8.

Funkcije slučajnih vektora

Sadržaj poglavlja

U ovom ćemo poglavlju naučiti tehnike računanja razdioba funkcija neprekinutih slučajnih vektora. Nakon toga ćemo upoznati razdiobe izvedene iz normalne razdiobe, koje se koriste u matematičkoj statistici.

8.1. Funkcije neprekinutih slučajnih vektora

Neka je $X = (X_1, \dots, X_n)$ zadani n-dimenzionalni slučajni vektor i $\Psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ obostrano jednoznačno preslikavanje (bijekcija). Slika slučajnog vektora X pri preslikavanju Ψ je slučajni vektor $Y = \Psi(X)$. Neka je $f(x_1, \dots, x_n)$ gustoća razdiobe vektora $(X_1, \dots, X_n)$, a $g(y_1, \dots, y_n)$ gustoća razdiobe vektora $(Y_1, \dots, Y_n)$. Postavlja se pitanje: koja je veza između ovih dviju funkcija?

Prikažimo preslikavanje Ψ u komponentama:

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= \psi_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1}$$

Pretpostavili smo da je ovo preslikavanje bijekcija, pa stoga postoje inverzna preslikavanja:

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi_1(y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \chi_n(y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Jakobijan inverznog preslikavanja definira se formulom

$$J = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Neka je G područje u $\mathbf{R}^n$ i G' slika tog područja pri preslikavanju Ψ. Onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}((X_1, \dots, X_n) \in G) = \boldsymbol{P}((Y_1, \dots, Y_n) \in G'),$$

$$\int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{G'} g(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n.$$

Sad ćemo iskoristiti poznatu formulu zamjene varijabli u višestrukom integralu:

$$\int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int \cdots \int_{G'} f(x_1, \dots, x_n)|J|\, dy_1 \dots dy_n.$$

Odavde možemo zaključiti da postoji veza između funkcija gustoća:

Transformacija gustoća pri bijektivnom preslikavanju

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| \tag{3}$$

8.1.1. Kartezijeve i polarne koordinate

Ilustrirajmo izvedenu formulu na primjeru transformacija kartezijevih u polarne koordinate.

Neka je f gustoća razdiobe vektora (X, Y) i (R, Φ) polarne koordinate točke (X, Y). Izvedimo formulu za gustoću razdiobe vektora (R, Φ).

Veza među koordinatama je

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

i jakobijan preslikavanja iznosi

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Zato je tražena gustoća jednaka

$$g(r, \varphi) = f(x, y) \cdot |J| = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r.$$

Primjer 8.1.

Gustoća razdiobe slučajnog vektora (X, Y) je

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\Big\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

Neka su (R, Φ) polarne koordinate točke (X, Y). Izračunajmo gustoću razdiobe vektora (R, Φ) te marginalne gustoće varijabli R i Φ. Jesu li one nezavisne?

► Vektor (R, Φ) uzima vrijednosti u području $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$. Po prethodnoj formuli je

$$g(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\Big\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\Big\} \cdot r$$

i $g(r, \varphi)$ se može faktorizirati u produkt $g_R(r) g_\Phi(\varphi)$. Varijable R i Φ su stoga nezavisne. R ima **Rayleighovu razdiobu** s gustoćom

$$g_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\Big\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\Big\}, \qquad r \geqslant 0,$$

a φ jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 2\pi]$. ◄

Primjer 8.2.

Slučajan vektor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ zadan je funkcijom gustoće f. Neka je A regularna matrica reda n. Odredi gustoću razdiobe slučajnog vektora $\vec{Y} = A\vec{X}$.

► Matrica A je regularna, stoga je preslikavanje $\vec{y} = A\vec{x}$ bijektivno. Odredimo njegov jakobijan. Za i-tu komponentu vektora $\vec{Y}$ vrijedi

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

i zato je

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}.$$

Prema tome, jakobijan preslikavanja $\vec{y} = A\vec{x}$ glasi

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

dakle, upravo determinanta matrice A. Jakobijan inverznog preslikavanja $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ je $J = \dfrac{1}{|A|}$. Gustoća vektora Y glasi

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot |J| = f(x_1, \dots, x_n) \cdot \frac{1}{||A||}. \ ◄$$

8.1.2. Funkcija slučajnog vektora

Dosadašnje ćemo razmatranje pojednostavniti tako što ćemo promatrati preslikavanje $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i slučajnu varijablu

$$Z = \psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

dobivenu ovakvim preslikavanjem. Pitamo se: kako možemo odrediti razdiobu varijable Z?

