5.

Neprekinute slučajne varijable

Sadržaj poglavlja

5.1. Slučajne varijable i razdiobe

U ovom ćemo poglavlju proučavati neprekinute slučajne varijable, kojima je skup vrijednosti interval (ograničen ili ne) u skupu realnih brojeva.

Takve slučajne varijable mogu poprimiti *svaku* vrijednost unutar tog intervala. S obzirom da mogućih vrijednosti ima neprebrojivo mnogo, vjerojatnost realizacije svake od njih redovito će biti jednaka nuli. Po tome se ovakve slučajne varijable razlikuju od diskretnih, koje su poprimale najviše prebrojivo mnogo vrijednosti i vjerojatnost realizacije svake od njih bila je pozitivan broj.

U praksi, granica između neprekinutih i diskretnih slučajnih varijabli nije sasvim čvrsta. Na primjer, visina svake osobe neprekinuto se mijenja i zato je primjer neprekinute slučajne varijable. Izrazimo li tu visinu u centimetrima, ona postaje diskretna slučajna varijabla. Isto je i s težinom, vremenom trajanja neke slučajne pojave itd.

Razlog radi čega se promatraju neprekinute slučajne varijable je bogatstvo *matematičkog alata* pomoću kojeg se one mogu proučavati. Naime, pri proučavanju neprekinutih slučajnih varijabli koristimo se aparatom matematičke analize. Nizove brojeva koji zadaju diskretnu razdiobu zamijenit će realna funkcija, umjesto suma koristit ćemo tehnike integralnog i diferencijalnog računa. Posebice, efikasno sredstvo u teorijskom i praktičnom pogledu činit će *Fourierova* i *Laplaceova* transformacija.

5.1.1. Slučajna varijabla

Vrijednosti slučajnih varijabli realni su brojevi. Vrijeme ispravnog rada nekog uređaja primjer je slučajne varijable. Kolika je vjerojatnost da će taj uređaj ispravno raditi tijekom sljedećeg mjeseca? Kolika je vjerojatnost da se on neće pokvariti tijekom sutrašnjeg dana? Pokazat ćemo kako možemo odgovoriti na ovakva pitanja.

Ako je X slučajna varijabla koja bilježi duljinu ispravnog rada uređaja (vrijeme do prvog kvara), onda je s

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$$

opisan događaj: uređaj se pokvario prije trenutka x. Ovdje je x bilo koji fiksni trenutak unutar područja vrijednosti slučajne varijable X.

Vjerojatnost tog događaja mijenja se promjenom vrijednosti od x i tako definira funkciju od x.

Definicija 5.1. ■ Funkcija razdiobe

Funkcija razdiobe slučajne varijable X je funkcija $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ definirana formulom

$$F(x) := \boldsymbol{P}(\{X < x\}). \tag{1}$$

Funkcija razdiobe (i njezina derivacija) bit će najvažniji pojam vezan uz slučajnu varijablu. Poznavanjem funkcije razdiobe, možemo u potpunosti opisati pripadnu slučajnu varijablu.

Teorem 5.1. ■ Temeljno svojstvo funkcije razdiobe

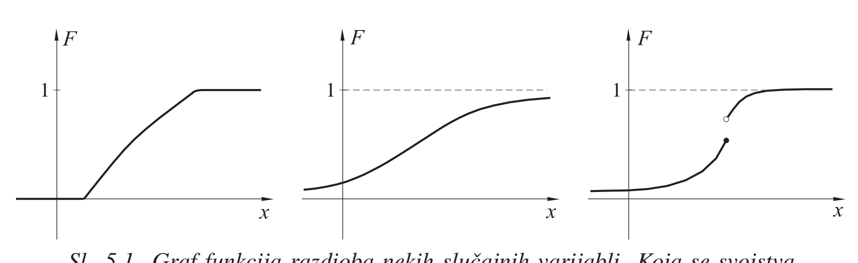
Za sve realne brojeve a, b, $a < b$, vrijedi

$$\boldsymbol{P}(\{a \leqslant X < b\}) = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Primjenom definicije funkcije razdiobe, dobivamo:

$$\begin{aligned} F(b) = \boldsymbol{P}(\{X < b\}) &= \boldsymbol{P}(\{X < a\} \cup \{a \leqslant X < b\}) \\ &= \boldsymbol{P}(\{X < a\}) + \boldsymbol{P}(\{a \leqslant X < b\}) \\ &= F(a) + \boldsymbol{P}(\{a \leqslant X < b\}) \end{aligned}$$

i odavde slijedi tvrdnja.



Sl. 5.1. Graf funkcija razdioba nekih slučajnih varijabli. Koja se svojstva tih varijabli mogu očitati iz ovog grafa?

Primjer 5.1.

Slučajna varijabla X uzima vrijednosti -1, 0, 1 s vjerojatnostima $\frac14$, $\frac12$, $\frac14$ redom. Odredimo funkciju razdiobe varijable X i nacrtajmo njezin graf.

▶ Ako je $x \leqslant -1$, tada događaj $\{X < x\}$ ima vjerojatnost 0 te je $F(x) = 0$ za takve x. Za $-1 < x \leqslant 0$ vrijedi

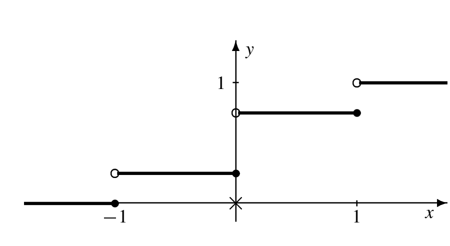
$$\boldsymbol{P}(X < x) = \boldsymbol{P}(X = -1) = \tfrac14$$

Za $0 < x \leqslant 1$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X < x) = \boldsymbol{P}(X = -1) + \boldsymbol{P}(X = 0) = \tfrac14 + \tfrac12 = \tfrac34$$

itd. Tako dobivamo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ \frac14, & -1 < x \leqslant 0, \\ \frac34, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$ ◀



