Uzorkovanje signala
i
kvantizacija uzoraka

Teorija informacije

Analogni prijenos signala

- ograničit ćemo se na skup striktno pojasno ograničenih signala, $\{x(t)\}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = 0 \text{ za} \left| f \right| > f_g \neq 0$$

- pri prijenosu signala koji nije pojasno ograničen nužno je prenositi neprebrojiv skup kontinuiranih vrijednosti tog signala
  - sve vrijednosti signala $x(t)$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$
    - $[t_1, t_2]$ je promatrani vremenski interval unutar kojeg se odvija prijenos signala $x(t)$
  - takav prijenos zovemo i **analogni** prijenos

Uzorkovanje

- ako je signal pojasno ograničen, tada je unutar promatranog vremenskog intervala dovoljno prenositi prebrojiv skup njegovih vrijednosti
  - pojasno ograničen signal u kontinuiranom vremenu moguće je jednoznačno specificirati pomoću njegovih vrijednosti uzetih u diskretnim trenucima
  - proces uzimanja uzoraka kontinuiranog signala u diskretnim trenucima naziva se **uzorkovanje**
  - uzorkovanje se provodi u predajniku, a rekonstrukcija izvornog signala u prijemniku
  - uzorkovanje je osnova digitalnog prijenosa signala
    - prvi korak u digitalizaciji analognog signala

Teorem uzorkovanja u vremenskoj domeni

  - za striktno pojasno ograničene signale konačne energije
- Prvi dio teorema odnosi se na **predajnik**
- Pojasno ograničeni signal konačne energije, $x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B Hz
  - $X(f) = 0$ za $|f| > B$
- u potpunosti je i na jednoznačan način opisan pomoću vrijednosti tog signala uzetih u diskretnim vremenskim trenucima $T_n = n/(2B)$
  - $n \in \mathbf{Z}$, B je gornja granična frekvencija signala

Teorem uzorkovanja u vremenskoj domeni (II)

- Drugi dio teorema odnosi se na **prijemnik**
- Pojasno ograničeni signal $x(t)$ konačne energije čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B Hz
  - $X(f) = 0$ za $|f| > B$
- moguće je u potpunosti i na jednoznačan način rekonstruirati na temelju poznavanja njegovih uzoraka uzetih u diskretnim trenucima međusobno razmaknutim za $1/(2B)$ sekundi
  - frekvencija 2B uzorak/s – Nyquistova frekvencija
  - (1/2B) [s] – Nyquistov interval uzorkovanja

Frekvencija uzorkovanja

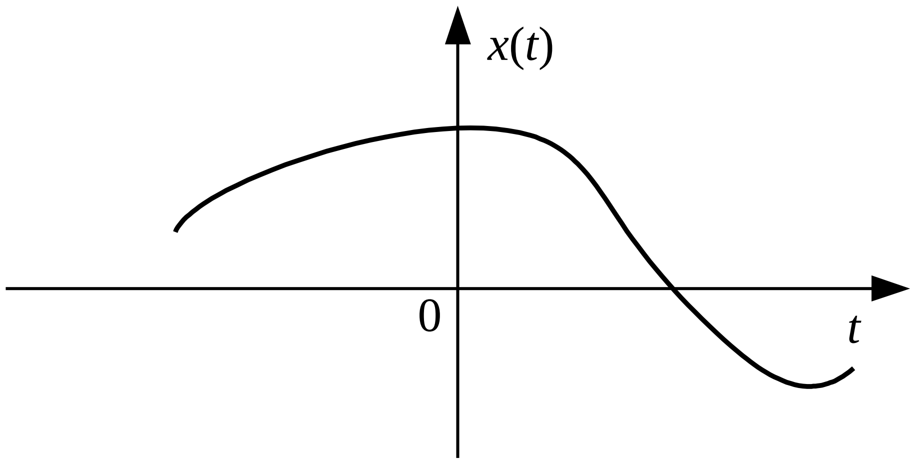
- osnovni problem uzorkovanja – odabir adekvatne frekvencije uzorkovanja f_u
  - slijed uzoraka mora jednoznačno definirati izvorni analogni signal
- poželjno je da f_u bude što manja
  - tada je i broj uzoraka manji
- što su uzorci gušći, to je slijed uzoraka sve bliži originalnom analognom signalu
  - međutim, potrebno prenositi više uzoraka
  - rezultat: neučinkovito korištenje mrežnih resursa