Radi jednostavnosti zapisivanja, promatrat ćemo slučaj $n = 2$ i preslikavanje oblika

$$Z = \psi(X, Y).$$

Pretpostavit ćemo da nam je poznata gustoća vektora (X, Y). Pokazat ćemo kako se određuje gustoća varijable Z.

Preslikavanje $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ ćemo nadopuniti do preslikavanja iz $\mathbf{R}^2$ u $\mathbf{R}^2$, kako bismo mogli iskoristiti poznate veze između gustoća slučajnih vektora. Najjednostavnije je to učiniti tako da prvu komponentu vektora ostavimo nepromijenjenu. Tako dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ z &= \psi(x, y), \end{aligned}$$

Označimo preslikavanje inverzno ovome:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= \chi(x, z). \end{aligned}$$

Jakobijan inverznog preslikavanja glasi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Prema tome, po formuli (3), gustoća vektora (X, Z) je

$$g(x, z) = f(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right|,$$

Gustoću g_Z slučajne varijable Z možemo dobiti preko marginalne gustoće ovog vektora.

Gustoća funkcije slučajnog vektora

Gustoća slučajne varijable $Z = \psi(X, Y)$ dobiva se formulom

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx, \tag{4}$$

gdje je f gustoća vektora (X, Y).

Primjer 8.3.

Neka je $f(x, y)$ gustoća slučajnog vektora (X, Y). Odredi gustoću slučajne varijable Z ako je

A. $Z = X + Y$, **B.** $Z = Y - X$, **C.** $Z = XY$, **D.** $Z = Y/X$.

► Koristimo formulu (4):

A. $y = z - x, \qquad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx.$

B. $y = z + x, \qquad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z + x) dx.$

C. $y = \frac{z}{x}, \qquad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \frac{z}{x}) \left| \frac{1}{x} \right| dx.$

D. $y = zx, \qquad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, zx)|x| dx.$ ◄

8.1.3. Razdioba zbroja nezavisnih varijabli

Zbroj nezavisnih varijabli iznimno je važan primjer funkcije slučajnog vektora. Pokazali smo da će za neke važne razdiobe poput binomne, Poissonove ili normalne, zbroj nezavisnih varijabli imati razdiobu istog tipa.

To općenito nije slučaj. Izvest ćemo općenitu vezu gustoća nezavisnih slučajnih varijabli i gustoća njihovog zbroja.

Ako su X i Y nezavisne, i $f(x, y)$ gustoća vektora (X, Y), onda se ta funkcija može faktorizirati u umnožak marginalnih gustoća:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Za gustoću zbroja $Z = X + Y$ ovih slučajnih varijabli vrijedi, prema prethodnom primjeru

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

U integralu zdesna prepoznajemo *konvoluciju* gustoća f_X i f_Y.

Uzastopnom primjenom ovog zaključka, dobivamo sljedeće:

Teorem 8.1. ■ **Gustoća zbroja nezavisnih varijabli**

Ako su slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne, onda je gustoća njihovog zbroja $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dana konvolucijom

$$g_Z(z) = f_{X_1} * f_{X_2} * \ldots * f_{X_n}.$$

Primjer 8.4.

Slučajne varijable X_1, X_2 i X_3 nezavisne su i imaju jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 1]$. Odredimo gustoću g_Z slučajne varijable **A.** $Y = X_1 + X_2$, **B.** $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

► Gustoća varijabli X_i je $f(x) = 1$, $0 < x < 1$.

A. Gustoća varijable Y dana je konvolucijom:

$$g_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x - u) du$$

Daljnje računanje ovisi o vrijednosti argumenta. Funkcija gustoće različita je od nule za $0 < x < 2$. Područje integracije svodi se na ono na kojem je argument funkcija u granicama od 0 do 1, jer je van toga funkcija gustoće jednaka nuli. Prema tome, mora biti $0 < u < 1$ i $0 < x - u < 1$. Zato u mora zadovoljavati sustav

