3.

Diskretne slučajne varijable i vektori

Sadržaj poglavlja

Pri realizaciji nekog pokusa ostvaruje se elementaran događaj $\omega \in \Omega$. Često je svrha pokusa mjerenje neke numeričke veličine čije vrijednosti ovise o toj realizaciji elementarnog događaja. Jednostavan primjer toga je model bacanja kocke. Tu je prirodno svakom elementarnom događaju pridružiti broj na koji je kocka pala. Time je definirano preslikavanje iz skupa Ω svih elementarnih događaja u skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ svih mogućih ishoda. Takvo se preslikavanje naziva *slučajna varijabla*.

Uz jedan stohastički pokus može biti (na prirodan način) povezano i više slučajnih varijabli. Tako na primjer, ako bacamo dvije kocke onda se kao slučajne varijable pridružene tom pokusu mogu uzeti (uz mnoge druge) zbroj brojeva na kockama, njihova razlika, manji od brojeva, veći od brojeva itd. itd.

Područje vrijednosti realne slučajne varijable neki je podskup skupa realnih brojeva. Pri proučavanju slučajnih varijabli izvršit ćemo grubu njihovu podjelu i izdvojiti dvije klase slučajnih varijabli: diskretne i neprekinute slučajne varijable. Prve poprimaju svoje vrijednosti unutar diskretnog skupa (obično prirodnih ili cijelih brojeva) a neprekinute mogu kao svoju vrijednost poprimiti bilo koji realni broj unutar nekog intervala. Ova je podjela uglavnom uvjetovana time što se za proučavanje ovih dviju važnih klasa koristi različiti matematički aparat, uz diskretne varijable vezani su prirodno nizovi i redovi realnih brojeva i matrice, dok se matematički aparat kojim se proučavaju kontinuirane slučajne varijable zasniva na sredstvima matematičke analize: diferencijalnom i integralnom računu. Naglasimo da ta podjela često nije uvjetovana samom prirodom pokusa. Uzmemo li kao primjer slučajnu varijablu koja mjeri duljinu odabranog proizvoda, ta je varijabla neprekinutog tipa jer se duljina neprekinuto mijenja. Međutim, izrazimo li tu duljinu u milimetrima, dobit ćemo slučajnu varijablu diskretnog tipa.

U ovom ćemo poglavlju proučavati diskretne slučajne varijable.

3.1. Diskretne slučajne varijable

3.1.1. Zakon razdiobe slučajne varijable

Neka je $S=\{x_1,x_2,\ldots\}$ konačan ili prebrojiv skup bez gomilišta. Obično je to podskup skupa prirodnih ili pak cijelih brojeva. Promatrat ćemo slučajne varijable, koje svakom elementarnom događaju pridružuju neku vrijednost iz skupa S. Neka je X preslikavanje sa skupa Ω svih elementarnih događaja u skup S. Uz to je preslikavanje prirodno postaviti pitanje: "kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi neku vrijednost x_k is skupa S". Označimo s A_k skup svih elementarnih događaja koji se preslikavaju u x_k:

$$A_k := \{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_k\}.$$

Da bismo mogli odgovoriti na gornje pitanje, skup A_k *mora biti događaj*, dakle, element σ-algebre $\mathscr{F}$ svih događaja. Tek ako je ovaj uvjet ispunjen, za preslikavanje X ćemo reći da je slučajna varijabla.

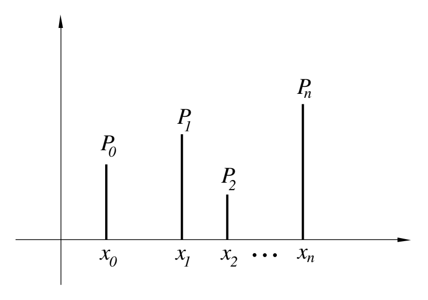
Slučajna varijabla, definicija i oznake

Preslikavanje $X:\Omega\to S$ je **diskretna slučajna varijabla** ako je za svaki $x_k\in S$ skup $A_k:=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_k\}$ događaj. Označimo

$$p_k := \boldsymbol{P}(A_k)=\boldsymbol{P}(X=x_k). \tag{1}$$

Za ove brojeve vrijedi $p_k>0$, $\sum p_k=1$. **Zakon razdiobe** slučajne varijable X sastoji se od područja vrijednosti koje ona poprima i odgovarajućih vjerojatnosti. Pišemo

$$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots\\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots\end{pmatrix}. \tag{2}$$



Sl. 3.1. Razdiobu slučajne varijable skiciramo kao na ovoj slici

Primjer 3.1.

Novčić bacamo tri puta. Neka je X broj pisama. Odredimo razdiobu te slučajne varijable.

► Vjerojatnosni prostor sastoji se od osam elementarnih događaja. Ispišimo ih i naznačimo vrijednost slučajne varijable X na svakom od njih:

$$\begin{aligned}
\omega_1&=\text{GGG}, & X(\omega_1)&=0\\
\omega_2&=\text{GGP}, & X(\omega_2)&=1\\
\omega_3&=\text{GPG}, & X(\omega_3)&=1\\
\omega_4&=\text{GPP}, & X(\omega_4)&=2\\
\omega_5&=\text{PGG}, & X(\omega_5)&=1\\
\omega_6&=\text{PGP}, & X(\omega_6)&=2\\
\omega_7&=\text{PPG}, & X(\omega_7)&=2\\
\omega_8&=\text{PPP}, & X(\omega_8)&=3
\end{aligned}$$

Vidimo da X poprima vrijednosti u skupu $\{x_1{=}0,\ x_2{=}1,\ x_3=2,\ x_4{=}3\}$ a vjerojatnosti su

$$\begin{aligned}
p_1&=\boldsymbol{P}(X=0)=\boldsymbol{P}(\omega_1)=\frac18,\\
p_2&=\boldsymbol{P}(X=1)=\boldsymbol{P}(\{\omega_2,\omega_3,\omega_5\})=\frac38,\\
p_3&=\boldsymbol{P}(X=2)=\boldsymbol{P}(\{\omega_4,\omega_6,\omega_7\})=\frac38,\\
p_4&=\boldsymbol{P}(X=3)=\boldsymbol{P}(\omega_8)=\frac18.
\end{aligned}$$

Dakle zakon razdiobe slučajne varijable X je,

$$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ \frac18 & \frac38 & \frac38 & \frac18\end{pmatrix}.$$ ◄

Primjer 3.2.

