mase $M = 80\text{ kg}$ leži na dvama osloncima, a na njoj stoji čovjek mase $m = 60\text{ kg}$. Udaljenost lijevog oslonca od lijevog kraja grede je $x_1 = 1.5\text{ m}$, udaljenost desnog oslonca od lijevog kraja grede je $x_2 = 5.5\text{ m}$, a čovjek je od lijevog kraja grede udaljen $x_3 = 4.5\text{ m}$. Odredi iznose sila kojima oslonci djeluju na gredu.

$$\text{Rj: } F_{1,2} = \pm((M + m)x_{2,1} - ML/2 - mx_3)g/(x_2 - x_1), \quad F_1 \simeq 637.7\text{ N}, \quad F_2 \simeq 735.7\text{ N}$$

Z.8.2: Kvadar pritišćemo uz uspravan zid s kojim on ima koeficijent statičkog trenja $\mu = 0.5$ kako on ne bi klizio prema dolje. Primjenjujemo silu iznosa F čiji smjer s okomicom na zid zatvara kut α . Odredi kut α za koji je potreban najmanji iznos sile F .

$$\text{Rj: } \tan \alpha = \mu^{-1}, \quad \alpha \simeq 63.4^\circ$$

Z.8.3: Dva sitna tijela kojima su mase m_1 i m_2 pričvršćena su na krajevima tankog homogenog štapa duljine L i mase M . Na kojoj udaljenosti od kraja štapa na kojem se nalazi tijelo mase m_1 prolazi os okomita na štap, a u odnosu na koju čitav sustav ima najmanji moment tromosti?

$$\text{Rj: } a = (M/2 + m_2)L/(M + m_1 + m_2)$$

Z.8.4: Odredi moment tromosti homogenog stošca polumjera baze R i mase M u odnosu na njegovu os simetrije.

$$\text{Rj: } I = \frac{3}{10}MR^2$$

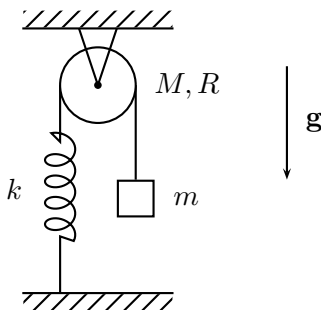
Z.8.5: Tanka homogena vodoravna greda mase m oslonjena je na dva oslonca koji se nalaze pod samim krajevima grede. U nekom trenutku jedan se od oslonaca naglo ukloni i greda se počne gibati. Odredi silu kojom preostali oslonac djeluje na gredu u trenutku netom nakon što je jedan oslonac uklonjen.

$$\text{Rj: } F = mg/4$$

Z.8.6: Preko koloture koju možemo smatrati homogenim diskom polumjera R i mase M i koji se može bez otpora okretati oko nepomične vodoravne osi prebačena je nerastezljiva nit zanemarive mase na čijim su krajevima utezi masa m_1 i m_2 . Pustimo li sustav u gibanje nit pokreće koloturu pri čemu ne dolazi do proklizavanja. Odredi napetost onog dijela niti na kojem visi masa m_1 .

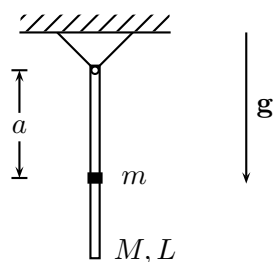
$$\text{Rj: } T_1 = (Mm_1 + 4m_1m_2)g/(M + 2m_1 + 2m_2)$$

Z.8.7: Tanka nerastezljiva nit zanemarive mase prebačena je preko koloture mase M i polumjera R koju smatramo homogenim diskom. Jedan kraj niti oprugom je povezan s čvrstim uporištem, dok na drugom kraju visi uteg mase m . Odredi period malih oscilacija u ovom sustavu.



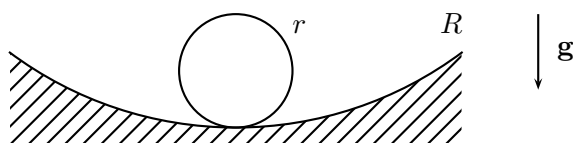
$$\text{Rj: } T = 2\pi\sqrt{(m + M/2)/k}$$

Z.8.8: Tanki homogeni štap duljine L i mase M poduprt je tako da se može slobodno njihati oko jednog kraja. Odredi udaljenost a od gornjeg kraja štapa na kojoj treba pričvrstiti sitan uteg mase m (vidi sliku) kako bi period pri njihanju čitavog sustava malenom amplitudom bio najkraći. Posebno razmotri granični slučaj $m/M \rightarrow 0$.



Rj: $a = (ML/2m)(-1 + \sqrt{1 + 4m/3M})$, $\lim_{m/M \rightarrow 0} a = L/3$

Z.8.9: Homogena kugla polumjera r položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$ (vidi sliku). Odredi frekvenciju malih titraja kad kugla kotrljajući se bez proklizavanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.



Rj: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R - r)}$

9 Mehanika fluida

Fluidi (plinovi i tekućine) su tijela koja ne posjeduju vlastiti oblik, već se prilagođavaju obliku prostora (posude) u kojemu se nalaze. Ovo poglavlje se najprije bavi fluidima u mirovanju, a zatim dotiče neke najjednostavnije aspekte gibanja fluida.

9.1 Tlak i vrste fluida

Tlak fluida: Stijenka posude koja ograničava širenje fluida prostorom i fluid međudjeluju silom koja je okomita na stijenku posude. Na isti način fluid međudjeluje s površinom bilo kojeg čvrstog tijela koje je u njega uronjeno. Tlak (engl. *pressure*) je fizička veličina definirana kao omjer iznosa sile ΔF i elementa površine ΔS na koju sila djeluje,

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (9.1)$$

Mjerna jedinica sustava SI za tlak je paskal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$. Smatramo da je tlak prisutan svugdje u fluidu, a ne samo uz stijenku posude ili površinu uronjenog tijela, a s obzirom na to da nema smisla govoriti o njegovom smjeru, tlak je skalarna fizička veličina.

Plinovi (engl. *gas*) su fluidi u kojima međudjelovanje čestica (atoma ili molekula), osim za vrijeme kratkotrajnih sudara među njima, nema značajnu ulogu. Kad se plin nalazi u zatvorenoj posudi on se širi sve dok ravnomjerno ne ispuní sav prostor posude.

Jednadžba stanja idealnog plina (engl. *equation of state for an ideal gas*) povezuje tlak plina p , volumen V posude u kojoj se plin nalazi i temperaturu plina T ,

$$pV = nRT = NkT, \quad (9.2)$$

gdje je desna strana napisana na dva različita načina. Kad ju napišemo na prvi način, susrećemo količinu tvari n (koju izražavamo u molima) te tzv. univerzalnu plinsku konstantu $R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, dok kod drugog načina pisanja imamo broj čestica N i tzv. Boltzmannovu konstantu $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. Pri korištenju jednadžbe stanja idealnog plina obavezno je koristiti termodinamičku temperaturu izraženu u kelvinima.

Tekućine (ili kapljevine) (engl. *liquid*) su fluidi u kojima međučestične sile nastoje održati čestice na okupu. Zbog toga tekućine ne zauzimaju nužno sav prostor koji im je na raspolaganju. Kad se tekućine nalaze pod djelovanjem gravitacijske sile one se smještaju u stanje najniže gravitacijske potencijalne energije. Nalazimo ih pri dnu posude, a površina im je vodoravna. U odsutnosti gravitacije, npr. u svemirskom brodu, kapljice tekućine širile bi se unutrašnjošću broda poput čestica plina.

Stlačivi i nestlačivi fluidi: Kad se radi o plinovima, podrazumijevamo da su oni stlačivi. Smanjenju volumena plina odgovara povećanje njegovog tlaka i gustoće. Tekućine se, u usporedbi s plinovima, znatno jače opiru smanjenju volumena. Zbog toga je u mnogim situacijama opravdano tekućine smatrati nestlačivim fluidima (engl. *incompressible fluid*). Nestlačivost fluida obično izražavamo uvjetom $\rho = \text{konst}$ koji govori da je njihova gustoća nepromjenjiva.

Idealni i viskozni fluid: Međučestične sile u fluidu mogu otežati relativno gibanje (protjecanje) dijelova fluida u odnosu na neke druge njegove dijelove. Kad fluid ne protječe posve slobodno, kažemo da su u njemu prisutne viskozne sile te da je riječ o viskoznom fluidu (engl. *viscous fluid*). Fluid u kojem viskozne sile nisu prisutne zovemo idealnim fluidom (engl. *perfect fluid*).

9.2 Statika fluida i sila uzgona

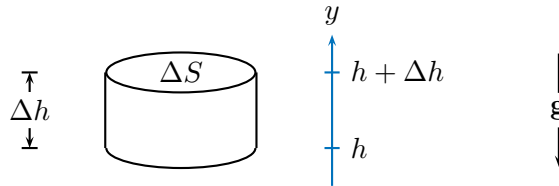
Jednadžba ravnoteže fluida u gravitacijskom polju: Zbog prisutnosti sile teže (gravitacijske sile), tlak mirnog fluida se s visinom smanjuje. Kad se radi o stlačivom fluidu, s visinom se smanjuje i njegova gustoća. Tlak p statičnog fluida zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{dy}p[y] = -\rho[y]g, \quad (9.3)$$

gdje je y visina, ρ je gustoća fluida, a g je akceleracija slobodnog pada koju ovdje smatramo konstantnom (neovisnom o visini).

Jednadžbu ravnoteže fluida u gravitacijskom polju (9.3) zovemo još i jednadžbom “hidrostatske” ravnoteže (engl. *equation of hydrostatic equilibrium*), bez obzira na to što ona vrijedi za sve fluide, a ne samo za vodu.

Jednadžba (9.3) slijedi iz razmatranja sila koje djeluju na element fluida u ravnoteži.



Gornja i donja ploha prikazanog elementa fluida imaju površinu ΔS , a visina elementa je Δh . To znači da je masa elementa fluida $\Delta m = \rho[h] \Delta V = \rho[h] \Delta S \Delta h$ te da na njega djeluje gravitacijska sila iznosa $\Delta m g$ usmjerena prema dolje. Okolni fluid djeluje na donju plohu promatranog elementa silom iznosa $p[h] \Delta S$ usmjerenom uvis te na gornju plohu silom iznosa $p[h + \Delta h] \Delta S$ usmjerenom prema dolje. Djelovanje fluida na bočne plohe promatranog elementa ne doprinosi y -komponenti ukupne sile koju sada možemo napisati kao

$$\Delta F_y = -\Delta m g + p[h] \Delta S - p[h + \Delta h] \Delta S = \dots = -\rho[h] \Delta S \Delta h g - \left. \frac{dp[y]}{dy} \right|_{y=h} \Delta h \Delta S, \quad (9.4)$$

gdje smo koristili prva dva člana Taylorovog reda

$$p[h + \Delta h] \simeq p[h] + \left. \frac{dp[y]}{dy} \right|_{y=h} \Delta h. \quad (9.5)$$

Ukupna sila koja djeluje na element fluida koji se nalazi u ravnoteži mora biti jednaka nuli te uvjet $\Delta F_y = 0$ vodi na (9.3).

Hidrostatski tlak: Rješenje jednadžbe ravnoteže (9.3) za nestlačiv fluid odnosno za fluid čija gustoća ρ ne ovisi o tlaku, a time ni o visini, možemo napisati kao

$$p[h] = p_0 - \rho g(h - h_0), \quad (9.6)$$

gdje je h visina, a $p_0 = p[h_0]$ je tlak na referentnoj visini $h = h_0$. Tlak opisan s (9.6) linearno opada s visinom, a zovemo ga hidrostatskim (engl. *hydrostatic pressure*) iako on vrijedi za bilo koji nestlačiv fluid.

Primjer 9.2.1: Hidrostatski tlak u moru

S obzirom na to da morsku vodu možemo smatrati nestlačivim fluidom, tlak u moru na dubini d možemo napisati s pomoću izraza za hidrostatski tlak (9.6). Uzmemo li kao referentnu visinu h_0 površinu mora

pri kojoj je tlak vode jednak atmosferskom tlaku, $p_0 = p[h_0] = p_{\text{atm.}}$, imamo

$$p[h] = p_{\text{atm.}} - \rho g(h - h_0), \quad h < h_0.$$

Napišemo li dubinu u moru kao $d = -(h - h_0)$, tlak u ovisnosti o dubini dan je izrazom

$$p[d] = p_{\text{atm.}} + \rho g d, \quad d > 0.$$

Koristeći približne vrijednosti $\rho \simeq 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $g \simeq 10 \text{ m s}^{-2}$ i $p_{\text{atm.}} \simeq 10^5 \text{ Pa}$, tlak u moru je

$$p[d] = p_{\text{atm.}} \left(1 + \frac{\rho g}{p_{\text{atm.}}} d \right) \simeq p_{\text{atm.}} \left(1 + \frac{d}{10 \text{ m}} \right),$$

što znači da sa svakih 10 m dubine, tlak u moru poraste približno za jednu vrijednost atmosferskog tlaka.

Primjer 9.2.2: Barometarska formula za izotermnu atmosferu

Kad bi temperatura Zemljine atmosfere bila jednaka pri svim visinama, tlak zraka bi eksponencijalno opadao s visinom u skladu s tzv. barometarskom formulom oblika

$$p[h] = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}h},$$

gdje je p_0 tlak pri visini $h = 0$, a $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$ je molna masa zraka. Kad bi temperatura bila $T = 300 \text{ K}$, omjer tlakova u točkama među kojima je visinska razlika $\Delta h = 1 \text{ km}$ iznosio bi

$$\frac{p[h + \Delta h]}{p[h]} = e^{-\frac{Mg}{RT}\Delta h} = \exp \left[-\frac{(0.029 \text{ kg mol}^{-1})(9.81 \text{ m s}^{-2})}{(8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1})(300 \text{ K})}(1000 \text{ m}) \right] \simeq 0.89,$$

što znači da bi se sa svakim kilometrom visine tlak smanjivao za približno 10 %.

Barometarsku formulu moguće je izvesti s pomoću jednadžbe stanja idealnog plina (9.2) i jednadžbe ravnoteže fluida (9.3) kako slijedi. Najprije je potrebno gustoću zraka ρ izraziti s pomoću njenog tlaka p i temperature T . Napišemo li množinu tvari kao $n = m/M$, gdje je m masa plina, jednadžba stanja (9.2) poprima oblik $pV = (m/M)RT$. Podijelimo li tu jednadžbu s V , iskoristimo li $\rho = m/V$, te izlučimo li gustoću, dobivamo $\rho = Mp/RT$. Jednadžbu ravnoteže (9.3) sada možemo napisati kao

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{Mp}{RT}g$$

odnosno provedemo li separaciju varijabli

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh.$$

Tu jednadžbu sada integriramo počevši od $h = 0$ čemu odgovara tlak p_0 do visine h pri kojoj je tlak $p[h]$. Integracijom lijeve strane dobivamo

$$\int_{p_0}^{p[h]} \frac{dp}{p} = \ln[p[h]] - \ln[p_0],$$

dok integracijom desne strane dobivamo

$$\int_0^h \left(-\frac{Mg}{RT} \right) dh' = -\frac{Mg}{RT}h.$$

Izjednačavanjem tih integrala te antilogaritmiranjem dobivamo barometarsku formulu s početka ovog primjera.

Sila uzgona (engl. *buoyancy*) je ukupna sila kojom fluid djeluje na tijelo koje se u njemu nalazi. Ona je posljedica razlike u tlaku fluida pri različitim visinama, a kako tlak fluida opada s visinom, usmjerena je uvis. Iznos sile uzgona na tijelo volumena V uronjeno u fluid gustoće ρ je

$$F_u = \rho g V, \quad (9.7)$$

što po iznosu odgovara težini istisnutog fluida.

Jednadžbu (9.7) možemo izvesti na sličan način kao što smo izveli jednadžbu ravnoteže fluida (9.3). Pro-matramo tijelo pravilnog oblika uronjeno u fluid. Na donju plohu tijela površine S fluid djeluje silom iznosa $Sp[h]$ usmjerenom uvis, dok na gornju plohu tijela fluid djeluje silom $Sp[h + \Delta h]$ usmjerenom prema dolje,

gdje je Δh visina tijela. Bočne sile se međusobno poništavaju. Iznos ukupne sile sada je

$$\Delta F_u = Sp[h] - Sp[h + \Delta h] = S(p[h] - (p[h] + p'[h]\Delta h)) = -Sp'[h]\Delta h = \rho g \Delta V, \quad (9.8)$$

gdje smo najprije koristili razvoj u red $p[h + \Delta h] = p[h] + p'[h]\Delta h$, $p'[h] = \frac{d}{dy}p[y]|_{y=h}$, a zatim smo koristili $\Delta V = S\Delta h$ i jednadžbu ravnoteže fluida (9.3).

Primjer 9.2.3: Debljina stijenke čelične plutače

Želimo konstruirati sfernu plutaču promjera $2R = 0.5 \text{ m}$ tako da kad ona pluta na površini mora samo jedna trećina njenog volumena bude uronjena. Potrebno je odabrati odgovarajuću debljinu čeličnog lima od kojeg će se izraditi stijenka plutače. (Gustoća čelika iznosi $\rho_s = 7700 \text{ kg m}^{-3}$.)

Na plutaču djeluju gravitacijska sila i sila uzgona, a kako bi plutača bila u ravnoteži, zbroj tih sila mora biti jednak nuli. Pri računanju gravitacijske sile uzimamo u obzir samo masu čelične stijenke, a zanemarujemo masu zraka unutar plutače. Iznos gravitacijske sile možemo napisati kao

$$F_g = m_p g = 4R^2 \pi d \rho_s g,$$

gdje smo masu plutače m_p izrazili kao umnožak površine plutače $4R^2 \pi$, debljine stijenke d (što približno daje volumen stijenke) i gustoće čelika ρ_s . Pri računanju uzgona uzimamo u obzir samo onaj dio kugle koji je uronjen u more, a zanemarujemo uzgon uslijed uronjenosti preostalog dijela kugle u zrak. S obzirom na to da je u more uronjena samo jedna trećina volumena kugle, iznos sile uzgona je

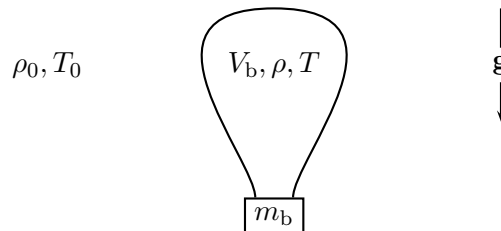
$$F_u = \rho_v g \frac{V_p}{3} = \rho_v g \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} R^3 \pi \right) = \frac{4\pi}{9} R^3 \rho_v g.$$

Izjednačujući iznos gravitacijske sile i iznos sile uzgona dolazimo do debljine stijenke

$$d = \frac{R \rho_v}{9 \rho_s} = \frac{(0.25 \text{ m}) \times (1000 \text{ kg m}^{-3})}{9 \times (7700 \text{ kg m}^{-3})} \simeq 3.6 \text{ mm}.$$

Primjer 9.2.4: Balon na vrući zrak

Balon na vrući zrak lebdi kad je gravitacijska sila koja na njega djeluje uravnotežena uzgonom. Procijenit ćemo temperaturu do koje je potrebno zagrijati zrak u balonu kako bi on lebdio ako je ukupna masa opreme i letača (ne računajući masu zraka u balonu) $m_b = 600 \text{ kg}$, volumen balona je $V_b = 2800 \text{ m}^3$, a temperatura vanjskog zraka je $T_0 = 293 \text{ K}$ (približno 20°C) pri kojoj gustoća zraka iznosi $\rho_0 = 1.20 \text{ kg m}^{-3}$.



Iznos ukupne gravitacijske sile F_g koja djeluje na balon i na vrući zrak u njemu i iznos sile uzgona F_u koja djeluje na balon možemo napisati kao

$$F_g = m_b g + \rho V_b g, \quad F_u = \rho_0 V_b g,$$

gdje je ρ gustoća vrućeg zraka temperature T , a ρ_0 je gustoća vanjskog zraka temperature T_0 . Gustoću

zraka možemo izraziti kao

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT},$$

gdje smo najprije masu zraka m napisali kao umnožak množine n i srednje molne mase M , a zatim smo iskoristili jednadžbu stanja idealnog plina $pV = nRT$. Kako su vrući zrak unutar balona i vanjski zrak pri približno jednakom tlaku (balon je odozdo otvoren), iz gornje jednadžbe slijedi

$$\rho T = \rho_0 T_0.$$

Ta relacija nam omogućuje da jednakost sila $F_g = F_u$ napišemo kao

$$m_b g + \rho_0 \frac{T_0}{T} V_b g = \rho_0 V_b g,$$

iz čega izlučujemo temperaturu vrućeg zraka

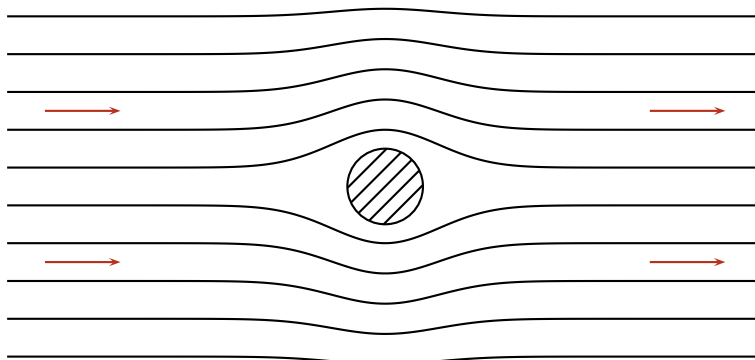
$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{m_b}{\rho_0 V_b}} = (293 \text{ K}) \times \left(1 - \frac{600 \text{ kg}}{(1.20 \text{ kg m}^{-3}) \times (2800 \text{ m}^3)} \right)^{-1} \simeq 357 \text{ K} \simeq 84^\circ \text{C}.$$

9.3 Stacionarni i laminarni tok fluida i jednadžba kontinuiteta

Stacionarni i nestacionarni tok fluida: Gibanje fluida pri kojem je vektor brzine fluida u bilo kojoj točki prostora stalan u vremenu zovemo stacionarnim tokom. Kad se vektor brzine fluida u nekoj točki prostora mijenja u vremenu kažemo da je tok fluida nestacionaran. Očigledan primjer nestacionarnog toka je tok vode u cijevovodu za vrijeme otvaranja ili zatvaranja slavine.

Laminarni i turbulentni tok fluida: Tok fluida koji možemo prikazati kao usporedno gibanje njegovih slojeva zovemo laminarnim tokom. Nasuprot laminarnom toku imamo turbulentni tok u kojem na prividno slučajan način nastaju i nestaju vrtlozi i slične u vremenu promjenjive pojave. Turbulentni tok je nestacionaran tok, dok laminarni tok može biti stacionaran, a može biti i nestacionaran.

Strujnice su krivulje u prostoru kojima opisujemo tok fluida. One se podudaraju s putanjama čestica fluida i njihov je oblik u stacionarnom toku stalan u vremenu. Slika prikazuje strujnice laminarnog toka fluida koji zaobilazi prepreku kružnog oblika.



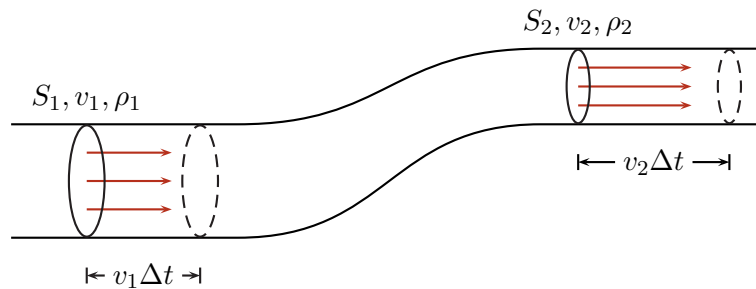
Volumni i maseni tok fluida su veličine kojima opisujemo količinu fluida koja u jedinici vremena protječe kroz neku plohu u prostoru. Volumni tok q_V je omjer volumena fluida ΔV i vremena Δt potrebnog da on protekne odabranom plohom,

$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (9.9)$$

Maseni tok q_m je omjer mase Δm i vremena Δt u kojem ona protekne plohom, a pišući $\Delta m = \rho \Delta V$, gdje je ρ gustoća fluida, može ga se povezati s volumnim tokom,

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho q_V. \quad (9.10)$$

Tok fluida kroz cijev: Kad fluid teče kroz cijev, kao plohu kroz koju iskazujemo tok fluida odabiremo poprečni presjek cijevi te govorimo o volumnom i o masenom toku fluida kroz cijev. Slika prikazuje stacionarni tok fluida kroz cijev čija površina poprečnog presjeka S nije svuda jednaka.



Na mjestu na kojem cijev ima površinu poprečnog presjeka S i brzina fluida je v , u intervalu vremena Δt njome protječe volumen fluida $\Delta V = Sv\Delta t$. To znači da je volumni tok fluida kroz cijev na tom mjestu $q_V = \Delta V/\Delta t = Sv$. Ako je na tom mjestu gustoća fluida ρ , maseni tok fluida kroz cijev je

$$q_m = \rho q_V = \rho Sv. \quad (9.11)$$

Jednadžba kontinuiteta odražava načelo očuvanja količine materije i povezuje brzinu v toka fluida s njegovom gustoćom ρ . Ovdje zbog jednostavnosti uzimamo da fluid teče kroz cijev površine poprečnog presjeka S kao što je prikazano na gornjoj slici. Očekujemo da je maseni tok fluida q_m jednak svuda duž cijevi jer bi se u protivnom u nekim dijelovima cijevi masa fluida neograničeno povećavala ili smanjivala, što nije moguće. Jednadžba kontinuiteta za tok fluida kroz cijev glasi

$$q_m = \rho q_V = \rho Sv = \text{konst} \quad (9.12)$$

Označimo li kao na gornjoj slici s 1 i 2 dva različita mjesta na cijevi, jednadžbu kontinuiteta još možemo napisati u obliku

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (9.13)$$

Kad se radi o nestlačivom fluidu njegova je gustoća svuda jednaka te jednadžba kontinuiteta poprima jednostavniji oblik

$$q_V = Sv = \text{konst}, \quad (\rho = \text{konst}) \quad (9.14)$$

što znači da je u tom slučaju volumni tok svuda duž cijevi jednak. Možemo također pisati

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (9.15)$$

gdje 1 i 2 označavaju dva različita mjesta na cijevi.

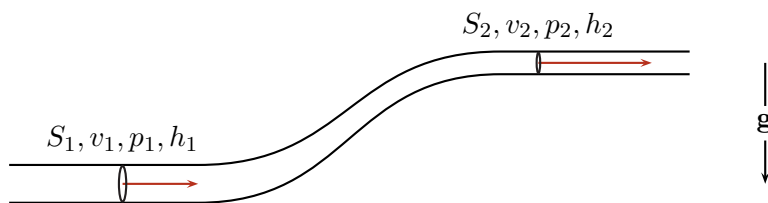
9.4 Bernoullijeva jednadžba

Bernoullijeva jednadžba odražava načelo očuvanja mehaničke energije u stacionarnom toku nestlačivog idealnog fluida. Prema Bernoullijevoj jednadžbi, duž čitave duljine odabrane strujnice vrijedi

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{konst}, \quad (9.16)$$

gdje su p , ρ , v i h redom tlak, gustoća, brzina i visina elementa fluida. Duž različitih strujnica vrijednost izraza na lijevoj strani mogu biti različite, ali duž odabrane strujnice ta se vrijednost ne mijenja.

Bernoullijevu jednadžbu često primjenjujemo na tok fluida kroz cijev odnosno na strujnice koje njome prolaze. Ako je cijev vrlo tanka u odnosu na karakteristični polumjer zakrivljenosti njenih zavoja te ako promjene njenog poprečnog presjeka nisu pretjerano nagle, možemo uzeti da na odabranom mjestu na cijevi (npr. mjesto 1 na donjoj slici) fluid ima jednaku brzinu i tlak na čitavom poprečnom presjeku cijevi odnosno na svim strujnicama unutar cijevi na tom mjestu. Također možemo uzeti da se na odabranom mjestu na cijevi sve strujnice nalaze na istoj visini.



Označimo li s 1 i 2 različita mjesta na cijevi, Bernoullijevu jednadžbu još možemo napisati kao

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2. \quad (9.17)$$

Podsjetimo se da jednadžba kontinuiteta u obliku (9.15) povezuje brzinu nestlačivog fluida s površinom poprečnog presjeka cijevi.

Izvod Bernoullijeve jednadžbe: Bernoullijevu jednadžbu možemo izvesti razmatranjem mehaničke energije elementa fluida koji se nalazi između dviju zamišljenih graničnih ploha koje zajedno s fluidom putuju kroz cijev. Promjena energije ΔE promatranog elementa fluida koja nastupa u intervalu vremena Δt jednaka je radu ΔW_1 koji tlak fluida obavlja djelujući na stražnju graničnu plohu promatranog elementa fluida, umanjeno za rad ΔW_2 koji sam element fluida obavlja potiskujući daljnji fluid svojom prednjom graničnom plohom. Možemo pisati

$$\Delta E = \Delta W_1 - \Delta W_2 = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) q_V \Delta t, \quad (9.18)$$

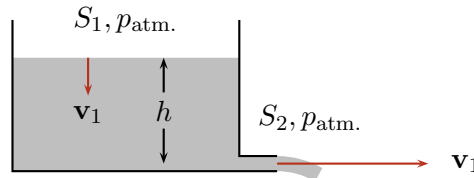
gdje smo najprije sile izrazili kao umnožak površine poprečnog presjeka cijevi i tlaka, pomake kao umnožak brzine fluida i proteklog vremena, a zatim smo koristili jednadžbu kontinuiteta (9.15) prema kojoj je umnožak površine poprečnog presjeka i brzine jednak volumnom toku q_V (koji je jednak svugdje duž cijevi jer se radi o nestlačivom fluidu). S druge strane, promjena energije ΔE se sastoji od promjene kinetičke energije i od promjene gravitacijske potencijalne energije promatranog elementa fluida. Ako u intervalu Δt kroz cijev protječe masa fluida Δm , na stražnjem kraju promatranog elementa fluida njegova se kinetička energija umanjuje za $\Delta K_1 = \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$, dok se na prednjem kraju ona povećava za $\Delta K_2 = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2$. Njegova gravitacijska potencijalna energija se na njegovom stražnjem kraju umanjuje za $\Delta U_1 = \Delta m g h_1$, a na prednjem kraju se povećava za $\Delta U_2 = \Delta m g h_2$. Promjenu energije sada možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\Delta K_1 + \Delta K_2 - \Delta U_1 + \Delta U_2 = -\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \Delta m g h_1 + \Delta m g h_2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h_1 + \rho g h_2 \right) q_V \Delta t, \end{aligned} \quad (9.19)$$

gdje smo element mase napisali kao $\Delta m = q_m \Delta t = \rho q_V \Delta t$. Konačno, izjednačavanjem energija danih izrazima (9.18) i (9.19) dobivamo Bernoullijevu jednadžbu u obliku (9.17).

