Matematička analiza 2 - predavanja

POGLAVLJE 6: *Diferencijalne jednadžbe prvog reda*

Tomislav Burić, Domagoj Kovačević, Lana Horvat Dmitrović,
Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić,
Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko

VERZIJA OD 12. SVIBNJA 2022.

PUBLISHED BY FER, WWW.FER.UNIZG.HR

Sadržaj

6. Diferencijalne jednadžbe prvog reda -

Ključni pojmovi: linearna diferencijalna jednadžba prvog reda 15, Bernoullijeva diferencijalna jednadžba 21, Riccatijeva diferencijalna jednadžba 24, diferencijalna jednadžba homogenog stupnja 27, ortogonalne trajektorije 34, egzaktna diferencijalna jednadžba 40, Eulerov multiplikator 44, egzistencija rješenja 48, jedinstvenost rješenja 49, Lagrangeova diferencijalna jednadžba 56, Clairautova diferencijalna jednadžba 59, Eulerova metoda za numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe 61

Dijelovi teksta pisani malim slovima, kao što su "Detalji", "Dodatak" i "Iz povijesti" ne treba učiti za ispit, budući da služe za informiranje i neobavezno proširivanje znanja.

DETALJI

Iza svakog primjera, koji je potpuno riješen, postoje vježbe za samostalni rad. Iza svake vježbe je napisano njeno rješenje bez postupka rješavanja, a za posebno odabrane vježbe postoji i link na njenu video verziju s postupkom rješavanja, oznaka: "YT-VIDEO"

6.1 Uvod

Kod algebarske linearne jednadžbe $2x-1=0$, kvadratne jednadžbe $x^2+x+1=0$, eksponencijalne jednadžbe $e^{2x}-e^x+3=0$, trigonometrijske jednadžbe $2\sin(4x)+1=0$ ili logaritamske jednadžbe $\ln(3x+1)=5$, nepoznata varijabla koju tražimo je realni broj x. Za razliku od toga, u *diferencijalnoj jednadžbi prvog reda*, koju općenito zapisujemo u jednom od sljedećih oblika:

$$\boxed{y'=f(x,y),\quad P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad \text{ili} \quad F(x,y,y')=0,}$$

nepoznata varijabla koju tražimo je realna funkcija $y = y(x)$, gdje je

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Maksimalan red derivacije koji se pojavljuje u diferencijalnoj jednadžbi prvog reda je 1.

Postoje mnogi tipovi diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Tip je karakteriziran nekim njenim svojstvom, koje je često naglašeno u njenom imenu. Na primjer:

- $y' + 2xy = x^2 + 1$ je *linearna diferencijalna jednadžba prvog reda*;
- $y' - x^2 y = xy^3$ je *Bernoullijeva diferencijalna jednadžba*;
- $(x^4 + 5xy^3)dx - x^2y^2dy = 0$ je *diferencijalna jednadžba homogenog stupnja*;
- $e^x \sin(y)dx + (e^x + 3)\cos(y)dy = 0$ je *egzaktna diferencijalna jednadžba*.

U poglavlju 11 se promatraju diferencijalne jednadžbe drugog i višeg reda. U ovakvim jednadžbama, maksimalan red derivacije koji se u njima pojavljuje je jednak ili veći od 2.

Počev od 17. stoljeća pa do danas, mnogi vrijedni problemi u znanosti i tehnici su riješeni i rješavaju se pomoću diferencijalnih jednadžbi, koje predstavljaju njihove matematičke modele. Za neke od njih pogledati u 6.5.3.

6.1.1 Geometrija rješenja. Diferencijalna jednadžba familije krivulja

Svaka funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava jednakost $y' = f(x,y)$ (ili $F(x,y,y') = 0$) je *rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' = f(x,y)$ (odnosno $F(x,y,y') = 0$). Ako rješenje $y(x)$ dobivamo općim postupkom integriranja diferencijalne jednadžbe, koje zbog neodređenog integrala mora sadržavati neodređenu konstantu $c \in \mathbb{R}$, tada je $y(x)$ *opće rješenje*. Ako je rješenje $y(x)$ konkretna funkcija koja ne sadrži neodređenu konstantu $c \in \mathbb{R}$, tada je $y(x)$ jedno konkretno rješenje, takozvano *partikularno rješenje*. Na primjer:

• funkcija $y(x) = e^x$ je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = e^x$, koje (usput budi bolje rečeno) zadovoljava uvjet $y(0) = 1$;
• familija funkcija $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ je opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$;
• funkcija $y(x) = \sin x$ je partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $(y')^2 - 1 + y^2 = 0$, koje zadovoljava uvjet $y(0) = 0$.

Problem 6.1 *Što predstavljaju rješenja diferencijalne jednadžbe prvog reda u geometrijskom smislu? Kako od zadane familije krivulja (rješenja) doći do njene diferencijalne jednadžbe?*

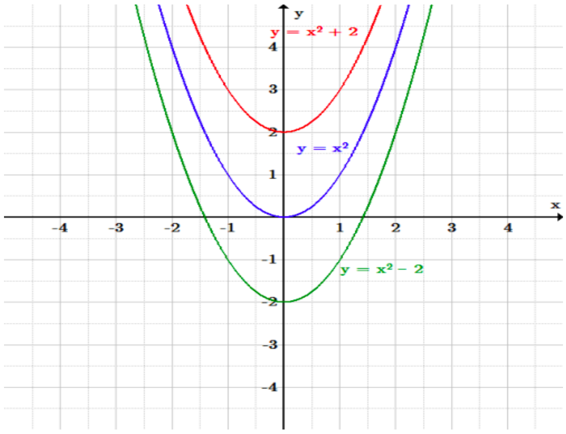
Znamo da je graf funkcije $y = f(x)$ ravninska krivulja, koja je definirana kao skup točaka u ravnini:

$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Na primjer, graf kvadratne funkcije $y = x^2$ je jedna parabola u ravnini. Međutim, graf familije kvadratnih funkcija $y = x^2 + c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan parametar, definira skup međusobno sličnih parabola, tzv. familiju parabola, vidi Sliku 6.1 dolje. Ako deriviramo obje strane u jednakosti $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, tada dobivamo da ova familija parabola zadovoljava diferencijalnu jednažbu $y' = 2x$ odnosno parabole $y = x^2 + c$ su rješenja ove diferencijalne jednadžbe.

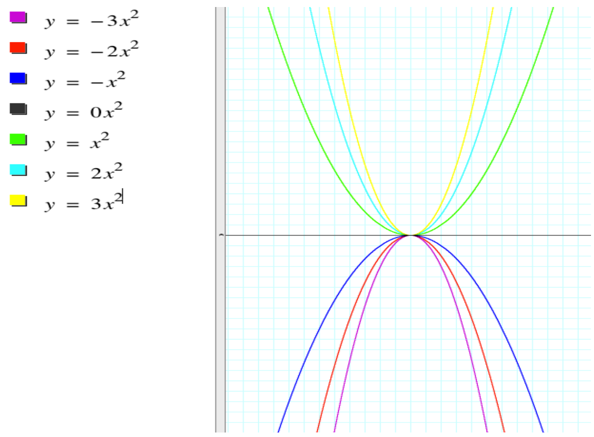
Definicija 6.1.1 *Jednoparametarska familija krivulja* je skup krivulja u ravnini čije se jednadžbe razlikuju samo za vrijednosti neke konstane (parametra) $c \in \mathbb{R}$. Najčešće su to međusobno slične krivulje. Pri tome, dvije krivulje su slične ako se jedna iz druge dobije transformacijama sličnosti, kao što su translacija, rotacija, dilatacija, refleksija (sjeti se Linearne algebre). ■

Po ovoj definiciji, graf od $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ je familija parabola, koja je nastala translacijom osnovne parabole $y = x^2$ za konstantu c u smjeru osi Oy.



Slika 6.1: familija parabola $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$

■ **Primjer 6.1** Znamo iz Matan 1 da grafovi familije funkcija $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$ u geometrijskom smislu definiraju familiju parabola za $c \neq 0$ i pravac za $c = 0$, kao na slici:



Slika 6.2: familija krivulja $y = cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Jedan način da iz familije $y = cx^2$ eliminiramo neodređenu konstantu c je sljedeći:
• prvo deriviramo obje strane u jednakosti $y = cx^2$, iz čega dobivamo: $y' = 2cx$;
• potom iz ove jednakosti izrazimo $c = y'/2x$ pa ovakvu c vratimo u početnu familiju $y = cx^2$, čime smo dobili:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad \text{odnosno} \quad y' = \frac{2y}{x}.$$

Prema tome, $y' = 2y/x$ je *diferencijalna jednadžba zadane familije* $y = cx^2$. Lako se provjeri da vrijedi i obrat: $y = cx^2$ su *rješenja diferencijalne jednadžbe* $y' = 2y/x$. ■

■ **Primjer 6.2** Zadana je familija pravaca $y(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Ako deriviramo ovu jednakost po varijabli x, tada dobivamo $y' = c$ iz čega slijedi $c = y'$. Ako sada c uvrstimo u početnu jednakost, tada ćemo eliminirati konstantu c pa dobivamo $y = xy'$ odnosno dobili smo diferencijalnu jednadžbu $y' = y/x$ čije je rješenje familija parabola $y(x) = cx$. ■

■ **Primjer 6.3** Odredimo diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y') = 0$ čija su rješenja zadana familijom parabola $y(x) = x^2 - cx$, $c \in \mathbb{R}$. Postupak provodimo u nekoliko koraka:
1) ako deriviramo po x jednakost $y = x^2 - cx$, tada dobivamo: $y' = 2x - c$;
2) ako izrazimo c iz dobivene jednakosti, tada dobivamo: $c = 2x - y'$ te ako uvrstimo prethodno dobiveni c u familiju parabola $y = x^2 - cx$, tada dobivamo $y = x^2 - (2x - y')x$ odnosno $y' = y/x + x$ je tražena diferencijalna jednadžba. ■

U prethodna tri primjera smo intuitivno koristili pravilo, koje se može generalno formulirati na sljedeći način:

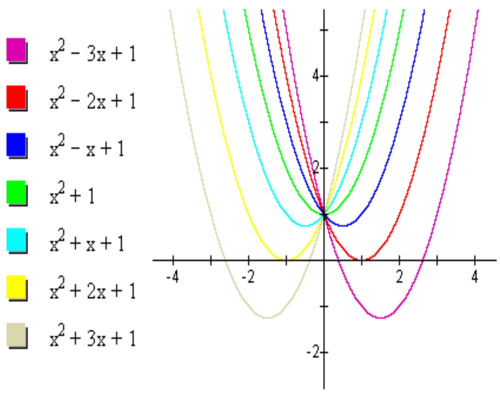
Pravilo 1 Postupak traženja diferencijalne jednadžbe iz zadane familije krivulja $\Phi(x,y,c) = 0$

1: Deriviramo po x jednadžbu $\Phi(x,y,c) = 0$ (derivacija složene funkcije više varijabli):

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y,c) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y,c) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,c)y'(x) = 0;$$

2: Iz prethodne jednakosti izrazimo c kao funkciju od x, y i y' te ga uvrstimo u $\Phi(x,y,c) = 0$; na taj način smo eliminirali konstantu c i dobili pripadnu diferencijalnu jednadžbu $F(x,y,y') = 0$.

Vježba 6.1 Znamo da grafovi familije funkcija $y = x^2 - cx + 1$, $c \in \mathbb{R}$ definiraju u geometrijskom smislu familiju parabola kao na slici:



Slika 6.3: familija parabola $y = x^2 - cx + 1$, $c \in \mathbb{R}$.

Slično kao u Primjeru 6.2, odrediti diferencijalnu jednadžbu ove familije parabola.

Rješenja za Vježbu 6.1 : $y' - y/x = x - 1/x$.

Vježba 6.2 Primijetimo da u geometrijskom smislu $y^2 - 2x + cx^2 = 0$, $c \in \mathbb{R}$ vrijedi:
- ako je $c \neq 0$, to je familija pomaknutih elipsa $c^2(x - \frac{1}{c})^2 + cy^2 = 1$;
- ako je $c = 0$, to je parabola $y^2 = 2x$.

Odrediti diferencijalnu jednadžbu ove familije krivulja.

Rješenja za Vježbu 6.2 : $yy' - \frac{1}{x}y^2 + 1 = 0$.

YT-VIDEO za Vježbu 6.2. (ako želite visoku kvalitetu slike kao što je to na originalu, onda na ekranu videa kliknite gdje piše "settings" pa "Quality" i postavite na barem 720p).

Vježba 6.3 Naći diferencijalnu jednadžbu zadane familije krivulja:

1. $y = cx^3$; **2.** $cy^2 + x^2 = 2y$; **3.** $x^3 = cx + y^2$.

Rješenja za Vježbu 6.3 : **1.** $xy' - 3y = 0$; **2.** $(x^2 - y)y' = xy$; **3.** $2xyy' - y^2 = 2x^3$

YT-VIDEO za Vježbu 6.3.3.

DETALJI Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu: Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 1. dio (dio između 00:00 i 17:48).

6.1.2 Separacija varijabli i direktna integracija

Najjednostavnija metoda za rješavanje diferencijalne jednadžbe prvog reda je takozvana separacije varijabli u kombinaciji s direktnom integracijom. Pod *separacijom varijabli* u diferencijalnoj jednadžbi podrazumijevamo postupak razdvajanja varijabli, ako je to moguće, i to u smislu da varijable y i dy stavimo na lijevu stranu, a varijable x i dx na desnu stranu zadane diferencijalne jednadžbe.

■ **Primjer 6.4** Na primjer:

$$x^2yy' - y^2x = 0 \implies x^2y\frac{dy}{dx} = y^2x \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \text{ uz uvjet } y \neq 0.$$

Nakon što je izvršena separacija varijabli u diferencijalnoj jednadžbi, dobivena jednakost se može direktno integrirati, tako što se svaka strana jednadžbe integrira po svojoj varijabli:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c \implies \ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\implies e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} = e^c e^{\ln|x|}$$

(vidi DETALJI dolje)

$$\implies |y(x)| = e^c|x| \implies y(x) = Cx,$$

gdje je $C = \pm e^c \in \mathbb{R}$ proizvoljna realna konstanta, dobivena kao posljedica neodređenog integrala. Na ovaj način smo riješili diferencijalnu jednadžbu $x^2yy' - y^2x = 0$, a sva njena rješenja (opće rješenje) zapisujemo u formi: $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.

Primijetimo da je $y(x)=0$ isto tako rješenje ove jednadžbe, te je ono sadržano u dobivenom općem rješenju specijalno za $C=0$.

Dobivena rješenja možemo provjeriti tako da funkciju $y=Cx$ direktno uvrstimo u jednadžbu $x^2yy'-y^2x=0$. Zaista, iz $y=Cx$ slijedi $y'=C$, odnosno

$$x^2yy'-y^2x=x^2CxC-C^2x^2x=C^2x^3-C^2x^3=0.$$

■

Napomena 6.1 Primijetimo da za razliku od jednadžbe iz prethodnog primjera: $x^2yy'-y^2x=0$, u diferencijalnoj jednadžbi $x^2yy'-y^2x=1$ se ne može izvršiti separacija varijabli. ■

DETALJI

Funkcionalna jednakost

$$e^{\ln x}=x,\quad \forall x>0, \tag{6.1}$$

je poseban slučaj funkcionalne tvrdnje:

$$f(f^{-1}(x))=x,\quad \forall x\in\mathscr{D}(f^{-1}),\quad \text{specijalno za } f(x)=e^x \text{ i } f(x)=\ln x.$$

Algebarska jednakost:

$$e^{\ln|x|}=|x|,\quad \forall x\neq 0, \tag{6.2}$$

nije funkcionalna jednakost, jer fukcija $f(x)=\ln|x|$ nije injekcija na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pa samim time ne može biti niti inverzna funkcije neke funkcije. Jednakost (6.2) se pokazuje pomoću (6.1), odvajanjem na dva funkcionalna podslučaja, kao što slijedi:

$$e^{\ln|x|}=\left\{\begin{matrix} e^{\ln x}=x, & \text{za } x>0 \\ e^{\ln(-x)}=-x, & \text{za } x<0\end{matrix}\right\}=|x|.$$

Nerijetko se zbog jednostavnije riješivosti određene diferencijalne jednadžbe u (6.2) prelazi na $x>0$ i na taj način koristimo:

$$e^{\ln|x|}=x,\quad \forall x>0,$$

bez naglašavanja uvjeta $x>0$. Na primjer,

$$y(x)=\int\frac{1}{x^3}e^{\ln|x|}dx=\int\frac{1}{x^3}xdx=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C.$$

Na ovaj praktičan način smo suzili domenu rješenja $y(x)$ u cilju jednostavnijeg rješavanja pripadne diferencijalne jednadžbe. To se isto radi i sa kodomenom rješenja $y(x)$, kada se u integralima poput ovog na desnoj strani pojavljuje y umjesto x.

■ **Primjer 6.5** Riješimo diferencijalnu jednadžbu: $2x^2yy'+y^2=3$.

1. Separacija varijabli:

$$2x^2yy'+y^2=3\implies\frac{ydy}{3-y^2}=\frac{dx}{2x^2},\quad y^2-3\neq 0.$$

2. Direktna integracija:

$$\frac{ydy}{y^2-3}=-\frac{dx}{2x^2}\implies\int\frac{ydy}{y^2-3}=-\int\frac{dx}{2x^2}+c\implies\frac{1}{2}\ln|y^2-3|=\frac{1}{2x}+c$$

$$\implies \ln|y^2-3| = \frac{1}{x} + 2c \implies y^2 - 3 = Ce^{1/x},$$

gdje je $C = \pm e^{2c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljna konstanta. Prema tome, traženo opće rješenje je zapisano u implicitnom obliku: $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$.

Primijetimo da za $C = 0$ dobivamo $y^2 - 3 = 0$ odnosno $y(x) = \pm\sqrt{3}$, što su isto tako dva konkretna rješenja ove jednadžbe, koja provjeravamo direktnim uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu. ■

■ **Primjer 6.6** Riješimo diferencijalnu jednadžbu: $xydx + (x+1)dy = 0$.
1. Separacija varijabli:

$$xydx + (x+1)dy = 0 \implies \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}\ , \ \ y \neq 0.$$

2. Direktna integracija:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1} \implies \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x+1} + c \implies \ln|y| = -x + \ln|x+1| + c$$
$$\implies y = C(x+1)e^{-x},$$

gdje je $C = \pm e^{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ proizvoljna konstanta u općem rješenju: $y = C(x+1)e^{-x}$.

Primijetimo da za $C = 0$ dobivamo $y(x) = 0$ što je isto tako jedno konkretno rješenje ove jednadžbe, koje provjeravamo direktnim uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu. ■

U prethodnim primjerima smo intuitivno koristili pravilo, koje se može generalno formulirati na sljedeći način:

Pravilo 2 Kombinacija separacije varijabli i direktne integracije

1: Razdvajanjem varijabli u općenitoj diferencijalnoj jednadžbi $F(x,y,y') = 0$, ako je to moguće, dobivamo jednakost: $P(y)dy = Q(x)dx$.

2: Direktnom integracijom jednakosti $P(y)dy = Q(x)dx$ dobivamo:

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx + c,$$

što predstavlja rješenje od $F(x,y,y') = 0$.

DA–NE

Moželi se ili ne u sljedećim diferencijalnim jednadžbama izvršiti separacija varijabli x i y?

1. $y' + 2y = x^2$;	**DA**	**NE**
2. $2y'y = x^2$;	**DA**	**NE**
3. $y' - 2y = x^2$;	**DA**	**NE**
4. $2y'/y = x^2$;	**DA**	**NE**
5. $y' + 2xy = xy^3$;	**DA**	**NE**
6. $y' + 2y = xy^3$.	**DA**	**NE**

Dodatak

Pomoću separacije varijabli i diretkne integracije diferencijalne jednadžbe, dokazat ćemo poznatu Eulerovu formulu, koju smo koristili u zimskom semestru u gradivu Matana 1:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Označimo sa $y(x) = \cos x + i\sin x$. Budući da je $i^2 = -1$, lako se provjeri da ova funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu: $y' = iy$ i početni uvjet $y(0) = 1$, koju rješavamo separacijom varijabli:

$$y' = iy \implies \frac{dy}{y} = i dx \implies y(x) = ce^{ix}.$$

Iz uvjeta $y(0) = 1$ slijedi $c = 1$, pa smo dokazali da je $y(x) = e^{ix}$. Q.E.D.

Vježba 6.4 Riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe separacijom varijabli i direktnom integracijom:

1. $\frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y^2}$; **2.** $\frac{y'}{x+1} = \frac{x}{2y+4}$; **3.** $x^3y^2y' - y^3 = 5$;

4. $y' - xy^2 = 2xy$; **5.** $y' = 10^{x+y}$; **6.** $xydy - \sqrt{y^2+1}dx = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.4 :

1. $\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c$; **2.** $y^2 + 4y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$; **3.** $y(x) = \sqrt[3]{ce^{-3/(2x^2)} - 5}$;

4. $\frac{y}{y+2} = ce^{x^2}$, $y = -2$; **5.** $y = -\log_{10}(c - 10^x)$; **6.** $c + \sqrt{y^2+1} = \ln|x|$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.4.4.; **za Vježbu** 6.4.5.; **za Vježbu** 6.4.6.