Neka je p vjerojatnost realizacije nekog događaja A. Pokus ponavljamo pod istim uvjetima sve dok se događaj A ne ostvari. Neka je X broj ponavljanja pokusa *do realizacije* događaja A. Tad za X kažemo da ima **geometrijsku razdiobu s parametrom p**. Odredimo zakon razdiobe za X.

► Ispišimo elementarne događaje, vrijednost slučajne varijable i pripadne vjerojatnosti u ovom pokusu. (Označimo $q=1-p$.)

$$\begin{aligned}
\omega_1&=A, & \boldsymbol{P}(\omega_1)&=p, & X(\omega_1)&=1,\\
\omega_2&=\overline{A}A & \boldsymbol{P}(\omega_2)&=qp, & X(\omega_2)&=2,\\
\omega_3&=\overline{A}\,\overline{A}A, & \boldsymbol{P}(\omega_3)&=q^2p, & X(\omega_3)&=3,\\
&\vdots\\
\omega_n&=\underbrace{\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-1}A, & \boldsymbol{P}(\omega_n)&=q^{n-1}p, & X(\omega_n)&=n,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zakon razdiobe je

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots\\ p & qp & q^2p & \cdots & q^{n-1}p & \cdots\end{pmatrix}.$$ ◄

— ◆ —

Zamislimo jednostavan pokus u kojem se kocka baca dva puta. Neka nam X označava rezultat prvog bacanja, a Y rezultat drugog bacanja. Prirodno je pretpostaviti da rezultati jednog bacanja ne ovise o rezultatima drugoga. Tako na primjer, vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X=3,\ Y=5)=P(\{(3,5)\})=\frac{1}{36}=\frac16\cdot\frac16=\boldsymbol{P}(X=3)\cdot\boldsymbol{P}(Y=5).$$

Slično se može pokazati (ispisujući elementarne događaje koje odgovaraju događaju s lijeve strane jednakosti) da vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X\leqslant 2,\ Y\geqslant 4)=\frac{6}{36}=\frac26\cdot\frac36=\boldsymbol{P}(X\leqslant 2)\cdot\boldsymbol{P}(Y\geqslant 4).$$

Ovaj primjer upućuje da je razumno iskazati sljedeću definiciju.

Nezavisne slučajne varijable — definicija i temeljno svojstvo

Slučajne varijable $X,Y:\Omega\to S$ su **nezavisne** ako za sve $x_k,y_j\in S$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X=x_k,\ Y=y_j)=\boldsymbol{P}(X=x_k)\boldsymbol{P}(Y=y_j) \tag{3}$$

Tada vrijedi općenitije, za sve A, $B\subset S$

$$\boldsymbol{P}(X\in A,\ Y\in B)=\boldsymbol{P}(X\in A)\boldsymbol{P}(Y\in B). \tag{4}$$

Neka su X i Y nezavisne, odnosno, neka vrijedi (3). Dokažimo da onda vrijedi (4). Označimo elemente skupova A i B ovako:

$$A=\{x_1,\ldots,x_n\},\qquad B=\{y_1,\ldots,y_m\}.$$

Onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(X\in A,\ Y\in B)&=\boldsymbol{P}(X\in\{x_1,\ldots,x_n\},\ Y\in\{y_1,\ldots,y_m\})\\
&=\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\{X=x_k,\ Y=y_j\}\Big)\\
&=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\boldsymbol{P}(X=x_k,\ Y=y_j)=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\boldsymbol{P}(X=x_k)\boldsymbol{P}(Y=y_j)\\
&=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\boldsymbol{P}(X=x_k)\cdot\sum_{1\leqslant j\leqslant m}\boldsymbol{P}(Y=y_j)\\
&=\boldsymbol{P}(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}\{X=x_k\})\cdot\boldsymbol{P}(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant m}\{Y=y_j\})\\
&=\boldsymbol{P}(X\in A)\boldsymbol{P}(Y\in B).
\end{aligned}$$

Definicija nezavisnosti proširuje se i na skup od konačno mnogo, pa i beskonačnog niza slučajnih varijabli:

Nezavisnost niza slučajnih varijabli

Slučajne varijable $X_1,X_2,\ldots,X_n$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru su **nezavisne**, ako za sve $A_1,A_2,\ldots,A_n\subseteq S$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}(X_1\in A_1,\ X_2\in A_2,\ldots,\ X_n\in A_n)\\
&\qquad=\boldsymbol{P}(X_1\in A_1)\boldsymbol{P}(X_2\in A_2)\cdots\boldsymbol{P}(X_n\in A_n).
\end{aligned} \tag{5}$$

Slučajne varijable $X_1,X_2,\ldots$ su nezavisne ako su za svaki n nezavisne slučajne varijable $X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_n}$, za svaki izbor (različitih) indeksa $i_1,i_2,\ldots,i_n$.

Primjer 3.3.