Primjer 9.4.1: Brzina istjecanja fluida (Torricellijev zakon istjecanja)

Korištenjem Bernoullijeve jednadžbe možemo odrediti brzinu kojom tekućina istječe kroz maleni otvor u stijenci posude. Pretpostavljamo da je posuda odozgo otvorena, da se površina tekućine nalazi na visini h iznad otvora te da tekućina kroz otvor slobodno istječe u atmosferu.



Posudu s otvorom shvaćamo kao cijev kroz koju teče tekućina. Pri površini tekućine Bernoullijevu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_{\text{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h.$$

Budući da je površina tekućine u kontaktu s atmosferom, tlak tekućine p_1 jednak je atmosferskom tlaku $p_{\text{atm.}}$, v_1 je brzina kojom se površina spušta, a visinu površine h_1 iskazujemo u odnosu na referentnu razinu otvora pa imamo $h_1 = h$. Pri otvoru posude Bernoullijevu jednadžbu pišemo kao

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_{\text{atm.}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

I ovdje je tekućina u kontaktu s atmosferom pa uzimamo $p_2 = p_{\text{atm.}}$, brzina toka v_2 je brzina koju želimo odrediti, a $h_2 = 0$ jer razinu otvora koristimo kao referentnu razinu. Izjednačavanjem desnih strana gornjih dviju jednadžbi te korištenjem jednadžbe kontinuiteta u obliku (9.15) kako bismo eliminirali brzinu površine v_1 slijedi

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (S_2/S_1)^2}},$$

gdje je S_1 površina vodoravnog presjeka posude, a S_2 je površina otvora kroz koji voda istječe. Ako je omjer S_2/S_1 znatno manji od jedinice, kvadrat tog omjera u nazivniku pod korijenom možemo zanemariti nakon čega za brzinu istjecanja dobivamo

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Gornji izraz poznat je kao Torricellijev zakon istjecanja.

Primjer 9.4.2: Trajanje istjecanja idealnog fluida kroz mali otvor u stijenci posude

Nastavljajući razmatranje istjecanja tekućine iz posude iz prethodnog primjera, brzinu spuštanja površine vode možemo izraziti kao

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{2gh}{1 - (S_2/S_1)^2}} = -\frac{dh}{dt}.$$

S pomoću tog izraza možemo izračunati vrijeme T koje je potrebno da sva tekućina isticke kroz otvor odnosno da se površina tekućine spusti do samog otvora, ako je u početnom trenutku ona bila na visini $h = H$ iznad otvora. Gornja diferencijalna jednadžba dopušta separaciju varijabli te je možemo napisati

u obliku

$$dt = -\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{1 - (S_2/S_1)^2}{2gh}} dh.$$

Integracijom od početnog do konačnog stanja,

$$\int_0^T dt = -\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{1 - (S_2/S_1)^2}{2g}} \int_{h=H}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

dobivamo

$$T = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}.$$

Kad je omjer površina S_2/S_1 znatno manji od jedinice, kvadrat tog omjera pod korijenom možemo zanemariti. Na primjer, kad bismo imali $S_1 = 1 \text{ m}^2$, $S_2 = 1 \text{ cm}^2$ i početnu visinu $H = 1 \text{ m}$, istjecanje tekućine trajalo bi približno

$$T \simeq \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}} \simeq \frac{1 \text{ m}^2}{10^{-4} \text{ m}^2} \sqrt{\frac{2 \times (1 \text{ m})}{10 \text{ m s}^{-2}}} \simeq 75 \text{ min}.$$

Bernoullijev princip izražen je tvrdnjom da većoj brzini fluida općenito odgovara manji tlak. Kad se radi o nestlačivom fluidu, tu tvrdnju možemo pročitati iz Bernoullijeve jednadžbe (9.16), a Bernoullijev princip kazuje da ju možemo primijeniti i kad je riječ o stlačivim fluidima. Za razliku od kvantitativne Bernoullijeve jednadžbe, Bernoullijev princip je samo kvalitativna tvrdnja koja nam pomaže prepoznati i barem djelomično objasniti neke fizičke pojave pri gibanju fluida.

Primjer 9.4.3: Avionsko krilo (aerofoil) i dinamički uzgon

Avionska krila oblikovana su tako da pri njihovom gibanju kroz fluid dolazi do djelovanja sile dinamičkog uzgona. Riječ je o sili koja djeluje uvis, dakle okomito na smjer gibanja aviona, i koja omogućuje let aviona time što uravnotežuje gravitacijsku silu. Nastanak sile dinamičkog uzgona se u grubim crtama može objasniti primjenom Bernoullijevog principa.

Situaciju je najlakše razmotriti u referentnom okviru u kojem avionsko krilo miruje, a zrak struji pored njega. Slika prikazuje mirno krilo i strujnice zraka ispred njega.

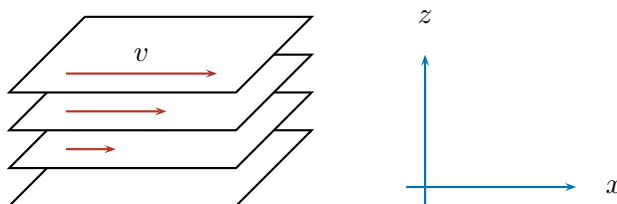


Neke strujnice će obići krilo s gornje, a neke s njegove donje strane. Nakon toga će se strujnice ponovo sastati iza krila. Zbog jače izbočenosti gornje strane krila, strujnice koje obilaze krilo s gornje strane dulje su od onih koje ga obilaze s donje strane. To znači da je brzina zraka uz gornju plohu krila veća od brzine zraka uz donju plohu, a prema Bernoullijevu principu to znači da je tlak zraka uz gornju plohu manji od tlaka uz donju plohu. Slijedi da na krilo djeluje sila usmjerena uvis.

Napomena: Ovo objašnjenje treba prihvatiti kao jednostavan primjer primjene Bernoullijevog principa, a nipošto ga se ne smije uzeti kao potpuno objašnjenje pojave dinamičkog uzgona.

9.5 Viskoznost fluida

Viskozna sila: Sile koje djeluju među česticama realnog fluida otežavaju njegovo protjecanje. Kad je tok laminaran, kažemo da među susjednim slojevima fluida djeluju viskozne sile. Slika prikazuje slojeve u laminarnom toku fluida koji se, jedan u odnosu na drugoga, gibaju različitim brzinama.



Najniži sloj na slici miruje, a slojevi iznad njega gibaju se u smjeru x -osi brzinom koja raste s udaljenošću od najnižeg sloja (poput toka vrlo spore rijeke gdje voda uz dno miruje, a površina se giba). Rast iznosa brzine toka v u smjeru okomitom na smjer toka, a to je na gornjoj slici smjer z -osi, izražavamo omjerom $\Delta v / \Delta z$ odnosno derivacijom dv/dz koju zovemo gradijentom brzine. Iznos viskozne sile ΔF kojom susjedni slojevi djeluju jedan na drugoga razmjeran je površini promatranog sloja ΔS , gradijentu brzine dv/dz te **koeficijentu dinamičke viskoznosti fluida** μ ,

$$\Delta F = \mu \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (9.20)$$

Smjer viskozne sile koja djeluje na neki sloj odgovara smjeru relativnog gibanja susjednog sloja u odnosu na promatrani sloj. Odaberemo li na gornjoj slici neki sloj, onda sloj iznad tog sloja djeluje na odabrani sloj silom u smjeru x -osi, a sloj koji se nalazi ispod odabranog sloja djeluje silom suprotnog smjera. Slijedi da je zbroj viskoznih sila na odabrani sloj jednak nuli, što objašnjava gibanje tog sloja stalnom brzinom.

Stokesov zakon (sila): Kad se dovoljno malena sfera dovoljno sporo giba kroz viskozni fluid na nju djeluje sila otpora opisana tzv. Stokesovim zakonom, ili kraće Stokesova sila. Njen iznos dan je izrazom

$$F = 6\pi\mu Rv \quad (9.21)$$

gdje je R polumjer sfere, v njena brzina u odnosu na fluid, a μ je koeficijent dinamičke viskoznosti fluida. Obično se uzima da je Stokesov zakon primjenjiv ako je **Reynoldsov broj za gibanje sfere kroz fluid** manji od 10, pri čemu Reynoldsov broj računamo s pomoću izraza

$$\text{Re} = \frac{2\rho_f v R}{\mu}, \quad (9.22)$$

gdje je ρ_f gustoća fluida.

Primjer 9.5.1: Brzina kojom sitna kuglica tone u viskoznom fluidu

Plastična kuglica promjera $2R = 0.5 \text{ mm}$ i gustoće $\rho_k = 1100 \text{ kg m}^{-3}$ tone u vodi. Želimo procijeniti brzinu kojom ona tone.

Pretpostavimo li da kuglica tone dovoljno sporo da je opravdano primijeniti Stokesov zakon, iznos ukupne sile koja djeluje na kuglicu možemo napisati kao

$$F = (\rho_k - \rho_f)Vg - 6\pi\mu Rv,$$

gdje prvi član na desnoj strani predstavlja zbroj težine kuglice i sile uzgona, a drugi član je Stokesova sila. Ako kuglica početno miruje, njena brzina se postupno povećava i asimptotski se približava vrijednosti pri kojoj ukupna sila iščezava. Tu brzinu označavamo s v_∞ i zovemo ju asimptotskom brzinom. Iz uvjeta $F = 0$ slijedi

$$v_\infty = \frac{(\rho_k - \rho_f)V_k g}{6\pi\mu R} = \frac{2(\rho_k - \rho_f)gR^2}{9\mu},$$

gdje smo volumen kuglice izrazili kao $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. S obzirom na to da smo asimptotsku brzinu odredili pretpostavljajući primjenjivost Stokesova zakona, najprije moramo provjeriti je li ona zaista dovoljno malena odnosno je li Reynoldsov broj manji od 10. Reynoldsov broj za gibanje kuglice asimptotskom brzinom možemo napisati kao

$$\text{Re} = \frac{2\rho_f v_\infty R}{\mu} = \frac{4\rho_f(\rho_k - \rho_f)gR^3}{9\mu^2}.$$

U ovom primjeru, koristeći gustoću vode $\rho_f = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ i koeficijent dinamičke viskoznosti vode $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$ (pri 20°), dobivamo

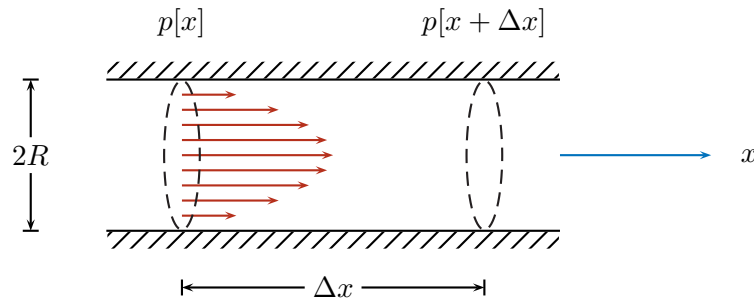
$$\text{Re} = \frac{4 \times (1000 \text{ kg m}^{-3}) \times ((1100 - 1000) \text{ kg m}^{-3}) \times (10 \text{ m s}^{-2}) \times (0.25 \times 10^{-3} \text{ m})^3}{9 \times (1 \times 10^{-3} \text{ Pa s})^2} \simeq 7$$

što opravdava primjenu Stokesova zakona pri određivanju asimptotske brzine. Konačno, izraz za asimptotsku brzinu nam daje

$$v_\infty = \frac{2 \times ((1100 - 1000) \text{ kg m}^{-3}) \times (10 \text{ m s}^{-2}) \times (0.25 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{9 \times (1 \times 10^{-3} \text{ Pa s})} \simeq 1.4 \text{ cm s}^{-1}.$$

Važno je uočiti da za veću kuglicu ili za kuglicu veće gustoće primjena Stokesova zakona za računanje asimptotske brzine više ne bi bila opravdana.

Poiseuilleov zakon protjecanja: Kad viskozni fluid dovoljno sporo teče kroz cijev, tok fluida je laminaran. Fluid uz stijenku cijevi miruje, a u sredini cijevi brzina fluida poprima maksimalnu brzinu. Slika prikazuje raspodjelu brzine fluida u takvoj situaciji.



Zbog viskoznih sila među slojevima fluida prisutan je otpor pri njegovom protjecanju kroz cijev. Kako bi se taj otpor svladao i tok fluida kroz cijev održao stalnim, tlak $p[x]$ sa stražnje strane promatranog elementa fluida duljine Δx mora biti veći od tlaka $p[x + \Delta x]$ s prednje strane promatranog elementa fluida. Drugim riječima, tlak duž cijevi se smanjuje u smjeru u kojem fluid teče. Kad fluid teče u smjeru x -osi, smanjenje tlaka duž cijevi opisujemo omjerom

$$\left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right| = \frac{p[x] - p[x + \Delta x]}{\Delta x}, \quad (9.23)$$

a Poiseuilleov zakon povezuje volumni tok nestlačivog viskoznog fluida s polumjerom cijevi R , dinamičkom viskoznošću fluida μ te s omjerom $|\Delta p/\Delta x|$,

$$q_V = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right|. \quad (9.24)$$

Napišemo li volumni tok kao $q_V = S\bar{v}$, gdje je \bar{v} srednja brzina fluida, a $S = R^2\pi$ površina poprečnog presjeka cijevi, srednju brzinu fluida možemo koristeći (9.24) izraziti kao

$$\bar{v} = \frac{R^2}{8\mu} \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right|. \quad (9.25)$$

(Izvod Poiseuilleovog zakona je zbog složenosti dan u dodatku F.) Poiseuilleov zakon primjenjiv je kad je tok fluida kroz cijev dovoljno spor da ga možemo smatrati laminarnim, a procjenu o tome je li tok laminaran daje nam **Reynoldsov broj za tok fluida kroz cijev** polumjera R ,

$$\text{Re} = \frac{2\rho_f \bar{v} R}{\mu}, \quad (9.26)$$

gdje je ρ_f gustoća fluida. Kad je Reynoldsov broj manji od 2100, tok fluida možemo smatrati laminarnim i možemo koristiti Poiseuilleov zakon.

Primjer 9.5.2: Brzina istjecanja viskoznog fluida iz posude kroz usku cijev

Medicinska igla duljine $\ell = 5 \text{ cm}$ i unutarnjeg promjera $2R = 0.6 \text{ mm}$ zabijena je vodoravno u stijenku odozgo otvorene plastične boce, pri visini $h = 10 \text{ cm}$ ispod površine vode u boci. Zanima nas odrediti početni volumni tok vode kroz iglu.

Najprije uočavamo da razlika tlaka pri unutarnjem i pri vanjskom kraju igle proizlazi iz hidrostatskog tlaka vode pri dubini h te da iznosi $\Delta p = \rho_v g h$. Zatim pretpostavljajući da je tok fluida kroz iglu laminaran, na osnovu Poiseuilleovog zakona računamo srednju brzinu fluida

$$\bar{v} = \frac{R^2}{8\mu} \left| \frac{\Delta p}{\Delta x} \right| = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\rho_f g h}{\ell} \simeq 0.22 \text{ m s}^{-1}.$$

Kako bismo provjerili opravdanost polazne pretpostavke o laminarnom toku računamo Reynoldsov broj

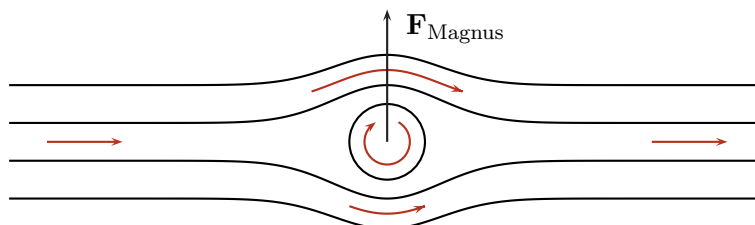
$$\text{Re} = \frac{2\rho_v \bar{v} R}{\mu} = \frac{2 \times (1000 \text{ kg m}^{-3}) \times (0.22 \text{ m s}^{-1}) \times (0.3 \times 10^{-3} \text{ m})}{1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa s}} \simeq 132.$$

S obzirom na to da je dobivena vrijednost Reynoldsovog broja manja od 2100 zaključujemo da tok jest laminaran te da je opravdano koristiti raniji rezultat o srednjoj brzini toka vode u igli. Traženi volumni tok možemo izraziti kao

$$q_V = S\bar{v} = R^2 \pi \bar{v} = (0.3 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \times \pi \times (0.22 \text{ m s}^{-1}) \simeq 62.4 \text{ mm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Primjer 9.5.3: Magnusova pojava

Kad viskozni fluid teče pored valjka ili sfere koja se okreće oko osi koja je okomita na smjer toka fluida, osim sile otpora koja na valjak ili sferu djeluje u smjeru toka fluida, nastaje i poprečna sila $\mathbf{F}_{\text{Magnus}}$ koja djeluje u smjeru prikazanom na slici.



Nastanak poprečne sile poznat je kao **Magnusova pojava**, a može se objasniti viskoznošću fluida i primjenom Bernoullijevog principa. Zbog viskoznosti, fluid koji prijanja uz tijelo giba se zajedno s njegovom površinom (tijelo "povlači" fluid za sobom), a to se gibanje dijelom prenosi i na susjedne slojeve fluida. To znači da rotirajuće tijelo na slici ubrzava tok fluida koji ga obilazi s gornje strane, a usporava tok fluida koji ga obilazi s donje strane. Nadalje, prema Bernoullijevu principu, bržem fluidu odgovara manji tlak (i obrnuto), što znači da je s gornje strane rotirajućeg tijela tlak manji, a s donje strane tijela je tlak veći nego što bi bio kad bi fluid zaobilazio tijelo koje ne rotira. Slijedi da zbog razlike

tlakova s dviju strana rotirajućeg tijela mora nastati sila koja, u situaciji prikazanoj na slici, djeluje prema gore. Tu silu nazivamo još i Magnusovom silom.

Zadaci

Z.9.1: Zatvoreni spremnik sfernog oblika promjera $2R = 2\text{ m}$ pričvršćen je za vagon koji se giba vodoravnom prugom akceleracijom stalnog iznosa $A = 5\text{ m s}^{-2}$. Rezervoar je ispunjen vodom ($\rho_v = 1000\text{ kg m}^{-3}$), a osim vode je u njemu ostao zarobljen mali mjehur zraka pri atmosferskom tlaku ($p_{\text{atm.}} = 1.00 \times 10^5\text{ Pa}$). Odredite tlak vode u središtu spremnika.

$$\text{Rj: } p = p_{\text{atm.}} + \rho_v R \sqrt{g^2 + A^2} = 1.11 \times 10^5\text{ Pa}$$

Z.9.2: Zatvoreni spremnik oblika uspravno postavljenog cilindra visine $H = 5.00\text{ m}$ napunjen je vodom ($\rho_v = 1000\text{ kg m}^{-3}$) do visine $h_0 = 3.00\text{ m}$ u odnosu na dno, a u preostalom dijelu se nalazi zrak pri atmosferskom tlaku ($p_{\text{atm.}} = 1.01 \times 10^5\text{ Pa}$). Odredite visinu h nad dnom spremnika do koje će se spustiti površina vode otvorimo li maleni otvor pri samom dnu spremnika kroz koji voda može istjecati u atmosferu. Pretpostavljamo da voda istječe dovoljno polako da temperaturu zraka možemo smatrati stalnom te da prestaje teći kad se tlak pri dnu spremnika izjednači s atmosferskim tlakom.

$$\text{Rj: } h = \frac{H}{2} + \frac{p_{\text{atm.}}}{2g\rho_v} \left(1 - \sqrt{(1 - \rho_v g H)^2 - 4\rho_v g h_0 / p_{\text{atm.}}} \right) = 2.39\text{ m}$$

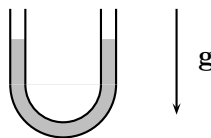
Z.9.3: Vaga na kojoj se nalazi posuda s vodom pokazuje vrijednost $m_1 = 3.8\text{ kg}$, a uronimo li u vodu uteg mase $m_u = 1.1\text{ kg}$ obješen o tanku nit tako da on ne dodiruje dno posude, ali tako da bude u cijelosti potopljen (nit je napeta), vaga pokazuje vrijednost mase $m_2 = 4.2\text{ kg}$. Odredite gustoću utega. (Gustoća vode $\rho_v = 1000\text{ kg m}^{-3}$.)

$$\text{Rj: } \rho_u = \frac{m_u}{m_2 - m_1} \rho_v = 2750\text{ kg m}^{-3}$$

Z.9.4: U uspravno postavljenoj cilindričnoj posudi promjera $2R = 20\text{ cm}$ nalazi se voda na kojoj pluta komad stiropora ("čamac"), a na stiroporu se nalazi ("plovi") aluminijski uteg mase $m_{\text{Al}} = 100\text{ g}$. U nekom trenutku uteg sklizne sa stiropora i potone na dno posude. Odredite za koliko će se spustiti razina vode u posudi. (Gustoća aluminijske $\rho_{\text{Al}} = 2750\text{ kg m}^{-3}$, gustoća vode $\rho_v = 1000\text{ kg m}^{-3}$.)

$$\text{Rj: } \Delta h = \frac{m_{\text{Al}}}{R^2 \pi} (\rho_{\text{Al}}^{-1} - \rho_v^{-1}) = 2.0\text{ mm}$$

Z.9.5: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\text{ cm}^2$, s oba otvorena kraja, nalazi se $m = 20\text{ g}$ vode (vidi sliku). Odredite period titranja razine vode.



$$\text{Rj: } T = 2\pi \sqrt{m/2\rho S g} \simeq 0.634\text{ s}$$

Z.9.6: Cilindrična posuda površine baze $S = 0.01\text{ m}^2$ postavljena je uspravno, odozgo je otvorena, a do neke visine je napunjena uljem gustoće $\rho = 850\text{ kg m}^{-3}$ i viskoznosti $\mu = 0.25\text{ Pa s}$. Pri samom dnu posude ulje istječe u atmosferu kroz vodoravnu cjevčicu duljine $\ell = 2.5\text{ cm}$ i unutarnjeg promjera $2R = 2\text{ mm}$. Pretpostavljajući da ulje kroz cjevčicu teče u skladu s Poiseuilleovim zakonom (laminarni tok viskoznog fluida kroz cijev), odredi nakon koliko vremena će polovica ulja isteći iz posude.

$$\text{Rj: } \tau = \frac{8 \ln 2 \mu \ell S}{\pi R^4 \rho g} \simeq 3.675\text{ h}$$

10 Elastičnost

Zakoni gibanja krutog tijela (vidi poglavlje 8) ili Bernoullijeva jednadžba za nestlačiv fluid (poglavlje 9) počivaju na pretpostavci o savršenoj krutosti ili nestlačivosti materije od koje su ta tijela izgrađena. U stvarnosti, međutim, kruta tijela i nestlačivi fluidi ne postoje. Stvarna čvrsta tijela više su ili manje savitljiva, a fluidi su stlačivi. U ovom poglavlju ćemo upoznati koncept elastičnosti materije s pomoću kojega u mehanici opisujemo tijela koja pod djelovanjem vanjskih sila mijenjaju svoj oblik.

U okviru specijalne teorije relativnosti, prema kojoj ništa, pa tako ni informacija, ne može putovati brzinom većom od brzine širenja svjetlosti u vakuumu (vidi poglavlje 13), čak niti sama pretpostavka o savršenoj krutosti ili nestlačivosti materije nije dopuštena. Kad bi kruti štap zaista postojao, pomakom jednog njegovog kraja istovremeno bi se pomakao i njegov drugi kraj. Time bismo imali situaciju u kojoj je informacija o pomaku jednog kraja štapa trenutno prevalila udaljenost jednaku duljini štapa, a to nije dopušteno. U stvarnosti, pomak jednog kraja štapa izaziva deformaciju i naprezanje u materijalu koje postupno, poput vala, brzinom manjom od brzine svjetlosti napreduje duž štapa prema njegovom drugom kraju. Upravo koncept elastičnosti koji povezuje deformaciju i naprezanje i kojime se bavi ovo poglavlje ima ključnu ulogu pri opisu mehaničkih valova kojima ćemo se baviti kasnije (vidi poglavlje 7).

10.1 Naprezanje, deformacija i linearno područje elastičnosti

Plastične i elastične deformacije: Podvrgnemo li neko stvarno tijelo djelovanju vanjskih sila, doći će do promjena njegovog oblika koje zovemo deformacijama. Kad je riječ o fluidu, smisleno je govoriti isključivo o promjenama njegova volumena, dok kod čvrstih tijela govorimo o promjenama oblika u punom smislu te riječi. Po prestanku djelovanja vanjskih sila, deformacije mogu ostati prisutne ili posve nestati. Deformacije koje ostaju prisutne zovemo plastičnim deformacijama i njima se ovdje ne bavimo. Deformacije koje nestaju, a to znači da tijelo poprima prvobitni oblik, zovemo elastičnim deformacijama. Tijela koja dopuštaju elastične deformacije zovemo elastičnim tijelima, a materijale od kojih su ona izgrađena zovemo elastičnim materijalima.

Relativna deformacija (engl. *strain*) je fizička veličina koja opisuje deformaciju elementa materije unutar nekog tijela. Upoznat ćemo vlačnu, tlačnu i smičnu relativnu deformaciju, a u svim slučajevima možemo reći da je ona definirana kao omjer promjene neke veličine (npr. duljina ili volumen) i iznosa te veličine koji je prethodio promjeni,

$$(\text{rel. deformacija}) = \frac{(\text{promjena iznosa veličine})}{(\text{iznos veličine})}. \quad (10.1)$$

Relativna deformacija je bezdimenzionalna veličina.

Naprezanje (engl. *stress*) je fizička veličina koja opisuje sile koje djeluju unutar nekog tijela. Upoznat ćemo vlačno, tlačno i smično naprezanje, a u svim slučajevima možemo reći da je naprezanje definirano kao omjer iznosa sile i površine na koju sila djeluje,

$$(\text{naprezanje}) = \frac{(\text{iznos sile})}{(\text{površina})}. \quad (10.2)$$

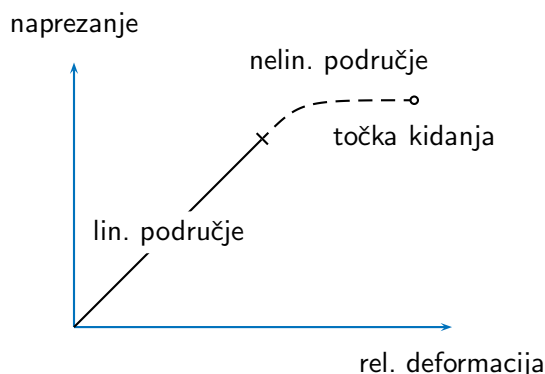
Naprezanje ima fizičku dimenziju tlaka ($ML^{-2}T^{-2}$) te mu u sustavu SI odgovara mjerna jedinica Pa (paskal).

Nekoliko napomena o naprezanju i relativnoj deformaciji:

- Naprezanje i relativna deformacija povezane su veličine. Može se reći da naprezanje izaziva relativnu deformaciju, ali se isto tako može reći da relativna deformacija izaziva naprezanje u materijalu.
- U jednostavnim situacijama svuda unutar tijela naprezanje može imati istu vrijednost, ali to općenito ne mora biti tako. Isto vrijedi i za relativnu deformaciju.

- Naprezanje i relativna deformacija mogu biti prisutne unutar tijela čak i kad na njega ne djeluju vanjske sile.

Linearno područje elastičnosti: Slika prikazuje moguću kvalitativnu ovisnost naprezanja i relativne deformacije u nekom elastičnom materijalu.



Područje dovoljno malenih naprezanja i deformacija u kojem su te dvije veličine razmjerne jedna drugoj zovemo linearnim područjem elastičnosti. U većini primjena elastičnih materijala u tehnici, naprezanja i deformacije materijala nalaze se unutar tog područja.

Kad naprezanja i deformacije napuste linearno područje njihova međuovisnost može poprimiti različite oblike te govorimo o nelinearnom području elastičnosti. Daljnjim povećavanjem naprezanja ili deformacije ulazimo u područje plastičnih deformacija, ili pak (kao na gornjoj slici) dolazi do kidanja materijala.

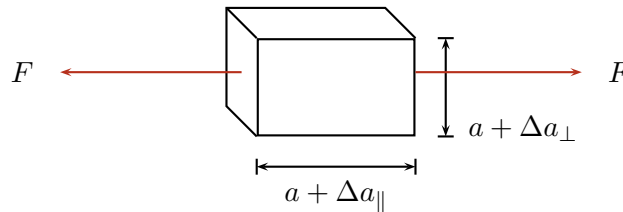
Modul elastičnosti: Kad se naprezanja i deformacije nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, tzv. modul elastičnosti definira se kao konstanta proporcionalnosti (omjer) između naprezanja i relativne deformacije,

$$(\text{modul elastičnosti}) = \frac{(\text{naprezanje})}{(\text{rel. deformacija})}. \quad (10.3)$$

Modul elastičnosti svojstvo je materijala od kojeg je tijelo načinjeno, a različitim oblicima naprezanja (vlačno, tlačno i smično) odgovaraju različiti moduli elastičnosti. Modul elastičnosti ima dimenziju tlaka i odgovara mu mjerna jedinica Pa (paskal).

10.2 Vlačno naprezanje (vlak)

Slika prikazuje element elastičnog materijala koji u odsutnosti naprezanja ima oblik kocke sa stranicom a , a koji je ovdje pod djelovanjem sila iznosa F na njegove suprotne strane poprimio oblik kvadra.



Naprezanje prikazano na slici zovemo vlačnim naprezanjem ili jednostavno vlakom. Kad sile imaju smjer kao na slici, kocka se duž pravca djelovanja sile ($\Delta a_{||} > 0$) produljuje, a u poprečnom smjeru se sažima ($\Delta a_{\perp} < 0$). Kad je smjer sile suprotan prikazanome, dolazi do uzdužnog sažimanja kocke ($\Delta a_{||} < 0$) te do njenog poprečnog širenja ($\Delta a_{\perp} > 0$), a kažemo da je riječ o negativnom vlakom.

Vlačno naprezanje (engl. *tensile stress*) je definirano kao omjer jakosti sile F i površine S na koju sila djeluje,

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (10.4)$$

Prema dogovoru, $\sigma > 0$ kad se element materijala produljuje u smjeru vlaka, a $\sigma < 0$ kad se element materijala skraćuje.

