9.

Zakon velikih brojeva i centralni granični teorem

Sadržaj poglavlja

Dva su najvažnija zakona teorije vjerojatnosti, zakon velikih brojeva i centralni granični teorem. I jedan i drugi zakon objašnjavaju granično ponašanje niza slučajnih varijabli. U ovom ćemo poglavlju objasniti o čemu ti zakoni govore i dokazati te zakone uz najjednostavnije pretpostavke o slučajnim varijablama.

9.1. Zakoni velikih brojeva

U početcima teorije vjerojatnosti, ona je smatrana dijelom fizike. Ako se neki pokus može u nepromijenjenim uvjetima ponoviti neograničen broj puta, vjerojatnost događaja definira se kao $\dfrac{m}{n}$, njegova relativna frekvencija pojavljivanja.

Danas se na ovu **fizikalnu definiciju vjerojatnosti** gleda kao na jednostavnu primjenu **zakona velikih brojeva**.

Opišimo detaljnije pokus koji vodi prema ovoj definiciji. On će nam pomoći da lakše shvatimo različite definicije konvergencije.

9.1.1. Od indikatorske varijable prema binomnoj razdiobi

Neka je A događaj koji promatramo, i neka je $p = \boldsymbol{P}(A)$ vjerojatnost njegove realizacije. **Indikatorska** slučajna varijabla poprima vrijednost 1 ako se taj događaj ostvario, 0 ako nije. Neka je I_k indikatorska varijabla koja prati realizaciju u k-tom ponavljanju pokusa. Onda sve varijable $I_1, I_2, \dots$ imaju identičnu razdiobu, a međusobno su nezavisne:

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Očekivanje ovih varijabli je p, a disperzija pq.

Ako se pokus ponavlja n puta, onda je broj realizacija događaja A dan zbrojem $I_1+I_2+\ldots+I_n$. Time je definirana slučajna varijable $X_n = I_1+I_2+\ldots+I_n$. Za nju znamo da ima binomnu razdiobu s parametrima n i p.

Pogledamo li bolje na definiciju indikatorske varijable, uočit ćemo da je njezina razdioba $\mathscr{B}(1,p)$. Zbroj nezavisnih kopija ove varijable, prema svojstvu stabilnosti binomne razdiobe, ima također binomnu razdiobu s parametrima n i p.

Relativna frekvencija pojavljivanja događaja A u n ponavljana pokusa iznosi

$$\frac{I_1 + \ldots + I_n}{n} = \frac{X_n}{n}.$$

Da bismo opravdali fizikalnu definiciju vjerojatnosti, moramo pokazati da je razlika

$$\left| \frac{X_n}{n} - p \right|$$

po volji malena. Ova je razlika *slučajna varijabla*, tako da najprije moramo utvrditi način na koji ćemo mjeriti njezinu veličinu. U graničnom slučaju, pisat ćemo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = p.$$

s tim da najprije moramo utvrditi što je to *limes slučajnih varijabli*.

9.1.2. Konvergencija po vjerojatnosti

Konvergencija niza slučajnih varijabli nije jednoznačan pojam, jer postoji više različitih definicija te konvergencije.

Definicija 9.1. ■ Konvergencija po vjerojatnosti

Niz (X_n) konvergira **po vjerojatnosti** ka slučajnoj varijabli Y ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = 0. \tag{1}$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{P} Y$.

U ovoj definiciji konvergencije, vjerojatnost odstupanja služi kao mjera za bliskost dviju slučajnih varijabli. Formula (1) može se napisati i na sljedeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|X_n - Y| < \varepsilon) = 1$$

Izvedimo sad ocjenu za ovo odstupanje.

