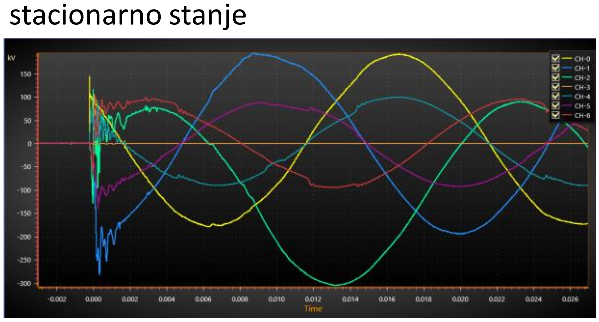
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

15. Prijelazne pojave

Prijelazne pojave

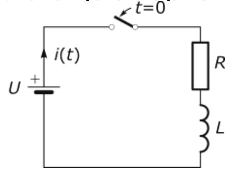
- Do sada smo proučavali linearne mreže u stacionarnom stanju
- Prilikom uključivanja aktivnih ili pasivnih dijelova električnog kruga dolazi do prijelazne pojave
- Nakon dovoljno dugog vremenskog perioda nakon uključenja ili isključenja naponske i strujne prilike u krugu postupno prelaze u stacionarno stanje



Trenutne vrijednosti napona nakon priključenja tereta u trofaznoj elektroenergetskoj mreži

LR krug priključen na izvor stalnog napona

• **Priključenje na izvor:** U trenutku t=0 zatvara se sklopka; Prije zatvaranja sklopke kroz zavojnicu ne teče struja



$$U = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Nakon zatvaranja sklopke: 2. Kirchhoffov zakon

Diferencijalna jednadžba oblika: $$F = \frac{dy}{dx} - a \cdot y$$

a je konstanta, a F može biti funkcija od x ali ne i od y

• Diferencijalna jednadžba je jednadžba s nepoznatim funkcijama, nezavisnim varijablama i derivacijama (ili diferencijalima) nepoznatih funkcija

• Nepoznata funkcija je funkcija struje u krugu $i(t)$, a nezavisna varijabla je vrijeme t

LR krug priključen na izvor stalnog napona

Opće rješenje:

$$y = c \cdot e^{ax} + e^{ax}\int e^{-ax} F dx$$

Konstantu c u rješenju određuju početni uvjeti

$a = -\dfrac{R}{L}$ $\quad F = \dfrac{U}{L}$ $\quad y=i \quad x=t$ daje opći oblik rješenja za LR krug:

$$i(t) = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\left(\frac{U}{L}\right)dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{U}{R}$$

$t \to \infty \qquad I = \dfrac{U}{R}$ Poznato rješenje u stacionarnom stanju

• Redom diferencijalne jednadžbe nazivamo red najviše derivacije (ili diferencijala) u jednadžbi – navedena jednadžba je diferencijalna jednadžba prvog reda

LR krug priključen na izvor stalnog napona

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int u_L(t)dt$$

Određivanje konstante c :

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad i(0)=0=ce^{-(R/L)\cdot 0}+\frac{U}{R}=c+\frac{U}{R} \qquad c=-\frac{U}{R}$$

$$i(t)=\frac{U}{R}\left(1-e^{-(R/L)\cdot t}\right)$$

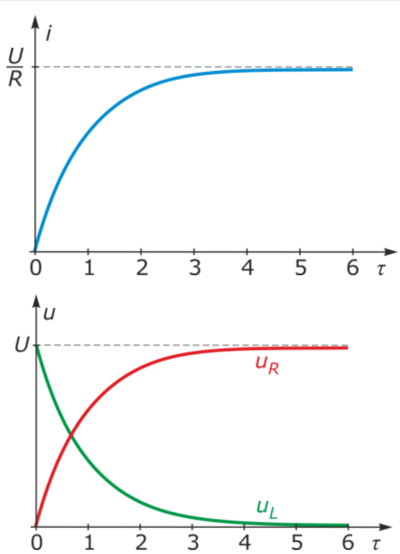
$$\tau=\frac{L}{R}$$

Vremenska konstanta kruga $[\tau]=\mathrm{s}$

$$i(t)=\frac{U}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Općenito se nakon vremenskog intervala od pet vremenskih konstanti prijelazna pojava smatra završenom, kada struja poprima 99,3 % konačne vrijednosti

