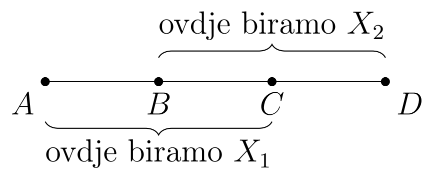
Zadatak 1 (DIR 2021/2022)**.** *Dužina $\overline{AD}$ podijeljena je točkama B i C na tri dijela tako da je $|AB| = |BC| = |CD| = 1$. Točku X_1 biramo na sreću na dužini $\overline{AC}$, a točku X_2 na sreću na dužini $\overline{BD}$. Slučajnu varijablu Z definiramo kao duljinu dužine $\overline{X_1X_2}$. Odredite funkciju razdiobe F_Z slučajne varijable Z i izračunajte očekivanje $E(Z)$.*

Rješenje.



Tražimo funkciju razdiobe od $Z = |X_1X_2|$. Po definiciji, funkcija razdiobe je

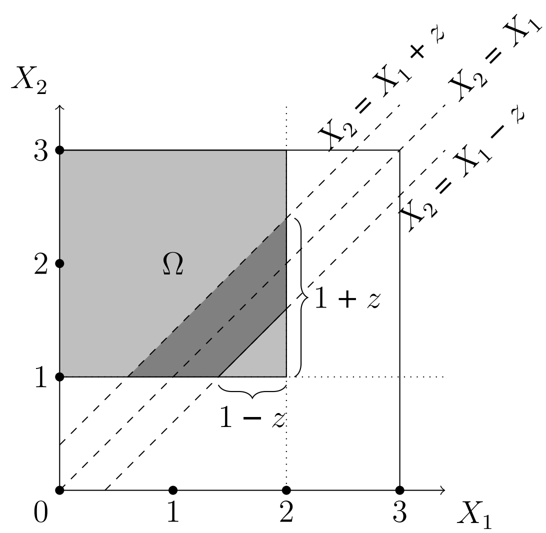
$$F_Z(z) = P(\{Z < z\}) = \frac{m(\{Z < z\})}{m(\Omega)}.$$

Jasno je da za $z < 0$ vrijedi $F_Z(z) = 0$ jer dužina ne može imati negativnu duljinu, te $F_Z(z) = 1$ za $z > 3$ jer je izabrana dužina uvijek kraća ili jednako duga kao $\overline{AD}$. Razriješimo sada netrivijalan slučaj za $Z \in [0, 3]$. Da bismo mogli nacrtati skicu, odredimo kako će na njoj izgledati skup $\{Z < z\}$.

$$\{Z < z\} = \{(X_1, X_2) : |X_1 - X_2| < z\} = \{(X_1, X_2) : -z < X_1 - X_2 < z\} =$$

$$= \{(X_1, X_2) : X_2 < X_1 + z, X_2 > X_1 - z\}$$

Primijetimo da se radi o prugi između pravaca $X_2 = X_1 + z$ i $X_2 = X_1 - z$. U slučaju da je $z < 1$, skica će izgledati ovako:



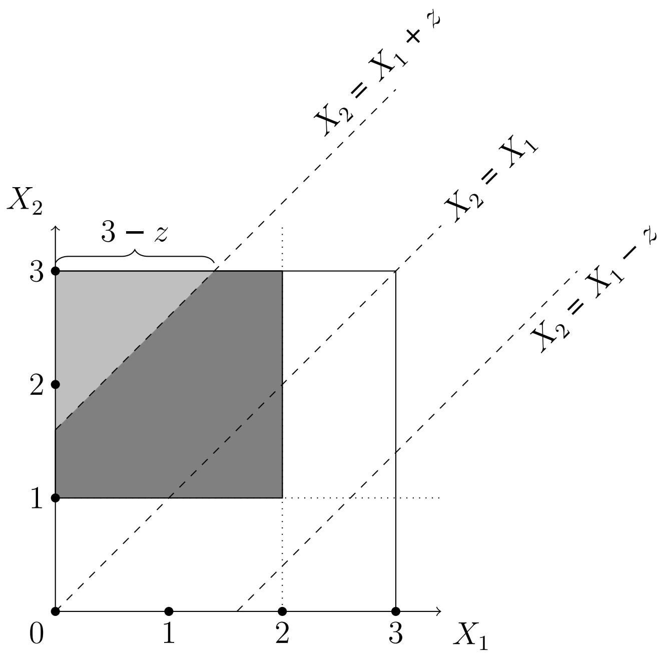
Tada možemo dobiti površinu tamnog područja, tj. $m(\{Z < z\})$, kao razliku površine "velikog trokuta" (duljine katete $1 + z$) i površine "malog trokuta" (duljine katete $1 - z$)

