



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

# 11. Metoda konturnih struja i metoda napona čvorova

© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/hr/).



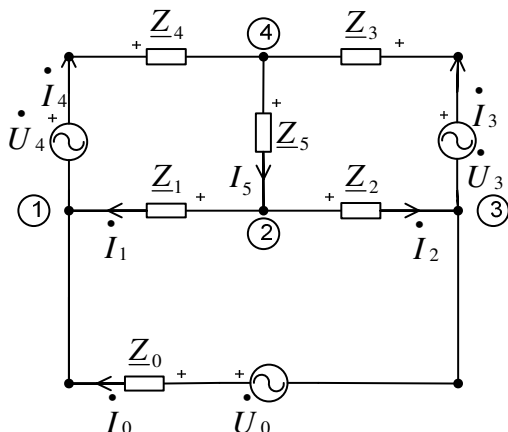
## Sadržaj

- Metoda konturnih struja
  - Izvod metode konturnih struja iz Kirchhoffovih zakona
  - Primjena metode konturnih struja za rješavanje složenog električnog kruga
  - Primjeri za vježbu
- Metoda napona čvorova
  - Izvod metode napona čvorova iz Kirchhoffovih zakona
  - Primjena metode napona čvorova za rješavanje složenog električnog kruga
  - Primjeri za vježbu

## Izvod metode konturnih struja - jednadžbe Kirchhoffovog zakona za napone

- Zadano je :  $\dot{U}_0 = 10\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $\dot{U}_3 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $\dot{U}_4 = 5\angle 45^\circ \text{V}$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 10\angle 0^\circ \Omega, \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 10\angle 45^\circ \Omega$$

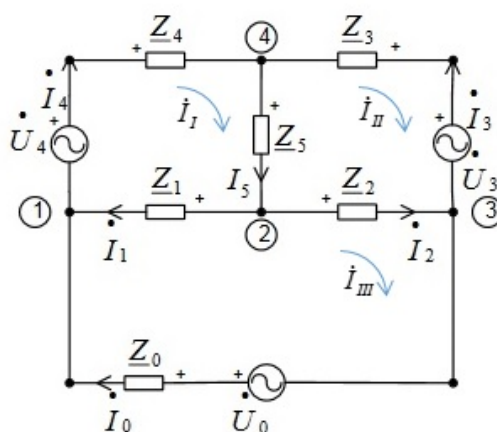


$$\begin{aligned}\dot{U}_4 &= \dot{I}_4 \cdot \underline{Z}_4 + \dot{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 + \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 \\ -\dot{U}_3 &= -\dot{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 - \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \dot{I}_5 \cdot \underline{Z}_5 \\ \dot{U}_0 &= \dot{I}_0 \cdot \underline{Z}_0 - \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2\end{aligned}$$

## Izvod metode konturnih struja

- Izravna primjena Kirchhoffovih zakona vodi na rješavanje sustava šest jednadžbi sa šest nepoznanica, struja u granama  $\dot{I}_0, \dot{I}_1, \dots, \dot{I}_5$
- Konturu ili okno čini zatvoreni unutarnji obilazni put, koji ne sadrži druge obilazne putove
- U strujnom krugu su identificirane tri konturne struje

$$\dot{I}_I, \dot{I}_{II} \text{ i } \dot{I}_{III}$$



## Izvod metode konturnih struja

- U granama koje nisu dijeljene između dvije konture vrijedi:

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_{III}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_I$$

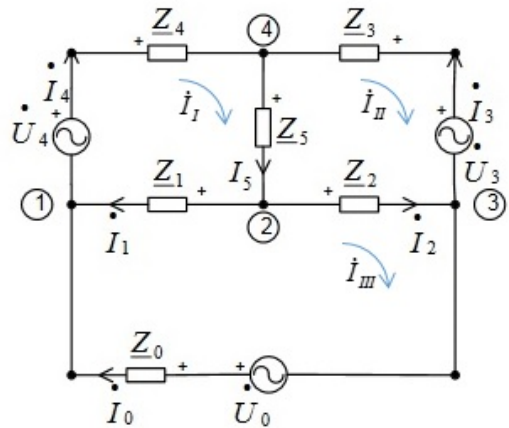
$$-\dot{I}_3 = \dot{I}_{II}$$

- U granama koje su dijeljene između dvije konture vrijedi:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I - \dot{I}_{III}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{III} - \dot{I}_{II}$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_I - \dot{I}_{II}$$