Uzdužna relativna deformacija pri vlačnom naprezanju odnosno relativna deformacija duljine elementa materijala u smjeru vlačnog naprezanja definirana je kao omjer promjene duljine elementa materijala $\Delta a_{||}$ i njegove duljine a koja je prethodila naprezanju,

$$\delta_{||} = \frac{\Delta a_{||}}{a}, \quad (10.5)$$

te ima isti predznak kao i naprezanje σ .

Youngov modul elastičnosti (engl. *Young's modulus*) nekog materijala je omjer vlačnog naprezanja σ i uzdužne relativne deformacije tijela $\delta_{||}$ pri vlačnom naprezanju,

$$E = \frac{\sigma}{\delta_{||}}. \quad (10.6)$$

Podrazumijeva se da su naprezanje i relativna deformacija unutar linearnog područja elastičnosti. S obzirom na to da su naprezanje σ i relativna deformacija $\delta_{||}$ istog predznaka, Youngov modul E je pozitivna veličina.

Poprečna relativna deformacija pri vlačnom naprezanju definirana je kao omjer promjene poprečne duljine Δa_{\perp} elementa materijala i poprečne duljine a koja je prethodila naprezanju,

$$\delta_{\perp} = \frac{\Delta a_{\perp}}{a}. \quad (10.7)$$

Poprečna relativna deformacija δ_{\perp} i uzdužna relativna deformacija $\delta_{||}$ su pri vlačnom naprezanju suprotnih predznaka.

Poissonov omjer (engl. *Poisson's ratio*) nekog materijala je omjer poprečne i uzdužne relativne deformacije tijela pri vlačnom naprezanju,

$$\mu = -\frac{\delta_{\perp}}{\delta_{||}}. \quad (10.8)$$

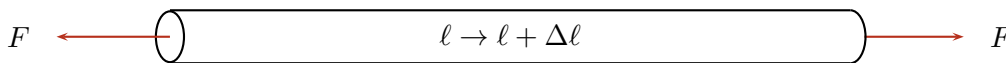
Budući da su relativne deformacije δ_{\perp} i δ_{\parallel} suprotnih predznaka, u definiciju je uključen negativan predznak što Poissonov omjer čini pozitivnom veličinom. Za većinu materijala vrijedi $0 \leq \mu \leq 1/2$.

Napomene o vlačnom naprezanju:

- Kad je riječ o fluidu, nema smisla govoriti o vlačnom naprezanju, već isključivo o tlačnom naprezanju (poglavlje 10.3).
- Kad je elastično tijelo pravilnog oblika (npr. kvadar ili valjak) izloženo djelovanju vanjskih “vlačnih” sila, naprezanja i relativne deformacije unutar tijela svuda su jednake te gornje izraze koji se odnose na element materijala možemo primijeniti na čitavo tijelo. U takvoj je situaciji relativna deformacija svakog elementa materijala jednaka relativnoj deformaciji čitavog tijela (vidi primjer 10.2.1, a situaciju u kojoj to nije tako vidi u zadatku 10.6).
- Vlačno naprezanje elementa materijala može biti prisutno duž jedne, duž dvije ili duž sve tri međusobno okomite osi u prostoru. Duž različitih osi vlačno naprezanje može poprimiti različite vrijednosti (vidi zadatak 10.1).

Primjer 10.2.1: Konstanta elastičnosti šipke (Hookeov zakon)

Slika prikazuje šipku duljine ℓ i polumjera r kada na njene krajeve djeluju sile.



Zbog jednostavnosti oblika promatranog tijela dopušteno je pretpostaviti da je naprezanje unutar tijela svuda jednako, a to znači da čitavo tijelo možemo promatrati kao jedan element materijala. (Kao primjer situacije u kojoj to nije tako vidi zadatak 10.6.)

Iznos sile F koja dovodi do produljenja šipke $\Delta\ell$ možemo izraziti koristeći se redom izrazima (10.4), (10.6) i (10.5),

$$F = S\sigma = SE\delta_{\parallel} = SE\frac{\Delta\ell}{\ell},$$

što još možemo izraziti i kao

$$F = k\Delta\ell, \quad \text{gdje je} \quad k = \frac{SE}{\ell}.$$

U gornjem izrazu prepoznavamo istovjetnost s izrazom za silu opruge odnosno Hookeov zakon, a konstantu k možemo zvati konstantom elastičnosti šipke.

Kad bi se radilo o čeličnoj šipci ($E = 200 \text{ GPa}$) duljine $\ell = 1 \text{ m}$ i promjera $2r = 1 \text{ cm}$, njena konstanta elastičnosti bila bi

$$k = \frac{SE}{\ell} = \frac{r^2\pi E}{\ell} = \frac{(0.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \pi (200 \times 10^9 \text{ Pa})}{(1 \text{ m})} = 15.7 \times 10^6 \text{ N m}^{-1}.$$

Primjer 10.2.2: Relativna deformacija volumena pri vlačnom naprezanju

Razmotrimo li element elastičnog materijala oblika kocke sa stranicom a koji je izložen vlačnom naprezanju, njegov volumen je

$$V' = (a + \Delta a_{\parallel})(a + \Delta a_{\perp})^2 = a^3 \left(1 + \frac{\Delta a_{\parallel}}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta a_{\perp}}{a}\right)^2 = V(1 + \delta_{\parallel})(1 + \delta_{\perp})^2,$$

gdje je $V = a^3$ volumen elementa materijala kad on nije izložen naprezanju. Kako su relativne deformacije u linearnom području elastičnosti gotovo uvijek znatno manje od jedinice, u gornjem izrazu možemo odbaciti sve članove razmjerni s δ^2 i δ^3 te imamo

$$V' = V(1 + \delta_{\parallel} + 2\delta_{\perp} + \dots).$$

Promjenu volumena sada možemo napisati kao

$$\Delta V = V' - V = V(\delta_{\parallel} + 2\delta_{\perp}),$$

odnosno odgovarajuću relativnu promjenu kao

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} = \delta_{\parallel} + 2\delta_{\perp}.$$

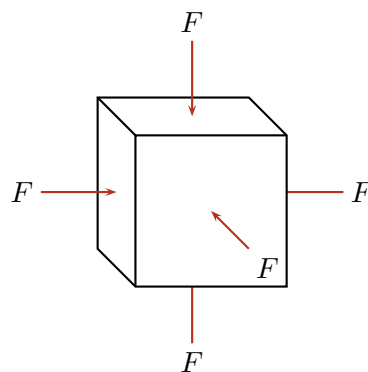
Konačno, kristeći najprije (10.8) te nakon toga (10.6), imamo

$$\delta_V = (1 - 2\mu)\delta_{\parallel} = (1 - 2\mu)\frac{\sigma}{E}.$$

Uočavamo da je relativna deformacija volumena pri pozitivnom vlaku (tijelo se produljuje) pozitivna (volumen elementa materijala se povećava) ako je Poissonov omjer $\mu < \frac{1}{2}$. Ako je Poissonov omjer $\mu = \frac{1}{2}$, volumen elementa materijala pri vlačnom naprezanju ostaje nepromijenjen.

10.3 Tlačno naprezanje (tlak)

Slika prikazuje element materijala u obliku kocke na koju, okomito na svih njezinih šest stranica, djeluju sile jednakog iznosa. Takvo naprezanje zovemo tlačnim naprezanjem ili kraće tlakom.



Kad sile djeluju kao na slici, dolazi do smanjenja volumena promatranog elementa materijala, a prema dogovoru kažemo da se radi o pozitivnom tlaku. Sile mogu djelovati i u suprotnom smjeru, povećavajući volumen elementa materijala. U tom slučaju govorimo o negativnom tlaku.

Tlačno naprezanje ili jednostavno tlak, definirano je kao omjer jakosti sile F i površine S na koju sila djeluje,

$$p = \frac{F}{S}. \quad (10.9)$$

Relativna deformacija volumena definirana je kao omjer promjene volumena ΔV i volumena V koji je prethodio promjeni

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V}. \quad (10.10)$$

Pri pozitivnom tlaku, relativna deformacija volumena je negativna, dok je pri negativnom tlaku ona pozitivna.

Modul stlačivosti materijala (engl. *bulk modulus*) definiran je kao omjer tlaka p i relativne deformacije volumena δ_V ,

$$B = -\frac{p}{\delta_V}. \quad (10.11)$$

S obzirom na to da tlak p i relativna deformacija volumena Δ_V imaju suprotne predznake, u definiciju modula stlačivosti B uključen je negativni predznak koji ga čini pozitivnom veličinom.

Napomene o tlačnom naprezanju:

- Uobičajena definicija tlaka u fluidu podudara se s definicijom tlačnog naprezanja koju smo ovdje uveli.
- Kad je riječ o idealnom fluidu (fluid bez viskoznosti), tlačno naprezanje je jedino naprezanje koje ima smisla razmatrati.
- Pozitivan tlak ekvivalentan je istovremenoj prisutnosti negativnog vlaka jednakog iznosa duž svih triju međusobno okomitih osi u prostoru.

Primjer 10.3.1: *Relativna deformacija volumena morske vode pri velikoj dubini*

Relativnu deformaciju volumena morske vode pri dubini d možemo odrediti koristeći vrijednost modula stlačivosti za vodu, $B = 2.2 \text{ GPa}$, te koristeći izraz za hidrostatski tlak $p = \rho g d$, gdje je ρ gustoća vode, a g je akceleracija gravitacijske sile. Dobivamo

$$\delta_V = -\frac{p}{B} = -\frac{\rho g d}{B}.$$

Na primjer, pri dubini $d = 4 \text{ km}$ gdje je hidrostatski tlak približno 400 puta veći od atmosferskog, relativna deformacija volumena vode iznosi

$$\delta_V = -\frac{(1000 \text{ kg m}^{-3})(9.81 \text{ m s}^{-2})(4000 \text{ m})}{(2.2 \times 10^9 \text{ Pa})} \simeq -1.78 \times 10^{-2},$$

što znači da je volumen elementa vode na toj dubini manji za približno 1.8% u odnosu na volumen koji bi taj element vode imao pri površini mora, odnosno da je za toliko veća njegova gustoća.

Primjer 10.3.2: *Modul stlačivosti idealnog plina (adijabatski proces)*

Ovdje ćemo izvesti izraz za modul stlačivosti idealnog plina pod pretpostavkom da se promjene njegovog tlaka, volumena i temperature odvijaju adijabatski. Naime, pri dovoljno brzim promjenama tlaka idealnog plina, kao što su na primjer one koje nastupaju pri širenju zvuka, element plina ne razmjenjuje toplinsku energiju s okolnim elementima fluida, a to je upravo definicija adijabatskog procesa. U adijabatskom procesu tlak plina p i njegov volumen V zadovoljavaju relaciju

$$pV^\kappa = \text{konst} = p_0 V_0^\kappa,$$

gdje su p_0 i V_0 tlak i volumen plina u ravnotežnom stanju, a κ adijabatska konstanta danog plina. (Za zrak možemo koristiti vrijednost adijabatske konstante za dvoatomni plin, $\kappa = 5/7$.) Kako bismo odredili

modul stlačivosti plina pri adijabatskim promjenama stanja pišemo

$$\begin{aligned} pV^\kappa &= (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\kappa = p_0 V_0^\kappa \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\kappa \\ &= p_0 V_0^\kappa \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} + \kappa \frac{\Delta V}{V_0} + \dots\right), \end{aligned}$$

gdje je Δp odklon tlaka plina od ravnotežnog stanja, a ΔV je promjena njegovog volumena. U posljednjem koraku zanemareni su članovi razmjerni višim potencijama omjera $\Delta p/p_0$ i $\Delta V/V_0$. Omjer $\Delta V/V_0$ prepoznavamo kao relativnu deformaciju volumena δ_V . S obzirom na to da izraz u zagradama mora biti jednak jedinici, zaključujemo da vrijedi

$$\Delta p = -\kappa p_0 \delta_V.$$

Usporedbom s (10.11), zaključujemo da je volumni modul stlačivosti plina pri adijabatskom procesu

$$B = \kappa p_0,$$

gdje je κ adijabatski koeficijent, a p_0 je ravnotežni tlak plina.

Primjer 10.3.3: Veza modula E i B i Poissonovog omjera μ

Modul stlačivosti B , Youngov modul E i Poissonov omjer μ nekog materijala nisu međusobno neovisne veličine, već su vezane relacijom

$$E = 3B(1 - 2\mu).$$

Tu relaciju možemo izvesti uočimo li da je tlačno naprezanje istovjetno negativnom vlačnom naprezanju koje je istovremeno prisutno u sva tri smjera u prostoru. Relativnu deformaciju volumena δ_V (vidi primjer 10.2.1) pri negativnom tlačnom naprezanju $\sigma = -p$ možemo napisati kao

$$\delta_V = (1 - 2\mu)\delta_{||} = (1 - 2\mu)\frac{(-p)}{E}.$$

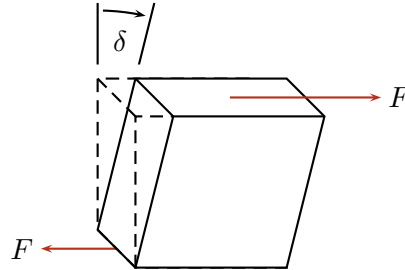
Kad je isto naprezanje prisutno i u preostala dva smjera u prostoru, relativna deformacija volumena postaje trostruko veća,

$$\delta_V = 3(1 - 2\mu)\frac{(-p)}{E} = -\frac{p}{B}.$$

Posljednja jednakost napisana je na osnovu (10.11) te je polazna relacija dokazana.

10.4 Smično naprezanje (smicanje ili smik)

Slika prikazuje element materijala u obliku kocke na koji je primijenjeno smično naprezanje. Dvije sile jednake jakosti, ali suprotnog smjera, djeluju paralelno dvjema suprotnim stranicama kocke, što dovodi do smicanja ili torzije kocke za kut δ .



Smično naprezanje (engl. *shear stress*) definira se kao omjer jakosti sile i površine na koju ona djeluje,

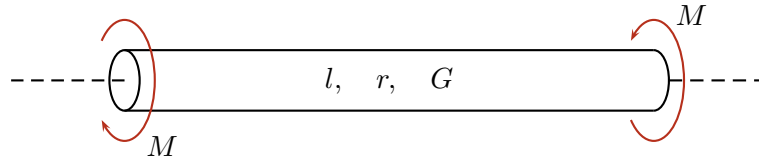
$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (10.12)$$

a kao relativnu deformaciju pri smičnom naprezanju uzima se **kut smicanja** δ .

Modul smicanja ili torzije (engl. *shear modulus*) nekog materijala je omjer smičnog naprezanja σ i kuta smicanja δ ,

$$G = \frac{\sigma}{\delta}. \quad (10.13)$$

Konstanta torzije šipke: Slika prikazuje homogenu šipku duljine ℓ , polumjera r , načinjenu od materijala modula smicanja G , na čije krajeve u suprotnim smjerovima djeluju momenti sile iznosa M .



Uslijed djelovanja momenata sile M dolazi do torzije šipke odnosno do zakretanja jednog njenog kraja u odnosu na drugi. U linearnom području elastičnosti, kut relativnog zakreta krajeva šipke ϕ razmjerni su iznosu momenta sile M ,

$$M = D\phi, \quad (10.14)$$

gdje konstantu D zovemo konstantom torzije šipke. Ona je povezana s parametrima šipke ℓ , r i G relacijom

$$D = G \frac{r^4 \pi}{2\ell}. \quad (10.15)$$

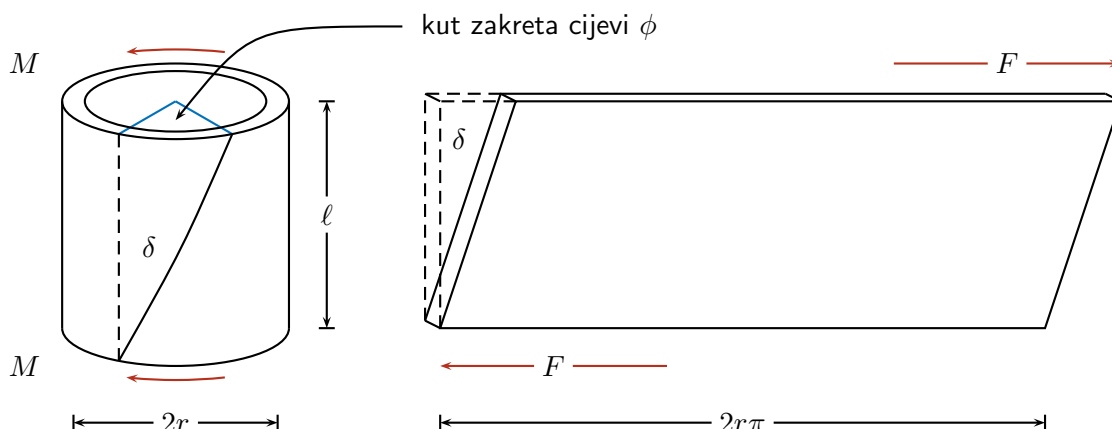
Važno je uočiti da je konstanta torzije šipke razmjerna četvrtoj potenciji polumjera šipke.

Primjer 10.4.1: Torzija cijevi s tankom stijenkom

Razmotrit ćemo torziju cijevi s tankom stijenkom te ćemo izvesti izraz za odgovarajuću konstantu torzije D .

Lijeva strana slike prikazuje cijev duljine ℓ , promjera $2r$ i debljine stijenke d za koju ćemo uzeti da je znatno manja od polumjera r . Na krajeve te cijevi djeluju momenti sile M jednakih iznosa i suprotnog smjera te dolazi do zakreta ϕ jednog kraja cijevi u odnosu na njen drugi kraj. Na slici je također prikazan kut smicanja δ stijenke cijevi.

Desna strana slike prikazuje stijenku cijevi kad bismo ju “razmotali” zadržavajući smično naprezanje i deformaciju koja je u materijalu prisutna kad je cijev izložena djelovanju vanjskih momenata sila. Kad stijenku promatramo u “razmotanom stanju”, kako bismo zadržali naprezanje i deformaciju prisutnu u materijalu, momente sila M moramo zamijeniti silama F .



Konstantu torzije $D = M/\phi$ ćemo izračunati na osnovu sljedećih opažanja:

- Kad je kut smicanja δ malen (linearno područje elastičnosti), iz geometrije cijevi slijedi da je taj kut s kutom zakreta cijevi ϕ povezan relacijom

$$\ell\delta = r\phi.$$

- Moment sile M možemo realizirati silom iznosa F koja djeluje duž tangente na sam rub cijevi. Tada vrijedi relacija

$$M = rF,$$

gdje polumjer cijevi r ima ulogu kraka sile. Upravo se ta sila F pojavljuje na desnoj strani slike gdje je stijenka prikazana u “razmotanom stanju”.

- Kad stijenku razmatramo u “razmotanom stanju”, površinu na koju djeluju sile možemo izraziti kao $S = 2r\pi d$, te koristeći (10.12) i (10.13) dobivamo

$$F = S\sigma = 2r\pi dG\delta.$$

Eliminacijom kuta smicanja δ iz gornjih triju jednačbi dobivamo

$$D = \frac{M}{\phi} = \dots = G \frac{2r^3\pi d}{\ell}.$$

Uspoređujući dobivenu konstantu torzije cijevi s tankom stijenkom s konstantom torzije za punu šipku (10.15) uočavamo da je ovdje ona razmjerna trećoj, a ne četvrtoj potenciji polumjera.

Primjer 10.4.2: konstanta torzije cijevi s debelom stijenkom ili šipke (izvod)

Izvest ćemo izraz za konstantu torzije cijevi s debelom stijenkom. Neka je cijev načinjena od materijala modula torzije G , neka je duljina cijevi ℓ te neka su unutarnji i vanjski polumjer r_1 i r_2 . Takvu cijev treba shvatiti kao niz cijevi s vrlo tankim stijenjkama koje su umetnute jedna u drugu. Konstanta torzije polazne cijevi je tada zbroj konstanti torzije svih cijevi od kojih se ona sastoji.

Konstanta torzije cijevi sa stijenkom debljine dr je prema prethodnom primjeru

$$dD = G \frac{2r^3 \pi dr}{\ell}.$$

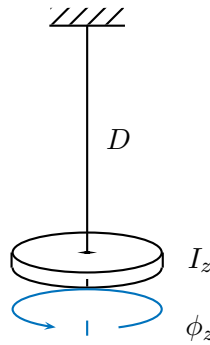
Taj izraz moramo integrirati od unutarnjeg do vanjskog polumjera polazne cijevi,

$$D = \int dD = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{2r^3 \pi dr}{\ell} = \dots = \frac{G\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2\ell}.$$

Stavljajući $r_1 = 0$ dobivamo poznati izraz za konstantu torzije šipke (10.15).

Primjer 10.4.3: Torzijski oscilator

Torzijski oscilator ili torzijsko njihalo jest disk ili neko drugo simetrično tijelo koje visi na elastičnoj šipci (žici), pri čemu je gornji kraj šipke učvršćen tako da se ne može zakretati oko uspravne osi, dok je donji kraj šipke učvršćen uz disk tako da se pri zakretanju diska taj kraj šipke zakreće zajedno s diskom.



Uzet ćemo da se z -os podudara s osi šipke te da je usmjerena uvis. Zakrenemo li disk za kut ϕ_z oko z -osi dolazi do torzije šipke uslijed čega ona na disk djeluje momentom sile čija je z -komponenta

$$M_z = -D\phi_z,$$

gdje je D konstanta torzije šipke, a negativan predznak je prisutan zato što moment sile nastoji vratiti disk prema njegovom ravnotežnom položaju. Otpustimo li disk iz zakrenutog položaja, on će titrati. Moment tromosti diska u odnosu na z -os neka je I_z . Odredit ćemo frekvenciju titranja ovog oscilatora.

Jednadžba gibanja za vrtnju tijela oko z -osi

$$I_z \ddot{\phi}_z = M_z = -D\phi_z,$$

gdje je I_z moment tromosti u odnosu na os, $\ddot{\phi}_z$ kutna akceleracija tijela, a M_z je moment sile. Podijelimo li jednadžbu s momentom tromosti I_z , možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{\phi}_z + \frac{D}{I_z} \phi_z = 0,$$

gdje prepoznamo jednadžbu gibanja harmonijskog oscilatora koji titra frekvencijom koja je dana s

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I_z}.$$

Zadaci

Z.10.1: Elastična opna koja leži u x, y -ravnini podvrgnuta je naprezanju koje se sastoji od vlačnog naprezanja σ_x u x -smjeru te od vlačnog naprezanja σ_y u y -smjeru. Pokaži da je relativna deformacija opne u x i y -smjeru dana izrazima

$$\delta_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \delta_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E},$$

te da je relativna deformacija površine opne dana s

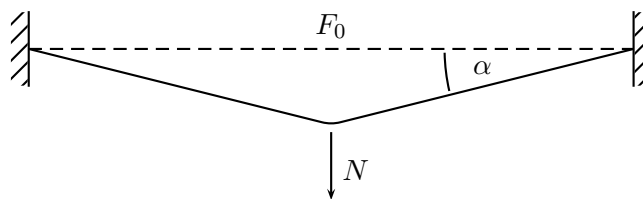
$$\delta_S = \frac{\Delta S}{S} = (1 - \mu) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E},$$

gdje je E Youngov modul materijala opne. (U posljednjem izrazu su izostavljeni članovi koji su kvadratični u relativnoj deformaciji opne.)

Z.10.2: Koliki rad je potrebno obaviti kako bismo čeličnu šipku duljine $L = 2$ m, površine poprečnog presjeka $S = 1$ cm² i početne napetosti $F_0 = 5000$ N, dodatnim naprezanjem produljili za dodatnih $\Delta L = 2$ mm? (Youngov modul čelika $E = 200$ GPa.)

$$\text{Rj: } W = F_0 \Delta L + SE(\Delta L)^2 / 2L = 30 \text{ J}$$

Z.10.3: Čelična žica površine poprečnog presjeka $S = 0.2$ mm² napeta je silom $F_0 = 100$ N nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile N kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona kako bi ju se otklonilo za kut $\alpha = 5^\circ$ od njezina prvobitna položaja (vidi sliku). (Youngov modul čelika $E = 200$ GPa.)



$$\text{Rj: } N = 2(F_0 + SE(1/\cos \alpha - 1)) \sin \alpha \simeq 44.1 \text{ N}$$

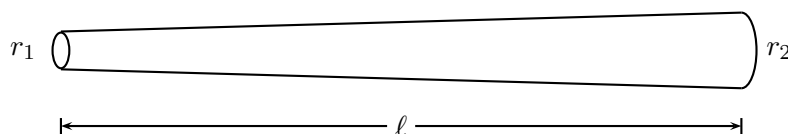
Z.10.4: Kad bismo žicu iz prethodnog zadatka upotrijebili kao pračku za izbacivanje projektila, kolika bi bila brzina projektila mase $m = 10$ g u trenutku kad se žica vrati u ravnotežni položaj te projektil izgubi kontakt s njom? Uzmite da je duljina žice u ravnotežnom položaju $L = 1$ m, a učinke gravitacije i masu (kinetičku energiju) žice zbog jednostavnosti zanemarite.

$$\text{Rj: } v = \sqrt{\frac{2L}{m} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \left(F_0 + \frac{SE}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \right)} \simeq 11.6 \text{ m s}^{-1}$$

Z.10.5: Gumeno crijevo za polijevanje vrta slobodno visi o jednom svom kraju te uslijed naprezanja izazvanog težinom samog crijeva dolazi do njegova produljenja. Odredi ukupno produljenje crijeva ako je njegova nenapregnuta duljina $\ell = 25$ m te ako su Youngov modul i gustoća gume $E = 4.00 \times 10^6$ Pa i $\rho = 1500$ kg m⁻³.

$$\text{Rj: } \Delta \ell = \rho g \ell^2 / 2E \simeq 1.15 \text{ m}$$

Z.10.6: Betonski stup ima oblik krnjeg stošca duljine $\ell = 5$ m s bazama promjera $2r_1 = 20$ cm i $2r_2 = 30$ cm.



Za koliko će se taj stup skratiti opteretimo li ga duž njegove osi silom (težinom) $F = 500$ kN, ako je Youngov modul betona $E = 20$ GPa? (Težinu samog stupa ovdje možemo smatrati zanemarivom.)

$$\text{Rj: } \Delta\ell = F\ell/r_1r_2\pi E = 2.65 \text{ mm}$$

Z.10.7: Čelična osovina koja povezuje brodski motor i elisu ima promjer $2r = 3 \text{ cm}$ i duljinu $\ell = 3 \text{ m}$. Odredite kut zakreta jednoga u odnosu na drugi kraj osovine kad motor djeluje snagom $P = 8 \text{ kW}$, a osovina čini 120 okretaja u minuti ($\omega = 4\pi \text{ rad s}^{-1}$). (Modul smicanja čelika $G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$.)

$$\text{Rj: } \phi = 2\ell P/(Gr^4\pi\omega) \simeq 17.2^\circ$$

Z.10.8: Uteg mase $m = 10 \text{ kg}$ mirno visi na čeličnoj žici duljine $L = 5 \text{ m}$ i promjera $2r = 0.5 \text{ mm}$. Iz tog položaja uteg podižemo za visinu $\Delta h = 0.5 \text{ m}$, čime je žica olabavljena, te ga puštamo da padne. Odredi najveću napetost žice koja nastupa tijekom zaustavljanja utega. (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, Youngov modul čelika $E = 200 \text{ GPa}$.),

$$\text{Rj: } F_{\max} = mg \left(1 + \sqrt{-1 + 2r^2\pi E \Delta h/mgL} \right) \simeq 970 \text{ N}$$

11 Centralna sila i gravitacija

U ovom poglavlju ćemo najprije upoznati opća svojstva polja tzv. centralne sile među kojima su očuvanje mehaničke energije i očuvanje kutne količine gibanja čestice koja se giba pod djelovanjem takve sile. Zatim ćemo pokazati da gibanje dviju čestica koje međudjeluju konzervativnom međučestičnom silom možemo opisati jednadžbom koja je po svom obliku istovjetna jednadžbi gibanja jedne čestice u polju centralne sile. Nakon toga ćemo se baviti Newtonovim zakonom gravitacije i gibanjem planeta.

11.1 Svojstva centralne sile

Centralna sila: Kad na česticu djeluje sila koja je svuda usmjerena prema nepomičnoj točki u prostoru ili od te točke, pri čemu jakost sile ovisi jedino o udaljenosti čestice od te točke, kažemo da na česticu djeluje centralna sila odnosno da se čestica nalazi u polju centralne sile. Samu točku prema kojoj ili od koje je sila usmjerena zovemo centrom sile. Polje centralne sile možemo opisati vektorskim izrazom

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = F_r[r] \hat{\mathbf{r}}, \quad (11.1)$$

gdje je \mathbf{r} vektor položaja čestice u odnosu na centar sile, $r = |\mathbf{r}|$ je udaljenost čestice od centra sile, $F_r[r]$ je tzv. radijalna komponenta vektora centralne sile, a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor.

Ako je $F_r[r] < 0$ kažemo da je centralna sila privlačna, dok za $F_r[r] > 0$ kažemo da je sila odbojna.

Kutna količina gibanja čestice u odnosu na centar sile očuvana je veličina: Moment centralne sile u odnosu na njen centar jednak je nuli, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}[\mathbf{r}] = 0$, jer su \mathbf{r} i \mathbf{F} istog ili suprotnog smjera. S obzirom na to da uvijek vrijedi jednadžba gibanja $\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{M}$, gdje je $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ kutna količina gibanja čestice u odnosu na centar sile, slijedi da je \mathbf{L} očuvana veličina.

(Također možemo zaključiti da se gibanje čestice odvija u ravnini određenoj vektorima \mathbf{r} i \mathbf{p} .)

Centralna sila je konzervativna: Svaki pomak čestice možemo rastaviti na radijalni pomak koji je paralelan centralnoj sili te na tangencijalni pomak koji je okomit na silu. Centralna sila obavlja rad isključivo pri radijalnom pomaku čestice, $dW = F_r[r] dr$, te je ukupni rad obavljen na putanji koja počinje u točki \mathbf{r}_1 udaljenoj od centra sile r_1 , a završava u \mathbf{r}_2 na udaljenosti r_2 ,

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} F_r[r] dr. \quad (11.2)$$

S obzirom na to da rad ne ovisi o odabiru putanje, već ovisi isključivo o odabiru krajnjih točaka, slijedi da je centralna sila konzervativna.