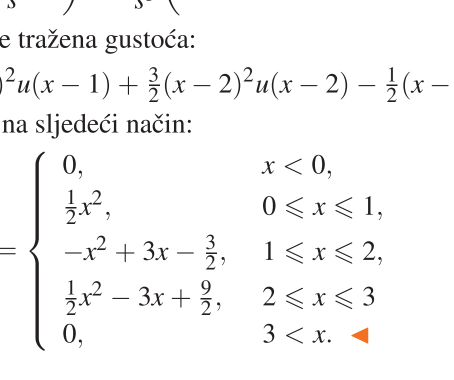
$$\begin{cases} 0 < u < 1, \\ x - 1 < u < x. \end{cases}$$

a) Za $0 < x \leqslant 1$ oba su uvjeta zadovoljena ako je $0 < u < x$:

$$g_Y(x) = \int_0^x f(u) f(x - u) du = \int_0^x du = x.$$

b) Za $1 < x < 2$ mora biti $x - 1 < u < 1$:

$$g_Y(x) = \int_{x-1}^1 f(u) f(x - u) du = \int_{x-1}^1 du = 2 - x.$$



Sl. 8.1. Graf gustoće zbroja dviju uniformnih razdioba.

B. Računanje poput prijašnjeg postaje nespretno za veći broj pribrojnika. Možemo napisati

$$f(x) = u(x) - u(x - 1),$$

tu je u jedinična step funkcija. Laplaceova transformacija gustoće je

$$f^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s}$$

Konvoluciji u donjem području odgovara umnožak. Odatle je

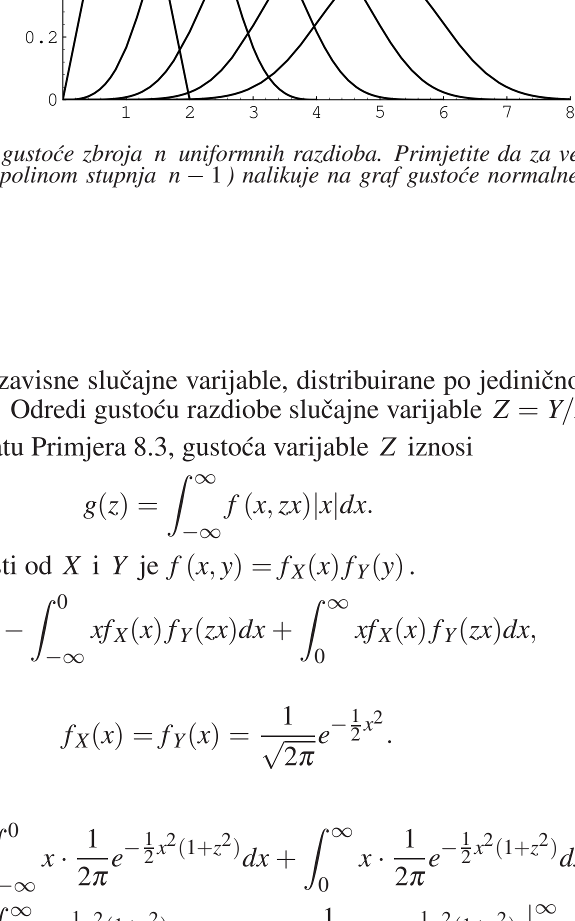
$$g_Z^*(s) = \Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s}\Big)^3 = \frac{1}{s^3}\Big(1 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - e^{-3s}\Big).$$

Original ove funkcije je tražena gustoća:

$$g_Z(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}(x-1)^2 u(x-1) + \tfrac{3}{2}(x-2)^2 u(x-2) - \tfrac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3)$$

Zapišimo tu funkciju i na sljedeći način:

$$g_Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0, & 3 < x. \end{cases} \ ◄$$



Sl. 8.2. Graf gustoće zbroja n uniformnih razdioba. Primjetite da za veliki n ovaj graf (koji je polinom stupnja $n - 1$) nalikuje na graf gustoće normalne razdiobe.

Primjer 8.5.

X i Y su nezavisne slučajne varijable, distribuirane po jediničnom normalnom zakonu. Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Z = Y/X$.

► Po rezultatu Primjera 8.3, gustoća varijable Z iznosi

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, zx)|x| dx.$$

Zbog nezavisnosti od X i Y je $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} x f_X(x) f_Y(zx) dx + \int_0^{\infty} x f_X(x) f_Y(zx) dx,$$

gdje je

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Dakle

$$\begin{aligned} g(z) &= -\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} dx + \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} x\, dx = -\frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi(1+z^2)}. \end{aligned}$$

Prema tome, kvocijent dviju nezavisnih jediničnih normalnih varijabli ima Cauchyjevu razdiobu.