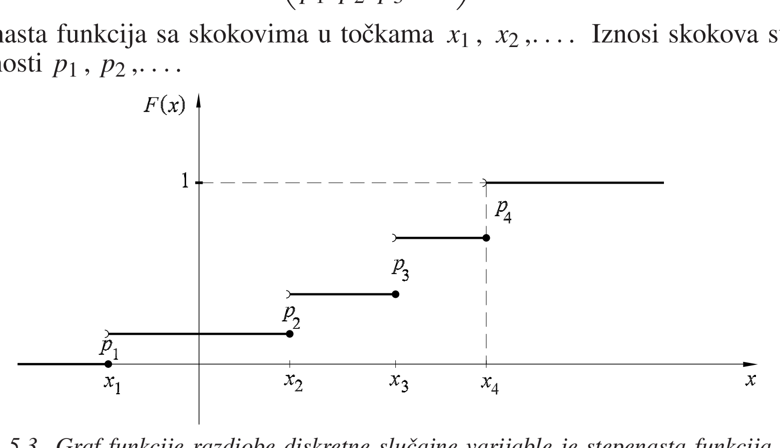
Sl. 5.2.

— ◆ —

Općenito, funkcija razdiobe diskretne slučajne varijable sa zakonom

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

je stepenasta funkcija sa skokovima u točkama x_1, $x_2, \ldots$. Iznosi skokova su vjerojatnosti p_1, $p_2, \ldots$.



Sl. 5.3. Graf funkcije razdiobe diskretne slučajne varijable je stepenasta funkcija. U točkama prekida neprekinuta je slijeva. Iznos skokova jednak je vjerojatnosti s kojom slučajna varijabla poprima vrijednost u toj točki.

Teorem 5.2. ■ Granične vrijednosti funkcije razdiobe

Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Ona posjeduje svojstva:

1° F je neopadajuća: $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leqslant F(x_2)$,

2° $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

3° F je neprekinuta slijeva:

$$F(x-0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dokaz.

1° Za $x_1 < x_2$ vrijedi $\{X < x_1\} \subseteq \{X < x_2\}$, pa tvrdnja slijedi zbog monotonosti vjerojatnosti.

2° Neka je (x_n) po volji odabran padajući niz realnih brojeva, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Označimo $A_n = \{X < x_n\}$. Onda su A_n padajući skupovi: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i vrijedi $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Zato je, zbog svojstva neprekinutosti vjerojatnosti,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = 0.$$

Druga se tvrdnja dokazuje na isti način.

3° Tvrdnja ponovo slijedi iz neprekinutosti vjerojatnosti. Naime, ako je (ε_n) niz pozitivnih brojeva koji opada prema nuli, onda je s $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ definiran rastući niz skupova za koji vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$ pa tvrdnja slijedi zbog neprekinutosti vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} F(x-0) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F(x-\varepsilon_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}(A) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$ ◀

— ◆ —

5.1.2. Neprekinute slučajne varijable

Upoznat ćemo sada drugu važnu klasu slučajnih varijabli.

Definicija 5.2. ■ Neprekinute slučajne varijable. Gustoća razdiobe

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **neprekinuta** (kontinuirana) ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{2}$$

Funkcija f naziva se **gustoća razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable X. Ona nije nužno neprekinuta, no u točkama neprekinutosti od f vrijedi

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{3}$$

Funkcija razdiobe neprekinute slučajne varijable je i sama neprekinuta, jer je to funkcija gornje granice integrala. Zato vrijedi

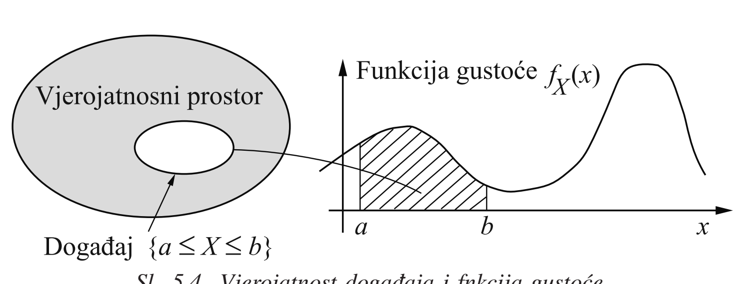
$$\boldsymbol{P}(X = x) = F(x+0) - F(x) = 0$$

za svaki $x \in \mathbf{R}$. Stoga su i svi događaji

$$\{a < X < b\}, \quad \{a \leqslant X < b\}, \quad \{a < X \leqslant b\}, \quad \{a \leqslant X \leqslant b\}$$

jednako vjerojatni. Njihova se vjerojatnost računa na način

$$\boldsymbol{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt. \tag{4}$$

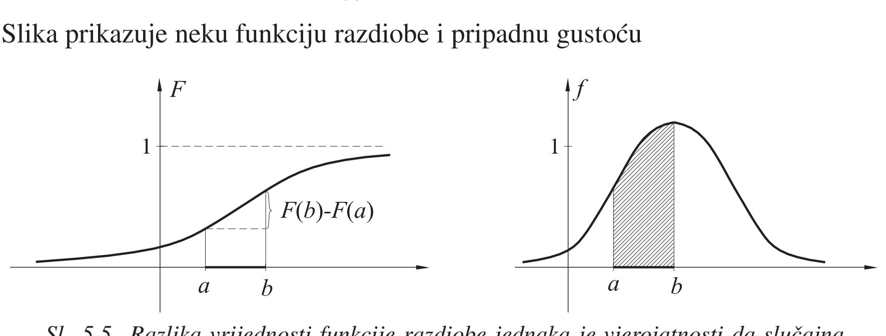


Sl. 5.4. Vjerojatnost događaja i fnkcija gustoće.

Funkcija gustoće pozitivna je funkcija s integralom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{5}$$

Slika prikazuje neku funkciju razdiobe i pripadnu gustoću



Sl. 5.5. Razlika vrijednosti funkcije razdiobe jednaka je vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi vrijednost u tom intervalu. Kod funkcije gustoće ta je vjerojatnost predočena površinom ispod grafa funkcije.