Teorem 9.1. ■ Nejednakosti Markova i Čebiševa

(**Nejednakost Markova**) Ako X poprima nenegativne vrijednosti, onda za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(X)}{\varepsilon}.$$

(L_p **nejednakost**) Za svaku slučajnu varijablu X s očekivanjem m_X i svaki $p > 0$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(|X - m_X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

(**Nejednakost Čebiševa**) Posebice, za $p = 2$, vrijedi

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dokaz. Nejednakost Markova slijedi iz ocjene integrala:

$$\boldsymbol{P}(X \geqslant a) = \int_{x\geqslant a} dF(x) \leqslant \int_{x\geqslant a} \frac{x}{a}\, dF(x) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^\infty x\, dF(x) = \frac{1}{a}\boldsymbol{E}(X).$$

Primjenimo tu ocjenu na pozitivnu slučajnu varijablu $|X - m_x|$. Imamo, za svaki $p > 0$:

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) = \boldsymbol{P}(|X - m_X|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(|X - m_X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

Za $p = 2$ dobivamo nejednakost Čebiševa. ◀

9.1.3. Slabi zakon velikih brojeva

Sad smo u mogućnosti formulirati i dokazati prvi važni zakon teorije vjerojatnosti.

Definicija 9.2. ■ Slabi zakon velikih brojeva

Kažemo da niz $X_1, X_2, \dots$ slučajnih varijabli zadovoljava **slabi zakon velikih brojeva** ako

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \boldsymbol{E}X_k) \longrightarrow 0, \qquad \text{kad } n \to \infty \tag{2}$$

po vjerojatnosti, tj. ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \boldsymbol{E}X_k)\Big| > \varepsilon\Big\} = 0. \tag{3}$$

Od interesa je pronaći najslabije uvjete na niz (X_k), uz koji će vrijediti ovaj zakon velikih brojeva.

Teorem 9.2. ■ Dovoljni uvjeti za slabi zakon velikih brojeva

Ako varijable $X_1, X_2, \dots$ zadovoljavaju uvjet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = 0,$$

tada on zadovoljava zakon velikih brojeva.

Taj će uvjet biti ispunjen ako su na primjer

1) $X_1, X_2, \dots$ nekorelirane, s ograničenim varijancama.
2) $X_1, X_2, \dots$ nezavisne s istom varijancom σ
3) $X_1, X_2, \dots$ nezavisne s istom distribucijom i konačnom varijancom.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Po nejednakosti Čebiševa, vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \boldsymbol{E}X_k)\Big| > \varepsilon\Big\} &\leqslant \frac{\boldsymbol{D}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \longrightarrow 0 \quad \text{kad } n \to \infty \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Pretpostavimo sad da vrijedi 1). Disperzija zbroja nekoreliranih slučajnih varijabli jednaka je zbroju njihovih disperzija. Ako su sve one ograničene brojem M, onda vrijedi

$$\frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{D}(X_k) \leqslant \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot M = \frac{M}{n} \longrightarrow 0.$$

Uvjet 2) poseban je slučaj od 1), a uvjet 3) poseban slučaj od 2). ◀

— ◆ —

Spomenimo na koncu da niz indikatorskih slučajnih varijabli I_k zadovoljava uvjet 3) ovog teorema. Zato taj niz zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. Pri tom je $\boldsymbol{E}(I_k) = p$, pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_1 + \ldots + I_k}{n} = p.$$

9.1.4. Interpretacija slabog zakona velikih brojeva

Zakon ćemo interpretirati u najjednostavnijoj situaciji, kad je riječ o indikatorskim slučajnim varijablama. Neka je $X_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ njihov zbroj. Tada X_n mjeri broj pojavljivanja događaja u n ponavljanja pokusa. Prema slabom zakonu velikih brojeva, vrijedi

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Izaberimo $\varepsilon = 0.1$. Vrijedi $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, pa dobivamo

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 0.1\right) > 1 - \frac{1}{0.04n}$$

Želimo ponavljanjem pokusa odrediti vjerojatnost p. Prema ovoj ocjeni, ako pokus ponovimo $n = 1000$ puta, vjerojatnost da je relativna pogreška manja od 0.1 iznosi

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{X_{1000}}{1000} - p\right| < 0.1\right) > 0.975$$

Kako treba tumačiti ovaj rezultat? Recimo da se pokus sastoji od bacanja novčića 1000 puta. *U stotinu takvih pokusa barem 97 puta odstupanje vjerojatnosti od relativne frekvencije bit će manje od* 0.1.

Ova je ocjena vrlo gruba. Vidjet ćemo u nastavku, da je u stvarnosti to odstupanje neusporedivo manje.

