Zadatak 1 (VIS-E; ZI 2020/2021)**.**

(a) Definirajte (pomoću funkcije gustoće ili funkcije razdiobe) kada slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$.

(b) Dokažite: ako je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, onda vrijedi svojstvo odsustva pamćenja:

$$P(X < b \mid X > a) = P(X < b - a), \quad 0 \leq a < b.$$

(c) Vrijeme do prvog ulova ribe ima eksponencijalnu razdiobu s očekivanjem 1 sat. Ako ulova nije bilo prvih 40 minuta, izračunajte vjerojatnost da ga neće biti ni u narednih 20 minuta.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako je njena gustoća vjerojatnosti zadana s

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

odnosno funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

(b) Do rješenja se dolazi jednostavnim uvrštavanjem i pojednostavljivanjem izraza:

$$P(X < b \mid X > a) = \frac{P(X < b, X > a)}{P(X > a)} = \frac{P(a < X < b)}{P(X > a)} = \frac{F(b) - F(a)}{1 - F(a)} =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right)} = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} = 1 - \frac{e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda(b-a)} = F(b - a) = P(X < b - a).$$

(c) Traži se vjerojatnost $P\left(X > 1 \mid X > \frac{40}{60}\right)$, za slučajnu varijablu $X \sim \mathcal{E}(1)$ koja predstavlja vrijeme do prvog ulova u satima. S obzirom da eksponencijalna razdioba ima svojstvo zaboravljanja, vrijedi:

$$P\left(X > 1 \mid X > \frac{40}{60}\right) = P\left(X > 1 - \frac{40}{60}\right) = 1 - F\left(\frac{20}{60}\right) = e^{-1 \cdot \frac{20}{60}} = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.71653.$$

Možete se sami uvjeriti da izbor mjerne jedinice nema utjecaja na rezultat, te bi se isto dobilo kada bismo X definirali u minutama, s očekivanjem 60 minuta, parametrom $\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{60}$ i računali vjerojatnost $P(X > 60 \mid X > 40)$.

□

Zadatak 2 (VIS-R; MI 2020/2021)**.** *Autobus dolazi na stanicu u prosjeku svakih 15 minuta. Pretpostavimo da se vrijeme između dolazaka ravna po eksponencijalnoj razdiobi.*

(a) *Ako nam je upravo pobjegao autobus, kolika je vjerojatnost da će idući doći za manje od* 10 *minuta?*

(b) *U kojem vremenskom intervalu od prethodnog dolaska možemo sa sigurnošću od* 90% *tvrditi da će doći sljedeći autobus?*

(c) *Koliko je u prosjeku vremena potrebno da se pojave* 3 *autobusa?*

(d) *Uz autobusnu stanicu nalazi se i tramvajska stanica. Vrijeme do dolaska tramvaja je eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom μ. Koliko je očekivano vrijeme čekanja do dolaska bilo kakvog prijevoza (tramvaja ili autobusa)?*

Rješenje. U zadatku je zadano očekivanje eksponencijalne slučajne varijable X koje iznosi 15 minuta, a iz kojega možemo izračunati parametar λ razdiobe kao $\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{15}$.

(a)

$$P(X < 10) = F(10) = 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot 10} = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.4866$$

(b) Potrebno je odrediti T takav da vrijedi $P(X < T) = 0.9$. Opet iskoristimo funkciju razdiobe:

$$\begin{aligned} 0.9 = P(X < T) = F(T) &= 1 - e^{-\frac{1}{15}\cdot T} \\ e^{-\frac{T}{15}} &= 0.1 \\ -\frac{T}{15} &= \ln 0.1 \\ T = -15 \ln 0.1 &\approx 34.54 \text{ min} \end{aligned}$$

(c) Neka je vrijeme do dolaska prvog autobusa T_1, vrijeme od dolaska prvog do dolaska drugog autobusa T_2 i vrijeme od dolaska drugog do dolaska trećeg autobusa T_3. Tada su T_1, T_2, T_3 eksponencijalne slučajne varijable s istim parametrom kao i X iz prethodnih podzadataka, tj. $\lambda = \frac{1}{15}$. Vrijeme potrebno da se pojave tri autobusa će onda biti zbroj $S = T_1 + T_2 + T_3$. Sada je dovoljno samo odrediti očekivanje slučajne varijable S, što se može jednostavno napraviti koristeći svojstvo linearnosti očekivanja:

$$E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 15 + 15 + 15 = 45 \text{ min}$$