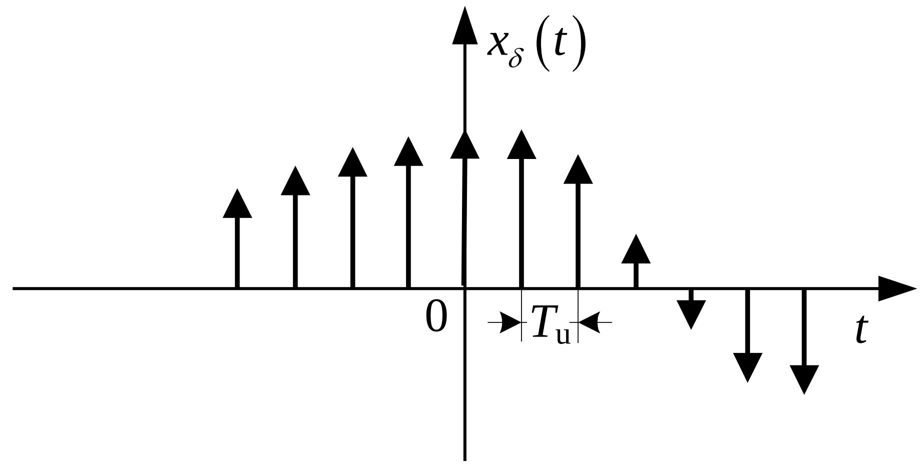
Dokaz teorema uzorkovanja

- promatrajmo proizvoljni signal $x(t)$ konačne energije, definiran za svaki $t \in \mathbf{R}$
- uzorci se uzimaju jednolikom frekvencijom
  - jedan uzorak svakih T_u sekundi
  - nastaje slijed uzoraka $\{x(nT_u)\}$, $n \in \mathbf{Z}$
  - T_u nazivamo period uzorkovanja
  - $f_u = 1/T_u$ je frekvencija uzorkovanja
  - idealno uzorkovanje: trajanje uzimanja uzorka $\Delta t \to 0$
- uzorkovani signal je slijed Diracovih impulsa

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,\delta(t - nT_u)$$

Proces uzorkovanja





- a) originalni kontinuirani signal
- b) njegova uzorkovana inačica
- Diracov impuls pomnožen koeficijentom $x(nT_u)$
  - aproksimiramo ga pravokutnim impulsom trajanja Δt i amplitude $x(nT_u)/\Delta t$

Svojstva Fourierove transformacije

- prvo svojstvo: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_0) \square \; \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$
- drugo svojstvo: funkcija $x_\delta(t)$ je umnožak funkcije $x(t)$ i beskonačnog slijeda Diracovih delta impulsa $\delta(t-nT_u)$
  - spektar od $x(t)$ je $X(f)$
  - spektar od slijeda $\delta(t-nT_u)$ - prvo svojstvo
- $x_\delta(t)$ se preslikava u konvoluciju

