Komunikacijski kanali i signali

Teorija informacije

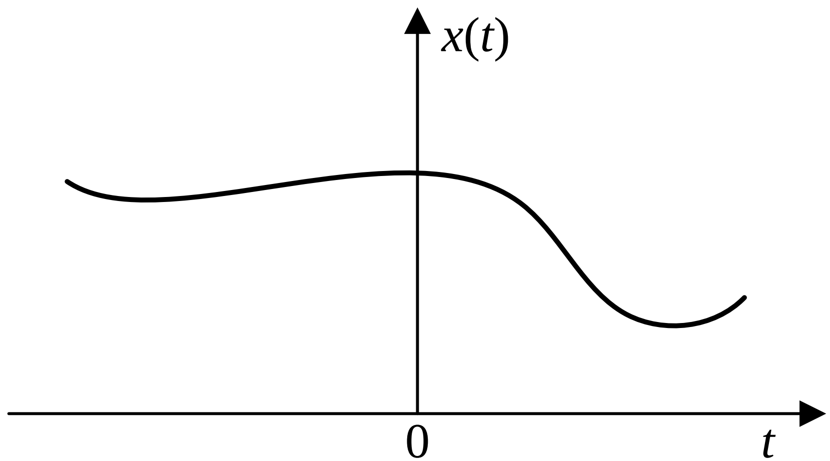
Signali

- signal – pojava koja opisuje neku fizikalnu veličinu
  - u električkim sustavima ta veličina je napon ili struja
- signal se matematički prikazuje (modelira) funkcijom neovisne varijable t, $t \in \mathbb{R}$
  - t najčešće predstavlja vrijeme
  - funkcija $x(t)$, x: $t \to x(t)$
  - promatramo isključivo realne signale: x: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- poseban naglasak bit će stavljen na
  - signale u kontinuiranom vremenu
  - na snagu i energiju signala
  - razlog: snaga potrebna za određivanje kapaciteta kanala

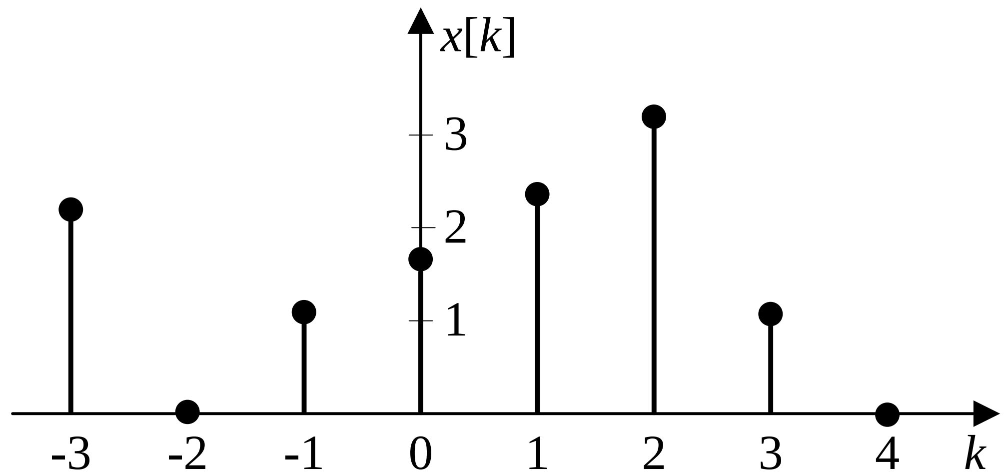
Kontinuirani i diskretni signali

- signal u kontinuiranom vremenu
  - ako je t kontinuirana varijabla
  - kraći naziv: kontinuirani signal
  - primjer: $x(t) = A \cdot \sin(2\pi f t)$
    - f – frekvencija signala $x(t)$, A – amplituda signala
- signal u diskretnom vremenu
  - ako varijabla t poprima vrijednosti isključivo u $t = kT$
    - $T \in \mathbb{R}$, $T \geq 0$, $\mathrm{k} \in \mathbf{Z}$
  - označava se kao $\{x_k\}$ ili $x[k] = x[kT]$
  - kraći naziv: diskretni signal

Primjeri kontinuiranih i diskretnih signala



a)



b)