LR krug priključen na izvor stalnog napona



- Krugovi prvoga reda su krugovi koje opisuje diferencijalna jednadžba prvog reda
- Sastoje se od jednog reaktivnog elementa (induktiviteta ili kapaciteta), otpornika (jednoga ili više) i izvora

$$u_R(t)=R\cdot i(t)=U\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$u_L(t)=U-u_R(t)=Ue^{-t/\tau}$$

ili

$$u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}=Ue^{-t/\tau}$$

LR krug priključen na izvor stalnog napona

- U navedenoj prijelaznoj pojavi nema naglog skoka električne struje kroz zavojnicu
- Možemo poopćiti:

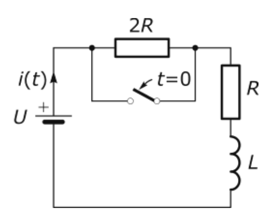
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{\theta=t_0}^{t} u_L(\theta) d\theta$$

Budući da gornja jednadžba predstavlja funkciju koja je integral s promjenjivom gornjom granicom, ona mora biti neprekinuta funkcija na $t \in [t_0, t_{max}]$ na kojem je funkcija integrabilna

Fizikalna interpretacija je da električna struja kroz zavojnicu mora biti neprekinuta funkcija, odnosno da kod struje u zavojnici ne može biti skokovitih promjena. U protivnom bi se pojavio beskonačni napon na zavojnici.

LR krug priključen na izvor stalnog napona

Primjer 1. U krugu prema slici prije zatvaranja sklopke struja teče dovoljno dugo da možemo smatrati da je postignuto stacionarno stanje. Koliki je napon na otporniku R neposredno nakon zatvaranja sklopke (u trenutku t=0$^+$) ?



Rješenje:

$$i_0 = \frac{U}{3R}$$

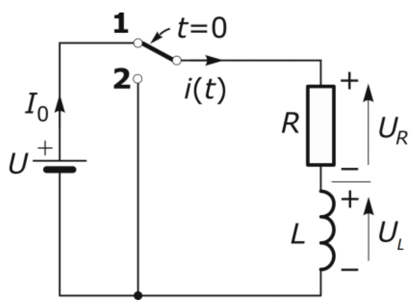
$$U_R(t=0^+) = i_0 \cdot R = \frac{U}{3R} R = \frac{U}{3}$$

LR krug priključen na izvor stalnog napona

- **Isključenje izvora:** Pretpostavimo da se sklopka dovoljno dugo nalazi u položaju (1), pa možemo smatrati da je prijelazna pojava završila

$$i_L(t \to \infty) = I_0 = \frac{U}{R}$$

- U trenutku t=0 sklopka se trenutno preklapa iz položaja (1) u položaj (2)
- U položaju (2) postavljamo jednadžbu 2. Kirchhoffovoga zakona



$$0 = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

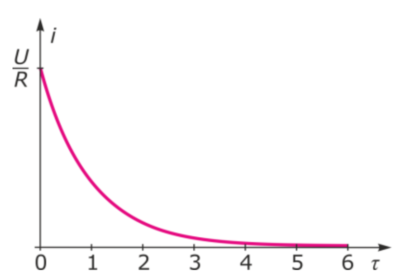
Rješenje:

$$i(t) = ce^{-(R/L)t} = ce^{-t/\tau}$$

Konstanta c određuje se iz početnih uvjeta

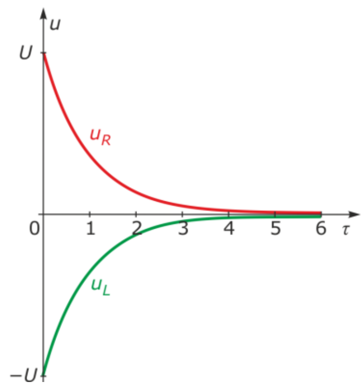
LR krug priključen na izvor stalnog napona

$$i_L(t=0) = I_0 = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad i(t=0) = ce^0 = I_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{U}{R}$$



$$i(t) = \frac{U}{R}e^{-t/\tau}$$

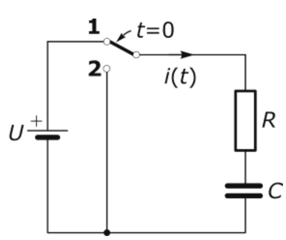
LR krug priključen na izvor stalnog napona



$$u_R(t) = Ri(t) = Ue^{-t/\tau}$$

$$u_L(t) = 0 - u_R(t) = -Ue^{-t/\tau}$$

RC krug priključen na izvor stalnog napona



Priključenje izvora:

U trenutku t=0 sklopka se trenutno preklapa u položaj (1)

$$U = R \cdot i(t) + \frac{Q_C}{C} = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Deriviranjem se dobija: $\frac{i(t)}{C} + R\frac{di(t)}{dt} = 0$

Isti opći oblik diferencijalne jednadžbe kao kod LR kruga: $F = \frac{dy}{dx} - a \cdot y$

$$y = i(t) \quad a = -\frac{1}{RC} \quad x = t \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot e^{ax} = c \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC krug priključen na izvor stalnog napona

$\tau = RC$ vremenska konstanta

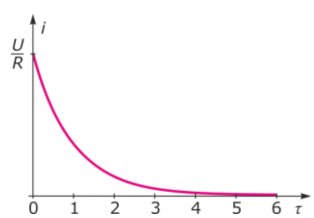
$$i(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Određivanje konstante c :

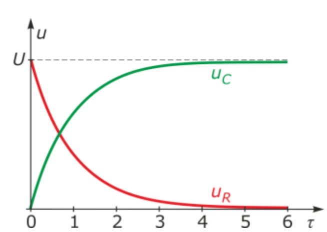
$$U = R \cdot i(t) + \frac{Q_C}{C} = R \cdot i(t) \quad , \quad Q_C(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad U = R \cdot i(0) = Ri_0$$

$$i_0 = i(0) = c \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = c = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC krug priključen na izvor stalnog napona



$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

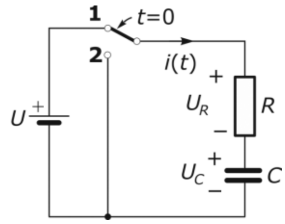


$$u_R(t) = Ri(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = U - u_R(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

RC krug priključen na izvor stalnog napona

Izbijanje kondenzatora: U trenutku t=0 preklopka se trenutno preklapa u položaj (2)



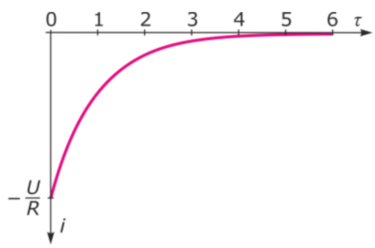
$$0 = R \cdot i(t) + \frac{Q_C}{C} = R \cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Rješenje: $i(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

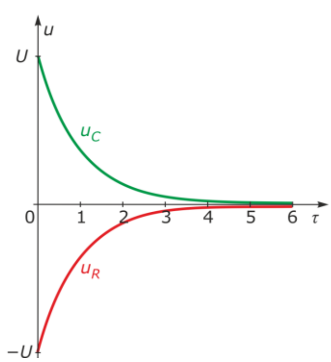
Određivanje konstante c :

$$I_0 = i(t=0) = -\frac{U}{R}$$

$$i(t) = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



RC krug priključen na izvor stalnog napona



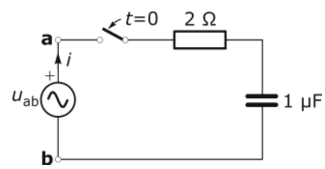
$$u_R(t) = Ri(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = -u_R(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Analogno struji kroz zavojnicu, napon na kondenzatoru ne može poprimiti skokovitu promjenu – funkcija napona na kondenzatoru mora biti neprekinuta funkcija.

RC krug priključen na izvor stalnog napona

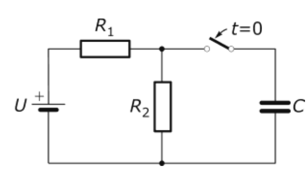
Primjer 2. U krugu prema slici sklopka se zatvara u trenutku kada je napon izvora $u_{ab}(t) = -5\ \mathrm{V}$. Odredite struju i i napon na otporniku u trenutku t=0$^+$ neposredno nakon zatvaranja sklopke. Prije zatvaranja sklopke kondenzator je bio nenabijen.



Rješenje:
-2,5 A ; 5 V

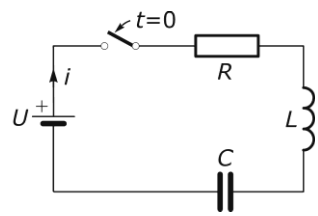
RC krug priključen na izvor stalnog napona

Primjer 3. U krugu prema slici kondenzator je prije zatvaranja sklopke bio nenabijen. U trenutku t=0 zatvara se sklopka. Odredite naboj na kondenzatoru u trenutku t=150 μs. Zadano: R_1=4kΩ, R_2=12 kΩ, C=25 nF, U=120 V.