Ako je $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$, provjeri da je

$$g(z) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1}{\pi\Big[1 + (\frac{\sigma_1}{\sigma_2} z)^2\Big]}. \ ◄$$

— ◆ —

U slučaju kad preslikavanja (1) nisu injektivna, ali i onda kad je nepraktično koristiti formulu (4) (obično zbog toga što gustoća f nije različita od nule na čitavom $\mathbf{R}^2$, što otežava određivanje granica u integralu (4)), funkciju gustoće varijable Z nalazimo pomoću funkcije razdiobe:

$$F_Z(z) = \mathrm{P}\{\psi(X, Y) < z\} = \iint_{G_z} f(x, y) dx\, dy,$$

gdje je

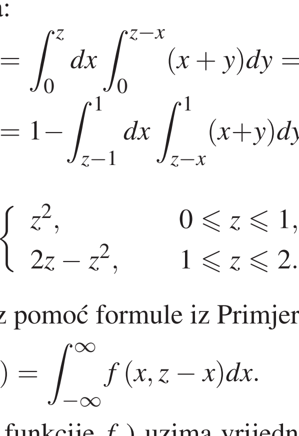
$$G_z = \{(x, y) : \psi(x, y) < z\}.$$

Primjer 8.6.

Slučajan vektor (X, Y) ima gustoću razdiobe

$$f(x, y) = x + y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$.



Sl. 8.3.

► Z poprima vrijednosti unutar intervala $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathrm{P}\{Z < z\} = \mathrm{P}\{(X, Y) \in G_z\} \\ &= \iint_{G_z} f(x, y) dx\, dy \end{aligned}$$

gdje je

$$G_z = \{(x, y) : x + y < z\}$$

područje iscrtkano na slici.

Razlikujemo dva slučaja:

1) $\quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} (x + y) dy = \frac{z^3}{3}.$

2) $\quad 1 \leqslant z \leqslant 2, \quad F_Z(z) = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (x+y) dy = \frac{1}{3}(-z^3 + 3z^2 - 1).$

Dakle,

$$g_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$$

Dobijmo ovaj rezultat uz pomoć formule iz Primjera 8.3:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx.$$

Varijabla x (prvi argument funkcije f) uzima vrijednosti unutar $[0, 1]$ (za $x \notin [0, 1]$, $f(x, y)$ jednaka je nuli). Dakle

$$g_Z(z) = \int_0^1 f(x, z - x) dx.$$

I drugi argument funkcije f mora biti unutar intervala $[0, 1]$. Razlikujemo dva slučaja:

1) $0 \leqslant z \leqslant 1$. Tada je uvijek $z - x \leqslant 1$ i biramo x da bude $z - x \geqslant 0$, tj. $x \leqslant z$:

$$g_Z(z) = \int_0^z f(x, z - x) dx = \int_0^z (x + z - x) dx = z^2.$$

2) $1 \leqslant z \leqslant 2$. Sada je uvijek $z - x \geqslant 0$ no, moramo osigurati da bude $z - x \leqslant 1$, tj. $x \geqslant z - 1$.

$$g_Z(z) = \int_{z-1}^1 f(x, z - x) dx = \int_{z-1}^1 (x + z - x) dx = 2z - z^2. \ ◄$$

Primjer 8.7.

Nezavisne slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pokaži da slučajna varijabla $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ima također eksponencijalnu razdiobu, s parametrom $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

► Vrijedi

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathrm{P}\{Y < x\} = 1 - \mathrm{P}\{Y \geqslant x\} \\ &= 1 - \mathrm{P}\{\min\{X_1, \dots, X_n\} \geqslant x\} \\ &= 1 - \mathrm{P}\{X_1 \geqslant x, \dots, X_n \geqslant x\}. \end{aligned}$$

Zbog nezavisnosti varijabli $X_1, \dots, X_n$ dobivamo

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= 1 - \mathrm{P}\{X_1 \geqslant x\} \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}\{X_n \geqslant x\} \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x}, \end{aligned}$$

te je $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$. ◄

Ovaj rezultat ima sljedeću interpretaciju: u sustavu od n serijski vezanih nezavisnih komponenti, od kojih svaka ima očekivano vrijeme ispravnog rada $a_1, \dots, a_n$, očekivano vrijeme ispravnog rada cijelog sustava a je određeno sa