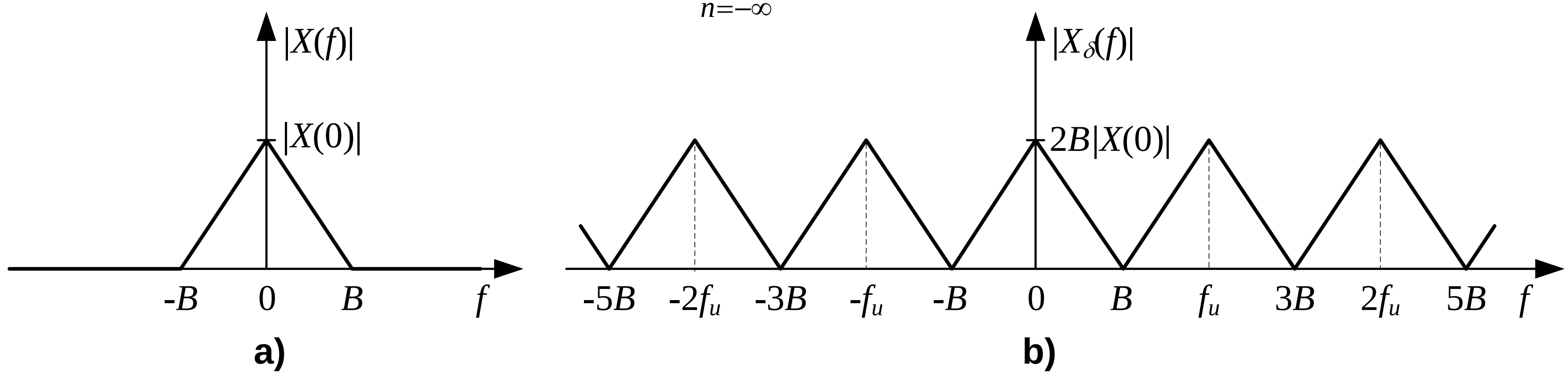
$$X(f) * \left[f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-nf_u) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-nf_u-\phi)\, d\phi =$$

$$= f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\delta(f-nf_u-\phi)\, d\phi = f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nf_u),$$

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- proces jednolikog uzorkovanja kontinuiranog signala konačne energije rezultira periodičkim spektrom čiji je period jednak frekvenciji uzimanja uzoraka

$$x_{\delta}(t) \square \quad f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_u)$$



- a) amplitudni spektar signala pojasno ograničenog na pojas frekvencija (-*B*, *B*)
- b) amplitudni spektar uzorkovane inačice tog signala uzorkovane frekvencijom $f_u = 1/(2B)$

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- primijenimo Fourierovu transformaciju na obje strane izraza $$x_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,\delta(t-nT_u)$$
- iskoristimo svojstvo: $$\delta(t-nT_u) \square \quad e^{-j2\pi nfT_u}$$
- dobivamo: $$X_\delta(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,e^{-j2\pi nfT_u}$$
- gornji se izraz naziva diskretna Fourierova transformacija (DFT)
- $X_\delta(f)$ je spektar signala $x_\delta(t)$

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- pretpostavimo
  - $X(f) = 0$ za $|\, f \,| > B$ i $T_u = 1/(2B)$
- spektar od $x_\delta(t)$ je dan izrazom $X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f/B}$
- koristeći izraz $x_\delta(t) \square \quad f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_u)$
- dobivamo $X_\delta(f) = f_u X(f) + f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} X(f - m f_u)$
- ako vrijedi $X(f) = 0$ za $|\, f \,| > B$ i $f_u = 2B$
  - tada je $f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} X(f - m f_u) = 0$

Dokaz teorema uzorkovanja (kraj)

- dakle, vrijedi: $X(f)=\begin{cases} \frac{1}{2B} X_\delta(f), & -B \le f \le B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- uvrstimo u prethodni izraz $X_\delta(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f/B}$
- pa dobivamo $X(f)=\begin{cases} \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f/B}, & -B \le f \le B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$
- ako su $x[n/(2B)]$ poznate za svaki $n \in \mathbf{Z}$ tada je $X(f)$ jednoznačno određen DFT-om
- $x(t)$ je inverzna Fourierova transformacija od $X(f)$
- dakle, $x(t)$ jednoznačno određen uzorcima $x[n/(2B)]$

Rekonstrukcija signala

- Kako iz $\{x[n/(2B)]\}$ dobiti $x(t)$?