## Izvod metode konturnih struja

- Uvrštenjem jednadžbi konturnih struja u jednadžbe Kirchhoffovog zakona za napone dobije se:

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_I \cdot \underline{Z}_4 + (\dot{I}_I - \dot{I}_{II}) \cdot \underline{Z}_5 + (\dot{I}_I - \dot{I}_{III}) \cdot \underline{Z}_1$$

$$-\dot{U}_3 = \dot{I}_{II} \cdot \underline{Z}_3 + (\dot{I}_{II} - \dot{I}_{III}) \cdot \underline{Z}_2 + (\dot{I}_{II} - \dot{I}_I) \cdot \underline{Z}_5$$

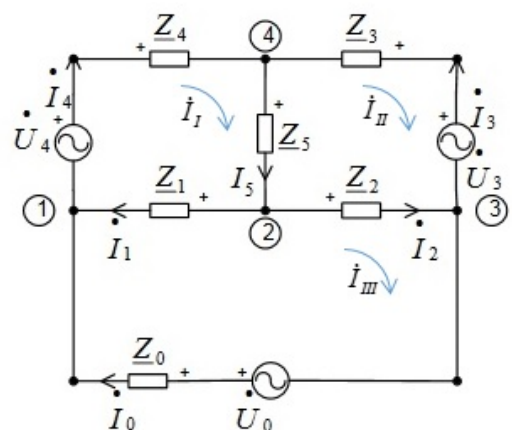
$$\dot{U}_0 = \dot{I}_{III} \cdot \underline{Z}_0 + (\dot{I}_{III} - \dot{I}_I) \cdot \underline{Z}_1 + (\dot{I}_{III} - \dot{I}_{II}) \cdot \underline{Z}_2$$

- Nakon sređivanja

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_I \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{II} \cdot \underline{Z}_5 - \dot{I}_{III} \cdot \underline{Z}_1$$

$$-\dot{U}_3 = -\dot{I}_I \cdot \underline{Z}_5 + \dot{I}_{II} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{III} \cdot \underline{Z}_2$$

$$\dot{U}_0 = -\dot{I}_I \cdot \underline{Z}_1 - \dot{I}_{II} \cdot \underline{Z}_2 + \dot{I}_{III} \cdot (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$



## Izvod metode konturnih struja

- Primjena metode konturnih struja svela je problem 6 jednadžbi sa 6 nepoznanica  $\dot{I}_0, \dot{I}_1, \dots, \dot{I}_5$  na problem tri jednadžbe s tri nepoznanice  $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}$  i  $\dot{I}_{III}$  koji je bitno jednostavniji za riješiti
- Iz izračunatih konturnih struja mogu se dobiti struje grana korištenjem jednadžbi koje povezuju struje u granama i konturne struje:

$$\begin{aligned}\dot{I}_0 &= \dot{I}_{III} & \dot{I}_1 &= \dot{I}_I - \dot{I}_{III} \\ \dot{I}_4 &= \dot{I}_I & \dot{I}_2 &= \dot{I}_{III} - \dot{I}_{II} \\ -\dot{I}_3 &= \dot{I}_{II} & \dot{I}_5 &= \dot{I}_I - \dot{I}_{II}\end{aligned}$$

## Metoda konturnih struja – rješenje zadatka

$$\dot{U}_0 = 10\angle 0^\circ \text{V}, \dot{U}_3 = 20\angle 0^\circ \text{V}, \dot{U}_4 = 5\angle 45^\circ \text{V}$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 10\angle 0^\circ \Omega, \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 10\angle 45^\circ \Omega$$

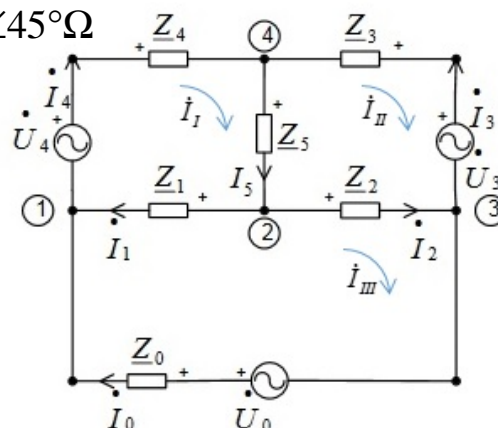
- Sustav jednadžbi konturnih struja:

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_I \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{II} \cdot \underline{Z}_5 - \dot{I}_{III} \cdot \underline{Z}_1$$

$$-\dot{U}_3 = -\dot{I}_I \cdot \underline{Z}_5 + \dot{I}_{II} \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5) - \dot{I}_{III} \cdot \underline{Z}_2$$

$$\dot{U}_0 = -\dot{I}_I \cdot \underline{Z}_1 - \dot{I}_{II} \cdot \underline{Z}_2 + \dot{I}_{III} \cdot (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

Riješi se za nepoznate struje  $\dot{I}_I, \dot{I}_{II}$  i  $\dot{I}_{III}$



## Metoda konturnih struja – rješenje zadatka

---

- Rješenjem sustava jednadžbi konturnih struja dobiju se vrijednosti:

$$\dot{I}_I = -0,031 + j0,074\text{A}$$

$$\dot{I}_{II} = -0,671 + j0,223\text{A}$$

$$\dot{I}_{III} = 0,099 + j0,099\text{A}$$

i iz konturnih struja struje grana

$$\dot{I}_0 = 0,099 + j0,099\text{A}$$

$$\dot{I}_3 = 0,671 - j0,223\text{A}$$

$$\dot{I}_1 = -0,130 - j0,025\text{A}$$

$$\dot{I}_4 = -0,031 + j0,074\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 0,771 - j0,124\text{A}$$

$$\dot{I}_5 = 0,640 - j0,149\text{A}$$

## Izravna primjena metode konturnih struja

---

- odrediti i numerirati  $n = g - (c - 1)$  zatvorenih kontura i pretpostaviti iste smjerove svih konturnih struja npr. u smjeru kazaljke na satu.
- odrediti polaritete padova napona na elementima konture
- napisati jednadžbe II Kirchhoffovog zakona za konturne struje
- riješiti sustav jednadžbi i time odrediti konturne struje
- iz konturnih struja odrediti struje grana i padove napona na elementima strujnog kruga

## Metoda konturnih struja – matrični zapis

- Sustav jednačbi za konturne struje moguće je i matrično zapisati na način:

$$[Z][\dot{I}] = [\dot{U}]$$

- $[Z]$  simetrična matrica impedancija kontura, u kojoj uz jednaku orijentaciju konturnih struja, npr. u smjeru kazaljke na satu, vrijedi:
  - dijagonalni članovi  $\underline{Z}_{ii}$  su jednaki sumi impedancija u i-toj konturi
  - vandijagonalni članovi  $\underline{Z}_{ij}$  su jednaki negativnoj sumi impedancija u grani koju dijele i-ta i j-ta kontura
  - $\dot{U}_i$  je suma svih napona izvora u i-toj konturi, pri čemu su pozitivni oni naponi čiji smjer djelovanja odgovara smjeru konturne struje
  - $\dot{I}_i$  je nepoznata konturna struja i-te konture

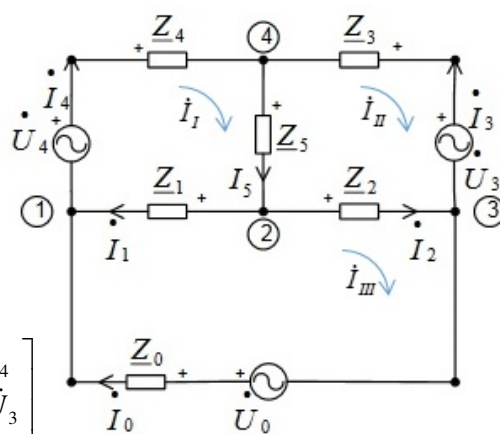
## Metoda konturnih struja – matrični zapis

- Matrica impedancije za krug iz primjera 1.

$$[Z] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 & -\underline{Z}_1 \\ -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

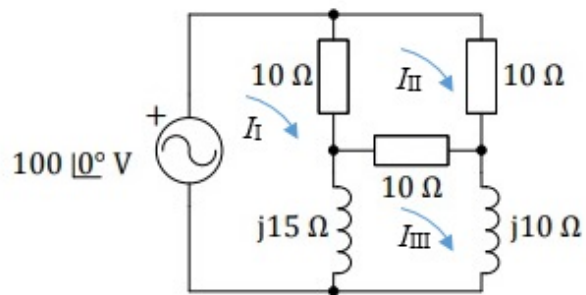
- Sustav jednačbi:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 & -\underline{Z}_1 \\ -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_2 \\ -\underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \\ \dot{I}_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_4 \\ -\dot{U}_3 \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix}$$