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

8.2. Razdiobe izvedene iz normalne razdiobe

8.2.1. Gama funkcija

Eulerov integral druge vrste ili **gama funkcija** definirana je nepravim integralom

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \qquad (\alpha > 0).$$

Ovaj se integral može definirati i za sve kompleksne brojeve α za koje je $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

Teorem 8.2. Osnovna svojstva gama funkcije

Vrijede sljedeće formule

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha),\\ \Gamma(n+1) &= n!, \qquad \forall n \in \mathbf{N},\\ \Gamma(\tfrac12) &= \sqrt{\pi},\\ \Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1.\end{aligned}$$

DOKAZ. Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \frac{1}{\alpha}x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx\\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\end{aligned}$$

i odavde slijedi $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Prema dokazanoj relaciji vrijedi

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\Gamma(1).$$

Kako je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

dobivamo $\Gamma(n+1) = n!$.

U dokazivanju trećeg svojstva iskoristit ćemo svojstvo gustoće jedinične normalne razdiobe:

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac12) &= \int_0^\infty x^{-\frac12}e^{-x}dx = \Big[x = \tfrac12 t^2,\ x^{-\frac12}dx = \sqrt{2}dt\Big]\\ &= \int_0^\infty e^{-\frac12 t^2}\sqrt{2}dt = \sqrt{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac12 t^2}dt = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Koristeći prvo i treće svojstvo, dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) &= \frac{2n-1}{2}\Gamma\Big(\frac{2n-1}{2}\Big) = \ldots = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac32\cdot\frac12\cdot\Gamma\Big(\frac12\Big)\\ &= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

8.2.2. Centralni momenti normalne varijable

Pomoću gama funkcije možemo iskazati centralne momente normalne slučajne varijable. S obzirom da vrijedi $\boldsymbol{E}(X^n) = 0$ za svaki neparni prirodni broj n, izvest ćemo općenitiju formulu za momente slučajne varijable $|X|$.

Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Onda imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|X|^n) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty |x|^n e^{-\frac12(\frac{x}{\sigma})^2}dx\\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^n e^{-\frac12(\frac{x}{\sigma})^2}dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x^2}{2\sigma^2}\\ dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2t}}dt\end{array}\right]\\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (2\sigma^2)^{\frac12 n}t^{\frac12 n}\frac{\sigma}{\sqrt{2t}}e^{-t}dt\\ &= \frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}2^{\frac12 n}\int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt = \frac{2^{\frac12 n}\sigma^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big). \blacktriangleleft \qquad (5)\end{aligned}$$

Tako na primjer, vrijedi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(|X|^5) &= \frac{2^{\frac52}\sigma^5}{\sqrt{\pi}}\Gamma(3) = 8\sigma^5\sqrt{\frac{2}{\pi}},\\ \boldsymbol{E}(|X|^6) &= \frac{2^{\frac62}\sigma^6}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac72\Big) = \frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac52\cdot\frac32\cdot\Gamma\Big(\frac12\Big) = 30\sigma^6.\end{aligned}$$

8.2.3. Gama razdioba

Slučajna varijabla X ima **gama razdiobu** s parametrima α i λ, ako je njezina gustoća razdiobe definirana sa

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \quad (\alpha,\lambda > 0).$$

Pišemo $X \sim \mathcal{G}(\alpha,\lambda)$.

Odredimo karakterističnu funkciju gama razdiobe.

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= \int_0^\infty e^{itx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx\\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x(\lambda-it)}dx.\end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju $x(\lambda - it) = z$

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\Big(\frac{z}{\lambda-it}\Big)^{\alpha-1}e^{-z}\frac{dz}{\lambda-it}\\ &= \Big(\frac{\lambda}{\lambda-it}\Big)^\alpha\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz = \Big(\frac{\lambda}{\lambda-it}\Big)^\alpha. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Odavde se sad lako određuju očekivanje i disperzija gama razdiobe

$$\boldsymbol{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \boldsymbol{D}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \qquad (6)$$

8.2.4. Stabilnost gama razdiobe. Erlangova razdioba

Dokažimo sad stabilnost gama razdiobe na zbrajanje: ako nezavisne varijable X_1 i X_2 imaju gama razdiobu s parametrima (α_1,λ), (α_2,λ), tada zbroj $X_1 + X_2$ ima gama razdiobu s parametrima $\alpha_1+\alpha_2$ i λ.