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-B}^{B}\frac{1}{2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right)e^{-j\pi nf/B}e^{j2\pi ft}df$$

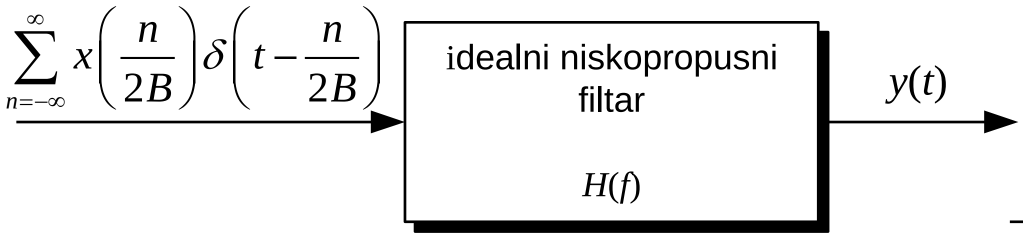
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f[t-n/(2B)]}df$$

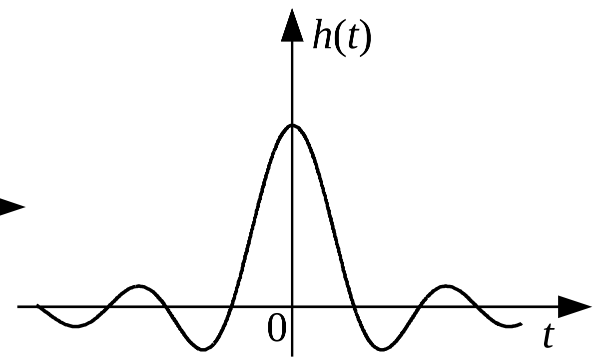
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right)\frac{\sin(2\pi Bt-n\pi)}{2\pi Bt-n\pi},\ -\infty<t<\infty$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right)\operatorname{sinc}(2Bt-n),\ -\infty<t<\infty$$

- $\operatorname{sinc}(x)=\sin(\pi x)/(\pi x)$

Rekonstrukcija signala (II)