Potencijalna energija u polju centralne sile: Potencijalna energija čestice koja se nalazi na udaljenosti r od centra sile jest rad koji bismo obavili suprotstavljajući se centralnoj sili pri pomicanju čestice od referentne udaljenosti r_0 do konačne udaljenosti r ,

$$U[r] = - \int_{r_0}^r F_r[r'] dr'. \quad (11.3)$$

Inverzna relacija

$$F_r[r] = - \frac{d}{dr} U[r] \quad (11.4)$$

nam omogućuje da u slučaju u kojem je centralna sila opisana potencijalnom energijom $U[r]$ odredimo izraz za samu silu $F_r[r]$.

Mehanička energija čestice koja se giba pod djelovanjem centralne sile (11.1) je zbroj odgovarajuće potencijalne energije (11.3) i njene kinetičke energije.

Primjer 11.1.1: *Centralna elastična sila*

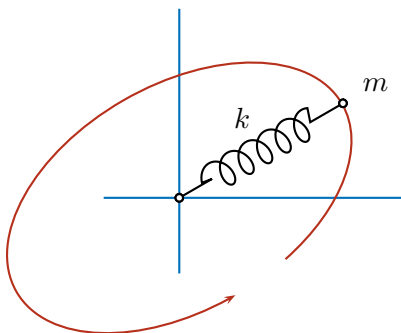
Centralnu silu koja je privlačna pri svim udaljenostima i čija je jakost razmjerna udaljenosti čestice od centra sile opisujemo vektorskim izrazom

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}] = -k \mathbf{r} = -kr \hat{\mathbf{r}},$$

gdje je k pozitivna konstanta ili, kraće, izrazom za radialnu komponentu sile

$$F_r[r] = -kr.$$

Takvu silu možemo shvatiti kao elastičnu oprugu konstante k čija je masa zanemariva, čija je ravnotežna duljina jednaka nuli i koja je razapeta između čestice i središta sile, a zovemo ju centralnom elastičnom silom. Općenita putanja čestice pod djelovanjem takve je elipsa sa središtem u središtu sile (tu tvrdnju ovdje ne dokazujemo). Kružnica i segment pravca koji prolazi centrom sile posebni su slučajevi eliptične putanje čestice.



Potencijalnu energiju koja odgovara centralnoj elastičnoj sili računamo s pomoću izraza (11.3). Odaberemo li $r_0 = 0$ kao referentnu udaljenost dobivamo

$$U[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

što je od ranije poznati izraz za potencijalnu energiju opruge. Također uočavamo da je zadovoljena inverzna relacija (11.4).

Točke obrata: Pri gibanju čestice u polju centralne sile, točke obrata su one točke na putanji čestice u kojima udaljavanje čestice od središta sile prelazi u približavanje čestice prema središtu sile ili suprotno. Vektor brzine čestice \mathbf{v} je točkama obrata okomit na vektor njenog položaja \mathbf{r} , a to znači da iznos kutne količine gibanja koji je u polju centralne sile očuvana veličina možemo izraziti kao

$$L = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r}_{\text{obrat}} \times (m \mathbf{v}_{\text{obrat}})| = r_{\text{obrat}} m v_{\text{obrat}}. \quad (11.5)$$

Koristeći gornji izraz, mehaničku energiju koja je također očuvana veličina možemo izraziti kao

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_{\text{obrat}}^2 + U[r_{\text{obrat}}] = \dots = \frac{L^2}{2mr_{\text{obrat}}^2} + U[r_{\text{obrat}}]. \quad (11.6)$$

Gornja jednadžba nam omogućuje da za poznatu mehaničku energiju E i poznati iznos kutne količine gibanja čestice L za česticu mase m u polju centralne sile opisane potencijalnom energijom $U[r]$ odredimo udaljenost točaka obrata (jedne ili više njih) od središta sile.

Primjer 11.1.2: *Točke obrata čestice u polju centralne elastične sile*

Odredit ćemo udaljenosti točaka obrata od središta centralne sile opisane potencijalnom energijom

$$U[r] = \frac{1}{2}kr^2$$

(vidi prethodni primjer) za česticu mase m , kutne količine gibanja iznosa L i mehaničke energije E .

Udaljenosti r_{obrat} su rješenja jednadžbe (11.6) koja ovdje glasi

$$E = \frac{L^2}{2mr_{\text{obrat}}^2} + \frac{1}{2}kr_{\text{obrat}}^2$$

i koju možemo shvatiti kao kvadratnu jednadžbu u varijabli r_{obrat}^2 . Dva rješenja te jednadžbe su

$$(r_{\text{obrat}}^2)_{1,2} = \frac{E}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{kL^2}{mE^2}} \right).$$

Može se pokazati da općenito vrijedi $mE^2 \geq kL^2$, a to znači da izraz pod korijenom ne može biti negativan odnosno da su oba rješenja realna. Jedno od njih odgovara najmanjoj (apocentar), a drugo najvećoj udaljenosti od centra sile (pericentar) koju čestica postiže tijekom gibanja (vidi sliku u prethodnom primjeru). Također valja uočiti da su rješenja međusobno jednaka kad vrijedi $mE^2 = kL^2$, a taj uvjet odgovara posebnom slučaju kada se čestica giba kružnom putanjom zbog čega nema smisla govoriti o točkama obrata.

11.2 Gibanje dvaju tijela

Međudjelovanje dviju čestica: Pretpostavimo li da čestice jedna na drugu djeluju silom koja ovisi isključivo o njihovoj međusobnoj udaljenosti, silu kojom čestica 1 djeluje na česticu 2 možemo opisati izrazom

$$\mathbf{F}_{12}[\mathbf{r}_{12}] = F_r[r_{12}] \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (11.7)$$

gdje je

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (11.8)$$

vektor položaja čestice 2 u odnosu na česticu 1, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ je udaljenost među česticama, a $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$ je jedinični vektor. Izraz (11.7) je u skladu s trećim Newtonovim zakonom prema kojemu čestice jedna na drugu djeluju suprotnim silama, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, te prema kojemu smjerovi tih sila leže na pravcu na kojemu leže same čestice. Ako je $F_r[r_{12}] < 0$, sila među česticama je privlačna, a ako je $F_r[r_{12}] > 0$, sila je odbojna.

Potencijalna energija para čestica među kojima djeluje sila opisana sa (11.7) i koje se nalaze na međusobnoj udaljenosti r_{12} jest, prema definiciji potencijalne energije, rad potreban da čestice s neke referentne udaljenosti r_0 dovedemo na udaljenost r_{12} . Pretpostavimo li da je jedna čestica nepomična, pri pomaku one druge udaljenost se među njima mijenja za dr_{12} , a element rada koji obavljamo je $dW = -F_r[r_{12}] dr_{12}$. Potencijalna energija je prema tome,

$$U[r_{12}] = - \int_{r_0}^{r_{12}} F_r[r'_{12}] dr'_{12}. \quad (11.9)$$

Inverzna relacija kojom iz potencijalne energije možemo izračunati silu glasi

$$F_r[r_{12}] = - \frac{d}{dr_{12}} U[r_{12}]. \quad (11.10)$$

Važno je uočiti podudarnost gornjih izraza s izrazima (11.3) i (11.4) koji se odnose na centralnu silu. Kad sila pri velikim međučestičnim udaljenostima iščezava, prirodno je pri definiciji potencijalne energije koristiti

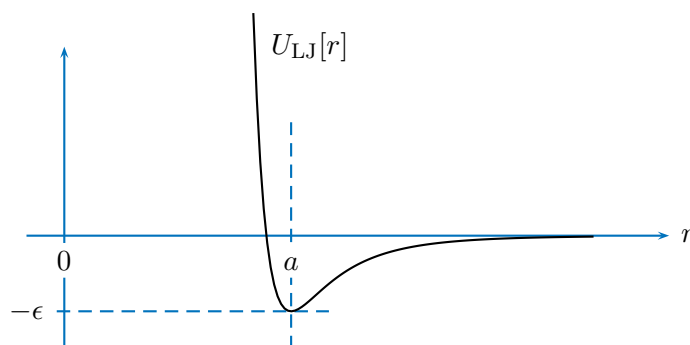
referentnu udaljenost $r_0 = \infty$ jer se takvim odabirom udaljenim česticama pridružuje potencijalna energija jednaka nuli.

Primjer 11.2.1: Lennard-Jonesova međučestična sila

Često se uzima da među česticama djeluje tzv. **Lennard-Jonesova sila** koja je opisana izrazom za potencijalnu energiju

$$U_{\text{LJ}}[r] = \epsilon \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right),$$

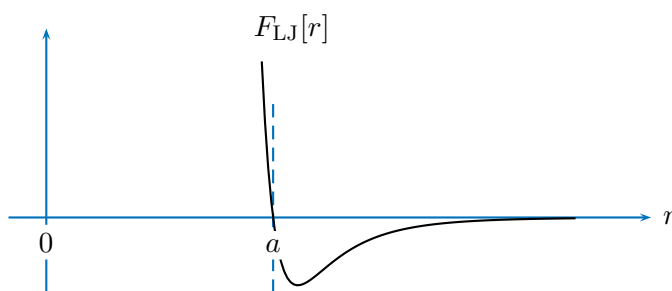
gdje je $r = r_{12}$ udaljenost među česticama, a ϵ i a su pozitivne konstante. Zbog prepoznatljivih eksponenata 12 i 6 u izrazu za silu, zovemo ju još i "silom 12-6". Slika prikazuje ovisnost potencijalne energije o udaljenosti među česticama.



Izraz za Lennard-Jonesovu silu dobivamo primjenom inverzne relacije (11.10),

$$F_{\text{LJ}}[r] = -\frac{d}{dr}U_{\text{LJ}}[r] = \frac{12\epsilon}{r} \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} + \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right).$$

Slika prikazuje jakost Lennard-Jonesove sile u ovisnosti o udaljenosti među česticama.



Promatrajući jakost Lennard-Jonesove sile te odgovarajuću potencijalnu energiju, uočavamo njena sljedeća svojstva:

- Na udaljenosti $r = a$ Lennard-Jonesova sila iščezava zbog čega tu udaljenost zovemo ravnotežnom udaljenošću.
- Na udaljenostima $r < a$ Lennard-Jonesova sila je odbojna i kad udaljenost među česticama teži u nulu njezina jakost teži u beskonačno. U skladu s time, potencijalna energija (koja odgovara radu koji je potrebno obaviti kako bismo sustav doveli u neko stanje) također teži u beskonačno kad udaljenost među česticama teži u nulu. To znači da Lennard-Jonesova sila ne dopušta dvama česticama da se nađu na istom mjestu.
- Na udaljenostima $r > a$ Lennard-Jonesova sila je privlačna s time da njena jakost iščezava kad udaljenost među česticama teži u beskonačno. Dogovorno, potencijalna energija je napisana tako da ona također iščezava kad udaljenost među česticama teži u beskonačno.

- Pri ravnotežnoj udaljenosti $r = a$, potencijalna energija poprima najmanju moguću vrijednost $U_{LJ}[a] = -\epsilon$. Dvije čestice mogu provoditi glavninu vremena u okolini ravnotežne udaljenosti (titrati oko nje) te na taj način one mogu činiti vezanu strukturu nalik dvoatomnoj molekuli.

Jednadžba gibanja za vektor relativnog položaja: Drugu derivaciju vektora $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ koji opisuje položaj čestice 2 u odnosu na česticu 1 možemo izraziti kao

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{12}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} - \frac{(-\mathbf{F}_{12})}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{12}, \quad (11.11)$$

odnosno koristeći (11.7),

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}_{12}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} = F_r[r_{12}] \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (11.12)$$

gdje je

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11.13)$$

tzv. **reducirana masa sustava**.

Uočavamo da je jednadžba (11.12) po svom obliku istovjetna jednadžbi gibanja jedne jedine čestice čija je masa μ i koja se nalazi u polju centralne sile. Vektor položaja čestice 2 u odnosu na česticu 1 možemo izraziti kao

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}_2^*) - (\mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}_1^*) = \mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}_1^*, \quad (11.14)$$

gdje je \mathbf{r}_{cm} vektor položaja središta mase sustava, a zvjezdica označava vektore položaja u odnosu na središte mase sustava (vidi poglavlje 5.4). Nadalje, koristeći opće svojstvo

$$m_1 \mathbf{r}_1^* + m_2 \mathbf{r}_2^* = 0, \quad (11.15)$$

iz gornjih dviju jednadžbi dobivamo relacije

$$\mathbf{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}. \quad (11.16)$$

Primjer 11.2.2: *Gibanje dvaju čestica koje međudjeluju elastičnom silom*

Razmotrit ćemo sustav dviju čestica čije su mase m_1 i m_2 i među kojima djeluje privlačna sila razmjerna udaljenosti među česticama r_{12} . Takvu silu možemo shvatiti kao oprugu čija je ravnotežna duljina jednaka nuli, a koristeći notaciju kao u (11.7) možemo ju opisati izrazom

$$F_r[r_{12}] = -kr_{12},$$

gdje je $k > 0$ konstanta opruge. Odredit ćemo kutnu brzinu ω jednolike vrtnje ovog sustava oko njegovog središta mase.

Koristeći jednadžbu gibanja (11.12), razmatramo gibanje čestice čija je masa jednaka reduciranoj masi sustava (11.13) na koju djeluje centralna sila F_r (takvo gibanje smo susreli u primjeru 11.1.1). Prema (11.12), akceleracija te čestice je

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{\mu} F_r[r_{12}] \hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{1}{\mu} (-kr_{12}) \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\frac{k}{\mu} r_{12} \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\frac{k}{\mu} \mathbf{r}_{12}.$$

S druge strane, prema pretpostavci o jednolikoj vrtnji sustava kutnom brzinom ω , akceleracija čestice sastoji se isključivo od njezine centripetalne akceleracije

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{12} = -\omega^2 \mathbf{r}_{12}.$$

Iz jednakosti akceleracije dobivene iz jednadžbe gibanja i akceleracije dobivene na osnovu pretpostavljenog gibanja (centripetalne akceleracije) slijedi tražena kutna brzina

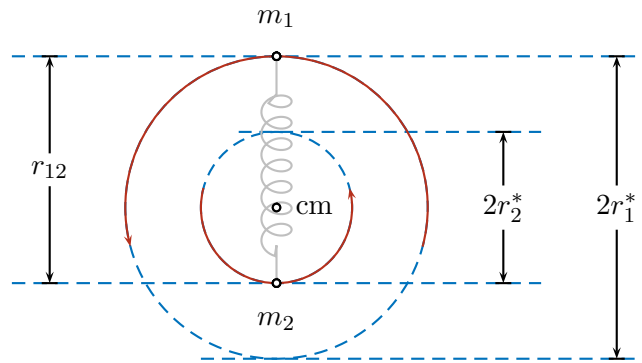
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}.$$

Primjećujemo da kutna brzina vrtnje čestice ne ovisi o udaljenosti r_{12} .

Na primjer, ako je $m_2 = 2m_1$, polumjeri kružnica duž kojih se čestice gibaju u referentnom okviru središta mase su prema (11.16)

$$r_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_{12} = \frac{2}{3} r_{12}, \quad r_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_{12} = \frac{1}{3} r_{12},$$

što možemo prikazati slikom.



Važno je uočiti da se čestica veće mase giba duž kružnice manjeg polumjera.

U slučajevima u kojima je jedna masa znatno veća od druge, npr. ako $m_1 \gg m_2$ odnosno ako $m_2/m_1 \rightarrow 0$, vrijedi

$$\lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \mu = m_2, \quad \lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \mathbf{r}_1^* = 0, \quad \lim_{m_2/m_1 \rightarrow 0} \mathbf{r}_2^* = \mathbf{r}_{12}. \quad (11.17)$$

To znači da u takvim sustavima reduciranu masu možemo poistovjetiti s masom manje masivne čestice, a gibanje čestice veće mase možemo zanemariti odnosno uzeti da se njen položaj podudara s položajem središta mase. Nadalje, vektor relativog položaja čestice 2 u odnosu na česticu 1 možemo poistovjetiti s položajem čestice 2 u odnosu na središte mase sustava.

Primjer 11.2.3: Polumjer orbite Sunca

Pretpostavimo li da se Sunčev sustav sastoji isključivo od Sunca čija je masa $m_1 = M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg i od Zemlje čija je masa $m_2 = M_\oplus = 5.9742 \times 10^{24}$ kg, koja se giba duž kružnice polumjera približno jednakog jednoj astronomskoj jedinici ($1 \text{ au} = 1.49598 \times 10^{11}$ m), možemo odrediti polumjer kružnice duž koje se giba središte Sunca,

$$r_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_{12} = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} r_{12} \simeq \frac{M_\oplus}{M_\odot} (1 \text{ au}) = \dots = 449 \text{ km}.$$

Dobiveni polumjer kružne putanje središta Sunca znatno je manji od polumjera Sunčevog ekvatora

koji iznosi $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, a to objašnjava zbog čega je u mnogim situacijama posve opravdano zanemariti gibanje Sunca i jednostavno reći da ono "miruje".

11.3 Gravitacijska sila i gravitacijsko polje

Newtonov zakon gravitacije (gravitacijska sila): Među česticama čije su mase m_1 i m_2 i koje su jedna od druge udaljene r_{12} djeluje privlačna sila čija je jakost (iznos)

$$F_{\text{grav}}[r_{12}] = G_N \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}, \quad (11.18)$$

gdje je $G_N = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ tzv. gravitacijska ili Newtonova konstanta, a samu silu nazivamo gravitacijskom silom.

Uočavamo da je jakost te sile razmjerna masama čestica te da je obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti među njima. To znači da se iznos gravitacijske sile smanjuje s udaljenošću među česticama te da teži u nulu kad ta udaljenost teži u beskonačno. S druge strane, kad udaljenost teži u nulu, jakost sile teži u beskonačno, zbog čega izbjegavamo govoriti o gravitacijskoj sili pri pretjerano malim udaljenostima.

Gravitacijska sila jedna je od četiriju temeljnih sila u prirodi, a gravitacijska konstanta jedna je od temeljnih konstanti.

Primjer 11.3.1: Jakost gravitacijske sile kojom međudjeluju Zemlja i Sunce

Silu koja osigurava Zemljino gibanje oko Sunca možemo izračunati (a) množeći Zemljinu centripetalnu akceleraciju masom Zemlje ili (b) računajući jakost gravitacijske sile kojom međudjeluju Zemlja i Sunce. Očekujemo podudaranje dobivenih vrijednosti za jakost sile.

- (a) U jednoj godini ($T = 365.25 \times 24 \times 60^2 \text{ s} = 3.15576 \times 10^7 \text{ s}$) Zemlja ($M_{\oplus} = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$) čini jedan okret oko Sunca, pri čemu je srednja udaljenost Zemlje od Sunca a jednaka tzv. astronomskoj jedinici (engl. *astronomical unit*, $1 \text{ au} = 1.49598 \times 10^{11} \text{ m}$). Zanemarimo li gibanje Sunca i pretpostavimo li da je putanja Zemlje savršena kružnica (vidi raniji primjer), možemo odrediti iznos centripetalne sile koja osigurava Zemljino kružno gibanje,

$$\begin{aligned} F_{\text{cp}} &= M_{\oplus} \omega^2 a = M_{\oplus} (2\pi/T)^2 a \\ &= (5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}) \times \left(\frac{2\pi}{3.15576 \times 10^7 \text{ s}} \right)^2 \times (1.49598 \times 10^{11} \text{ m}) \\ &= 3.54288 \times 10^{22} \text{ N}. \end{aligned}$$

- (b) Sila kojom međudjeluju Zemlja i Sunce ($M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$) jest gravitacijska sila dana izrazom (11.18). Njena je jakost

$$\begin{aligned} F_{\text{grav}} &= G_N \frac{M_{\oplus} M_{\odot}}{a^2} \\ &= (6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}) \times \frac{(5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}) \times (1.9891 \times 10^{30} \text{ kg})}{(1.49598 \times 10^{11} \text{ m})^2} \\ &= 3.54397 \times 10^{22} \text{ N}. \end{aligned}$$

Uočavamo da smo u oba računa dobili vrlo sličnu vrijednost.

Gravitacijsko polje: Neka se čestice čije su mase m_i nalaze u točkama \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$. Kad bismo česticu mase m doveli u točku \mathbf{r} , na nju bi djelovala ukupna gravitacijska sila koju možemo izraziti kao zbroj gravitacijskih sila svih čestica,

$$\mathbf{F}_{\text{grav}}[\mathbf{r}] = \sum_i G_N \frac{m m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} = m G_N \sum_i \frac{m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3}. \quad (11.19)$$

Prvi razlomak u prvom koraku opisuje jakost gravitacijske sile kojim i -ta čestica privlači masu m , dok razlomak $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r})/|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$ predstavlja jedinični vektor usmjeren od točke u kojoj se nalazi masa m prema točki u kojoj se nalazi i -ta čestica, što znači da njegov smjer odgovara smjeru gravitacijske sile koja djeluje na česticu mase m . U idućem smo koraku pojednostavili izraz izlučivši masu m i gravitacijsku konstantu G_N ispred znaka sumacije.⁸ Istu silu sada možemo kraće napisati kao

$$\mathbf{F}_{\text{grav}}[\mathbf{r}] = m \gamma[\mathbf{r}], \quad (11.20)$$

gdje vektorsku veličinu

$$\gamma[\mathbf{r}] = G_N \sum_i \frac{m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} \quad (11.21)$$

zovemo gravitacijskim poljem u točki \mathbf{r} . Može se reći da je gravitacijsko polje vektorsko polje odnosno funkcija koja svakoj točki prostora pridružuje vektor čiji smjer odgovara smjeru u kojem bi, u danoj točki prostora, djelovala ukupna gravitacijska sila čiji je iznos razmjernan jakosti te sile. Fizička dimenzija gravitacijskog polja jednaka je dimenziji akceleracije, LT^{-2} , a odgovara joj mjerna jedinica m s^{-2} ili N kg^{-1} .

Kad je raspored mase u prostoru opisan volumnom gustoćom mase ρ , umjesto zbrajanjem doprinosa svake pojedine čestice, gravitacijsko polje možemo izraziti integralom

$$\gamma[\mathbf{r}] = G_N \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} dm' = G_N \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \rho[\mathbf{r}'] dV', \quad (11.22)$$

gdje je $\rho[\mathbf{r}']$ volumna gustoća mase u okolini točke \mathbf{r}' a dV' je element volumena po kojemu se provodi integracija.

Teorem o sfernim ljuskama: Kad je masa m raspoređena u prostoru tako da čini jednoliku sfernu ljusku, gravitacijsko polje izvan te ljuske jednako je gravitacijskom polju čestice mase m koja se nalazi u središtu ljuske, dok gravitacijsko polje unutar ljuske iščezava. Dokaz ovog teorema se, zbog matematičke složenosti, nalazi u dodatku E.

S obzirom na to da bilo koje sferno tijelo poput Zemlje ili Sunca možemo shvatiti kao niz sfernih ljuski koje su smještene jedna unutar druge, a kako je ukupno gravitacijsko polje zbroj doprinosa svih ljuski, primjenom teorema o sfernim ljuskama zaključujemo da je gravitacijsko polje izvan sfernog tijela jednako gravitacijskom polju koje bismo imali kada bi se sva masa tijela nalazila u njegovu središtu.

Primjer 11.3.2: *Jakost gravitacijskog polja pri Zemljinoj površini*

Prema teoremu o sfernim ljuskama, jakost (iznos) gravitacijskog polja na površini sfernog planeta mase M i polumjera R je općenito

$$\gamma = G_N \frac{M}{R^2}.$$

⁸U nazivniku konačnog izraza u (11.19) pojavljuje se treća potencija udaljenosti među česticama što na prvi pogled nije u skladu s prirodom gravitacijske sile čija je jakost obrnuto razmjerna drugoj, a ne trećoj potenciji te udaljenosti. Dakako, uzme li se u obzir da se u brojniku istog izraza nalazi vektor relativnog položaja jedne čestice u odnosu na drugu koji je sam po sebi razmjernan udaljenosti među česticama, uočava se da je čitav razlomak obrnuto razmjernan kvadratu udaljenosti, što je očekivano. Ista opaska se odnosi se na treću potenciju udaljenosti u nazivnicima u izrazima (11.21) i (11.22).

T Na površini Zemlje ($M_{\oplus} = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_{\oplus} = 6.378 \text{ km}$) to je

$$\gamma_{\oplus} = G_N \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = (6.67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}) \times \frac{5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}}{(6.378 \times 10^3 \text{ m})^2} = 9.802 \text{ N kg}^{-1}$$

ili 9.802 m s^{-2} , što je približno jednako akceleraciji slobodnog pada pri Zemljinoj površini (vidi primjere 3.3.1 i 12.3.2).

11.4 Gravitacijska potencijalna energija i gravitacijski potencijal

Gravitacijska potencijalna energija para čestica: Ako su čestice čije su mase m_1 i m_2 jedna od druge udaljene r_{12} , njihovu gravitacijsku potencijalnu energiju možemo napisati kao

$$U[r] = -G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (11.23)$$

Gravitacijska potencijalna energija teži u nulu kad udaljenost među česticama teži u beskonačno, dok je pri svim konačnim udaljenostima ona negativna.

Izraz (11.23) za gravitacijsku potencijalnu energiju para čestica možemo izvesti računajući rad koji obavljamo dovodeći čestice s referentne beskonačne udaljenosti na konačnu udaljenost r . Možemo pretpostaviti da čestica mase m_1 sve vrijeme miruje u ishodištu, dok česticu mase m_2 pomičemo duž x -osi od $x = \infty$ do $x = r$. Pri tome na česticu m_2 djeluje gravitacijska sila $\mathbf{F} = -G_N \frac{m_1 m_2}{x^2} \hat{\mathbf{x}}$, dok mi djelujemo silom suprotnog smjera. Rad je

$$W = \int_{x=\infty}^{x=r} (-\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r G_N \frac{m_1 m_2}{x^2} dx = -G_N \frac{m_1 m_2}{x} \Big|_{\infty}^r = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (11.24)$$

što je upravo izraz (11.23). Potencijalna energija pri udaljenosti r odnosno rad potreban da čestice s beskonačne (referentne) udaljenosti dovedemo na udaljenost r negativan je jer je gravitacijska sila sama po sebi privlačna.

Gravitacijski potencijal: Ako su čestice čije su mase m_i raspoređene u točkama \mathbf{r}_i , potencijalna energija koju bi čestica mase m imala u točki \mathbf{r} jednaka je zbroju potencijalnih energija te čestice u odnosu na sve ostale čestice sustava. Koristeći izraz (11.23) imamo

$$U[\mathbf{r}] = \sum_i -G_N \frac{m m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (11.25)$$

što još možemo možemo napisati kao

$$U[\mathbf{r}] = m\Phi[\mathbf{r}], \quad (11.26)$$

gdje skalarnu veličinu

$$\Phi[\mathbf{r}] = -G_N \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} = -G_N \int \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \rho dV' \quad (11.27)$$

nazivamo gravitacijskim potencijalom u točki \mathbf{r} . Može se reći da je gravitacijski potencijal u danoj točki prostora jednak omjeru gravitacijske potencijalne energije koju bi čestica imala u toj točki i mase čestice.

Računanje gravitacijskog polja iz gravitacijskog potencijala: Napravi li čestica mase m u gravitacijskom polju γ pomak $d\mathbf{r}$, promjena njene gravitacijske potencijalne energije je

$$dU = -\mathbf{F}_{\text{grav}} \cdot d\mathbf{r} = -m\gamma \cdot d\mathbf{r}, \quad (11.28)$$

(negativni predznak je prisutan jer je potencijalna energija, prema definiciji, jednaka radu koji mi obavljamo pomičući česticu, pritom djelujući silom koja je suprotna gravitacijskoj sili). Istu promjenu gravitacijske potencijalne energije možemo izraziti i odgovarajućom promjenom gravitacijskog potencijala $d\Phi$,

$$dU = m d\Phi. \quad (11.29)$$

Usporedbom gornjih dviju izraza za dU nalazimo $d\Phi = -\gamma \cdot d\mathbf{r}$ te samo gravitacijsko polje γ možemo izraziti kao

$$\gamma = -\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}, \quad (11.30)$$

ili raspisano po komponentama pravokutnog koordinatnog sustava,

$$\gamma_x = -\frac{d\Phi}{dx}, \quad \gamma_y = -\frac{d\Phi}{dy}, \quad \gamma_z = -\frac{d\Phi}{dz}. \quad (11.31)$$

S obzirom na to da je gravitacijski potencijal (11.27) skalarna veličina, za razliku od gravitacijskog polja (11.22) koje je vektorska veličina, u mnogim je situacijama jednostavnije najprije izračunati gravitacijski potencijal te s pomoću izraza (11.30) izračunati gravitacijsko polje, nego izravno računati gravitacijsko polje.

11.5 Keplerovi zakoni i gibanje nebeskih tijela

Newtonovom otkriću zakona gravitacije prethodila su tri zakona u kojima je Johannes Kepler sažeo pravilnosti koje je uočio u astronomskim opažanjima gibanja planeta Sunčevog sustava. Iz moderne perspektive, naravno, Keplerovi zakoni ne sadrže ništa što ne slijedi iz Newtonovih zakona i iz Newtonovog zakona gravitacije. Ovdje ih navodimo zbog njihovog povijesnog značaja.

Prvi Keplerov zakon:

Orbite planeta su elipse sa Suncem u jednom od žarišta.

Analiza gibanja sustava dviju čestica koja se temelji na Newtonovim zakonima i koja uzima u obzir gravitacijsko međudjelovanje čestica u skladu s Newtonovim zakonom gravitacije (potpunu analizu spomenutog problema zbog složenosti ovdje ne provodimo) pokazuje da su putanje čestica kružnice, elipse, parabole ili hiperbole. Time se pokazuje da je Newtonova fizika u skladu s prvim Keplerovim zakonom. Naravno, u prvom Keplerovom zakonu se prikriveno podrazumijeva da Sunce miruje, što je samo približno točno. U sustavu koji se sastoji od dvije čestice, one se nalaze na suprotnim stranama u odnosu na središte mase te ako se giba jedna od njih (npr. Zemlja), mora se gibati i ona druga (npr. Sunce).

Drugi Keplerov zakon:

Vektor položaja planeta u odnosu na Sunce prebrisuje jednake površine u jednakim intervalima vremena.

Lako je pokazati da je drugi Keplerov zakon istovjetan tvrdnji da je kutna količina gibanja planeta u odnosu na Sunce očuvana veličina. Površinu dS koju vektor \mathbf{r} prebrisuje u intervalu vremena dt možemo napisati kao polovicu površine paralelograma što ga razapinju vektori \mathbf{r} i $\mathbf{v} dt$, a potom ju možemo izraziti s pomoću kutne količine gibanja planeta,

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| dt = \frac{1}{2m} |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| dt = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| dt. \quad (11.32)$$

Iz gornjeg izraza vidimo da ako je dS/dt konstanta (drugi Keplerov zakon), onda je iznos kutne količine gibanja planeta $|L|$ također konstantan. Do istog zaključka smo došli izravnim razmatranjem gibanja čestice u polju općenite centralne sile (vidi poglavlje 11.1).