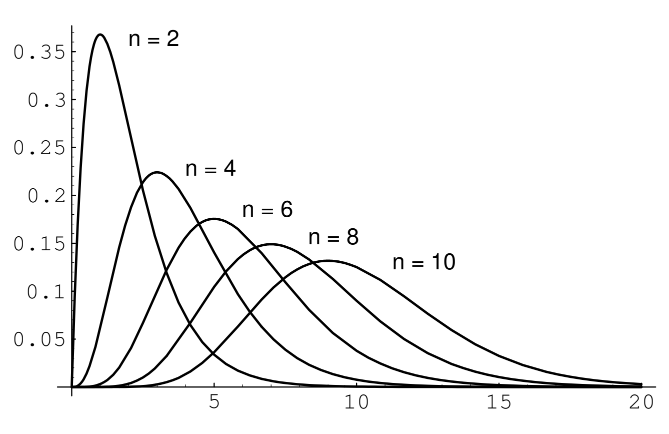
Karakteristična funkcija zbroja $X_1 + X_2$ jednaka je produktu karakterističnih funkcija pribrojnika i iznosi

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda-it}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\lambda}{\lambda-it}\Big)^{\alpha_2} = \Big(\frac{\lambda}{\lambda-it}\Big)^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Ova je funkcija karakteristična funkcija gama razdiobe s parametrima $\alpha_1+\alpha_2$ i λ, što je i trebalo dokazati.

Eksponencijalna razdioba je ujedno i gama razdioba s parametrom $\alpha = 1$. Zato zbroj n nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli $X_1,\ldots,X_n$ ima gama razdiobu s parametrima λ i n. Tu razdiobu nazivamo još i **Erlangova razdioba**. Njezina je gustoća

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$



Sl. 8.4. Grafovi funkcija gustoća Erlangove razdiobe, za prvih nekoliko vrijednosti indeksa n.

8.2.5. Veza normalne i eksponencijalne razdiobe

Ako X ima jediničnu normalnu razdiobu, onda varijabla $Y = X^2$ ima gama razdiobu s parametrima $(\frac12,\frac12)$.

Za $x \leqslant 0$ je $F_Y(y) = 0$. Za $x > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathrm{P}\{X^2 < y\} = \mathrm{P}\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}e^{-\frac12 x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-\frac12 x^2}dx.\end{aligned}$$

Zato je

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12 y}\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac12}e^{-\frac12 y}$$

a to je gustoća gama razdiobe $\mathcal{G}(\frac12,\frac12)$.

8.2.6. χ^2-razdioba

χ^2-razdioba

Neka su $X_1,\ldots,X_n$ nezavisne slučajne varijable s jediničnom normalnom razdiobom. Tada kažemo da slučajna varijabla χ_n^2 definirana sa

$$\chi_n^2 := X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

ima **χ^2-razdiobu** (hi kvadrat razdiobu) sa n stupnjeva slobode. Gustoća ove razdiobe je

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)}x^{\frac12 n-1}e^{-\frac12 x},$$

a očekivanje i disperzija

$$\boldsymbol{E}(\chi_n^2) = n, \qquad \boldsymbol{D}(\chi_n^2) = 2n.$$

Dokažimo ove tvrdnje. Pokazali smo da varijabla X_k^2 ima gama razdiobu s parametrima $(\frac12,\frac12)$. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli, zbroj $X_1^2+\ldots+X_n^2$ ima gama razdiobu s parametrima $(\frac12 n,\frac12)$. Prema tome, gustoća χ_n^2-razdiobe dana je sa

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)}x^{\frac12 n-1}e^{-\frac12 x}.$$

Prema formuli (6) znamo odrediti očekivanje i disperziju:

$$\boldsymbol{E}(\chi_n^2) = \frac{\frac12 n}{\frac12} = n, \qquad \boldsymbol{D}(\chi_n^2) = \frac{\frac12 n}{\frac14} = 2n. \blacktriangleleft$$

Nacrtat ćemo funkciju gustoće χ_n^2 razdiobe za prvih nekoliko vrijednosti indeksa n.