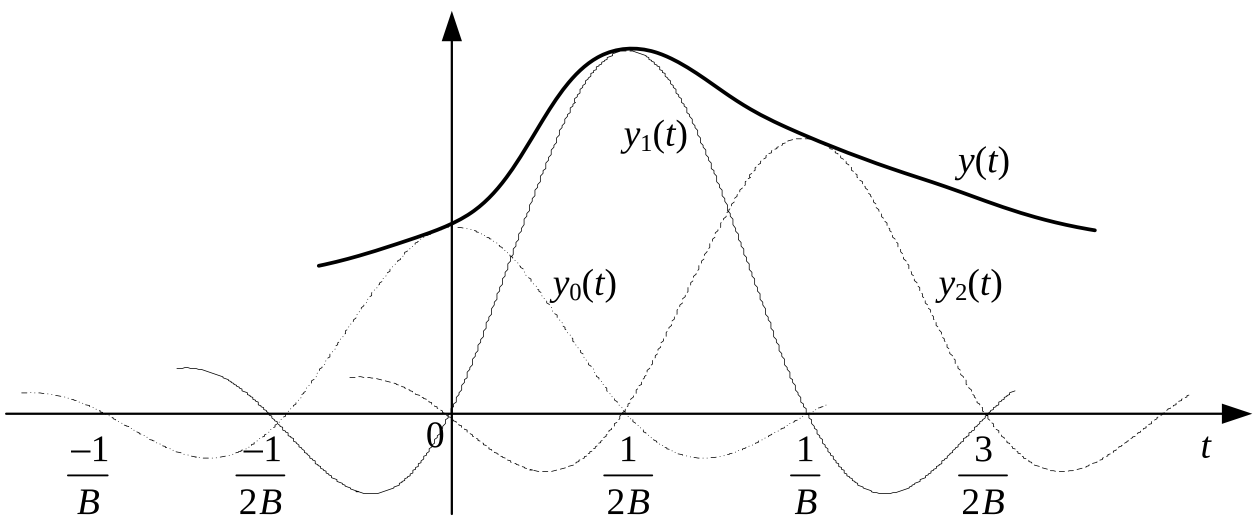




$$H(f)=\begin{cases}1, & 0\le |f| < B,\\ 0, & |f| > B.\end{cases}$$

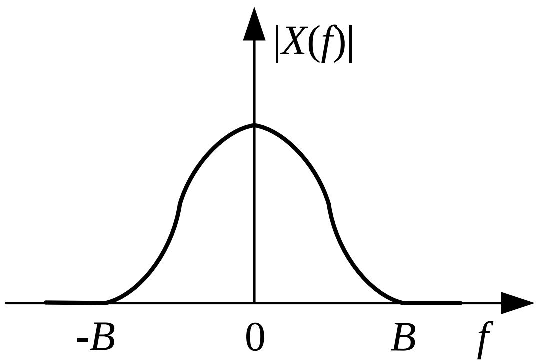
a)

b)

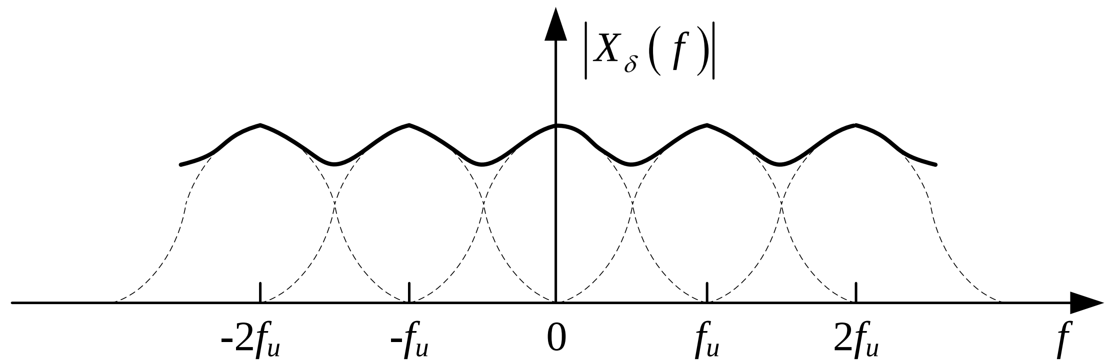


Poduzorkovanje

- u praksi se uvijek odvija poduzorkovanje jer realni signali nisu striktno pojasno ograničeni
- ako je pak signal pojasno ograničen, a $f_u < 2B$



a)



b)

- rezultat poduzorkovanje je preklapanje spektara
  - iz izobličenog spektra nije moguće točno rekonstruirati izvorni signal