Dodatak

Pomoću separacije varijabli i direktne integracije diferencijalne jednadžbe, izračunat ćemo poznati nepravi integral, kojeg klasičnim metodama integracije nije moguće riješiti:

$$I(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(wx)dx, \ \forall w \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Primijetimo da zbog parnosti podintegralne funkcije vrijedi:

$$I(w) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(wx)dx.$$

Deriviranjem po w prethodne jednakosti i korištenjem derivacije integrala s parametrom, koju smo radili u Matan 1, te potom primjenimo parcijalnu integraciju, dobivamo:

$$I'(w) = -2\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\sin(wx)dx = \left[e^{-x^2}\sin(wx)\right]_0^{\infty} - w\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(wx)dx = -\frac{w}{2}I(w).$$

Odnosno, nepravi integral $I(w)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $I'(w) = -(w/2)I(w)$, koju rješavamo separacijom:

$$I'(w) = -\frac{w}{2}I(w) \implies \frac{dI}{I} = -\frac{wdw}{2} \implies I(w) = ce^{-w^2/4}.$$

Kako je $c = I(0)$, to u (6.3) uvrštavamo $w = 0$ i dobivano poznati Gaussov integral:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Prema tome $I(w) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}$. Q.E.D.

Problem 6.2 Nakon što se izvrši separacija varijabli u jednadžbi (ako je moguća) i dobije se oblik $Q(y)dy = P(x)dx$, zašto je moguće integrirati neovisno lijevu i desnu stranu po varijabli y osnosno x? Budući da je dobivena jednadžba egzaktna diferencijalna jednadžba, odgovor ćemo dati nakon Teoremu 6.6.2 na stranici 43 u Primjedbi 6.8.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeće poveznice:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 1. dio (bez supstitucije, između 17:48 i 32:10),
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 4. dio (supstitucija je dio između 00:00 i 20:45).

6.1.3 DJ s početnim uvjetom - Cauchyjev problem

U Primjeru 6.5 smo pokazali da familija krivulja $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$ predstavlja opće rješenje diferencijalne jednadžbe $2x^2yy' + y^2 = 3$. Međutim, ako tražimo jedno konkretno rješenje ove diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava takozvani *početni* ili *inicijalni* uvjet $y(1) = 2$, tada rješavamo problem:

$$\begin{cases} 2x^2yy' + y^2 = 3, \\ y(1) = 2. \end{cases} \tag{6.4}$$

Ova vrsta problema se zove *Cauchyjev problem* i zapisujemo ga u jednom od sljedeća dva oblika:

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0 \quad \text{ili} \quad \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.5}$$

gdje pretpostavljamo da je točka (x_0, y_0) *iz domene funkcije* $f(x,y)$.

Problem (6.5) rješavamo tako da prvo riješimo pripadnu diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x,y)$, a potom iz uvjeta $y(x_0) = y_0$ nađemo konkretnu vrijednost konstante c. Na taj način smo dobili samo ono rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x,y)$ koje prolazi točkom (x_0, y_0). Na primjer, kad nađemo rješenje jednadžbe $2x^2yy' + y^2 = 3$, a to je $y^2 - 3 = Ce^{1/x}$, u njega uvrstimo uvjet $y(1) = 2$ odnosno $x_0 = 1$ i $y_0 = 2$:

$$y^2 - 3 = Ce^{1/x} \quad \text{i} \quad x = 1,\ y = 2 \implies 4 - 3 = Ce \implies C = 1/e.$$

Prema tome, rješenje Cauchyjevog problema (6.4) je funkcija $y = y(x)$ zadana implicitno jednadžbom: $y^2 - 3 = e^{1/x-1}$.

■ **Primjer 6.7** Naći rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' - \frac{3}{x}y = 0, \\ y(2) = 4. \end{cases} \tag{6.6}$$

Separacijom varijabli i direktnom integracijom, lako je pokazati da je $y(x) = cx^3$, $c \in \mathbb{R}$ opće rješenje pripadne diferencijalne jednadžbe u (6.6): $y' - 3y/x = 0$. Sada je potrebno u ovo rješenje uvrstiti početni uvjet $y(2) = 4$, pa dobivamo jednakost $4 = c2^3$, iz čega slijedi da je $c = 1/2$. Prema tome, $y(x) = x^3/2$ je jedno rješenje problema (6.6). ■

Napomena 6.2 Primijetimo da rješenje Cauchyjevog problema nije uvijek jedinstveno. Na primjer, direktnim uvrštavanjem u problem:

$$y' = \frac{3}{2}y^{1/3},\ y(0) = 0, \tag{6.7}$$

lako se vidi da su $y(x) = x^{3/2}$ i $y(x) = 0$ dva različita rješenja problema (6.7). ■

Vezano uz Cauchyjev problem (6.5) često se postavljaju sljedeća dva pitanja:
1) naći uvjete na funkciju $f(x,y)$, takve da rješenje od (6.5) bude jedinstveno;
2) pod kojim uvjetima je rješenje od (6.5) nejedinstveno, odnosno postoje barem dva različita rješenja od (6.5).
Odgovore na ova i slična pitanja ćemo dati u jednoj od sljedećih točaka.

Vježba 6.5 U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, separacijom varijabli i direktnom integracijom pokazati da za rješenja sljedećeg problema:

$$(P_a):\ \ y' - \frac{a}{x}y = 0,\ y(0) = 0,$$

vrijedi:
(i) ako je $a > 0$, tada (P_a) ima beskonačno mnogo rješenja;
(ii) ako je $a < 0$, tada (P_a) ima jedno rješenje.

Rješenja za Vježbu 6.5 :

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.5

Za diferencijalne jednadžbe iz Vježbe 6.4 postavljamo sljedeće Cauchyjeve probleme.

Vježba 6.6 Riješiti:

1. $\begin{cases} \frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y^2}, \\ y(0) = 3; \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \frac{y'}{x+1} = \frac{x}{2y+4}, \\ y(-1) = -1; \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^3y^2y' - y^3 = 5, \\ y(1) = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' - xy^2 = 2xy, \\ y(0) = 1; \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} y' = 10^{x+y}, \\ y(1) = -\log_{10} 10; \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} xydy - \sqrt{y^2+1}dx = 0, \\ y(e) = 0. \end{cases}$

Rješenja za Vježbu 6.6 :

1. $\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + 9$; **2.** $y^2 + 4y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{19}{6}$; **3.** $y(x) = \sqrt[3]{5\left(e^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{x^2})} - 1\right)}$;
4. $y(x) = \frac{2}{3e^{-x^2}-1}$; **5.** $y(x) = -\log_{10}(20 - 10^x)$; **6.** $\sqrt{y^2+1} = \ln|x|$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.6.4.; **za Vježbu** 6.6.5.; **za Vježbu** 6.6.6.

6.1.4 Supstitucija u DJ

Nerijetko u diferencijalnim jednadžbama nije moguće separirati varijable x i y. Međutim, u nekim slučajevima nakon uvođenja nove funkcije $z(x)$ umjesto $y(x)$, koju zovemo supstitucija, u dobivenoj jednadžbi se mogu separirati varijable x i z.

■ **Primjer 6.8** Na diferencijalnu jednadžbu $y' - y = 2x - 3$ ne možemo primijeniti separaciju varijabli x i y. Međutim, supstitucijom $z = y + 2x$ i $z' = y' + 2$, prethodna diferencijalna jednadžba postaje $z' = z - 1$ pa imamo:

$$z' = z - 1 \implies \frac{dz}{z-1} = dx \implies \int \frac{dz}{z-1} = \int dx + c \implies z(x) = Ce^x + 1.$$

Ako vratimo supstituciju $y = z - 2x$, tada je $y(x) = Ce^x - 2x + 1$ rješenje početne jednadžbe.
■

Vježba 6.7 Koristeći supstituciju $z = z(x)$ svedite sljedeće diferencijalne jednadžbe na oblik pogodan za separaciju varijabli x i z, te je potom riješite:

1. $y' + y = x + 2, \quad z = y - x;$

2. $y' = \cos^2(y + x) - 1, \quad z = y + x;$

3. $y' + 2 = \sqrt{4x + 2y - 1}, \quad z = 2x + y;$

4. $y' - \cos(y - x) = 0, \quad z = y - x;$

5. $\frac{1}{(x^2+y)^2} - y' = 2x, \quad z = ?;$

6. $xy' - y^2 = yy' + x^2 - 2xy, \quad z = ?.$

U 5. i 6. sami otkrijte supstituciju $z = z(x)$.

Rješenja za Vježbu 6.7 :

1. $z' + z = 1, \ \ y = x + 1 + ce^{-x};$
2. $z' = \cos^2 z, \ \ \mathrm{tg}(y + x) = x + c;$
3. $\sqrt{4x + 2y - 1} = x + c, \ \ y = 1/2 - 2x;$
4. $z' + 1 - \cos(z) = 0, \ \ \mathrm{ctg}\,\frac{y-x}{2} = x + c;$
5. $y = -x^2 + \sqrt[3]{3x + c};$
6. $y = x - 1 - ce^{-x}, \ \ y = x.$

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.7.5.; **za Vježbu** 6.7.6.

6.2 Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

Diferencijalna jednadžba prvog reda je *linearna* ako se može prikazati u formi:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x).} \tag{6.8}$$

Kao što vidimo, stožerne funkcije $y'(x)$ i $y(x)$ se u prethodnoj diferencijalnoj jednadžbi pojavljuju u linearnom obliku. U sljedeće dvije točke ćemo na dva različita načina pokazati da je opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe (6.8) dano formulom:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right), \ C \in \mathbb{R}.} \tag{6.9}$$

6.2.1 Metoda varijacije konstante

Metoda varijacije konstante je jedan od postupaka za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda, koji se ne mora nužno koristiti, ali se preporučuje, jer se jednostavno realizira u nekoliko sljedećih koraka:

1. homogeni dio ove jednadžbe, odnosno jednadžbu $y' + f(x)y = 0$ rješavamo separacijom varijabli i direktnom integracijom:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \implies \frac{dy}{y} = -f(x)dx \implies y(x) = Ce^{-\int f(x)dx},\ C \in \mathbb{R};$$

2. iz prethodnog koraka, rješenje polazne jednadžbe $y' + f(x)y = g(x)$ tražimo u obliku:

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx}, \tag{6.10}$$

gdje $C(x)$ nije više konstantna nego promjenjiva funkcija (tzv. varirana konstanta);

3. funkciju $y(x)$ iz (6.10) uvrštavamo u jednadžbu $y' + f(x)y = g(x)$:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int f(x)dx} - C(x)e^{-\int f(x)dx}f(x) + f(x)C(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

odnosno

$$C'(x)\,e^{-\int f(x)dx} = g(x)$$

što je ekvivalentno s:

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx};$$

4. prethodnu diferencijalnu jednakost integriramo i dobivamo izraz za funkciju $C(x)$:

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + c,\ c \in \mathbb{R}; \tag{6.11}$$

5. funkciju $C(x)$ dobivenu u (6.11) uvrštavamo u pretpostavljeni oblik rješenja (6.10), pa dobivamo konačni oblik rješenja za jednadžbu $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\right),\ c \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer 6.9** Pomoću prethodnog algoritma, rješavamo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda $y' - xy = 2x$. Potom za usporedbu, riješite je i separacijom varijabli.

1. Opće rješenje homogenog dijela jednadžbe $y' - xy = 2x$:

$$y' - xy = 0 \implies \frac{dy}{y} = xdx \implies y(x) = Ce^{x^2/2},\ C \in \mathbb{R}; \qquad (\textbf{1.}\ \text{korak})$$

2. Opće rješenje jednadžbe $y' - xy = 2x$:

$$y' - xy = 0\ \&\ y(x) = Ce^{x^2/2} \implies y' - xy = 2x\ \&\ y(x) = C(x)e^{x^2/2}, \qquad (\textbf{2.}\ \text{korak})$$

gdje $C(x)$ varirana konstanta; iz $y' - xy = 2x$ i $y(x) = C(x)e^{x^2/2}$ slijedi

$$\frac{dC}{dx}e^{x^2/2} + C(x)e^{x^2/2}x - xC(x)e^{x^2/2} = 2x \implies \frac{dC}{dx} = 2xe^{-x^2/2}; \qquad (\textbf{3.}\ \text{korak})$$

$$C(x) = \int 2xe^{-x^2/2}dx + c = -2e^{-x^2/2} + c,\ c \in \mathbb{R}; \qquad (\textbf{4.}\ \text{korak})$$

$$y(x) = C(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2}\left(-2e^{-x^2/2} + c\right) = ce^{x^2/2} - 2,\ c \in \mathbb{R}. \qquad (\textbf{5.}\ \text{korak})$$

■

Vježba 6.8 Varijacijom konstante riješiti sljedeće linearne diferencijalne jednadžbe:

1. $y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$; **2.** $(xy + e^x)dx - xdy = 0$; **3.** $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$;
4. $(y\sin x - 1)dx + (\cos x)dy = 0$; **5.** $y' - \frac{2}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$.

Rješenja za Vježbu 6.8 :

1. $y = cx + x\sin x$; **2.** $y = ce^x + e^x \ln|x|$; **3.** $y = \frac{c}{x} - \frac{\ln|x|}{x}$;
4. $y = c\cos x + \sin x$; **5.** $y = c\ln^2 x - \ln x$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.8.4.; **za Vježbu** 6.8.5.

6.2.2 Formula za opće rješenje

Kao što znamo, primjenom varijacije konstanti na linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$y' + f(x)y = g(x). \tag{6.12}$$

dobivamo rješenje u obliku formule (6.9). Ukoliko rješavamo pripadni Cauchyjev problem s uvjetom $y(x_0) = y_0$, tada je $c = y_0$. Zbog toga bi bilo dobro u (6.9) umjesto neodređenog integrala $\int$ napisati precizniju oznaku $\int_{x_0}^{x}$. Tada (6.9) poprima jasniji oblik:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds}dt\right). \tag{6.13}$$

Postavlja se pitanje: sadrži li formula (6.13) sva rješenja jednadžbe (6.12) ili samo neka?

Teorem 6.2.1 Formulom (6.13) su određena sva rješenja linearne diferencijalne jednadžbe (6.12), odnosno s (6.13) je dano opće rješenje jednadžbe (6.12).

Dokaz. Neka je $y(x)$ proizvoljno rješenje jednadžbe (6.12). Pokazat ćemo da $y(x)$ istovremeno zadovoljava i formulu (6.13). Zaista, ako (6.12) pomnožimo s $e^{\int f(s)ds}$ tada dobivamo

$$y'(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + f(x)y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} = g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$$

što je ekvivalentno s

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\right)' = g(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}.$$

Integriranjem ove jednakosti od x_0 do x dobivamo:

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds}dt.$$

Ako pomnožimo ovu jednakost s $e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}$ direktno dobivamo da $y(x)$ zadovoljava formulu (6.13). Q.E.D. ■

Napomena 6.3 Ako su $y_h(x)$ i $y_p(x)$ funkcije definirane sa:

$$y_h(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} \quad \text{i} \quad y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds} dt,$$

tada se lako provjeri da je $y_h(x)$ opće rješenje od $y' + f(x)y = 0$, a $y_p(x)$ je partikularno rješenje od $y' + f(x)y = g(x)$. Sve to zajedno s formulom (6.13) pokazuje da se opće rješenje od linearne diferencijalne jednadžbe $y' + f(x)y = g(x)$ može zapisati u obliku

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

■

■ **Primjer 6.10** Zbog usporedbe, linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$xy' - 2y = 2x^4, \tag{6.14}$$

riješit ćemo na dva načina: varijacijom konstanti i pomoću formule (6.9).

Prvi način: *metoda varijacije konstanti.*

0. jednadžbu (6.14) ćemo prvo napisati u obliku:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 2x^3; \tag{6.15}$$

1. homogeni dio ove jednadžbe rješavamo separacijom varijabli:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \implies y(x) = Cx^2,\ C \in \mathbb{R};$$

2. prema ovome, rješenje polazne jednadžbe (6.14) tražimo u obliku:

$$y(x) = C(x)x^2, \tag{6.16}$$

gdje je $C(x)$ funkcija po varijabli x;

3. funkciju $y(x)$ iz (6.16) uvrštavamo u jednadžbu (6.15) i dobivamo:

$$\frac{dC}{dx}x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3,$$

odnosno $dC/dx = 2x$;

4. integriranjem prethodne jednakosti dobivamo: $C(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$;

5. sada funkciju $C(x)$ uvrštavamo u pretpostavljeni oblik rješenja (6.16) i dobivamo konačni oblik rješenja: $y(x) = x^2(x^2 + c) = x^4 + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

Drugi način: *formula* (6.9). Iz diferencijalne jednadžbe (6.15) vidimo da je: $f(x) = -2/x$ i $g(x) = 2x^3$. Zbog toga je:

$$\int f(x)dx = -\int \frac{2dx}{x} = -\ln x^2,\ e^{-\int f(x)dx} = x^2,\ e^{\int f(x)dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Ako uvrstimo ove integrale u formulu (6.9), tada dobivamo:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + c\right) = x^2\left(\int \frac{2x^3}{x^2}dx + c\right) = x^2(x^2 + c).$$

Na kraju vidimo da smo na dva različita načina došli do istog rješenja. ■

DETALJI

Dokaz Teorema 6.2.1 se pojavljuje na ispitu. Ne zaboravite da nemamo usmeni dio ispita, pa pismeni dio sadrži oko 40% teorijskih pitanja. Koji od prethodna dva postupka za rješavanje linearne diferencijalne jednadžbe se može koristiti na ispitu? Odgovor: po slobodnom izboru, jer se jednako vrednuju obadva postupka. Pri tome, formulu (6.9) odnosno (6.13) treba znati napamet, jer ona ne postoji u službenim formulama koje se smiju koristiti. Zbog toga se savjetuje shvatiti i naučiti njen dokaz, koji je dan u dokazu Teorema 6.2.1, pomoću koga se u slučaju zaborava formule, ona lako može izvesti.

Vježba 6.9 Pomoću (6.9) riješiti sljedeće linearne diferencijalne jednadžbe:

1. $\frac{y}{x} = y' - x\cos x$; **2.** $y' - y = \frac{e^x}{x}$; **3.** $x^2y' + xy + 1 = 0$;
4. $y' + \operatorname{tg}(x)\,y = \frac{1}{\cos x}$; **5.** $xy' - 1 = \frac{2y}{\ln x}$.

Rješenja za Vježbu 6.9 :

1. $y = x(c + \sin x)$; **2.** $y = e^x(\ln|x| + c)$; **3.** $xy = c - \ln|x|$;
4. $y = (\operatorname{tg}(x) + c)\cos x$; **5.** $y = c\ln^2 x - \ln x$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.9.4.; **za Vježbu** 6.9.5.

Dodatak

Formula (6.13) može se jednostavnije napisati ako se eksponencijalni dio podvuče pod integral, odnosno

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{\int_{x_0}^{t} f(s)ds}dt\right) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} f(s)ds} + \int_{x_0}^{x} g(t)e^{-\int_{t}^{x} f(s)ds}dt.$$

DETALJI

Ako rješavamo linearnu diferencijalnu jednadžbu $y' + f(x)y = g(x)$ te koristimo formulu (6.9), tada u integralu $\int f(s)ds$ ne stavljamo $+C$, jer konstanta C se već nalazi u (6.9).

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 1. dio (dio od 32:16 pa do kraja).

