7.

Slučajni vektori

Sadržaj poglavlja

7.1. Slučajni vektori, razdiobe i gustoće

U nekom stohastičkom eksperimentu možemo promatrati više od jedne slučajne varijable. Na primjer, pri slučajnom odabiru neke osobe iz velike populacije, slučajne varijable mogu biti njezina dob, visina, težina, broj cipela. . . . Svaka od tih varijabli ima određenu razdiobu. Poznavanje tih razdioba ne donosi punu informaciju o obilježjima te osobe. Naime, varijable koje su ovdje uključene su međusobno *ovisne*, znajući jednu od njih, s većom ili manjom sigurnošću možemo nešto kazati i o vrijednosti drugih. Zbog toga je nužno poznavati i veze među tim slučajnim varijablama.

Da bismo obuhvatili međuovisnost dviju ili više slučajnih varijabli, moramo razviti matematički aparat kojim možemo proučavati *višedimenzionalne* slučajne varijable — slučajne vektore.

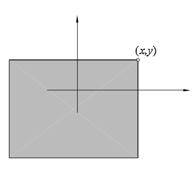
7.1.1. Razdioba slučajnih vektora

n**-dimenzionalni slučajni vektor** jest uređena n-torka slučajnih varijabli $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$. **Funkcija razdiobe** slučajnog vektora definira se na analogan način kao i u jednodimenzionalnom slučaju:

$$F(x_1,\dots,x_n) := \boldsymbol{P}(X_1 < x_1,\dots,X_n < x_n), \quad (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n. \qquad (1)$$

U dvodimenzionalnom slučaju koristit ćemo jednostavnije oznake. Vektor ćemo uglavnom označavati sa (X,Y). Funkcija razdiobe u ovom slučaju je definirana formulom

$$F(x,y) := \boldsymbol{P}(X < x,\ Y < y).$$



Sl. 7.1. Vrijednost funkcije razdiobe u točki (x,y) jednaka je vjerojatnosti da slučajan vektor poprimi vrijednost u kvadrantu s gornjim vrhom u točki (x,y).

Određivanje funkcije razdiobe nije toliko jednostavno kao u jednodimenzionalnom slučaju:

Primjer 7.1.

Točka se bira na sreću unutar trokuta $((x,y) : x > 0, y > 0, x+y < 1)$. Neka su (X,Y) kartezijeve koordinate te točke. Odredi funkciju razdiobe i gustoće tog vektora.

► Ravninu moramo rastaviti na šest područja (slika 7.2). Na dijelu 1 je

$$F(x,y) = \boldsymbol{P}(X < x, Y < y) = 0.$$

Unutar trokuta, na dijelu 2 vrijedi

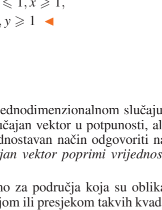
$$F(x,y) = 2xy.$$

Na dijelu 3 imamo

$$F(x,y) = 1-(1-x)^2-(1-y)^2$$

Poviše trokuta, na dijelu 4 vrijedi

$$F(x,y) = 1-(1-x)^2.$$



Sl. 7.2.

Ovu vrijednost možemo dobiti iz prethodne uvrštavajući $y = 1$. Naime, na ovom području vrijedi $\boldsymbol{P}(X < x, Y < y) = \boldsymbol{P}(X < x, Y < 1)$. Slično, na području 5 dobivamo

$$F(x,y) = 1-(1-y)^2$$

dok je na području 6 $F(x,y) = 1$. Prema tome, dobili smo

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ ili } y \leqslant 0,\\ 2xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x+y \leqslant 1,\\ 1-(1-x)^2-(1-y)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x+y \geqslant 1,\\ 1-(1-x)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, y \geqslant 1,\\ 1-(1-y)^2, & 0 \leqslant y \leqslant 1, x \geqslant 1,\\ 1, & x \geqslant 1, y \geqslant 1 \end{cases}$$ ◄

Treba naglasiti još jednu bitnu razliku prema jednodimenzionalnom slučaju. Poznavanje funkcije razdiobe određuje i ovdje slučajan vektor u potpunosti, ali pomoću vrijednosti te funkcije ne možemo na jednostavan način odgovoriti na temeljno pitanje: *kolika je vjerojatnost da slučajan vektor poprimi vrijednost unutar nekog područja G?*.