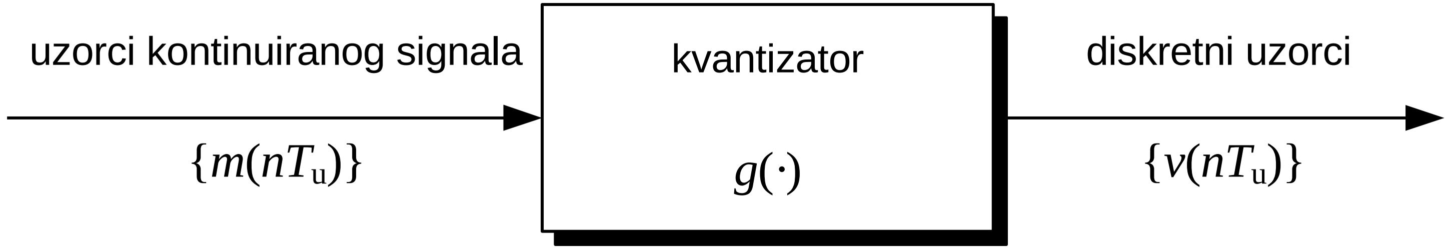
Kvantizacija uzoraka

- nakon uzorkovanja kvantizacija je sljedeći korak u pretvorbi analognog u digitalni signal
  - analogni signal ima beskonačno mnogo mogućih vrijednosti amplitude
  - nije potrebno prenositi točne vrijednosti uzoraka
    - ljudska osjetila mogu detektirati samo konačne razlike između razina signala
  - originalni analogni signal je moguće aproksimirati signalom sastavljenim od diskretnih amplitudnih razina
    - odabiru se iz konačnog skupa po kriteriju minimalne pogreške u razlici između stvarnih i aproksimiranih vrijednosti signala
  - osnova tzv. *impulsno-kodne modulacije* (PCM)

Matematički model kvantizacije

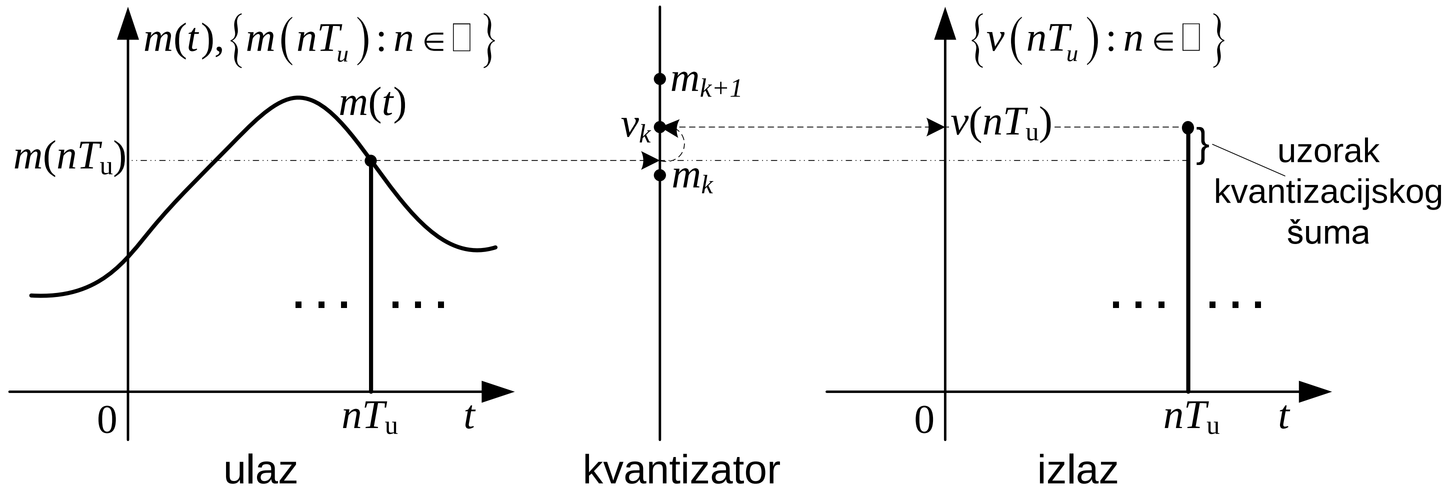
- amplitudni uzorci $m(nT_u)$ uzeti od $m(t)$ u nT_u, $n \in \mathbf{Z}$ se pretvaraju u diskretne amplitudne razine $v(nT_u)$
  - skupa mogućih razina je konačan
  - T_u je period uzorkovanja signala
  - pretpostavka: kvantizacijski proces je bezmemorijski i trenutan – ne koristi se u naprednijim postupcima
- neka je $m_k < m(nT_u) \leq m_k$+1, $k = 1, 2, ..., L$ i
- $m_k < v_k \leq m_k$+1, $k = 1, 2, ..., L$
  - L – broj stupnjeva amplitude kvantizatora (broj kvantizacijskih razina
- tada kvantizator preslikava $m(nT_u) \rightarrow v_k$