6.2.3 Linearna diferencijalna jednadžba po $x(y)$ i $x' = dx/dy$

Ponekad diferencijalna jednadžba $F(x,y,y') = 0$ nije linearna po $y(x)$ i $y' = dy/dx$, ali je linearna po $x(y)$ i $x' = dx/dy$, pa je korisno promatrati diferencijalnu jednadžbu:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} + f(y)x = g(y).}$$

Na temelju razmatranja iz prethodne dvije točje, lako se zaključuje da opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe je dano formulom:

$$x(y) = e^{-\int f(y)dy}\left(C + \int g(y)e^{\int f(y)dy}dy\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer 6.11** Diferencijalna jednadžba $(x+y^2)y' = y$ nije linearna po $y(x)$ zbog člana y^2y'. Međutim, moguće je napraviti sljedeći prelaz na $x(y)$ i $x' = dx/dy$:

$$(x+y^2)y' = y \implies (x+y^2)\frac{dy}{dx} = y \implies x+y^2 = y\frac{dx}{dy} \implies \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y,$$

što je linearna diferencijalna jednadžba po $x(y)$, pa se kao takva i rješava:

$$x' + f(y)x = g(y) \implies x(y) = e^{-\int f(y)dy}\left(\int g(y)e^{\int f(y)dy}dy + c\right),\ c \in \mathbb{R};$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y \implies f(y) = -\frac{1}{y},\ g(y) = y \implies \int f(y)dy = -\ln y,$$

$$x(y) = e^{\ln y}\left(\int ye^{-\ln y}dy + c\right) = y(y+c) = y^2 + cy.$$

■

DA-NE

Odgovori s "DA" ako je diferencijalna jednadžba linearna po $x = x(y)$, a nije linearna po $y = y(x)$:

1. $y' + 5y = x^4$;	**DA**	**NE**
2. $y'(\sin y + x) = 3$;	**DA**	**NE**
3. $y' + y^2 = x^3$;	**DA**	**NE**
4. $y'(y^3 - 2x) = y$;	**DA**	**NE**
5. $y' - y = e^{3x}$.	**DA**	**NE**

Vježba 6.10 Prelazom na $x(y)$ i $x' = dx/dy$ riješiti sljedeće linearne po $x(y)$ diferencijalne jednadžbe:

1. $(2e^y - x)y' - 1 = 0$; **2.** $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$; **3.** $(-2x+y)dy - ydx = 4\ln y\, dy$;

4. $y'(3x - y^2) = y$; **5.** $y' - 2xyy' = y^2 - y$.

Rješenja za Vježbu 6.10 :

1. $x = e^y + ce^{-y}$; **2.** $x = (c - \cos y)\sin y$; **3.** $x = cy^{-2} + \frac{1}{3}y + 1 - 2\ln y$;

4. $x = cy^3 + y^2$; **5.** $(y-1)^2 x = y - \ln(cy)$.

YT-VIDEO

Za Vježbu 6.10.3; **Za Vježbu** 6.10.5.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 2. dio (dio između 00:00 i 13:00).

6.3 Bernoullijeva i Riccatijeva diferencijalna jednadžba

6.3.1 Bernoullijeva diferencijalna jednadžba - linearizacija

Bernoullijeva diferencijalna jednadžba je nelinearna diferencijalna jednadžba prvog reda:

$$\boxed{y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,} \tag{6.17}$$

koja se jednostavnom supstitucijom

$$\boxed{z(x) = y^{1-\alpha}(x) \quad \text{i} \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'} \tag{6.18}$$

svodi na linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda po $z = z(x)$ odnosno:

$$\boxed{z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).} \tag{6.19}$$

Ovaj postupak se još zove *linearizacija nelinearne diferencijalne jednadžbe*. Zaista, množenjem jednadžbe (6.17) sa $y^{-\alpha}$, gdje za $\alpha > 0$ obavezno pretpostavljamo da je $y \neq 0$, dobivamo:

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$

Ako uvrstimo supstituciju (6.18) u ovu jednakost, tada direktno slijedi tražena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda (6.19), koju možemo riješiti formulom za opće rješenje koja je dana u (6.9), što zajedno sa supstitucijom (6.18) nam daje formulu za opće rješenje Bernoullijeve DJ:

$$\boxed{y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(C + (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ C \in \mathbb{R}.} \tag{6.20}$$

Za razliku od formule (6.9) koja se lako zapamti, formulu (6.20) nije preporučljivo napamet naučiti (boli glava). U sljedeća dva potpoglavlja, kao dodatak (neobavezno gradivo) ćemo dokazati da je ovom formulom dano opće rješenje Bernoullijeve DJ te da ovo rješenje možemo dobiti direktnom primjenom varijacije konstante na Bernoullijevu DJ.

Napomena 6.4 Ako je $\alpha > 0$, tada dobivenom općem rješenju treba pridodati i $y = 0$, koje je isto tako rješenje od (6.17) za $\alpha > 0$. ■

■ **Primjer 6.12** Rješavamo diferencijalnu jednadžbu: $xy^2y' - x^2 = y^3$. U cilju određivanja tipa ove jednadžbe, napisat ćemo je u formi:

$$y' - \frac{1}{x}y = xy^{-2}.$$

Prema ovome zaključujemo da je ovo Bernoullijeva diferencijalna jednadžba za $\alpha = -2$. Ako pomnožimo ovu jednadžbu sa y^2, tada dobivamo:

$$y^2y' - \frac{1}{x}y^3 = x.$$

Zbog toga uvodimo supstituciju $z(x) = y^3(x)$, pa prethodna jednadžba se transformira u linearnu jednadžbu po $z(x)$:

$$z' - \frac{3}{x}z = 3x.$$

Opće rješenje ove jednadžbe je:

$$z(x) = e^{3\int dx/x}\left(c + 3\int xe^{-3\int dx/x}dx\right) = x^3\left(c - \frac{3}{x}\right)$$

Prema tome, rješenje polazne jednadžbe je: $y^3 = cx^3 - 3x^2$. ■

Iz povijesti

Johann Bernoulli (1667–1748) je bio Švicarski matematičar, koji se bavio diferencijalnim i integralnim računom, postavio je poznati "Brachistochrone problem" (čije je rješenje cikloida), te je riješio takozvani "Sophomore's dream" pomoću svoje Bernoullijeve jednakosti. Interesantno je istaknuti da je obitelj Bernoulli dala u jednom kratkom razdoblju (17. i 18. stoljeće) osam matematičara - znanstvenika: Jacob, Johann, Nicolaus I, Nicolaus II, Daniel, Johann II, Johann III i Jacob II.

Vježba 6.11 Riješite sljedeće Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe:

1. $y' + 2y - y^2e^x = 0$; **2**. $y' - (\cos x)\,y^4 = (\mathrm{tg}\,x)\,y$; **3**. $xy' + 2y = -x^5e^xy^3$;
4. $(x+1)(y' + y^2) + y = 0$; **5**. $xy' - 2x^2y^{1/2} - 4y = 0$; **6**. $(y^3 + x)dx - xy^2dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.11 :

1. $y(e^x + ce^{2x}) = 1$ i $y = 0$; **2**. $y^{-3} = c\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$ i $y = 0$;
3. $y^{-2} = x^4(2e^x + c)$ i $y = 0$; **4**. $(x+1)y(\ln|x+1| + c) = 1$ i $y = 0$;
5. $y = x^4\ln^2(cx)$ i $y = 0$; **6**. $y = \sqrt[3]{cx^3 - 3x/2}$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.11.5.; **za Vježbu** 6.11.6.

Vježba 6.12 Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

1. $\begin{cases} 2xy' - y + x\cos(x)y^3 = 0, \\ y(\pi/2) = 1; \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} 2y' - 2xy^5 = xy, \\ y(0) = 1; \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} 4xy' + y + 4xe^{\sqrt{x}}y^3 = 0, \\ y(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}}. \end{cases}$

Rješenja za Vježbu 6.12

1. $y^{-2} = \sin x + \frac{\cos x}{x}$; **2**. $y^{-4} = 3e^{-x^2} - 2$; **3**. $y^{-2} = 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.12.2; **Za Vježbu** 6.12.3.

Vježba 6.13 Riješite sljedeće Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe po $x(y)$ i $x' = dx/dy$:

1. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$; **2**. $x^3 y' \sin y + 2y = xy'$; **3**. $ydx + x(2xy+1)dy = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.13 :

1. $xy(c - \ln^2 y) = 1$; **2.** $x^2(c - \cos y) = y$, $y = 0$; **3.** $y^2 \exp(-\frac{1}{xy}) = c$, $y = 0$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.13.3.

DETALJI Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 2. dio (dio između 13:00 i 30:20).

Dodatak

6.3.2 Dodatak - formula za opće rješenje Bernoullijeve DJ

U ovom dodatku ćemo pokazati da je formulom (6.20) ustvari dano opće rješenje Bernoullijeve DJ. U tom smislu pretpostavimo da je $y(x)$ bilo koje rješenje Bernoullijeve DJ:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \ \alpha \neq 0, 1,$$

gdje pretpostavljamo da je $y(x) \neq 0$ ako je $\alpha > 0$. Pomnožimo prethodnu jednakost sa:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx},$$

pa tako dobivamo:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y'e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} + (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} = (1-\alpha)g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}$$

odnosno ako pojednostavnimo (primijenimo pravilo derivacije produkta na prva dva člana) slijedi:

$$\left(y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}\right)' = (1-\alpha)g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}.$$

Integriranjem prethodne jednakost dobivamo:

$$y^{1-\alpha}e^{(1-\alpha)\int f(x)dx} = C + (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx,$$

iz čega jednostavnim algebarskim sređivanjem dobivamo da $y(x)$ mora zadovoljavati formulu (6.20). Prema tome pokazali smo da je formulom (6.20) zadano opće rješenje Bernoullijeve DJ.

Dodatak

6.3.3 Dodatak - varijacija konstante za Bernoullijevu DJ

U ovom dodatku ćemo pokazati da se do formule (6.20) može doći i direktnom primjenom varijacije konstanti na Bernoullijevu DJ. Prema tome, ako netko na ispitu primjeni ovaj postupak, onda se on potpuno priznaje kao i metoda linearizacije opisana u potpoglavlju 6.3.1. Zahvaljujemo se našem kolegi profesoru Ljubi Maranguniću, koji nam je skrenuo pažnju na ovu metodu za rješavanje Bernoullijeve DJ.

Postupamo na potpuno analogan načina kao u slučaju primjene metode varijacije konstante na linearnu DJ, koja je demonstrirana u potpoglavlju 6.2.1: prvo rješavamo pripadnu linearnu DJ odnosno

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = Ce^{-\int f(x)dx};$$

u drugom koraku tražimo rješenje Bernoullijeve DJ u obliku varijacije konstante odnosno

$$y(x) = C(x)e^{-\int f(x)dx} \quad \text{i} \quad y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{C'(x)}{C^{\alpha}(x)} = g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx};$$

u trećem koraku na prethodnu DJ po nepoznatoj $C(x)$ primijenimo separaciju varijabli C i x iz čega slijedi njeno rješenje:

$$C(x) = \left(C + (1-\alpha)\int g(x)e^{(1-\alpha)\int f(x)dx}dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}};$$

na kraju trebamo vratiti dobivenu $C(x)$ u pretpostavljeno rješenje iz drugog koraka, iz čega direktno slijedi formula (6.20).

Dodatak

6.3.4 Dodatak - Riccatijeva diferencijalna jednadžba

Kao i Bernoullijeva diferencijalna jednadžba $y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0,1$, Riccatijeva diferencijalna jednadžba:

$$\boxed{y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad p(x) \not\equiv 0,} \tag{6.21}$$

je nelinearna po varijabli y. Preciznije, ako (6.21) napišemo u standardnom obliku $y' = f(x,y)$, tada je $f(x,y)$ kvadratna funkcija po y. Jasno je da vrijedi:

i) ako je $r(x) \equiv 0$, tada jednadžba (6.21) postaje specijalni oblik Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe za $\alpha = 2$;

ii) ako je $r(x) \not\equiv 0$, tada su ova dva tipa diferencijalnih jednadžbi neusporediva.

Nažalost, za razliku od Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe, nije moguće dati generalni postupak za pronalaženje općeg rješenja Riccatijeve diferencijalne jednadžbe, osim u nekim posebnim slučajevima, kao što slijedi.

Propozicija 1 Neka je $y_1(x)$ jedno (partikularno) rješenje jednadžbe (6.21), a $z(x)$ opće rješenje Bernoullijeve differencijalne jednadžbe:

$$z' + \big(-2p(x)y_1(x) - q(x)\big)z = p(x)z^2. \tag{6.22}$$

Tada je $y(x) = y_1(x) + z(x)$ opće rješenje Riccatijeve diferencijalne jednadžbe (6.21).

Dokaz. Po pretpostavci znamo da je:

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x). \tag{6.23}$$

Sada iz jednakosti (6.22) i (6.23) direktno slijedi da funkcija $y(x) = y_1(x) + z(x)$ zadovoljava jednadžbu (6.21). Obratno, ako je $y(x)$ neko rješenje jednadžbe (6.21), tada iz jednakosti (6.21) i (6.23) lagano slijedi da funkcija $z(x) = y(x) - y_1(x)$ zadovoljava jedandžbu (6.22). Q.E.D.

■ **Primjer 6.13** Promatramo Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{1}{x^3}y^2 + \frac{1}{2x}y + \frac{x}{2}. \tag{6.24}$$

Lako je provjeriti da je funkcija $y_1(x) = x^2$ jedno partikularno rješenje jednadžbe (6.24). Zbog toga po prethodnoj propoziciji, opće rješenje jednadžbe (6.24) tražimo u obliku

$$y(x) = x^2 + z(x). \tag{6.25}$$

Kada uvrstimo $y(x)$ iz (6.25) u jednadžbu (6.24), tada dobivamo da $z(x)$ mora zadovoljavati pripadnu Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu:

$$z' - \frac{5}{2x}z = \frac{1}{x^3}z^2. \tag{6.26}$$

Kao što smo več naučili, transformacijom jednadžbe (6.26) na pripadnu linearnu diferencijalnu jednadžbu, dobivamo da je:

$$z(x) = \frac{x^{5/2}}{c - 2\sqrt{x}}. \tag{6.27}$$

Prema tome, opće rješenje jednadžbe (6.24) je dano s (6.25) i (6.27). ■

Napomena 6.5 U pripadnoj Bernoullijevoj jednadžbi (6.22) koeficijent uz linearni član može biti identički jednak nuli, odnosno: $-2p(x)y_1(x) - q(x) \equiv 0$, pa se jednadžba (6.22) reducira na oblik pogodan za separaciju varijabli:

$$z' + \big(-2p(x)y_1(x) - q(x)\big)z = p(x)z^2 \implies z' = p(x)z^2 \implies \frac{dz}{z^2} = p(x).$$

Na primjer, $y_1(x) = x^2$ je partikularno rješenje Riccatijeve diferencijalne jednadžbe: $y' = -y^2 + 2x^2y - x^4 + 2x$. Po Propoziciji 1, opće rješenje ove jednadžbe tražimo u obliku $y(x) = x^2 + z(x)$, gdje je $z(x)$ opće rješenje pripadne Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe $z' = -z^2$, koja se lako riješi separacijom varijabli i direktnom integracijom. ■

Vježba 6.14 Je li $y_1(x) = \cos x$ jedno partikularno rješenje Riccatijeve diferencijalne jednadžbe: $(1 - \sin x \cos x)y' + (\cos x)y^2 - y + \sin x = 0$?

Rješenja za Vježbu 6.14 : DA.

Vježba 6.15 Odrediti realne parametre a i b, tako da je zadana funkcija $y_1(x)$ jedno partikularno rješenje dane Riccatijeve diferencijalne jednadžbe:

1. $y_1(x) = ax^b,\quad x^2y' + x^2y^2 - xy + 1 = 0;$

2. $y_1(x) = ax^b,\quad x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0;$

3. $y_1(x) = a\,\mathrm{tg}(x),\quad y' + y^2 - 3(\mathrm{tg}\,x)y + \mathrm{tg}^2\,x - 1 = 0.$

Rješenja za Vježbu 6.15 :
1. $a = 1, b = -1$; **2.** $a = 1, b = 1$; **3.** $a = 1$.

Vježba 6.16 Riješiti danu Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu, ako je zadano jedno njeno partikularno rješenje $y_1(x)$:

1. $xy' - (2x+1)y + y^2 + x^2 = 0,\ y_1(x) = x$;
2. $(1-x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0,\ y_1(x) = -x^2$;
3. $y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x = 0,\ y_1(x) = e^x$.

Rješenja za Vježbu 6.16 :
1. $y = x + \frac{x}{x+c}$; **2.** $y(x) = \frac{1-cx^2}{c-x}$; **3.** $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.

Dodatak

Najjednostavnija Riccatijeva diferencijalna jednadžba je $y' = y^2 + 1$. Ako je $y(0) = 0$, dobro je poznato da pripadni Cauchyjev problem ima za rješenje $y(x) = \mathrm{tg}(x)$ lokalno na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Ova jednadžba ima opće rješenje u obliku:

$$y(x) = \frac{c + \mathrm{tg}(x)}{1 - c\,\mathrm{tg}(x)},\ c \in \mathbb{R},$$

gdje $y(x)$ nije definirana u točkama $x = \pi/2 + k\pi$ (zbog tangens funkcije) te gdje je pripadni nazivnik jednak nuli. Za razliku od Riccatijeve jednadžbe, gdje je nelinearni dio kvadratna funkcija po y, kod Abelove diferencijalne jednadžbe, nelinearni dio je polinom trećeg stupnja po y, odnosno opći oblik Abelove jednadžbe glasi:

$$y' = p(x)y^3 + q(x)y^2 + r(x)y + e(x),\quad p(x) \not\equiv 0.$$

Najjednostavnija Abelova diferencijalna jednadžba je $y' = y^3 + 1$. Malo je poznato da ova diferencijalna jednadžba ima opće rješenje zadano u implicitnom obliku:

$$\frac{1}{6}\ln\frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + c.$$

6.4 Diferencijalna jednadžba homogenog stupnja

Kažemo da su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ *funkcije istog homogenog stupnja* ako postoji stupanj α takav da je:

$$P(tx,ty) = t^\alpha P(x,y) \quad \text{i} \quad Q(tx,ty) = t^\alpha Q(x,y),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Na primjer, funkcije $P(x,y) = x^2 - y^2$ i $Q(x,y) = xy$ su istog homogenog stupnja $\alpha = 2$.

Diferencijalna jednadžba $F(x,y,y') = 0$ je *homogenog stupnja* ako se može prikazati u obliku:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad \text{gdje su } P(x,y) \text{ i } Q(x,y) \text{ funkcije istog homogenog stupnja.}$$

U ovakvom slučaju, supstitucija $z(x) = y(x)/x$ može svesti promatranu diferencijalnu jednadžbu na oblik pogodan za separaciju varijabli z i x, kao u sljedećim primjerima.

6.4.1 $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su polinomi istog homogenog stupnja

Prvo ćemo provježbati slučaj diferencijalne jednadžbe homogenog stupnja kada su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ polinomi istog homogenog stupnja.

■ **Primjer 6.14** Riješimo diferencijalnu jednadžbu: $2x^3y' = 2x^2y - y^3$. Ovu jednadžbu možemo napisati u obliku: $(2x^2y - y^3)dx - 2x^3dy = 0$, iz čega slijedi da su funkcije $P(x,y) = 2x^2y - y^3$ i $Q(x,y) = -2x^3$ istog homogenog stupnja 3. Zbog toga polaznu jednadžbu možemo podijeliti s x^3, odnosno:

$$2x^3y' = 2x^2y - y^3 \implies y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3.$$

Nakon supstitucije $z(x) = y(x)/x$ odnosno $y(x) = xz(x)$ i $y' = z + xz'$, prethodna diferencijalna jednadžba se transformira u oblik: $xz' = -z^3/2$, u kojem se varijable z i x mogu separirati, jer:

$$\begin{aligned} & xz' = -\frac{1}{2}z^3 \implies \frac{dz}{z^3} = -\frac{dx}{2x},\ z \neq 0, \\ & \implies \int \frac{dz}{z^3} = -\int \frac{dx}{2x} + c \implies -\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{2}\ln(x) + c,\ z \neq 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{z^2} = \ln(x) + C,\ z \neq 0,$$

gdje je $C = -2c$, što zajedno sa supstitucijom $z = y/x$ povlači:

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln(x) + C,\ y \neq 0,$$

Budući da u ovom rješenju nismo mogli uzeti u obzir funkciju $y(x) = 0$, trebamo još provjeriti je li i ovo isto tako rješenje. U tom smislu:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad 2x^3y' = 2x^2y - y^3 \implies y' = 0 \quad \text{i} \quad 2x^3 0 = 2x^2 0 - 0^3,$$

što znači da je $y(x) = 0$ isto tako rješenje. Prema tome, sva rješenja su:

$$\frac{x^2}{y^2} = \ln(x) + C,\ y(x) = 0.$$

■

■ **Primjer 6.15** Rješavamo diferencijalnu jednadžbu: $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. Obje funkcije $P(x,y) = y^2 - 2xy$ i $Q(x,y) = x^2$ su homogenog stupnja $\alpha = 2$. Zbog toga ovu jednadžbu dijelimo s x^2, odnosno:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \implies \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right) + y' = 0.$$

Nakon supstitucije $z(x) = y(x)/x$ odnosno: $y(x) = xz(x)$ i $y' = z + xz'$, prethodna diferencijalna jednadžba se transformira u $z^2 - 2z + z + xz' = 0$ u kojoj se mogu separirati varijable z i x, odnosno:

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \implies xz' = z - z^2 \implies \frac{dz}{z - z^2} = \frac{dx}{x},\ z \neq 0,\ z \neq 1$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dz}{z-z^2} = \int \frac{dx}{x} + C \Longrightarrow \ln \frac{z}{1-z} = \ln x + C$$
$$\Longrightarrow \frac{z}{1-z} = cx, \; z \neq 0, \; z \neq 1,$$

gdje je $c = e^C$. Sada vraćamo supstituciju $z = y/x$ i dobivamo da je rješenje polazne jednadžbe jednako:

$$\frac{y}{x-y} = cx, \; y \neq 0, \; y \neq x, \quad \text{odnosno} \quad y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}, \; y \neq 0, \; y \neq x.$$

Budući da u ovom rješenju nisu uzete u obzir funkcije $y(x) = 0$ i $y(x) = x$, provjerit ćemo posebno da li su ovo isto tako rješenja ili nisu:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \Longrightarrow dy = 0 \Longrightarrow (0^2 - 0)dx + x^2 0 = 0$$

pa je $y(x) = 0$ isto tako rješenje;

$$y = x \quad \text{i} \quad (y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0 \Longrightarrow dy = dx \Longrightarrow (x^2 - 2x^2)dx + x^2dx = 0$$

pa je $y(x) = x$ isto tako rješenje; prema tome, sva rješenja su dana sa:

$$y = \frac{cx^2}{1+cx}, \; y = 0, \; y(x) = x.$$

Budući da je za $c = 0$ funkcija $y(x) = 0$ već sadržana u izrazu $y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}$ to se prethodna rješenja mogu jednostavnije zapisati u obliku:

$$y(x) = \frac{cx^2}{1+cx}, \; y(x) = x.$$

■

DETALJI

Iako će nastavnik na ploči uraditi samo jedan od prethodna dva primjera, savjetujemo da se na papiru riješe obadva. Poslije toga, proučite bitne razlike među njima.