Rješenje:
$Q=Cu_C$=1,945 μC

RLC krug priključen na izvor stalnog napona



Priključivanje izvora:

2. Kirchhoffov zakon:

$$U = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Deriviranjem se dobija diferencijalna jednadžba:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0 \qquad a_2\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Partikularno rješenje: $y = e^{rx}$ Opći oblik rješenja: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Uvrštenjem pretpostavljenog partikularnog rješenja u diferencijalnu jednadžbu dobivamo **karakterističnu jednadžbu** čija su rješenja konstante r_1 i r_2: $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

Rješenja **karakteristične jednadžbe**:

$$r_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}} \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Uvode se supstitucije:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ **- faktor prigušenja**

$\beta = \sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}$ Može biti veće od nule,manje od nule ili jednako nuli !

$$\Rightarrow \quad r_1 = -\alpha + \beta \qquad r_2 = -\alpha - \beta$$

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

(1)Podkritično prigušeni titrajni krug – titrajno prigušeno rješenje

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni:

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad r_{1,2} = -\alpha \pm jb$$

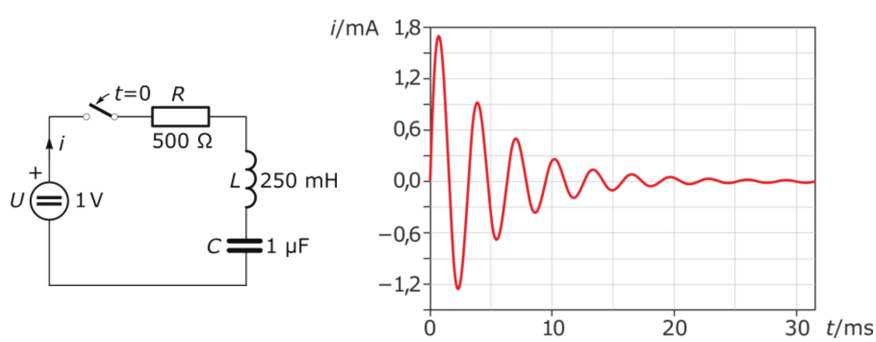
$$b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$ Kružna frekvencija prigušenog titranja

Opće rješenje: $i(t) = e^{-\alpha t}\left(K_1 \cos bt + K_2 \sin bt\right)$

Kompaktni zapis rješenja: $i(t) = Ke^{-\alpha t}\sin(bt + \varphi)$

Konstante K i φ određuju se iz početnih uvjeta.

RLC krug priključen na izvor stalnog napona



Frekvencija sinusnog prigušenog titranja b različita je od rezonantne frekvencije istog *RLC* kruga priključenog na izvor stalnog sinusnog napona u stacionarnom stanju.

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

(2) Nadkritično prigušeni titrajni krug – aperiodsko rješenje

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

- Korijeni karakteristične jednadžbe r_1 i r_2 su realni i međusobno različiti
- Rješenje nema titraja – zato se zove aperiodskim

$$i(t) = C_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + C_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{\beta t} + C_2 e^{-\beta t}\right)$$

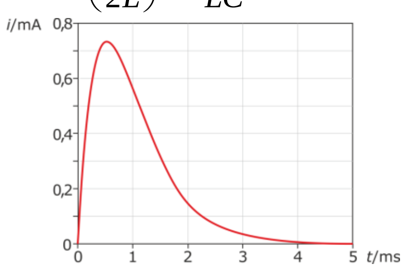
Konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uvjeta

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

(3) Kritično prigušeni titrajni krug – granično aperiodsko rješenje (kritično prigušenje)

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe r_1 i r_2 su jednaki

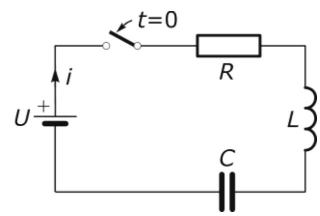


$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

- Krugove drugog reda opisuje diferencijalna jednadžba drugog reda
- Krugovi drugoga reda sastoje se od induktiviteta, kapaciteta, otpornika (jednoga ili više) i izvora

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

Primjer 4. Serijski RLC krug prema slici se sastoji od elemenata s vrijednostima R=3 kΩ, L=10 H i C=200 μF. U trenutku t=0 zatvara se sklopka. Odredite struju u krugu ako je prije zatvaranja sklopke kondenzator bio nenabijen. Zadano: U=50 V.