Direktan odgovor na to pitanje moguć je samo za područja koja su oblika kvadranta, ili neka koja se mogu lako prikazati unijom ili presjekom takvih kvadranata. Međutim, interesantna područja u ravnini uglavnom nemaju takve oblike. Tako na primjer, pomoću funkcije razdiobe ne možemo odgovoriti na to pitanje za područja koja su oblika kruga ili na primjer, trokuta.

Tako će pri proučavanju slučajnih vektora glavnu ulogu imati **gustoća razdiobe** slučajnog vektora.

Gustoća razdiobe. Neprekinuti slučajni vektori

Za slučajan vektor $(X_1,\dots,X_n)$ kažemo da je **neprekinut** ako postoji funkcija $f : \mathbf{R}^n \to [0,\infty\rangle$ takva da za sve $x_1, x_2, \dots, x_n$ vrijedi

$$F(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1,\dots,u_n)\,\mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_n. \qquad (2)$$

Funkciju f nazivamo **gustoća razdiobe** slučajnog vektora. Tamo gdje je F diferencijabilna, vrijedi

$$f(x_1,\dots,x_n) := \frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \qquad (3)$$

Prema (2) i definiciji funkcije razdiobe, možemo napisati

$$\boldsymbol{P}(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Odavde lako slijedi sljedeća formula

$$\boldsymbol{P}(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Prema tome, za pravokutnik

$$G = \{(x,y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

vrijedi formula

$$\boldsymbol{P}((X,Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Svako se dovoljno dobro područje može rastaviti na, prema potrebi beskonačnu, uniju pravokutnika. Koristeći svojstva aditivnosti i neprekinutosti integrala, možemo stoga prihvatiti sljedeću temeljnu formulu:

Računanje vjerojatnosti realizacije slučajnog vektora

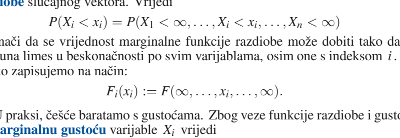
Za svaki izmjerivi skup $G \subseteq \mathbf{R}^n$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}((X_1,\dots,X_n) \in G) = \int \cdots \int_G f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n. \qquad (4)$$

Primjer 7.2.

Slučajan vektor (X,Y) ima gustoću razdiobe f. Izrazimo vjerojatnosti događaja **a**) $X > Y$; **b**) $X > |Y|$; **c**) $|X| < Y$; **d**) $Y - X > 1$.

► Vrijedi $\boldsymbol{P}((X,Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Sl. 7.3.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, **b**) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-x}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$,

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-y}^{y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$, **d**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{x+1}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ◄

7.1.2. Marginalne razdiobe

Ako nam je poznata razdioba vektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tada možemo odrediti razdiobu svake njegove komponente X_i. Takve se razdiobe nazivaju **marginalne razdiobe** slučajnog vektora. Vrijedi

$$P(X_i < x_i) = P(X_1 < \infty, \dots, X_i < x_i, \dots, X_n < \infty)$$

To znači da se vrijednost marginalne funkcije razdiobe može dobiti tako da se izračuna limes u beskonačnosti po svim varijablama, osim one s indeksom i. To kratko zapisujemo na način:

$$F_i(x_i) := F(\infty,\dots,x_i,\dots,\infty).$$

U praksi, češće baratamo s gustoćama. Zbog veze funkcije razdiobe i gustoće za **marginalnu gustoću** varijable X_i vrijedi

$$f_i(x_i) := \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = \int \cdots \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Za dvodimenzionalni slučajni vektor (X,Y) koristit ćemo jednostavnije oznake. Za gustoću vrijedi