Znamo da je funkcija razdiobe neopadajuća funkcija s vrijednostima unutar intervala $[0,1]$. Stoga ćemo neke formule zapisivati u skraćenom obliku. Tako npr. umjesto zapisa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x, \end{cases}$$

pisat ćemo kratko

$$F(x) = x, \quad 0 < x < 1,$$

jer je tada nužno $F(x) = 0$ za $x \leqslant 0$ i $F(x) = 1$ za $x \geqslant 1$.

Također, ako gustoću razdiobe definiramo nekom formulom za $x \in [a,b]$, tada smatramo da je van tog intervala po definiciji jednaka nuli.

Na koncu, ako je funkcija F ili f definirana nekom formulom bez naznake područja definicije, tada će to redovito biti čitav $\mathbf{R}$.

5.1.3. Jednolika razdioba

Opišimo sad jednostavnu, ali vrlo važnu razdiobu. Prisjetimo se situacije koju smo imali kad je područje vrijednosti slučajne varijable $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, bio diskretan skup. Slučajna varijabla, koja je poprimala vrijednosti unutar S *s jednakim vjerojatnostima*, opisivala je pokus *biranja na sreću elementa skupa S*. Tad je vjerojatnost njezine realizacije bila $\boldsymbol{P}(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$, za svaki $k = 1, \ldots, n$.

Jasno je da povećanjem broja elemenata u skupu S ove vjerojatnosti teže k nuli. Ako je na primjer S skup prirodnih brojeva, možemo postaviti pitanje: postoji li algoritam kojim bi, s jednakom vjerojatnošću, birali neki prirodni broj. Odgovor na ovo važno pitanje je negativan, takav algoritam ne postoji. Naime, jasno je da bi vjerojatnost izbora svakog prirodnog broja morala biti jednaka nuli, pa je zbog svojstva σ-aditivnosti vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$ i vjerojatnost izbora bilo kojeg podskupa skupa prirodnih brojeva jednaka nuli.

Pretpostavimo sad da je skup S interval $[a,b]$. Točaka unutar tog intervala ima beskonačno (neprebrojivo) mnogo. Zamislimo postupak odabira na sreću nekog broja unutar tog intervala.

Na sreću odabrani broj. Jednolika razdioba

Kažemo da biramo *na sreću* broj unutar intervala $[a,b]$ ako je vjerojatnost da će on biti izabran unutar nekog podintervala proporcionalna duljini tog podintervala.

Za slučajnu varijablu koja uzima vrijednost ovako izabranog broja kažemo da ima **jednoliku** (**uniformnu**) razdiobu na intervalu $[a,b]$.

Neka X označava tu slučajnu varijablu. Odredimo njezinu funkciju razdiobe. Prema definiciji, mora biti

$$F(x) - F(a) = \boldsymbol{P}(a \leqslant X < x) = K(x-a).$$

X uzima vrijednost unutar intervala $[a,b]$. Zato je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\{X < a\} &= 0 = F(a), \\ 1 = \boldsymbol{P}\{a \leqslant X < b\} &= F(b) - F(a) = K(b-a), \end{aligned}$$

i odavde je $K = \dfrac{1}{b-a}$. Tako dobivamo:

Jednolika razdioba, alternativna definicija, razdioba i gustoća

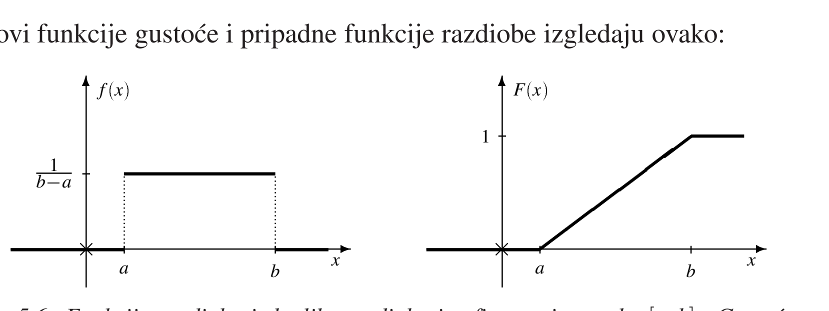
Za slučajnu varijablu X kažemo da je **jednoliko** (**uniformno**) distribuirana na intervalu $[a,b]$, ako je zadana funkcijom razdiobe odnosno funkcijom gustoće:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Pišemo $X \sim \mathscr{U}(a,b)$.

Grafovi funkcije gustoće i pripadne funkcije razdiobe izgledaju ovako:



Sl. 5.6. Funkcija razdiobe jednolike razdiobe je afina na intervalu $[a,b]$. Gustoća jednolike razdiobe konstantna je na tom intervalu. Odatle i ime razdiobi.

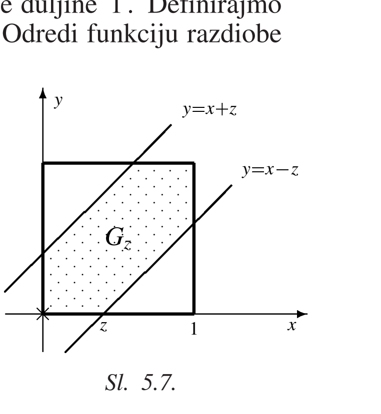
Primjer 5.2.

Dvije točke odabrane su na sreću unutar dužine duljine 1. Definirajmo slučajnu varijablu Z kao udaljenost među njima. Odredi funkciju razdiobe varijable Z.

▶ Izbor dviju točaka x i y unutar intervala $[0,1]$ ekvivalentan je izboru jedne točke (x,y) unutar kvadrata $[0,1] \times [0,1]$. Vrijednost koju slučajna varijabla Z poprima, jednaka je $Z = |x-y|$. Varijabla Z uzima vrijednosti iz intervala $[0,1]$. Pritom je

$$|x-y| < z \iff x - z < y < x + z.$$

Zato će nejednakost $|x-y| < z$ biti ispunjena kad se odabere točka (x,y) unutar područja G_z. Zato je



Sl. 5.7.

$$F(z) = \boldsymbol{P}\{Z < z\} = m(G_z) = 2z - z^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$ ◀

5.1.4. Nezavisnost slučajnih varijabli

Pojam nezavisnosti slučajnih varijabli upoznali smo za varijable diskretnog tipa. Tako smo ukazali i na kriterij nezavisnosti koji se provjerava preko marginalnih razdioba slučajnog vektora.