Vježba 6.17 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe homogenog stupnja:

1. $y^2 + x^2y' = xyy'$; **2.** $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; **3.** $2xy - (x^2+y^2)y' = 0$;
4. $2y - (x+y)y' = 0$.

Rješenja za Vježbu 6.17 :

1. $y = ce^{y/x}$; **2.** $\ln(x^2+y^2) = c - 2\arctan(y/x)$; **3.** $y^2 - x^2 = cy, \; y = 0$;
4. $\frac{y}{(x-y)^2} = c, c \in \mathbb{R}$ i $y = x$ ($y = 0$ je uključeno u općem rješenju specijalno za $c = 0$).

YT-VIDEO

za Vježbu 6.17.4; **za Vježbu** 6.17.4 na drugi način - shvaćenu kao linearnu DJ po $x = x(y)$.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 2. dio (dio od 30:34 pa do kraja snimke).

6.4.2 Transformacija na diferencijalnu jednadžbu homogenog stupnja

Promatramo diferencijalnu jednadžbu:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),} \tag{6.28}$$

gdje pretpostavljamo da je barem jedan od c_1 i c_2 različit od nule, što povlači da (6.28) nije homogenog stupnja. Isto tako, pretpostavljamo da pripadni sustav linearnih jednadžbi:

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_2x+b_2y+c_2 = 0,$$

ima rješenje $x = x_0$ i $y = y_0$. Ako uvedemo supstitucije:

$$u = x-x_0 \quad \text{i} \quad v = y-y_0,$$

tada vrijedi:

$$dx = du, \;\; dy = dv, \;\; a_1x+b_1y+c_1 = a_1u+b_1v \quad \text{i} \quad a_2x+b_2y+c_2 = a_2u+b_2v.$$

Zbog toga se (6.28) transformira u jednadžbu:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right),$$

koja je diferencijalna jednadžba homogenog stupnja 1, te se rješava kao u prethodnoj točki.

■ **Primjer 6.16** Promatramo diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}. \tag{6.29}$$

Pripadni sustav linearnih jednadžbi: $x+y-3 = 0$ i $x-y-1 = 0$ ima rješenje $x = 2$ i $y = 1$. Ako uvedemo supstitucije: $u = x-2$ i $v = y-1$, tada vrijedi:

$$dx = du, \;\; dy = dv, \;\; x+y-3 = u+v \quad \text{i} \quad x-y-1 = u-v.$$

Zbog toga se (6.29) transformira u jednadžbu:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v},$$

koja je jednadžba homogenog stupnja 1. Sada supstitucijom $z(u) = v(u)/u$ dobivamo $v' = z+uz'$ i:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v} \implies \frac{dv}{du} = \frac{1+v/u}{1-v/u} \implies z+uz' = \frac{1+z}{1-z} \implies uz' = \frac{1+z^2}{1-z},$$

gdje se zadnja jednadžba rješava separacijom varijabli:

$$uz' = \frac{1+z^2}{1-z} \implies \frac{(1-z)dz}{1+z^2} = \frac{du}{u} \implies \frac{dz}{1+z^2} - \frac{zdz}{1+z^2} = \frac{du}{u}$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\arctan z - \ln\sqrt{1+z^2} = \ln u + c \implies \arctan\frac{v}{u} - \ln\sqrt{\frac{u^2+v^2}{u^2}} = \ln u + c$$

odnosno rješenje diferencijalne jednadžbe (6.29) je:

$$\arctan\frac{y-1}{x-2} - \ln\sqrt{\frac{(x-2)^2+(y-1)^2}{(x-2)^2}} = \ln|x-2| + c.$$

■

Napomena 6.6 Diferencijalna jednadžba:

$$y' = \frac{2x-y+3}{4x-2y+1},$$

nije homogenog stupnja budući da polinomi u brojniku i nazivniku $P(x,y) = 2x-y+3$ i $Q(x,y) = 4x-2y+1$ nisu funkcije homogenog stupnja (problem je u slobodnim članovima). Isto tako, pripadni sustav:

$$2x-y+3 = 0 \quad \text{i} \quad 4x-2y+1 = 0$$

nema rješenje. Međutim, supstitucijom $z(x) = 2x-y(x)$, $z' = 2-y'$, iz prethodne jednadžbe slijedi:

$$y' = \frac{2x-y+3}{4x-2y+1} \implies 2-z' = \frac{z+3}{2z+1} \implies z' = \frac{3z-1}{2z+1},$$

gdje zadnju jednadžbu rješavamo separacijom varijabli:

$$\frac{(2z+1)dz}{3z-1} = dx \implies \frac{2dz}{3} + \frac{5dz}{3(3z-1)} = dx \implies \frac{2}{3}z + \frac{5}{9}\ln|3z-1| = x+c$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\frac{2}{3}(2x-y) + \frac{5}{9}\ln|3(2x-y)-1| = x+c.$$

■

Napomena 6.7 Jednadžbu $(2x+y+1)dx+(x+2y)dy = 0$ je lakše riješiti kao egzaktnu diferencijalnu jednadžbu. Ovaj tip jednadžbi radimo na stranici 40.

■

Vježba 6.18 Riješiti diferencijalne jednadžbe:

1. $y' = \frac{-2x+4y-6}{x+y-3}$; **2.** $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$; **3.** $y' = \frac{2x-2y+2}{x-y+3}$, $y(1) = -1$.

Rješenja za Vježbu 6.18 :

1. $(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2$; **2.** $2x+y-1 = ce^{2y-x}$;

3. $x-y+4\ln|x-y-1| = -x+3$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.18.3.

DETALJI Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 6. dio (dio između 48:57 i 1:04:30).

6.4.3 $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su funkcije (ne nužno polinomi) istog homogenog stupnja

Supstitucija $z(x) = y(x)/x$ je korisna i u slučajevima kada u diferencijalnoj jednadžbi $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ su homogenog stupnja, ali nisu nužno polinomi, kao što je to bio slučaj u prethodnim točkama.

■ **Primjer 6.17** Riješimo diferencijalnu jednadžbu:

$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x}. \tag{6.30}$$

Primjetimo da ovu jednadžbu možemo napisati u obliku: $(y + x\,\mathrm{tg}(y/x))dx - xdy = 0$, iz čega slijedi da je

$$P(x,y) = y + x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x} \quad \text{i} \quad Q(x,y) = -x.$$

Sada provjeravamo homogenost funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$:

$$P(tx,ty) = (ty) + (tx)\,\mathrm{tg}\,\frac{(ty)}{(tx)} = (ty) + (tx)\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x} = tP(x,y) \;\text{ i }\; Q(tx,ty) = -tx = tQ(x,y),$$

odnosno pokazali smo da su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ funkcije istog homogenog stupnja 1.

Ako podijelimo ovu jednadžbu s x onda vidimo da u (6.30) dominira član y/x, što je pogodna situacija za primjenu supstitucije $z = y/x$ i $y' = z'x + z$, odnosno:

$$\begin{aligned}
&xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x} \implies y' - \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{y}{x} \implies z'x + z - z = \mathrm{tg}\,z \\
&\implies z'x = \mathrm{tg}\,z \implies \int \frac{\cos z\,dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} + C,\; \sin(z) \neq 0 \implies \ln|\sin z| = \ln|x| + C \\
&\implies \sin z = cx.
\end{aligned}$$

Primjetimo da za $c = 0$ u ovo rješenje je uključen i slučaj $\sin(z) = 0$ odnosno konstantna rješenja $z_k(x) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Sad vratimo supstituciju $z = y/x$ i dobivamo da su sva rješenja jednadžbe (6.30) dana sa $\sin(y/x) = cx$. ■

Vježba 6.19 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe u kojima dominira izraz y/x:

1. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} = y$; **2.** $xy' - y\cos\ln\frac{y}{x} = 0$; **3.** $xy' - (x+y)\ln\frac{x+y}{x} = y$;
4. $ydx - xdy = -\sqrt{xy}\,dx$; **5.** $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$.

Rješenja za Vježbu 6.19 :

1. $y = -x\ln\ln(cx)$; **2.** $\ln(cx) = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln(y/x)\right)$; **3.** $\ln\frac{x+y}{x} = cx$;
4. $x\ln(cx) = 2\sqrt{xy},\ y = 0$; **5.** $\arcsin(y/x) = \ln(x) + \pi/2,\ y = x$.

YT-VIDEO **za Vježbu** 6.19.3; **za Vježbu** 6.19.5.

DETALJI U diferencijalnoj jednadžbi homogenog stupnja, ako na ispitu nije posebno navedeno, niste dužni dokazivati da su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ homogenog stupnja, nego možete odmah preči na njeno rješavanje pomoću supstitucije $z = y/x$.

DETALJI Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na sljedeću poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 2. dio (dio od 30:34 pa do kraja snimke).

6.5 Diferencijalne jednadžbe kao matematički modeli

Pomoću diferencijalnih jednadžbi prvog reda je moguće riješiti raznovrsne probleme u geometriji. U sljedeće dvije točke prezentiramo neke od njih.

6.5.1 Primjena u geometriji

Osnovna ideja je da se određena zakonitost, koju zadovoljava tražena familija krivulja, zapiše (modelira) u obliku pripadne diferencijalne jednadžbe, čija rješenja pak predstavljaju traženu familiju krivulja.

■ **Primjer 6.18** Naći sve krivulje $y(x)$ u ravnini sa svojstvom da je za svaku točku $T_0(x_0, y_0)$ takve krivulje površina trokuta određenog pravcem $\overline{OT_0}$, osi O_y i tangentom na $y(x)$ u T_0 jednaka 1, gdje je $O = (0,0)$.

Znamo da je $P = ah/2$ gdje je a stranica trokuta na O_y osi, h je visina spuštena iz T_0 na O_y. Ako je t_0 tangenta na $y(x)$ u T_0 i $S = O_y \cap t_0$, tada je $a = |\overline{OS}|$, a $h = x_0$. Zbog toga je:

$$P = ah/2 = |\overline{OS}|x_0/2 = 1.$$

Prema tome, potrebno je još pronaći S i duljinu $|\overline{OS}|$. S obzirom da je $S = O_y \cap t_0$ to točku S pronalazimo kada u jednadžbu tangente:

$$t_0 \ldots y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

uvrstimo $x=0$, pa dobivamo:

$$S=(0,y_0-x_0y_0') \quad \text{i} \quad a=|\overline{OS}|=|y_0-x_0y_0'|.$$

Prema tome, uvjet $P=1$ odnosno uvjet $|\overline{OS}|x_0/2=1$ se pretvara u jednadžbe:

$$(y_0-x_0y_0')x_0=2 \quad \text{i} \quad -(y_0-x_0y_0')x_0=2.$$

Ako uklonimo indeks 0 na svim mjestima, tada dobivamo dvije linearne diferencijalne jednadžbe:

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{2}{x^2} \quad \text{i} \quad y'-\frac{1}{x}y=\frac{2}{x^2}.$$

Rješavanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo sljedeća rješenja:

$$y(x)=\frac{1}{x}+cx \quad \text{i} \quad y(x)=-\frac{1}{x}+cx.$$

■

■ **Primjer 6.19** Naći jednadžbu familije krivulja za koje je u svakoj točki odječak tangente na osi y jednak udaljenosti te točke od ishodišta koordinatnog sustava.

Ako na svaku krivulju tražene familije jednadžbu tangente u dirališnoj točki (x_0,y_0) napišemo u segmentnom obliku:

$$\frac{x}{x_0-y_0/y_0'}+\frac{y}{y_0-y_0'x_0}=1,$$

tada odječak tangente na osi y je jednak $y_0-y_0'x_0$. S druge strane, udaljenost (x_0,y_0) do $(0,0)$ je jednaka: $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$. Prema ovome, uvjet zadatka postaje:

$$y_0-y_0'x_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2},$$

pa je diferencijalna jednadžba tražene familije jednaka:

$$y-y'x=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ovo je jednadžba homogenog stupnja, koja se na standardan način supstitucijom $z=y/x$ transformira na jednadžbu sa separiranim varijablama: $-z'x=\sqrt{1+z^2}$, pa dobivamo:

$$z+\sqrt{1+z^2}=\frac{c}{x},\ c\neq 0,$$

odnosno tražena familija krivulja $y=y(x)$ zadovoljava jednadžbu: $y+\sqrt{y^2+x^2}=c$, $c\neq 0$.

■

Vježba 6.20 Odrediti sve krivulje u ravnini koje zadovoljavaju tvrdnju: tangenta u bilo kojoj njihovoj točki čini s koordinatnim osima trokut površine 4.

Rješenja za Vježbu 6.20 TRAŽENE KRIVULJE SU: $y=\pm 2/x$, $y=cx\pm 2\sqrt{-c}$.

Vježba 6.21 Odredite familiju krivulja takvu da za svaku krivulju iz te familije vrijedi: koeficijent tangente povučene iz njene proizvoljne točke $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ je jednak kvadratnom korijenu koeficijenta sekante između te točke i ishodišta.

Rješenja za Vježbu 6.21 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA JE $y = (\sqrt{x} + c)^2$, $c \geq 0$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.21

Vježba 6.22 Odredite familiju krivulja za koje vrijedi $a = b$, gdje a i b definiramo na sljedeći način: iz bilo koje točke (x_0, y_0) na krivulji povučemo tangentu p_t i normalu p_n, gdje je točka $(a, 0)$ presjek p_t s osi x, a točka $(0, b)$ je presjek p_n s osi y.

Rješenja za Vježbu 6.22 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA JE

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \arctan\frac{y}{x} = c.$$

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.22

Vježba 6.23 Odredite krivulju koja prolazi ishodištem, te u svakoj njenoj točki pripadna normala prolazi točkom $(1, 1)$.

Rješenja za Vježbu 6.23 TRAŽENA FAMILIJA KRIVULJA $y = y(x)$ ZADOVOLJAVA IMPLICITNU JEDNADŽBU: $y - y^2/2 = x^2/2 - x$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.23

DETALJI Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 5. dio (dio između 18:40 i 39:13).

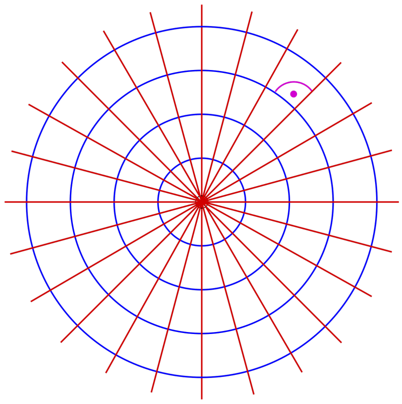
6.5.2 Ortogonalne trajektorije

Definicija 6.5.1 Dvije krivulje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ su međusobno *ortogonalne* (ortogonalne trajektorije) ako u svakoj točki u kojoj se sijeku su im pripadne tangente okomite, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ gdje je $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ vrijedi:

$$y_1'(x_0) = -\frac{1}{y_2'(x_0)}. \tag{6.31}$$

Familija krivulja $\mathscr{C}_2$: $\Phi_2(x, y, c_2) = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ je *ortogonalna familija* danoj familiji krivulja $\mathscr{C}_1$: $\Phi_1(x, y, c_1) = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, ako su svake dvije krivulje iz $\mathscr{C}_1$ i $\mathscr{C}_2$ međusobno ortogonalne. ■

Lako se provjeri da su kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i pravac $y = x$ međusobno ortogonalne trajektorije. Štoviše, familije kružnica $x^2 + y^2 = c$ i pravaca $y = Cx$ su međusobno ortogonalne familije, kao na slici:



Slika 10.4: ortogonalne familije: kružnice $x^2+y^2=c$ i pravci $y=Cx$

Efektivni postupak traženja ortogonalne familije krivulja $\Phi_2(x,y,c_2)=0$ danoj familiji krivulja $\Phi_1(x,y,c_1)=0$ provodimo u sljedeća 3 koraka:

1) familiji krivulja $\Phi_1(x,y,c_1)=0$ odredimo njenu diferencijalnu jednadžbu $F_1(x,y,y')=0$ direktnim deriviranjem njene algebarske jednadžbe $\Phi_1(x,y,c_1)=0$ i eliminiranjem konstante c_1;

2) iz uvjeta ortogonalnosti (6.31), u diferencijalnu jednadžbu $F_1(x,y,y')=0$ stavimo umjesto y' izraz $-1/y'$, pa dobivamo diferencijalnu jednadžbu njene ortogonalne familije: $F_2(x,y,y')=F_1(x,y,-1/y')=0$;

3) rješavanjem diferencijalne jednadžbe $F_2(x,y,y')=0$ dobivamo njeno rješenje u obliku $\Phi_2(x,y,c_2)=0$, što je familija ortogonalna početnoj familiji $\Phi_1(x,y,c_1)=0$.

■ **Primjer 6.20** Naći krivulje koje sijeku familiju eksponencijalnih krivulja $y=ce^{x^2}$ pod pravim kutem:

1) deriviranjem ove familije dobivamo $y'=2cxe^{x^2}$; ako izrazimo konstantu c iz prve jednakosti dobivamo $c=ye^{-x^2}$ te je uvrstimo u prethodnu diferencijalnu jednadnakosti $y'=2ye^{-x^2}xe^{x^2}$, tada dobivamo diferencijalnu jednadžbu $y'=2xy$ familije $y=ce^{x^2}$;

2) transformacijom $y'\to-1/y'$ iz prethodne jednadžbe slijedi diferencijalna jednadžba ortogonalne familije: $-2yy'=1/x$;

3) prethodnu jednadžbu lako rješavamo separacijom varijabli, pa je jednadžba traženih krivulja dana sa: $-y^2=\ln x+C$. ■

U sljedećem primjeru prezentiramo dokaz da je familija potencija ortogonalna familija koncetričnoj familiji elipsa.

■ **Primjer 6.21** Zadana je koncentrična familija elipsa $\mathscr{C}_1$: $x^2+3y^2=c$, $c\in\mathbb{R}$, $c>0$. U sljedeća 3 koraka pronalazimo njenu ortogonalnu familiju krivulja:

1) diferencijalna jednadžba od $\mathscr{C}_1$ je:

$$x^2+3y^2=c \implies \frac{d}{dx}(x^2+3y^2)=0 \implies 2x+6yy'=0;$$

2) u diferencijalnoj jednadžbi $x+3yy'=0$ mijenjamo y' sa izrazom $-1/y'$ odnosno

$$x+3yy'=0 \implies x-\frac{3y}{y'}=0 \implies xy'-3y=0;$$

prema tome, diferencijalna jednadžba ortogonalne familije od $\mathscr{C}_1$ je $xy' - 3y = 0$;
3) separacijom varijabli slijedi:

$$xy' - 3y = 0 \implies \frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \implies \ln y = 3\ln x + c \implies y(x) = cx^3,\ c \in \mathbb{R};$$

prema tome, $y(x) = cx^3$, $c \in \mathbb{R}$ je familija potencija, koja je ortogonalna danoj familiji elipsa $\mathscr{C}_1$. ■

Vježba 6.24 Neka su a i b dva pozitivna realna parametra. Odrediti ortogonalnu familiju familiji elipsa $ax^2 + by^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$.

Rješenja za Vježbu 6.24 FAMILIJA POTENCIJA $y(x) = cx^{b/a}$, $c \in \mathbb{R}$.

