# Zaštitno kodiranje II

*Teorija informacije*

# Sadržaj predavanja

- Uvod
  - Komunikacijski sustav; Cilj zašt. kodiranja; Podjela zaštitnih kodova.
- Blok kodovi
  - Uvod
  - Paritetno kodiranje
  - Linearno binarni blok kodovi
    - Generirajuća matrica **G** i njen standardni oblik
      - Kodiranje
      - Dekodiranje (dekodiranje preko sindroma)
      - Proračun vjerojatnosti ispravnog dekodiranja
    - Hammingovi kodovi
    - Ciklični kodovi

# Hammingovi i ciklični kodovi

(klasa linearnih blok kodova)

# *Hammingovi kodovi*

# Definicija: Hammingov kôd

***Hammingov kôd*:** *Neka je r pozitivan cijeli broj i neka je* **H** *matrica dimenzija* $r\times(2^r-1)$ *čije stupce sačinjavaju svi vektori dimenzije r različiti od* **0** *iz vektorskog prostora V*(*r*)*. Matrica* **H** *je matrica provjere pariteta Hammingovog koda s oznakom* Ham(*r*)*.*

- Primjer: Matrice provjere pariteta: $r = 3$, $n = 2^3 - 1 = 7$

$$\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \quad \textit{ili} \quad \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

- Stupci matrica provjere pariteta su binarni ekvivalenti cijelih brojeva od 1 do $2^r$-1! Redoslijed je nevažan!

# Svojstva Hammingovih kodova

***Svojstva Hammingovih kodova*:** *Neka je* Ham(*r*) *binarni Hammingov kôd. Za r* ≥ 2 *vrijedi da je* Ham(*r*):

- *linearan blok-kôd* $[2^r-1, 2^r-1-r]$;
- *ima najmanju distancu* 3 (*otkriva dvostruku i ispravlja jednostruku pogrešku*);
- *perfektan kôd*.

Neki mogući Hammingovi kodovi i njihove distance!

| $[n,k,3]$ | $[n,k,5]$ | $[n,k,7]$ | $[n,k,9]$ | $[n,k,11]$ | $[n,k,13]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [3,1,3] | [5,1,5] | [7,1,7] | [9,1,9] | [11,1,11] | [13,1,13] |
| [5,2,3] | [8,2,5] | [11,2,7] | [14,2,9] | [17,2,11] | [20,2,13] |
| [6,3,3] | [10,3,5] | [13,3,7] | [17,3,9] | [20,3,11] | [24,3,13] |
| [7,4,3] | [11,4,5] | [14,4,7] | [19,4,9] | [22,4,11] | [26,4,13] |
| [9,5,3] | [13,5,5] | [15,5,7] | [20,5,9] | [23,5,11] | [27,5,13] |
| [10,6,3] | [14,6,5] | [17,6,7] | [22,6,9] | [25,6,11] | [29,6,13] |
| [11,7,3] | [15,7,5] | [18,7,7] | [24,7,9] | [26,7,11] | [32,7,13] |
| [12,8,3] | [16,8,5] | [19,8,7] | [25,8,9] | [28,8,11] | [34,8,13] |
| [13,9,3] | [17,9,5] | [20,9,7] | [26,9,9] | [30,9,11] | [35,9,13] |
| [14,10,3] | [19,10,5] | [21,10,7] | [28,10,9] | [31,10,11] | [36,10,13] |

# Kodiranje pomoću Hammingovog koda

- Primjer: Hammingov kôd [7, 4, 3]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

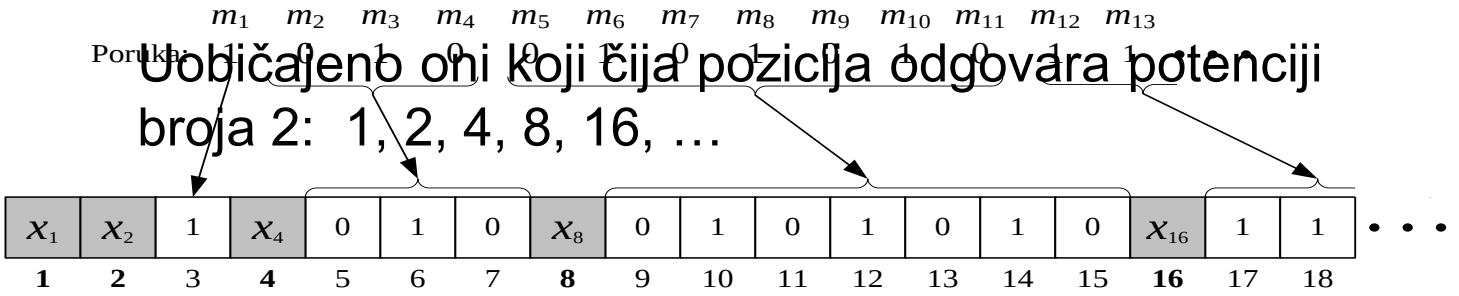
- Generirajuću matricu **G** nije jednostavno izračunati iz **H** jer ista nije u standardnom obliku, tj. jednadžba $\mathbf{GH}^T=\mathbf{0}$ daje velik broj mogućnosti.
- Potrebno je dobiti sistematičan kôd iz kojeg jednostavno dobivamo poslanu kodiranu poruku.
- Važno svojstvo matrice **H**: Svaki redak matrice provjere pariteta određuje pozicije simbola kodne riječi čiji zbroj mora bit paran broj (ili jednak 0 u aritm. mod. 2).