Bacamo kocku dok se ne pojavi broj manji od 5. Neka slučajna varijabla X označava potreban broj bacanja, slučajna varijabla Y prvo bacanje u kojem se pojavio broj 6 ($Y=0$ ako se broj 6 uopće ne pojavi). Odredimo zakone razdioba varijabli X i Y.

► Označimo sa X_i slučajne varijable: rezultate i-tog bacanja. To su nezavisne identički distribuirane slučajne varijable, svaka poprima vrijednosti iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ s jednakom vjerojatnošću.

Varijabla X poprima vrijednosti iz skupa $\{1,2,3,\ldots\}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(X=n)&=\boldsymbol{P}(X_1\geqslant 5,\ X_2\geqslant 5,\ldots,\ X_{n-1}\geqslant 5,\ X_n\leqslant 4)\\
&=\boldsymbol{P}(X_1\geqslant 5)\cdot\boldsymbol{P}(X_2\geqslant 5)\cdots\boldsymbol{P}(X_{n-1}\geqslant 5)\cdot\boldsymbol{P}(X_n\leqslant 4)\\
&=\Big(\frac26\Big)^{n-1}\cdot\frac46=\frac{2}{3^n},\quad n\geqslant 1.
\end{aligned}$$

Varijabla Y poprima vrijednosti iz skupa $\{0,1,2,\ldots\}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(Y{=}n)&=\boldsymbol{P}(X_1{=}5)\cdot\boldsymbol{P}(X_2{=}5)\cdots\boldsymbol{P}(X_{n-1}{=}5)\cdot\boldsymbol{P}(X_n{=}6)=\frac{1}{6^n},\quad n\geqslant 1,\\
\boldsymbol{P}(Y{=}0)&=\boldsymbol{P}(X_1{\leqslant}4)+\boldsymbol{P}(X_1{=}5,\ X_2{\leqslant}4)+\boldsymbol{P}(X_1{=}5,\ X_2{=}5,\ X_3{\leqslant}4)+\ldots\\
&=\frac46+\frac16\cdot\frac46+\Big(\frac16\Big)^2\cdot\frac46+\ldots=\frac46\cdot\frac{1}{1-\frac16}=\frac45.
\end{aligned}$$

Zakoni razdioba su:

$$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots\\ \frac23 & \frac29 & \ldots & \frac{2}{3^n} & \ldots\end{pmatrix},$$

$$Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n & \ldots\\ \frac45 & \frac16 & \ldots & \frac{1}{6^n} & \ldots\end{pmatrix}.$$ ◄

3.1.2. Funkcije diskretnih slučajnih varijabli

Neka je X diskretna slučajna varijabla s poznatim zakonom razdiobe, $\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadana funkcija i $Y=\psi(X)$. Ako je

$$X\sim\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\\ p_1 & p_2 & \ldots\end{pmatrix}$$

zakon razdiobe varijable X, tada je

$$Y\sim\begin{pmatrix} \psi(x_1) & \psi(x_2) & \ldots\\ p_1 & p_2 & \ldots\end{pmatrix} \tag{6}$$

zakon razdiobe varijable Y. Njega dovodimo u reducirani oblik

$$Y\sim\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\\ q_1 & q_2 & \ldots\end{pmatrix}$$

gdje su $y_1,y_2,\ldots$ sve različite vrijednosti iz skupa $\{\psi(x_1),\psi(x_2),\ldots\}$. Ako je $y_i=\psi(x_{i_1})=\psi(x_{i_2})=\ldots$, tada je $q_i=p_{i_1}+p_{i_2}+\ldots$.

Primjer 3.4.

Slučajna varijabla X ima zakon razdiobe

$$X\sim\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}.$$

Odredi zakon razdiobe varijable $Y=X^2$.

►

$$Y\sim\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$ ◄

3.2. Dvodimenzionalne diskretne razdiobe

Neka slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu $\{x_1, \dots, x_n\}$, a slučajna varijabla Y u skupu $\{y_1, \dots, y_m\}$. Razdioba slučajnog vektora (X, Y) je poznata ako znamo vjerojatnosti

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X = x_i,\ Y = y_j)$$

pri čemu mora biti $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$. **Zakon razdiobe** slučajnog vektora pišemo u obliku tablice

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

3.2.1. Marginalne razdiobe

Označimo

$$p_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j \boldsymbol{P}(X = x_i,\ Y = y_j) \quad \text{(suma } i\text{-tog retka)},$$

$$q_j = \sum_i p_{ij} = \sum_i \boldsymbol{P}(X = x_i,\ Y = y_j) \quad \text{(suma } j\text{-tog stupca)}.$$

Očito vrijedi

$$\sum_j \boldsymbol{P}(X = x_i,\ Y = y_j) = \boldsymbol{P}(X = x_i)$$

tako da zbrajanjem elemenata nekog retka u ovoj tablici dobivamo razdiobu varijable X. Slično tome, zbrajanjem elemenata stupca dobit ćemo razdiobu varijable Y. Te razdiobe upisujemo u marginama tablice, pa ćemo ih nazivati **marginalnim razdiobama** komponenti slučajnog vektora:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\dots$	q_m	1

Marginalne razdiobe varijabli X i Y su

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix},$$

Ako poznajemo marginalne razdiobe, razdioba vektora još uvijek nije određena, pomoću margina *ne možemo* općenito rekonstruirati vjerojatnosti u tablici. To je moguće učiniti samo ako su komponente slučajnog vektora *nezavisne*, jer onda vrijedi

$$p_{ij} = \boldsymbol{P}(X = x_i, Y = y_j) = \boldsymbol{P}(X = x_i)\boldsymbol{P}(Y = y_j) = p_i q_j.$$

Primjer 3.5.