Analogne definicije i tvrdnje vrijedit će i za općenite slučajne varijable. O tome će biti više riječi u nastavku. Za sada, zadovoljit ćemo se definicijom nezavisnosti, a kriterije i dodatna svojstva moramo odložiti do poglavlja o slučajnim vektorima.

Definicija 5.3. ■ Nezavisnost slučajnih varijabli

Kažemo da su slučajne varijable X i Y **nezavisne**, ukoliko za sve intervale A, B iz skupa $\mathbf{R}$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X \in A, Y \in B) = \boldsymbol{P}(X \in A)\boldsymbol{P}(Y \in B).$$

5.1.5. Očekivanje i disperzija

Neka je X neprekinuta s gustoćom f. Njezino očekivanje definira se na način

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{6}$$

Ako ovaj nepravi integral ne konvergira, očekivanje ne postoji.

Označimo $\overline{x}=\boldsymbol{E}(X)$. Disperzija $\boldsymbol{D}(X)$ slučajne varijable X računa se uz pomoć formula:

$$\boldsymbol{D}(X)=\boldsymbol{E}[(X-\overline{x})^2]=\boldsymbol{E}(X^2)-\overline{x}^2.$$

Dakle

$$\boldsymbol{D}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{x})^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\overline{x}^2. \tag{7}$$

Od svojstava očekivanja i disperzije izdvojit ćemo samo najvažnija:

Teorem 5.3. Svojstva očekivanja i disperzije

Za sve slučajne varijable X, Y i realne brojeve s, t vrijedi

$$\boldsymbol{E}(sX+tY)=s\boldsymbol{E}(X)+t\boldsymbol{E}(Y)$$

(svojstvo **linearnosti** očekivanja). Za disperziju pak vrijedi

$$\boldsymbol{D}(sX)=s^2\boldsymbol{D}(X).$$

Ako su X i Y nezavisne, onda vrijedi

$$\boldsymbol{E}(XY)=\boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y),$$
$$\boldsymbol{D}(X+Y)=\boldsymbol{D}(X)+\boldsymbol{D}(Y).$$

Ova ćemo svojstva dokazati naknadno.

— ◆ —

Primjer 5.3. Jednolika razdioba

Izračunajmo očekivanje i disperziju jednolike razdiobe.

▶ Promotrit ćemo najprije, jednostavnosti radi, jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Za nju je gustoća $f(x)=1$, pa imamo

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$
$$\boldsymbol{D}(X)=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Ako Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a,b]$, tada slučajna varijabla

$$X=\frac{Y-a}{b-a}$$

ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Obratno, ako X ima jednoliku razdiobu na $[0,1]$, onda

$$Y=(b-a)X+a$$

ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a,b]$. Očekivanje ove slučajne varijable je

$$\boldsymbol{E}(Y)=\boldsymbol{E}[(b-a)X+a]=(b-a)\boldsymbol{E}(X)+a$$
$$=(b-a)\cdot\frac{1}{2}+a=\frac{a+b}{2},$$

a njezina disperzija

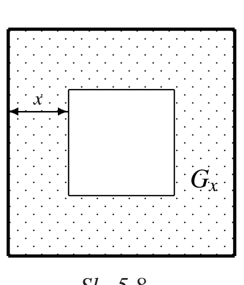
$$\boldsymbol{D}(Y)=\boldsymbol{D}[(b-a)X+a]=(b-a)^2\boldsymbol{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$ ◀

Primjer 5.4.

Na sreću odabiremo točku T unutar kvadrata stranice 2. Neka je vrijednost slučajne varijable X najmanja od udaljenosti te točke do stranica kvadrata. Odredimo funkciju razdiobe i očekivanje od X.

▶ Odredimo najprije funkciju razdiobe:

$$F(x)=\boldsymbol{P}\{X<x\}=\boldsymbol{P}\{T\in G_x\}$$
$$=\frac{m(G_x)}{m(S)}=\frac{4-(2-2x)^2}{4}$$
$$=2x-x^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$



Sl. 5.8.

Gustoća razdiobe je

$$f(x)=2-2x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

te očekivanje iznosi

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_0^1 x(2-2x)dx=\frac{1}{3}.$$ ◀

5.1.6. Značenje funkcije gustoće

Vrijednost funkcije gustoće $f(x)$ govori o tome koliko je vjerojatna realizacija slučajne varijable X *u okolini točke* x. Broj $f(x)$ *nije vjerojatnost* (vrijednost funkcije gustoće može biti veća od 1).

Iz temeljne veze gustoće i funkcije razdiobe dobivamo:

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{P}(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Za male Δx vrijedi stoga

$$f(x)\Delta x\approx \boldsymbol{P}(x<X<x+\Delta x)$$

t.j.

$$\boldsymbol{P}(x<X<x+\Delta x)=f(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

gdje je $o(\Delta x)$ funkcija koja trne u nulu brže nego Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\omega(\Delta x)}{\Delta x}=0.$$

Interpretacija gustoće preko vjerojatnosti

Vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost u vrlo malom intervalu oko točke x priblixxno je jednaka $f(x)\Delta x$:

$$\boldsymbol{P}(x<X<x+\Delta x)=f(x)\Delta x+o(\Delta x), \tag{8}$$

Ova se veza može uspješno koristiti pri određivanju razdiobe slučajne varijable.

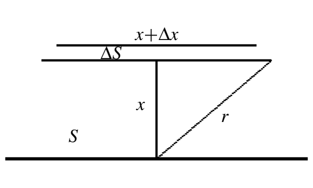
Primjer 5.5.