# Formiranje kodne riječi Hammingovog koda

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

| | |
|---|---|
| prvi redak | Pozicije (1), (3), (5) i (7). |
| drugi redak | Pozicije (2, 3), (6 i 7), |
| treći redak | Pozicije (4, 5, 6 i 7), |

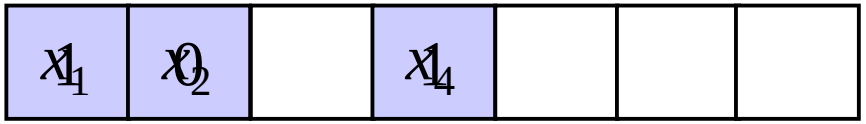
Ključno pitanje - koji bitovi su zaštitni?




$$x_1 = m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 + \ldots = x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \ldots$$
$$x_2 = m_1 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + \ldots = x_3 + x_6 + x_7 + x_{10} + x_{11} + \ldots$$
$$x_4 = m_2 + m_3 + m_4 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + \ldots = x_5 + x_6 + x_7 + x_{12} + x_{13} + x_{13} + x_{15} \ldots$$
$$\vdots$$

# Primjer: formiranje kodne riječi za Hammingov kôd [7, 4, 3]

Poruka ⇒ 1 0 1 0




Okvir kodne riječi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

# Primjer: generirajuća matrica za Hammingov kôd [7, 4, 3]

(1) Izbriši one stupce koji su na pozicijama paritetnih bitova
(2) Dobivenu matricu transponiraj
(3) Stupce transponirane matrice postavi na pozicije 1, 2, 4, 8, 16, …
(4) Ostatak stupaca popuni jediničnom matricom

1 2 4

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Generirajuća matrica Hammingovog koda

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

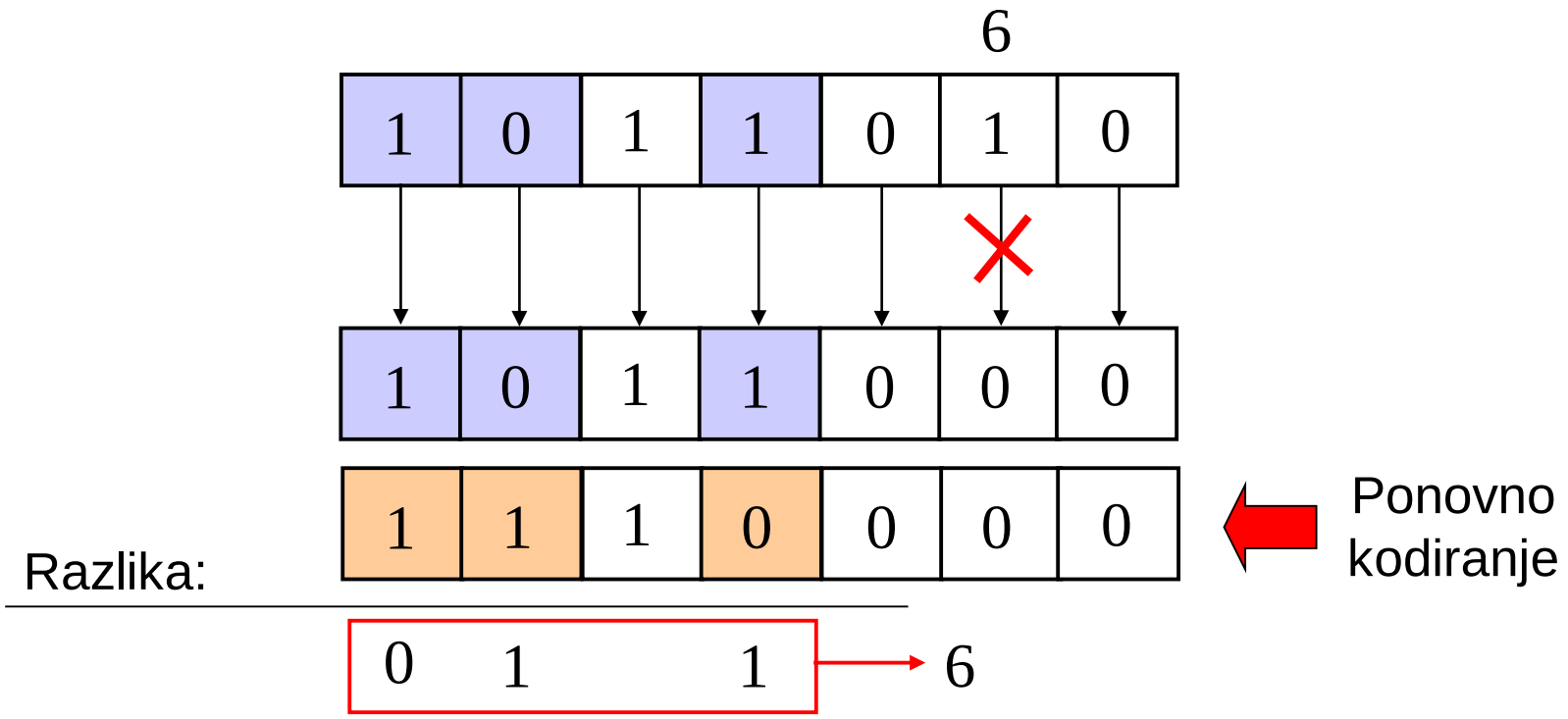
# Primjer: sindrom za Hammingov kôd [7, 4, 3]

Napomena: Vrijedi samo za standardni način formiranja Hammingovih riječi!

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

| **e** | S(**y**) | CJELOBROJNI EKVIVALENT |
|---|---|---|
| 1 0 0 0 0 0 0 | 1 0 0 | 1 |
| 0 1 0 0 0 0 0 | 0 1 0 | 2 |
| 0 0 1 0 0 0 0 | 1 1 0 | 3 |
| 0 0 0 1 0 0 0 | 0 0 1 | 4 |
| 0 0 0 0 1 0 0 | 1 0 1 | 5 |
| 0 0 0 0 0 1 0 | 0 1 1 | 6 |
| 0 0 0 0 0 0 1 | 1 1 1 | 7 |