Bacamo dvije kocke. Neka je X broj na prvoj kocki, Y veći od dvaju brojeva na kockama. Odredi razdiobu vektora (X, Y). Izračunaj marginalne razdiobe od X i Y.

► Postoji 36 elementarnih, jednako vjerojatnih događaja. Za svaki od njih možemo odrediti vrijednosti varijabli X i Y. Pri tom neka vrijednost može uključivati više elementarnih događaja. Dobivamo sljedeći zakon razdiobe vektora (X, Y) (zbog kratkoće smo označili $p = \frac{1}{36}$):

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	
1	p	p	p	p	p	p	$6p$
2	0	$2p$	p	p	p	p	$6p$
3	0	0	$3p$	p	p	p	$6p$
4	0	0	0	$4p$	p	p	$6p$
5	0	0	0	0	$5p$	p	$6p$
6	0	0	0	0	0	$6p$	$6p$
	p	$3p$	$5p$	$7p$	$9p$	$11p$	1

Marginalne razdiobe su

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$ ◄

3.2.2. Uvjetne razdiobe

Uvjetna vjerojatnost događaja $\{X = x_i \mid Y = y_j\}$ dana je sa

$$\boldsymbol{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{\boldsymbol{P}(X = x_i,\ Y = y_j)}{\boldsymbol{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}.$$

Skup svih takvih vjerojatnosti za sve i daje **uvjetnu razdiobu** varijable X uz uvjet $Y = y_j$:

$$X \mid Y = y_j \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ \frac{p_{1j}}{q_j} & \frac{p_{2j}}{q_j} & \dots \end{pmatrix}.$$

Ta se razdioba čita iz j-tog stupca razdiobe vektora (X, Y). Elementi tog stupca podijeljeni su sa odgovarajućom marginom.

Na isti način računamo i uvjetnu razdiobu varijable Y uz uvjet $X = x_i$:

$$Y \mid X = x_i \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots \\ \frac{p_{i1}}{p_i} & \frac{p_{i2}}{p_i} & \dots \end{pmatrix}.$$

Primjer 3.6.

Bacamo dvije kocke. Neka je slučajna varijabla X manji, a varijabla Y veći od dva pojavljena broja. Odredi razdiobu vektora (X, Y), marginalne razdiobe, te uvjetnu razdiobu od X uz uvjet $Y = 4$. Izračunaj vjerojatnost događaja $A = \{X \geqslant 2 \mid Y = 4\}$, $B = \{Y = 4 \mid X \geqslant 2\}$.

► Postoji 36 jednakovjerojatnih elementarnih događaja. Odredi za svaki od njih vrijednost vektora (X, Y)! Dobivamo sljedeću razdiobu (označimo zbog kratkoće $p = \frac{1}{36}$).

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	
1	p	$2p$	$2p$	$2p$	$2p$	$2p$	$11p$
2	0	p	$2p$	$2p$	$2p$	$2p$	$9p$
3	0	0	p	$2p$	$2p$	$2p$	$7p$
4	0	0	0	p	$2p$	$2p$	$5p$
5	0	0	0	0	p	$2p$	$3p$
6	0	0	0	0	0	p	p
	p	$3p$	$5p$	$7p$	$9p$	$11p$	1

Marginalne razdiobe varijabli X i Y čitamo iz posljednjeg retka odnosno stupca:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Uvjetna razdioba varijable $X \mid Y = 4$ je

$$\boldsymbol{P}(X = 1 \mid Y = 4) = \frac{\boldsymbol{P}(X = 1,\ Y = 4)}{\boldsymbol{P}(Y = 4)} = \frac{2p}{7p} = \frac{2}{7}$$

i slično za ostale vrijednosti od X:

$$X \mid Y = 4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(Pronađi tu razdiobu direktno iz četvrtog stupca razdiobe vektora (X, Y).)

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{\boldsymbol{P}(X \geqslant 2,\ Y = 4)}{\boldsymbol{P}(Y = 4)} = \frac{2p + 2p + p}{7p} = \frac{5}{7},$$

$$\boldsymbol{P}(B) = \frac{\boldsymbol{P}(X \geqslant 2,\ Y = 4)}{\boldsymbol{P}(X \geqslant 2)} = \frac{2p + 2p + p}{9p + 7p + 5p + 3p + p} = \frac{1}{5}.$$ ◄

Primjer 3.7.

Nezavisne slučajne varijable X_1 i X_2 imaju isti zakon razdiobe

$$X_1,\ X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odredi zakon razdiobe slučajnih varijabli **a**) $Y = X_1 + X_2$; **b**) $Z = X_1 X_2$.

► **a**) Y poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ s vjerojatnostima

$\boldsymbol{P}(Y = 0) = \boldsymbol{P}(X_1 = 0,\ X_2 = 0) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09,$

$\boldsymbol{P}(Y = 1) = \boldsymbol{P}(X_1 = 0,\ X_2 = 1) + \boldsymbol{P}(X_1 = 1,\ X_2 = 0) = 2 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.3$

itd. Dobivamo

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.09 & 0.30 & 0.37 & 0.20 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

b) Z poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, 4\}$ s vjerojatnostima

$\boldsymbol{P}(Z = 0) = \boldsymbol{P}(X_1 = 0) + \boldsymbol{P}(X_1 \neq 0,\ X_2 = 0) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.51,$

$\boldsymbol{P}(Z = 1) = \boldsymbol{P}(X_1 = 1,\ X_2 = 1) = 0.25,$

$\boldsymbol{P}(Z = 2) = \boldsymbol{P}(X_1 = 1\ X_2 = 2) + \boldsymbol{P}(X_1 = 2,\ X_2 = 1) = 0.20,$

$\boldsymbol{P}(Z = 4) = \boldsymbol{P}(X_1 = 2,\ X_2 = 2) = 0.04.$

te je

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.51 & 0.25 & 0.20 & 0.04 \end{pmatrix}.$$ ◄

3.3. Momenti i karakteristične funkcije diskretnih varijabli

3.3.1. Očekivanje slučajne varijable

Slučajne varijable se najlakše opisuju pomoću svojih **numeričkih karakteristika**. Najvažnija karakteristika je **očekivanje**.