Vježba 6.25 Odrediti ortogonalnu familiju familiji eksponencijalnih funkcija $y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

Rješenja za Vježbu 6.25 FAMILIJA PARABOLA $y^2 = -2x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.25

Dodatak

Općenitiji od pojma "ortogonalne trajektorije" je pojam "izogonalne trajektorije": familija krivulja $\mathscr{C}_2$: $\Phi_2(x,y,c_2) = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ je *izogonalna familija* danoj familiji krivulja $\mathscr{C}_1$: $\Phi_1(x,y,c_1) = 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$, ako se svake dvije krivulje iz $\mathscr{C}_1$ i $\mathscr{C}_2$ sijeku pod istim unaprijed danim kutom α. Ako je $\alpha = \pi/2$, tada je izogonalna familija ortogonalna familija.

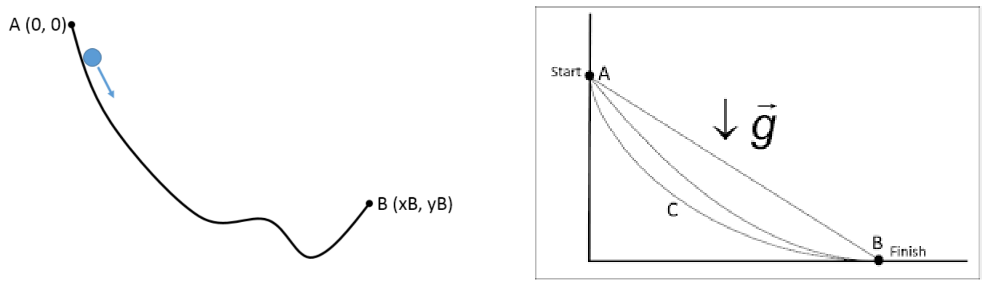
DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 5. dio (dio između 00:00 i 18:20).

6.5.3 Primjene u optimizaciji, kulinarstvu, biologiji, medicini i tehnici

Dodatak

"Brachistochrone" problem. Pretpostavimo da u vertikalnoj ravnini imamo dvije točke A i B tako je da A iznad i lijevo od B. Puštamo kuglicu po putu iz točke A prema točki B, uz djelovanje sile gravitacije. Tražimo onaj put od A do B po kome će kuglica uz minimalno utrošeno vrijeme stići iz A u B. Ovaj optimizacijski problem je prvi formulirao Galileo 1638. godine, a potom 1699. godine Johann Bernoulli, kada ga je i riješio. Osim njega su ga riješili i Leibniz, Newton i brat od Bernoullija James.



Slika 10.5: od A do B po proizvoljnom putu; od A do B po pravcu, kružnici i cikloidi C

Na primjer, uzmimo pravac ili kružnicu između A i B i neovisno puštamo kuglicu po svakom putu i mjerimo vrijeme kretanja iz A u B, slika desno. Jedni su mislili da je rješenje ovog problema kružnica, dok drugi pravac. No niti jedan od ova dva puta nije rješenje ovog problema. Naime, može se pokazati da se ovaj problem modelira diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{x}{2a},$$

gdje je $y(x)$ funkcija čiji je graf traženi put između A i B, a konstanta a osigurava da put prolazi kroz A i B. Iz ove jednadžbe slijedi:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{x}{2a} \implies y'^2 = \frac{x^2}{2ax-x^2} \implies y(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Ako u ovaj integral uvedemo supstituciju $x(t) = a(1-\cos t)$, tada se lako dolazi do rješenja: $y(t) = a(t-\sin t)$, pa je traženi put *cikloida* kroz točke A i B. Kao i na slici gore, dobili smo izokrenutu cikloidu.

Dodatak

Dvije strategije hlađenja kave iz aparata. Iz aparata za kavu smo u čašu nasuli kavu i želimo je ohladiti s hladnim mlijekom uz poček od 5 minuta. Imamo dvije strategije:

1) odmah sipamo hladno mlijeko i čekamo 5 minuta;
2) prvo čekamo 5 minuta i onda sipamo hladno mlijeko.

Želimo nakon 5 minuta imati manje vruću kavu. *Koja strategija pobjeđuje*?

Slika 10.6: kava i aparat za kavu

Ako eksperimentalno mjerimo obadvije strategije, tada eksperiment kaže da je strategija 2) pobjednik. Međutim, to isto potvrđuje većina različitih matematičkih modela, koji koriste različite diferencijalne jednadžbe, čije rješenja $y = y(x)$ označava temperaturu kave nakon što je proteklo x minuta hlađenja, a T je temperatura prostorije gdje se nalazimo, poput:

$$\frac{dy}{dx} = -k(y-T); \qquad \text{(Newtonov zakon)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky^{5/4} \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = -ky^p,\ p>1; \qquad \text{(Lorentzov zakon)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -(y^4-T^4). \qquad \text{(Stefanov zakon)}$$

Ako zapišemo ove modele u obliku $y' = -f(y)$, bitno zajedničko svojstvo funkcija $f(y)$ je njihova konveksnost za $y>0$. Primjetimo da se sve ove jednadžbe rješavaju separacijom varijabli.

Dodatak

Odmrzavanja zamrznute hrane. Pretpostavimo da smo iz hladnjaka, u kome se nalazi zamrznuta hrana na temperaturi H u trenu $x = x_0$ izvadili u kuhinju zamrznutu sarmu. Kuhinja ima konstantnu temperaturu K, koja se neće još neko vrijeme mijenjati. Ako je $y(x)$ temperature ove sarme u vremenu x, vidi sliku dolje, tada je $y(x_0) = H$, a brzina zagrijavanja zamrznute sarme na kuhinjskoj temperaturi K je proporcionalna razlici između trenutne temperature sarme i kuhinjske temperature. Iz ove jednostavne zakonitosti slijedi najjednostavniji matematički model zagrijavanja smrznute sarme:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\big(K - y(x)\big),\ y(x_0) = H,$$

gdje je $\alpha > 0$ koeficijent provodljivosti u kuhinji (na primjer, suh zrak ime veču provodljivost, nego vlažan). Ovo je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima.

Slika 10.7: sarma nakon odmrzavanja

Dodatak

Populacijska dinamika. Broj jedinki $y = y(x)$ neke populacije u vremenu x se modelira takozvanom *logističkom* diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dy}{dx} = ry\Big(1 - \frac{1}{k}y\Big), \tag{6.32}$$

gdje su r i k parametri populacije (biotički potencijal, održivost i slično). Ako u desnoj strani modela (6.32) izlučimo konstantu k, tada se on svodi na $y' = f(x,y)$, gdje je $f(x,y) = Ry(k-y)$, $R = r/k$, pa je $f(x,y)$ kvadratna funkcija po y. Zbog toga se (6.32) zove i *kvadratni populacijski model*. Separacijom variabli (ili rješavanjem Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe) dolazimo do rješenja koje zadovoljava početni uvod $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = \frac{k}{1+ce^{-rx}},\ c = \frac{k}{y_0} - 1.$$

Pitanje: zašto umjesto kvadratne funkcije $f(x,y) = Ry(k-y)$, ne promatrati linearnu funkciju $f(x,y) = Ry$ (takozvani *eksponencijalni populacijski model*, jer mu je rješenje eksponencijalna funkcija)? Odgovor: linearni član Ry pokazuje rast populacije bez utjecaja prirodnih neprijatelja na y, takozvani *grabežljivci*, dok u kvadratnom modelu $Ry(k-y)$ osim Ry (*rast populacije*) se pojavljuje i $(k-y)$ (*gubitak populacije* zbog utjecaja grabežljivaca), pa je kvadratni model bliži stvarnoj situaciji u prirodi. Primijetimo da je od kvadratnog populacijskog modela realniji *kubni populacijski model*:

$$\frac{dy}{dx} = Ry(k^2 - y^2), \tag{6.33}$$

Jer on osim rasta Ry i gubitka populacije $(k-y)$ sadrži i član $(k+y)$, koji predstavlja revitalizaciju populacije, jer kako se populacija (hrana grabežljivaca) smanji, grabežljivci gube interes i mijenjaju stanište, pa se potom populacija počinje povečavati. Bitno zajedničko svojstvo funkcije $f(x,y)$ u obadva modela (6.32) i (6.33) je njihova konkavnost po $y > 0$, takozvane jednogrbaste funkcije.

Dodatak

Kategorizacija u percepciji govora. Percepcija govora se može smatrati kao proces formiranja uzorka u mozgu. Koegzistencija (istovremeno postojanje) dva različita stanja kao par riječi koje su jako slične, poput engleskih riječi: "say"−"stay", "way"−"ray" ili hrvatske "krati"−"prati", "mlati"−"plati" te spontano prebacivanje između njih se modelira diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dy}{dx} = -y^3 + y - k,$$

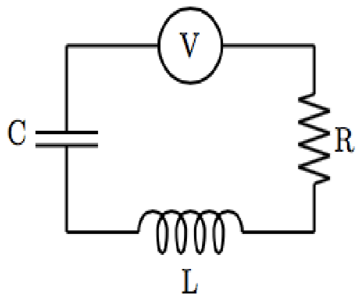
gdje je k takozvani kontrolni parametar. Analiza rješenja ove jednadžbe daje odgovore na pitanja poput: kako i koji mehanizam ljudske percepcije se mijenja prelazom iz jednog u drugo stanje?

Dodatak

RLC krug. RLC krug je električni krug, vidi sliku dolje, koji se sastoji od otpornika otpora R, indukcijskog svitka indukcije L, kondenzatorskih ploča kapaciteta C i izvora napajanja $V(x)$ u vremenu x. Pretpostavimo da je napon na kondenzatoru konstantan i iznosi Q. Po Kichhoffovom zakonu, koji kaže da je napon između bilo koje dvije točke ne ovisan o putu kretnje između njih, dolazimo do diferencijalne jednadžbe za jakost struje $y(x)$ u vremenu x:

$$L\frac{dy}{dx} + Ry + \frac{Q}{C} = V(t),$$

što je linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.



Slika 10.8: RLC krug

6.6 Egzaktna diferencijalna jednadžba. Eulerov multiplikator

Definicija 6.6.1 Kažemo da je diferencijalna jednadžba

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6.34}$$

egzaktna ako postoji funkcija $U(x,y)$, takozvani *potencijal*, takva da je

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU, \tag{6.35}$$

gdje znamo da je prvi diferencijal dU definiran sa:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{6.36}$$

■

Odnosno, iz (6.35) i (6.36) direktno zaključujemo da je (6.34) egzaktna diferencijalna jednadžba ako postoji funkcija $U(x,y)$ takva da je

$$\boxed{P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) \quad \text{i} \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y).} \tag{6.37}$$

Sada iz (6.34) i (6.35) slijedi $dU = 0$ što povlači da je opće rješenje egzaktne diferencijalne jednadžbe:

$$U(x,y) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

6.6.1 Nužan uvjet za egzaknost diferencijalne jednadžbe

Ako prvu jednakost u (6.37) parcijalno deriviramo po y a drugu po x varijabli tada dobivamo:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Time smo dokazali sljedeći nužni uvjet za egzaknost diferencijalne jednadžbe:

Teorem 6.6.1 Ako je diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ egzaktna, tada vrijedi:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{6.38}$$

■ **Primjer 6.22** Pokažimo da diferencijalna jednadžba $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ zadovoljava nužni uvjet egzaktnosti (6.38). Budući da je $P(x,y) = e^{-y}$ i $Q(x,y) = -2y - xe^{-y}$, dobivamo $\partial P/\partial y = -e^{-y} = \partial Q/\partial x$. ■

Vježba 6.26 Pokažite da sljedeće diferencijalne jednadžbe zadovoljavaju uvjet (6.38):

1. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;

2. $\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right)dx - \left(\frac{2x^3}{y^3} + \frac{5}{y^2}\right)dy = 0$;

3. $\left(y^2 \sin(2x) + 1\right)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$;

4. $\left(2x + 2x\sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

Rješenja za Vježbu 6.26 :

1. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x},\ \frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}$;

2. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y^2}+1\right)=-\frac{6x^2}{y^3},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x^3}{y^3}-\frac{5}{y^2}\right)=-\frac{6x^2}{y^3}$;

3. $\frac{\partial}{\partial y}(y^2\sin(2x))=2y\sin(2x),\ \frac{\partial}{\partial x}(-2y\cos^2 x)=2y\sin(2x)$;

4. $\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+2x\sqrt{x^2-y}\right)=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{x^2-y}\right)=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$.

Ako znamo da je zadovoljen nužni uvjet egzaktnosti, tada to ne znači da je dotična diferencijalna jednadžba egzaktna. Međutim, to nam govori da možemo pristupiti traženju potencijala $U(x,y)$ sa svojstvom (6.37).

■ **Primjer 6.23** Diferencijalna jednadžba $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$ je egzaktna. Zaista, iz svojstva (6.37) odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)=e^{-y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)=-2y-xe^{-y}.$$

možemo pogoditi da je potencijal $U(x,y)=-y^2+xe^{-y}$, odnosno:

$$d\left(-y^2+xe^{-y}\right)=e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Zbog toga je rješenje dano sa: $-y^2+xe^{-y}=c$. ■

Da nije potrebno pogađati potencijal $U(x,y)$ već ga izračunati iz zadanih funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$, pokazujemo u nastavku.

6.6.2 Dovoljan uvjet za egzaknost diferencijalne jednadžbe

Sada ćemo dokazati da je (6.38) istovremeno i nužan i dovoljan uvjet za egzaknost diferencijalne jednadžbe.

Teorem 6.6.2 Ako funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ zadovoljavaju uvjet (6.38), tada je diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ egzaktna, a pripadni potencijal $U(x,y)$ računamo po formuli:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt+C,\ C\in\mathbb{R}, \qquad (6.39)\\ &= \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C, \end{aligned}$$

gdje x_0 i y_0 po volji biramo iz domene funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$, a rješenje je dano u implicitnom obliku: $U(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Dokaz. Neka vrijedi (6.38). Pokazat ćemo da tada $U(x,y)$ definiran formulom (6.39) zadovoljava:

$$dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy, \qquad (6.40)$$

odnosno da je diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ egzaktna. Znamo da je uvjet (6.40) ekvivalentan sa:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=Q(x,y). \qquad (6.41)$$

Integriranjem prve jednakosti u (6.41) po varijabli x dobivamo:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + c(y), \tag{6.42}$$

gdje je $c(y) = U(x_0,y)$ funkcija koja je konstanta po x a promjenjiva po y. Ako uvrstimo prethodni izraz za $U(x,y)$ u drugu jednakost iz (6.41), dobivamo:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)ds + c'(y). \tag{6.43}$$

Zbog (6.38) član $\frac{\partial P}{\partial y}$ možemo zamjeniti s $\frac{\partial Q}{\partial x}$, a $\frac{\partial U}{\partial y}$ sa $Q(x,y)$, pa prethodna jednakost dobiva svoj ekvivalentni oblik:

$$Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial s}(s,y)ds + c'(y) = Q(x,y) - Q(x_0,y) + c'(y),$$

iz čega slijedi da je $c'(y) = Q(x_0,y)$. Ako integriramo ovu jednakost po varijabli y, tada dobivamo izraz za $c(y)$:

$$c(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Sad uvrstimo ovakav $c(y)$ u (6.42) i dobivamo traženu formulu (6.39). Q.E.D.

DETALJI

Dokaz Teorema 6.6.2 se pita na ispitu. Osim toga, dobro ga je znati u slučaju da ste zaboravili formulu (6.39), a potrebna vam je u rješavanju konkretnog zadatka.

■ **Primjer 6.24** Pokazali smo da je $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ egzaktna diferencijalna jednadžba (Primjer 6.23). Pomoću formule (6.39) sada možemo naći i potencijal $U(x,y)$ uzimajući u obzir da je $P(x,y) = e^{-y}$ i $Q(x,y) = -2y - xe^{-y}$:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_{x_0}^{x} P(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C \\ &= \int_{0}^{x} e^{-y}dx - \int_{0}^{y} (2t + 0e^{-t})dt + C = xe^{-y} - y^2 + C, \end{aligned}$$

gdje smo odabrali za x_0 i y_0 najjednostavnije vrijednosti koje su iz domene funkcija $P(x,y)$ i $Q(x,y)$, odnosno $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Prema tome, još jednom potvrđujemo da je rješenje ove jednadžbe implicitno dano: $xe^{-y} - y^2 = c$. ■

II. način za računanje potencijala $U(x,y)$. Osim primjene formule (6.39), za egzaktnu diferencijalnu jednadžbu $Pdx + Qdy = 0$ je moguće izračunati potencijal $U(x,y)$ i na način da ponovimo kompletan postupak izvođenja formule za potencijal iz dokaza Teorema 6.6.2. Ovo je pokazano u sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.25** (II. način za računanje potencijala za $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$ iz prethodnog primjera):

1. korak: znamo da integriranjem prve jednakosti u (6.41) dobivamo (6.42) odnosno:

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx + c(y) = \int e^{-y}dx + c(y) = e^{-y}x + c(y);$$

2. korak: znamo da nepoznatu $c(y)$ možemo odrediti tako što dobiveni $U(x,y)$ uvrštavamo u drugu jednakost u (6.41) odnosno

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \implies -xe^{-y} + c'(y) = -2y - xe^{-y},$$

iz čega slijedi: $c'(y) = -2y$ odnosno $c(y) = -y^2 + C$.
3. korak: uvrštavamo dobiveni $c(y)$ u potencijal $U(x,y)$ iz prvog koraka:

$$U(x,y) = e^{-y}x + c(y) = e^{-y}x - y^2 + C,$$

iz čega slijedi da je $e^{-y}x - y^2 = c$ rješenje egzaktne diferencijalne jednadžbe:

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

■

Napomena 6.8 Sada ćemo pokazati zašto se nakon separacije varijabli u diferencijalnoj jednadžbi, ako je izvediva, možemo neovisno integrirati lijevu i desnu stranu po dogovarajučim varijablama: nakon separacije dobivamo $Q(y)dy = P(x)dx$ odnosno $P(x)dx - Q(y)dy = 0$. Budući da je:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x) = \frac{\partial}{\partial x}(-Q(y)) = 0,$$

jednadžba $P(x)dx - Q(y)dy = 0$ je egzaktna, pa primjenom Teorema 6.6.2 dobivamo rješenje:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x)dx - \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = c \implies \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x)dx + c.$$

■

DETALJI

U formuli (6.39) najčešći izbor za x_0 i y_0 je $x_0 = y_0 = 0$, pod uvjetom da su te točke iz domene od koeficijenata $P(x,y)$ i $Q(x,y)$. Tada se napamet uvrste donje granice u rezultat integriranja u (6.39), dobivajući time rezultat nula, što može biti pogrešno. U sljedećem primjeru nismo napamet uvrštavali donje granice:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x (2sy^3 + 2se^{s^2}\ln y)ds + \int_1^y \frac{1}{t}dt \\
&= (s^2y^3 + e^{s^2}\ln y)\big|_0^x + \ln t\big|_1^y = x^2y^3 + e^{x^2}\ln y - e^{0^2}\ln y + \ln y - \ln 1 \\
&= x^2y^3 + e^{x^2}\ln y - \ln y + \ln y = x^2y^3 + e^{x^2}\ln y.
\end{aligned}$$

Vježba 6.27 Pokažite da su sljedeće diferencijalne jednadžbe egzaktne te pronađite pripadni potencijal $U(x,y)$ i opće rješenje:

1. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$; **2.** $\left(\frac{3x^2}{y^2} + 1\right)dx - \left(\frac{2x^3}{y^3} + \frac{5}{y^2}\right)dy = 0$;

3. $(y^2\sin(2x) + 1)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$; **4.** $(2x + 2x\sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

Rješenja za Vježbu 6.27 :

1. $U(x,y) = y\ln x + y^4/4 + C,\ 4y\ln x + y^4 = c$;

2. $U(x,y) = x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} + C,\ x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = c$;

3. $U(x,y) = x - y^2\cos^2 x + C,\ x - y^2\cos^2 x = c$;

4. $U(x,y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} + C,\ x^2 + \frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2} = c.$

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.27.2 - I. način ; **Za Vježbu** 6.27.2 - II. način ;
Za Vježbu 6.27.3 - I. način ; **Za Vježbu** 6.27.3 - II. način .

6.6.3 Eulerov multiplikator

Kada jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ nije egzaktna odnosno ne zadovoljava uvjete (6.38):

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},}$$

tada množenjem ove jednadžbe s multiplikatorom $\mu = \mu(x,y)$ (tzv. Eulerov multiplikator) ova jednadžba može postati egzaktna, odnosno:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \implies (\mu P)(x,y)dx + (\mu Q)(x,y)dy = 0 \implies$$

$$\boxed{\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.} \tag{6.44}$$

Ako je uvjet (6.44) zadovoljen, tada iz njega pronalazimo nepoznatu funkciju $\mu = \mu(x,y)$. Naravno, to je teško kada multiplikator $\mu(x,y)$ istovremeno ovisi od obje varijable. Zbog toga, radimo slučajeve kada je $\mu = \mu(x)$ i $\mu = \mu(y)$.