Još je jednu stvar bitno naglasiti. Slabi zakon velikih brojeva *ništa ne govori o rezultatima jednog pokusa*. U svakom pojedinačnom ponavljanju bacanja novčića, na temelju ovog zakona, nemamo garanciju da će relativna frekvencija *u tim bacanjima* težiti ka vjerojatnosti. Slabi zakon velikih brojeva je *statističke naravi*. On se može interpretirati samo na temelju velikog broja ponavljanja cjelokupnog pokusa.

Iz iskustva znamo da se priroda ponaša drukčije. Kad bacamo novčić *u svakom pokusu* relativna frekvencija teži ka $\frac{1}{2}$. O tome govori **jaki zakon velikih brojeva**.

9.1.5. Jaki zakon velikih brojeva

Iskaz i interpretacija jakog zakona velikih brojeva vezana je uz drugi tip konvergencije slučajnih varijabli.

Neka je (X_n) niz slučajnih varijabli. Za svaki $\omega \in \Omega$, time je nizom određen niz realnih brojeva $(X_n(\omega))$. Tako možemo postaviti potanje: ima li taj niz limes? Ako limes postoji, on se mijenja izborom elementarnog događaja ω, pa i sam predstavlja slučajnu varijablu.

Kako možemo opisati konvergenciju niza slučajnih varijabli (X_n) prema varijaboi Y? Označimo:

$$K := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = Y(\omega)\}$$

Ovaj skup K predstavlja *sve elementarne događaje* za koje će niz realnih brojeva $(X_n(\omega))$ konvergirati prema broju $Y(\omega)$.

Nije jasno da skup K mora pripadati algebri događaja, i to se općenito ne mora dogoditi. To znači da on ne mora imati vjerojatnost. Međutim, nama će biti interesantni slučajevi kad taj skup ima vjerojatnost i kad je ona jednaka 1.

Definicija 9.3. ■ Konvergencija gotovo sigurno

Niz (X_n) konvergira **gotovo sigurno** ka slučajnoj varijabli Y ako vrijedi

$$\boldsymbol{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = Y) = 1.$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{g.s.} Y$, ili $X_n \longrightarrow Y$ g.s.

Koja je veza konvergencije gotovo sigurno i konvergencije po vjerojatnosti?

Teorem 9.3. ■ Usporedba konvergencija

Ako niz slučajnih varijabli (X_n) konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli Y, tada on konvergira prema istoj slučajnoj varijabli i po vjerojatnosti.

Dokaz. Označimo

$$A_k(\varepsilon) := \{\omega : |X_k(\omega) - Y| > \varepsilon\}$$

Ovaj skup obuhvaća elementarne događaje kod kojih se varijabla X_k značajno razlikuje od limesa.

$$B_n(\varepsilon) := \bigcup_{k\geqslant n} A_k(\varepsilon).$$

Skup $B_n(\varepsilon)$ obuhvaća elementarne događaje kod kojih se to događa za barem jednu varijablu X_k, s indeksom većim od n. Primjetimo da je $B_n(\varepsilon)$ padajući niz događaja. Njegov limes označimo s:

$$A(\varepsilon) := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon).$$

Elementarni dogadaj ω pripadat će ovom skupu ako se uvijek može pronaći dovoljno veliki k za koji će biti $|X_k(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon$. Za takve ε niz $(X_k(\omega))$ sigurno neće konvergirati prema $Y(\omega)$.

Sad zaključujemo da za konvergenciju skoro sigurno mora biti ispunjeno

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{\varepsilon>0} A(\varepsilon)\Big) = 0.$$

U tom slučaju mora biti $\boldsymbol{P}(A(\varepsilon)) = 0$, za svaki ε. Zbog neprekinutosti vjerojatnosti, tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$$

S obzirom da je $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n(\varepsilon)) = 0$$

to jest

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = 0.$$

No, to znači da (X_n) konvergira prema Y po vjerojatnosti. ◀

— ◆ —

Sad možemo iskazati jaku varijantu zakona velikih brojeva.

Teorem 9.4. ■ Jaki zakon velikih brojeva

Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne identički distribuirane slučajne varijable s konačnim očekivanjem m. Onda vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow m \qquad \text{g.s.}$$

Dokaz ovog teorema je vrlo složen i ne možemo ga napraviti na ovom mjestu.