Točka se bira na sreću unutar polukruga polumjera r. Neka je X udaljenost točke do promjera. Odredimo očekivanje varijable X.

▶ U ovom primjeru nećemo računati funkciju razdiobe, jer bismo trebali odrediti površinu dijela kruga na slici u ovisnosti o varijabli x. Jednostavnije je odrediti direktno gustoću na temelju veze (8):

$$f(x)\Delta x\doteq \boldsymbol{P}(x<X<x+\Delta x)=\frac{m(\Delta S)}{m(S)}\doteq\frac{2\sqrt{r^2-x^2}\Delta x}{\frac{1}{2}r^2\pi}.$$

Sl. 5.9. Pri računanju površine ΔS, prugu debljine Δx možemo aproksimirati pravokutnikom iste debljine. Pritom je učinjena pogreška veličine $(\Delta x)^2$, koja u limesu ne utječe na funkciju $f(x)$.



Odavde dobivamo funkciju gustoće:

$$f(x)=\frac{4}{r^2\pi}\sqrt{r^2-x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant r.$$

Sad možemo izračunati očekivanje:

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_0^r\frac{4x}{r^2\pi}\sqrt{r^2-x^2}dx=-\frac{2}{r^2\pi}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}d(r^2-x^2)=\frac{4r}{3\pi}.$$ ◀

5.1.7. Riemann-Stieltjesov integral

Neka je $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ monotono rastuća funkcija, neprekinuta slijeva. Neka je $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ ograničena.

Izaberimo bilo koju particiju $\mathscr{P}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ intervala $[a,b]$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Definirajmo integralnu sumu

$$S(\mathscr{P},g,F)=\sum_{i=1}^{n}g(\tilde{x}_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})],\qquad \tilde{x}_i\in[x_{i-1},x_i].$$

Označimo s $\Delta=\max|x_i-x_{i-1}|$,

Definicija 5.4. Riemann-Stieltjesov integral

Kažemo da je g Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F, ako postoji limes integralnih suma, neovisno o izboru particije i točaka $\tilde{x}_i\in[x_{i-1},x_i]$. Taj limes nazivamo **Riemann-Stieltjesov integral**, a označavamo na sljedeći način:

$$\int_a^b g(x)dF(x):=\lim_{\Delta\to 0}S(\mathscr{P},g,F)$$

Primijetimo da za $F(x)=x$ Riemann-Stieltjesov integral postaje Riemannov integral.

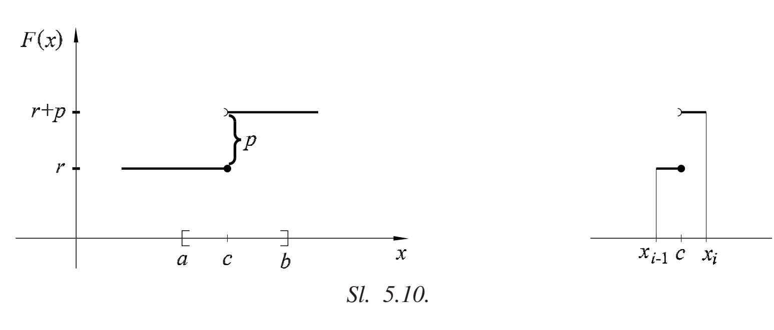
— ◆ —

Sad ćemo dovesti u vezu Riemann-Stieltjesov i klasični Riemannov integral, za široku klasu funkcija F važnih u primjenama.

Neka je F po dijelovima konstantna na intervalu $[a,b]$, sa skokom iznosa p u točki c unutar tog intervala:

$$F(x)=\begin{cases} r, & x\leqslant c\\ r+p, & x>c\end{cases}$$

Izračunajmo $\int_a^b g(x)dF(x)$, za neku funkciju g, neprekinutu na intervalu $[a,b]$.



Sl. 5.10.

Za bilo koju particiju vrijedi $F(x_i)-F(x_{i-1})=0$ za svaki indeks i osim za onaj za koji je $x_{i-1}\leqslant c<x_i$, jer je funkcija F konstantna lijevo i desno od točke c. Zato u integralnoj sumi ostaje samo jedan član:

$$S(\mathscr{P},g,F)=g(\tilde{x}_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})]=g(\tilde{x}_i)\cdot p$$

U limesu, kad $\Delta\to 0$, točka $\tilde{x}_i$ teži ka c. Zato je

$$\int_a^b g(x)dF(x)=g(c)\cdot p.$$

Općenito, ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{n}g(c_i)\cdot p_i.$$

— ◆ —

Neka je sad F neprekinuto diferencijabilna funkcija. Tad, po teoremu srednje vrijednosti imamo $F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, za neku točku $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$. Integralna suma glasi

$$\sum_{i=1}^{n}g(\tilde{x}_i)F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Limes ove integralne sume očito definira Riemannov integral

$$\int_a^b g(x)F'(x)dx.$$

Riemann-Stieltjesov integral, način računanja

Ako je F po dijelovima konstantna i ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x)=\sum_{i=1}^{n}g(c_i)\cdot p_i.$$

Ako je F neprekinuto diferencijabilna funkcija, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x)=\int_a^b g(x)F'(x)dx.$$

Prema tome, korištenjem Riemann-Stieltjesovog integrala mi ćemo istovremeno pokrivati obje važne klase slučajnih varijabli, diskretne i neprekinute slučajne varijable.

Tako, na primjer, očekivanje neke slučajne varijable možemo izraziti formulom

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dF(x),$$

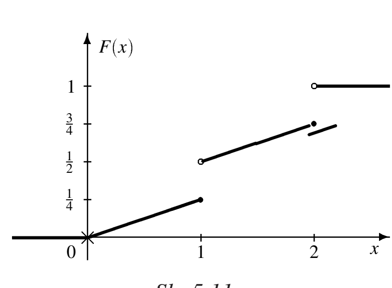
a disperziju

$$\boldsymbol{D}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dF(x)-\boldsymbol{E}(X)^2.$$

Integrali su Riemann-Stieltjesovi.