Slučaj $\mu = \mu(x)$. Ovaj slučaj nastupa kada se u (6.44) varijabla y eliminira (pokrati), kao u sljedećem primjeru. Tada (6.44) postaje linearna diferencijalna jednadžba prvog reda po nepoznatoj funkciji $\mu = \mu(x)$ i varijabli x:

$$\boxed{\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu = 0.} \tag{6.45}$$

Sugestija: napišite detaljno račun kako se u ovom slučaju iz (6.44) dobije (6.45) ili pogledajte kako će to profesor na ploči napraviti! Primijetimo da koeficijent u (6.45) ne ovisi o varijabli y nego samo o x, što je uvjet za ovisnost multiplikatora μ o varijabli x.

■ **Primjer 6.26** (*slučaj $\mu = \mu(x)$*) Promatramo diferencijalnu jednadžbu:

$$(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0. \tag{6.46}$$

Budući da je $P(x,y) = x\sin y + y\cos y$ i $Q(x,y) = x\cos y - y\sin y$, lako slijedi da je:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y \neq \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

odnosno ova jednadžba nije egzaktna. Međutim:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -1,$$

odnosno ovaj izraz ne ovisi o varijabli y, pa primjenjujemo slučaj $\mu = \mu(x)$, a ovaj multiplikator određujemo po jednadžbi (6.45):

$$\frac{d\mu}{dx} - \mu = 0 \implies \frac{d\mu}{\mu} = dx \implies \mu(x) = e^x.$$

Prema tome, jednadžba (6.46) nije egzaktna, međutim kad se ona pomnoži s multiplikatorom $\mu(x) = e^x$, tada ona postaje egzaktna:

$$(x\sin y + y\cos y)e^x dx + (x\cos y - y\sin y)e^x dy = 0. \tag{6.47}$$

Na klasičan način pronalazimo potencijal $U(x,y) = (xe^x - e^x)\sin y + e^x y\cos y + c$. Prema tome, opće rješenje za obje jednadžbe (6.46) i (6.47) je dano sa $U(x,y) = C$ odnosno $(xe^x - e^x)\sin y + e^x y\cos y = C$. ■

Slučaj $\mu = \mu(y)$. Ovaj slučaj nastupa kada se u (6.44) varijabla x eliminira (pokrati). Tada (6.44) postaje sljedeća linearna diferencijalna jednadžba prvog reda po nepoznatoj funkciji $\mu = \mu(y)$ i varijabli y:

$$\boxed{\frac{d\mu}{dy} + \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu = 0.} \tag{6.48}$$

Sugestija: napišite detaljno račun kako se u ovom slučaju iz (6.44) dobije (6.48) ili pogledajte kako će to profesor na ploči napraviti! Primijetimo da koeficijent u (6.48) ne ovisi o varijabli x nego samo o y, što je uvjet za ovisnost multiplikatora μ o varijabli y.

■ **Primjer 6.27** (*slučaj $\mu = \mu(y)$*) Promatramo diferencijalnu jednadžbu:

$$(x^2 + \ln y)y dx + x dy = 0. \tag{6.49}$$

Budući da je $P(x,y) = (x^2 + \ln y)y$ i $Q(x,y) = x$, to je:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + x^2 + \ln y \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

što pokazuje da ova jednadžba nije egzaktna. Međutim:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{y},$$

odnosno ovaj izraz ne ovisi o varijabli x, pa primjenjujemo slučaj $\mu = \mu(y)$. Zbog toga ovaj multiplikator odredjujemo po jednadžbi (6.48):

$$\frac{d\mu}{dy} + \frac{1}{y}\mu = 0 \implies \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dy}{y} \implies \mu(y) = \frac{1}{y}.$$

Znamo da jednadžba (6.49) nije egzaktna, ali kad se ona pomnoži s multiplikatorom $\mu(y) = 1/y$, tada ona postaje egzaktna: $(x^2 + \ln y)dx + (x/y)dy = 0$. Na klasičan način pronalazimo potencijal $U(x,y) = x^3/3 + x\ln y + c$. Prema tome, opće rješenje je dano s $U(x,y) = C$, odnosno $x^3/3 + x\ln y = C$. ■

Napomena 6.9 Ukoliko ne znamo unaprijed je li Eulerov multiplikator funkcija od x ili y varijable, tada to možemo otkriti na sljedeći način. Pretpostavimo da diferencijalna jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ nije egzaktna. Nakon množenja ove jednadžbe s $\mu(x,y)$ postavljamo uvjet egzaktnosti (6.44), te u njemu izvršimo sve operacije parcijalnog deriviranja i potom (6.44) napišemo u obliku:

$$P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu. \tag{6.50}$$

Sada, ako je $\mu = \mu(x)$ (odnosno $\mu = \mu(y)$), tada u jednakosti (6.50) treba nestati varijabla y (odnosno x). Na primjer, za jednadžbu $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$, koja nije egzaktna, ako pretpostavimo da je $\mu = \mu(y)$, tada se (6.50) u ovom slučaju reducira na jednakost:

$$y^2\frac{d\mu}{dy} = -3(y + x^2)\mu.$$

Budući da varijabla x nije isčezla, to pretpostavka $\mu = \mu(y)$ nije dobra. Međutim, ako pretpostavimo da je $\mu = \mu(x)$, tada se (6.50) u ovom slučaju reducira na jednakost:

$$x(y + x^2)\frac{d\mu}{dx} = -3(y + x^2)\mu \implies x\frac{d\mu}{dx} = -3\mu,$$

odnosno varijabla y je isčezla. Prema tome, zaključujemo da je $\mu = \mu(x)$. ■

■ **Primjer 6.28** (*slučaj* $\mu = \mu(x,y)$) Pokažimo da je $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$ Eulerov multiplikator diferencijalne jednadžbe $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ te je potom riješimo.

Općenito u slučaju $\mu = \mu(x,y)$ nismo u mogućnosti izračunati multiplikator $\mu(x,y)$ osim ako je on unaprijed zadan, kao u ovom zadatku. Kao prvo, lako je provjeriti da ovo nije egzaktna diferencijalna jednadžba. Dalje, po definiciji znamo da je funkcija $\mu(x,y)$ Eulerov multiplikator jednadžbe $Pdx + Qdy = 0$ (koja nije egzaktna) ako pomnožena takva $(P\mu)dx + (Q\mu)dy = 0$ jest egzaktna odnosno $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$ nije egzaktan DJ dok:

$$\left(1 + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + \frac{y}{x^2 + y^2}dy = 0$$

jest egzaktna DJ. Klasičnim postupkom računamo potencijal ove DJ te dobivamo njen potencijal i njeno rješenje:

$$U(x,y) = x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + c \implies 2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$$

■

Napomena 6.10 (*dva bitno različita tipa Eulerovog multiplikator iste DJ*) Jednadžba $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$ se u prethodnom primjeru rješava pomoću Eulerovog multiplikatora $\mu(x,y)=1/(x^2+y^2)$. Dok u Vježbi 6.28.2 ova ista DJ se rješava pomoću Eulerovog multiplikatora u obliku $\mu=\mu(x)$, gdje se dobiva da je $\mu(x)=e^{2x}$ isto njen Eulerov multiplikator. Primijetimo da ako je $\mu(x,y)$ Eulerov multiplikator neke DJ da je tada i $c\mu(x,y)$ isto Eulerov multiplikator iste DJ, gdje je $c\in\mathbb{R}$. ∎

Vježba 6.28 Pomoću Eulerovog multiplikatora riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1. $(1-xy^3)dx-x^2y^2dy=0$ (koristiti $\mu=\mu(x)$);
2. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$ (koristiti $\mu=\mu(x)$);
3. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$ (koristiti $\mu=\mu(x)$);
4. $(xy+y^2)dx+(xy+1)dy=0$ (koristiti $\mu=\mu(y)$);
5. $y^2dx+(e^x-y)dy=0$ (koristiti $\mu(x,y)=e^{-x}/y$);
6. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin(2y)dy=0$ (koristiti $\mu=\mu(x)$).

Rješenja za Vježbu 6.28 :

1. $\mu(x)=x,\quad 2x^3y^3-3x^2=c$;
2. $\mu(x)=e^{2x},\quad 2x+\ln(x^2+y^2)=c$;
3. $\mu(x)=1/x^3,\quad y^2=x^2(c-2y)$ ($y=0$ je uključeno za $c=0$);
4. $\mu(y)=1/y,\quad x^2/2+xy+\ln|y|=c,\ y=0$;
5. $\ln|y|-ye^{-x}=c,\ y=0$;
6. $\sin^2 y=cx-x^2$.

YT-VIDEO **Za Vježbu** 6.28.3; **Za Vježbu** 6.28.4; **Za Vježbu** 6.28.5.

DETALJI

U jednostavnijim situacijama se ponekad Eulerov multiplikator može i pogoditi, kao u sljedećem primjeru. Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu, koja nije egzaktna (provjerite):

$$(3x+6y^2)dx+\left(6xy+\frac{4y^3}{x}\right)dy=0.$$

Budući da u koeficijentu uz dy postoji razlomak koji jedini bitno narušava balans između koeficijenata uz dx i dy, ovu jednadžbu bi bilo mudro pomnožiti s x i dobiti definitivno jednostavniju:

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$$

Međutim,

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+6xy^2)=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y+4y^3)=12xy,$$

što pokazuje da je ova jednadžba egzaktna i dokazuje da je $\mu(x)=x$ Eulerov multiplikator polazne jednadžbe, pa u ovom slučaju nemamo potrebu raditi generalni postupak za pronalaženje Eulorovog multiplikatora za ovu jednadžbu. Naravno, u večini slučajeva je jako teško pogoditi Eulorovo multiplikator.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 3. dio (cijeli snimak).

6.7 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U točki 6.1.3 smo definirali pojam Cauchyjevog problema te postavili pitanje o uvjetima na funkciju $f(x,y)$ pod kojima imamo egzistenciju ili jedinstvenosti Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{6.51}$$

Definicija 6.7.1 *Rješenje* od (6.51) na otvorenom intervalu $J_0 := \langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ je neprekidna funkcija $y = y(x)$, koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x,y)$ na J_0, početni uvjet $y(x_0) = y_0$ i čija derivacija $y'(x)$ je neprekidna funkcija na J_0. ■

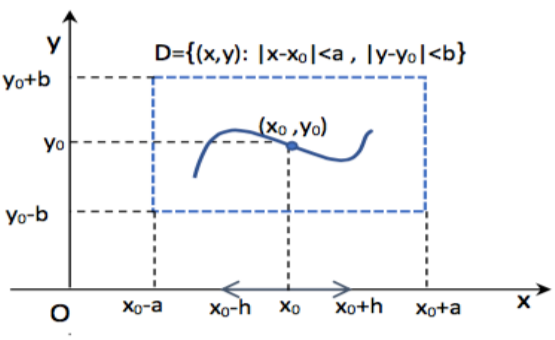
6.7.1 Peanov teorem - lokalna egzistencija rješenja

Ukoliko ne znamo efektivno riješiti (6.51), tada je dobro znati je li (6.51) uopće ima baremo jedno rješenje? Jedan od prvih odgovora na ovo pitanje, ali ne i jedini, sadržan je u sljedećem povijesnom rezultatu.

Teorem 6.7.1 — Peanov teorem o lokalnoj egzistenciji rješenja. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija na pravokutniku

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\right\}$$

oko točke (x_0, y_0). Tada postoji interval oblika $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ na kojem Cauchyev problem (6.51) ima rješenje.



Slika 10.9: Peanov teorem
• PRETPOSTAVKA: funkcija $f(x,y)$ je neprekinuta na pravokutniku D s centrom u točki (x_0, y_0);
• ZAKLJUČAK: postoji rješenje $y(x)$ Cauchyjevog problema (6.51) na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ s centrom u točki x_0.

Peanov teorem govori o egzistenciji rješenja lokalno po varijabli x oko točke x_0. Na primjer, specijalno za $x_0 = y_0 = 0$ i $f(x,y) = 1 + y^2$, problem (6.51) postaje:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{6.52}$$

Iako funkcija $f(x,y) = 1 + y^2$ zadovoljava uvjete Peanovog teorema globalno po (x,y) ($a = -\infty$ i $b = \infty$), pripadno rješenje $y(x) = \operatorname{tg} x$ je definirano lokalno oko $x_0 = 0$ na okolini $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Napomena 6.11 Primijetimo da linearna diferencijalna jednadžba $y' + f(x)y = g(x)$ ima oko svake točke x_0 globalno rješenje koje je definirano formulom (6.13), odnosno za interval egzistencije vrijedi: $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle = \mathbb{R}$. ■

■ **Primjer 6.29** Pokažimo da diferencijalna jednadžba $(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}$ uz uvjet $y(1) = 3$, zadovoljava uvjete Peanovog teorema. Prvo danu jednadžbu trebamo napisati u obliku:

$$y' = \frac{xy^2+4}{x(x-2)}, \; y(1) = 3,$$

gdje je:

$$f(x,y) = \frac{xy^2+4}{x(x-2)} \quad \text{i} \quad (x_0,y_0) = (1,3).$$

Iako funkcija $f(x,y)$ nije definirana pa samim time nije niti neprekidna na okomitim pravcima $x = 0$ i $x = 2$ možemo naći dovoljno mali pravokutnik D oko točke $(1,3)$ a koji je istovremeno dovoljno udaljen od pravaca $x = 0$ i $x = 2$ tako da je $f(x,y)$ definirana i neprekidna na D. Na primjer: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < 1/2,\ |y-3| < b\}$ za bilo kakav $b > 0$. Primjetimo da se u ovom primjeru ne bi ništa bitno promjenilo da smo početni uvjet $y(1) = 3$ zamjenili s $y(1) = y_0$ za bilo koji $y_0 \in \mathbb{R}$. ■

Dodatak

Ideja za dokaz Peanovog teorema. Cauchyjev problem (6.51) je ekvivalentan s integralnom jednadžbom:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt, \tag{6.53}$$

i to u smislu da deriviranjem (6.53) dobivamo (6.51) i obratno, integriranjem (6.51) dobivamo (6.53). Rješenje od (6.53) se traže kao limes Picardovih iteracija koje su rekurzivno definirane:

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt, \; n \in \mathbb{N}, \\ y_0(x) := y_0. \end{cases}$$

Pretpostavljeni uvjeti na fukciju $f(x,y)$ trebaju osigurati da niz $y_n(x)$ konvergira ka funkciji $y(x)$, te da je $y(x)$ rješenje integralne jednadžbe (6.53). Q.E.D.

6.7.2 Picardov teorem - lokalna jedinstvenost rješenja

Ako znamo da postoji baremo jedno rješenje problema (6.51), tada je isto tako važno pitanje jedinstvenost takvog rješenja. Zašto? U slučaju da ne možemo efektivno riješiti problem (6.51), pristupamo njegovom numeričkom rješavanju pod uvjetom da smo ispitali uvjete egzistencije i jedinstvenosti rješenja.

Teorem 6.7.2 — Picardov teorem o lokalnoj jedinstvenosti rješenja. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana na pravokutniku

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\right\}$$

oko točke (x_0,y_0) te neka ima svojstva:

- f je neprekinuta na D;

- $\frac{\partial f}{\partial y}$ je omeđena funkcija na D.

Tada postoji interval oblika $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ na kojem Cauchyev problem (6.51) ima jedinstveno rješenje.

Pri tome uvjet omeđenosti parcijalne derivacije od $f(x,y)$ po y znači da postoji konstanta $M > 0$ tako da vrijedi:

$$\boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq M,\ \forall (x,y) \in D.} \tag{6.54}$$

Primjer 6.30 Pokažimo da Cauchyev problem: $(x-2)y' = y^2 + \frac{4}{x}$, $y(1) = 3$, zadovoljava uvjete Picardovog teorema. U Primjeru 6.29 smo pokazali da se ova jednadžba treba napisati u obliku $y' = f(x,y)$, gdje su:

$$f(x,y) = \frac{xy^2+4}{x(x-2)} \quad \text{i} \quad (x_0,y_0) = (1,3),$$

te smo pokazali da je $f(x,y)$ neprekidna na $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| < 1/2,\ |y-3| < b\}$ za bilo kakav $b > 0$. Budući da je

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2},\ 3-b < y < 3+b \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{x(x-2)},$$

to je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena na D, jer je: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 12(3+b)$, $\forall (x,y) \in D$. Primjetimo da se u ovom primjeru ne bi ništa bitno promjenilo da smo početni uvjet $y(1) = 3$ zamjenili s $y(1) = y_0$ za bilo koji $y_0 \in \mathbb{R}$. ■

Ako napravimo obrat po kontrapoziciji od Picardovog teorema, tada je sljedeća tvrdnja istinita: ako (6.51) nema jedinstveno rješenje na intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ za svaki $h > 0$, tada jedan od uvjeta na funkciju $f(x,y)$ iz Picardovog teorema nije zadovoljen. Ovo ćemo pokazati u sljedećem primjeru u kome Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje.

Primjer 6.31 Neka su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da za Cauchyev problem

$$\begin{cases} \frac{1}{5}y' = \sqrt[5]{y^4}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.55}$$

vrijedi:
a) ako je $y_0 = 0$, tada (6.55) ima dva rješenja i nisu zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema;
b) ako je $y_0 = 1$, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema, pa kao posljedicu (6.55) mora imati jedinstveno rješenje.

Postupak rješavanja. a) Očigledno jedno rješenje od (6.55) je $y_1(x) \equiv 0$. Pretpostavimo sada da je $y(x) \not\equiv 0$. Separacijom varijabli u (6.55) slijedi:

$$\frac{dy}{5\sqrt[5]{y^4}} = dx \implies \sqrt[5]{y(x)} = x + c \implies y(x) = (x+c)^5.$$

Specijalno za $c = -x_0$ dobivamo još jedno rješenje od (6.55): $y_2(x) = (x - x_0)^5$. Prema tome dobili smo dva različita rješenja Cauchyevog problema (6.55) pod uvjetom da je $y_0 = 0$. S druge strane, iz (6.55) slijedi:

$$f(x,y) = 5\sqrt[5]{y^4} \implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{\sqrt[5]{y}},$$

pa je funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ neomeđena u svakoj okolini točke $(x_0, 0)$. Prema tome, ako je $y_0 = 0$, tada (6.55) ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

b) Ako je $y_0 = 1$, tada je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena je na kvadratu oko točke $(x_0, 1)$ duljine stranice $1/2$, pa su o ovom slučaju zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema. ■

Dodatak

U prethodnom primjeru smo prezentirali značenje tvrdnje dobivene obratom po kontrapoziciji tvrdnje Picardovog teorema: "*ako rješenje od* (6.51) *nije jedinstveno, tada nije zadovoljen barem jedan uvjet Picardovog teorema*". Međutim, obrat tvrdnje Picardovog teorema općenito ne vrijedi, odnosno općenito ne vrijedi sljedeća tvrdnja: "*ako je rješenje od* (6.51) *jedinstveno, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema.*" Pokažimo to na primjeru Cauchyjevog problema:

$$y' = \sqrt{y} + 1, \quad y(1) = 0,$$

koji ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema, jer parcijalna derivacije desne strane jednadžbe je $1/(2\sqrt{y})$ što nije omeđena funkcija na bilo kojoj okolini oko točke $(x_0, 0)$, $\forall x_0$, pa specijalno i oko točke $(1, 0)$. S druge strane, ovaj problem ima jedinstveno rješenje, koje se lako dobije separacijom varijabli i uvrštavanjem početnog uvjeta:

$$y' = \sqrt{y} + 1 \implies \frac{dy}{\sqrt{y}+1} = dx \implies \sqrt{y} + 1 - \ln(\sqrt{y} + 1) = \frac{x}{2} + c, \; c = \frac{1}{2}.$$

Vježba 6.29 Pokazati da za Cauchyjev problem $y' = \sqrt[3]{(y-1)^2}$, $y(3) = y_0$, vrijedi:
a) ako je $y_0 = 1$, tada nisu zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema; u ovom slučaju naći barem dva njegova rješenja;
b) ako je $y_0 = 2$, tada su zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema.

Rješenja za Vježbu 6.29 **a)** $f(x,y) = (y-1)^{3-2} \implies \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3}{\sqrt{y-1}}$ - nije definirana u $y = 1$ pa specijalno niti u točki $(3, 1)$, pa nije zadovoljen drugi uvjet Picardovog teorema; dva rješenja su: $y_1(x) = 1$ (direktno uvrštavanje) i $y_2(x) = (x/3 - 1)^3 + 1$ (separacija varijabli);

b) funkcije $f(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ su kao pod a) i prema tome, to su neprekidne funkcije oko točke $(3, 2)$; pravokutnik $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-3| < a, \; |y-2| < 1/2\}$ s centrom u $(3, 2)$ na kome je $\frac{\partial f}{\partial y}$ omeđena za bilo koji $a > 0$.

Vježba 6.30 Pokazati da za svaki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ Cauchyjev problem: $y' = x - 2y$, $y(x_0) = y_0$, zadovoljava uvjete Picardovog teorema.