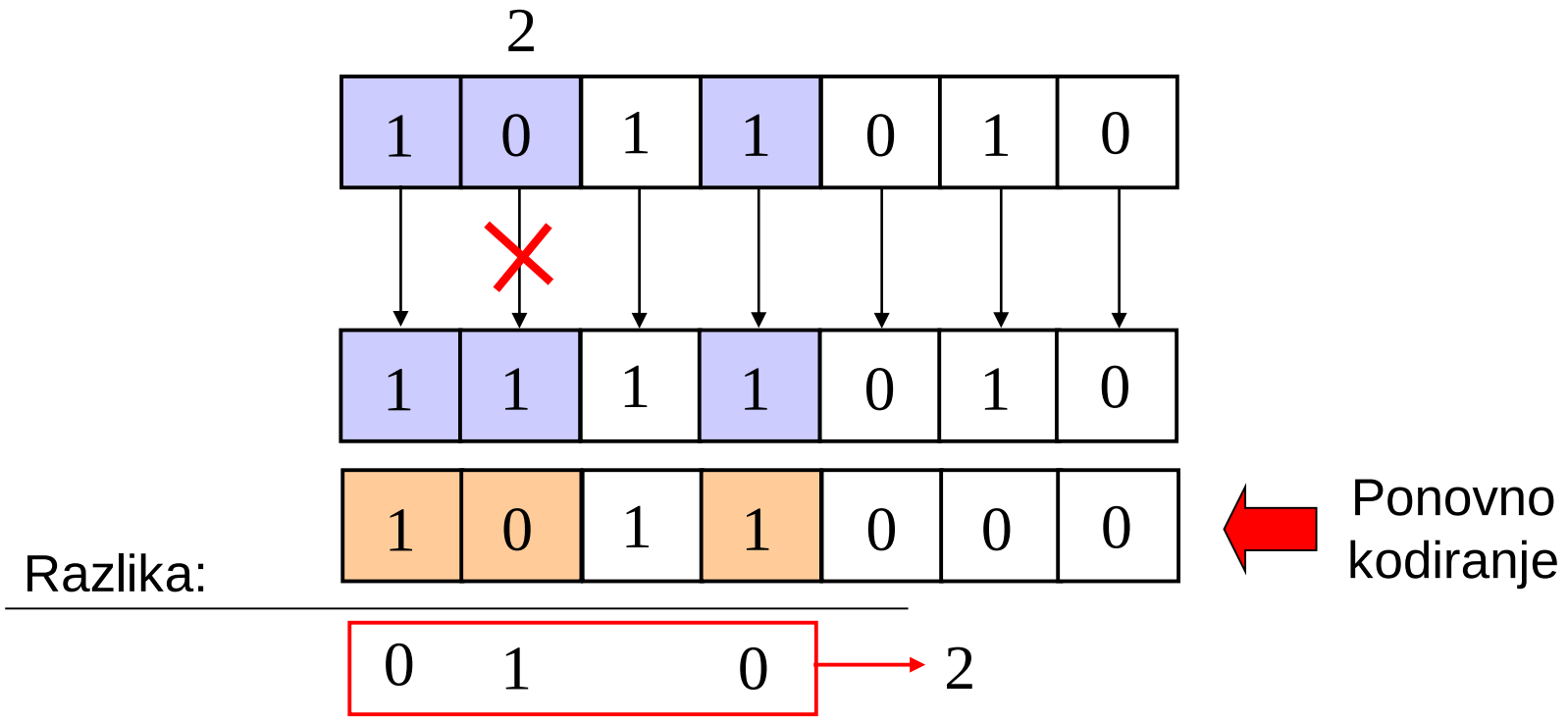
# Primjer: određivanje sindroma bez matrice provjere pariteta (1/2)




Pogreška je na poziciji br. 6, a ispravna kodna riječ

1 0 1 1 0 1 0

# Primjer: određivanje sindroma bez matrice provjere pariteta (2/2)



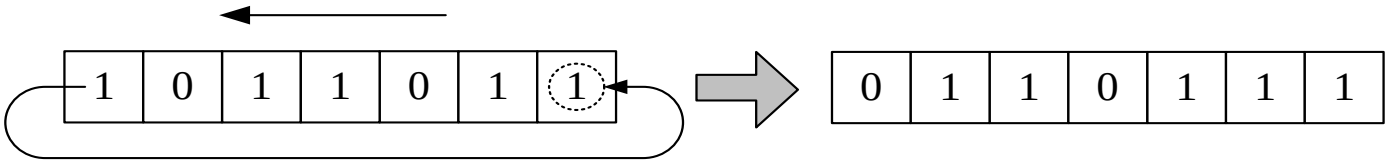

Pogreška je na poziciji br. 2, a ispravna kodna riječ

1 0 1 1 0 1 0

# *Ciklični kodovi*

# Definicija: ciklični kôd

***Ciklični kôd*:** *Blok kôd K je ciklični kôd ako je*:
- *linearan blok-kôd i*
- *ako bilo koji ciklični posmak kodne riječi iz K opet daje kodnu riječ iz K*.




Ako je 11110000 kodna riječ, onda su kodne riječi i

11100001
11000011
10000111
00001111
00011110
00111100
01111000

# Polinomski zapis kodne riječi

- Kodna riječ [$a_{n-1}$ $a_{n-2}$… $a_2$ $a_1$ $a_0$] cikličnog koda može se poistovjetiti s polinomom stupnja $n$ – 1:

$$\mathbf{a} = [a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0] \leftrightarrow \quad a(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

$a(x)$ ne promatramo kao funkciju, nego čisto kao način zapisa. Na primjer,

$$a_{n-1}\left(x^n - 1\right) + a_{n-2}x^{n-1} + \ldots + a_1x^2 + a_0x^1 + a_{n-1}x^0 \quad : \quad x^n - 1 = a_{n-1}$$

Koeficij
aritmeti

$$\underline{-a_{n-1}\left(x^n - 1\right)}$$

$$a_{n-2}x^{n-1} + \ldots + a_1x^2 + a_0x^1 + a_{n-1}x^0 \qquad \leftarrow \textit{ostatak nakon dijeljenja.}$$

$$= \quad a_{n-1}\left(x^n - 1\right) + a_{n-2}x^{n-1} + \ldots + a_1x^2 + a_0x^1 + a_{n-1}x^0.$$

Nad polinomima kodnih riječi vršimo operacije u aritmetici modulo $x^n$–1!
Zbrajanje polinoma odgovora zbrajanju vektora, a množenje s x odgovara cikličnom posmaku ulijevo.