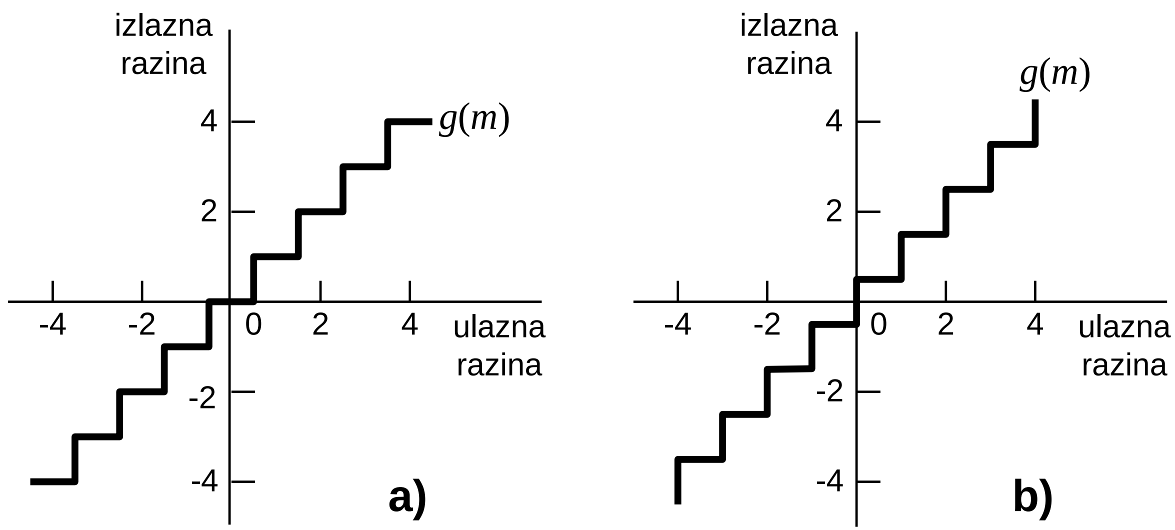
Kvantizator



- m_k – razine odlučivanja ili pragovi odluke
- v_k+1 – v_k je korak kvantizacije
- $v = g(m)$ – kvantizacijska karakteristika
- najčešći slučaj u praksi: $v_k = (m_k + m_k+1)/2$
- ovisno o veličini koraka kvantizacija
  - jednolika kvantizacija – svi koraci jednaki
  - u suprotnom – nejednolika kvantizacija

Primjer kvantiziranja i jednolika kvantizacija





Kvantizacijski šum

- šum je razlika između $m(nT_u)$ i $v(nT_u)$
- ulaz u kvantizator kontinuirana slučajna varijabla M
- na izlazu kvantizatora diskretna slučajna varijabla V
  - vrijednosti od M i V su m, odnosno v, i vrijedi $v = g(m)$
- kvantizacijski šum – slučajna varijabla Q
  - vrijedi: $Q = M - V$, odnosno $q = m - v$
  - ako je $E[M] = 0$ i kvantizacijska karakteristika simetrična
  - vrijedi: $E[V] = E[Q] = 0$
- cilj: odrediti standardnu devijaciju kvantizacijskog šuma

Varijanca kvantizacijskog šuma

- pretpostavka:
  - amplitude ulaznog signala mogu poprimati kontinuirane vrijednosti iz intervala $(-m_{\max}, m_{\max})$
  - ako su amplitude ulaznog signala izvan tog intervala, nastupa preopterećenje kvantizatora i izobličenje
- korak kvantizacije $\Delta = 2m_{\max}/L$
- dakle, kvantizacijski šum je ograničen: $-\Delta/2 \le q \le \Delta/2$
  - ako je korak kvantizacije dovoljno mali
    - opravdano je pretpostaviti da slučajna varijabla Q ima jednoliku razdiobu

$$f_Q(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & -\dfrac{\Delta}{2} < q \le \dfrac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Varijanca kvantizacijskog šuma (II)

- s obzirom da je $E[Q] = 0$, vrijedi:

$$\operatorname{var}(Q) = \sigma_Q^2 = E\left[Q^2\right] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 f_Q(q)\, dq$$

$$\operatorname{var}(Q) = \sigma_Q^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2\, dq = \frac{\Delta^2}{12}$$