$$f(x,y) := \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y},$$

marginalne razdiobe:

$$F_X(x) := F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$F_Y(y) := F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

marginalne gustoće:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

7.1.3. Nezavisnost

Komponente $X_1,\dots,X_n$ slučajnog vektora $(X_1,\dots,X_n)$ su slučajne varijable. One mogu ali ne moraju biti međusobno nezavisne. Prisjetimo se, slučajne varijable $X_1,\dots,X_n$ su nezavisne ako vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X_1 \in A_1,\dots,X_n \in A_n) = \boldsymbol{P}(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{P}(X_n \in A_n)$$

za sve izmjerive skupove $A_1,\dots,A_n \subseteq \mathbf{R}$. Izaberimo skupove $A_i = \langle -\infty, x_i\rangle$. Onda je $\boldsymbol{P}(X_i \in A_i) = \boldsymbol{P}(X_i < x_i) = F_i(x_i)$. Ako su $X_1,\dots,X_n$ nezavisne, onda zaključujemo da vrijedi

$$F(x_1,\dots,x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n), \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \qquad (5)$$

Preko funkcija gustoća kriterij za nezavisnost možemo iskazati ovako:

Teorem 7.1. ■ Kriterij nezavisnosti za neprekinute slučajne vektore

Komponente $X_1,\dots,X_n$ neprekinutog slučajnog vektora $(X_1,\dots,X_n)$ su nezavisne onda i samo onda ako vrijedi

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n), \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n. \qquad (6)$$

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz (5), deriviranjem te jednakosti po varijablama $x_1,\dots,x_n$. Obrat ćemo, zbog jednostavnosti zapisivanja, dokazati za dvodimenzionalan vektor. Neka su A i B intervali u $\mathbf{R}$ i $G = A \times B$ pravokutnik. Onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X \in A, Y \in B) = \boldsymbol{P}((X,Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Prema (6), vrijedi $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, pa je ovaj integral jednak

$$\iint_G f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_B f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \boldsymbol{P}(X \in A) \cdot \boldsymbol{P}(Y \in B).$$

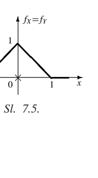
Dakle, X i Y su nezavisne. ◄

Primjer 7.3.

Slučajan vektor (X,Y) ima gustoću

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in S,\\ 0, & (x,y) \notin S, \end{cases}$$

gdje je S kvadrat na slici. Odredimo marginalne gustoće slučajnih varijabli X i Y. Jesu li te varijable nezavisne?



Sl. 7.4.

► Čim je gustoća različita od nule na području koje nema oblik pravokutnika sa stranicama paralelnim koordinatnim osima, komponente vektora moraju biti zavisne. Izračunajmo marginalne gustoće.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} x \leqslant -1: & \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot \mathrm{d}y = 0,\\ -1 \leqslant x \leqslant 0: & \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = 1+x,\\ 0 \leqslant x \leqslant 1: & \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = 1-x,\\ 1 < x: & \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot \mathrm{d}y = 0. \end{cases}$$

Dakle,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Na isti način dobivamo

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y, & -1 \leqslant y \leqslant 0,\\ 1-y, & 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

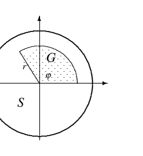
Sl. 7.5.

Vidimo da je $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ te su X i Y zaista zavisne. ◄

Primjer 7.4.

Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,2]$, a slučajna varijabla Y funkciju gustoće $f_Y(y) = 2y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Uz pretpostavku da su X i Y nezavisne, izračunaj vjerojatnost da Y poprimi vrijednost manju nego X.

► Zbog nezavisnosti varijabli X i Y vrijedi $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Događaj $(Y \leqslant X)$, čiju vjerojatnost tražimo, možemo napisati u obliku $((X,Y) \in G)$, gdje je G područje skicirano na slici. Dakle,



Sl. 7.6.