Treći Keplerov zakon:

Kvadrat ophodnog vremena planeta razmjernan je trećoj potenciji velike poluosi orbite.

Iz ovog zakona slijedi da je jakost sile koja djeluje na planet obrnuto razmjerna kvadratu njegove udaljenosti od Sunca. Kad se planet mase m giba duž kružne orbite polumjera r , što je posebni slučaj elipse, privlačna centralna sila ima ulogu centripetalne sile te vrijedi jednakost

$$-F_r[r] = m\omega^2 r, \quad (11.33)$$

gdje je $F_r[r] < 0$ radijalna komponenta centralne sile, a ω je kutna brzina kruženja. Napišemo li kutnu brzinu kao $\omega = \frac{2\pi}{T}$, gdje je T ophodno vrijeme planeta i napišemo li prema trećem Keplerovom zakonu $T^2 = kr^3$, gdje je k konstanta, dobivamo

$$F_r[r] = -m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = -m \frac{4\pi^2}{kr^3} r = -\frac{4m\pi^2}{k} \frac{1}{r^2}, \quad (11.34)$$

što je privlačna centralna sila s jakošću obrnuto razmjernom kvadratu udaljenosti od njena središta. Upravo takvo svojstvo prema Newtonovom zakonu gravitacije ima gravitacijska sila (vidi poglavlje 11.3).

Zadaci

Z.11.1: Izvedite (a) izraz koji opisuje jakost privlačne centralne sile te (b) izraz za odgovarajuću potencijalnu energiju, ako period gibanja tijela u kružnoj orbiti ne ovisi o polumjeru orbite, ali ovisi o masi tijela m , a dan je izrazom $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdje je $k > 0$ konstanta. Zatim (c) odredite ukupnu energiju tijela u kružnoj orbiti polumjera r .

$$\text{Rj: (a) } F[r] = kr, \text{ (b) } U[r] = \frac{1}{2}kr^2, \text{ (c) } E = kr^2$$

Z.11.2: Odredite udaljenost pri kojoj je Lennard-Jonesova sila (vidi primjer 11.2.1) privlačna i poprima najveći iznos.

$$\text{Rj: } r = (13/7)^{1/6}a \simeq 1.109a$$

Z.11.3: Čestica mase m giba se u polju neke privlačne centralne sile. Neka su r_1 i r_2 najmanja i najveća udaljenost od centra sile koje čestica postiže tijekom gibanja (točke obrata), a v_2 neka je iznos brzine čestice u trenutku u kojem se ona nalazi na udaljenosti r_2 . Odredite rad koji centralna sila obavi nad česticom od trenutka u kojem se čestica nalazi na udaljenosti r_2 do trenutka u kojem se ona nalazi na udaljenosti r_1 .

$$\text{Rj: } W = mv_2^2 \left((r_2/r_1)^2 - 1 \right) / 2$$

Z.11.4: Izvedite izraz koji opisuje jakost gravitacijskog polja u točki koja se nalazi na osi tankog prstena mase M i polumera R na udaljenosti z od njegova središta. Zatim odredite udaljenost z pri kojoj jakost gravitacijskog polja poprima najveću vrijednost te samu jakost polja u toj točki.

$$\text{Rj: } g_z[z] = G_N M z (z^2 + R^2)^{-3/2}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad a = 2G_N M / 3\sqrt{3}r^2$$

Z.11.5: Izvedite izraz koji opisuje jakost gravitacijskog polja u točki koja se nalazi na osi tankog homogenog diska mase M i polumjera R na udaljenosti z od njegova središta.

$$\text{Rj: } g[z] = 2MG_N R^{-2} \left(1 - 1/\sqrt{1 + (R/z)^2} \right)$$

Z.11.6: Dvije se zvijezde gibaju po kružnim orbitama oko središta mase čitavog sustava brzinama stalnih iznosa v_1 i v_2 . Polumjer jedne od orbita je r_1 . Odredite polumjer druge orbite i mase obiju zvijezda. (Rezultate izrazite preko v_1 , v_2 i r_1 .)

$$\text{Rj: } r_2 = v_2 r_1 / v_1, \quad m_1 = r_1 (v_2 / v_1) (v_1 + v_2)^2 / G_N, \quad m_2 = r_1 (v_1 + v_2)^2 / G_N$$

Z.11.7: Pretpostavljajući da je jakost "modificirane gravitacijske sile" razmjerna s $r^{-(2+\epsilon)}$, gdje je r udaljenost čestice od središta sile, a $\epsilon > -1$ je konstanta ($\epsilon = 0$ odgovara Newtonovoj gravitaciji), izvedite izraz koji opisuje odgovarajući "modificirani gravitacijski potencijal", ako je pri udaljenosti r_0 od centra sile iznos "modificiranog gravitacijskog polja" g_0 .

$$\text{Rj: } \phi[r] = -\frac{g_0 r_0^{2+\epsilon}}{1+\epsilon} r^{(1+\epsilon)}$$

12 Neinercijski referentni okvir

Inercijski referentni okviri su referentni okviri u kojima vrijede Newtonovi zakoni, dok u bilo kojem referentnom okviru koji se u odnosu na neki inercijski referentni okvir giba ubrzano Newtonovi zakoni u onom obliku u kojem ih obično navodimo ne vrijede (vidi poglavlje 3.1). Takve referentne okvire zovemo neinercijskim referentnim okvirima. Promatramo li gibanje u neinercijskom referentnom okviru, u jednadžbi gibanja čestice osim stvarnih sila pojavljuju se i članovi koje zovemo prividnim silama. Ovdje ćemo upoznati prividne sile u neinercijskom referentnom okviru koji se u odnosu na neki inercijski referentni okvir giba ubrzano translacijski i u onom koji se jednoliko vrti.

12.1 Stvarne i prividne sile

Podsjetimo se sljedećih činjenica (vidi poglavlje 3.1):

- Akceleracija čestice ovisi o odabiru referentnog okvira u kojem promatramo njezino gibanje. Kao primjer koji to jasno pokazuje možemo razmotriti gibanje neke čestice u dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugog vrte oko neke osi.
- Stvarna sila koja djeluje na neku česticu proizlazi iz temeljnog fizičkog međudjelovanja te čestice s drugim česticama (npr. gravitacijsko ili elektromagnetsko međudjelovanje) te ni na koji način ne ovisi o našem odabiru referentnog okvira.
- Referentni okvir u kojem vrijedi

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{stvarna}}, \quad (12.1)$$

gdje su m i \mathbf{a} masa i akceleracija čestice, a $\mathbf{F}_{\text{stvarna}}$ je stvarna sila koja na nju djeluje, zovemo inercijskim referentnim okvirom. Gornju jednadžbu zovemo Newtonovom jednadžbom gibanja (NJG).

Podsjetimo se također da smo primjenom Galilejevih transformacija (vidi poglavlja 2.7 i 3.1) pokazali da je svaki referentni okvir koji se u odnosu na bilo koji inercijski referentni okvir giba translacijski stalnom brzinom, također inercijski referentni okvir. To znači da ako postoji jedan inercijski referentni okvir, onda postoji i beskonačno mnoštvo inercijskih referentnih okvira.

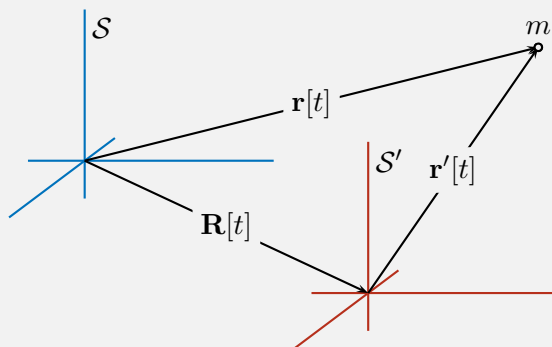
Neinercijski referentni okvir i prividne sile: Kad gibanje čestice promatramo u neinercijskom referentnom okviru, ono nije u skladu s NJG u njenom izvornom obliku, već je u jednadžbu gibanja potrebno uključiti i član koji zovemo prividnom silom (engl. *fictitious force*).⁹ Jednadžba gibanja čestice mase m u neinercijskom referentnom okviru općenito glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} + \mathbf{F}_{\text{prividna}}, \quad (12.2)$$

gdje je \mathbf{a}' akceleracija čestice, a s desne strane se uz stvarnu nalazi i prividna sila. Ona ovisi o načinu na koji se neinercijski okvir giba u odnosu na inercijski referentni okvir, a u nekim slučajevima također i o brzini čestice u odnosu na korišteni neinercijski referentni okvir.

12.2 Ubrzano translacijsko gibanje referentnog okvira

Slika prikazuje česticu mase m i vektor njenog položaja $\mathbf{r}[t]$ u referentnom okviru \mathcal{S} za koji pretpostavljamo da je inercijski referentni okvir. Jednadžba gibanja čestice u tom referentnom okviru glasi $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{stvarna}}$, gdje je $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$. Slika također prikazuje vektor položaja $\mathbf{r}'[t]$ iste čestice u neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' za koji pretpostavljamo da se u odnosu na \mathcal{S} giba translacijski. Vektor $\mathbf{R}[t]$ opisuje položaj ishodišta referentnog okvira \mathcal{S}' u odnosu na ishodište referentnog okvira \mathcal{S} .



Jednadžba gibanja čestice u neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} - m\mathbf{A}, \quad (12.3)$$

gdje je $\mathbf{A} = d^2\mathbf{R}/dt^2$ akceleracija referentnog okvira \mathcal{S}' u odnosu na \mathcal{S} , a $\mathbf{a}' = d^2\mathbf{r}'/dt^2$ je akceleracija čestice u odnosu na \mathcal{S}' . Drugi član na desnoj strani gornje jednadžbe gibanja prepoznamo kao prividnu silu $\mathbf{F}_{\text{prividna}} = -m\mathbf{A}$.

Jednadžbu gibanja (12.3) možemo izvesti uočimo li da među vektorima \mathbf{R} , \mathbf{r} i \mathbf{r}' (vidi sliku) vrijedi relacija

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{R}[t] + \mathbf{r}'[t]. \quad (12.4)$$

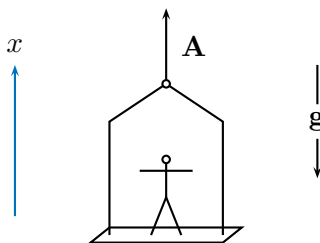
Dvostrukim deriviranjem te relacije po vremenu dobivamo $\mathbf{a}[t] = \mathbf{A}[t] + \mathbf{a}'[t]$, što još možemo napisati kao

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{A}. \quad (12.5)$$

Prema jednadžbi gibanja u inercijskom referentnom okviru \mathcal{S} , prvi član na desnoj strani odgovara stvarnoj sili $\mathbf{F}_{\text{stvarna}}$, dok je drugi član prividna sila $\mathbf{F}_{\text{prividna}} = -m\mathbf{A}$.

Primjer 12.2.1: Prividna težina putnika u dizalu

Počevši od trenutka u kojem se dizalo počne uspinjati pa sve do trenutka u kojem dizalo postigne stalnu brzinu uspinjanja, akceleracija dizala \mathbf{A} usmjerena je uvis. Za to vrijeme putnik ima dojam da on svojim nogama pritišće pod dizala silom koja je veća od one kojom pritišće mirnu podlogu odnosno da je on "teži nego inače".



Ispravnost putnikova dojma možemo pokazati razmatranjem opisane situacije bilo u inercijskom referentnom okviru \mathcal{S} vezanom uz zgradu, bilo u neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' vezanom uz dizalo koje se giba ubrzano.

- U inercijskom referentnom okviru \mathcal{S} vezanom uz zgradu, akceleracija putnika \mathbf{a} jednaka je akceleraciji dizala, $\mathbf{a} = \mathbf{A} = A\hat{\mathbf{x}}$, a stvarne sile koje djeluju na putnika su sila podloge $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{x}}$ i gravitacijska sila $m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{x}}$, gdje je m masa putnika. Newtonovu jednadžbu gibanja

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$$

možemo napisati kao

$$mA\hat{\mathbf{x}} = N\hat{\mathbf{x}} - mg\hat{\mathbf{x}},$$

iz čega slijedi iznos sile kojom podloga djeluje na putnika

$$N = m(g + A).$$

Silom istog iznosa, ali suprotnog smjera, putnik djeluje na podlogu.

- Situaciju možemo razmotriti i u neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' vezanom uz dizalo koje se u odnosu na inercijski referentni okvir \mathcal{S} giba translacijski s akceleracijom $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{x}}$. S obzirom na to da putnik u dizalu miruje imamo $\mathbf{a}' = 0$, a u jednadžbi gibanja (12.3) osim stvarnih sila $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{x}}$ i $m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{x}}$ koje djeluju na putnika imamo i prividnu silu $\mathbf{F}_{\text{prividna}} = -m\mathbf{A}$. To znači da jednadžba gibanja

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} + \mathbf{F}_{\text{prividna}}$$

ovdje glasi

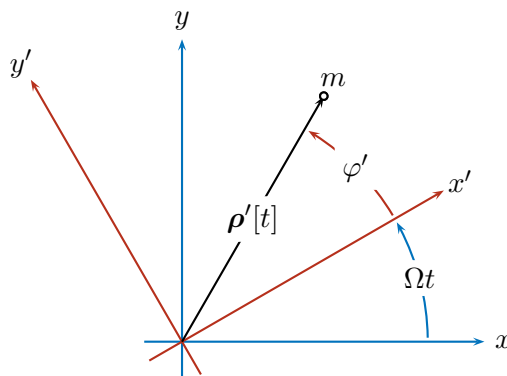
$$0 = \mathbf{N} + m\mathbf{g} - m\mathbf{A} = N\hat{\mathbf{x}} - mg\hat{\mathbf{x}} - mA\hat{\mathbf{x}},$$

što daje iznos sile $N = m(g + A)$.

U oba razmatranja nalazimo da putnik i pod međudjeluju silom iznosa $N = m(g + A)$ koji je veći od iznosa sile mg kojom putnik i pod međudjeluju u mirnom dizalu ili u dizalu koje se uspinje ili spušta stalnom brzinom.

12.3 Referentni okvir u jednolikoj vrtnji, centrifugalna i Coriolisova sila

Referentni okvir u jednolikoj vrtnji: Ovdje razmatramo gibanje čestice u neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' koji se u odnosu na mirujući inercijski referentni okvir \mathcal{S} vrti stalnom kutnom brzinom Ω oko nepomične osi. Slika prikazuje koordinatne sustave vezane uz ta dva referentna okvira. Oni su orijentirani tako da se njihove z i z' osi podudaraju s osi vrtnje, a x' -os rotirajućeg koordinatnog sustava zatvara s x -osi mirujućeg koordinatnog sustava kut Ωt . Vektor kutne brzine Ω vrtnje \mathcal{S}' u odnosu na \mathcal{S} nije prikazan jer je okomit na ravninu slike, a usmjeren je prema čitatelju. Slika također prikazuje česticu mase m i vektor njenog položaja ρ u odnosu na os vrtnje.



Ako čestica miruje u odnosu na referentni okvir \mathcal{S}' , njena udaljenost ρ' od osi vrtnje i kut φ' koji vektor

ρ' zatvara s x' -osi su stalni u vremenu. Ista čestica u odnosu na mirni inercijski referentni okvir S opisuje kružnicu.

Jednadžba gibanja i prividne sile: Kad gibanje čestice mase m opisujemo u referentnom okviru S' koji se vrti stalnom kutnom brzinom u odnosu na inercijski referentni okvir S , jednadžba gibanja čestice glasi

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} + \mathbf{F}_{\text{prividna}}, \quad \mathbf{F}_{\text{prividna}} = \mathbf{F}_{\text{cf}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}}. \quad (12.6)$$

Na desnoj strani osim stvarne sile $\mathbf{F}_{\text{stvarna}}$ imamo prividnu silu $\mathbf{F}_{\text{prividna}}$ koju shvaćamo kao zbroj dviju prividnih sila koje zovemo centrifugalnom prividnom silom \mathbf{F}_{cf} i Coriolisovom prividnom silom \mathbf{F}_{Cor} . U posebnom slučaju u kojem čestica u odnosu na referentni okvir S' miruje ili se giba paralelno sa z -osi, Coriolisova prividna sila jednaka je nuli.

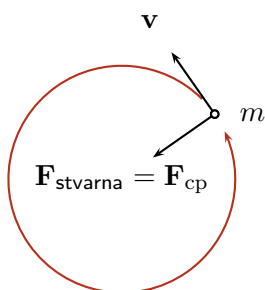
Centrifugalna prividna sila je dana izrazom

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\Omega^2 \rho', \quad (12.7)$$

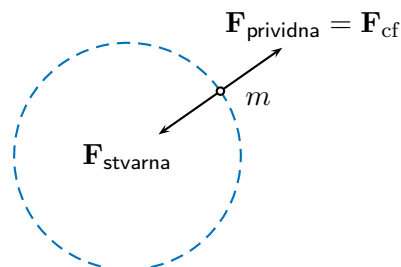
gdje je m masa čestice, Ω je kutna brzina vrtnje neinerijskog referentnog okvira u odnosu na inercijski (mirni) referentni okvir, a ρ' je vektor položaja čestice u odnosu na os vrtnje.

Uočavamo da je \mathbf{F}_{cf} uvijek usmjerena 'prema van' u odnosu na os vrtnje te da je ona prisutna neovisno o tome giba li se čestica u odnosu na rotirajući referentni okvir ili ne.

Mirovanju čestice u neinerijskom referentnom okviru S' koji se jednoliko vrti u odnosu na mirni inercijski referentni okvir S odgovara jednolika vrtnja čestice u S . Vrtnju čestice u inercijskom referentnom okviru objašnjavamo djelovanjem stvarne sile koja je usmjerena prema osi vrtnje i ima ulogu centripetalne sile. Mirovanje iste čestice u rotirajućem referentnom okviru objašnjavamo poništavanjem stvarne sile usmjerene prema osi vrtnje i centrifugalne prividne sile \mathbf{F}_{cf} usmjerene 'prema van'.



Jednolika vrtnja čestice
u mirnom inercijskom referentnom okviru S



Mirovanje čestice
u neinerijskom referentnom okviru S'
koji se jednoliko vrti u odnosu na S

Primjer 12.3.1: Medvjed u perilici za rublje

Odredit ćemo stvarnu silu kojom međudjeluju kovanica od 5 kuna (tzv. "medvjed") koja se našla u bubnju perilice za rublje i stijenka bubnja u fazi rada perilice koju obično zovemo "centrifugom". Masa medvjeda (kovanice) je 7.45 g, promjer bubnja je 40 cm, a za vrijeme "centrifuge" on čini 600 okretaja u minuti. Gibanje ćemo najprije razmotriti u inercijskom referentnom okviru u kojem perilica miruje, a zatim u neinerijskom okviru vezanom uz bubanj perilice.

- U inercijskom referentnom okviru S u kojem perilica miruje, a njen bubanj se vrti, medvjed se giba po kružnici polumjera $r = 20 \text{ cm}$ kutnom brzinom $\omega = 600 \times 2\pi \text{ rad min}^{-1}$. To znači da medvjed ima centripetalnu akceleraciju iznosa $a_{\text{cp}} = \omega^2 r$ odnosno da na njega djeluje stvarna sila

iznosa

$$\begin{aligned} F_{\text{stvarna}} &= ma_{\text{cp}} = F_{\text{cp}} = m\omega^2 r \\ &= (7.45 \times 10^{-3} \text{ kg}) \times (600 \times 2\pi \text{ rad } (60 \text{ s})^{-1})^2 \times (0.2 \text{ m}) \simeq 5.9 \text{ N}. \end{aligned}$$

Zanemarimo li prisutnost gravitacijske sile, centripetalna sila je ostvarena isključivo kroz međudjelovanje medvjeda i bubnja perlice.

- U neinercijskom referentnom okviru S' vezanom uz bubanj perlice, naš medvjed miruje na udaljenosti $r' = 20 \text{ cm}$ od osi vrtnje. To znači da je njegova akceleracija u S' jednaka nuli, $\mathbf{a}' = 0$. Zanimljivo li gravitacijsku silu, jedina stvarna sila koja djeluje na medvjeda je sila kojom na njega djeluje stijenka bubnja. Nju možemo napisati kao $\mathbf{F}_{\text{stvarna}} = -N\hat{\mathbf{r}}'$, gdje je $\hat{\mathbf{r}}'$ jedinični radijalni vektor usmjeren 'prema van' u odnosu na os vrtnje. Centrifugalnu prividnu silu (12.7) pišemo kao $\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\Omega^2 \mathbf{r}'$, a kako medvjed u bubnju miruje, Coriolisova prividna sila nije prisutna. Kutna brzina vrtnje S' u odnosu na S je $\Omega = 600 \times 2\pi \text{ rad min}^{-1}$. Jednadžba gibanja u referentnom okviru S' nam daje

$$0 = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} + \mathbf{F}_{\text{cf}} = -N\hat{\mathbf{r}} + m\Omega^2 \mathbf{r}',$$

iz čega dobivamo iznos sile kojom međudjeluju bubanj perlice i medvjed koji se u njemu vrti $N = m\Omega^2 r$. (Rezultat se očekivano podudara s onim koji smo dobili razmatrajući isti problem u inercijskom referentnom okviru.)

U ovom primjeru je jakost sile kojom međudjeluju medvjed i bubanj oko 80 puta veća od težine mirnog medvjeda. Isto vrijedi i za molekule vode u mokrom rublju, što objašnjava zašto one prilikom vrtnje bubnja izlaze iz mokrog rublja, kao i to da mi sami ne bismo preživjeli vrtnju u bubnju takvom kutnom brzinom.

Coriolisova prividna sila je dana izrazom

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}', \quad (12.8)$$

gdje je $\boldsymbol{\Omega}$ vektor kutne brzine vrtnje referentnog okvira S' u odnosu na inercijski referentni okvir S , a \mathbf{v}' je brzina čestice u odnosu na S' .

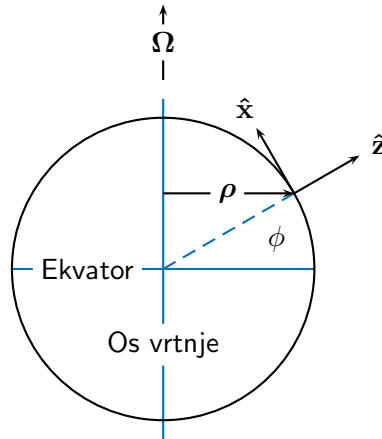
Coriolisova sila nije prisutna kad je brzina čestice paralelna s osi vrtnje ili kad čestica miruje.

Izvod izraza (12.7) za Centrifugalnu silu i izraza (12.8) za Coriolisovu silu se zbog složenosti nalazi u dodatku C.

Primjer 12.3.2: Učinak Zemljine vrtnje pri slobodnom padu tijela

Razmotrit ćemo slobodan pad početno mirnog (u odnosu na Zemlju) sitnog tijela s male visine h koji se događa pri zemljopisnoj širini ϕ . Izračunat ćemo relativni položaj točke u kojoj tijelo udara u tlo u odnosu na točku u kojoj bi tijelo udarilo u tlo kad se Zemlja ne bi vrtjela oko svoje osi.

Koristit ćemo referentni okvir vezan uz Zemlju, a koordinatni sustav ćemo razapeti tako da x -os gleda prema sjeveru, y -os prema zapadu, a z -os suprotno smjeru gravitacijskog polja.



Kutnu brzinu vrtnje Zemlje možemo izraziti kao

$$\Omega = \Omega(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{z}), \quad \Omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \times 60 \times 60 \text{ s}} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}.$$

Zanemarujući promjene položaja tijela tijekom pada, položaj tijela u odnosu na os vrtnje Zemlje možemo približno izraziti vektorom

$$\rho = R \cos \phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{z}) = -\frac{R}{2} \sin 2\phi \hat{x} + R \cos^2 \phi \hat{z},$$

gdje je $R = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ polumjer Zemlje. Djelovanje stvarne gravitacijske sile na tijelo mase m možemo opisati s

$$\mathbf{F} = m\gamma, \quad \gamma = -\gamma \hat{z}, \quad \gamma \simeq g \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2},$$

pri čemu zbog male visine s koje tijelo pada zanemarujemo ovisnost gravitacijskog polja o visini.

- Kad bi Zemlja mirovala, referentni okvir vezan uz Zemlju bio bi inercijski referentni okvir, jednadžbu gibanja tijela u slobodnom padu napisali bismo kao

$$m\mathbf{a} = -m\gamma \hat{z},$$

a njeno rješenje za tijelo koje u početnom trenutku $t = 0$ miruje u točki $\mathbf{r}[0] = h\hat{z}$ bilo bi

$$\mathbf{v}[t] = -\gamma t \hat{z}, \quad \mathbf{r}[t] = \left(h - \frac{\gamma}{2}t^2\right) \hat{z}.$$

Slobodni pad tijela odvijao bi se duž z -osi te bi tijelo udarilo u tlo u samom ishodištu koordinatnog sustava. Trajanje pada iznosilo bi $\tau = \sqrt{2h/\gamma}$.

- Uzmemo li u obzir Zemljinu vrtnju, referentni okvir vezan uz Zemlju postaje neinercijski referentni okvir. U jednadžbi gibanja tijela u slobodnom padu se osim stvarne gravitacijske sile pojavljuju centrifugalna i Coriolisova prividna sila,

$$m\mathbf{a} = m\gamma + m\Omega^2 \rho - 2m\Omega \times \mathbf{v}.$$

Brzinu možemo približno izraziti kao $\mathbf{v} = -gt \hat{z}$, a korištenjem ranije navedenih izraza za ρ i Ω dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\gamma \hat{z} + \Omega^2 \left(-\frac{R}{2} \sin 2\phi \hat{x} + R \cos^2 \phi \hat{z} \right) - 2\Omega (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{z}) \times (-gt \hat{z}) \\ &= -\frac{\Omega^2 R \sin 2\phi}{2} \hat{x} - 2\Omega g t \cos \phi \hat{y} - (\gamma - \Omega^2 R \cos^2 \phi) \hat{z}, \end{aligned}$$

odnosno rastavljeno po komponentama,

$$a_x = -\frac{\Omega^2 R \sin 2\phi}{2}, \quad a_y = -2\Omega g t \cos \phi, \quad a_z = -g,$$

gdje je

$$g = \gamma - \Omega^2 R \cos^2 \phi$$

akceleracija slobodnog pada. Rješenje jednadžbe gibanja za tijelo koje početno miruje na visini h može se napisati rastavljeno po komponentama kao

$$x[t] = -\frac{\Omega^2 R \sin 2\phi}{4} t^2, \quad y[t] = -\frac{\Omega g \cos \phi}{3} t^3, \quad z[t] = h - \frac{g}{2} t^2.$$

Uvrštavanjem trajanja pada $\tau = \sqrt{2h/g}$ u gornje rješenje dobivamo x i y -koordinatu točke u kojoj tijelo udara u tlo,

$$x = x[\tau] = -\frac{\Omega^2 R h \sin 2\phi}{2g}, \quad y = y[\tau] = -\frac{\Omega (2h)^{3/2} \cos \phi}{3\sqrt{g}}.$$

Zaključujemo da se učinak Zemljine vrtnje pri slobodnom padu tijela s male visine sastoji od

1. otklona prema ekvatoru ($x[\tau] < 0$ za $\phi > 0$) koji iščezava na samom ekvatoru ($\phi = 0$) i na polovima ($\phi \pm \pi/2$), najizraženiji je pri srednjim zemljopisnim širinama ($\phi \simeq \pi/4$), a možemo ga povezati s prisutnošću centripetalne prividne sile te od
2. otklona prema istoku ($y[\tau] < 0$) koji je najveći na ekvatoru, iščezava na polovima, a povezuje ga s prisutnošću Coriolisove prividne sile.

Kao primjer uzmimo pad sitnog tijela s visine $h = 10$ m u Zagrebu koji se nalazi na sjevernoj geografskoj širini od približno $\phi = \pi/4$. Točka u kojoj tijelo udara o tlo je u odnosu na točku u kojoj bi isto tijelo udarilo kad se Zemlja ne bi vrtjela pomaknuta približno 1.7 cm prema jugu te 0.5 mm prema istoku.

Kad se radi o tijelu koje mirno visi na niti, Zemljina vrtnja dovodi isključivo do otklona niti prema ekvatoru koji objašnjavamo prisutnošću centrifugalne prividne sile (Coriolisova prividna sila iščezava ako tijelo miruje). Taj učinak je prema dogovoru ugrađen u uobičajenu definiciju akceleracije slobodnog pada g te o njemu ne moramo posebno voditi računa.

Zadaci

Napomena: Neke od ovdje navedenih zadataka moguće je riješiti korištenjem inercijskog i korištenjem neinercijskog referentnog okvira. Pokušajte zadatke riješiti na oba načina.

Z.12.1: Kutija klizi niz kosinu uz faktor trenja μ , a u kutiji na niti visi sitno tijelo. Odredite kut koji nit zatvara s okomicom na kosinu ako tijelo u odnosu na kutiju miruje (ne njiše se).

$$\text{Rj: } \tan \beta = \mu$$

Z.12.2: Na podu mirnog vagona miruje homogena kugla. Ako vagon počne ubrzavati duž vodoravne pruge akceleracijom stalnog iznosa A i ako se kugla po podu vagona kotrlja bez klizanja, kolika će biti akceleracija središta kugle u referentnom okviru vagona?

$$\text{Rj: } a' = 5A/7$$

Z.12.3: U automobilu koji se kreće duž zavoja brzinomjer pokazuje stalan iznos brzine $v = 100 \text{ km h}^{-1}$, a dinamometar, na kojem "mirno" visi uteg mase $m = 1 \text{ kg}$, pokazuje silu iznosa $F = 12 \text{ N}$. Odredite polumjer zakrivljenosti zavoja.

$$\text{Rj: } R = mv^2 / \sqrt{F^2 - (mg)^2} \simeq 111.6 \text{ m}$$

13 Specijalna teorija relativnosti

Specijalna teorija relativnosti usklađuje naše poimanje prostora, vremena i zakona fizike s činjenicom da ni materija, ni energija, ni informacija, ne mogu putovati brzinom koja je veća od brzine kojom u vakuumu putuje svjetlost, kao i s činjenicom da iznos te brzine ne ovisi o brzini kojom se giba sam izvor svjetlosti, tj. da je on jednak u svim inercijskim referentnim okvirima. Najvažniji element specijalne teorije relativnosti su tzv. Lorentzove transformacije koje povezuju inercijske referentne okvire. Za razliku od Galilejevih transformacija koje smo upoznali u odjeljku 2.7, Lorentzove transformacije osim prostornih zahvaćaju i vremensku koordinatu. Time specijalna relativnost objedinjuje trodimenzionalni prostor i jednodimenzionalno vrijeme u četverodimenzionalno prostorvrijeme (engl. *spacetime*). Specijalna teorija relativnosti donosi i novi izraz za količinu gibanja čestice te promijenjeno poimanje mase i energije čestice.