# Primjer: ciklični posmak kodne riječi

- a= [ 1 0 1] – polinom je $a(x) = x^2 + 1$, duljina riječi $n = 3$

$$b'(x) = a(x) \cdot x = x^3 + x,$$

$$\begin{array}{rl} x^3 + x & : \; x^3 - 1 = 1 \\ \underline{-x^3 \quad +1} & \\ x+1 & \leftarrow \textit{ostatak nakon dijeljenja.} \end{array}$$

- **b** = [ 0 1 1 ] kodna riječ nastala cikličnim posmakom kodne riječi **a** ulijevo za jedno mjesto**!**

- Svaka kodna riječ duljine $n$ je polinom stupnja $n$ – 1 i nad njim sve operacije provodimo u aritmetici mod $x^n$ –1;
- Skup svih riječi u mod $x^n$ – 1 aritmetici označavamo s $R_n$;
- Ciklični kôd je neki podskup od $R_n$:

$$K \subset Rn$$

# Uvjeti za cikličan kôd

***Uvjeti za cikličan kôd***: *Kôd* $K \subset R_n$ *je cikličan kôd ako i samo ako K zadovoljava sljedeća dva uvjeta*:

- $\forall\ a(x), b(x) \in K$, *vrijedi* $a(x) + b(x) \in K$ (svojstvo linearnosti);
- $\forall\ a(x) \in K$ *i* $\forall\ r(x) \in R_n$, *vrijedi* $r(x) \cdot a(x) \bmod (x^n - 1) \in K$.

Kako dobiti sve kodne riječi nekog cikličkog koda?

- izaberi bilo koji polinom $f(x)$ najvećeg stupnja $n-1$;
- sve kodne riječi cikličnog koda $K$ dobit će se množenjem svih $r(x) \in R$ s $f(x)$;

Kaže se da je kôd $K$ generiran polinomom $f(x)$:

$$K \equiv \langle f(x) \rangle = \{ r(x) f(x) \mid r(x) \in R_n \}.$$

$f(x)$ je kodna riječ koda $K$!

# Primjer: generiranje cikličnog koda

- Polinom kojim se generira kôd *K*: $f(x) = x^2 + 1$
- $n$=3, broj polinoma u $R^n$ je $2^3 = 8$.

$$
\begin{array}{lcll}
(0x^2+0x+0) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 0x^2+0x+0 \quad [000] \\
(0x^2+0x+1) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 1x^2+0x+1 \quad [101] \\
(0x^2+1x+0) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 0x^2+1x+1 \quad [011] \\
(0x^2+1x+1) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 1x^2+1x+0 \quad [110] \\
(1x^2+0x+0) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 1x^2+1x+0 \quad [110] \\
(1x^2+0x+1) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 0x^2+1x+1 \quad [011] \\
(1x^2+1x+0) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 1x^2+0x+1 \quad [101] \\
(1x^2+1x+1) & \cdot & (x^2+1)(\mathrm{mod}\,(x^3-1)) & = \quad 0x^2+0x+0 \quad [000]
\end{array}
$$

$$
K = \begin{Bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

# Generirajući polinom cikličnog koda

***Generiranje cikličnog koda*:** *Neka je K ciklični kôd dimenzije veće od* 1, *podskup od* $R_n$.

- *Postoji jedinstven polinom* $g(x)$ *najmanjeg stupnja u K*.
- *Kôd K je generiran upravo polinomom* $g(x)$.
- $g(x)$ *je faktor polinoma* $x^n - 1$, *tj.* $x^n - 1 = g(x) \cdot q(x)$.

Polinom $g(x)$ koji zadovoljava ovo svojstvo nazivamo:

**Generirajući polinom cikličkog koda**

Primjer: $g(x)$ je jedan od faktora polinoma $x^{15} - 1$ :

$$x^{15} - 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Svaki faktor generira jedan mogući ciklički kôd, pa faktoriziranjem polinoma $x^{15} - 1$ praktički dobivamo 5 različitih cikličkih kodova s generirajućim polinomima:

$$g_1(x) = x + 1, \quad g_2(x) = x^2 + x + 1, \quad g_3(x) = x^4 + x + 1,$$
$$g_4(x) = x^4 + x^3 + 1, \quad g_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

# Generirajuća matrica cikličnog koda

***Generirajuća matrica cikličnog koda*:** *Neka je generirajući polinom cikličnog koda* $K \subset R_n$:

$$g(x) = g_r x^r + \ldots + g_2 x^2 + g_1 x + g_0.$$

*Onda je dimenzija koda* $k = n - r$ , *a generirajuća matrica koda je*:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_r & g_{r-1} & g_{r-2} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_r & g_{r-1} & g_{r-2} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_r & g_{r-1} & g_{r-2} & \cdots & g_1 & g_0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_r & g_{r-1} & g_{r-2} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}.$$

- Broj redaka matrice **G** odgovara dimenziji koda - $k = n - r$;
- Broj stupaca matrice **G** odgovara duljini kodne riječi – $n$;
- Što je stupanj generirajućeg polinoma $g(x)$ veći, dimenzija koda je manja!

