Zadatak 1 (ZIR 2020/2021). *Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je tri puta veća od broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla Y poprima vrijednost 3 kad je okrenuti broj na kocki veći od 2, a vrijednost 0 kad okrenuti broj nije veći od 2. Izračunajte varijancu slučajne varijable $Z = X + Y$.*

Rješenje.

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 3 \cdot 3.5 + 2 = 12.5$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \cdot 9 & 3 \cdot 12 & 3 \cdot 15 & 3 \cdot 18 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) = 196.5$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}Z)^2 = 40.25$$

□

Zadatak 2 (VIS-E; MI 2020/2021). *U košari se nalaze 3 naranče, 2 jabuke i 3 banane. Na sreću izvlačimo iz košare 4 voćke. Neka je slučajna varijabla X broj izvučenih naranči, a Y broj izvučenih jabuka. Izračunaj razdiobu slučajnog vektora (X,Y), vjerojatnost $P(X+Y \leq 2)$ i koeficijent korelacije $r(X,Y)$.*

Rješenje.

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	0	$\frac{2}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	$\frac{3}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{30}{70}$
2	$\frac{9}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{3}{70}$	$\frac{2}{70}$	0	$\frac{5}{70}$
	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$	

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 2) &= P(X=0, Y=0) + P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=2) \\ &+ P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=0) \\ &= 0 + \frac{2}{70} + \frac{3}{70} + \frac{3}{70} + \frac{18}{70} + \frac{9}{70} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X}\sqrt{\operatorname{Var} Y}} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2}}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1.5$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{39}{14}$$

$$\mathbb{E}(Y) = 1$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{10}{7}$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{20}{70} & \frac{18}{70} & \frac{27}{70} & \frac{2}{70} & \frac{3}{70} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{9}{7}$$

$$r(X,Y) = -0.447$$

Uočite da smo svakako očekivali negativan koeficijent korelacije jer što je više naranči u uzorku, manje je jabuka.

□

Zadatak 3 (VIS-R; MI 2021/2022). *Distribucija slučajne varijable X dana je s*

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2a & 5a & b \end{pmatrix},$$

gdje su $a, b \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ realni parametri.

(a) Ako je poznato da je $\operatorname{Var} X = 4$, odredite parametre a i b, te vjerojatnost $P(X > \mathbb{E}X)$.

(b) Neka su X_1 i X_2 nezavisne i jednako distribuirane kao X. Odredite distribuciju njihove sume te izračunajte koeficijent korelacije $r(X_1, X_2^2)$.

Rješenje.

(a) Iz distribucije imamo $b = 1 - 7a$, iz varijance je $2a + 16b - (4b - 2a)^2 = 4$, pa je $a = \frac{1}{10}$ i $b = \frac{3}{10}$. Zato je očigledno

$$P(X > \mathbb{E}X) = P(X > 1) = \frac{3}{10}$$

(b) Distribucija sume $X_1 + X_2$ je

$$X_1 + X_2 \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0.04 & 0.2 & 0.25 & 0.12 & 0.3 & 0.09 \end{pmatrix}$$

Kako su X_1 i X_2 nezavisne, to su i X_1 i X_2^2, pa je i $r(X_1, X_2^2) = 0$.

□

Zadatak 4 (VIS-R; MI 2022/2023)**.** *Slučajni vektor* (X, Y) *dan je zakonom razdiobe:*

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

(a) Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X *i* Y*.*

(b) Jesu li slučajne varijable X *i* Y *nezavisne? Dokažite svoj odgovor.*

(c) Jesu li slučajne varijable $X + Y$ *i* $X - Y$ *nezavisne? Dokažite svoj odgovor.*

Rješenje.

(a)

$$X, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\mathbb{E}(XY) = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = 0$$

$$r(X, Y) = 0$$

(b) X i Y nisu nezavisne jer

$$P(X = -1, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{16} = P(X = -1) \cdot P(Y = -1)$$

(c) Odredimo razdiobu slučajnog vektora $(X + Y, X - Y)$

$(X+Y) \setminus (X-Y)$	-2	-1	0	1	2	
-2	0	0	0	0	0	0
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	0	0	0	0	0
	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	

što se može jednostavnije napisati kao

$(X+Y)\backslash(X-Y)$	-1	1	
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Budući da za sve $i, j \in \{-1, 1\}$ vrijedi

$$P(X+Y=i, X-Y=j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(X+Y=i) \cdot P(X-Y=j)$$

slijedi da su slučajne varijable $X+Y$ i $X-Y$ nezavisne.

□

Zadatak 5 (VIS-R; MI 2022/2023). *Pokus se sastoji od istovremenog bacanja novčića i igraće kocke. Pokus ponavljamo sve dok se ne pojavi pismo na novčiću ili šestica na kocki, to jest, barem jedan od ta dva događaja. Neka slučajna varijabla X označava ukupan broj ponavljanja pokusa, a Y ukupan broj pokusa u kojima je na novčiću pala glava.*

(a) Odredite očekivanje slučajne varijable X.

(b) Odredite očekivanje slučajne varijable Y.