(d) Neka je vrijeme do dolaska autobusa opisano sa $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, a vrijeme do dolaska tramvaja sa $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. Tražena vrijednost, tj. vrijeme do dolaska bilo kakvog prijevoza, iznosi $Z = \min(X, Y)$. Kakvu razdiobu ima slučajna varijabla Z? Da bismo to odredili, koristimo standardni trik za minimum/maksimum više slučajnih varijabli (vidi 5. auditorne vježbe, 6. zadatak):

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\min(X,Y) < z) = 1 - P(\min(X,Y) > z) =$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z) = (\text{nezavisnost}) = 1 - P(X > z)P(Y > z) =$$

$$= 1 - (1 - P(X < z))(1 - P(Y < z)) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda z} e^{-\mu z} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$$

Iz ovoga zaključujemo da je Z također eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda + \mu$. Stoga je njezino očekivanje i rješenje ovoga zadatka

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

□

Zadatak 3 (JIR 2022/2023)**.** *X i Y su dvije nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 1$. Izračunajte*

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1).$$

Rješenje.

$$X, Y \sim \mathcal{E}(1) \implies F_X(x) = 1 - e^{-x},\ F_Y(y) = 1 - e^{-y}$$

Raspišemo traženu vjerojatnost:

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1) = \frac{P(X + Y > 2, X > 1)}{P(X > 1)}$$

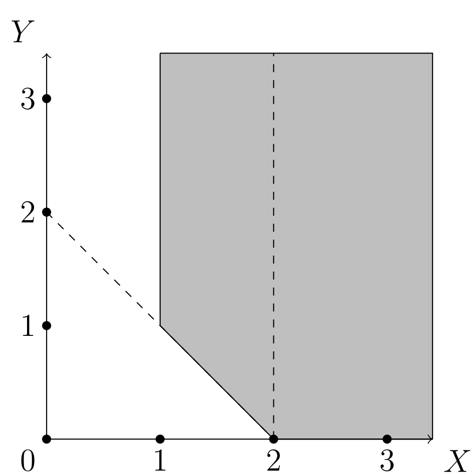
Nazivnik je jednostavno izračunati:

$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F_X(1) = e^{-1}$$

Da bismo izračunali vjerojatnost u brojniku, potrebno je integrirati gustoću slučajnog vektora (X, Y) po području gdje je zadovoljen uvjet $X + Y > 2, X > 1$. Naravno, s obzirom da ima nezavisne komponente, njegova gustoća iznosi

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$$

Skica područja:



Integriranje zbog granica razdvajamo na dva dijela, po vertikalnoj iscrtkanoj liniji na slici.

$$P(X + Y > 2, X > 1) = \int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx + \int_2^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \cdots = 2e^{-2}$$

Stoga je rješenje zadatka

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1) = \frac{2e^{-2}}{e^{-1}} = 2e^{-1}.$$

□

Zadatak 4 (ZIR 2022/2023)**.**

(a) Definirajte geometrijsku slučajnu varijablu s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$.

(b) Definirajte eksponencijalnu slučajnu varijablu s parametrom $\lambda > 0$.

(c) Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$. Dokažite da tada slučajna varijabla $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ ima geometrijsku razdiobu. Koji je parametar slučajne varijable Y?

Napomena: Za $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj manji ili jednak x, tj. $\lfloor x \rfloor = k$, $k \in \mathbb{Z}$ ako vrijedi $k \le x < k + 1$.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla X ima geometrijsku razdiobu s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$ ako je njezin zakon razdiobe

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako je njena funkcija razdiobe

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

ili, ekvivalentno, ako joj je funkcija gustoće razdiobe

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

(c) Budući da vrijednost $\lfloor X \rfloor$ poprima cjelobrojne vrijednosti, jasno je da je Y diskretna slučajna varijabla. Također, za eksponencijalnu slučajnu varijablu je $P(X < 0) = 0$, pa će $\lfloor X \rfloor$ poprimati vrijednosti $0, 1, 2, \ldots$, što znači da će Y poprimati vrijednosti $1, 2, 3, \ldots$. Sada za fiksirani $k \in \mathbb{N}$ računamo $P(Y = k)$ kako bismo dobili zakon razdiobe od Y.

$$P(Y = k) = P(\lfloor X \rfloor + 1 = k) = P(\lfloor X \rfloor = k - 1) = P(k - 1 \le X < k) =$$

$$= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{k-1}^{k} = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1},$$

što uz oznaku $p := 1 - e^{-\lambda}$ postaje

$$P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1},$$

što po definiciji znači da je Y geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p = 1 - e^{-\lambda}$.