9.1.6. Interpretacija jakog zakona i veza sa slabim

Zakon ćemo interpretirati u situaciji kad su $X_1, X_2, \dots$ indikatorske slučajne varijable. Tad je očekivanje m jednako vjerojatnosti p realizacije događaja.

Jaki zakon tvrdi da će *pri skoro svakom* ponavljanju događaja relativna frekvencija težiti ka vjerojatnosti, i to je činjenica koju iskustveno poznajemo. Teorijski, to se pri nekim ponavljanjima pokusa ne mora dogoditi, ali vjerojatnost iznimke jednaka je nuli.

Konvergencija skoro sigurno povlači konvergenciju o vjerojatnosti. Zato jaki zakon velikih brojeva povlači i slabi zakon. Primjetimo ipak, da su ovdje pretpostavke na slučajne varijable pojačane, jer se zahtijeva da one budu nezavisne i identički distribuirane.

Primjetimo još da se u ovom zakonu ne mora pretpostaviti ograničenost varijance, već samo postojanje očekivanja.

9.2. Konvergencija po distribuciji i karakteristične funkcije

Još je jedan vid konvergencije slučajnih varijabli koristan u primjenama.

Često se računanje vjerojatnosti događaja $\{X \in A\}$ odvija tako da se račun provede za neku drugu slučajnu varijablu Y koja je po nekom kriteriju bliska s X. Tada očekujemo da će vrijediti $\boldsymbol{P}(X \in A) \approx \boldsymbol{P}(Y \in A)$.

Izaberemo li za A interval $\langle -\infty, x\rangle$, ove se vjerojatnosti izražavaju preko funkcija razdioba tih varijabli.

Definicija 9.4. ■ Konvergencija po distribuciji

Niz (X_n) konvergira **po distribuciji** ka slučajnoj varijabli X ako za odgovarajući niz funkcija razdiobe vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

u svakoj točki x gdje je F_X neprekinuta. Pišemo $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.

Primjer 9.1.

Neka je X_n diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti $\frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, n$ s vjerojatnošću $\frac{1}{n}$. Dokažimo da ona teži po distribuciji ka slučajnoj varijabli X koja ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$.

► Za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi $F_X(x) = x$. Za slučajnu varijablu X_n vrijedi pak

$$F_{X_n}(x) = \boldsymbol{P}(X < x) = \sum_{i/n<x} \frac{1}{n}.$$

Suma se zbraja po svim prirodnim brojevima $i = 1, 2, \dots$ koji su manji od nx. Zato je ona veća ili jednaka $x - \frac{1}{n}$, a manja od x. Dakle vrijedi

$$x - \frac{1}{n} \leqslant F_{X_n}(x) < x = F_X(x).$$

Odavde slijedi

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x). \quad ◄$$

Teorem 9.5. ■ Usporedba konvergencija

Ako niz (X_n) slučajnih varijabli konvergira prema slučajnoj varijabli X po vjerojatnosti, tada on konvergira i po distribuciji.

Dokaz. Neka je x točka neprekinutosti za funkciju F_X. Za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x) = \boldsymbol{P}(X_n < x) &= \boldsymbol{P}(X_n < x, X < x+\varepsilon) + \boldsymbol{P}(X_n < x, X \geqslant x+\varepsilon)\\
&\leqslant \boldsymbol{P}(X < x+\varepsilon) + \boldsymbol{P}(X - X_n > \varepsilon)\\
&\leqslant F_X(x+\varepsilon) + \boldsymbol{P}(|X_n - X| > \varepsilon)
\end{aligned}$$

Pustimo da n teži u beskonačnost i iskoristimo pretpostavku. Drugi pribrojnik zdesna teži u nulu, pa vrijedi

$$\limsup F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x+\varepsilon).$$

Na sličan način dobivamo

$$\begin{aligned}
F_X(x-\varepsilon) = \boldsymbol{P}(X < x-\varepsilon) &= \boldsymbol{P}(X < x-\varepsilon, X_n < x) + \boldsymbol{P}(X < x-\varepsilon, X_n \geqslant x)\\
&\leqslant \boldsymbol{P}(X_n < x) + \boldsymbol{P}(X_n - X > \varepsilon)\\
&\leqslant F_{X_n}(x) + \boldsymbol{P}(|X_n - X| > \varepsilon)
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$F_X(x-\varepsilon) \leqslant \liminf F_{X_n}(x).$$