Rješenja za Vježbu 6.30 $f(x,y) = x - 2y$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2$ je omeđena funkcija na $\mathbb{R}^2$.

Vježba 6.31 Promatramo Cauchyjev problem $xy' = y(\ln y)^{4/5}$, $y(3) = 1$. a) Je li rješenje jedinstveno? b) Jesu li zadovoljeni uvjeti Picardova teorema. Obrazložiti sve tvrdnje.

Rješenja za Vježbu 6.31 a) rješenje nije jedinstveno jer postoje dva rješenja: $y = 1$ (direktno uvrštavanje) i $\ln y = [(\ln x + c)/5]^5$ (separacija varijabli), gdje se c lako odredi uz uvjeta $y(3) = 1$;
b) nisu zadovoljeni uvjeti Picardova teorema jer je $f(x,y) = y(\ln y)^{4/5}/x$, pa $\frac{\partial f}{\partial y}$ nije definirana u $y_0 = 1$.

Dodatak

Osim Peanovog i Picardovog teorema, postoje i neki drugi rezultati o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, kao što su Picard-Lindelöf, Cauchy-Lipschitz itd. U jednom od njih, drugi uvjet Picardovog teorema odnosno (6.54) se pojavljuje u svom ekvivalentnom obliku: $f(x,y)$ je *Lipschitz-neprekidna po drugoj varijabli*, što po definiciji znači da postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \ \forall (x,y_1), (x,y_2) \in D,$$

gdje je D pravokutnik definiran u Picardovom teoremu.

Dodatak

Globalna egzistencija i jedinstvenost rješenja. Ako pravokutnik D u Picardovom teoremu zamjenimo s trakom oko (x_0,y_0), koja je beskonačna po varijabli y, odnosno:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, \ -\infty < y < \infty\right\},$$

i ako $f(x,y)$ zadovoljava obadva uvjeta Picardova teorema na ovakvom D, tada rješenje $y(x)$ Cauchyjevog problema (6.51) globalno postoji i jedinstveno je na intervalu $|x - x_0| \leq a$. Ovdje u zaključku nemamo lokalnu otvorenu okolinu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ oko x_0, nego globalni zatvoreni interval $|x - x_0| \leq a$ oko x_0.

DETALJI

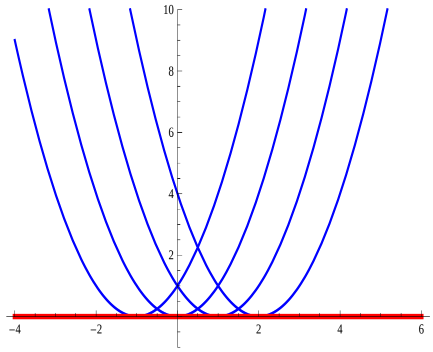
Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 5. dio (dio između 39:23 i 50:36).

6.7.3 Regularna i singularna rješenja

Jedinstvenost i nejedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema, koja smo promatrali u prethodnoj točki, ćemo primijeniti na promatranje regularnih i singularnih rješenja diferencijalne jednadžbe. Ako primjenimo separaciju varijabli na sljedeće dvije naoko veoma slične diferencijalne jednadžbe, tada zaključujemo da vrijedi:

$$(y')^2 = 4y \implies y = 0 \text{ i } y = (x+c)^2, \qquad y' = y^2 \implies y = 0 \text{ i } y = -1/(x+c).$$

Međutim, struktura rješenja ove dvije jednadžbe je bitno različita, u smislu da u prvoj jednadžbi rješenje $y = 0$ - crvena krivulja na slici dolje siječe odnosno tangira svaku krivulju iz općeg rješenja $y = (x+c)^2$ - plave krivulje na slici dolje, dok u drugoj jednadžbi za $y = 0$ to nije slučaj, jer vrijedi $|y| = 1/|x+c| > 0$ (nacrtajte):



Slika 10.10: jednadžba $(y')^2 = 4y \implies$ singularno rješenje $y = 0$-crvena i opće rješenje $y = (x+c)^2$-plava

Još jednostavnije rečeno, u prvom slučaju kažemo da je $y = 0$ *singularno rješenje* od $(y')^2 = 4y$, dok u drugom slučaju kažemo da je $y = 0$ *regularno rješenje* od $y' = y^2$. Preciznije određenje pojmova regularnog i singularnog rješenja je dano u sljedećoj definiciji.

Definicija 6.7.2 Neka je funkcija $z(x)$ jedno fiksirano rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = f(x,y)$. Kažemo:

A) $y_s(x)$ je *singularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x,y)$ ako za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji još jedno rješenje $y(x)$ od $y' = f(x,y)$ koje prolazi točkom $(x_0, y_s(x_0))$ i $y \not\equiv y_s$, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ pripadni Cauchyjev problem $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_s(x_0)$ nema jedinstveno rješenje;

B) $y(x)$ je *regularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x,y)$ ako za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji samo jedno rješenje od $y' = f(x,y)$ koje prolazi točkom $(x_0, y(x_0))$, odnosno za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ pripadni Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje (i to samo $y(x)$);

C) $y(x)$ *nije regularno rješenje* jednadžbe $y' = f(x,y)$ ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ tako da pripadni Cauchyjev problem nema jedinstveno rješenje. ■

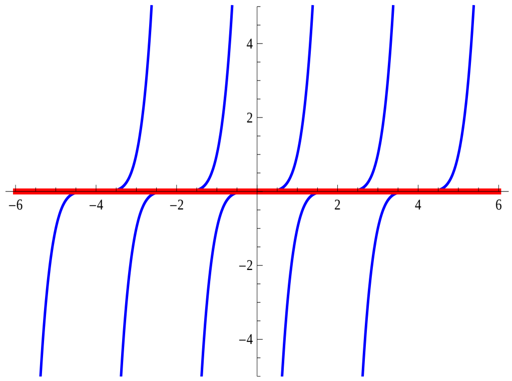
Kako vidimo C) je negacija od B), dok A) nije negacija od B).

Napomena 6.12 Svojstva A), B) i C) možemo izraziti u terminima međusobnih presjeka ili tangiranja rješenja diferencijalne jednadžbe $y' = f(x,y)$. Na primjer, za dokazati B) ekvivalentno je pokazati da rješenje $y(x)$ nema točke presjeka ili tangiranja niti s jednim drugim rješenjem od $y' = f(x,y)$ ili još jednostavnije, pokazati da pripadni Cauchyjev problem zadovoljava uvjete Picardovog teorema u svakoj točki $(x_0, y(x_0))$. A za dokazati C), ekvivalentno je pokazati da postoji jedno drugo rješenje $y_2(x)$ od $y' = f(x,y)$ tako da se $y(x)$ i $y_2(x)$ sijeku ili tangiraju u barem jednoj točki.

■

■ **Primjer 6.32 [slučaj A) iz Definicije 6.7.2]**

U Primjeru 6.31 smo pokazali da Cauchyjev problem (6.55): $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$, $y(x_0) = 0$, za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ ima barem dva rješenja: $y_s(x) = 0$ i $y(x) = (x - x_0)^5$ odnosno $y_s(x)$ i $y(x)$ prolaze kroz točku $(x_0, 0) = (x_0, y_s(x_0))$ za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$. Prema tome, $y_s(x) = 0$ je singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$, kao što je to na sljedećoj slici grafički prikazano: ■



Slika 10.11: jednadžba $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$ ima singularno rješenje $y_s = 0$-crvena i opće rješenje $y = (x-c)^5$-plava

■ **Primjer 6.33 [slučaj B) iz Definicije 6.7.2]**
Pokazat ćemo da su sva rješenja Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe:

$$y' - 2y = y^2, \tag{6.56}$$

regularna i da su dana formulom:

$$y(x) = 0 \quad \text{i} \quad y(x) = \frac{1}{ce^{-2x} - 1/2}. \tag{6.57}$$

Očigledno je $y(x) = 0$ jedno rješenje od (6.56). Ako pretpostavimo da je $y(x) \not\equiv 0$, tada (6.56) možemo riješiti separacijom varijabli ili kao Bernoullijevu transformacijom $y = 1/u$ na linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$u' + 2u = -1 \implies u(x) = ce^{-2x} - 1/2,$$

iz čega slijedi (6.57). Da bi dokazali regularnost svih rješenja od (6.56) primijetimo da je opće rješenje $y(x) = \frac{1}{ce^{-2x}-1/2} \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa se rješenja dana u (6.57) ne sijeku niti u jednoj točki. Treba još pokazati da se međusobno ne sijeku rješenja iz općeg rješenja $y(x)$. Naime, za bilo koja dva različita rješenja

$$y_1(x) = \frac{1}{c_1 e^{-2x} - 1/2} \quad \text{i } y_2(x) = \frac{1}{c_2 e^{-2x} - 1/2},$$

mora vrijediti $c_1 \neq c_2$ pa onda:

$$c_1 \neq c_2 \implies c_1 e^{-2x} \neq c_2 e^{-2x} \implies \frac{1}{c_1 e^{-2x} - 1/2} \neq \frac{1}{c_1 e^{-2x} - 1/2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

odnosno $y_1(x) \neq y_2(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Prema tome $y_1(x)$ i $y_2(x)$ se ne sijeku niti u jednoj točki, čime smo pokazali da su sva rješenja od (6.56) regularna. ■

■ **Primjer 6.34 [slučajevi B) i C) iz Definicije 6.7.2]**
Promatramo rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$y' = 6(x+1)\sqrt[3]{(y-1)^2}. \tag{6.58}$$

Budući da na lijevoj strani u (6.58) vrijedi $y' = (y-1)'$, to separacijom varijabli i direktnim uvrštavanjem zaključujemo da:

1) $y(x) = (x^2+2x+c)^3+1$, $c \in \mathbb{R}$ je opće rješenje od (6.58);
2) $y(x) = 1$ je isto tako rješenje od (6.58) koje nije sadržano u općem rješenju.

Sada ćemo proučiti međusobne presjeke rješenja:

$$(x^2+2x+c)^3+1 = 1 \implies x^2+2x+c = 0 \implies x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-c},$$

odnosno postoje presjeci ako i samo ako je $1-c \geq 0$ odnosno $c \leq 1$. Prema ovome zaključujemo sljedeće:
i) za $c > 1$, svako rješenje $y(x)$ is općeg rješenja $y(x) = (x^2+2x+c)^3+1$ je regularno rješenje od (6.58);
ii) za $c \leq 1$, svako rješenje $y(x)$ is općeg rješenja $y(x) = (x^2+2x+c)^3+1$ nije regularno rješenje od (6.58), jer ima presjek s rješenjem $y(x) = 1$ u barem jednoj točki. ∎

Vježba 6.32 **[slučaj A) iz Definicije 6.7.2]** Pokazati da je $y = 1$ singularno rješenje diferencijalne jednadžbe $x^2y' = y(\ln y)^{1/3}$.

Rješenja za Vježbu 6.32 Očito je $z(x) = 1$ jedno rješenje, pa za svaki x_0 vrijedi $z(x_0) = 1$; separacijom varijable u diferencijalnoj jednadžbi, dolazimo do općeg rješenja:

$$\frac{3}{2}(\ln y)^{2/3} = -\frac{1}{x} + c;$$

ako želimo da kroz svaku točku $(x_0, 1)$ rješenja $z(x) = 1$ prolazi neko drugo rješenje $y(x)$ iz općeg rješenja, dovoljno je iz uvjeta $y(x_0) = 1$ odrediti konstantu c, pa je $c = \frac{1}{x_0}$; sada je $y(x_0) = 1 = z(x_0)$ odnosno kroz svaku točku rješenja $z(x) = 1$ prolazi jedno rješenje $y(x)$ iz općeg rješenja za koji je $y(x_0) = 1$.

Vježba 6.33 **[slučaj B) iz Definicije 6.7.2]** Pokazati da linearna diferencijalna jednadžba $y' + f(x)y = g(x)$ ima samo regularna rješenja.

Rješenja za Vježbu 6.33 Iz formule (6.13) slijedi da je rješenje Cauchyjevog problema $y' + f(x)y = g(x)$, $y(x_0) = y_0$, jedinstveno za svaki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, odnosno svako rješenje linearne jednadžbe $y' + f(x)y = g(x)$ je regularno.

Vježba 6.34 **[slučajevi A), B) i C) iz Definicije 6.7.2]** U ovisnosti o realnom parametru $p \in \mathbb{R}$, promatramo rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$y' = (y-x)^p + 1. \tag{6.59}$$

Pokazati da vrijedi:
1) ako je $p \in (0,1)$, tada je funkcija $y(x) = x$ singularno rješenje jednadžbe (6.59); štoviše, ako je $p < 1$, tada sva druga rješenja nisu regularna i imaju oblik:

$$y(x) = x + [(1-p)(x+c)]^{\frac{1}{1-p}}, \; c \in \mathbb{R};$$

2) ako je $p = 1$, tada jednadžba (6.59) ima samo regularna rješenja dana formulom: $y = ce^x + x$, $c \in \mathbb{R}$;

3) ako je $p = 0$, tada jednadžba (6.59) ima samo regularna rješenja dana formulom: $y = c + x$, $c \in \mathbb{R}$.

Rješenja za Vježbu 6.34 $y(x) = x$ je rješenje od (6.59) (direktno uvrštavanje), a opće rješenje od (6.59) koje je dano u zadatku lako možemo naći supstitucijom $z = y - x$ i separacijom varijabli; potom nađemo konstantu c iz uvjeta $y(x) = x$, iz čega slijedi da kroz svaku točku rješenja $y(x) = x$ prolazi jedno rješenje iz općeg rješenja, što dokazuje da je $y(x) = x$ singularno rješenje.

DETALJI

Prethodni primjeri i vježbe iz ove točke se na ispitu pojavljuju u formi teorijskih zadataka, jer na konkretan način propituju razumjevanje teorije o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja, te o njihovoj regularnosti i singularnosti.

DETALJI

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 5. dio (od 50:37 do kraja snimke).

6.8 Lagrangeova i Clairautova diferencijalna jednadžba

Ako diferencijalnu jednadžbu $F(x, y, y') = 0$ ne možemo razriješiti po y' onda obično koristimo tehniku parametrizacije ove jednadžbe i rješenje dobivamo također u parametarskom obliku.

6.8.1 Lagrangeova diferencijalna jednadžba

Lagrangeova diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika

$$\boxed{y = \varphi(y')x + \psi(y'),} \tag{6.60}$$

gdje su φ i ψ zadane diferencijabilne funkcije. Jednadžbu rješavamo uvodeći parametar p na sljedeći način:

$$\boxed{y' = p \quad (dy = p\,dx).} \tag{6.61}$$

Sada uvrštavanjem u (6.60) dobivamo $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Diferenciranjem ove jednakosti slijedi:

$$dy = \varphi(p)\,dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))\,dp. \tag{6.62}$$

Ako spojimo (6.61) i (6.62) dobivamo $\varphi(p)\,dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))\,dp = p\,dx$, odnosno

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x = -\psi'(p).$$

Ako je $\varphi(p)-p\neq 0$, tada opće rješenje Lagrangeove jednadžbe (6.60) dobivamo rješavanjem jednadžbe:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=-\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p},\ \varphi(p)\neq p.$$

Ako je $\varphi(p)-p=0$, tada singularno rješenje Lagrangeove jednadžbe (6.60) dobivamo eliminiranjem parametra p iz jednakosti $\varphi(p)=p$ i $y=x\varphi(p)+\psi(p)$.

■ **Primjer 6.35** Promatramo Lagrangeovu diferencijalnu jednadžbu:

$$y=-xy'+4\sqrt{y'}. \tag{6.63}$$

Po gornjem postupku, uvodimo supstituciju $y'(x)=p(x)$, te dobivamo:

$$y=-xp+4\sqrt{p}. \tag{6.64}$$

Sada je potrebno naći $x(p)$, pa u tom smislu deriviramo jednakost (6.64) po x i dobivamo:

$$\begin{aligned}
&y=-xp+4\sqrt{p}\,\Big|\,\frac{d}{dx}\\
&\quad\Longrightarrow\ p=y'=-p-x\frac{dp}{dx}+\frac{2}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dx}\\
&\quad\Longrightarrow\ 2p=\frac{dp}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}-x\right)\\
&\quad\Longrightarrow\ \frac{dx}{dp}+\frac{1}{2p}x=\frac{1}{\sqrt{p^3}},\ p\neq 0,\\
&\quad\Longrightarrow\ x(p)=e^{-\int\frac{1}{2p}dp}\left(c+\int\frac{1}{\sqrt{p^3}}e^{\int\frac{1}{2p}dp}dp\right)\\
&\quad\Longrightarrow\ x(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\Big(c+\ln p\Big),\ p\neq 0.
\end{aligned}$$

Ako dobiveni izraz za $x(p)$ uvrstimo u (6.64) tada dobivamo konačno rješenje:

$$\begin{cases} x(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\Big(c+\ln p\Big),\\ y(p)=\sqrt{p}(4-c-\ln p),\ p\neq 0.\end{cases}$$

Ovo rješenje vrijedi uz uvjet da je $p\neq 0$. Sada razmotrimo singularni slučaj $p=0$. Ako uvrstimo $p=0$ u (6.64), tada slijedi da je $y=0$ singularno rješenje Lagrangeove diferencijalne jednadžbe (6.63). ■

Iz povijesti

Joseph-Louis Lagrange (1736.–1813.) je bio talijanski i francuski matematičar, rođen kao Ludovico de la Grange Tournier. Dao je znatne doprinose na polju matematičke analize, teorije brojeva, klasične mehanike, nebeske mehanike i hidrodinamike. Udario je temelje modernom varijacijskom računu, a na ovu temu su poznata dopisivanja između njega i Eulera tijekom 1755. godine, kada je Lagrange imao samo 19 godina :) .

Vježba 6.35 Naći opće i singularno rješenje za sljedeće Lagrangeove diferencijalne jednadžbe:

1. $y = 3xy' - 7y'^3$; **2.** $x(y'^2 + 1) - 2yy' = 0$; **3.** $y = xy'^2 - 2y'^3$;
4. $2xy' - \ln y' = y$; **5.** $3(xy' - y) = y'^3$.

Rješenja za Vježbu 6.35 :
1. $x(p) = 3p^2 + c|p|^{-3/2}, y(p) = 2p^3 + 3c|p|^{-1/2}\mathrm{sgn}(p),\ y = 0$;
2. $x(p) = cp, y(p) = c(p^2 + 1),\ y = \pm x$;
3. $x(p) = (p-1)^{-2}(c + 2p^3 - 3p^2), y(p) = xp^2 - 2p^3,\ y = 0, y = x - 2$;
4. $x(p) = 1/p + c/p^2, y(p) = 2 + 2cp^{-1} - \ln p$;
5. $y = cx - c^3/3,\ y = \pm\frac{2}{3}x^{3/2}$.

6.8.2 Clairautova diferencijalna jednadžba

Clairautova diferencijalna jednadžba je specijalni slučaj Lagrangeove za $\varphi(p) = p$, odnosno

$$\boxed{y = y'x + \psi(y').}$$

Ponovimo li gornji postupak za Lagrangeovu diferencijalnu jednadžbu dobivamo:

$$y' = p \implies y = px + \psi(p) \implies p = y' = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

iz čega slijedi:

$$\boxed{\frac{dp}{dx} \cdot (x + \psi'(p)) = 0.}$$

Prema tome, imamo dvije klase rješenja:
- opće rješenje $\frac{dp}{dx} = 0$ odnosno $p = c,\ c \in \mathbb{R}$,
- singularno rješenje $x + \psi'(p) = 0$.

Ako sad i jedno i drugo rješenje uvrstimo u $y = px + \psi(p)$ dobivamo konačni oblik za ove dvije vrste rješenja:

opće rješenje $y = cx + \psi(c),\ c \in \mathbb{R}$ i singularno rješenje $y = -p\psi'(p) + \psi(p)$.

■ **Primjer 6.36** Promatramo opća i singularna rješenja Clairautove diferencijalne jednadžbe: $y = xy' + 1/y'$. Za $y' = p$ dobivamo $y = xp + \frac{1}{p}$. Deriviranjem po x slijedi:

$$p = y' = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

odnosno

$$\frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0.$$

Sada $\frac{dp}{dx} = 0$ nam daje $p = c$ što zajedno s $y = xp + \frac{1}{p}$ formira opće rješenje:

$$y = cx + \frac{1}{c},\ c \in \mathbb{R}.$$

S druge strane $x - \frac{1}{p^2} = 0$ i $y = xp + \frac{1}{p}$ nam daju $y = 2/p$ što zajedno s $x = 1/p^2$ daje singularno rješenje u obliku: $y^2 = 4x$. ■

Iz povijesti

Alexis Clairaut (1713.–1765.) je bio francuski matematičar, koji je dao doprinose u diferencijalnim jednadžbama, geometriji, astronomiji i geofizici.