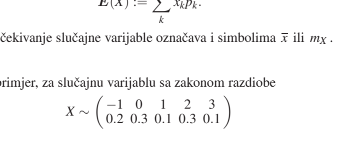
Definicija 3.1. Očekivanje slučajne varijable

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$
Očekivanje slučajne varijable X definirano je kao zbroj
$$\boldsymbol{E}(X) := \sum_k x_k p_k. \tag{7}$$
Često se očekivanje slučajne varijable označava i simbolima $\overline{x}$ ili m_X.

Tako na primjer, za slučajnu varijablu sa zakonom razdiobe
$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$
vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X) = -1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.1 = 0.8.$$
Ovaj primjer pokazuje da očekivanje slučajne varijable ne mora biti jednako nekoj od mogućih realizacija te varijable.

Očekivanje ne mora biti blisko niti realizaciji s najvećoj vjerojatnosti. Za slučajnu varijablu
$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 100 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$
vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X) = 1\cdot 0.8 + 5\cdot 0.1 + 100\cdot 0.1 = 11.3.$$

Geometrijska interpretacija očekivanja je sljedeća. Ako zamislimo da smo u točkama s apscisama x_1, x_2,... postavili utege s težinama p_1, p_2,..., tada će težište tog sustava biti u točki s apscisom $\overline{x}$.



Sl. 3.2. Očekivanje slučajne varijable je težinska sredina njezinih realizacija. Svaka realizacija ima trežinu koja odgovara njezinoj vjerojatnosti.

Očekivanje ne mora postojati. Tako na primjer, za slučajnu varijablu
$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix}$$
vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots = +\infty.$$
Zato ova slučajna varijabla nema očekivanja.

Teorem 3.1. Svojstva očekivanja

Neka je X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Očekivanje ima svojstvo linearnosti, za sve realne brojeve s i t vrijedi
$$\boldsymbol{E}(sX + tY) = s\boldsymbol{E}(X) + t\boldsymbol{E}(Y).$$
Ako su varijable X i Y nezavisne, tada vrijedi
$$\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y).$$

Dokaz. Svojstvo $\boldsymbol{E}(sX) = s\boldsymbol{E}(X)$ slijedi direktno iz definicije očekivanja:
$$\boldsymbol{E}(sX) = \sum (sx_k)p_k = s\sum x_k p_k = s\boldsymbol{E}(X).$$
Dokazat ćemo sad da vrijedi $\boldsymbol{E}(X+Y) = \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y)$. Time će prva tvrdnja u teoremu biti dokazana.

Neka je razdioba vektora (X,Y) zadana u standardnom obliku:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\dots$	q_m	1

Slučajna varijabla $X+Y$ poprima vrijednosti $x_j + y_k$ s vjerojatnošću p_{jk}. Zato je
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X+Y) &= \sum_{j,k}(x_j+y_k)p_{jk} = \sum_{j,k} x_j p_{jk} + \sum_{k,j} y_k p_{jk}\\ &= \sum_j x_j\cdot\sum_k p_{jk} + \sum_k y_k\cdot\sum_j p_{jk} = \sum_j x_j p_j + \sum_k y_k q_k\\ &= \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y).\end{aligned}$$
Dokažimo sad drugu tvrdnju. Varijable X i Y su nezavisne, pa vrijedi $p_{jk} = p_j q_k$ za sve j i k. Zato je
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(XY) &= \sum_{j,k} x_j y_k p_{jk} = \sum_{j,k} x_j y_k p_j q_k\\ &= \Big(\sum_j x_j p_j\Big)\Big(\sum_k y_k q_k\Big) = \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

3.3.2. Momenti slučajne varijable

Neka je slučajna varijabla Y funkcija slučajne varijable X, zadana formulom $Y = \psi(X)$. Kako ćemo odrediti njezino očekivanje?

Jedna je mogućnost da odredimo razdiobu od Y i zatim primjenimo formulu (7) na varijablu Y.

Primjer 3.8.

Neka je $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ i $Y = X^2$. Odredimo $\boldsymbol{E}(Y)$.

▶ . Odredimo razdiobu od Y:
$$Y = X^2 \sim \begin{pmatrix} (-2)^2 & (-1)^2 & 0 & 1^2 & 2^2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
Zato je
$$\boldsymbol{E}(Y) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$
Primjetimo da ovdje vrijedi $\boldsymbol{E}(X) = 0$, pa je dakle $\boldsymbol{E}(X^2) \neq \boldsymbol{E}(X)^2$.

— ◆ —

Druga mogućnost za računanje očekivanja funkcije slučajne varijable je korištenjem formule
$$\boldsymbol{E}(\psi(X)) = \sum \psi(x_k)p_k.$$
Do nje dolazimo u gornjem postupku tako da ne svodimo zakon razdiobe varijable Y na reducirani oblik, već očekivanje računamo iz nesređenog oblika. Iz
$$Y = X^2 \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$
dobivamo
$$\boldsymbol{E}(Y) = 4\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$

— ◆ —

Posebno će nam biti važne funkcije oblika $\psi(x) = x^n$ i $\psi(x) = (x-a)^n$.