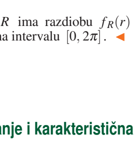
$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(Y \leqslant X) &= \boldsymbol{P}((X,Y) \in G)\\ &= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_G \frac{1}{2} \cdot 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_y^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$ ◄

Ako točku biramo na sreću unutar nekog područja, je li funkcija gustoće uvijek konstantna? Da, ako su kartezijeve koordinate u pitanju. No, ponekad je povoljnije uzeti drugi, recimo polarni sustav. Kakva je tad gustoća?

Primjer 7.5.

Točka se bira na sreću unutar jediničnog kruga. Neka su (R,Φ) polarne koordinate te točke. Odredi funkciju gustoće slučajnog vektora (R,Φ). Jesu li komponente R i Φ nezavisne?

Sl. 7.7. Polarne koordinate znaju biti povoljnije od kartezijevih u područjima ovakvih oblika. Iako je kod kartezijevih koordinata funkcija gustoće konstantna, jednadžbe tog područja u tom su sustavu neprilične. Stoga je prijelaz u polarni sustav opravdan. Tu gustoća neće biti konstantna, ali će komponente biti — za razliku od kartezijevih — nezavisne!



► Neka je S jedinični krug, T na sreću odabrana točka te G područje iscrtkano na slici. Po definiciji funkcije razdiobe, imamo

$$F(r,\varphi) = \boldsymbol{P}(R < r, \Phi < \varphi) = \boldsymbol{P}(T \in G) = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{r^2\varphi}{2\pi}.$$

Deriviranjem, dobivamo

$$f(r,\varphi) = \frac{\partial^2 F(r,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi} = \frac{r}{\pi}.$$

Ova se gustoća može faktorizirati. Kako R uzima vrijednosti unutar intervala $[0,1]$, a Φ unutar intervala $[0,2\pi]$, (umjesto da računamo marginalne razdiobe) napisat ćemo

$$f(r,\varphi) = 2r \cdot \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Prema tome, R i Φ su nezavisne. R ima razdiobu $f_R(r) = 2r$, $0 < r < 1$, dok Φ ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,2\pi]$. ◄

7.1.4. Nezavisnost varijabli, očekivanje i karakteristična funkcija

Sad ćemo dokazati neka svojstva očekivanja i disperzije koja smo koristili u prethodnim poglavljima.

Teorem 7.2. ■ Svojstva očekivanja

Za svake dvije slučajne varijable $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ vrijedi

$$\boldsymbol{E}(X+Y) = \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y). \qquad (7)$$

Ako su X i Y nezavisne, onda je

$$\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{E}(X) \cdot \boldsymbol{E}(Y). \qquad (8)$$

Tvrdnju smo dokazali za diskretne slučajne varijable. Dokaz ćemo sad proširiti i za neprekinute slučajne varijable. Dokaz za varijable općeg tipa zahtijeva matematički aparat koji prelazi okvire ovog kursa.

Dokaz. Neka je $f(x,y)$ gustoća slučajnog vektora (X,Y). Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y). \end{aligned}$$

Pretpostavimo sad da su X i Y nezavisne. Tad se funkcija gustoće moze faktorizitati: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,\mathrm{d}y = \boldsymbol{E}(X) \cdot \boldsymbol{E}(Y). \end{aligned}$$

Svojstvo očekivanja (8) vrijedi i za bilo koje dvije funkcije slučajnih varijabli:

$$\boldsymbol{E}(\psi(X)\chi(Y)) = \boldsymbol{E}(\psi(X)) \cdot \boldsymbol{E}(\chi(Y)).$$

Dokaz je identičan ovom u teoremu.

Posebno je važan primjer funkcija $\psi(x) = e^{itx}$. Tada je $\boldsymbol{E}(\psi(X))$ karakteristična funkcija varijable X!