Primjer 5.6.

Izračunaj očekivanje slučajne varijable čija je funkcija razdiobe zadana slikom:



Sl. 5.11.

▶ Funkcija razdiobe glasi

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{4}x, & 0<x\leqslant 1,\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}$$

F ima skokove iznosa $\frac{1}{4}$ u točkama $x=1$ i $x=2$. Zato je

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)$$
$$=\int_0^1 xF'(x)dx+1\cdot\frac{1}{4}+\int_1^2 xF'(x)dx+2\cdot\frac{1}{4}$$
$$=\int_0^1\frac{x}{4}dx+\frac{1}{4}+\int_1^2\frac{x}{4}dx+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}.$$ ◀

5.1.8. Karakteristična funkcija

Svakoj slučajnoj varijabli X možemo pridružiti **karakterističnu funkciju**. To je funkcija realnog argumenta s kompleksnim vrijednostima, $\vartheta:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ zadana formulom

$$\vartheta(t):=\boldsymbol{E}(e^{itX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x). \tag{9}$$

Osnovna svojstva karakteristične funkcije su

1° Karakteristična funkcija jednoznačno određuje razdiobu: dvije različite razdiobe ne mogu imati istu karakterističnu funkciju.

2° Ako su $X_1,\dots,X_n$ nezavisne, tada je

$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t)=\vartheta_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot\vartheta_{X_n}(t). \tag{10}$$

3° Vrijedi formula

$$\boldsymbol{E}(X^r)=\frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r},\qquad r=1,2,\dots \tag{11}$$

ukoliko očekivanje postoji. Specijalno,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X)&=-i\vartheta'(0),\\ \boldsymbol{D}(X)&=-\vartheta''(0)+\vartheta'(0)^2.\end{aligned} \tag{12}$$

Ako je ϑ_X karakteristična funkcija varijable X, tada varijabla $Y=a+bX$ ima karakterističnu funkciju $e^{ita}\vartheta_X(bt)$.

Primjer 5.7.

Odredimo karakterističnu funkciju slučajne varijable jednoliko distribuirane na intervalu $[a,b]$.

▶ Gustoća ove razdiobe je $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, $a\leqslant x\leqslant b$. Stoga

$$\vartheta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx=\int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{e^{ibt}-e^{-iat}}{(b-a)it}.$$

U slučaju simetričnog intervala $[-a,a]$, karakteristična funkcija postaje realna:

$$\vartheta(t)=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{(a+a)it}=\frac{\sin at}{at}.$$ ◀

— ◆ —

Ako je X neprekinuta slučajna varijabla, s gustoćom f, tada njezina karakteristična funkcija iznosi

$$\vartheta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx. \tag{13}$$

To je upravo Fourierova transformacija funkcije f. Stoga će, ukoliko ϑ zadovoljava uvjet $\int_{-\infty}^{\infty}|\vartheta(t)|dt<\infty$, vrijediti formula inverzije

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(t)e^{-itx}dt. \tag{14}$$

Primjer 5.8.

Odredi funkciju gustoće razdiobe određene karakterističnom funkcijom

$$\vartheta(t)=e^{-|t|},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

▶ Ova je funkcija apsolutno integrabilna, stoga će gustoća biti određena formulom inverzije (14)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\vartheta(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}e^{-|t|}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{0}e^{-itx}e^{t}dt+\int_0^{\infty}e^{-itx}e^{-t}dt\Big)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{e^{(-ix+1)t}}{-ix+1}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{(-ix-1)t}}{-ix-1}\Big|_0^{\infty}\Big)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{-ix+1}+\frac{1}{ix+1}\Big)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$ ◀

Razdioba s ovom gustoćom naziva se **Cauchyjeva razdioba**. Zbog jedinstvenosti, zaključujemo da je $t\mapsto e^{-|t|}$ karakteristična funkcija te razdiobe.

Primjer 5.9.

Unutar kvadrata $ABCD$ stranice a na sreću se bira točka. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost tako odabrane točke od vrha A. Izračunaj pripadnu funkciju razdiobe F_X.

▶ Označimo zadani kvadrat sa S, $m(S)=a^2$. Vrijedi

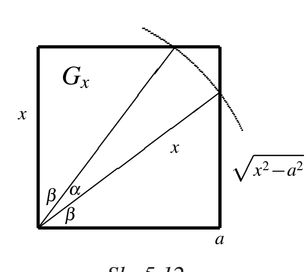
$$F_X(x)=\boldsymbol{P}(X<x)=\frac{m(G_x)}{m(S)}=\frac{m(G_x)}{a^2}.$$

Razlikujemo dva slučaja.

1) $0\leqslant x\leqslant a$. Tada je područje G_x četvrtina kruga i vrijedi $m(G_x)=\frac{1}{4}x^2\pi$.

2) $a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}$. Tada je područje G_x sastavljeno od dva trokuta i kružnog isječka. Neka je α kut tog isječka, $\alpha=\pi/2-2\beta$ (slika 5.12). Vrijedi

$$\cos\beta=\frac{a}{x}\implies\alpha=\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{a}{x}.$$



Sl. 5.12.

Zato

$$m(G_x)=a\sqrt{x^2-a^2}+\frac{1}{2}x^2\Big(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{a}{x}\Big).$$

Tako dobivamo

$$F_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4a^2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \sqrt{\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2-1}+\dfrac{\pi}{4a^2}x^2-\dfrac{x^2}{a^2}\arccos\dfrac{a}{x}, & a\leqslant x\leqslant a\sqrt{2}.\end{cases}$$ ◀

Primjer 5.10.

Unutar pravokutnika $S=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ na sreću je odabrana točka s koordinatama (X,Y). Definirajmo slučajnu varijablu $Z=\max\{X,Y\}$. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe od Z te izračunaj vjerojatnost događaja $\{Z\leqslant\frac{1}{2}\}$.