$$m(\{Z < z\}) = \frac{(1+z)^2}{2} - \frac{(1-z)^2}{2} = 2z.$$

Iz skice je očigledno da je $m(\Omega) = 4$, stoga je u ovom slučaju tražena vjerojatnost

$$F_Z(z) = P(\{Z < z\}) = \frac{2z}{4} = \frac{z}{2}, \quad z \in [0, 1) .$$

U slučaju da je $z \in [1, 3]$ desna strana pruge "izaći" će iz kvadrata (Ω) s donje strane:



Tada možemo dobiti $m(\{Z < z\})$ kao razliku površine kvadrata i gornjeg "malog trokuta"

$$m(\{Z < z\}) = 4 - \frac{(3-z)^2}{2}.$$

Tražena vjerojatnost u ovom slučaju je

$$F_Z(z) = P(\{Z < z\}) = \frac{4 - \frac{(3-z)^2}{2}}{4} = -\frac{z^2}{8} + \frac{3z}{4} - \frac{1}{8}, \quad z \in [1, 3] .$$

Nacrtajte graf ovako dobivene F_Z i uvjerite se da zadovoljava svojstva funkcije razdiobe slučajne varijable. Sada, da bismo izračunali očekivanje, odredimo najprije f_Z:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z \in [0, 1) \\ \frac{3}{4} - \frac{z}{4}, & z \in [1, 3] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}\, dz + \int_1^3 z \left(\frac{3}{4} - \frac{z}{4} \right) dz = \frac{13}{12}.$$

$\square$

Zadatak 2 (JIR 2021/2022)**.** *Biramo dvije točke na sreću na dužini $\overline{OA}$, pri čemu su te točke redom dane s $O(0,0)$ i $A(1,0)$. Neka je T točka s većom apscisom od te dvije. Neka je $\varphi = \measuredangle TBO$, gdje je $B(0,1)$.*

(a) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable X, pri čemu je X vrijednost apscise točke T.

(b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable Θ, pri čemu je Θ vrijednost kuta $\varphi = \measuredangle TBO$ i izračunajte $P\left(\Theta > \frac{\pi}{6}\right)$.

Rješenje.

(a) Neka su X_1, X_2 apscise odabranih točaka. To su, jasno, slučajne varijable s uniformnom razdiobom na intervalu $[0,1]$. Neka je $X = \max(X_1, X_2)$ apscisa točke T. Raspišimo definiciju funkcije razdiobe i iskoristimo poznati trik za minimum/maksimum nezavisnih slučajnih varijabli (vidi prethodne auditorne vježbe):

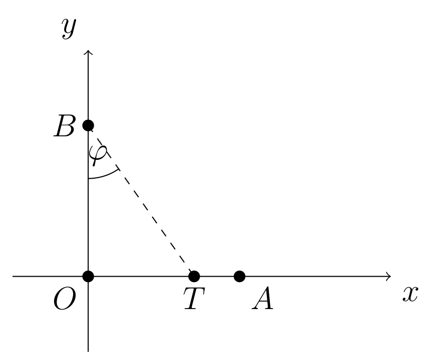
$$F_X(x) = P(X < x) = P(X_1 < x,\, X_2 < x) = (\text{nezavisnost}) =$$

$$= P(X_1 < x)P(X_2 < x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) = x \cdot x = x^2, \quad x \in [0,1].$$

Tada je

$$f_X(x) = F_X'(x) = 2x, \quad x \in [0,1].$$

(b)



Budući da je $|OB| = 1$ te $|OT| = X$, vrijedi $\Theta = \operatorname{arctg}(X)$. Primijetimo da se interval $X \in [0,1]$ preslikava u $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Uz oznaku $\psi(x) = \operatorname{arctg}(x)$, dobivamo gustoću slučajne varijable Θ:

$$g_\Theta(\theta) = f_X\left(\psi^{-1}(\theta)\right) \cdot \left|\frac{d}{d\theta}\psi^{-1}(\theta)\right| =$$

$$= 2\operatorname{tg}(\theta) \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}.$$

Tražena vjerojatnost je:

$$P\left(\Theta > \frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g_\Theta(\theta)\, d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = \cdots = -2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u^3} = \frac{2}{3}.$$

□

Zadatak 3 (LJIR 2021/2022). *Vrijeme, u satima, koje student provede pišući ispit je slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$f_X(x) = ax^2 + bx,\ x \in [0,2]$$

Ispit traje maksimalno dva sata, a očekivano vrijeme pisanja je jedan sat i 25 minuta.