Rješenje. Vjerojatnost uspjeha u jednom ponavljanju pokusa je jednaka

$$p = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{pismo}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{šestica}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}_{\text{i pismo i šestica}} = \frac{7}{12}.$$

(a) Uočimo da je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Zato je

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \frac{12}{7}.$$

(b) Uočimo da Y poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0$. Vidimo da je $Y=0$ u slučaju da odmah na prvom ponavljanju na novčiću padne pismo (i pokus odmah završi), tj.

$$P(Y=0) = \frac{1}{2}.$$

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$ je $Y=n$ u slučaju da u prvih n ponavljanja na novčiću padne glava, a od toga u prvih $n-1$ ponavljanja na kocki treba pasti broj različit od 6. U n-tom ponavljanju na kocki može pasti 6 (pa pokus završava) ili broj različit od 6, a tada u

$(n+1)$-vom ponavljanju na novčiću treba pasti pismo (inače bi broj glava bio veći od n). Zato slijedi

$$P(Y=n)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{24},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= 0\cdot\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{24}=\frac{7}{24}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}= \\ &= \text{(koristeći deriviranje geometrijskog reda)} = \\ &= \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{6}{7}=0.85714\end{aligned}$$

□

Zadatak 6 (LJIR 2020/2021)**.** *Neka su X i Y slučajne varijable te neka je $r(X,Y)$ njihov koeficijent korelacije.*

(a) Navedite sve slučajeve za koje je $r(X,Y)$ jednak -1.

(b) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, mora li vrijediti $r(X,Y)=0$? Obrazložite odgovor.

(c) Navedite primjer dvije slučajne varijable X i Y koje su nekorelirane, ali su zavisne.

(d) Dokažite da za sve realne brojeve $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, pri čemu su $a>0$ i $c>0$, vrijedi $r(aX+b,cY+d)=r(X,Y)$.

Rješenje.

(a) $Y=aX+b, a<0, b\in\mathbb{R}$

(b) Mora, zbog nezavisnosti je $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$, pa je

$$r(X,Y)=\frac{\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y}{\sqrt{\operatorname{Var}X}\sqrt{\operatorname{Var}Y}}=0.$$

(c) $X\sim\mathcal{U}(-1,1), Y=X^2$

(d)

$$\begin{aligned}r(aX+b,cY+d) &= \frac{\mathbb{E}\left[(aX+b-\mathbb{E}(aX+b))(cY+d-\mathbb{E}(cY+d))\right]}{\sqrt{\operatorname{Var}(aX+b)}\sqrt{\operatorname{Var}(cY+d)}}= \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[(aX+b-a\mathbb{E}(X)-b)(cY+d-c\mathbb{E}(Y)-d)\right]}{\sqrt{a^2c^2\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}= \\ &= \frac{ac\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]}{ac\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}=r(X,Y)\end{aligned}$$

□

Zadatak 7 (VIS-R; MI 2020/2021)**.** *Iz standardnog špila od 52 karte izvlačimo dvije karte bez vraćanja. Neka je X broj izvučenih aseva, a Y broj izvučenih pikova. Odredite zakon razdiobe slučajnog vektora (X,Y) te pripadne marginalne distribucije. Odredite kovarijacijski moment slučajnih varijabli X i Y. Jesu li varijable X i Y nezavisne? Zašto?*

Rješenje.

$Y \setminus X$	0	1	2	
0	0.4751	0.081	0.002	0.558
1	0.3257	0.0542	0.002	0.382
2	0.0497	0.009	0	0.058
	0.850	0.144	0.004	

$$\mathbb{E}X = \frac{204}{1326}$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{102}{1326}$$

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = \frac{102}{1326} - \frac{1}{2} \cdot \frac{204}{1326} = 0$$

Varijable X i Y su nezavisne. □

Zadatak 8 (DIR 2022/23)**.**

(a) Dokažite svojstvo disperzije

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

(b) Dokažite

$$-1 \leq \mathrm{r}(X,Y) \leq 1$$

(c) Nasumično su odabrana dva različita broja iz skupa $\{1,2,3\}$. Neka je slučajna varijabla X manji, a slučajna varijabla Y veći broj. Odredite razdiobu slučajnog vektora (X,Y) i $\mathrm{r}(X,Y)$.

Rješenje.

(a)

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathbb{E}\left[(X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2\right] = \mathbb{E}\left[((X-\mathbb{E}X)+(Y-\mathbb{E}Y))^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}Y)^2\right] =$$

$$= \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

(b)

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}$$

$$X^* = \frac{X}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}},\ \mathrm{D}(X^*) = 1$$

$$Y^* = \frac{Y}{\sqrt{\mathrm{D}(Y)}},\ \mathrm{D}(Y^*) = 1$$

$$r(X^*,Y^*) = r(X,Y) = cov(X^*,Y^*)$$

$$\mathrm{D}(X^* \pm Y^*) = \mathrm{D}(X^*) + \mathrm{D}(Y^*) \pm 2cov(X^*,Y^*) = 2\left[1 \pm r(X^*,Y^*)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq r(X^*,Y^*) = r(X,Y) \leq 1$$

(c)

X	Y	p
1	2	$\frac{1}{3}$
1	3	$\frac{1}{3}$
2	3	$\frac{1}{3}$

$$\mathbb{E}X = \frac{4}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 2$$

$$\operatorname{Var} X = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{8}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{22}{3}$$

$$\operatorname{Var} Y = \frac{22}{3} - \frac{64}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{11}{3}$$

$$r(X,Y) = \frac{1}{2}$$

□