13.1 Općenito o načelu relativnosti

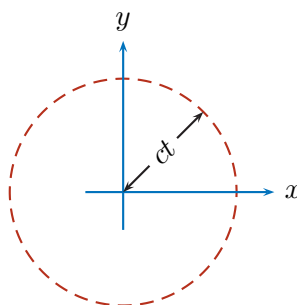
Načelo relativnosti u fizici: Dok je samo po sebi razumljivo da izgled neke fizičke pojave, npr. mirovanje ili gibanje neke čestice, ovisi o odabiru referentnog okvira u kojem pojavu promatramo, načelo relativnosti u fizici nalaže da sami zakoni koji opisuju fizičke pojave ne smiju ovisiti o odabiru referentnog okvira. Različite teorije u fizici su načelu relativnosti uspjele udovoljiti u većoj ili manjoj mjeri, a skup referentnih okvira u kojima u okviru neke teorije zakoni fizike poprimaju jednak i najjednostavniji mogući oblik zovemo inercijskim referentnim okvirima.

Klasična ili Galilei–Newtonova relativnost odnosi se na Newtonovu jednadžbu gibanja čiji je oblik jednak u inercijskim referentnim okvirima međusobno povezanim Galilejevim transformacijama (2.32)–(2.34). Naime, pokazuje se da se oblik Newtonove jednadžbe gibanja pod djelovanjem Galilejevih transformacija ne mijenja te još kažemo da je ona *invarijantna* u odnosu na Galilejeve transformacije. Galilei–Newtonova relativnost osim same Newtonove jednadžbe gibanja obuhvaća i sve zakone mehanike koji iz te jednadžbe slijede, ali ona ne vrijedi za pojave iz područja elektromagnetizma kao što je npr. širenje svjetlosti.

Brzina svjetlosti: Eksperimentalno je utvrđeno da iznos brzine kojom svjetlost (elektromagnetski val) putuje u vakuumu ne ovisi o brzini kojom se izvor svjetlosti giba u odnosu na opažača koji u svom inercijskom referentnom okviru tu brzinu mjeri. Zbog toga kažemo da je iznos brzine svjetlosti u vakuumu jednak u svim inercijskim referentnim okvirima, a prema definiciji (vidi dodatak A) iznos te brzine je

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}. \quad (13.1)$$

Činjenica da je iznos brzine svjetlosti u vakuumu jednak u svim inercijskim referentnim okvirima nije u skladu s intuicijom većine nas i ne uklapa se u okvir Galilei–Newtonove relativnosti. Prihvatimo li tvrdnju da svjetlost u svim referentnim okvirima putuje brzinom c kao temeljni zakon fizike, lako je pokazati da on nije invarijantan na Galilejeve transformacije. Dovoljno je razmotriti širenje svjetlosti nastale vrlo kratkim bljeskom koji se u referentnom okviru S dogodio u trenutku $t = 0$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava. Ako se ta svjetlost nesmetano širi brzinom iznosa c u svim smjerovima prostora, nakon što protekne vrijeme t ona se nalazi na sferi polumjera $r = ct$.



Izrazimo li udaljenost svjetlosti od ishodišta r s pomoću koordinata x , y i z , sferu na kojoj se svjetlost nalazi možemo opisati jednadžbom

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2. \quad (13.2)$$

Istu pojavu možemo promotriti u referentnom okviru S' koji se u odnosu na S giba stalnom brzinom iznosa V u smjeru x -osi. Postavimo li koordinatni sustav u S' tako da se on u trenutku bljeska podudara sa koordinatnim sustavom u S , pojava bljeska u S' nije ni po čemu različita od iste pojave u S . Nadalje, ako se u referentnom okviru S' širenje svjetlosti pokorava istom zakonu fizike kao i u S , položaj svjetlosti u trenutku $t > 0$ mora biti opisan jednadžbom koja je istovjetna jednadžbi (13.2) i koja glasi

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (13.3)$$

Međutim, napišemo li Galilejevu transformaciju položaja (2.32) u obliku

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (13.4)$$

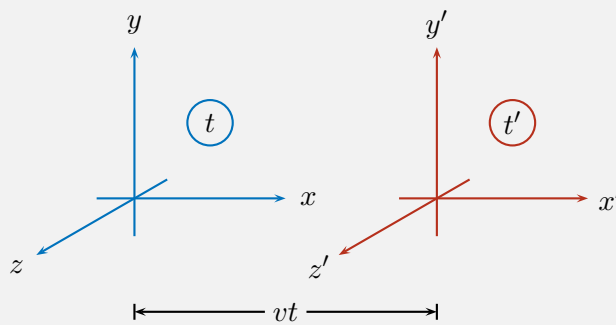
(uzeli smo da se S' u odnosu na S giba brzinom iznosa V u pozitivnom smjeru x -osi) i primijenimo li ju na jednadžbu bljeska (13.2), umjesto očekivanog izraza (13.3) dobivamo $(x' + Vt)^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$, što nije jednadžba sfere sa središtem u ishodištu. Time smo pokazali da fizički zakon prema kojemu se svjetlost širi jednakom brzinom u svim referentnim okvirima *nije* invarijantan na Galilejeve transformacije.

Specijalna teorija relativnosti je teorija prostora i vremena, ili kako se to u fizici kaže prostorvremena (engl. *spacetime*), koja problem neinvarijantnosti zakona širenja svjetlosti u odnosu na Galilejeve transformacije rješava napuštanjem Galilejevih i prihvaćanjem novih, tzv. Lorentzovih transformacija. Specijalnu teoriju relativnosti razvio je A. Einstein 1905. g., a upoznat ćemo ju u nastavku ovog poglavlja.

Opća teorija relativnosti je teorija prostorvremena koja u sebi sadrži specijalnu relativnost, a zakrivljenošću prostorvremena opisuje učinke gravitacije kao što su npr. crne rupe. Opću teoriju relativnosti razvio je A. Einstein 1915. g. te ju još nazivamo i Einsteinovom teorijom gravitacije. U ovom se tekstu nećemo baviti općom relativnošću.

13.2 Lorentzove transformacije i neka njihova svojstva

Lorentzove transformacije: Neka je S inercijski referentni okvir, a referentni okvir S' neka se u odnosu na S giba stalnom brzinom iznosa v . U tim referentnim okvirima možemo uvesti pravokutne koordinatne sustave tako da su im osi paralelne i da se gibanje referentnog okvira S' u odnosu na S odvija u smjeru x -osi.



Lorentzove transformacije koordinata u tom slučaju glase

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (13.5)$$

gdje je c brzina svjetlosti, a tzv. Lorentzov faktor γ i parametar potiska β dani su izrazima

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} < 1. \quad (13.6)$$

S obzirom na to da se u ni u jednom referentnom okviru niti jedna čestica s masom, a time niti jedan opažač, ne može gibati brzinom iznosa jednakog ili većeg od brzine svjetlosti, nema smisla razmatrati gibanje referentnog okvira \mathcal{S}' u odnosu na referentni okvir \mathcal{S} brzinom $v \geq c$. Inverzne transformacije možemo dobiti izravno iz (13.5) ili jednostavnije zamjenom 'crtanih' koordinata 'necrtanima' te, s obzirom na to da se \mathcal{S} giba u negativnom smjeru x' -osi, promjenom predznaka brzine v . One glase

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (13.7)$$

Izvod samih Lorentzovih transformacija dan je u dodatku D.

U poglavlju 13.1 smo pokazali da 'zakon širenja svjetlosti' izražen jednadžbom (13.2) nije invarijantan na Galilejeve transformacije. Sada možemo pokazati da taj zakon jest invarijantan na Lorentzove transformacije. Na izraz (13.2) koji opisuje širenje svjetlosti u referentnom okviru \mathcal{S} primjenjujemo transformacije (13.7). Dobivamo $\gamma^2(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2\gamma^2(t' + vx'/c^2)^2$ odnosno nakon sređivanja $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$, što je po obliku istovjetno polaznom izrazu (13.2). Zaključujemo da je zakon širenja svjetlosti invarijantan na Lorentzove transformacije.

Korespondencija s Galilejevim transformacijama: Kad je brzina gibanja \mathcal{S}' u odnosu na \mathcal{S} znatno manja od brzine svjetlosti odnosno kad $v \rightarrow 0$, u (13.6) imamo $\beta \rightarrow 0$ i $\gamma \rightarrow 1$, a Lorentzove transformacije (13.5) i (13.7) se time svode na Galilejeve transformacije. To znači da je pri malim brzinama opravdano umjesto Lorentzovih koristiti Galilejeve transformacije, a ujedno nam to objašnjava i zašto Newtonova mehanika i Galilei–Newtonova relativnost daju prihvatljive rezultate pri dovoljno malim brzinama.

Prostorvrijeme i događaji: Vjerojatno najzanimljivije svojstvo Lorentzovih transformacija je to da one osim prostornih koordinata djeluju i na vremenske koordinate t i t' . To znači da svaki referentni okvir ima svoje vrijeme odnosno da vremenska koordinata nije zajednička svim referentnim okvirima kao što je to slučaj u Galilei–Newtonovoj relativnosti. Zbog toga je u specijalnoj relativnosti uvriježeno trodimenzionalni prostor i vrijeme shvaćati kao četverodimenzionalno prostorvrijeme. Također je uvriježeno o položaju u prostoru i trenutku u vremenu govoriti kao o događaju u prostorvremenu. Događaj u prostorvremenu je određen s pomoću njegove četiri koordinate. To su, na primjer, u referentnom okviru \mathcal{S} koordinate t, x, y i z .

Transformacija prostorvremenskog razmaka među dvama događajima: Svojstva Lorentzovih transformacija je najlakše razumjeti razmotrimo li njihovo djelovanje na prostorvremenski razmak među dvama događajima. Neka je taj razmak u referentnom okviru \mathcal{S} dan razlikama koordinata $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ i Δz te u \mathcal{S}' neka je razmak među istim događajima dan s $\Delta t', \Delta x', \Delta y'$ i $\Delta z'$. Razlike koordinata tih dvaju događaja u \mathcal{S} i \mathcal{S}' povezane su transformacijama

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - v \Delta x/c^2), \quad (13.8)$$

odnosno inverznim transformacijama

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v \Delta x'/c^2). \quad (13.9)$$

Neistovremenost događaja: Događaji koji su istovremeni u jednom referentnom okviru, nisu nužno istovremeni u nekom drugom referentnom okviru. Neka su u referentnom okviru \mathcal{S}' dva događaja u prostoru razmaknuta za $\Delta x'$, a vremenski razmak među njima neka je jednak nuli, $\Delta t' = 0$. Kažemo da se u referentnom okviru \mathcal{S}' radi o dvama istovremenim događajima. Izračunamo li s pomoću transformacija (13.9) vremenski razmak među tim događajima u referentnom okviru \mathcal{S} , dobivamo

$$\Delta t = \gamma v \Delta x'/c^2 \quad (\text{neistovremenost}). \quad (13.10)$$

To znači da se istovremenost događaja u jednom referentnom okviru narušava prelaskom u drugi referentni okvir razmjerno razmaku tih događaja duž osi relativnog gibanja jednog referentnog okvira u odnosu na drugi. Razmak među događajima duž poprečnih osi ne utječe na gubitak istovremenosti.

Vlastito vrijeme i dilatacija vremena: Vrijeme koje protječe za opažača koji miruje u nekom inercijskom referentnom okviru zovemo vlastitim vremenom tog opažača. Opažač koji miruje u inercijskom referentnom okviru opaža da za bilo kojeg opažača koji se u odnosu na njega giba vrijeme teče sporije. Tu pojavu zovemo relativističkom dilatacijom vremena.

Ako mirni opažač u referentnom okviru S' u nekom trenutku pokrene i ubrzo nakon toga zaustavi zaporni sat, vremenski razmak $\Delta t'$ među tim događajima koje on izmjeri odgovara njegovom vlastitom vremenu, a s obzirom na to da on miruje, prostorni razmak među tim događajima je $\Delta x' = 0$. Sada s pomoću transformacija (13.9) možemo izračunati vremenski razmak među istim događajima u referentnom okviru S . Dobivamo

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (\text{dilatacija vremena}), \quad (13.11)$$

što pokazuje da je vremenski razmak Δt u referentnom okviru S dulji od vremenskog razmaka $\Delta t'$ u S' .

Primjer 13.2.1: *Paradoks blizanaca*

Blizanci Bobi i Rudi proslavili su svoj 18. rođendan. Idućeg jutra Bobi odlazi na putovanje svemirskim brodom, a Rudi ostaje kod kuće. Bobi najprije putuje brzinom iznosa $v = 0.8c$ u nekom smjeru, a kad prema njegovu satu (vlastitu vremenu) protekne 6 mjeseci, on mijenja smjer i počinje se brzinom istog iznosa vraćati prema Zemlji kako bi s Rudijem proslavio njihov 19. rođendan. Međutim, prema Rudijevu vlastitu vremenu, Bobi je na Rudijev 19. rođendan zakasnio punih 8 mjeseci.

Objašnjenje ove neobične pojave nalazimo u dilataciji vremena. Prema Bobijevu vlastitu vremenu odnosno prema vremenu u referentnom okviru S' vezanom uz Bobijev brod, Bobijevo putovanje je trajalo $\Delta t' = 12$ mj. Prema Rudijevu vlastitu vremenu odnosno prema vremenu u referentnom okviru S vezanom uz Zemlju, vrijeme koje protječe od Bobijeva polaska do njegova povratka dobivamo izrazom za dilataciju vremena (13.11),

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{12 \text{ mj}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 20 \text{ mj},$$

a to vrijeme je 8 mjeseci dulje od onoga što je Bobi očekivao.

Vlastita duljina i kontrakcija duljine: Predmet koji se giba pričinja se kraćim od istog predmeta kad on miruje. Zamislimo mirni štap položen paralelno s x' -osi u referentnom okviru S' . S obzirom na to da štap miruje, x' -koordinate njegovih krajeva su stalne u vremenu, a razliku tih koordinata $\Delta x'$ smatramo vlastitom duljinom štapa. Nasuprot tomu, u referentnom okviru S u odnosu na koji se taj štap giba, smisleno je govoriti o duljini štapa Δx jedino ako njegove krajeve shvatimo kao istovremene događaje. To znači da je u S vremenski razmak među krajevima štapa jednak nuli, $\Delta t = 0$. Sada s pomoću transformacija (13.8) kao vlastitu duljinu štapa dobivamo $\Delta x' = \gamma \Delta x$. To znači da je duljina štapa Δx u referentnom okviru S u odnosu na koji se on giba brzinom iznosa v dana s

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma} \Delta x' = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta x' \quad (\text{kontrakcija duljine}), \quad (13.12)$$

gdje je $\Delta x'$ vlastita duljina štapa. Skraćenje ili kontrakcija duljine tijela opaža se isključivo u smjeru njegovog gibanja, dok u poprečnom smjeru opažamo jednake dimenzije kao i kod mirnog tijela.

13.3 Relativističko zbrajanje brzina

Relativistička transformacija brzina: Komponente brzine čestice u referentnom okviru \mathcal{S} su

$$\mathbf{u} : \quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}, \quad (13.13)$$

dok u referentnom okviru \mathcal{S}' imamo

$$\mathbf{u}' : \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (13.14)$$

(Za brzinu čestice koristimo simbol \mathbf{u} kako bismo izbjegli preklapanje sa simbolom v koji koristimo za iznos brzine relativnog gibanja referentnih okvira.) Ako se referentni okvir \mathcal{S}' u odnosu na \mathcal{S} giba brzinom iznosa v u smjeru osi x , na osnovi Lorentzovih transformacija slijedi da su komponente brzine čestice povezane relacijama

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}, \quad (13.15)$$

gdje je Lorentzov faktor γ dan izrazom (13.6). Inverzne transformacije su

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v / c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v / c^2)}. \quad (13.16)$$

Prepoznavamo da u limesu $v \rightarrow 0$ transformacije (13.15) i (13.16) prelaze u Galilejeve transformacije za komponente brzina (2.33).

Transformacije (13.15) možemo izvesti iz transformacija razlika koordinata (13.8). Najprije nalazimo izraz za omjer $\Delta t' / \Delta t$,

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta t - v \Delta x / c^2)}{\Delta t} = \gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right), \quad (13.17)$$

gdje smo omjer $\Delta x / \Delta t$ prepoznali kao komponentu brzine u_x . Taj rezultat nam služi kako bismo omjer $\Delta x' / \Delta t'$ koji prepoznavamo kao komponentu brzine u'_x izrazili s pomoću komponente u_x ,

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v \Delta t)}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \right)^{-1} = \gamma(u_x - v) \gamma^{-1} \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)^{-1} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad (13.18)$$

čime smo izveli prvu transformaciju u (13.15). Sličan postupak daje nam

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t} \right)^{-1} = u_y \gamma^{-1} \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)^{-1} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v / c^2)}, \quad (13.19)$$

i analogno za komponentu u'_z , što su preostale dvije transformacije u (13.15). Inverzne transformacije (13.16) možemo dobiti korištenjem transformacija (13.9), izravno algebarski iz (13.15), ili korištenjem (13.15) u suprotnom smjeru (promiještanje oznaka $'$ i promjena predznaka brzine v).

Primjer 13.3.1: Brzina rakete ispaljene iz broda u gibanju

Zamislamo svemirski bojni brod koji se približava Zemlji tako da se u odnosu na Zemlju giba brzinom iznosa $0.5c$. Kad bi taj brod u nekom trenutku prema Zemlji ispalio raketu koja se u odnosu na njega samog giba brzinom iznosa $0.75c$, koliki bi bio iznos brzine te rakete u odnosu na Zemlju?

Jednostavnim zbrajanjem brzina odnosno primjenom Galilejevih transformacija dobili bismo iznos brzine rakete koji je veći od brzine svjetlosti, a to je fizički nemoguće. Kako bismo primijenili relativističke

transformacije brzine uzimamo da Zemlja miruje u referentnom okviru S , a da se brod uz koji je vezan referentni okvir S' giba brzinom iznosa $v = 0.5c$ u smjeru x -osi. U referentnom okviru S' imamo brod koji miruje i raketu koja se giba u smjeru x' -osi brzinom čije su komponente $u'_x = 0.75c$ i $u'_y = u'_z = 0$. Transformacijama (13.16) dobivamo x -komponentu brzine rakete u odnosu na Zemlju

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{(0.75c) + (0.5c)}{1 + (0.75c) \times (0.5c) / c^2} = \frac{10}{11} c \simeq 0.91c.$$

Da je svemirski brod prema Zemlji umjesto rakete poslao svjetlosni signal, imali bismo brzinu signala $u'_x = c$. Isti iznos brzine svjetlosnog signala imali bismo i u referentnom okviru Zemlje,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{(1c) + (0.5c)}{1 + (1c) \times (0.5c) / c^2} = c.$$

13.4 Relativistička količina gibanja i energija čestice

U načelu, proizvoljno jaka sila može djelovati na česticu tijekom proizvoljno dugog vremena, a prema Newtonovoj jednadžbi gibanja to znači da količina gibanja čestice \mathbf{p} može biti proizvoljno velika. Osim toga, budući da ta sila djelujući na česticu može obaviti proizvoljno velik rad, i kinetička energija čestice K može biti proizvoljno velika. Prema nerelativističkim izrazima za količinu gibanja $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ i za kinetičku energiju $K = \frac{1}{2}mu^2$, kad bi te veličine bile proizvoljno velike, iznos brzine čestice u bi također mogao biti proizvoljno velik, ali to nije u skladu sa činjenicom da iznos brzine masivne čestice niti u kojem inercijskom referentnom okviru ne može doseći brzinu svjetlosti. Taj problem rješavaju tzv. relativistički izrazi za količinu gibanja i za kinetičku energiju čestice.

Relativistički izraz za količinu gibanja čestice: Ako se čestica mase m giba brzinom \mathbf{u} kojoj odgovara Lorentzov faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad (13.20)$$

količina gibanja čestice dana je izrazom

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u}. \quad (13.21)$$

Izraz (13.21) proizlazi iz zahtjeva da Newtonova jednadžba gibanja čestice u relativističkoj fizici zadrži oblik koji ona ima u nerelativističkoj fizici,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (13.22)$$

gdje je \mathbf{F} sila koja djeluje na česticu, te da oblik jednadžbe bude invarijantan u odnosu na Lorentzove transformacije. Umjesto dokaza spomenute invarijantnosti razmotrit ćemo samo najvažnija svojstva relativističke količine gibanja.

- Kad se iznos brzine čestice približava brzini svjetlosti, $u \rightarrow c$, vrijednost Lorentzovog faktora (13.20) teži u beskonačno. Time relativistička količina gibanja može biti proizvoljno velika bez da iznos brzine čestice dosegne brzinu svjetlosti.
- Kad iznos brzine čestice teži u nulu, $u \rightarrow 0$, Lorentzov faktor teži u jedinicu, $\gamma \rightarrow 1$, a time se izraz za relativističku količinu gibanja svodi na nerelativistički oblik $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$.

Na taj je način izraz za relativističku količinu gibanja (13.21) u skladu s činjenicom da masivne čestice ne mogu doseći brzinu svjetlosti kao i s nerelativističkom definicijom količine gibanja.

Primjer 13.4.1:

Pretpostavimo da na početno mirnu česticu mase m u nekom trenutku počne djelovati stalna sila iznosa F . Želimo odrediti ovisnost brzine čestice o proteklom vremenu t koristeći relativistički izraz za količinu gibanja čestice.

S obzirom na to da čestica početno miruje te da je sila stalna, prema Newtonovoj jednadžbi gibanja imamo

$$p[t] = Ft$$

gdje je t vrijeme koje je proteklo od trenutka u kojem je sila počela djelovati, dok koristeći (13.21) možemo napisati

$$p[t] = \frac{mu[t]}{\sqrt{1 - (u[t]/c)^2}}.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$u[t] = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}},$$

što je tražena ovisnost brzine o proteklom vremenu. Lako je uočiti da vrijedi $\lim_{t \rightarrow \infty} u[t] = c$, što znači da se s vremenom iznos brzine približava brzini svjetlosti, ali je nikad ne doseže.

Nerelativistički izraz $v = Ft/m$ vodio bi na pogrešan zaključak da čestica nakon vremena $t = mc/F$ doseže brzinu svjetlosti, a nakon toga ju premašuje. Uvrštavanjem tog vremena u relativistički rezultat za $u[t]$ dobivamo ispravnu vrijednost $u[mc/F] = c/\sqrt{2}$.

Relativistički izraz za kinetičku energiju čestice mase m koja se giba brzinom kojoj odgovara Lorentzov faktor γ je

$$K = (\gamma - 1)mc^2. \quad (13.23)$$

Uočavamo sljedeća svojstva relativističkog izraza za kinetičku energiju čestice:

- U limesu $u \rightarrow c$ imamo $\gamma \rightarrow \infty$, što znači da kinetička energija može biti proizvoljno velika, bez da pritom brzina čestice dosegne brzinu svjetlosti.
- Kad vrijedi $u/c \ll 1$, tj. kad je brzina čestice znatno manja od brzine svjetlosti, vodeći članovi u razvoju Lorentzovog faktora γ u red potencija omjera u/c u okolini vrijednosti $u/c = 0$ su

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \quad (13.24)$$

Uvrštavanjem gornjeg razvoja u relativistički izraz za kinetičku energiju (13.23) dobivamo $K = \frac{1}{2}mu^2 + \dots$, gdje vodeći član prepoznavamo kao nerelativistički izraz za kinetičku energiju čestice.

Na taj je način izraz za relativističku količinu gibanja (13.21) u skladu s činjenicom da masivne čestice ne mogu doseći brzinu svjetlosti kao i s nerelativističkom definicijom količine gibanja.

Relativistički izraz za kinetičku energiju (13.23) slijedi iz zahtjeva da teorem o radu i kinetičkoj energiji uveden u nerelativističkoj mehanici (vidi odjeljak 4.2) u nepromijenjenom obliku vrijedi i u relativističkoj mehanici. Izjednačimo li element kinetičke energije dK i element rada dW koji sila \mathbf{F} obavlja pomičući česticu za $d\mathbf{r}$ slijedi

$$dK = dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p}. \quad (13.25)$$

U gornjem računu smo koristili jednadžbu gibanja (13.22) i nakon toga definiciju brzine $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. Pretpostavimo li sada, zbog jednostavnosti, da sila djeluje u smjeru gibanja čestice, možemo pisati $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{p} = u dp$ te koristeći (13.21) imamo

$$dK = u dp = u d\left(\frac{mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}\right) = \dots = \frac{mu du}{(1 - (u/c)^2)^{3/2}}, \quad (13.26)$$

gdje tri točkice označavaju korake računanja diferencijala izraza u okruglim zagradama. Konačno, kinetičku energiju K dobivamo integracijom dK od početnog stanja u kojem čestica miruje do konačnog stanja u kojem je iznos njene brzine u ,

$$K = \int dK = \int_0^u \frac{mu' du'}{(1 - (u'/c)^2)^{3/2}} = \dots = (\gamma - 1)mc^2. \quad (13.27)$$

Crtica na simbolu u' uvedena je kako bismo varijablu integracije razlikovali od gornje granice integracije, a tri točkice ovdje označavaju izostavljeni postupak rješavanja integrala i algebarsko sređivanje dobivenog izraza.

Relativistička energija čestice mase m definirana je izrazom

$$E = mc^2 + K = \gamma mc^2, \quad (13.28)$$

gdje je mc^2 tzv. **energija mirovanja** čestice, K je njena kinetička energija dana izrazom (13.23), a izraz se može sažeto napisati korištenjem Lorentzovog faktora γ iz (13.20). Također vrijedi jednakost

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2, \quad (13.29)$$

gdje je p iznos količine gibanja čestice dan izrazom (13.21).

Primjer 13.4.2: Relativistički savršeno neelastičan sudar

Razmotrit ćemo savršeno neelastičan sudar čestice mase m i brzine iznosa u (projektil) s mirnom česticom jednake mase (meta) u kojem nastaje jedna čestica mase M . Podrazumijevajući da je relativistička energija promatranog sustava očuvana veličina, tj. da relativistička energija projektila i mete u cijelosti prelazi u relativističku energiju čestice nastale sudarom, korištenjem relativističkih izraza za količinu gibanja (13.21) i energiju (13.28), odredit ćemo masu M i brzinu U čestice koja nastaje u sudaru.

- Očuvanje količine gibanja u sudaru ovdje daje uvjet

$$\gamma mu = \Gamma MU,$$

gdje s lijeve strane imamo količinu gibanja projektila, s desne strane imamo količinu gibanja čestice mase M nastale u sudaru, a $\gamma = (1 - (u/c)^2)^{-1/2}$ i $\Gamma = (1 - (U/c)^2)^{-1/2}$ su pripadajući Lorentzovi faktori.

- Očuvanje relativističke energije daje uvjet

$$\gamma mc^2 + mc^2 = \Gamma Mc^2,$$

gdje je lijeva strana ukupna relativistička energija čestica projektila i mete, a desna strana je relativistička energija čestice nastale u sudaru.

Dijeljenjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$U = \frac{\gamma u}{\gamma + 1},$$

što se u nerelativističkom limesu ($u_1 \ll c$, $\gamma_1 \simeq 1$) svodi na očekivanu brzinu središta mase sustava $u_{\text{cm}} = u/2$, dok za $u \rightarrow c$, odn. $\gamma \rightarrow 1$, prepoznamo $U \rightarrow u$. Masu M računamo uvrštavanjem dobivenog izraza za brzinu U bilo u uvjet očuvanja količine gibanja, bilo u uvjet očuvanja relativističke energije. Dobivamo

$$M = 2m\sqrt{(1 + \gamma)/2},$$

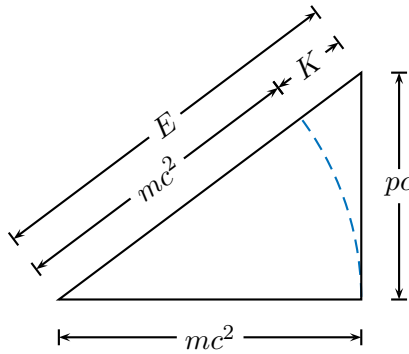
gdje uočavamo da je masa čestice nasale neelastičnim sudarom veća od zbroja masa čestica koje su se sudarile. Pišući uvjet očuvanja energije u obliku

$$(mc^2 + K) + mc^2 = Mc^2 + K',$$

gdje je K kinetička energija projektila, a K' je kinetička energija čestice nastale u sudaru, lako je uvjeriti se da je gubitak kinetičke energije u sudaru jednak razlici energije mirovanja čestice nastale u sudaru, Mc^2 , i zbroja energija mirovanja projektila i mete, $2mc^2$.

U nerelativističkom razmatranju sličnog sudara (vidi primjer 5.2.3) podrazumijevali smo da je masa očuvana veličina, a gubitak kinetičke energije objasnili smo njenom pretvorbom u druge oblike energije (npr. u toplinu).

Relaciju (13.29) koja povezuje relativističku energiju E , energiju mirovanja mc^2 i iznos količine gibanja čestice p možemo prikazati kao duljine stranica pravokutnog trokuta gdje je relativistička energija čestice E odgovara duljini hipotenuze, a energija mirovanja mc^2 i umnožak iznosa količine gibanja p i brzine svjetlosti odgovaraju duljinama kateta.



Bezmasene čestice: Dok o česticama bez mase u klasičnoj mehanici nema smisla govoriti, relativistička mehanika dopušta postojanje takvih čestica. Relacija (13.29) i njen grafički prikaz trokutom govore nam da za $pc \gg mc^2$ vrijedi $E \simeq pc$, odnosno da za $m = 0$ imamo

$$E = pc. \quad (13.30)$$

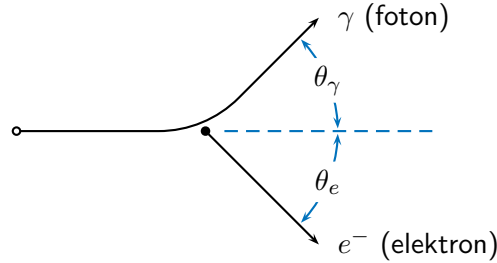
Najpoznatiji primjer bezmasenih čestica u prirodi su fotoni odnosno čestice elektromagnetskog zračenja.