(a) *Odredite parametre a i b.*

(b) *Izračunajte vjerojatnost da student piše ispit manje od jednog sata.*

(c) *Ako student piše ispit već sat vremena, kolika je vjerojatnost da će završiti u idućih 15 minuta?*

Rješenje.

(a) Iz činjenice da je $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$, uvrštavanjem i rješavanjem integrala dobivamo da je

$$\frac{8}{3}a + 2b = 1.$$

S druge strane, u zadatku je zadano da je $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = 1 + \frac{25}{60}$. Isto kao i gore, rješavanjem integrala dobivamo

$$4a + \frac{8}{3}b = 1 + \frac{25}{60}.$$

Riješimo ovaj linearni sustav i dobivamo

$$a = \frac{3}{16}, \qquad b = \frac{1}{4}.$$

(b)

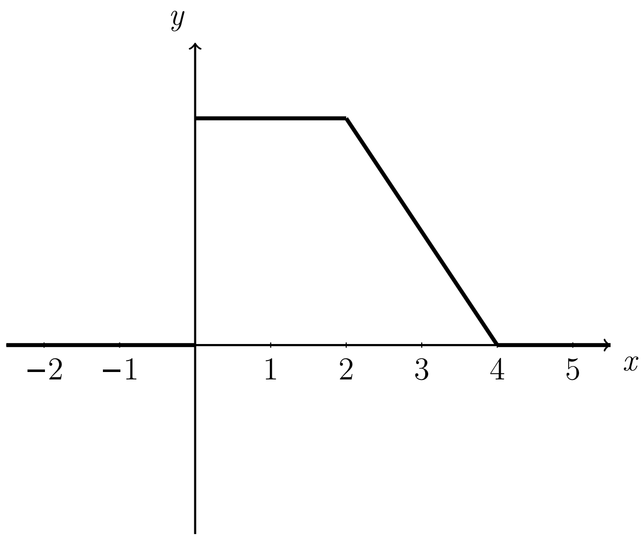
$$P(X < 1) = \int_0^1 f_X(x)\,dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{3}{16}.$$

(c)

$$P\left(X < 1 + \frac{15}{60} \mid X > 1\right) = \frac{P\left(1 < X < \frac{5}{4}\right)}{P(X > 1)} = \frac{\int_1^{\frac{5}{4}} f_X(x)\,dx}{\int_1^2 f_X(x)\,dx} = \frac{133}{822}.$$

□

Zadatak 4 (VIS-E; MI 2020/2021). *Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće vjerojatnosti čiji je graf dan slikom:*



(a) *Izračunajte* $P(1 < X < 2)$.

(b) *Izračunajte* $E(X)$.

(c) *Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable* $Y = (X - 2)^2$

Rješenje.

(a) "Visinu" grafa (nazovimo je a) određujemo koristeći činjenicu da je površina ispod gustoće jednaka 1. Ovdje se ne mora integrirati već se radi o trapezu pa jednostavno rješavamo jednadžbu

$$\frac{4+2}{2} \cdot a = 1,$$

iz koje se dobiva da je $a = \frac{1}{3}$. Tada je tražena vjerojatnost jednostavno površina pravokutnika ispod grafa između $x = 1$ i $x = 2$, dakle

$$P(1 < X < 2) = (2-1) \cdot a = \frac{1}{3}.$$

(b) Iz slike možemo zaključiti da je gustoća ove slučajne varijable:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0,2) \\ \frac{2}{3} - \frac{x}{6}, & x \in [2,4]. \end{cases}$$

Očekivanje je tada jednostavno:

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x}{3}\, dx + \int_2^4 x\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{6}\right) dx = \cdots = \frac{14}{9}.$$

(c) Da bismo odredili gustoću slučajne varijable Y, trebat će nam inverz funkcije kojom se X preslikava u Y. No, ovdje je ta funkcija $\psi(x) = (x-2)^2$ i ona nije injekcija na $[0,4]$, stoga je moramo podijeliti na intervale injektivnosti. Uočimo da se radi o kvadratnoj funkciji čiji je graf parabola s tjemenom u $(2,0)$ i onda je jasno da ćemo intervale injektivnosti jednostavno dobiti dijeleći funkciju na lijevu i desnu granu parabole:

$$\psi_1(x) = (x-2)^2, \quad x \in [0,2]$$

$$\psi_2(x) = (x-2)^2, \quad x \in [2,4]$$

Objema ovim funkcijama je slika interval $[0,4]$, a odgovarajući inverzi su im:

$$\psi_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y}, \quad y \in [0,4]$$

$$\psi_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y}, \quad y \in [0,4]$$