# Primjer: generirajuća matrica cikličnog koda ($n = 5$)

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad x^5 - 1 = (x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Potencijalni generirajući polinomi:

$g_1(x) = x + 1$ $\Leftarrow$ $r = 1, k = 5 - 1 = 4$

$g_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\Leftarrow$ $r = 4, k = 5 - 4 = 1$

$g_1(x) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ($k = 4$, $n = 5$)

$g_2(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]$

# Faktorizacije nekih polinoma oblika $x^n - 1$

| $n$ | aritmetika | *faktorizacija u aritmetici modulo 2* |
|---|---|---|
| 1 | $x^1-1$ | $x+1$ |
| 2 | $x^2-1$ | $(x+1)^2$ |
| 3 | $x^3-1$ | $(x+1)(x^2+x+1)$ |
| 5 | $x^5-1$ | $(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ |
| 7 | $x^7-1$ | $(x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$ |
| 9 | $x^9-1$ | $(x+1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$ |
| 11 | $x^{11}-1$ | $(x+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ |
| 13 | $x^{13}-1$ | $(x+1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ |
| 15 | $x^{15}-1$ | $(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ |
| 17 | $x^{17}-1$ | $(x+1)(x^8+x^5+x^4+x^3+1)(x^8+x^7+x^6+x^4+x^2+x+1)$ |
| 19 | $x^{19}-1$ | $(x+1)(x^{18}+x^{17}+x^{16}+\ldots+x^4+x^3+x^2+x+1)$ |

# Standardni oblik generirajuće matrice

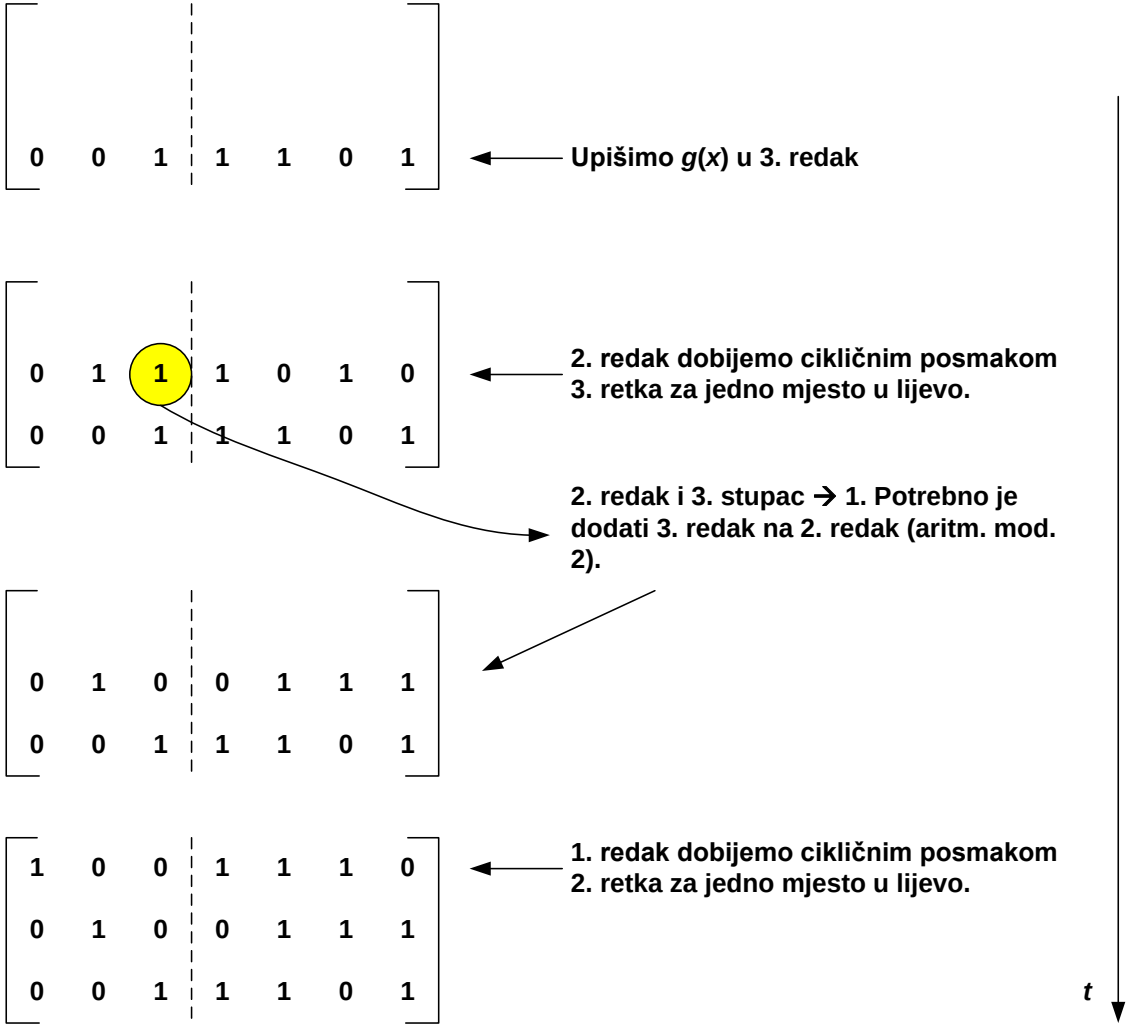
- Traženi oblik matrice **G**: $\mathbf{G} = \left[\mathbf{I}_k \mid \mathbf{A}\right].$

ALGORITAM:

- I. Upiši $g(x)$ u binarnom obliku u $k$-ti redak.
- II. ($k$ - 1)-vi redak dobije se cikličnim posmakom $k$-tog retka za jedno mjesto u lijevo. Ovo odgovara operaciji $xg(x)$.
- $k$-ti stupac mora u ($k$ - 1)-om retku imati nulu kako bi imali standardni oblik matrice **G**.
  - Ako je 1 $\rightarrow$ na ($k$ - 1)-i redak treba dodati $k$-ti redak (aritm. mod. 2);
- III. Za ($k$ - 2) redak treba primijeniti postupak iz točke II.
  - Napraviti ciklični posmak ($k$ - 1)-og retka za jedno mjesto u lijevo.
  - Ako $k$–ti stupac u ($k$ - 2)-om retku ima 1 $\rightarrow$ dodaj na ($k$ - 2)-i redak $k$-ti redak (aritm. mod. 2);
- Ponavljaj algoritam za svaki sljedeći redak sve dok se ne popuni matrica **G**.