Primjer 13.4.3: Sudar fotona i elektrona (Comptonovo raspršenje)

Razmotrit ćemo elastičan sudar fotona (čestice bez mase) i mirnog elektrona (čestice s masom) koji je u fizici poznat kao *Comptonovo raspršenje*. Izvest ćemo izraz koji opisuje ovisnost energije koju foton poprima nakon sudara o kutu pod kojim se on u sudaru otklonio (raspršio) od pravca svog prvobitnog gibanja.

Uzet ćemo da se foton početne količine gibanja p_γ u sudaru otklanja sa svog pravca gibanja za kut

θ_γ i da poprima količinu gibanja p'_γ (γ je uobičajena oznaka za foton), dok se početno mirni elektron mase m_e nakon sudara giba duž pravca koji s pravcem prvobitnog kretanja fotona zatvara kut θ_e i ima količinu gibanja p'_e (e je oznaka za elektron). Slika prikazuje pravce gibanja fotona i elektrona i kutove θ_γ i θ_e .



Početne relativističke energije fotona i elektrona su

$$E_\gamma = p_\gamma c \quad \text{i} \quad E_e = m_e c^2,$$

dok nakon sudara imamo

$$E'_\gamma = p'_\gamma c \quad \text{i} \quad E'_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p'_e c)^2}.$$

Uvjet očuvanja relativističke energije, $E_\gamma + E_e = E'_\gamma + E'_e$, daje nam

$$p_\gamma c + m_e c^2 = p'_\gamma c + \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p'_e c)^2},$$

a zadržavanjem samo korijena na desnoj strani, kvadriranjem i dijeljenjem s c^2 možemo ga napisati u obliku

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 + 2m_e(p_\gamma - p'_\gamma) - 2p'_\gamma p_\gamma = p_e'^2.$$

Uvjet očuvanja količine gibanja u sudaru raspisujemo po komponentama duž osi prvobitnog gibanja fotona te duž osi koja je okomita na tu os, a leži u ravnini u kojoj se čestice gibaju nakon sudara. Dvije jednačbe koje proizlaze iz tog uvjeta su

$$p_\gamma = p'_\gamma \cos \theta_\gamma + p'_e \cos \theta_e, \quad 0 = p'_\gamma \sin \theta_\gamma - p'_e \sin \theta_e.$$

Napišemo li te jednačbe tako da na lijevim stranama imaju samo članove $p'_e \cos \theta_e$ i $p'_e \sin \theta_e$, kvadriramo li ih i zbrojimo, dobivamo

$$p_e'^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta_\gamma.$$

Uvrstimo li gornji izraz za $p_e'^2$ u uvjet očuvanja relativističke energije nalazimo

$$m_e c(p_\gamma - p'_\gamma) = p'_\gamma p_\gamma (1 - \cos \theta_\gamma),$$

a koristeći $E_\gamma = p_\gamma c$ i $E'_\gamma = p'_\gamma c$ konačnu energiju fotona možemo izraziti kao

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + (E_\gamma/m_e c^2)(1 - \cos \theta_\gamma)}.$$

Gornji izraz poznat je kao "formula za energiju fotona pri Comptonovom raspršenju". Uočavamo da je energija fotona nakon sudara najmanja kad se on od elektrona "odbije unazad" ($\theta_\gamma = \pi$), što ujedno znači da je elektron u tom slučaju primio najveću moguću energiju.

Zadaci

Z.13.1: Ako putovanje od Zemlje do planeta udaljenog 10 godina svjetlosti (Δx) prema vlastitom vremenu putnika traje samo 5 godina ($\Delta t'$), kolikom brzinom se u odnosu na Zemlju giba svemirski brod?

$$\text{Rj: } v = c \left(1 + (c \Delta t' / \Delta x)^2\right)^{-1/2} \simeq 0.894 c \quad [\text{P}]$$

Z.13.2: Gusarski svemirski brod prolazi pored Zemlje brzinom iznosa $0.5c$, a sat vremena kasnije (prema zemaljskom vremenu) policajci sa Zemlje prema gusarima odašilju svjetlosni signal i kreću u potjeru za njima brodom čija je brzina u odnosu na Zemlju $0.75c$. Potjera traje sve dok policajci ne dostignu gusare. Koliko će (a) prema vlastitom vremenu policajaca u brodu trajati njihova potjera za gusarima? Koliko će (b) prema vlastitom vremenu gusara trajati interval od trenutka u kojem oni prime svjetlosni signal sa Zemlje do trenutka u kojem ih policajci dostignu?

$$\text{Rj: (a) } \tau = 1.323 \text{ h, (b) } \tau = 0.866 \text{ h} \quad [\text{P}]$$

Z.13.3: U referentnom okviru vezanom uz Zemlju, dva svemirska broda se udaljavaju od Zemlje brzinama iznosa $u = 0.75c$ duž međusobno okomitih pravaca. Odredite iznos brzine jednog svemirskog broda u odnosu na drugi.

$$\text{Rj: } u' = u \sqrt{2 - (u/c)^2} \simeq 0.899 c \quad [\text{P}]$$

Z.13.4: Odredite iznos brzine čestice čija je relativistička energija k puta veća od njene energije mirovanja.

$$\text{Rj: } u = c \sqrt{1 - k^{-2}} \quad [\text{P}]$$

Z.13.5: Na mirnu česticu mase $m = 1 \text{ kg}$ u nekom trenutku počne djelovati stalna sila iznosa $F = 1 \text{ N}$. Koliko dugo bi ta sila morala djelovati da čestica postigne brzinu iznosa $u = c/2$ i koliki bi put čestica prevalila do tog trenutka?

$$\text{Rj: } t = mc/\sqrt{3}F \simeq 5.5 \text{ g, } s = mc^2(-1 + 2/\sqrt{3})/F \simeq 1.5 \text{ gs} \quad [\text{P}]$$

Z.13.6: Čestice mase m_1 i brzine iznosa u_1 (projektil) savršeno neelastično se sudara s mirnom česticom mase m_2 (meta). Pretpostavljajući očuvanje relativističke energije sustava odredite masu M i brzinu U čestice koja nastaje u tom sudaru.

$$\text{Rj: } M = \sqrt{m_1^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2 + m_2^2}, U = \gamma_1 m_1 u_1 / (\gamma_1 m_1 + m_2), \text{ gdje je } \gamma_1 = (1 - (u_1/c)^2)^{-1/2} \quad [\text{P}]$$

Literatura

- [1] Antonia Božić i Goran Božić, *Fizika na državnoj maturi*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.
- [2] Dubravko Horvat, *Fizika 1: mehanika i toplina*, Hinus, Zagreb, 2005.
- [3] Dubravko Horvat, *Fizika 2: titranje, valovi, elektromagnetizam, optika i uvod u modernu fiziku*, Neodidacta, Zagreb, 2011.
- [4] Petar Kulišić, *Mehanika i toplina: udžbenik fizike za studente Fakulteta elektrotehnike i računarstva*, 9. izd., Školska knjiga, Zagreb, 2005.
- [5] Višnja Henč-Bartolić i Petar Kulišić, *Valovi i optika: udžbenik fizike za studente Fakulteta elektrotehnike i računarstva*, 3. izd., Školska knjiga, Zagreb, 2004.
- [6] Vjera Lopac, *Leksikon fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 2009.
- [7] Nathan Newbury, Michael Newman, John Ruhl, Suzanne Staggs i Stephen Thorsett, *Princeton Problems in Physics*, Princeton University Press, 1991.
- [8] Peter Gnädig, Guyla Honyek i Ken Riley, *200 Puzzling Physics Problems*, Cambridge University Press, 2001.
- [9] Robert B. Leighton i Rochus E. Vogt, *Exercises in Introductory Physics*, Addison–Wesley, 1969.
- [10] V. Lopac i D. Hrupec, "What exactly are the new definitions of kilogram and other SI units?", *The Physics Teacher*, 2019., članak prihvaćen za objavljivanje

A Mjerne jedinice sustava SI

Međunarodni sustav jedinica (sustav SI) odabire sedam fizičkih veličina kao osnovne veličine (engl. *base quantity*) i pridružuje im sedam osnovnih mjernih jedinica (engl. *base unit of SI*) čije definicije propisuje tako da one proizlaze iz vrijednosti sedam prirodnih konstanti.

Sve ostale fizičke veličine smatraju se izvedenim veličinama (engl. *derived quantity*), a u sustavu SI se za svaku od njih korištenjem osnovnih mjernih jedinica može konstruirati tzv. izvedena mjerna jedinica (engl. *derived unit of SI*).

Osnovne fizičke veličine potrebne za formulaciju mehanike i elektromagnetizma su vrijeme, duljina, masa i električna struja. Odgovarajuće osnovne mjerne jedinice u sustavu SI su sekunda, metar, kilogram i amper, a definirane su na sljedeći način:

Sekunda je mjerna jedinica za vrijeme, simbol sekunde je s, a definirana je jednadžbom

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}, \quad (\text{A.1})$$

gdje je $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ frekvencija elektromagnetskog zračenja emitiranog pri tzv. hiperfinim prijelazima u osnovnom stanju neperturbiranog atoma cezija 133, a Hz (herc) je izvedena mjerna jedinica za frekvenciju, pri čemu je $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$.

Metar je mjerna jedinica za duljinu, simbol je m, a definiran je jednadžbom

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, m s^{-1} (metar u sekundi) je izvedena mjerna jedinica za brzinu, a sekunda je definirana jednadžbom (A.1).

Kilogram je mjerna jedinica za masu, simbol je kg, a definiran je jednadžbom

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s}, \quad (\text{A.3})$$

gdje je h tzv. Planckova konstanta, J (džul) je izvedena mjerna jedinica za energiju, pri čemu je $\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$, a sekunda i metar su definirani jednadžbama (A.1) i (A.2)

Amper je mjerna jedinica za jakost električne struje, simbol ampera je A, a definiran je jednadžbom

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad (\text{A.4})$$

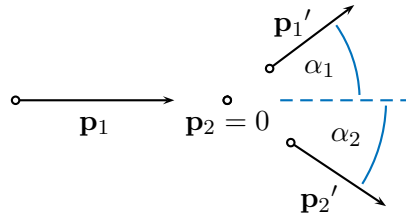
gdje je e elementarni električni naboj (naboj elektrona je $-e$), C (kulon) je izvedena mjerna jedinica za električni naboj, pri čemu je $\text{C} = \text{A s}$, a sekunda je definirana jednadžbom (A.1).

Numeričke vrijednosti u definicijama (A.1), (A.2), (A.3) i (A.4) smatraju se egzaktnim vrijednostima.¹⁰

¹⁰Definicije (A.2)–(A.4) postale su službene 20. svibnja 2019. g., a više o samom sustavu SI te o promjenama koje su tom prilikom stupile na snagu može se pročitati u članku [10].

B Necentralni sudar projektila i mirne mete

Razmatramo sudar čestica u referentnom okviru laboratorija (ROL) u kojem čestica mase m_1 , koju zovemo projektilom, brzinom iznosa v_1 nalijeće na mirnu česticu mase m_2 , koju zovemo metom. Prikazano slikom:



Kutove α_1 i α_2 zovemo kutovima otklona čestica u ROL, a brzine čestica prije sudara i brzinu središta mase možemo napisati kao

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{B.1})$$

gdje smo uzeli da se gibanje odvija duž x -osi pravokutnog koordinatnog sustava.

Zanima nas odrediti iznose brzina i kutove otklona koje čestice imaju nakon sudara u ROL u ovisnosti o koeficijentu restitucije k i o kutu otklona α^* u referentnom okviru središta mase (ROSM).

Polazimo od prikaza sudara u ROSM gdje vrijedi $\mathbf{p}_1^* = -\mathbf{p}_2^* = q^* \hat{\mathbf{x}}$, odnosno

$$m_1 \mathbf{v}_1^* = -m_2 \mathbf{v}_2^* = q^* \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{B.2})$$

gdje je q^* iznos količine gibanja koju prva i druga čestica (pojedinačno) imaju prije sudara. Poslije sudara možemo pisati

$$m_1 \mathbf{v}_1^{*'} = -m_2 \mathbf{v}_2^{*'} = k q^* (\cos \alpha^* \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha^* \hat{\mathbf{y}}), \quad (\text{B.3})$$

gdje smo uzeli da se čestice otklanjaju u x, y -ravnini te da se projektil otklanja u pozitivnom smjeru y -osi. Koristeći transformacije (5.11) i izraze za brzine (B.1), iz (B.2) možemo dobiti iznos količine gibanja q^* ,

$$q^* \hat{\mathbf{x}} = m_1 \mathbf{v}_1^* = m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{cm}}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 \hat{\mathbf{x}}, \quad q^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad (\text{B.4})$$

a to nam omogućuje da iz (B.3) izlučimo brzine $\mathbf{v}_{1,2}^*$ i napišemo ih u obliku

$$\mathbf{v}_{1,2}^{*'} = \pm \frac{k q^*}{m_{1,2}} (\cos \alpha^* \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha^* \hat{\mathbf{y}}) = \pm \frac{k m_{2,1} v_1}{m_1 + m_2} (\cos \alpha^* \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha^* \hat{\mathbf{y}}). \quad (\text{B.5})$$

Ponovo koristeći transformaciju (5.11) dobivamo brzine čestica nakon sudara u ROL,

$$\mathbf{v}_{1,2}' = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{v}_{1,2}^{*'} = \frac{v_1}{m_1 + m_2} ((m_1 \pm k m_{2,1} \cos \alpha^*) \hat{\mathbf{x}} \pm k m_{2,1} \sin \alpha^* \hat{\mathbf{y}}). \quad (\text{B.6})$$

Iznose brzina možemo napisati kao

$$|\mathbf{v}_1'| = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \sqrt{1 + 2k(m_2/m_1) \cos \alpha^* + k^2(m_2/m_1)^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$|\mathbf{v}_2'| = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \sqrt{1 - 2k \cos \alpha^* + k^2}, \quad (\text{B.8})$$

a kutevi otklona projektila i mete u odnosu na smjer gibanja projektila prije sudara dani su izrazima

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{k \sin \alpha^*}{m_1/m_2 + k \cos \alpha^*}, \quad \text{tg } \alpha_2 = -\frac{k \sin \alpha^*}{1 - k \cos \alpha^*}. \quad (\text{B.9})$$

C Izvod izraza za centrifugalnu i Coriolisovu prividnu silu

Centrifugalna i Coriolisova sila su prividne sile koje se pojavljuju u jednadžbi gibanja čestice koju promatramo u neinercijskom referentnom okviru koji se u odnosu na neki inercijski referentni okvir jednoliko vrti oko neke osi (vidi poglavlje 12.3).

Newtonova jednadžba gibanja čestice u inercijskom referentnom okviru \mathcal{S} (akceleracija \mathbf{a}) i jednadžba gibanja iste čestice u općenitom neinercijskom referentnom okviru \mathcal{S}' (akceleracija \mathbf{a}') glase

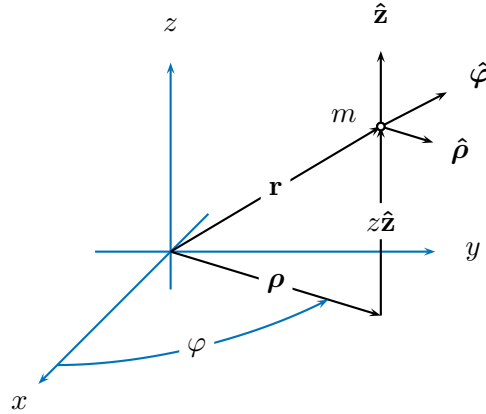
$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{stvarna}}, \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{stvarna}} + \mathbf{F}_{\text{prividna}}, \quad (\text{C.1})$$

gdje je m masa čestice, a $\mathbf{F}_{\text{stvarna}}$ i $\mathbf{F}_{\text{prividna}}$ su stvarna i prividna sila. Slijedi da prividnu silu možemo izraziti kao

$$\mathbf{F}_{\text{prividna}} = m(\mathbf{a}' - \mathbf{a}). \quad (\text{C.2})$$

Kako bismo s pomoću gornje jednadžbe izračunali prividnu silu u slučaju jednolike vrtnje \mathcal{S}' u odnosu na \mathcal{S} , upotrijebit ćemo tzv. cilindrični koordinatni sustav.

Cilindrični koordinatni sustav: Slika prikazuje česticu mase m te vektor njenog položaja \mathbf{r} koji možemo prikazati kao zbroj vektora $\boldsymbol{\rho}$ koji opisuje položaj čestice u odnosu na z -os i vektora $z\hat{\mathbf{z}}$ koji opisuje položaj čestice u odnosu na ravninu $z = 0$.



Osim njenim koordinatama u pravokutnom koordinatnom sustavu, položaj čestice možemo opisati i tzv. cilindričnim koordinatama

$$\rho, \quad \varphi, \quad z, \quad (\text{C.3})$$

gdje je $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ udaljenost čestice od z -osi, φ je kut koji vektor $\boldsymbol{\rho}$ zatvara s x -osi, a z -koordinata je preuzeta iz pravokutnog koordinatnog sustava.

Jedinični vektori: Cilindrični koordinatni sustav nam omogućuje da u svakoj točki prostora definiramo tri međusobno okomita jedinična vektora koja označavamo s

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{C.4})$$

Njihov smjer je određen smjerom u kojem bi se čestica pomakla kada bi neka od triju koordinata (C.3) infinitezimalno povećala svoju vrijednost, a zadovoljavaju relacije

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (\text{C.5})$$

Važno je uočiti da smjer jediničnih vektora $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ i $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ovisi o φ -koordinati točke u kojoj ih promatramo. Pri infinitezimalnoj promjeni φ -koordinate, jedinični vektori $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ i $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ se zakreću za kut $d\varphi$. Iz slike se može zaključiti da pri tom zakretu infinitezimalna promjena $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ gleda u smjeru $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, dok infinitezimalna promjena $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ gleda u smjeru $-\hat{\boldsymbol{\rho}}$, odnosno da su infinitezimalne promjene jediničnih vektora

$$d\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} d\varphi, \quad d\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} d\varphi. \quad (\text{C.6})$$

Podijelimo li gornje relacije diferencijalom vremena dt u kojem se promjena $d\varphi$ dogodila, slijede relacije

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi}, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \hat{\rho}. \quad (\text{C.7})$$

U nastavku ćemo, zbog preglednosti, vremenske derivacije označavati točkom iznad simbola. Na primjer,

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\varphi} \hat{\varphi}, \quad \dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi} \hat{\rho}. \quad (\text{C.8})$$

Položaj, brzina i akceleracija čestice: Položaj čestice u cilindričnom koordinatnom sustavu možemo izraziti kao

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}} = \rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.9})$$

gdje je ovisnost o koordinati φ sadržana u jediničnom vektoru $\hat{\rho}$ čiji smjer ovisi o toj koordinati. Deriviranjem izraza za položaj (C.9) po vremenu dobivamo izraz za brzinu čestice

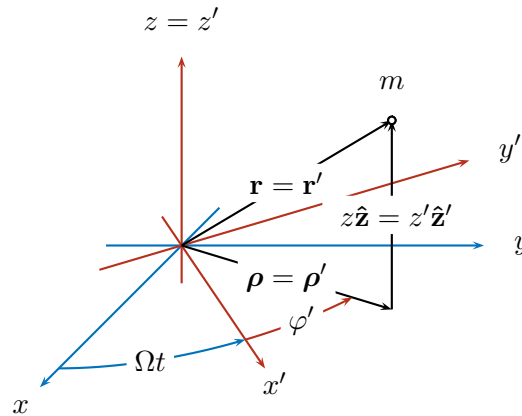
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.10})$$

(koristili smo pravilo za deriviranje umnoška funkcija te izraze (C.8)), a deriviranjem brzine po vremenu dobivamo akceleraciju

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \rho \dot{\varphi} \dot{\hat{\varphi}} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho}(\dot{\varphi} \hat{\varphi}) + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \hat{\varphi} + \rho \dot{\varphi}(-\dot{\varphi} \hat{\rho}) + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

(i ovdje smo koristili pravilo za deriviranje umnoška funkcija te izraze (C.8)).

Referentni okviri u jednolikoj vrtnji: Slika prikazuje česticu mase m te koordinatne sustave vezane uz referentne okvire S i S' koji se jedan u odnosu na drugog vrte kutnom brzinom iznosa Ω oko z odnosno z' -osi.



Koordinate u dvama cilindričnim koordinatnim sustavima povezane su relacijama

$$\rho = \rho', \quad \varphi = \Omega t + \varphi', \quad z = z'. \quad (\text{C.12})$$

Jednakost ρ i ρ' -koordinata te z i z' -koordinata za sobom povlači i jednakost njihovih vremenskih derivacija, dok za vremenske derivacije φ i φ' -koordinata imamo

$$\dot{\varphi} = \Omega + \dot{\varphi}', \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}'. \quad (\text{C.13})$$

Nadalje, jedinični vektori u dvama cilindričnim koordinatnim sustavima se podudaraju jer infinitezimalna promjena odgovarajućih koordinata (npr. $d\varphi$ i $d\varphi'$) pomiče česticu u istom smjeru,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}', \quad \hat{\varphi} = \hat{\varphi}', \quad \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}}'. \quad (\text{C.14})$$

Akceleracija čestice u odnosu na referentni okvir \mathcal{S}' je dana izrazom koji je oblikom istovjetan izrazu (C.11), s time da se u njemu pojavljuju koordinate r' , ϑ' i z' i jedinični vektori $\hat{\rho}'$, $\hat{\varphi}'$ i \hat{z}' cilindričnog koordinatnog sustava vezanog uz \mathcal{S}' ,

$$\mathbf{a}' = (\ddot{\rho}' - \rho' \dot{\varphi}'^2) \hat{\rho}' + (2\dot{\rho}' \dot{\varphi}' + \rho' \ddot{\varphi}') \hat{\varphi}' + \ddot{z}' \hat{z}' \quad (\text{C.15})$$

Akceleracija čestice u odnosu na referentni okvir \mathcal{S} je dana izrazom (C.11), a koristeći transformacije (C.12), (C.13) i (C.14), nju također možemo izraziti s pomoću koordinata i jediničnih vektora koordinatnog sustava vezanog uz \mathcal{S}' ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z} \\ &= (\ddot{\rho}' - \rho'(\Omega + \dot{\varphi}')^2) \hat{\rho}' + (2\dot{\rho}'(\Omega + \dot{\varphi}') + \rho' \ddot{\varphi}') \hat{\varphi}' + \ddot{z}' \hat{z}'. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Centrifugalna i Coriolisova prividna sila: Uzmemo li da je referentni okvir \mathcal{S} inercijski referentni okvir te da je \mathcal{S}' neinercijski referentni okvir koji se u odnosu na \mathcal{S} jednoliko vrti, koristeći izraz (C.16) za akceleraciju čestice u \mathcal{S} i izraz (C.15) za akceleraciju čestice u \mathcal{S}' , s pomoću izraza (C.2) možemo izračunati ukupnu prividnu silu,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{prividna}} &= m(\mathbf{a}' - \mathbf{a}) = m(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\varphi}') \rho' \hat{\rho}' - 2m\Omega \dot{\rho}' \hat{\varphi}' \\ &= m\Omega^2 \rho' \hat{\rho}' + 2m\Omega(\rho' \dot{\varphi}' \hat{\rho}' - \dot{\rho}' \hat{\varphi}'). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Prvi član na desnoj strani je centrifugalna prividna sila,

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = m\Omega^2 \rho' \hat{\rho}', \quad (\text{C.18})$$

gdje je m masa čestice, Ω je iznos kutne brzine kojom se neinercijski okvir u kojem promatramo gibanje čestice vrti u odnosu na inercijski okvir, a $\rho' \hat{\rho}'$ je vektor koji opisuje položaj čestice u odnosu na os vrtnje. Drugi član u (C.17) je Coriolisova prividna sila koju još možemo napisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Cor}} &= 2m\Omega(\rho' \dot{\varphi}'(\hat{\varphi}' \times \hat{z}') - \dot{\rho}'(\hat{z}' \times \hat{\rho}')) \\ &= -2m(\Omega \hat{z}') \times (\dot{\rho}' \hat{\rho}' + \rho' \dot{\varphi}' \hat{\varphi}') \\ &= -2m\Omega \times (\mathbf{v}' - \dot{z}' \hat{z}') \\ &= -2m\Omega \times \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

U računu smo najprije koristili relacije (C.5). Zatim smo izlučili vektor kutne brzine $\Omega = \Omega \hat{z}'$, a izraz u okruglim zagradama smo prepoznali kao vektor brzine čestice u odnosu na referentni okvir \mathcal{S}' u kojem nedostaje z' -komponenta. U posljednjem koraku smo izostavili član $-\dot{z}' \hat{z}'$ jer vrijedi $\Omega \times \dot{z}' \hat{z}' = 0$.

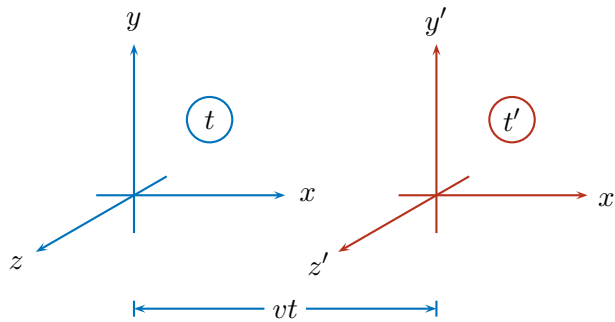
Izrazi (C.18) i (C.19) se podudaraju s izrazima (12.7) i (12.8) iz poglavlja 12.3.

D Izvod Lorentzovih transformacija

Lorentzove transformacije povezuju prostorvremenske koordinate događaja u različitim inercijskim referentnim okvirima odnosno u referentnim okvirima koji se jedan u odnosu na drugog gibaju translacijski stalnom brzinom. Osnovna svojstva Lorentzovih transformacija su:

- Za razliku od Galilejevih transformacija, Lorentzove transformacije su sukladne s postulatom specijalne relativnosti prema kojemu je iznos brzine svjetlosti u vakuumu c jednak za svakog opažača koji se u inercijskom referentnom okviru giba stalnom brzinom, bez obzira na brzinu izvora svjetlosti u odnosu na samog opažača.
- Poput Galilejevih transformacija, Lorentzove transformacije su linearne transformacije prostorvremen-
skih koordinata, ali osim prostornih koordinata one djeluju i na vremensku koordinatu.
- U limesu u kojem brzina svjetlosti u vakuumu c teži u beskonačno, Lorentzove transformacije postaju istovjetne Galilejevim transformacijama.

Uzet ćemo da su u inercijskim referentnim okvirima \mathcal{S} i \mathcal{S}' koji se jedan u odnosu na drugog gibaju brzinom iznosa v razapeti pravokutni koordinatni sustavi tako da se relativno gibanje referentnih okvira odvija duž x odnosno x' -osi te da se u trenutku $t = t' = 0$ ishodišta podudaraju.



Lorentzove transformacije možemo izvesti u sljedeća četiri koraka:

1. Razmatranjem koordinata čestice koja miruje u jednom od dva referentna okvira dolazimo do općenitog oblika transformacije x, x', t i t' koordinata. Ako čestica miruje u \mathcal{S}' , njena je x' -koordinata konstantna, dok se ista čestica u \mathcal{S} giba brzinom iznosa v u pozitivnom smjeru x -osi, a to znači da je veličina $x - vt$ konstantna. S obzirom na to da Lorentzova transformacija mora biti linearna transformacija, zaključujemo da ona mora imati oblik

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (\text{D.1})$$

gdje je γ za sada nepoznati koeficijent koji ne ovisi o koordinatama, ali može ovisiti o iznosu relativne brzine v . Ponavljajući isti argument za česticu koja miruje u \mathcal{S} , a u \mathcal{S}' se giba brzinom iznosa v u negativnom smjeru x' -osi, nalazimo

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (\text{D.2})$$

gdje je γ isti za sada nepoznati koeficijent kao i u (D.1).

2. Razmatranjem koordinata fotona (čestice koja se u svim referentnim okvirima giba brzinom svjetlosti c) koji je u trenutku $t = t' = 0$ iz ishodišta emitiran u smjeru x odnosno x' -osi određujemo koeficijent γ u transformacijama (D.1) i (D.2). Koordinate fotona su

$$x = ct, \quad x' = ct'. \quad (\text{D.3})$$

S obzirom na to da općenite transformacije (D.1) i (D.2) moraju vrijediti i za foton koji razmatramo, koordinate (D.3) uvrštavamo u (D.1) i (D.2) te nakon algebarskih manipulacija nalazimo

$\gamma = \pm 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, gdje odabiremo pozitivan predznak kako bi transformacije (D.1) i (D.2) težile prema Galilejevim transformacijama kad $c \rightarrow \infty$. Zaključujemo da je koeficijent γ dan izrazom

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (\text{D.4})$$

čime je je oblik transformacija (D.1) i (D.2) u potpunosti određen.

3. Transformaciju vremenske koordinate nalazimo eliminacijom x odnosno x' -koordinate iz sustava (D.1) i (D.2), što vodi na

$$t' = \gamma(t - (1 - \gamma^{-2})x/v), \quad t = \gamma(t' + (1 - \gamma^{-2})x'/v). \quad (\text{D.5})$$

Koristeći (D.4), gornje se izraze može sažetije napisati u obliku

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (\text{D.6})$$

4. Transformacije y i y' koordinata nalazimo razmatranjem fotona koji se u \mathcal{S} giba u smjeru pozitivne y -osi. Ako je foton emitiran u trenutku $t = t' = 0$ iz ishodišta, koordinate njegovog položaja u \mathcal{S} su

$$x = 0, \quad y = ct, \quad z = 0, \quad (\text{D.7})$$

dok u \mathcal{S}' mora vrijediti

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = ct', \quad z' = 0. \quad (\text{D.8})$$

Koristeći transformacije (D.1) i (D.6) koordinate x' i t' u gornjem izrazu možemo izraziti preko koordinata x i t što vodi na $y' = ct$ te nakon usporedbe s (D.7) zaključujemo

$$y' = y. \quad (\text{D.9})$$

S obzirom na to da se istovjetno razmatranje može provesti i za foton koji se giba u smjeru z -osi, također mora vrijediti

$$z' = z. \quad (\text{D.10})$$

Lorentzove transformacije su sadržane u relacijama (D.1), (D.2), (D.4) (D.6), (D.9) i (D.10), koje ovdje ponavljamo zbog preglednosti. Transformacije kojima su koordinate u \mathcal{S}' izražene preko koordinata u \mathcal{S} su

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (\text{D.11})$$

dok inverzne transformacije glase

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (\text{D.12})$$

Koeficijent γ , poznat kao Lorentzov faktor, dan je izrazom

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (\text{D.13})$$

gdje je v iznos brzine kojom se \mathcal{S} i \mathcal{S}' gibaju jedan u odnosu na drugog.