$\square$

Zadatak 5 (JIR 2020/2021)**.** *Neka je* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$*. Dokažite: za svaki pozitivan realan broj* $a > 0$ *vrijedi* $P(|X| < a) < a$*.*

Rješenje. Funkcija gustoće razdiobe slučajne varijable X je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Raspišimo traženu vjerojatnost:

$$P(|X| < a) = P(-a < X < a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Funkcija pod integralom je sigurno manja od 1 jer je eksponent sigurno manji ili jednak od 0, stoga vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} 1 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a < a,$$

čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Zadatak 6 (VIS-R; ZI 2021/2022)**.**

(a) Odredite konstantu C *tako da funkcija*

$$f(x) = Ce^{-2(x-1)}, \quad x > 0$$

bude gustoća eksponencijalne razdiobe. Izračunajte očekivanje i disperziju te razdiobe. Ako slučajna varijabla X *ima tu razdiobu, izračunajte* $P(X < 2 \mid X > 1)$*.*

(b) Odredite konstantu C *tako da funkcija*

$$g(x) = Ce^{-(x^2-2x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

bude gustoća normalne razdiobe. Izračunajte očekivanje i disperziju te razdiobe. Ako slučajna varijabla Y *ima tu razdiobu, izračunajte* $P(Y < 2 \mid Y > 1)$*.*

Rješenje.

(a) Za početak, malo preuredimo oblik funkcije zadane u zadatku kako bismo dobili nešto što je sličnije poznatom obliku $\lambda e^{-\lambda x}$ gustoće eksponencijalne razdiobe:

$$f(x) = Ce^{-2(x-1)} = Ce^{-2x+2} = C\left(e^{-2x} \cdot e^2\right) = \left(Ce^2\right) e^{-2x}.$$

Iz ovoga se da primijetiti da je $\lambda = 2$, a faktor ispred eksponencijalne funkcije mora iznositi λ, stoga C dobivamo iz jednadžbe

$$Ce^2 = \lambda = 2$$

$$C = 2e^{-2}.$$

Napomena da se C može pronaći i integriranjem gustoće koristeći činjenicu da površina ispod gustoće iznosi 1. Uvrštavanjem dobivenog C ćemo, naravno, dobiti da gustoća iznosi

$$f(x) = 2e^{-2x},$$

a pripadna funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-2x}.$$

S obzirom da se radi o eksponencijalnoj razdiobi, znamo da očekivanje i varijanca iznose

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}.$$

Tražena vjerojatnost u zadatku iznosi

$$P(X < 2 \mid X > 1) = (\text{po svojstvu zaboravljanja}) = P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{-2}.$$

(b) Kao i u prethodnom podzadatku, nastojimo preoblikovati funkciju iz zadatka kako bismo dobili nešto što je sličnije poznatom obliku $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ gustoće normalne razdiobe:

$$g(x) = C\exp\left(-(x^2 - 2x)\right) = C\exp\left(-(x^2 - 2x + 1) + 1\right) =$$

$$= C\exp\left(-(x-1)^2 + 1\right) = Ce \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{1}\right)$$

Iz ovoga zaključujemo

$$\mu = 1$$

$$2\sigma^2 = 1 \implies \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Ce = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \implies C = \frac{1}{e\sqrt{\pi}}.$$

Gustoća razdiobe s uvrštenim brojevima je

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2}.$$

Budući da se radi o normalnoj razdiobi, znamo da su očekivanje i varijanca njezini parametri, pa je

$$E(Y) = \mu = 1$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2 = \frac{1}{2}.$$

Izračunajmo još vjerojatnost koja se traži:

$$P(Y < 2 \mid Y > 1) = \frac{P(1 < Y < 2)}{P(Y > 1)} = \dots$$

Primijetimo da je vjerojatnost u nazivniku jednaka $\frac{1}{2}$ zbog simetrije Gaussove krivulje i zbog toga što je očekivanje ove slučajne varijable 1.

$$\dots = 2 \cdot P(1 < Y < 2) = 2 \cdot P\left(\frac{1-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \frac{Y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \frac{2-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2 \cdot P\left(0 < \frac{Y-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \sqrt{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\Phi^*(\sqrt{2}) - \Phi^*(0)\right) = 0.8414.$$

□