Teorem 7.3. ■ Svojstvo karakteristične funkcije

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, za karakterističnu funkciju zbroja vrijedi

$$\vartheta_{X+Y}(t) = \vartheta_X(t) \cdot \vartheta_Y(t).$$

7.1.5. Korelacijska i kovarijacijska matrica, disperzija zbroja

Za slučajan vektor $(X_1,\dots,X_n)$ definiramo kovarijacijsku i korelacijsku matricu

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n}\\ \vdots & & \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n}\\ \vdots & & \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

s elementima

$$k_{ij} = \operatorname{cov}(X_i,X_j) = \boldsymbol{E}(X_iX_j) - \boldsymbol{E}(X_i)\boldsymbol{E}(X_j),$$

$$r_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{\boldsymbol{D}(X_i)\boldsymbol{D}(X_j)}}.$$

Ukoliko su komponente slučajnog vektora nekorelirane, kovarijacijska je matrica dijagonalna.

Disperzija zbroja nezavisnih varijabli jednaka je zbroju disperzija pribrojnika:

$$\boldsymbol{D}(X+Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y).$$

Uvjet nezavisnosti u ovom je slučaju prejak. Naime, dokaz aditivnosti disperzije, koji smo načinili za diskretne slučajne vektore, zahtijevao je samo svojstvo (8), a to svojstvo vrijedi za *nekorelirane* slučajne varijable.

Dokažimo općenitije:

Teorem 7.4. ■ Disperzija zbroja

Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nekorelirane slučajne varijable, tada vrijedi

$$\boldsymbol{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \boldsymbol{D}(X_1) + \boldsymbol{D}(X_2) + \ldots + \boldsymbol{D}(X_n).$$

Dokaz. Lijeva i desna strana se ne mijenjaju ako od varijabli oduzmemo očekivanje, zato možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{E}(X_k) = 0$. Sad imamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) &= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big)^2 = \boldsymbol{E}\Big(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n X_jX_k\Big)\\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \boldsymbol{E}(X_jX_k) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{E}(X_k^2) + \sum_{j\neq k} \boldsymbol{E}(X_jX_k)\\ &= \sum_{k=1}^n \boldsymbol{E}(X_k^2) + \sum_{j\neq k} \boldsymbol{E}(X_j)\boldsymbol{E}(X_k)\\ &= \sum_{k=1}^n \boldsymbol{E}(X_k^2) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{D}(X_k). \end{aligned}$$ ◄

Primjer 7.6.

Unutar intervala $[0,1]$ fiksirana je točka a. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$. Odredi kovarijacijski moment između varijable X i varijable $Y = |X-a|$: udaljenosti točke X do a. Za koju vrijednost broja a su X i Y nekorelirane?

►

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_0^1 x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{E}(Y) = \int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 (x-a)\,\mathrm{d}x = a^2 - a + \tfrac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(XY) &= \boldsymbol{E}(X|X-a|) = \int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 x(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, $\operatorname{cov}(X,Y) = \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{1}{12}$ i samo za $a = \frac{1}{2}$ je $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. To nipošto ne znači da su X i $Y = |X - \frac{1}{2}|$ *nezavisne*, dapače, te su varijable vezane funkcionalnom zavisnošću. ◄

7.2. Uvjetne razdiobe. Uvjetno očekivanje

Točka T bira se na sreću unutar jediničnog kruga $\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Razdioba vektora (X,Y) je konstantna na tom području.

Ako je poznato da je varijabla Y poprimila vrijednost $\frac{1}{2}$, što se može reći o varijabli X? Koje vrijednosti ona može poprimiti u ovom slučaju? S kojim vjerojatnostima?

Odgovor na ovo pitanje vodi nas do novog pojma *uvjetnih razdioba*.

Definicija 7.1. Uvjetna gustoća

Neka je $f(x,y)$ gustoća razdiobe slučajnog vektora (X,Y). Ako je poznata realizacija $Y=y$ varijable Y, tada se **uvjetna gustoća** varijable X uz uvjet $Y=y$ definira formulom

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x}. \tag{9}$$

Uglavnom pišemo jednostavnije $f(x \mid y)$, umjesto $f_{X|Y=y}(x)$.