- uzorci se prije prijenosa kodiraju binarnim kodom i prenose binarnim signalom (dvije razine)
- r označava broj bita za opis svakog uzorka v_k
  - mora vrijediti: $L = 2^r$
    - $L > 2^r$ – ne možemo jednoznačno opisati sve uzorke
    - $L < 2^r$ – nepotrebna zalihost u kodiranju

Varijanca kvantizacijskog šuma (III)

- nadalje, $\Delta = 2m_{\max}/2^r$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2\, 2^{-2r}$$

- neka je S srednja signala $m(t)$
- tada vrijedi:

$$(S/N) = \frac{S}{\sigma_Q^2} = \left(\frac{3S}{m_{\max}^2}\right) 2^{2r}$$

Primjer: kvantizacija sinusnog signala

- sinusni signal amplitude A_m
  - koristi sve razine za rekonstrukciju signala
  - srednja snaga signala na otporniku otpora 1 om $P = \frac{A_m^2}{2}$
  - raspon amplituda na ulazu kvantizatora iznosi $2A_\mathrm{m}$
  - dakle, $m_{\mathrm{max}} = A_\mathrm{m}$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} A_m^2 2^{-2r}$$

$$(S/N) = \frac{A_m^2/2}{A_m^2 2^{-2r}/3} = \frac{3}{2}\left(2^{2r}\right)$$

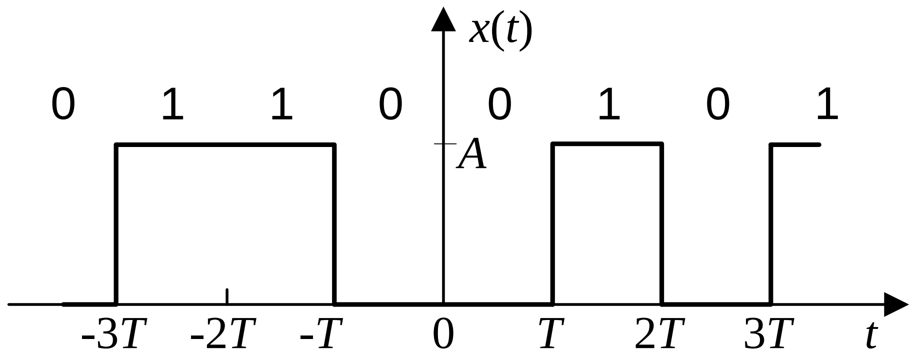
$$10\log_{10}(S/N) = 1{,}76 + 6{,}02 \cdot r \; [\mathrm{dB}]$$

L	***r***	***S/N* [dB]**
32	5	31,8
64	6	37,8
128	7	43,8
256	8	49,8

Kodiranje kvantiziranih uzoraka

- kôd – pravilo dodjele sljedova simbola diskretnim kvantizacijskim razinama
  - kodna riječ – slijed simbola koji se dodjeljuje nekoj kvantizacijskoj razini
  - ako se prilikom kodiranja uzoraka koriste binarni simboli, tada se radi o binarnom kodu
  - pravilo kodiranja ovisi o vrsti komunikacijskog sustava
    - najčešće je određeno odgovarajućim preporukama, odnosno normama
  - primjer: na izlazu kvantizatora 4 kvantizacijske razine (L = 4): -3U, -U, U i 3U, U – napon u voltima
    - nužno koristiti 2 bita po svakoj razini
    - -3U → 11, -U → 10, U → 00 i 3U → 01

Unipolarni binarni signal



- uobičajeno pravilo je da se
  - binarnoj nuli pridjeljuje razina 0 [V]
  - binarnoj jedinici razina A [V]
- T – trajanje binarnih signalnih elemenata
  - ili trajanje bita, izraženo u sekundama
  - prijenosna brzina $R = 1/T$ [bit/s]