Vježba 6.36 Naći opće i singularno rješenje za sljedeće Clairautove diferencijalne jednadžbe:

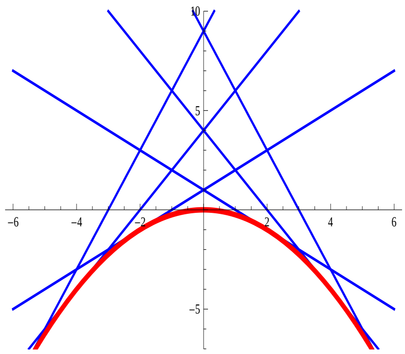
1. $y = xy' - y'^2$; **2.** $y - xy' + 2 + y' = 0$; **3.** $1 = 2y'^2(y - xy')$;
4. $xy' - \ln y' = y$.

Rješenja za Vježbu 6.36 :
1. $y = cx - c^2, y = x^2/4$; **2.** $y = cx - c - 2$; **3.** $y = cx + 1/(2c^2), y = \frac{3}{2}x^{2/3}$
4. $y = cx - \ln c, y = \ln x + 1$.

6.8.3 Ovojnica familije krivulja

Da bi objasnili geometrijsku povezanost singularnog i općeg rješenja Clairautove jednadžbe, uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 6.8.1 Graf funkcije $y(x)$ je ovojnica zadane familije krivulja $\Phi(x, y, c) = 0$ ako tangira svaku krivulju iz ove familije. ■



Slika 10.12: ovojnica $y = -x^2/4$-crvena, familije pravaca $y = cx + c^2$-plava

■ **Primjer 6.37** Parabola $y = -x^2/4$ je ovojnica familije pravaca $y = cx + c^2$, jer je svaki pravac iz zadane familije pravaca tangenta na ovu parabolu, što znači da ova parabola tangira sve pravce iz ove familije. Zaista, neka je $y = Cx + C^2$ jedan konkretan pravac iz familije. Pokazat ćemo da postoji točka (x_0, y_0) na paraboli u kojoj se ove dvije krivulje tangiraju, odnosno u kojoj je dani pravac tangenta ove parabole. Dakle, tražena točka (x_0, y_0) je na paraboli: $y_0 = -x_0^2/4$, a jednadžba njene tangente je:

$$y + \frac{x_0^2}{4} = -\frac{x_0}{2}(x - x_0) \implies y = -\frac{x_0}{2}x - \frac{x_0^2}{4}.$$

Uvjet tangiranja: $C = -x_0/2$ iz čega slijedi: $x_0 = 2C$. Prema tome, svaki pravac iz ove familije pravaca $y = cx + c^2$ tangira zadanu parabolu u njenoj točki $(2c, -c^2)$. ■

Primijetimo da je $y = -x^2/4$ singularno rješenje, a $y = cx + c^2$ opće rješenje Clairautove diferencijalne jednadžbe: $y = xy' + y'^2$. Ovo vrijedi za svaku Clairautovu diferencijalnu jednadžbu: *singularno rješenje je ovojnica familije krivulja iz općeg rješenja.*

■ **Primjer 6.38** Odredimo ovojnicu familije pravaca $y = cx + 1/c$. Pripadna Clairautova diferencijalna jednadžba je $y = xy' + 1/y'$. U Primjeru 6.36 smo pokazali da je parabola $y^2 = 4x$ singularno rješenje ove diferencijalne jednadžbe. Prema tome, geometrijski gledano je $y^2 = 4x$ ovojnica familije pravaca $y = cx + 1/c$. ■

Vježba 6.37 Za svaku od sljedećih familija krivulja odrediti njihovu ovojnicu:

1. $y = cx - c^2$; **2.** $y = cx + \frac{1}{2c^2}$; **3.** $y = cx - \ln c$.

Rješenja za Vježbu 6.37 :

1. $y = x^2/4$; **2.** $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$; **3.** $y = \ln x + 1$.

Sličan sadržaj ovom potpoglavlju možete pogledati i u video-predavanju iz Matan 2 - 2019./20., klikom na poveznicu:
Diferencijalne jednadžbe prvog reda - 4. dio (od 20:50 do kraja snimke).

6.9 Dodatak - Numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe

Egzaktno rješenje Cauchyjevog problema obično možemo dobiti u obliku formule. Primjerice, ako rješavamo problem $y' = x$, $y(0) = 1$ za rješenje ćemo dobiti $y(x) = x^2/2 + 1$. Suprotno tome, pod numeričkim rješenjem diferencijalne jednadžbe smatramo skup vrijednosti koje aproksimiraju analitičko rješenje na danom skupu točaka $x_0, \dots, x_n$. Dakle, numeričko rješenje bio bi skup vrijednosti $y_0, \dots, y_n$, koji obično zapisujemo kao vektor rješenja. Pri tome je y_i približno jednako $y(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots n$. Ovisno o tome na koji način ćemo iz y_n računati vrijednost y_{n+1} dobivamo različite numeričke metode. Nadalje, ukoliko se za računanje y_{n+1} koristi y_n metoda se zove jednokoračna metoda, a ako koristimo više prethodnih vrijednosti metoda se zove višekoračna. Najjednostavniji primjer jednokoračne takve metode je Eulerova metoda.

6.9.1 Eulerova metoda

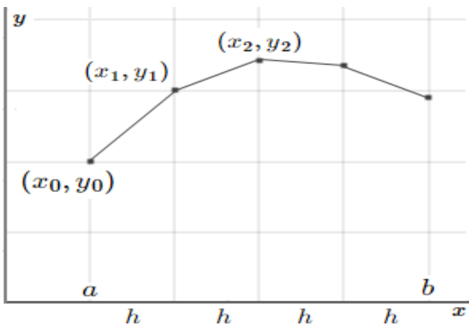
Problem 6.3 Zadana su tri realna broja x_0, y_0, b ($b > x_0$), funkcija $f(x,y)$ i prirodni broj m. Želimo aproksimirati rješenje $y = y(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{6.65}$$

u točki $x = b$ koristeči podjelu intervala $[x_0, b]$ na m podintervala jednake duljine: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{m-1}, x_m = b]$, gdje je

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 1, 2, \ldots m \quad \text{i} \quad h = \frac{b - x_0}{m}.$$

Broj h predstavlja duljinu svakog podintervala, odnosno $h = x_n - x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots m$. Prema tome, aproksimiramo $y(b) = y(x_m)$ sa brojem y_m, koji je zadnji član u nizu aproksimacija y_0, y_1, y_2, $\cdots$, y_m, a koje ćemo dobiti Eulerovom (numeričkom) metodom.



Slika 10.13: rješenje $y(x)$ aproksimiramo nizom aproksimacija y_0, y_1, y_2, $\cdots$, y_m

Pokažimo kako Eulerovom metodom dobivamo niz aproksimacija y_1, y_2, ..., y_m dobivamo na sljedeći način: kroz početnu točku (x_0, y_0), koja je zadana u (6.65) povučemo tangentu na rješenje $y = y(x)$, koja ima jednadžbu: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Budući da je $y'(x) = f(x, y(x))$, ova tangenta poprima oblik: $y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$. Ako je presiječemo s okomitim pravcem $x = x_1$, dobivamo $y(x_1) - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Ako pretpostavimo da je $y_1 := y(x_1)$, tada je $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Ovaj postupak induktivno ponovimo tako da umjesto (x_0, y_0) promatramo upravo dobivenu (x_1, y_1) i tako dalje:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \; n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Na ovaj način smo dobili po dijelovima linearnu funkciju koja aproksimira $y(x)$ i vrijedi $y(x_n) = y_n$, vidi sliku gore.

Cijeli postupak dobivanja niza aproksimacija (x_n, y_n) Eulerovom metodom je moguće zapisati u jednu tablicu, u kojoj se po stupcima nalaze redom nizovi x_n, y_n, $f(x_n, y_n)$ i y_{n+1}, a broj redaka $m+1$, te se popunjava s lijeva na desno i odozgo prema dolje:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n)$
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$y_1 := y_0 + hf(x_0, y_0)$
1	$x_1 := x_0 + h$	y_1	$f(x_1, y_1)$	$y_2 := y_1 + hf(x_1, y_1)$
2	$x_2 := x_1 + h$	y_2	$f(x_2, y_2)$	$y_3 := y_2 + hf(x_2, y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$b = x_m$	y_m		

Primjer 6.39 Eulerovom metodom trebamo aproksimirati rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = y^2 + x, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{6.66}$$

u točki $x = 1$ koristeči podjelu intervala $[0,1]$ na 5 podintervala jednake duljine. Zbog ovog uvjeta, duljina svakog podintervala $h = 0,2$. Postupak ćemo prikazati u sljedećoj tablici:

n	x_n	y_n	$f(x_n,y_n) = x_n + y_n^2$	$y_{n+1} := y_n + hf(x_n,y_n)$
0	0	0	$f(x_0,y_0) = 0$	$y_1 = 0$
1	0,2	0	0,2	0,04
2	0,4	0,04	0,4016	0,12032
3	0,6	0,12032	0,61144769024	0,24321538048
4	0,8	0,24321538048	0,8591537213	0,41504612474
5	1	$y_5 = 0,41504612474$		

Prema tome, dobili smo da je $y(1) \approx y_5 = 0,41504612474$. ■

Vježba 6.38 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{2y-2x}, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

u točki $x = 1,3$ koristeči podjelu intervala $[1, 1,3]$ na 3 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 5 decimala.

Rješenja za Vježbu 6.38 $y_3 = 2,44022$.

Vježba 6.39 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

u točki $x = 0,5$ koristeči podjelu intervala $[0, 0,5]$ na 5 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 5 decimala.

Rješenja za Vježbu 6.39 $y_5 = 3,11051$.

Vježba 6.40 Eulerovom metodom aproksimirajte rješenje Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = -2y + x^3 , \\ y(0) = 0,25 , \end{cases}$$

u točki $x = 0,6$ koristeči podjelu intervala $[0, 0,6]$ na 6 podintervala jednake duljine. Račun provedite na 4 decimale.

Rješenja za Vježbu 6.40 $y_6 = 0,0853$.

Napomena 6.13 Znamo da rješenje Cauchyjevog problema (6.65) možemo zapisati u obliku $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$. Ako uzmemo $h = x_1 - x_0$ i aproksimiramo podintegralnu funkciju konstantom $f(x_0,y_0)$ dolazimo do Eulerove metode. Postoje određene modifikacije Eulerove metode, ovisno o tome kako odlučimo aproksimirati podintegralnu funkciju. ■

Napomena 6.14 Eulerova metoda nije jedina numerička metoda za aproksimaciju rješenja Cauchyjevog problema. Postoje i razne varijante Eulerove metode, pa Runge-Kutta metoda i njene razne varijante, i tako dalje. ■

6.9.2 Taylorova metoda - numerička aproksimacija Picardovih iteracija

Postoje razne varijante Taylorove metode, koje imaju zajedničku ideju: neki se dio u diferencijalnoj jednadžbi zamijeni s Taylorovim polinomima raznog reda (najčešće reda 2). Da bi izbjegli dobivanje slične metode Eulerovoj metodi, ovdje primjenjujemo Taylorove polinome u dobivanju numeričke aproksimacije Picardovih iteracija.

U dokazu o egzistenciji lokalnog rješenja Cauchyjevog problema za diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, prethodna diferencijalna jednadžba se zamjenjuje s ekvivalentnom integralnom jednadžbom:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

koja se pak rješava kao limes Picardovih iteracija koje su definirane s:

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \ n \in \mathbb{N}, \\ y_0(x) := y_0. \end{cases} \tag{6.67}$$

Problem 6.4 Zadani su realni brojevi x_0 i y_0, funkcija $f(x,y)$ i prirodni broj m. Pronaći numeričku aproksimaciju $\widehat{y}_m(x)$ za m-tu Picardovu iteraciju $y_m(x)$ iz (6.67), gdje se podintegralna funkcija $f(x, y_n(x))$ prije integriranja razvija u Taylorov polinom n-tog reda po potencijama $x - x_0$, odnosno:

$$\begin{cases} \widehat{y}_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} T_n[f(t, \widehat{y}_n(t))]dt, \ n = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \\ \widehat{y}_0(x) := y_0, \end{cases} \tag{6.68}$$

gdje $T_n[f(t, \widehat{y}_n(t))]$ označava Taylorov polinom n-tog stupnja po $t - t_0$ od funkcije $F(t) = f(t, \widehat{y}_n(t))$. Pri tome je $T_0[f(t, \widehat{y}_0(t))]$ prvi i jedini član u Taylorovom polinomu nultog reda odnosno

$$T_0[f(t, \widehat{y}_0(t))] = f(x_0, \widehat{y}_0(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

□

Ovu metodu ćemo demonstrirati na sljedećem primjeru.

■ **Primjer 6.40** Odredimo numeričku aproksimaciju $\widehat{y}_3(x)$ za Picardovu iteraciju $y_3(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x+y} + x, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{6.69}$$

Budući da je $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ i $f(x,y) = \sqrt{x+y} + x$, iz (6.68) slijedi:

$$\widehat{y}_0(x) = 1, \ T_0[f(t, \widehat{y}_0(t))] = f(0,1) = 1;$$

$$\widehat{y}_1(x) = 1 + \int_0^x T_0[f(t, \widehat{y}_0(t))]dt = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x;$$

$$T_1[f(t,\widehat{y}_1(t))] = T_1[\sqrt{t+\widehat{y}_1(t)}+t] = T_1[\sqrt{1+2t}+t] = 1+2t,$$

$$\widehat{y}_2(x) = 1+\int_0^x T_1[f(t,\widehat{y}_1(t))]dt = 1+\int_0^x (1+2t)dt = 1+x+x^2;$$

$$T_2[f(t,\widehat{y}_2(t))] = T_1[\sqrt{t+\widehat{y}_2(t)}+t] = T_2[\sqrt{1+2t+t^2}+t] = 1+2t,$$

$$\widehat{y}_3(x) = 1+\int_0^x T_2[f(t,\widehat{y}_2(t))]dt = 1+\int_0^x (1+2t)dt = 1+x+x^2,$$

gdje smo koristili formulu za Taylorov polinom:

$$T_n[\sqrt{1+x}] = 1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^k k!}x^k = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots$$

Primijetimo da je $\widehat{y}_2(x) = \widehat{y}_3(x) = 1+x+x^2$, što je moguće budući da je funkcija $y(x) = x^2+x+1$ doista rješenje Cauchyjevog problema (6.69). ■

Vježba 6.41 Odredimo numeričku aproksimaciju $\widehat{y}_3(x)$ za Picardovu iteraciju $y_3(x)$ Cauchyjevog problema:

$$\begin{cases} y' = 1+x^3y(y-x^{10}), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Rješenja za Vježbu 6.41 $\widehat{y}_3(x) = x+\frac{x^6}{6}+\frac{x^{11}}{33}$.

6.10 Pitanja za ponavljanje gradiva

Odgovor na svako pitanje pokušajte obrazložiti matematičkim argumentima.

1. U svakoj se diferencijalnoj jednadžbi mogu separirati varijable? Ako je odgovor negativan, navedi po jedan primjer diferencijalne jednadžbe, za i protiv ove tvrdnje.
2. Ako je moguća separacija varijabli u nekoj diferencijalnoj jednadžbi, objasni zašto se nakon separacije varijabli mogu lijeva i desna strana neovisno integrirati svaka po svojoj varijabli?
3. Napiši i izvedi formulu za opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Možemo li iz ove formule zaključiti da su rješenja Cauchyjevog problema za linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda globalna i jedinstvena?
4. Postupak kojim se Bernoullijeva diferencijalna jednadžba transformira u pripadnu linearnu diferencijalnu jednadžbu se može nazvati linearizacija nelinearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Ovo je točna ili netočna tvrdnja?
5. Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu $y'+xy = xy^2$ možemo riješiti i separacijom varijabli? Ako da, koji postupak je na ovoj jednadžbi brži: Bernoullijeva linearizacija ili separacija varijabli?
6. Kružnica $x^2+y^2 = 1$ i pravac $y = x$ su međusobno ortogonalne trajektorije? Familije kružnica $x^2+y^2 = c$ i pravaca $y = Cx$ su međusobno ortogonalne familije?
7. Nužni i dovoljni uvjeti za egzaktnost diferencijalne jednadžbe su isti ili različiti?
8. Napiši i izvedi formulu za opće rješenje egzaktne diferencijalne jednadžbe.
9. Što je to Eulerov multiplikator? Kako prepoznati da je Eulerov multiplikator funkcija po x ili y varijabli?

10. Cauchyjev problem $y' = y^p$, $y(x_0) = 0$ ne zadovoljava uvjete Picardovog teorema ako je $p \neq 1$?
11. Ako je $p \in (0,1)$ tada je $y = 0$ singularno rješenje, a ako je $p \geq 1$ tada je $y = 0$ regularno rješenje Cauchyjevog problema $y' = y^p$, $y(x_0) = 0$?
12. Je li svaka Clairautova diferencijalna jednadžba specijalni oblik Lagrangeove diferencijalne jednadžbe?
13. Koja od ove dvije diferencijalne jednadžbe je Lagrangeova a nije Clairautove diferencijalna jednadžba: $y = xy' - y'^2$ i $y = 2xy' - y'^2$?
14. Navedi i grafički skiciraj geometrijski smisao singularnog rješenja Clairautove diferencijalne jednadžbe $y = xy' + 1/y'$?
15. U kojoj minuti i sceni filma "Spiderman 2", glavni glumac spominje "Brachistochrone" problem, koji smo kao dodatak razmatrali u potpoglavlju 6.5.3?

6.11 Zadaci

U sljedećim zadacima riješiti diferencijalne jednadžbe prvog reda.

1. $y' + y - xy^3 = 0$; **2.** $(y\cos x - x^2)dx + (\sin x + y)dy = 0$;
3. $y^2 \operatorname{ctg} x + yy' = \cos x$; **4.** $y - y' = xy'^2$;
5. $y^2 - xyy' = \sqrt{x^4 + y^4}$; **6.** $2xy' + y^2 = 1$;
7. $y^2 + xy' = y - y'$; **8.** $xy + y^2 = x^2 y'$;
9. $xydx + (1 - x^2)dy = 0$; **10.** $3y = x^2 y' - 2xy$;
11. $(x - y^2)dy = dx$; **12.** $(x + y)^2 y' = 1$;
13. $\frac{dx}{x} - (1/y - 2x)dy = 0$; **14.** $ydx - (2x - 2y^2)dy = 0$;
15. $x(x-1)y' + 2xy = 1$;
16. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$; **17.** $dx - (x\cos y + \sin(2y))dy = 0$;
18. $(4xy - 3)y' + y^2 = 1$; **19.** $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$;
20. $xy'/y + 2xy\ln(x) + 1 = 0$; **21.** $(1 - x^2 y)dx + (x^2 y - x^3)dy = 0$;
22. $ye^y dx - (2xe^y + y^4)dy = 0$; **23.** $(6x^2 - 2xy^2 + 1)dx - (2x^2 y - 3y^2)dy = 0$;
24. $xyy' = y^2 - x^2,\ y(1) = \sqrt{2}$; **25.** $y' + (\operatorname{tg} x)y = 2\cos^2 x,\ y(0) = 1$;
26. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0,\ y(1) = 1$.

6.12 Rješenja za zadatke

1. $y^2(ce^{2x} + x + 1/2) = 1, y = 0$; **2.** $-x^3/3 + y^2/2 + y\sin x = c$;
3. $2\sin x + c/\sin^2 x = 3y^2$; **4.** $x = \frac{\ln(cp) - p}{(p-1)^2}, y = xp^2 + p, \quad y = 0$;
5. $\sqrt{x^4 + y^4} + y^2 = c$; **6.** $cx - 1 = (cx + 1)y, \quad y = 1$;
7. $y = (x+1)/(x+c), \quad y = 0$; **8.** $y\ln(cx) + x = 0, y = 0$;
9. $y^2 = c(x^2 - 1)$; **10.** $y = cx^2 \exp(-3/x)$;
11. $x = ce^y + y^2 + 2y + 2$; **12.** $x + y = \operatorname{tg}(y - c)$;
13. $y(yx - 1) = cx$; **14.** $x = y^2(c - \ln(y^2)), y = 0$;

15. $(x-1)^2 y = x - \ln x + c$;

16. $y^{2/3} = ce^{2x} + x/3 + 1/6, \quad y = 0$; **17.** $x + 2 + 2\sin y = ce^{\sin y}$;

18. $x(y^2-1)^2 = y^3 - 3y + c \quad y = \pm 1$; **19.** $xy\cos x - y^2 = c$;

20. $xy(\ln^2 x + c) = 1$; **21.** $y^2/2 - 1/x - xy = c$;

22. $x = y^2(c - (y+1)e^{-y}), \quad y = 0$; **23.** $2x^3 - x^2y^2 + y^3 + x = c$;

24. $y^2 = x^2 \ln \frac{e^2}{x^2}$; **25.** $y(x) = (2\sin x + 1)\cos x$;

26. $x^2 + y^2 + xy + x = 4$.

Kazalo