# Primjer: standardni oblik generirajuće matrice **G**

- Neka je $g(x) = x^4+x^3+x^2+1$ i neka je dan ciklični kôd $[n, k] = [7, 3]$.



# Matrica provjere pariteta cikličnog koda

***Polinom za provjeru pariteta*:** *Neka je K ciklični kôd duljine n i dimenzije k* [*n*,*k*] *s generirajućim polinomom g*(*x*)*. Neka je h*(*x*) *polinom koji zadovoljava jednadžbu*:

$$x^n - 1 = g(x) \cdot h(x).$$

*h*(*x*) *se zove* ***polinom za provjeru pariteta*** *cikličnog koda K*.

***Matrica provjere pariteta cikličnog koda:*** *Neka je* $K \subset R_n$ *ciklični kôd duljine n i dimenzije k s generirajućim polinomom g(x) i polinomom za provjeru pariteta*

$$h(x) = h_k x^k + \ldots + h_2 x^2 + h_1 x + h_0.$$

- *Bilo koji polinom c*(*x*) *koda K zadovoljava jednakost c*(*x*)·*h*(*x*) = 0.
- *Paritetna matrica koda K je*:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} & h_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} & h_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} & h_k & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{k-1} & h_k \end{bmatrix}.$$

# Primjer: matrica provjere pariteta cikličnog koda ($n = 7$)

Promatramo ciklički kod $n = 7$: $g(x) = x^3 + x^2 + 1$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

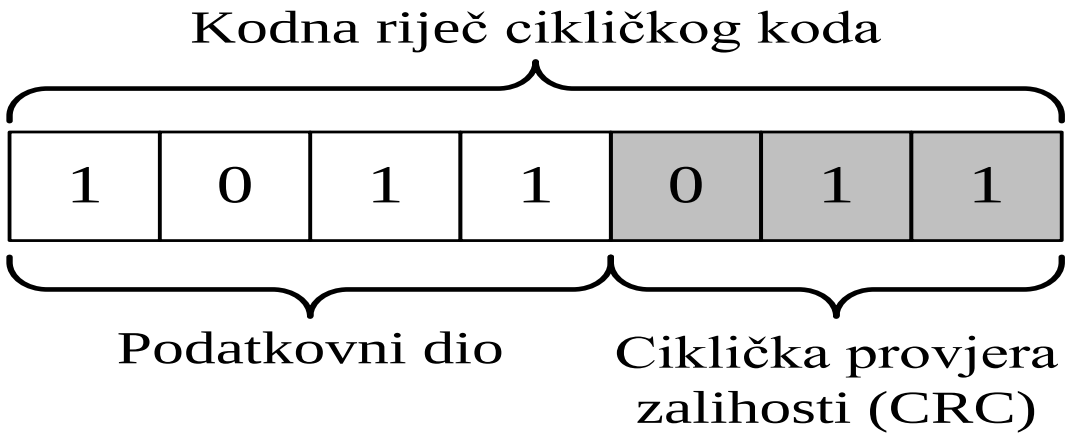
$$x^7 - 1 = (x+1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad h(x) = \underbrace{1 + x^2 + x^3 + x^4}_{1\ 0\ 1\ 1\ 1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad r = 3$$

$$\longleftarrow \quad n = 7 \quad \longrightarrow$$

# Implementacija kodera cikličnog koda (1/2)

- Duljina kodne riječi može biti iznimno velika!
- Generirajuća i paritetna matrica imaju prevelike dimenzije za praktičnu implementaciju.
- Želimo kodnu riječ koja je sistematična tako da odmah možemo razlučiti zaštitne bitove od bitova kodirane poruke:




Rješenje:

- Cikličku provjeru zalihosti izračunati na osnovu podatkovnog dijela!

# Implementacija kodera cikličnog koda (2/2)

- $d(x)$ – polinom kodirane poruke: [ 1 0 1 1 1 ] $\rightarrow d(x) = x^4+x^2+x+1$
- $d(x)$ se može pomnožiti s $x^r$, gdje je $r$ stupanj generirajućeg polinoma:

$$d(x) \cdot x^r = g(x)q(x) + r(x).$$

ostatak nakon dijeljenja s $g(x)$

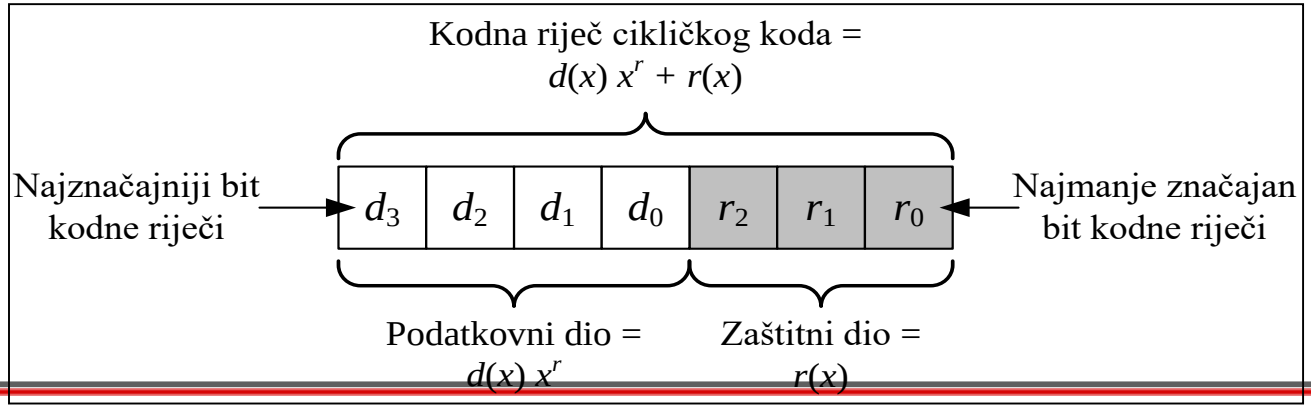
generirajući polinom

kvocijent

Svaki polinom pomnožen s $g(x)$ u aritmetici $\bmod x^n - 1$ je neka kodna riječ $c(x)$ koda $K$, pa je i $g(x) \cdot q(x)$ neka kodna riječ. Stoga se bilo koja kodna riječ može dobiti kao zbroj:

$$c(x) = g(x)q(x) = d(x) \cdot x^r + r(x),$$

$$r(x) = d(x) \cdot x^r \bmod [g(x)].$$



# Primjer: Generiranje CRC-a

- Poruka je: $\mathbf{d} = [\,1\;0\;1\;0\,]$, tj. $d(x) = x^3 + x$,
- Generirajući polinom: $g(x) = x^3 + x + 1$ – $[\,1\;0\;1\;1\,]$,
- Umnožak: $d(x)\cdot x^3 = x^6 + x^4$ – $[\,1\;0\;1\;0\;0\;0\;0\,]$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \overbrace{1\;0\;1\;0}^{d(x)}\,0\,0\,0 : \overbrace{1\;0\;1\;1}^{g(x)} = \quad 1\;0\;0\;1 \\
- & 1\;0\;1\;1 \\
\hline
 & 0\;0\;1 \\
- & 0\;0\;0\;0 \\
\hline
 & 0\;1\;0 \\
- & 0\;0\;0\;0 \\
\hline
 & 1\;0\;0 \\
- & 1\;0\;1\;1 \\
\hline
 & \boxed{0\;1\;1}
\end{array}
$$

ostatak nakon dijeljenja

# Primjer: Dijeljenje polinoma - Generiranje CRC-a

$q(x) = 1\ 0\ 0\ 1$

$g_3\ g_2\ g_1\ g_0$

$1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 : 1\ 0\ 1\ 1$

$-\ 1\ 0\ 1\ 1$

(1) $R_3 = R_2 \oplus (R_3 \cdot g_2)$

(2) $R_2 = R_1 \oplus (R_3 \cdot g_1)$

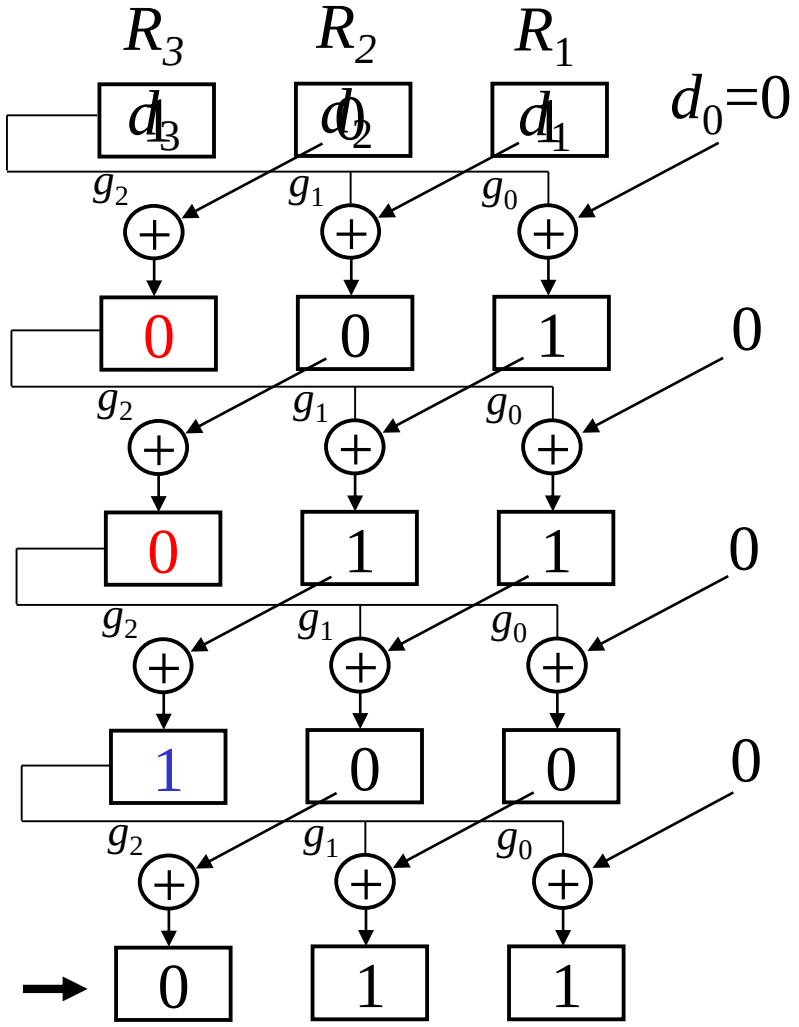
(3) $R_1 = \text{ulazni bit} \oplus (R_3 \cdot g_0)$,