Gustoća slučajne varijable Y je tada

$$g_Y(y) = f_X\left(\psi_1^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\psi_1^{-1}(y)\right| + f_X\left(\psi_2^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\psi_2^{-1}(y)\right| =$$

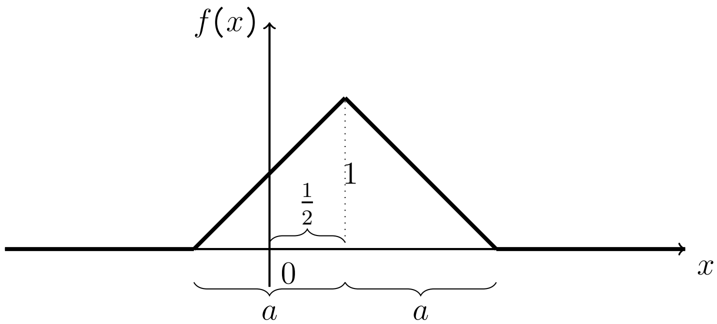
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2+\sqrt{y}}{6}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3\sqrt{y}} - \frac{1}{12}, \quad y \in [0,4].$$

□

Zadatak 5 (VIS-R; MI 2022/2023)**.**

(a) Dokažite da za funkciju razdiobe F_X slučajne varijable X vrijedi $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(b) Funkcija gustoće slučajne varijable X zadana je grafom:



i. Izračunajte $E(X^3)$.

ii. Odredite gustoću slučajne varijable $Y = X^2 + 1$.

Rješenje.

(a) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan padajuć niz realnih brojeva takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo da je $A_n := \{X \le x_n\}$. Tada je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajuć niz događaja, tj. $A_{n+1} \subseteq A_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Zato slijedi

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) =$$

$$= \text{(neprekinutost vjerojatnosti u odnosu na padajuće nizove događaja)} =$$

$$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

pa zbog proizvoljnosti niza (x_n) slijedi $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(b) Parametar a dobivamo iz činjenice da je površina ispod gustoće jednaka 1. Ovdje se to radi jednostavno, bez integriranja:

$$\frac{2a\cdot 1}{2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad a = 1.$$

Stoga je gustoća od X

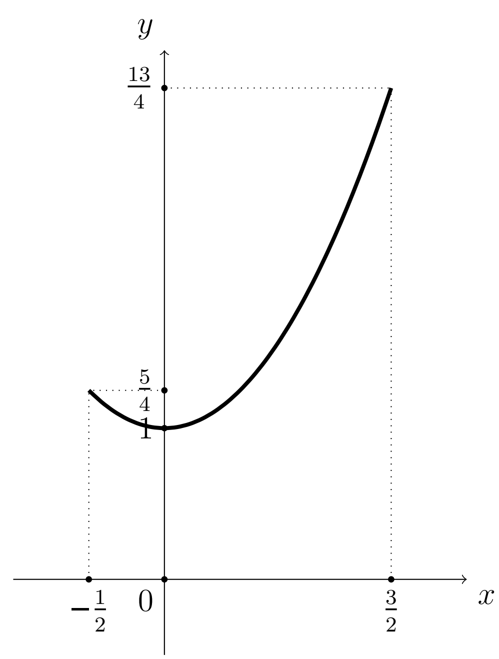
$$f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ -x+\frac{3}{2}, & x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

i.

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^3\left(-x+\frac{3}{2}\right)\,dx = \cdots = \frac{3}{8}.$$

ii. Vidimo da je $Y = \varphi(X)$, gdje je

$$\varphi : \left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2+1.$$



Uočimo da je φ injektivna na intervalima $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ i $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ i da je njezina slika $\left[1, \frac{13}{4}\right]$. Zato ju dijelimo na intervale injektivnosti. Prvo riješimo interval $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

$$y = \varphi(x) = x^2 + 1 \implies x = \varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y-1} =: \psi_1(y)$$

$$\implies g_1(y) = f_X(\psi_1(y)) \left|\psi_1'(y)\right| = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{y-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, \quad y \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$$