Ishodišni i centralni momenti slučajne varijable

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$
i neka je n prirodni broj. **Ishodišni moment reda** n slučajne varijable X definirano se formulom
$$\boldsymbol{E}(X^n) := \sum_k x_k^n p_k. \tag{8}$$
Ako je m_X očekivanje od X, onda se **centralni moment** μ_n **reda** n definira formulom
$$\mu_n := \boldsymbol{E}[(X - m_X)^n] = \sum_k (x_k - m_X)^n p_k. \tag{9}$$

3.3.3. Disperzija i standardna devijacija slučajne varijable

Centralni moment reda 2 nazivamo posebnim imenom.

Disperzija slučajne varijable

Disperzija (**rasipanje**, **varijanca**) slučajne varijable X definira se formulom
$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}[(X - m_X)^2]$$
Ovaj se izraz najčešće računa na način:
$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}(X^2) - m_X^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \Big(\sum_k x_k p_k\Big)^2,$$

Jednakost ovih dviju formula slijedi iz svojstva linearnosti očekivanja:
$$\boldsymbol{E}[(X-m_X)^2] = \boldsymbol{E}[X^2 - 2Xm_X + m_X^2] = \boldsymbol{E}(X^2) - 2m_X\boldsymbol{E}(X) + m_X^2 = \boldsymbol{E}(X^2) - m_X^2.$$

Teorem 3.2. Svojstva disperzije

Za slučajnu varijablu X i realni broj s vrijedi
$$\boldsymbol{D}(sX) = s^2\boldsymbol{D}(X).$$
Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, onda vrijedi
$$\boldsymbol{D}(X+Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y).$$

Dokaz. Koristit ćemo svojstva očekivanja. Za prvu formulu dobivamo
$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(sX) &= \boldsymbol{E}[(sX)^2] - [\boldsymbol{E}(sX)]^2 = \boldsymbol{E}(s^2X^2) - [s\boldsymbol{E}(X)]^2\\ &= s^2\boldsymbol{E}(X^2) - s^2[\boldsymbol{E}(X)]^2 = s^2\boldsymbol{D}(X).\end{aligned}$$
Ako su X i Y nezavisne, onda imamo
$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(X+Y) &= \boldsymbol{E}[(X+Y)^2] - [\boldsymbol{E}(X+Y)]^2\\ &= \boldsymbol{E}(X^2) + 2\boldsymbol{E}(XY) + \boldsymbol{E}(Y^2) - \boldsymbol{E}(X)^2 - 2\boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y) - \boldsymbol{E}(Y^2)\\ &= \boldsymbol{E}(X^2) - \boldsymbol{E}(X)^2 + \boldsymbol{E}(Y^2) - \boldsymbol{E}(Y^2)\\ &= \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

— ◆ —

Ova se svojstva moraju dobro razumjeti. U tu svrhu, navest ćemo najprije sljedeći primjer.

Primjer 3.9.

Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju očekivanje a i disperziju σ^2. Kolika je disperzija slučajne varijable $X + 2Y$? Koliko je očekivanje a kolika disperzija slučajne varijable $X - Y$?

▶ U prvom slučaju vrijedit će
$$\boldsymbol{D}(X+2Y) = 1^2\cdot\boldsymbol{D}(X) + 2^2\cdot\boldsymbol{D}(Y) = 5\sigma^2.$$
U drugom slučaju je
$$\boldsymbol{E}(X-Y) = \boldsymbol{E}(X) - \boldsymbol{E}(Y) = a - a = 0,$$
$$\boldsymbol{D}(X-Y) = 1^2\boldsymbol{D}(X) + (-1)^2\boldsymbol{D}(Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y) = 2\sigma^2. \blacktriangleleft$$

— ◆ —

Zapamtimo, *disperzija slučajne varijable je uvijek pozitivna*. Ovo je svojstvo potpuno jasno jer slijedi iz formule
$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}[(X-m_X)^2] = \sum_k (x_k - m_X)^2 p_k.$$
Svi pribrojnici u ovom izrazu su nenegativni.

Može li disperzija biti jednaka nuli? U tom slučaju vrijedi $x_j = m_X$ za svaki j, a to znači da se sve realizacije slučajne varijable X podudaraju. Drugim riječima, tada X nije slučajna, već uvijek poprima istu vrijednost.

— ◆ —

Veličinu $\sigma_X := \sqrt{\boldsymbol{D}(X)}$ nazivamo **standardna devijacija** (**odstupanje**) varijable X.

Primjer 3.10.

Izračunaj očekivanje i disperziju slučajnih varijabli
$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & 6 & 10 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$
Odredi $\boldsymbol{E}(X+2Y)$ te, ukoliko su X i Y nezavisne, $\boldsymbol{E}(XY)$ i $\boldsymbol{D}(X-2Y)$.

▶ Odredimo $\boldsymbol{E}(X)$, $\boldsymbol{E}(Y)$, $\boldsymbol{D}(X)$, $\boldsymbol{D}(Y)$.
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X) &= -4\cdot 0.2 + 6\cdot 0.3 + 10\cdot 0.5 = 6,\\ \boldsymbol{E}(X^2) &= 16\cdot 0.2 + 36\cdot 0.3 + 100\cdot 0.5 = 64,\\ \boldsymbol{D}(X) &= \boldsymbol{E}(X^2) - \boldsymbol{E}(X)^2 = 64 - 36 = 28,\\ \boldsymbol{E}(Y) &= -1\cdot 0.4 + 4\cdot 0.6 = 2,\\ \boldsymbol{E}(Y^2) &= 1\cdot 0.4 + 16\cdot 0.6 = 10,\\ \boldsymbol{D}(Y) &= \boldsymbol{E}(Y^2) - \boldsymbol{E}(Y)^2 = 10 - 4 = 6.\end{aligned}$$
Zbog linearnosti očekivanja je $\boldsymbol{E}(X+2Y) = \boldsymbol{E}(X) + 2\boldsymbol{E}(Y) = 10$. Ako su X i Y nezavisne, $\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y) = 12$ i $\boldsymbol{D}(X-2Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(-2Y) = \boldsymbol{D}(X) + 4\boldsymbol{D}(Y) = 52$. ◀

Primjer 3.11.