Limes inferior uvijek je manji od limesa superiora, pa imamo

$$F_X(x-\varepsilon) \leqslant \liminf F_{X_n}(x) \leqslant \limsup F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x+\varepsilon).$$

Funkcija F_X prema pretpostavci je neprekinuta u točki x. Pustimo da ε teži u nulu. U graničnom slučaju, nejednakosti prelaze u jednakosti. Zato $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$ postoji i jednak je $F_X(x)$.

— ◆ —

Sljedeći teorem uspostavlja vezu između konvergencije slučajnih varijabli i analitičkog aparata karakterističnih funkcija. Teorem ne možemo na ovom mjestu dokazati, jer je za to potrebno detaljno istražiti svojstva karakterističnih funkcija. Pri tom se koristi aparat matematičke analize koji nadmašuje onaj koji se uči na studiju tehnike.

Teorem 9.6. ■ Konvergencija po distribuciji i karakteristične funkcije — teorem P. Levya

Niz (X_n) slučajnih varijabli konvergira po distribuciji k varijabli X ako i samo ako niz karakterističnih funkcija (ϑ_n) varijabli X_n konvergira (po točkama) prema karakterističnoj funkciji ϑ varijable X.

Ovaj ćemo teorem ilustrirati na nekim intresantnim primjerima.

Primjer 9.2. ■ Aproksimacija binomne razdiobe Poissonovom

Neka je $X_{n,p}$ slučajna varijabla distribuirana po binomnom zakonu $\mathscr{B}(n,p)$. Ako $p \to 0$ i $n \to \infty$, tako da $np \to \lambda$, dokažimo da $(X_{n,p})$ konvergira po distribuciji k Poissonovoj razdiobi s parametrom λ.

► Koristit ćemo Levyjev teorem. Moramo pokazati da karakteristična funkcija slučajne varijable $\mathscr{B}(n,p)$ teži, uz gornje uvjete, ka karakterističnoj funkciji Poissonove razdiobe $\mathscr{P}(\lambda)$. Imamo

$$\vartheta_{X_{n,p}}(t) = (q + pe^{it})^n = \Big(1 + p(e^{it} - 1)\Big)^{\frac{1}{p}\cdot pn}.$$

Izraz $\Big(1 + p(e^{it} - 1)\Big)^{1/p}$ teži k $e^{e^{it}-1}$ kad $p \to 0$, a kako $pn \to \lambda$, to vrijedi

$$\lim_{\substack{p\to 0\\ np\to\lambda}} \vartheta_{X_{n,p}}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

a to je upravo karakteristična funkcija razdiobe $\mathscr{P}(\lambda)$. ◄

Primjer 9.3. ■ Aproksimacija Poissonove razdiobe normalnom

Neka je X distribuirana po Poissonovom zakonu s parametrom λ. Dokažimo da se za veliki λ razdioba $\mathscr{P}(\lambda)$ može aproksimirati normalnom razdiobom $\mathscr{N}(\lambda,\lambda)$, tj. da vrijedi

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \longrightarrow \mathscr{N}(0,1), \qquad \text{kad } \lambda \to \infty$$

po distribuciji.

► Pokazat ćemo da karakteristične funkcije ϑ_λ varijabli $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ teže, kad $\lambda \to \infty$, prema karakterističnoj funkciji

$$\vartheta(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

jedinične normalne razdiobe. Karakteristična funkcija Poissonove razdiobe je

$$\vartheta_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Kako vrijedi $\vartheta_{a+bX}(t) = e^{iat}\vartheta_X(bt)$, to je karakteristična funkcija od $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} = -\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}X$ dana sa

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) &= e^{-\sqrt{\lambda}t} e^{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)}\\
&= \exp\Big\{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1) - i\sqrt{\lambda}t\Big\}\\
&= \exp\Big\{\lambda\Big(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{i^2t^2}{2\lambda} + \frac{i^3t^3}{6\lambda\sqrt{\lambda}} + \ldots - 1\Big) - i\sqrt{\lambda}t\Big\}\\
&= \exp\Big\{-\frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{6\lambda} + \ldots\Big\} \longrightarrow \exp\Big\{-\frac{t^2}{2}\Big\} \qquad \text{kad } \lambda \to \infty,
\end{aligned}$$

a to je i trebalo pokazati. ◄

Primjer 9.4. ■ Od novčića do jednolike razdobe

Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koje mogu poprimiti vrijednosti ± 1 s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Definirajmo

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} X_k.$$

Pokažimo da niz (Y_n) teži po distribuciji k slučajnoj varijabli Y koja ima jednoliku razdiobu na $[-1,1]$.