Time preostaje interval $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

$$y = \varphi(x) = x^2 + 1 \implies x = \varphi_2^{-1}(y) = \sqrt{y-1} =: \psi_2(y)$$

$$\implies g_2(y) = f_X(\psi_2(y)) \left|\psi_2'(y)\right|$$

Ovdje će biti dva slučaja s obzirom na to da je f_X definirana po dijelovima, a interval kojim se trenutno bavimo u sebi sadrži dva dijela te funkcije. Zato je

$$g_2(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{y-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[1, \frac{5}{4}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{y-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right] \end{cases}.$$

Konačno, gustoću od Y dobivamo tako da zbrojimo ove pojedinačne "doprinose":

$$g_Y(y) = g_1(y) + g_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[1, \frac{5}{4}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{y-1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

□

Zadatak 6 (LJIR 2022/2023)**.** *Pokažite da slučajna varijabla X s funkcijom gustoće $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \geq 1$, nema konačno očekivanje, ali da je $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $n \geq 2$, pri čemu su X_i, $i = 1, \ldots, n$ nezavisne kopije slučajne varijable X, slučajna varijabla s konačnim očekivanjem. Odredite to očekivanje.*

Rješenje.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

Znamo da ovaj integral ne konvergira, stoga smo prvu tvrdnju iz zadatka pokazali. Odredimo sada funkciju razdiobe slučajne varijable X:

$$F_X(x) = 0, \quad x < 1$$

$$F_X(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Odredimo sada funkciju razdiobe od Y. Pri tome opet koristimo poznati trik s minimumom/maksimumom nezavisnih slučajnih varijabli (vidi prethodne vježbe), **s tim da se**

ovdje radi o minimumu, pa ćemo morati iskoristiti obrnutu vjerojatnost, ali generalna ideja je ista:

$$G_Y(y) = P(Y < y) = P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < y) = (\text{iskoristi obratnu vj.}) =$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \geq y) = 1 - P(X_1 \geq y, X_2 \geq y, \dots, X_n \geq y) = (\text{nezavisnost}) =$$

$$= 1 - P(X_1 \geq y) \cdot P(X_2 \geq y) \cdot \dots \cdot P(X_n \geq y) = (\text{opet iskoristi obratnu vj.}) =$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 < y)) \cdot (1 - P(X_2 < y)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X_n < y)) =$$

$$= 1 - (1 - F_X(y)) \cdot (1 - F_X(y)) \cdot \dots \cdot (1 - F_X(y)) =$$

$$= 1 - (1 - F_X(y))^n = 1 - \frac{1}{y^n}.$$

Funkcija gustoće te slučajne varijable je

$$g_Y(y) = G_Y'(y) = \frac{n}{y^{n+1}}, \quad y \geq 1,$$

a očekivanje je

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y g_Y(y)\, dy = \int_1^{\infty} y \frac{n}{y^{n+1}}\, dy = n \int_1^{\infty} \frac{1}{y^n}\, dy = n \cdot \left(\frac{y^{-n+1}}{-n+1} \right) \Bigg|_1^{\infty} = \frac{n}{n-1},$$

čime smo pokazali i drugu tvrdnju zadatka. □

Zadatak 7 (ZIR 2022/2023)**.** *Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(ax + \frac{3}{2} \right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite a.

(b) Ako je $Y = \frac{2}{X} + 3$, izračunajte disperziju od Y.

Rješenje.

(a) Standardno, koristimo činjenicu da je površina ispod gustoće jednaka 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 \left(ax^3 + \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{ax^4}{4} + \frac{x^3}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\implies \quad a = 2.$$

(b) Raspišimo izraz $\operatorname{Var} Y$ uvrštavanjem i korištenjem svojstava varijance:

$$\operatorname{Var} Y = \operatorname{Var}\left(\frac{2}{X} + 3 \right) = \operatorname{Var}\left(\frac{2}{x} \right) = 4 \operatorname{Var}\left(\frac{1}{x} \right) = 4 \operatorname{Var}\left(E\left(\frac{1}{X^2} \right) - \left(E\left(\frac{1}{x} \right)^2 \right) \right)$$

Sada je dovoljno izračunati očekivanja i uvrstiti ih:

$$E\left(\frac{1}{x^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} f(x)\, dx = \int_0^1 \left(2x + \frac{3}{2}\right)\, dx = \left(x^2 + \frac{3x}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{3x}{2}\right)\, dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{12}$$

$$\operatorname{Var} Y = 4 \cdot \left(\frac{5}{2} - \left(\frac{17}{12}\right)^2\right) = \frac{71}{36}.$$

$\square$