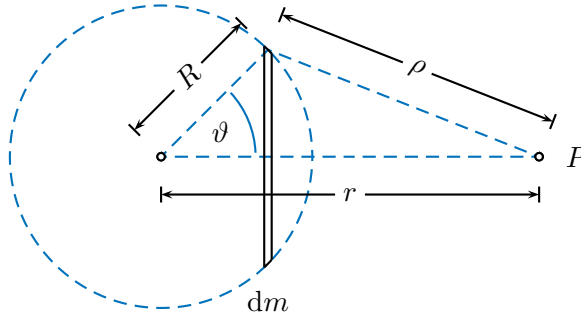
E Teorem o gravitacijskom polju sfernosimetrične raspodjele mase

Newtonov teorem o gravitacijskom polju sfernosimetrične raspodjele mase se može izreći sljedećim dvjema tvrdnjama:

1. Gravitacijsko polje u točki koja se nalazi izvan sfernosimetrično raspoređene mase m jednako je gravitacijskom polju čestice mase m koja se nalazi u središtu simetrije.
2. Gravitacijsko polje u točki koja se nalazi u praznom prostoru unutar sfernosimetrične raspodjele mase jednako je nuli.

Teorem se također može izreći tvrdnjama da je gravitacijski potencijal izvan sfernosimetrične raspodjele mase istovjetan potencijalu čestice te da je unutar raspodjele potencijal konstantan.

Teorem ćemo dokazati računanjem gravitacijskog potencijala mase m koja je jednoliko raspoređena na tankoj sfernoj ljusci polumjera R . Slika prikazuje element ljuske oblika kružnog vijenca polumjera $R \sin \vartheta$ i širine $R d\vartheta$ te točku P koja se nalazi na udaljenosti r od središta ljuske.



Površinu prikazanog elementa ljuske možemo izraziti kao umnožak njenog opsega $2\pi R \sin \vartheta$ i širine $R d\vartheta$,

$$dS = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta, \quad (\text{E.1})$$

a površinsku gustoću mase ljuske kao omjer ukupne mase ljuske m i njene ukupne površine $S = 4R^2\pi$,

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{m}{S} = \frac{m}{4R^2\pi}. \quad (\text{E.2})$$

Slijedi da je masa elementa ljuske prikazanog na slici

$$dm = \sigma dS = \frac{m}{4R^2\pi} 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{m}{2} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (\text{E.3})$$

Neovisno o tome nalazi li se točka P izvan ljuske ($r > R$, kao na slici) ili unutar ljuske ($r < R$), udaljenost promatranog elementa ljuske od točke P je

$$\rho = \sqrt{(r - R \cos \vartheta)^2 + (R \sin \vartheta)^2} \quad (\text{E.4})$$

te odgovarajući element gravitacijskog potencijala u točki P možemo izraziti kao

$$dU = -G_N \frac{dm}{\rho} = -\frac{G_N m}{2} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{(r - R \cos \vartheta)^2 + (R \sin \vartheta)^2}}. \quad (\text{E.5})$$

Gravitacijski potencijal čitave ljuske dobivamo integracijom gornjeg diferencijala od $\theta = 0$ do $\theta = \pi$, a koristeći varijablu

$$u = \cos \vartheta, \quad du = -\sin \vartheta d\vartheta, \quad (\text{E.6})$$

potencijal možemo napisati u obliku

$$U = \int dU = -\frac{G_N m}{2\sqrt{2rR}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{a-u}}, \quad \text{gdje je} \quad a = \frac{r^2 + R^2}{2rR}. \quad (\text{E.7})$$

Integral u gornjem izrazu daje

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{a-u}} &= -2\sqrt{a-u} \Big|_{-1}^1 = -2(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2rR}} \left(\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} - \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2rR}} \left(\sqrt{(r+R)^2} - \sqrt{(r-R)^2} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2rR}} (r+R - |r-R|) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

te za potencijal dobivamo

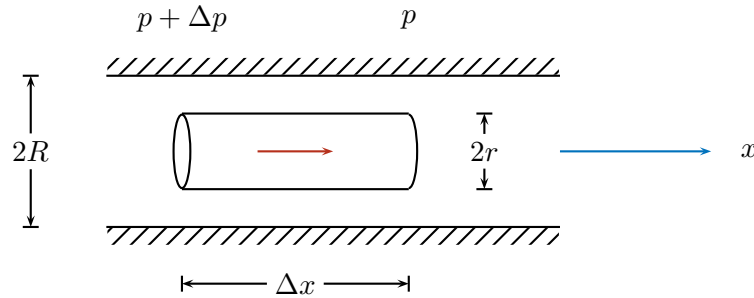
$$U[r] = -\frac{G_N m}{2\sqrt{2rR}} \frac{2}{\sqrt{2rR}} (r+R - |r-R|) = \begin{cases} -G_N m/r & \text{za } r > R, \\ -G_N m/R & \text{za } r < R. \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

Izraz za potencijal $U[r] = -G_N m/r$ koji vrijedi kad se točka P nalazi izvan ljuske ($r > R$) je istovjetan izrazu za potencijal čestice mase m na udaljenosti r . Izraz $-G_N m/R$ koji vrijedi kad se točka P nalazi unutar ljuske ($r < R$) jest konstanta što znači da je gravitacijsko polje unutar sferne ljuske jednako nuli. Konačno, uzimajući u obzir da se bilo koju sferosimetričnu raspodjelu mase može shvatiti kao niz sfernih ljuski različitih masa i različitih polumjera, ali sa zajedničkim središtem, te da je ukupno gravitacijsko polje zbroj doprinosa svih ljusaka, gornjim razmatranjem smo dokazali Newtonov teorem o gravitacijskom polju sferosimetrične raspodjele mase.

F Izvod Poiseuilleovog zakona protjecanja

Poiseuilleov zakon (vidi poglavlje 9.5, izraz (9.24)) opisuje laminarni i stacionarni tok viskoznog fluida kroz cijev kružnog presijeka. Izvest ćemo taj zakon tako što ćemo najprije odrediti raspodjelu brzine fluida u ovisnosti o udaljenosti od osi cijevi, a zatim ćemo integracijom preko čitavog poprečnog presijeka cijevi odrediti ukupan volumni tok.

Slika prikazuje cijev promjera $2R$ kroz koju fluid koeficijenta dinamičke viskoznosti μ teče pozitivnom smjeru x -osi te element fluida oblika valjka promjera $2r$ i duljine Δx koji ćemo posebno promatrati. Razlika tlaka fluida pri stražnjoj i prednjoj bazi valjka je Δp .



S obzirom na to da fluid teče stalnom brzinom, rezultantna sila koja djeluje na valjak je jednaka nuli, a sastoji od sile koja proizlazi iz razlike tlaka koji djeluje na baze valjka te od viskozne sile koja djeluje na njegov plašt zbog nejednake brzine fluida pri različitim udaljenostima od osi cijevi (fluid je najbrži u središtu cijevi, dok uz njene stijenke on miruje). Možemo pisati

$$0 = \Delta F_x = r^2 \pi \Delta p - \mu \left| \frac{dv}{dr} \right| 2r \pi \Delta x. \quad (\text{F.1})$$

Prvi član na desnoj strani je umnožak površine baze valjka $r^2 \pi$ i razlike tlaka Δp koji djeluje na stražnju i tlaka koji djeluje na prednju bazu valjka. Drugi član je sila viskoznog otpora izražena u skladu s (9.20) kao umnožak koeficijenta μ , derivacije brzine fluida po koordinati r koja opisuje udaljenost od osi cijevi te površine plašta valjka $2r \pi \Delta x$. Važno je naglasiti da je derivacija dv/dr negativna jer se brzina fluida u cijevi smanjuje s rastom varijable r , a u gornjem izrazu je napisana u znacima apsolutne vrijednosti kako bi čitav član imao negativni predznak karakterističan za silu otpora. Samu derivaciju možemo izraziti kao

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r \Delta p}{2\mu \Delta x}, \quad (\text{F.2})$$

što prepoznamo kao diferencijalni jednadžbu koja dopušta separaciju varijabli. Možemo ju napisati u obliku

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\mu \Delta x} r' dr' \quad (\text{F.3})$$

te integrirati od ruba cijevi $r' = R$ do neke vrijednosti $r' < R$ u unutrašnjosti cijevi što daje

$$v[r] - v[R] = -\frac{\Delta p}{2\mu \Delta x} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right). \quad (\text{F.4})$$

S obzirom na to da fluid pri rubu cijevi miruje imamo $v[R] = 0$ te zaključujemo da je ovisnost brzine o udaljenosti od osi cijevi dana izrazom

$$v[r] = \frac{\Delta p}{4\mu \Delta x} (R^2 - r^2). \quad (\text{F.5})$$

Element volumnog toka dq_V se može izraziti kao umnožak elementa površine poprečnog presijeka dS i brzine toka fluida v , a ukupni tok fluida kroz cijev možemo izračunati integrirajući dq po čitavom poprečnom

presijeku cijevi,

$$\begin{aligned} q_V &= \int dq_V = \int v \, dS = \int_0^R v[r] \, 2r\pi \, dr = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\mu \Delta x} (R^2 - r^2) \, 2r\pi \, dr \\ &= \dots = \frac{R^4 \pi \Delta p}{8\mu \Delta x}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Koristili smo izraz za raspodjelu brzina (F.5), a element površine poprečnog presijeka dS smo izrazili kao površinu kružnog vijenca polumjera r odnosno opsega $2r\pi$ i širine dr . Konačni rezultat je u skladu s izrazom (9.24) iz poglavlja 9.5.

G Postupci rješavanja jednadžbi gibanja oscilatora

G.1 Jednostavni harmonijski oscilator

Jednadžba gibanja jednostavnog harmonijskog oscilatora (6.4) jest diferencijalna jednadžba oblika

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\text{G.1})$$

gdje je $\omega_0^2 > 0$ konstanta, $x = x[t]$ je nepoznata funkcija vremena t , a $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x[t]$ je njena druga derivacija. Riječ je o običnoj, homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima. Probno rješenje

$$x = e^{\lambda t} \quad (\text{G.2})$$

vodi na karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (\text{G.3})$$

čija su dva rješenja karakteristične vrijednosti

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0. \quad (\text{G.4})$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (G.1) je linearna kombinacija tih dvaju rješenja,

$$x[t] = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\text{G.5})$$

gdje su a_1 i a_2 općenito kompleksne konstante, a $x[t]$ je općenito kompleksna funkcija. Odaberemo li konstante a_1 i a_2 kao međusobno kompleksno konjugirane brojeve, a to znači da ih možemo zapisati kao

$$a_{1,2} = \frac{A}{2} e^{\pm i\phi}, \quad (\text{G.6})$$

gdje su $A > 0$ i ϕ realni brojevi, opće rješenje (G.5) postaje realna funkcija,

$$x[t] = \frac{A}{2} e^{i\phi} e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-i\phi} e^{-i\omega_0 t} = \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega_0 t + \phi)} = A \cos[\omega_0 t + \phi] \quad (\text{G.7})$$

(koristili smo Eulerovu formulu $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$). Konstante A i ϕ u konačnom izrazu prepoznajemo kao amplitudu i početnu fazu harmonijskog titranja kutnom frekvencijom ω_0 , a sam izraz je istovjetan izrazu (6.5) koji smo pri razmatranju harmonijskog oscilatora naveli kao opće rješenje jednadžbe gibanja (6.4), odnosno diferencijalne jednadžbe (G.1).

Napomena: Odabir kompleksnih koeficijenata a_1 i a_2 u (G.6) kao međusobno kompleksno konjugiranih brojeva proizlazi iz zahtjeva da kompleksna funkcija $x[t]$ dana s (G.5) bude realna funkcija. Naime, izrazimo li kompleksne koeficijente a_1 i a_2 kao

$$a_{1,2} = \alpha_{1,2} + i\beta_{1,2}, \quad (\text{G.8})$$

gdje su $\alpha_{1,2}$ i $\beta_{1,2}$ realni brojevi, izraz (G.5) nam daje

$$x[t] = (\alpha_1 + i\beta_1)(\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + (\alpha_2 + i\beta_2)(\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t). \quad (\text{G.9})$$

Uočavamo da je imaginarni dio gornje funkcije,

$$\text{Im}[x] = (\beta_1 + \beta_2) \cos \omega_0 t + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \omega_0 t, \quad (\text{G.10})$$

jednak nuli ako vrijedi $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = -\beta_2$, a što upravo znači da a_1 i a_2 moraju biti međusobno kompleksno konjugirani brojevi.

G.2 Harmonijski oscilator s prigušenjem

Jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora s prigušenjem (6.22) glasi

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\text{G.11})$$

gdje su $\delta > 0$ i $\omega_0^2 > 0$ konstante, $x = x[t]$ je nepoznata funkcija vremena t , a \dot{x} i \ddot{x} su njena prva i druga derivacija. Radi se o običnoj, homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi drugog reda s konstantnim koeficijentima. Probno rješenje $x[t] = e^{\lambda t}$ vodi na karakterističnu jednadžbu

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (\text{G.12})$$

čija su rješenja karakteristične vrijednosti

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{G.13})$$

Opće rješenje razmatramo posebno za slučaj $\delta < \omega_0$, za slučaj $\delta = \omega_0$ te za slučaj $\delta > \omega_0$.

- **Podkritično prigušenje:** Kad je $\delta < \omega_0$, karakteristične vrijednosti su kompleksni brojevi koje možemo napisati kao

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega, \quad \text{gdje je} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (\text{G.14})$$

Opće rješenje je kompleksna funkcija

$$x[t] = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\delta t} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}), \quad (\text{G.15})$$

gdje su a_1 i a_2 kompleksni koeficijenti. Odaberemo li te koeficijente kao međusobno kompleksno konjugirane brojeve

$$a_{1,2} = \frac{A}{2} e^{\pm i\phi}, \quad (\text{G.16})$$

gdje su $A > 0$ i ϕ realni brojevi, opće rješenje poprima oblik

$$x[t] = A e^{-\delta t} \cos[\omega t + \phi] \quad (\text{G.17})$$

u kojem prepoznajemo prigušeno titranje frekvencijom ω koja je dana s (G.14) i amplitudom $A e^{-\delta t}$ koja eksponencijalno trne u vremenu.

- **Kritično prigušenje:** Kad je $\delta = \omega_0$, karakteristične vrijednosti su degenerirane (međusobno jednake) i iznose $\lambda_{1,2} = -\delta$. U takvom slučaju, opće rješenje pišemo kao

$$x[t] = (a_1 + a_2 t) e^{\lambda t} = (a_1 + a_2 t) e^{-\delta t}, \quad (\text{G.18})$$

što je uz odabir $a_{1,2} \in \mathbb{R}$ realna funkcija koja eksponencijalno trne u vremenu.

- **Nadkritično prigušenje:** Kad je $\delta > \omega_0$, karakteristične vrijednosti su realne, a možemo ih napisati kao

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm q \quad \text{gdje je} \quad q = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{G.19})$$

Opće rješenje je

$$x[t] = e^{-\delta t} (a_1 e^{qt} + a_2 e^{-qt}). \quad (\text{G.20})$$

Uz odabir $a_{1,2} \in \mathbb{R}$, to je realna funkcija, a s obzirom na to da vrijedi $\delta > q$, ona eksponencijalno trne u vremenu.

G.3 Oscilator s vanjskom silom

Jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora s prigušenjem i s vanjskom harmonijskom silom (6.33) je diferencijalna jednadžba oblika

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_p \cos \omega_p t, \quad (\text{G.21})$$

gdje je $x = x[t]$ nepoznata funkcija vremena, a δ , ω_0^2 , f_p i ω_p su pozitivne konstante. To je obična, linearna, nehomogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Njeno opće rješenje se sastoji od općeg rješenja odgovarajuće homogene jednadžbe (G.11) te od partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe. S obzirom na to da rješenje homogene jednadžbe opisano u poglavlju G.2, ovdje se bavimo samo partikularnim rješenjem nehomogene jednadžbe.

Kao partikularno rješenje očekujemo harmonijsko titranje frekvencijom vanjske sile ω_p te probno rješenje pišemo kao

$$x[t] = A \cos[\omega_p t - \phi], \quad (\text{G.22})$$

gdje je $A > 0$ amplituda, a ϕ je fazni kut koji opisuje kašnjenje oscilacije za vanjskom silom. Cilj nam je odrediti veličine A i ϕ u ovisnosti o parametrima δ , ω_0^2 , f_p i ω_p . Zbog jednostavnije provedbe računa koristimo kompleksni zapis titrajućih veličina. Diferencijalnu jednadžbu (G.21) pišemo u obliku

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_p e^{i\omega_p t}, \quad (\text{G.23})$$

a probno rješenje (G.22) kao

$$x[t] = A e^{i(\omega_p t - \phi)}. \quad (\text{G.24})$$

Uvrštavanjem (G.24) u (G.23) dobivamo

$$(-\omega_p^2 + i2\delta\omega_p + \omega_0^2) A e^{-i\phi} = f_p \quad (\text{G.25})$$

iz čega možemo izraziti amplitudu

$$A = \frac{f_p e^{i\phi}}{\omega_0^2 - \omega_p^2 + i2\delta\omega_p}. \quad (\text{G.26})$$

S obzirom na to da je prema pretpostavci $A > 0$, isto mora vrijediti i za desnu stranu gornje jednadžbe, a to znači da brojnik i nazivnik razlomka imaju isti argument (kut u kompleksnoj ravnini). Iz toga slijedi

$$\text{tg } \phi = \frac{2\delta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}, \quad 0 < \phi < \pi, \quad (\text{G.27})$$

a samu amplitudu možemo jednostavnije izraziti kao

$$A = \frac{f_p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\delta\omega_p)^2}}. \quad (\text{G.28})$$

H Izvod vektorske formule za Dopplerovu pojavu

Polazimo od sljedećih pretpostavki:

- Signal (zvuk) u svim smjerovima putuje brzinom iznosa v_z .
- Signal odaslan iz točke \mathbf{r}_i u trenutku t_i (izvor) primljen je u točki \mathbf{r}_p u trenutku $t_p > t_i$ (prijamnik).
- Signal odaslan iz točke $\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t_i$ u trenutku $t_i + \Delta t_i$ primljen je u točki $\mathbf{r}_p + \mathbf{v}_p \Delta t_p$ u trenutku $t_p + \Delta t_p$. Podrazumijeva se $\Delta t_{i,p} \ll t_p - t_i$.

Izravno slijede jednakosti

$$v_z(t_p - t_i) = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|, \quad (\text{H.1})$$

$$v_z((t_p + \Delta t_p) - (t_i + \Delta t_i)) = |(\mathbf{r}_p + \mathbf{v}_p \Delta t_p) - (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \Delta t_i)|. \quad (\text{H.2})$$

Jednadžbu (H.2) zapisujemo u obliku

$$v_z((t_p - t_i) + (\Delta t_p - \Delta t_i)) = |(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{v}_p \Delta t_p - \mathbf{v}_i \Delta t_i)| \quad (\text{H.3})$$

te koristeći (H.1) imamo

$$|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i| + v_z(\Delta t_p - \Delta t_i) = |(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{v}_p \Delta t_p - \mathbf{v}_i \Delta t_i)|. \quad (\text{H.4})$$

Gornju jednadžbu kvadriramo te odbacujemo članove koji su kvadratični u Δt_i ili Δt_p , nakon čega dobivamo

$$v_z(\Delta t_p - \Delta t_i)|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i| = (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{v}_p \Delta t_p - \mathbf{v}_i \Delta t_i). \quad (\text{H.5})$$

Uvedemo li jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}_{ip}$ koji je usmjeren od točke \mathbf{r}_i prema točki \mathbf{r}_p ,

$$\hat{\mathbf{r}}_{ip} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|}, \quad (\text{H.6})$$

jednadžbu (H.5) možemo napisati kao

$$v_z \left(1 - \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} \right) = \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \left(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_i \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} \right) \quad (\text{H.7})$$

te iz nje izlučiti omjer $\Delta t_i / \Delta t_p$,

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} = \frac{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_p}{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_i}. \quad (\text{H.8})$$

Shvatimo li intervale Δt_i i Δt_p kao recipročne vrijednosti frekvencija f_i i f_p kojima izvor odašilje, a prijamnik prima signale, dobivamo

$$\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_p}{v_z - \hat{\mathbf{r}}_{ip} \cdot \mathbf{v}_i} \quad (\text{H.9})$$

što je formula (7.61).

Kazalo

akceleracija

- centripetalna, 21
- kutna, α , 24
- slobodnog pada, 36
- tangencijalna, a_{tang} , 21
- u pravokutnom koordinatnom sustavu, 12
- čestice, 12

aperiodičko gibanje, 96

barometarska formula, 160

bermoullijeva jednadžba, 164

brzina

- asimptotska, 45
- inverzna relacija, 17
- kružno gibanje, 24
- kutna, ω , 23
- središta mase, v_{cm} , 74
- svjetlosti, 205
- terminalna, 45
- u pravokutnom koordinatnom sustavu, 12
- zvuk, 129
- čestice, 11

centralna sila

- elastična, 186
- točke obrata, 186

centrifugalna sila, 200, 221

centripetalna akceleracija, 21

- kružno gibanje, 24

centripetalna sila, 34

cikloida, 29

Coriolisova sila, 201, 221

dilatacija vremena, 208

disipativna sila, 63

Dopplerova pojava, 131, 233

duljina puta, 17

elastičnost, 174

električni naboj, 1

električno polje, 43

energija

- kinetička, 54
- mehanička, 61
- mehaničkog vala, 125
- potencijalna, 59

energija mirovanja, 212

fizička dimenzija (M , L i T), 4

fizičko njihalo, 148

reducirana duljina, 149

fluid

- idealni i viskozni, 157
- laminarni i nelaminarni tok, 162
- plin i tekućina, 157
- ravnoteža u gravitacijskom polju, 158
- stacionarni i nestacionarni tok, 162
- stlačivi i nestlačivi, 157
- volumni i maseni tok, 162

frekvencija harmonijskog vala, 121

Galilejeve transformacije, 27, 224

Gibanje pod djelovanjem stalne sile, 211

gravitacija

- gravitacijsko polje, 192
- Keplerovi zakoni, 194
- Newtonov zakon gravitacije, 191
- potencijal, 193
- pri većim visinama, 54
- pri Zemljinoj površini, 19, 36, 60, 192

greda, 137

gustoća mase, 1

harmonijski oscilator

- jednadžba gibanja, 88
- rješavanje jednadžbe gibanja, 230

harmonijski val, 113, 121

harmonijsko titranje, 88

- mehanička energija, 91
- položaj brzina i akceleracija, 15
- sila, 38

hidrostatska ravnoteža, 158

hidrostatski tlak, 158

homogeno tijelo, 1

intenzitet zvuka, 130

jedinični vektor, 6

Jednadžba gibanja

- središta mase, 74

jednadžba gibanja

- kutne količine gibanja, 82
- njihala, 148

jednadžba gibanja harmonijskog oscilatora, 88

jednadžba kontinuiteta, 163

jednadžba stanja idealnog plina, 157

jednoliko kružno gibanje, 26

jednoliko pravocrtno gibanje, 18

jednoliko ubrzano gibanje, 19

- Keplerovi zakoni, 194
- kinetička energija
 - pri vrtnji krugog tijela, 146
 - relativistička, 211
 - u sustavu čestica, 76
- kinetička energija, K , 54
- klizanje
 - na kosini, 40
 - pri kotrljanju, 152
- koeficijent dinamičke viskoznosti, 167
- koeficijent restitucije, 77
- količina gibanja
 - kutna, 81
 - očuvanje, 70
 - relativistička, 210
 - sustava čestica, 70
 - čestice, 34
- kolotura, 39
- konstanta elastičnosti opruge, 38
- konstanta torzije šipke, 180
- kontrakcija duljine, 208
- konusno njihalo, 36
- konzervativna sila, 57
- koordinatni sustav
 - cilindrični, 221
 - pravokutni, 8
- Kosi hitac
 - uz silu otpora, 47
- kosi hitac, 19
- kosina, 40
- kotač, 150
- kotrljanje
 - bez klizanja, 150
 - s klizanjem, 152
- kruto tijelo, 135
 - glavne osi, 143
 - kotrljanje, 150
 - kutna količina gibanja, 143
 - moment tromosti, 141
 - teorem o okomitim osima, 142
 - teorem o paralelnim osima, 142
 - vrtnja oko nepomične osi, 140, 144
- kružno gibanje, 23
 - jednoliko, 26
- kutna akceleracija, α , 24
- kutna brzina, 23
- kutna količina gibanja
 - jednadžba gibanja, 82
 - krutg tijela, 143
 - očuvanje, 83
 - očuvanje u polju centralne sile, 185
 - sustava čestica, 82
 - u ROL i ROSM, 84
 - čestice, 81
 - pri gibanju duž pravca, 81
 - pri kružnom gibanju, 81
- laminarni tok fluida, 162
- Lennard-Jonesova sila, 188
- Lissajousove krivulje, 102
- Logaritamski dekrement prigušenja, 96
- longitudinalni val, 116
- Lorentzova sila, 7
- Lorentzove transformacije, 206
 - izvod, 224
- Magnusova pojava, 169
- masa, 1
 - reducirana, 189
- maseni tok, 162
- matematičko njihalo, 93
- mehanička energija
 - očuvanje, 61
- mjerna jedinica, 4
- množenje vektora skalarom, 5
- modul elastičnosti, 174
 - smicanja, 180
 - stlačivosti, 178
 - Youngov, 175
- moment sile, 82
- moment tromosti, 141
 - jednostavna tijela, 141
- naprezanje, 173
 - smično, 180
 - tlačno, 177
 - vlačno, 175
- neinerijski referentni okvir
 - u jednoliku vrtnji, 199
- neKonzervativna sila, 63
- nelaminarni tok fluida, 162
- nestacionarni tok fluida, 162
- Newtonov zakon
 - prvi i drugi, 33, 34
 - treći, 69
- Newtonova jednadžba gibanja, 34
 - separacija varijabli, 44, 45, 48
- njihalo
 - fizičko, 148
 - jednadžba gibanja, 148
 - matematičko, 93
 - stožasto, 36
- opruga, 38

- potencijalna energija, 60
- oscilacije, 87
- očuvanje količine gibanja, 70
- paradoks blizanaca, 208
- Poiseuilleov zakon, 168
 - izvod, 228
- Poissonov omjer, 175
- polje, 6
 - homogeno, 7
- položaj
 - inverzna relacija, 17
 - u pravokutnom koordinatnom sustavu, 12
 - čestice, r , 11
- pomak, Δr , 11
- potencijalna energija, 59
 - gravitacijska, 60
 - opruge, 60
 - para čestica, 187
 - u polju centralne sile, 185
- početni uvjeti, 34
- pravilo desnog vijka, 6, 23
- pravocrtno gibanje, 14
 - jednoliko, 18
- pravokutni koordinatni sustav
 - kružno gibanje, 25
 - položaj, brzina i akceleracija, 12
- prigušeni oscilator
 - rješavanje jednadžbe gibanja, 231
- prigušeno titranje, 95
- prisilno titranje, 98
 - rješavanje jednadžbe gibanja, 232
- putanja čestice, 11
- Q-faktor, 96
- Rad, 51
- rad
 - pri vrtnji krutog tijela, 146
- raketa, 73
- razina jakosti buka, 130
- reducirana duljina fizičkog njihala, 149
- reducirana masa, 189
- referentni okvir, 3
 - inercijski i neinercijski, 33, 197
 - laboratorija (ROL), 75
 - središta mase (ROSM), 75
- refleksija i transmisija transverznog vala, 127
- refleksija transverznog vala, 119
- relativistička energija, 212
- relativna deformacija, 173
 - poprečna, 175
 - uzdužna, 175
- volumena, 177
- relativnost
 - Galilei–Newtonova, 205
 - specijalna, 206
- Reynoldsov broj, 167
- rezonancija, 99
- ROSM, referentni okvir središta mase, 75
- separacija varijabli, 44
- sila
 - centralna, 185
 - centrifugalna, 200, 221
 - centripetalna i tangencijalna, 34
 - Coriolisova, 201, 221
 - disipativna, 63
 - konzervativna, 57
 - Lennard-Jonesova, 188
 - neKonzervativna, 63
 - opruge, 38
 - ovisna o brzini, 44, 45
 - ovisna o vremenu, 42
 - Stokesova, 167
 - stvarna i prividna, 197
 - teža, 36
 - viskozna, 167
- skalarna veličina, 5
- skalarno množenje, 5
- slobodni pad
 - pri Zemljinoj površini, 36
 - učinak Zemljine vrtnje, 201
- snaga, 52
 - mehaničkog vala, 126
 - pri vrtnji krutog tijela, 146
- Središte mase
 - jednadžba gibanja, 74
- središte mase, 74
 - referentni okvir, 75
- stacionarni tok fluida, 162
- statička ravnoteža krutog tijela, 137
- Steinerov teorem, 142
- stojni val, 122
 - čvorovi i brjegovi, 122
- Stokesov zakon (sila), 167
- stožasto njihalo, 36
- sudar, 77
 - koeficijent restitucije, 77
 - kut otklona, 77
 - necentralni, 220
 - projektila i mirne mete, 79
- superpozicija titranja, 100
- superpozicija valova, 119

- sustav čestica
 - količina gibanja, 70
 - središte mase, 74
 - unutarnje i vanjske sile, 69
- tangencijalna akceleracija, 21
 - kružno gibanje, 24
- tangencijalna sila, 34
- teorem o okomitim osima, 142
- teorem o paralelnim osima, 142
- teorem o radu i kinetičkoj energiji, 54
- teorem o sfernim ljuskama
 - dokaz, 226
- težina, 36
- težište tijela, 137
- titranje, 87
- tlak
 - fluida, 157
 - hidrostatski, 158
- Torricellijev zakon istjecanja, 165
- točka obrata, 186
- transverzalni val, 114
 - refleksija, 127
 - valna jednadžba, 114
- trenje
 - dinamičko, 40
 - na kosini, 40, 41
 - statičko, 41
- uzgon, 160
- val
 - energija, 125
 - harmonijski, 113, 121
 - snaga, 126
 - stojni, 122
 - transverzalni, 114
 - upadni, reflektirani i transmitirani, 127
- valna duljina harmonijskog vala, 121
- valna fronta, 113
- valna jednadžba
 - longitudinalni val u štapu, 116
 - opće rješenje, 115, 117
 - transverzalni val na užetu, 114
- vektorska veličina, 5
- vektorsko množenje, 6
- vezani oscilatori, 104
- viskoznost fluida, 167
- vlastita duljina, 208
- vlastiti modovi i frekvencije titranja, 104
- vlastito vrijeme, 208
- vodoravni hitac, 13
- volumni tok, 162
- zvuk, 129
 - brzina, 129
 - intenzitet, 130
 - razina jakosti buke, 130
- čestica, 1