Bacamo dvije ispravne kocke. Slučajne varijable X i Y definirane su na način

$X =$ apsolutna vrijednost razlike brojeva na kockama,

$Y =$ manji od dva broja ako su oni različiti, jednaka nuli ako su brojevi jednaki.

Pokaži da X i Y imaju identičan zakon razdiobe. Odredi njihovo očekivanje i disperziju.

▶ Vjerojatnosni prostor sastoji se od 36 jednako vjerojatnih elementarnih događaja. Odredimo vrijednost varijabli X i Y na tim događajima.

X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Y	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	1	0	2	2	2	2
3	1	2	0	3	3	3
4	1	2	3	0	4	4
5	1	2	3	4	0	5
6	1	2	3	4	5	0

Vidimo da varijable X i Y poprimaju različite vrijednosti na pojedinim elementarnim događajima, međutim njihova je razdioba identična!
$$X,\ Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$
Vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X) = \boldsymbol{E}(Y) = 0\cdot\frac{6}{36} + 1\cdot\frac{10}{36} + 2\cdot\frac{8}{36} + 3\cdot\frac{6}{36} + 4\cdot\frac{4}{36} + 5\cdot\frac{2}{36} = \frac{70}{36}.$$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{D}(Y) &= 0\cdot\frac{6}{36} + 1\cdot\frac{10}{36} + 4\cdot\frac{8}{36} + 9\cdot\frac{6}{36}\\ &\quad + 16\cdot\frac{4}{36} + 25\cdot\frac{2}{36} - \Big(\frac{70}{36}\Big)^2 = 2.052. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

— ◆ —

Neke informacije o međusobnoj ovisnosti dviju slučajnih varijabli možemo dobiti na temelju sljedećih numeričkih karakteristika.

Kovarijacijski moment. Koeficijent korelacije

Kovarijacijski moment varijabli X i Y definira se formulom
$$\operatorname{cov}(X,Y) := \boldsymbol{E}[(X-m_X)(Y-m_Y)] = \boldsymbol{E}(XY) - m_X m_Y.$$
Koeficijent korelacije definira se formulom
$$r(X,Y) := \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}.$$

Koeficijent korelacije daje nam neku informaciju o međuovisnosti slučajnih varijabli X i Y. Za nezavisne slučajne varijable uvijek je $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ pa s tim i $r(X,Y) = 0$. Obrat nije istinit. Varijable koje su nekorelirane ne moraju biti nezavisne.

3.3.4. Centrirane i normirane slučajne varijable

Neka je a realan broj. Razdioba slučajne varijable $X - a$ poznata nam je ukoliko znamo razdiobu varijable X. Kako se mijenjaju numeričke karakteristike? Vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X-a) = \boldsymbol{E}(X) - a, \qquad \boldsymbol{D}(X-a) = \boldsymbol{D}(X).$$
Zbog čega se disperzija ne mijenja? Najlakše je to razumjeti ako na konstantu a gledamo kao na slučajnu varijablu koja poprima uvijek istu vrijednost a. Ta je varijabla nezavisna od X, a njezina je disperzija jednaka nuli. Zato je $\boldsymbol{D}(X-a) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(a) = \boldsymbol{D}(X)$.

Pri translaciji ne mijenja se niti kovarijacijski moment:
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X-a, Y-b) &= \boldsymbol{E}\{[(X-a) - \boldsymbol{E}(X-a)][(Y-b) - \boldsymbol{E}(Y-b)]\}\\ &= \boldsymbol{E}\{[X - \boldsymbol{E}(X)][Y - \boldsymbol{E}(Y)]\} = \operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$
Posljedično, pri translaciji se ne mijenja niti koeficijent korelacije.

Izaberemo li $a = m_X$, tada slučajnu varijablu $X - m_X$ označavamo s $\mathring{X}$. Za nju vrijedi $\boldsymbol{E}(\mathring{X}) = 0$, $\boldsymbol{D}(\mathring{X}) = \boldsymbol{D}(X)$. Za slučajnu varijablu $\mathring{X}$ kažemo da je **centrirana**.

Očekivanje i disperzija slučajne varijable $aX + b$ iznose
$$\boldsymbol{E}(aX+b) = a\boldsymbol{E}(X) + b, \qquad \boldsymbol{D}(aX+b) = a^2\boldsymbol{D}(X).$$
Posebno važan slučaj izbora konstanti a i b nastupa kad je rezultirajuće očekivanje jednako nuli, a disperzija jedinici. Neka je $m = \boldsymbol{E}(X)$, $\sigma^2 = \boldsymbol{D}(X)$. Za slučajnu varijablu
$$X^* := \frac{X - m}{\sigma}$$
kažemo da je dobivena **normiranjem** iz slučajne varijable X. Vrijedi
$$\boldsymbol{E}(X^*) = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{E}(X-m) = 0, \qquad \boldsymbol{D}(X^*) = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{D}(X-m) = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{D}(X) = 1.$$
Koeficijent korelacije ne mijenja se normiranjem! Naime, vrijedi $m_{X^*} = m_{Y^*} = 0$, $\sigma_{X^*} = \sigma_{Y^*} = 1$ pa dobivamo
$$r(X^*, Y^*) = \boldsymbol{E}(X^*Y^*) = \boldsymbol{E}\Big(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\cdot\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\Big) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = r(X,Y).$$