Rješenje:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$$

Nadkritično prigušeni titrajni krug – aperiodsko rješenje

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

- Rješenje (nastavak):
- Korijeni karakteristične jednadžbe su:

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

r_1=-298,3
r_2=-1,67

Opći oblik rješenja je:

$$i(t) = C_1 e^{-1,67t} + C_2 e^{-298,3t}$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uvjeta:
(1) U krugu se nalazi induktivitet u serijskom spoju, kroz koji struja mora biti neprekinuta funkcija: $i(t=0^-)=i(t=0^+)=0$:

$$50 = 3000 \cdot i(t) + 10\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{200 \cdot 10^{-6}}\int i(t)dt \Rightarrow 10\frac{di(t=0)}{dt} = 50 \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = 5$$

RLC krug priključen na izvor stalnog napona

(2) Uvrštavamo t=0 u opće rješenje:

$$i(t) = C_1 e^{-1,67t} + C_2 e^{-298,3t} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

(3) Deriviramo opće rješenje i uvrštavamo t=0:

$$\frac{di(t=0)}{dt} = -1.67 \cdot C_1 e^{-1,67 \cdot 0} - 298,3 \cdot C_2 e^{-298,3 \cdot 0}$$

$$5 = -1.67 \cdot C_1 - 298,3 \cdot C_2$$

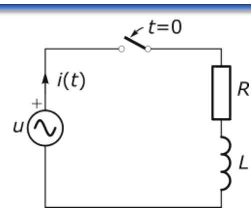
(4) Rješavamo sustav jednadžbi:

$$-1.67 \cdot C_1 - 298,3 \cdot C_2 = 5$$
$$C_1 + C_2 = 0$$

Rješenja su: C_1=0,0168 i C_2=-0.0168

$$i(t) = 0,0168 \cdot e^{-1,67t} - 0,0168 \cdot e^{-298,3t}$$

LR krug priključen na izvor sinusnog napona



Priključivanje izvora:

$$U_0 \sin(\omega t + \alpha_u) = R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$y = c \cdot e^{ax} + e^{ax}\int e^{-ax} F dx \qquad y=i,\ x=t$$

$$a = -\frac{R}{L} \qquad F = \frac{U_0 \sin(\omega t + \alpha_u)}{L}$$

Isti oblik diferencijalne jednadžbe kao i kod priključenja na izvor stalnog napona

$$i(t) = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t}\int e^{(R/L)t}\left(\frac{U_0 \sin(\omega t + \alpha_u)}{L}\right)dt$$

$$i(t) = ce^{-(R/L)t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + a_u - \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$

LR krug priključen na izvor sinusnog napona

Budući da prije zatvaranja sklopke u krugu nije tekla struja, a znamo da na induktivitetu ne može doći do naglog skoka struje, slijedi da je u trenutku neposredno nakon zatvaranja sklopke t=0$^+$

$$i(t=0^+)=0$$

$$0=c+\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\alpha_u-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$

Iz čega možemo odrediti konstantu c i konačno rješenje:

$$i(t)=e^{-(R/L)t}\left[\frac{-U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\alpha_u-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})\right]+\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\alpha_u-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$

- Prvi se član asimptotski smanjuje u nulu s porastom vremena t
- Drugi član predstavlja rješenje za struju u krugu u stacionarnom stanju

LR krug priključen na izvor sinusnog napona

$$i(t>>0)\approx\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\alpha_u-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$

- Nakon dovoljno dugog vremena nakon uključenja izvora rješenje za struju u krugu se svodi na poznato rješenje u stacionarnom stanju
- U stacionarnom stanju rješenje na jednostavan i elegantan način daje fazorski račun:

$$\underline{Z}=R+j\omega L$$

$$Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{\underline{Z}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}U_0\angle\alpha_u}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R}}$$

$$i_s(t)=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\alpha_u-\mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$

LR krug priključen na izvor sinusnog napona

• Kut α_u definira trenutnu vrijednost napona izvora u trenutku t=0 kada se zatvara sklopka.
• Povoljnim odabirom trenutka uklapanja tranzijentni član $i_t(t)$ se može minimizirati ili ukloniti

$$i_t(t) = e^{-(R/L)t}\left[\frac{-U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\alpha_u - \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})\right]$$

$$i_s(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t + \alpha_u - \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R})$$