Račun s uvjetnim vjerojatnostima omogućava nam lakše računanje vjerojatnosti, gustoća i očekivanja u slučaju kad realizacija događaja ili neke slučajne varijable ovisi o nekoj drugoj slučajnoj varijabli. Tu uvjetne gustoće igraju sličnu ulogu kao i uvjetne vjerojatnosti i hipoteze u formuli potpune vjerojatnosti. Tako dobivamo i analogne formule. Najprije, iz definicijske formule možemo zapisati

$$f(x,y) = f(x \mid y) f_Y(y),$$
$$f(x,y) = f(y \mid x) f_X(x).$$

Marginalne gustoće dobivamo integriranjem lijeve strane ovih jednakosti:

Marginalne i uvjetne gustoće

Marginalne gustoće možemo računati formulama

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y \mid x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uvjetne gustoće su također efikasno sredstvo u računanju očekivanja, pa i vjerojatnosti događaja (koji ovisi o mogućim realizacijama slučajne varijable:

Uvjetna očekivanja i vjerojatnosti

Očekivanje varijable X koja ovisi o realizacijama varijable Y:

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(X \mid Y{=}y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Vjerojatnost događaja koji ovisi o realizacijama slučajne varijable X:

$$\boldsymbol{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(A \mid X{=}x) f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Primjer 7.7.

Biramo na sreću broj $Y \in [0,1]$, zatim na sreću broj $X \in [0,Y]$. Izračunaj gustoću razdiobe i očekivanje varijable X.

► Koristit ćemo formulu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Tu je f_Y gustoća jednolike razdiobe $U(0,1)$:

$$f_Y(y) = 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

$f_{X|Y=y}$ je gustoća jednolike razdiobe na intervalu $[0,y]$:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Zato je

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X|Y=y}(x)\,\mathrm{d}y = \int_x^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\ln x, \qquad 0 < x \leqslant 1,$$

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_0^1 x(-\ln x)\,\mathrm{d}x = \Big(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Samo očekivanje možemo lakše dobiti formulom

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(X \mid Y{=}y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Tu je $\boldsymbol{E}(X \mid Y{=}y)$ uvjetno očekivanje varijable X uz uvjet $Y=y$:

$$\boldsymbol{E}(X \mid Y{=}y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}$$

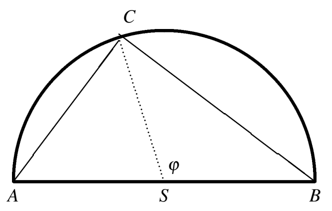
te je

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_0^1 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}. \;◄$$

Primjer 7.8.

Zadan je polukrug s promjerom AB, polumjera R. Neka je C točka na sreću odabrana na luku polukružnice. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana točka T unutar polukruga leži unutar trokuta ABC?

► Neka je S središte polukruga. Označimo s φ kut $\sphericalangle CSB$. Izbor kuta φ određuje jednoznačno točku C i obratno. Reći da je C izabrana na sreću na luku polukružnice znači zapravo da φ ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,\pi]$.



Sl. 7.8.

Neka je D događaj

$$D = \{\text{Točka } T \text{ leži unutar trokuta } ABC\}.$$

Površina trokuta ABC je

$$m(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot R^2 \sin\varphi + \tfrac{1}{2}R^2 \sin(\pi - \varphi) = R^2 \sin\varphi.$$

Za fiksnu vrijednost od φ vjerojatnost traženog događaja D je

$$P(D \mid \varphi) = \frac{m(\triangle ABC)}{\frac{1}{2}R^2\pi} = \frac{R^2 \sin\varphi}{\frac{1}{2}R^2\pi} = \frac{2}{\pi}\sin\varphi.$$

Kako je gustoća varijable φ dana sa

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

to po formuli (11) dobivamo

$$P(D) = \int_0^{\pi} P(D \mid \varphi) f(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi}\sin\varphi \cdot \frac{1}{\pi} \cdot d\varphi = -\frac{2\cos\varphi}{\pi^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2}. \;◄$$