$1\ 0\ 0$

$-\ 1\ 0\ 1\ 1$

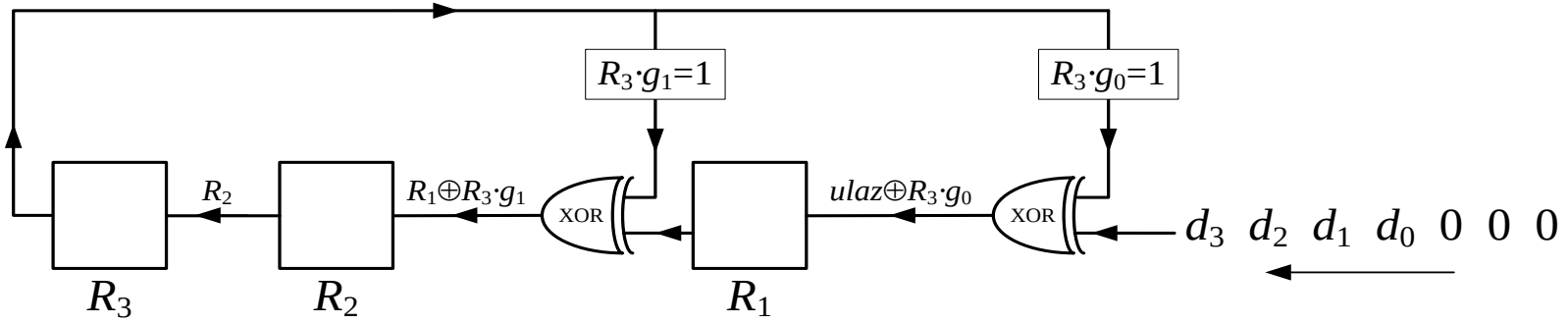
$0\ 1\ 1$

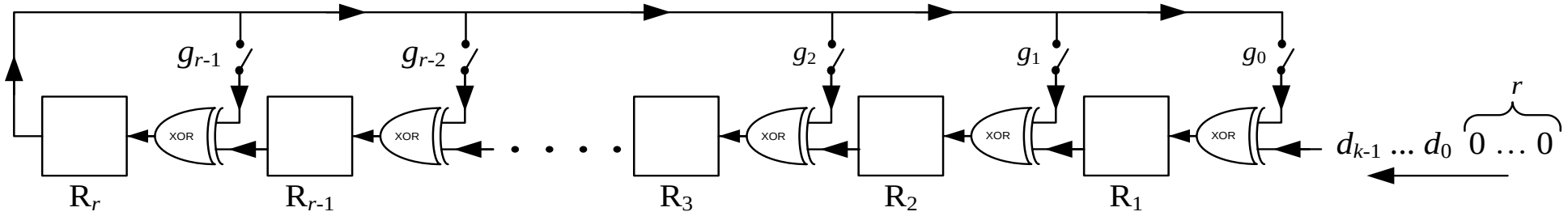
ostatak nakon dijeljenja



# Primjer: Sklop za generiranje CRC-a

$$(1)\quad R_3 = R_2 \oplus (R_3 \cdot g_2)$$
$$(2)\quad R_2 = R_1 \oplus (R_3 \cdot g_1)$$
$$(3)\quad R_1 = \text{ulazni bit} \oplus (R_3 \cdot g_0),$$



# Implementacija dekodera (1/4)

- Proračun sindroma ima preveliku složenost zbog velike duljine kodnih riječi.
- Temeljno pitanje: Možemo li sindrom izračunati principom sličnim izračunu zalihosnog dijela CRC?
- Smisao sindroma: *Svaka kodna riječ na kojoj je nastupila pogreška na istoj poziciji mora imati isti sindrom*!

| **e** | | | | S(**y**) |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 0 | 1 1 1 0 0 | 0 0 1 1 1 | 1 1 0 1 1 | 0 0 0 |
| 0 0 0 0 1 | 1 1 1 0 1 | 0 0 1 1 0 | 1 1 0 1 0 | 0 0 1 |
| 0 0 0 1 0 | 1 1 1 1 0 | 0 0 1 0 1 | 1 1 0 0 1 | 0 1 0 |
| 0 0 1 0 0 | 1 1 0 0 0 | 0 0 0 1 1 | 1 1 1 1 1 | 1 0 0 |
| 0 1 0 0 0 | 1 0 1 0 0 | 0 1 1 1 1 | 1 0 0 1 1 | 1 0 1 |
| 1 0 0 0 0 | 0 1 1 0 0 | 1 0 1 1 1 | 0 1 0 1 1 | 1 1 0 |

# Implementacija dekodera (2/4)

$e(x)$ je polinom pogreške: $\mathbf{e} = [\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ ]$, $e(x) = x^4 + x + 1$

Primljena kodna riječ: $y(x) = c(x) + e(x).$

Što dobivamo funkcijom $S[y(x)] = x^r \cdot y(x) \ mod\ g(x)$ ?

$$\begin{aligned} S[y(x)] &= x^r y(x) \ mod\ g(x) \\ &= x^r [c(x) + e(x)] \ mod\ g(x) \\ &= x^r c(x) \ mod\ g(x) + x^r e(x) \ mod\ g(x) \\ &= S[c(x)] + S[e(x)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(x) &= g(x)q(x) \ \ | \cdot x^r \ \Rightarrow \\ c(x)x^r &= g(x)q(x)x^r. \end{aligned}$$

Ako $c(x) \cdot x^r$ podijelimo s $g(x)$ ostatak je 0!

$$S[c(x)] = x^r \cdot c(x) \ mod\ g(x) = 0.$$

# Implementacija dekodera (3/4)

Primjenom funkcije $S[y(x)] = x^r \cdot y(x) \ mod \ g(x)$

na primljenu kodnu riječ $y(x)$ dobivamo:

$$S[y(x)] = S[c(x)] + S[e(x)] = S[e(x)],$$

$S[y(x)]$ za kodne riječi s istom pogreškom uvijek daje isti rezultat!

$S[y(x)]$ je funkcija za računanje sindroma primljene kodne riječi!!!

$$S[y(x)] = x^r \cdot y(x) \ \mathrm{mod}\,[g(x)]$$

$$r(x) = d(x) \cdot x^r \ \mathrm{mod}[g(x)].$$

**JOŠ VAŽNIJE:**
Sindrom se određuje na IDENTIČAN način kao i zaštitni dio kodne riječi.
Slijedi da je i sklop za računanje sindroma jednak onome za izračunavanje CRC-a!

# Implementacija dekodera (4/4)

Primjer dekodera za slučaj koda (7, 4, 3) s generirajućim polinomom: $g(x) = x^3 + x + 1$

Želimo detektirati pogrešku na 4. bitu – $e(x)=x^3$

$$S[y(x)] = S[e(x)] = x^2 + 1$$

$$q = R_3 \cdot \overline{R_2} \cdot R_1$$

Tablica sindroma

| $e(x)$ | $S[e(x)]$ |
|---|---|
| $1$ | $x+1$ |
| $x$ | $x^2+x$ |
| $x^2$ | $x^2+x+1$ |
| $x^3$ | $x^2+1$ |
| $x^4$ | $1$ |
| $x^5$ | $x$ |
| $x^6$ | $x^2$ |