▶ Vrijedi

$$\boldsymbol{P}\big((X,Y)\in G\big)=\frac{m(G)}{m(S)}=\tfrac{1}{2}m(G)$$

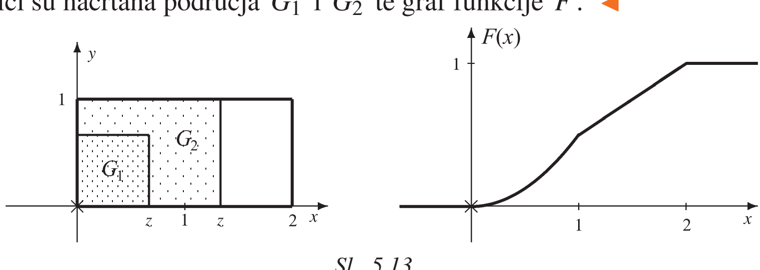
jer se točka (X,Y) bira na sreću u području S. Zavisno od toga da li je $z\leqslant 1$ ili $1<z\leqslant 2$ skup G će imati različite oblike. Stoga razlikujemo dva slučaja

$$F(z)=\boldsymbol{P}(Z<z)=\begin{cases}\frac{1}{2}m(G_1), & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}m(G_2), & 1<z\leqslant 2,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ \dfrac{z}{2}, & 1<z\leqslant 2.\end{cases}$$

Dakle, Z je neprekinuta slučajna varijabla. Zato je

$$\boldsymbol{P}(Z\leqslant\frac{1}{2})=\boldsymbol{P}(Z<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}.$$

Na slici su nacrtana područja G_1 i G_2 te graf funkcije F. ◀



Sl. 5.13.

5.2. Funkcije neprekinutih slučajnih varijabli

Kompozicija slučajne varijable X i realne funkcije $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ponovo je slučajna varijabla:

$$Y = \psi(X) : \Omega \to \mathbf{R}.$$

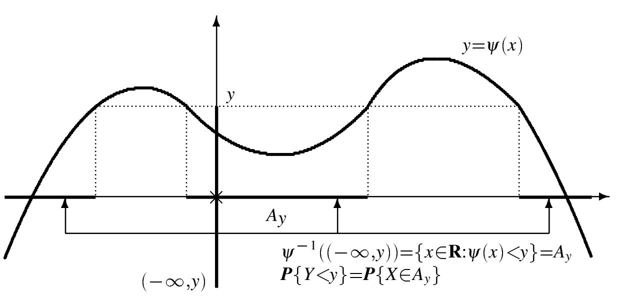
Naučili smo kako se određuje njezin zakon razdiobe za slučaj kad je X diskretnog tipa.

Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom f i funkcijom razdiobe F. Tražimo gustoću g (ako postoji) i razdiobu G slučajne varijable $Y = \psi(X)$. Imamo

$$\begin{aligned} G(y) &= \boldsymbol{P}(Y < y) = \boldsymbol{P}(\psi(X) < y) \\ &= \boldsymbol{P}(X \in \psi^{-1}(\langle -\infty, y \rangle)) = \boldsymbol{P}(X \in A_y). \end{aligned}$$

Dakle, događaj $\{Y < y\}$ ostvaruje se onda i samo onda kad se ostvaruje događaj $X \in A_y$. Ovdje je $\psi^{-1}(A)$ oznaka za original skupa A:

$$\psi^{-1}(A) := \{x \in \mathbf{R} : \psi(x) \in A\}.$$



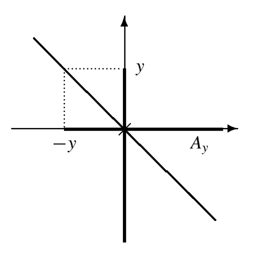
Sl. 5.14.

Primjer 5.11.

Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Odredimo funkciju razdiobe slučajne varijable $-X$.

►

$$\begin{aligned} G(y) &= \boldsymbol{P}(Y < y) = \boldsymbol{P}(X \in A_y) \\ &= \boldsymbol{P}(X > -y) = 1 - F(-y). \end{aligned}$$



Sl. 5.15.

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **simetrična**, ako su X i $-X$ identično distribuirane. Tada vrijedi

$$F(x) = F_X(x) = F_{-X}(x) = 1 - F(-x)$$

i odavde deriviranjem $f(x) = f(-x)$. Gustoća razdiobe neprekinute simetrične slučajne varijable je parna funkcija. ◄

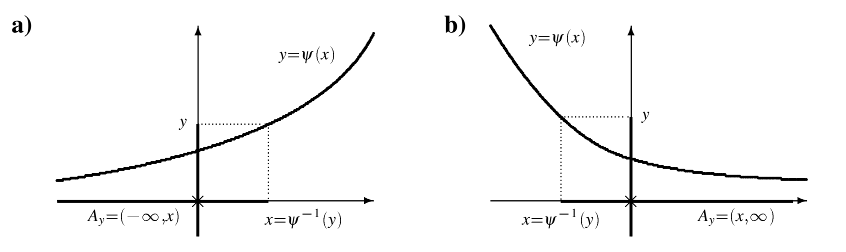
— ◆ —

Ako je ψ monotono rastuća, tada je (slika 5.16 lijevo)

$$A_y = \psi^{-1}\{\langle -\infty, y \rangle\} = \langle -\infty, \psi^{-1}(y) \rangle = \langle -\infty, x \rangle.$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} G(y) &= \boldsymbol{P}(X \in A_y) = \boldsymbol{P}(X \in \langle -\infty, x \rangle) = \boldsymbol{P}(X < x) = F(x), \\ g(y) &= \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f(x)\frac{dx}{dy}. \end{aligned}$$



Sl. 5.16.