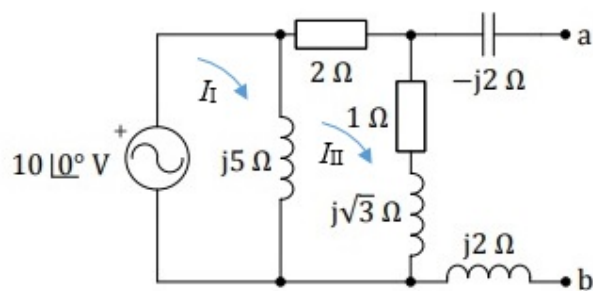
### Primjer 1.

- Odredite struju izvora za električni spoj prema slici



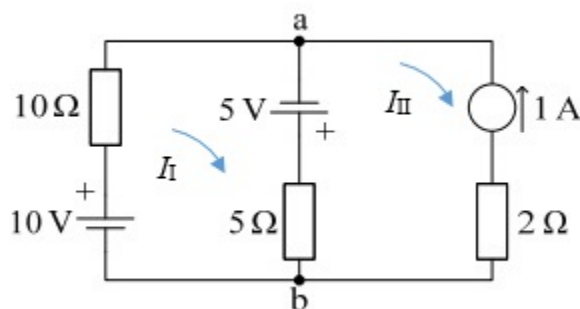
### Primjer 2.

- Za mrežu prema slici odredite napon između točaka a i b.



### Primjer 3.

- Za mrežu prema slici odredite napon na otporniku iznosa  $5\ \Omega$  koristeći metodu konturnih struja.



### Primjer 4.

- U mreži prema slici odredite primjenom metode konturnih struja efektivnu vrijednost napona na otporniku  $R_2$  ako je zadano:

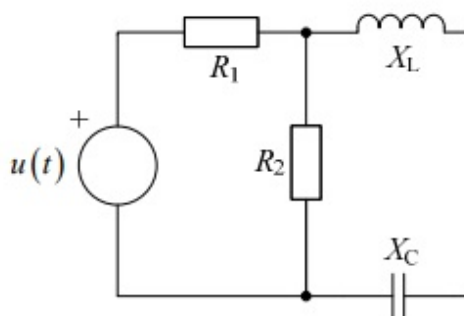
$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V},$$

$$R_1 = 10\ \Omega,$$

$$R_2 = 12\ \Omega,$$

$$X_L = 10\ \Omega,$$

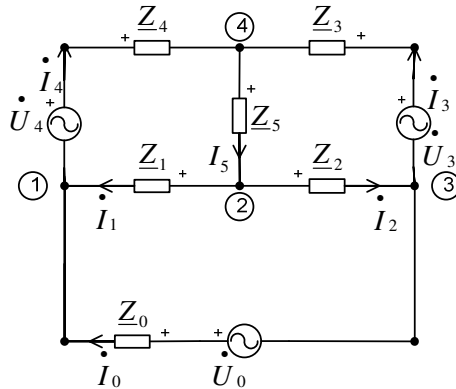
$$X_C = 40\ \Omega$$





## Metoda napona čvorova - jednađbe Kirchhoffovog zakona za struje

- Zadano je :  $\dot{U}_0 = 10\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $\dot{U}_3 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $\dot{U}_4 = 5\angle 45^\circ \text{V}$   
 $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 10\angle 0^\circ \Omega$ ,  $\underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = 10\angle 45^\circ \Omega$



$$\dot{I}_0 + \dot{I}_1 = \dot{I}_4$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_0 + \dot{I}_3$$

- Cilj – odrediti potencijale čvorova i iz njih prilike u mreži

## Metoda napona čvorova – izvod iz Kirchhoffovih zakona

- Struje su s potencijalima čvorova povezane preko jednađbi:

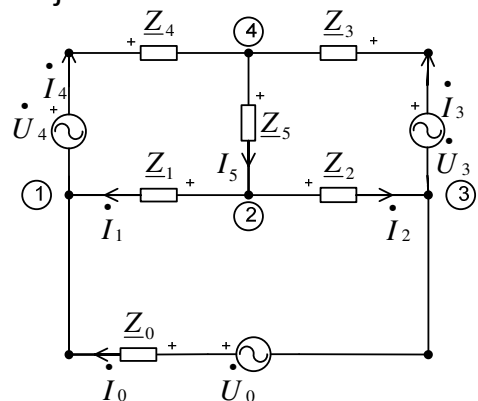
$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_1 + \dot{U}_0}{\underline{Z}_0} \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_4 + \dot{U}_3}{\underline{Z}_3}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1}{\underline{Z}_1} \quad \dot{I}_4 = \frac{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_4 + \dot{U}_4}{\underline{Z}_4}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3}{\underline{Z}_2} \quad \dot{I}_5 = \frac{\dot{\phi}_4 - \dot{\phi}_2}{\underline{Z}_5}$$

- Odabiremo potencijal čvora 4:  $\dot{\phi}_4 = 0$

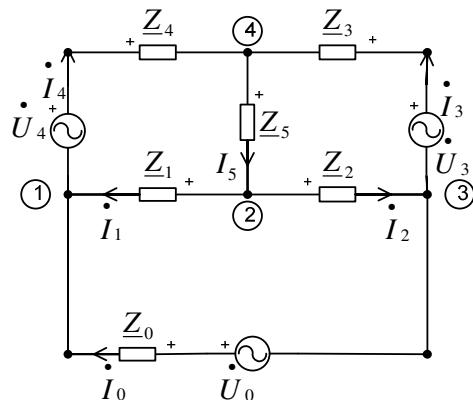
- Uvrstimo gornje jednađbe struja u jednađbe Kirchhoffovog zakona za struje i sredimo sustav



## Metoda napona čvorova – izvod iz Kirchhoffovih zakona

- Sustav jednačbi metode napona čvorova:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 \cdot \left( \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_4} \right) - \dot{\phi}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_1} - \dot{\phi}_3 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_0} &= \frac{\dot{U}_0}{\underline{Z}_0} - \frac{\dot{U}_4}{\underline{Z}_4} \\ -\dot{\phi}_1 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_1} + \dot{\phi}_2 \cdot \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) - \dot{\phi}_3 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2} &= 0 \\ -\dot{\phi}_1 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_0} - \dot{\phi}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dot{\phi}_3 \cdot \left( \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) &= -\frac{\dot{U}_0}{\underline{Z}_0} - \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3}\end{aligned}$$



- Nakon rješenja sustava iz poznatih potencijala čvorova odredimo struje grana preko već navedenih jednačbi koje ih povezuju

## Metoda napona čvorova – rješenje zadatka

- Potencijali čvorova iz sustava jednačbi su:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= -4,280 - j3,227 \text{ V} \\ \dot{\phi}_2 &= -5,582 - j3,475 \text{ V} \\ \dot{\phi}_3 &= -13,287 - j2,234 \text{ V}\end{aligned}$$

- Iz njih struje grana:

$$\begin{aligned}\dot{I}_0 &= 0,099 + j0,099 \text{ A} & \dot{I}_3 &= 0,671 - j0,223 \text{ A} \\ \dot{I}_1 &= -0,130 - j0,025 \text{ A} & \dot{I}_4 &= -0,031 + j0,074 \text{ A} \\ \dot{I}_2 &= 0,771 - j0,124 \text{ A} & \dot{I}_5 &= 0,640 - j0,149 \text{ A}\end{aligned}$$

## Izravna primjena metode napona čvorova

- Odrediti i numerirati svih  $n$  čvorova u mreži
- Izabrati referentni čvor s potencijalom  $\dot{\phi} = 0$  i postaviti sustav  $n-1$  jednadžbi
- Uz potencijal  $i$ -tog čvora (nepoznanica) kao koeficijent dolazi zbroj admitancija svih grana incidentnih s tim čvorom, pozitivnog predznaka
- Uz potencijal bilo kojeg  $j$ -tog čvora,  $i \neq j$ , u istoj jednadžbi kao koeficijent dolazi admitancija grane  $ij$ , odnosno zbroj admitancija svih grana između  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora kada tih grana ima više, negativnog predznaka
- Desna strana jednadžbe se formira tako da pozitivni predznak imaju struje izvora koje teku prema promatranom čvoru, a negativni struje koje teku iz promatranog čvora
- Matrica sustava je simetrična

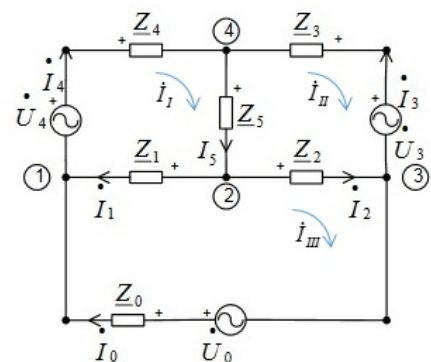
## Metoda napona čvorova – matrični zapis

- Matrica admitancije za krug iz primjera 1.