Odredimo gustoće tih razdioba. Koristimo pritom svojstva gama funkcije: $\Gamma(\frac12) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac32) = \frac12\sqrt{\pi}$, $\Gamma(2) = 1$.

$$\begin{aligned}n = 1: &\qquad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac12 x}, \quad x > 0\\ n = 2: &\qquad f_2(x) = \frac12 e^{-\frac12 x}, \quad x > 0\\ n = 3: &\qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x}e^{-\frac12 x}, \quad x > 0\\ n = 4: &\qquad f_4(x) = \frac14 xe^{-\frac12 x}, \quad x > 0\end{aligned}$$

Vrijedi

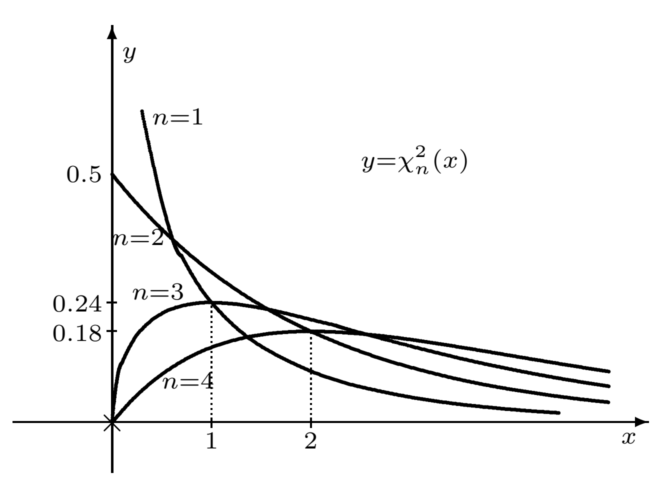
$$\lim_{x\to\infty}f_k(x) = 0, \quad k \geqslant 1$$

$$\lim_{x\to 0}f_k(x) = \begin{cases}\infty, & k = 1,\\ \frac12, & k = 2,\\ 0, & k \geqslant 3.\end{cases}$$

Odredimo ekstreme. Vrijedi

$$\Big(x^{\frac12 n-1}e^{-\frac12 x}\Big)' = x^{\frac12 n-2}e^{-\frac12 x}(\frac12 n - 1 - \frac12 x) = 0$$

za $x = n-2$. Zato f_n poprima maksimum u $x = n-2$. $\blacktriangleleft$



Sl. 8.5. Graf funkcija gustoća prvih nekoliko χ^2 razdioba.

8.2.7. χ-razdioba

χ-razdiobom zovemo slučajnu varijablu

$$\chi = \sqrt{\chi^2} = \sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2},$$

gdje su X_i nezavisne jedinične normalne varijable. Odredimo funkciju gustoće varijable χ.

χ^2-razdioba dana je gustoćom

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)}x^{\frac12 n-1}e^{-\frac12 x}, \quad x > 0.$$

Stoga je gustoća varijable $\chi = \sqrt{\chi^2}$ dana sa

$$f_\chi(x) = f_{\chi^2}(x^2)\cdot 2x = \frac{2x^{n-1}}{2^{\frac12 n}\Gamma(\frac12 n)}e^{-\frac12 x^2}.$$

Skicirajmo grafove funkcija gustoće χ_n-razdiobe, za $n = 1,2,3$.

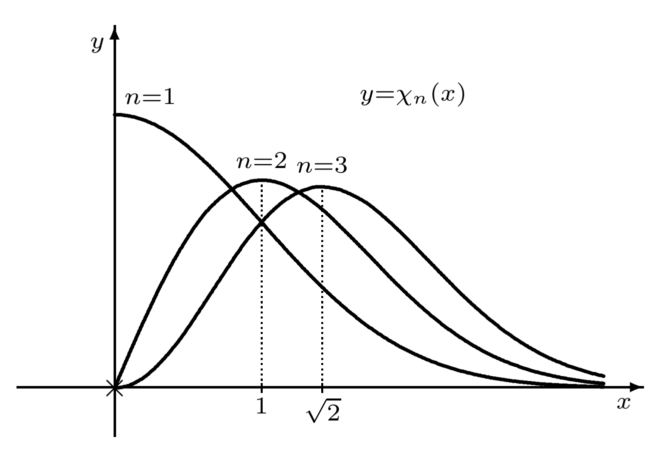
Napišimo najprije jednadžbe pripadnih gustoća:

$$\begin{aligned}n = 1: &\qquad f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12 x^2}, \quad x > 0,\\ n = 2: &\qquad f_2(x) = xe^{-\frac12 x^2}, \quad x > 0, \qquad \text{(Rayleighova razdioba)}\\ n = 3: &\qquad f_3(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-\frac12 x^2}, \quad x > 0, \qquad \text{(Maxwellova razdioba)}\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\Big(x^{n-1}e^{-\frac12 x^2}\Big)' = e^{-\frac12 x^2}x^{n-2}(n-1-x^2),$$

pa f_{χ_n} ima maksimum u $x = \sqrt{n-1}$.