Za monotono padajuću funkciju ψ dobivamo (slika 5.16 desno)

$$\begin{aligned} A_y &= \psi^{-1}\{\langle -\infty, y \rangle\} = \langle \psi^{-1}(y), \infty \rangle = \langle x, \infty \rangle, \\ G(y) &= \boldsymbol{P}(X \in A_y) = \boldsymbol{P}(X \in \langle x, \infty \rangle) = \boldsymbol{P}(X > x) = 1 - F(x), \\ g(y) &= \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dx}[1 - F(x)]\frac{dx}{dy} = -f(x)\frac{dx}{dy}. \end{aligned}$$

U oba slučaja se rezultat može napisati istom formulom:

Teorem 5.4. ■ Transformacija funkcije gustoće

Neka je $Y = \psi(X)$. Ako je funkcija ψ rastuća ili padajuća funkcija, onda vrijedi

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \qquad y = \psi(x), \tag{15}$$

tj.

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d\psi^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Općenitije, ova formula vrijedi za svaku injektivnu funkciju ψ.

Ukoliko je potrebno odrediti samo očekivanje ili momente funkcije slučajne varijable, tada nam nije potrebno računati njezinu gustoću. Umjesto toga, jednostavnije je primijeniti formulu:

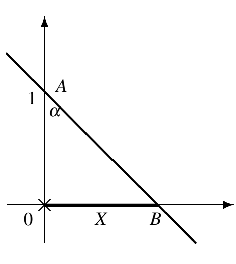
$$\boldsymbol{E}(Y^k) = \boldsymbol{E}(\psi(X)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^k f(x)dx. \tag{16}$$

Primjer 5.12. ■ Cauchyjeva razdioba

Kroz točku $A(0,1)$ povučen je pravac koji siječe os Ox u točki B. Kut α što ga zatvara pravac s osi Oy je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Neka je X apscisa točke B. Odredi funkciju gustoće varijable X.

► Gustoća varijable α je

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}, \qquad \alpha \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$



Sl. 5.17.

Vrijedi $X = \operatorname{tg}\alpha$, a funkcija tangens je injektivna (rastuća) na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zato je gustoća varijable X dana sa

$$g(x) = f(\alpha)\left|\frac{d\alpha}{dx}\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima **Cauchyjevu razdiobu**. ◄

Primjer 5.13.

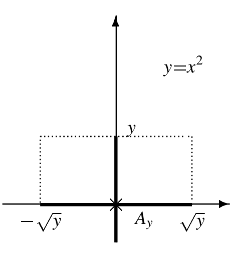
Slučajna varijabla X ima Cauchyjevu razdiobu, s gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Odredi gustoću i funkciju razdiobe slučajne varijable **A.** $Y = X^2$; **B.** $Y = 1/X$.

► **A.** Funkcija razdiobe F varijable X je

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+u^2)}du \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x. \end{aligned}$$



Sl. 5.18.

Zato imamo

$$\begin{aligned} G(y) &= \boldsymbol{P}(Y < y) = \boldsymbol{P}(X \in A_y) \\ &= \boldsymbol{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{y}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, \quad y > 0.$$

I ovdje možemo gustoću dobiti i na drugi način. Funkcija $x \mapsto x^2$ je injektivna na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$, $\langle 0, \infty \rangle$:

$$x < 0: \quad g_1(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+y)}, \ y > 0,$$

$$x > 0: \quad g_2(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+y)}, \ y > 0,$$

Funkcija g je zbroj ovih dviju funkcija

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, \quad y > 0.$$

b) Funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ je injektivna, zato

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

te i $Y = \dfrac{1}{X}$ ima također Cauchyjevu razdiobu. ◄

Primjer 5.14.

Slučajna varijabla X ima neprekinutu funkciju razdiobe F. Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = F(X)$.

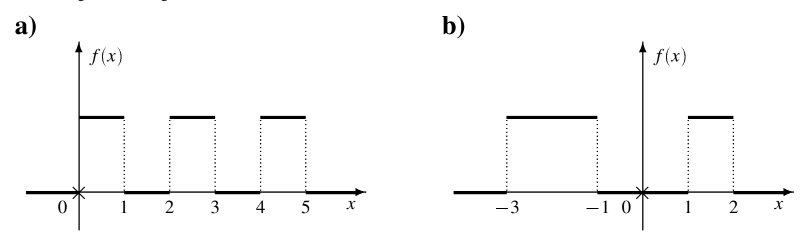
► Y poprima vrijednosti unutar intervala $[0,1]$.

$$\boldsymbol{P}(Y < y) = \boldsymbol{P}(F(X) < y) = \boldsymbol{P}(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

dakle, Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. ◄

Primjer 5.15.

Gustoća razdiobe slučajne varijable X zadana je slikom. Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = X^2$.



Sl. 5.19.

► **a**) U ovom je slučaju funkcija $x \mapsto x^2$ injektivna. Vrijedi

$$f(x) = \tfrac{1}{3}, \quad x \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$$

$$x = \sqrt{y}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Varijabla y poprima vrijednosti u skupu $[0,1] \cup [4,9] \cup [16,25]$.

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \quad y \in [0,1] \cup [4,9] \cup [16,25].$$

b) $x \mapsto x^2$ sada nije injektivna. Rastavljamo područje definicije na dva dijela:

$$x \in [-3,-1]: \quad g_1(y) = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \quad y \in [1,9],$$

$$x \in [1,2]: \quad g_2(y) = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \quad y \in [1,4].$$

I sada je $g(y) = g_1(y) + g_2(y)$, međutim moramo pripaziti na različita područja definicije u ovim formulama:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{y}} + \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [1,4] \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [4,9] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & y \in [1,4], \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [4,9]. \end{cases}$$ ◄

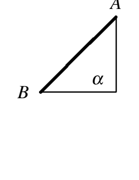
Primjer 5.16.

Odredi očekivanje duljine sekante koja spaja fiksnu točku A kružnice polumjera R sa na sreću odabranom točkom B na kružnici.

► Označimo s α središnji kut nad manjim lukom AB. To je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0,\pi]$. Vrijedi

$$X = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = \psi(\alpha),$$

gdje je X duljina sekante $\overline{AB}$. Njezino očekivanje iznosi



Sl. 5.20.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X) &= \int_0^{\pi} \psi(\alpha)f(\alpha)d\alpha \\ &= \int_0^{\pi} 2R\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\pi}d\alpha = \frac{4R}{\pi}. \end{aligned}$$ ◄