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_4} & -\frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_0} \\ -\frac{1}{Z_1} & \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5} & -\frac{1}{Z_2} \\ -\frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_2} & \frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \end{bmatrix}$$

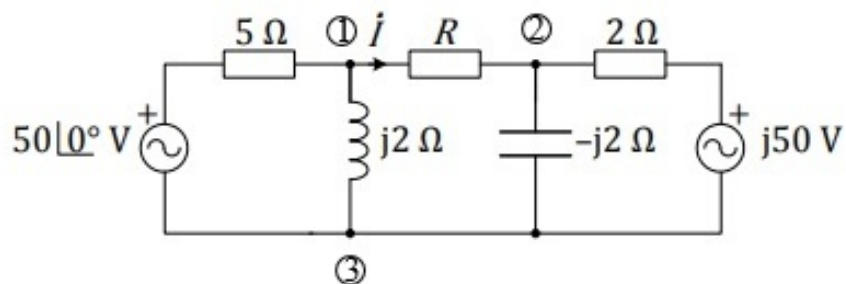
- Sustav jednadžbi:

$$[Y] \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{U}_0}{Z_0} - \frac{\dot{U}_4}{Z_4} \\ 0 \\ -\frac{\dot{U}_0}{Z_0} - \frac{\dot{U}_3}{Z_3} \end{bmatrix}$$



### Primjer 5.

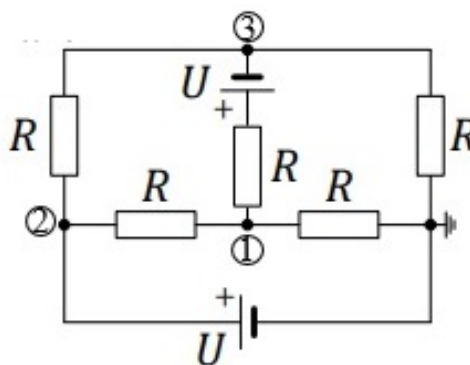
- U strujnom krugu prema slici odredite struju  $i$  ukoliko je  $R = 2\ \Omega$ .



### Primjer 6.

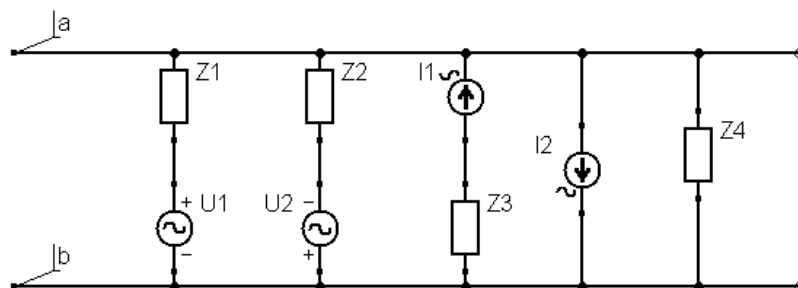
Odredite potencijal čvora 1 za strujni krug prema slici.

Zadano je  $U = 10\text{V}$ ,  $R = 1\ \Omega$ .



## Primjer 7.

- U mreži prema slici odredite primjenom metode napona čvorova napon  $\dot{U}_{ab}$  i struju kroz impedanciju  $\underline{Z}_1$ .



## Rješenja primjera

1. 12,72 A
2. 5,77 V
3. 8,33 V
4. 5,37 V
5.  $-5,12 - j1,1$  A
6. 7,5 V

$$7. \quad \phi_B = 0 \text{ V} \quad \phi_A = \frac{\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} + \dot{I}_1 - \dot{I}_2}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_4}} \quad \dot{U}_{AB} = \phi_A - \phi_B$$

$$\dot{I}_{Z1} = \frac{\phi_A - \dot{U}_1}{\underline{Z}_1}$$