— ◆ —

Za slučajne varijable koje nisu nezavisne, općenito je $\boldsymbol{D}(X+Y) \neq \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y)$. Točniju vezu iskazat ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3. Disperzija zbroja slučajnih varijabli

Disperzija zbroja $S = X_1 + \ldots + X_n$ slučajnih varijabli računa se formulom
$$\boldsymbol{D}(S) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{D}(X_i) + 2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Dokaz. Vrijedi $m_S = m_{X_1} + \ldots + m_{X_n}$ pa je
$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(S) &= \boldsymbol{E}[(S - m_S)^2] = \boldsymbol{E}\Big(\sum_{i=1}^n (X_i - m_{X_i})\Big)^2\\ &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{E}(X_i - m_{X_i})^2 + \sum_{i\neq j}\boldsymbol{E}[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})]\\ &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{D}(X_i) + 2\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Teorem 3.4. Svojstva koeficijenta korelacije

Za koeficijent korelacije uvijek je ispunjeno
$$|r(X,Y)| \leqslant 1.$$
Jednakost $r(X,Y) = \pm 1$ vrijedi onda i samo onda kad je $Y = aX + b$ za neke konstante a i b.

Dokaz. Neka su X^*, Y^* normirane slučajne varijable pridružene varijablama X i Y. Onda imamo
$$\boldsymbol{D}(X^* \pm Y^*) = \boldsymbol{D}(X^*) + D(Y^*) \pm 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) = 2[1 \pm r(X,Y)].$$
Lijeva strana je uvijek pozitivna, pa je zato pozitivna i desna. Odatle slijedi
$$|r(X,Y)| \leqslant 1.$$
Nadalje, jednakost $r(X,Y) = 1$ vrijedit će samo onda kad bude $\boldsymbol{D}(X^* - Y^*) = 0$. To je moguće samo kad je slučajna varijabla $X^* - Y^*$ jednaka konstanti. Odavde zaključujemo da mora biti
$$\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \text{const}$$
odnosno
$$Y = aX + b,$$
pri čemu je $a = \sigma_Y/\sigma_X$ i b neki realni broj.

Slično zaključujemo i u slučaju kad je $r(X,Y) = -1$. ◀

Primjer 3.12.

Ispravan novčić je bačen tri puta. Neka X označava broj pojavljenih glava, Y duljinu najdužeg niza uzastopno pojavljenih glava. Odredi zakon razdiobe vektora (X,Y) te koeficijent korelacije $r(X,Y)$.

▶ Postoji osam jednako vjerojatnih elementarnih događaja. Odrediti ćemo za svaki od njih vrijednosti varijabli X i Y i zatim sastaviti zakon razdiobe vektora (X,Y).

	X	Y
PPP	0	0
PPG	1	1
PGP	1	1
GPP	1	1
PGG	2	2
GPG	2	1
GGP	2	2
GGG	3	3

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Izračunajmo sada $\operatorname{cov}(X,Y)$, $\boldsymbol{D}(X)$ i $\boldsymbol{D}(Y)$.
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X) &= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{12}{8},\\ \boldsymbol{E}(Y) &= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{4}{8} + 2\cdot\frac{2}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{11}{8},\\ \boldsymbol{E}(XY) &= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{2}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} = \frac{22}{8},\\ \operatorname{cov}(X,Y) &= \frac{22}{8} - \frac{12}{8}\cdot\frac{11}{8} = \frac{44}{64},\\ \boldsymbol{D}(X) &= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} - \Big(\frac{12}{8}\Big)^2 = \frac{48}{64},\\ \boldsymbol{D}(Y) &= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{4}{8} + 4\cdot\frac{2}{8} + 9\cdot\frac{1}{8} - \Big(\frac{11}{8}\Big)^2 = \frac{47}{64},\\ r(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\boldsymbol{D}(X)\boldsymbol{D}(Y)}} = \frac{\frac{44}{64}}{\sqrt{\frac{48}{64}\cdot\frac{47}{64}}} = \frac{44}{\sqrt{47\cdot 48}} = 0.926. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

3.3.5. Karakteristična funkcija

Integralne transformacije važan su alat u matematičkoj analizi. Pokazat ćemo da se tim sredstvom uspješno rješavaju i mnogi problemi teorije vjerojatnosti. Analogon Fourierovog transformata ovdje će biti *karakteristična funkcija*.

Karakteristična funkcija

Karakteristična funkcija slučajne varijable X definira se formulom
$$\vartheta_X(t) := \boldsymbol{E}(e^{itX})$$
Dakle,
$$\vartheta_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}. \tag{10}$$

Karakteristična funkcija postoji za svaku slučajnu varijablu, jer je očekivanje slučajne varijable e^{itX} uvijek konačno. (Apsolutna vrijednost te slučajne varijable jednaka je jedinici.)

U sljedećem ćemo poglavlju koristiti neka od svojstava karakterističnih funkcija, koja nećemo u ovom trenutku dokazivati.

Svojstva karakteristične funkcije

1° Karakteristična funkcija jednoznačno određuje razdiobu: dvije različite razdiobe ne mogu imati istu karakterističnu funkciju.

2° Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, tada je
$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t)\cdots\vartheta_{X_n}(t). \tag{11}$$
3° Vrijedi formula
$$\boldsymbol{E}(X^r) = \frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}, \qquad r = 1, 2, \ldots \tag{12}$$
ukoliko očekivanje postoji. Posebice,
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X) &= -i\vartheta'(0),\\ \boldsymbol{D}(X) &= -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2.\end{aligned} \tag{13}$$