Sl. 8.6. Graf funkcija gustoća prvih nekoliko χ-razdioba.

8.2.8. Studentova razdioba

Neka su $X, X_1,\ldots,X_n$ nezavisne jedinične normalne varijable. Tada kažemo da slučajna varijabla

$$t := \frac{X}{\sqrt{(X_1^2+\ldots+X_n^2)/n}}$$

ima **studentovu razdiobu** sa n stupnjeva slobode. Pišemo često t_n umjesto t. Sama razdioba zove se i **t-razdioba**.

Odredimo funkciju gustoće studentove razdiobe.

Varijabla $\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}$ ima χ-razdiobu, stoga je gustoća varijable $Z = \sqrt{(X_1^2+\ldots+X_n^2)/n}$ dana sa

$$f_Z(x) = \frac{2(\sqrt{n}x)^{n-1}}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)}e^{-\frac12 nx^2}.$$

Po Primjeru 8.3, gustoća studentove razdiobe $t = \dfrac{X}{Z}$ dana je sa

$$\begin{aligned}f_t(x) &= \int_{-\infty}^\infty f_X(xy)f_Z(y)|y|dy\\ &= \int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12 x^2y^2}\frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n}y)^{n-1}}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)}e^{-\frac12 ny^2}y\,dy\\ &= \frac{2(\sqrt{n})^n}{2^{n/2}\Gamma(\frac12 n)\sqrt{n+x^2}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{n+x^2}}{\sqrt{2\pi}}y^n\,e^{-\frac12 y^2(n+x^2)}dy.\end{aligned}$$

Ovaj integral jednak je $\boldsymbol{E}(|Y|^n)$, gdje je $Y \sim \mathcal{N}(0,\frac{1}{n+x^2})$ i po formuli (5) iznosi $\dfrac12\cdot\dfrac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)\cdot\dfrac{1}{(n+x^2)^{n/2}}$. Dakle,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2(\sqrt{n})^n}{2^{n/2}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\sqrt{n+x^2}}\cdot\frac12\cdot\frac{2^{n/2}\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi}(n+x^2)^{n/2}}\\ &= \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

— ◆ —

Odredimo očekivanje i disperziju t_n-razdiobe. Za $n = 1$ gustoća glasi $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ (Cauchyjeva razdioba) i ona nema niti očekivanje, niti disperziju.

Neka je $n > 1$. Gustoća t_n-razdiobe je parna funkcija i zato je $\boldsymbol{E}(t_n) = 0$. Izračunajmo disperziju:

$$\boldsymbol{D}(t_n) = \boldsymbol{E}(t_n^2) = \int_{-\infty}^\infty\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}x^2\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx.$$

Označimo, zbog kratkoće zapisa, $C_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(t_n) &= C_n\int_{-\infty}^\infty x^2\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx\\ &= C_n\Big\{n\int_{-\infty}^\infty\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx - n\int_{-\infty}^\infty\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx\Big\}\\ &= nC_n\int_{-\infty}^\infty\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n-1}{2}}dx - n\int_{-\infty}^\infty C_n\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}dx.\end{aligned}$$

Drugi je integral jednak jedinici, pošto je podintegralna funkcija gustoća t_n-razdiobe. Da bismo prvi integral sveli na integral po gustoći t_{n-2}-razdiobe, uvedimo supstituciju

$$\frac{x^2}{n} = \frac{u^2}{n-2} \implies dx = \sqrt{\frac{n}{n-2}}du.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(t_n) &= nC_n\sqrt{\frac{n}{n-2}}\cdot\frac{1}{C_{n-2}}\int_{-\infty}^\infty C_{n-2}\Big(1+\frac{u^2}{n-2}\Big)^{-\frac{n-1}{2}}du - n\\ &= n\sqrt{\frac{n}{n-2}}\cdot\frac{C_n}{C_{n-2}} - n\\ &= \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}\cdot\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\cdot\frac{\sqrt{(n-2)\pi}\Gamma\big(\frac{n-2}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)} - n\\ &= \frac{n\cdot\frac{n-1}{2}}{\frac{n-2}{2}} - n = \frac{n}{n-2}\end{aligned}$$