► Odredimo karakteristične funkcije varijabli X_k:

$$\vartheta_{X_k}(t) = \tfrac{1}{2}e^{-it} + \tfrac{1}{2}e^{it} = \cos t,$$

$$\vartheta_{\frac{1}{2^k}X_k}(t) = \cos(\frac{1}{2^k}t).$$

Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$, karakteristična funkcija varijable Y_n jednaka je produktu karakterističnih funkcija:

$$\begin{aligned}
\vartheta_{Y_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{t}{2^k}\\
&= \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\cdots\cos\frac{t}{2^{n-1}}\cos\frac{t}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2^n}}{\sin\frac{t}{2^n}}\\
&= \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\cdots\cos\frac{t}{2^{n-1}}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{t}{2^n}} = \ldots\\
&= \frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}} \longrightarrow \frac{\sin t}{t} = \vartheta_Y(t)
\end{aligned}$$

Funkcija $\frac{\sin t}{t}$ karakteristična je funkcija jednolike razdiobe na intervalu $[-1,1]$. Dakle, $\vartheta_{Y_n}(t) \to \vartheta_Y(t)$ i zato $Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} Y$. ◄

9.3. Centralni granični teorem

Centralni granični teorem govori o tome da se zbroj slučajnih varijabli, uz neke uvjete na njihove distribucije, asimptotski ponaša kao normalna (Gaussova) razdioba.

Ne postoje nužni i dovoljni uvjeti za opis razdioba slučajnih varijabli uz koje će vrijediti centralni granični teorem. Neki od dovoljnih uvjeta uključuju i slučajeve slabe zavisnosti među varijablama.

Varijanta teorema koju ćemo mi dokazati jest jednostavna i zahtjeva jake uvjete na pribrojnike.

Teorem 9.7. ■ Centralni granični teorem

Neka je (X_n) niz identički distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem m i disperzijom σ^2. Onda za normirani zbroj vrijedi

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1).$$

Da je zbroj normiran znači da je očekivanje slučajnih varijabli slijeva jednako nuli, a disperzija jedinici.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m = 0$. Inače, varijable X_n možemo zamijeniti s centriranim, $X_n - m$ koje imaju istu disperziju.

Sve varijable imaju istu razdiobu, pa im je i karakteristična funkcija jednaka. Neka je ϑ karakteristična funkcija tih varijabli. Zbog nezavisnosti pribrojnika, karakteristična funkcija zbroja jednaka je umnošku karakterističnih funkcija:

$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \vartheta(t)^n.$$

Označimo $Z_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Karakteristična funkcija te varijable jednaka je

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \vartheta\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)^n.$$

Prikažimo funkciju ϑ Taylorovim redom:

$$\vartheta(t) = c_0 + c_2 t + c_2 t^2 + R_2$$

Ostatak R_2 teži u nulu bržne nego t^2. Za svaku karakterističnu funkciju je $c_0 = \vartheta(0) = 1$. Druga dva koeficijenta su

$$c_1 = \vartheta'(0) = i\boldsymbol{E}(X_1) = im = 0,$$
$$c_2 = \frac{1}{2}\vartheta''(0) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(X_1^2) = -\frac{1}{2}\sigma^2.$$

Tako dobivamo:

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \Big[1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{\sigma^2 \cdot n} + R_2\Big]^n = \Big[1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\Big]^n \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

Prema Levyjevom teoremu, niz (Z_n) konvergira po distribuciji k jediničnoj normalnoj razdiobi. ◄

Sad možemo dokazati već prije korišteni teorem aproksimacije binomne razdiobe normalnom:

Teorem 9.8. ■ Teorem Moivre-Laplacea

Normirana binomna razdioba teži po distribuciji k jediničnoj normalnoj razdiobi:

$$\frac{\mathscr{B}(n,p) - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1)$$

Dokaz. Dovoljno je primjeniti centralni granični teorem na niz (I_k) indikatorskih slučajnih varijabli. Očekivanje ovih varijabla je p, a disperzija pq. Onda je

$$\sum_{k=1}^{n}(I_k - p) = X - np$$

pri čemu X ima binomnu razdiobu $\mathscr{B}(n,p)$. Tvrdnja sad slijedi iz prethodnog teorema.

Primjer 9.5.

Zbrajamo 10 000 brojeva koje smo zaokružili na m decimala. Izračunaj interval unutar kojeg se s vjerojatnošću 0.99 nalazi pogreška učinjena zbog zaokruživanja. Pretpostavljamo da su greške zaokruživanja pojedinih brojeva nezavisne slučajne varijable, jednoliko distribuirane na intervalu $\langle -\frac{1}{2}10^{-m}, \frac{1}{2}10^{m}\rangle$.

► Označimo $n = 10\,000$. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ greške zaokruživanja pojedinih brojeva. To su identički distribuirane nezavisne varijable s očekivanjem $\boldsymbol{E}(X_k) = 0$ i disperzijom

$$\boldsymbol{D}(X_k) = \frac{(\frac{1}{2}\cdot 10^{-m} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-m})^2}{12} = \frac{1}{12}\cdot 10^{-2m}.$$

Tada je $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ greška nastala zbog zaokruživanja tih brojeva. Po centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{\frac{10^{-2m}}{12}n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1)$$

tj. $X \approx \mathscr{N}\Big(0, \dfrac{10^{-2m}n}{12}\Big) = \mathscr{N}(0, \frac{1}{12}\cdot 10^{-2m+4})$. Tražimo takav t za kojeg je $\mathrm{P}\{|X| < t\} \geqslant 0.99$.

$$\boldsymbol{P}\{|X| < t\} = \boldsymbol{P}\Bigg\{\Bigg|\frac{X}{\frac{10^{-m+2}}{\sqrt{12}}}\Bigg| < \frac{t}{\frac{10^{-m+2}}{\sqrt{12}}}\Bigg\} = 0.99 = \Phi^*(2.577)$$

i odavde je

$$t = \frac{2.577}{\sqrt{12}}\cdot 10^{-m+2} = 74.4\cdot 10^{-m}.$$

Prema tome, greška zaokruživanja se s vjerojatnošću 0.99 nalazi unutar intervala $\langle -74.4\cdot 10^{-m}, 74.4\cdot 10^{-m}\rangle$, dok teorijski najveća moguća greška iznosi čak $5000\cdot 10^{-m}$. ◄

Primjer 9.6.

U prosjeku je svaki treći proizvod (recimo — jabuka!) prve kvalitete. Neka je S_n broj proizvoda koje treba pregledati dok se ne pronađe 100 primjeraka prve kvalitete. Odredi razdiobu te varijable. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{S_{100} > 350\}$.

► Neka je X_k broj jabuka koje je potrebno pregledati da bi se pronašla prvoklasna jabuka, a nakon što je već pronađena $k-1$ takva. Tada je očito

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne, jednako distribuirane. One imaju geometrijsku razdiobu:

$$p_j = \mathrm{P}(X_k = j) = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{j-1}\frac{1}{3}.$$

Vrijedi $\boldsymbol{E}(X_k) = 3$, $\sigma^2(X_k) = 9$.

Iako nam je poznata razdioba svih varijabli X_k, razdiobu njihove sume ne možemo lako odrediti. Stoga koristimo centralni granični teorem.

$$\frac{S_n - 3n}{\sqrt{9n}} \longrightarrow \mathscr{N}(0,1)$$

te je $S_n \approx \mathscr{N}(3n, 9n)$.

Tražena vjerojatnost iznosi

$$\boldsymbol{P}(S > 350) = \boldsymbol{P}\Big(N > \frac{-300+350}{\sqrt{900}}\Big) = \boldsymbol{P}(N > 1.666) = 0.097.$$ ◄