- a – kontinuirani signal, b – diskretni signal

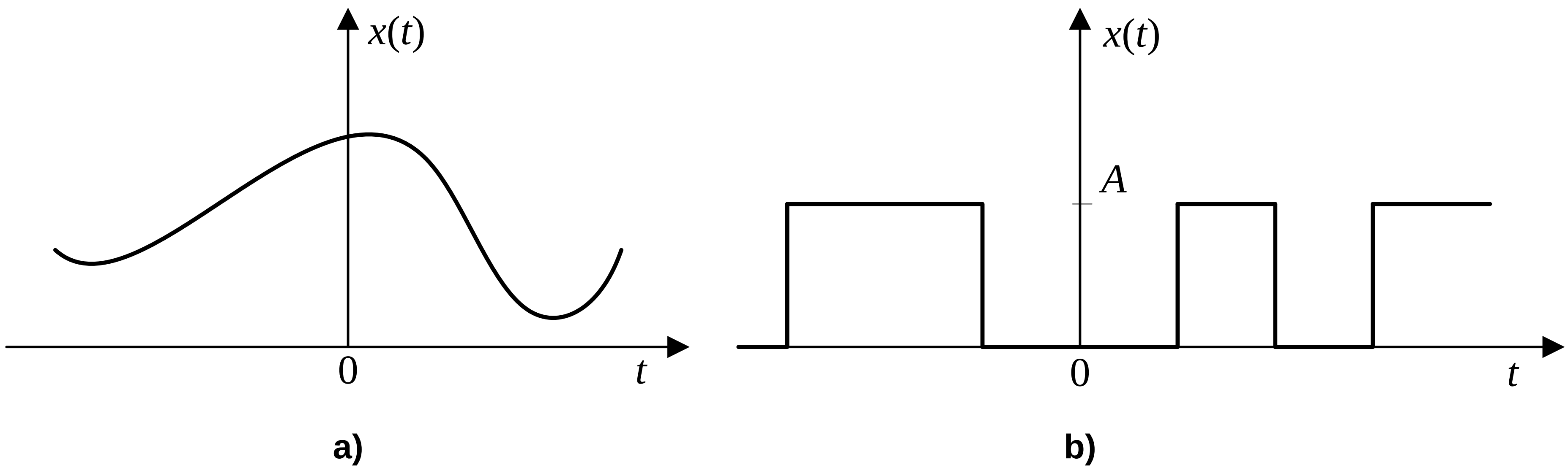
Analogni i digitalni signali

- promatramo vrijednosti koje signal poprima
- ako neki signal u kontinuiranom vremenu, $x(t)$, može poprimiti bilo koju vrijednost unutar kontinuiranog intervala (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ tada se takav signal naziva **analogni signal**
  - primjer analognog signala: $x(t) = A \cdot \sin(2\pi f t)$
  - poprima bilo koju vrijednost na intervalu $[-A, A]$:
    - $x(t) \in [-A, A]$

Analogni i digitalni signali (II)

- neka je $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ konačan skup od N realnih brojeva
- **digitalni signal** može u bilo kojem trenutku poprimiti samo jednu od N mogućih vrijednosti iz tog skupa: $x(t) \in \{a_1, a_2, ..., a_N\}$
- ako neki signal u diskretnom vremenu, $x[n]$, može poprimiti samo konačan broj različitih vrijednosti, tada se takav signal naziva **digitalni signal**
- primjer: binarni signal
  - u bilo kojem trenutku može poprimiti jednu od dvije vrijednosti iz skupa $\{0, A\}$, $A \in$ □

Primjeri analognog i digitalnog signala



- a – analogni signal, b – digitalni signal

Deterministički i slučajni signali

- deterministički signal
  - vrijednosti $x(t)$ su u potpunosti specificirane u svakom vremenskom trenutku
  - deterministički signal može biti modeliran poznatom funkcijom vremena t
- slučajni signal
  - u bilo kojem vremenskom trenutku signal poprima neku slučajnu vrijednost i stoga se karakteriziraju statistički
  - modelira se pomoću slučajnog procesa
- signale u kontinuiranom vremenu dijelimo na **periodične** i **neperiodične** signale

Srednja snaga determinističkih signala

- napon $u(t)$, odnosno struja $i(t)$ na otporniku od R oma [Ω] proizvodi energiju E, odnosno srednju snagu P

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} R i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R} dt \ [\mathrm{Ws}],$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R i^2(t) dt \ [\mathrm{W}].$$

- u nastavku napon, odnosno struja - $x(t)$
- R = 1 om

Periodični signali

- **periodični signal**: $x(t) = x(t + T),\ \forall t \in \mathbb{R}$
  - T je realna konstanta
  - neka je T_0 najmanji T za kojeg vrijedi gornja jednakost
  - T_0 se naziva osnovni (fundamentalni) period signala $x(t)$
- **neperiodični signal** – ne zadovoljava gornje svojstvo
- razvoj u Fourirerov red $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},\ \omega_0 = 2\pi f_0$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad x(t) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = X(f)$$

Diracova delta funkcija

- definicija

$$\delta(t) \neq 0 \quad \text{za } t = 0$$
$$i \qquad , \; t \in \mathbb{R} \; ,$$
$$\delta(t) = 0 \quad \text{za } t \neq 0$$

- svojstva

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

  - neka $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,x(t)\,dt = x(t_0)$$

Spektar periodičnog signala

- spektar periodičnog signala $x(t)$ je diskretan
  - poprima vrijednosti samo za diskretne vrijednosti frekvencije: $f_k = k/T_0$, $k \in Z$
  - u općenitom slučaju c_k su kompleksne veličine i vrijedi

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$

$$c_k = |c_k| e^{-j\theta_k}$$

- apsolutne vrijednosti koeficijenata c_k čine tzv. amplitudni spektar signala $x(t)$
- θ_k su vrijednosti tzv. faznog spektra signala $x(t)$

Srednja snaga periodičnog signala

- srednja snaga periodičnog signala u kontinuiranom vremenu

$$P = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{kT_0}k\int_0^{T_0}\left|x(t)\right|^2 dt\right] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k\right|^2$$

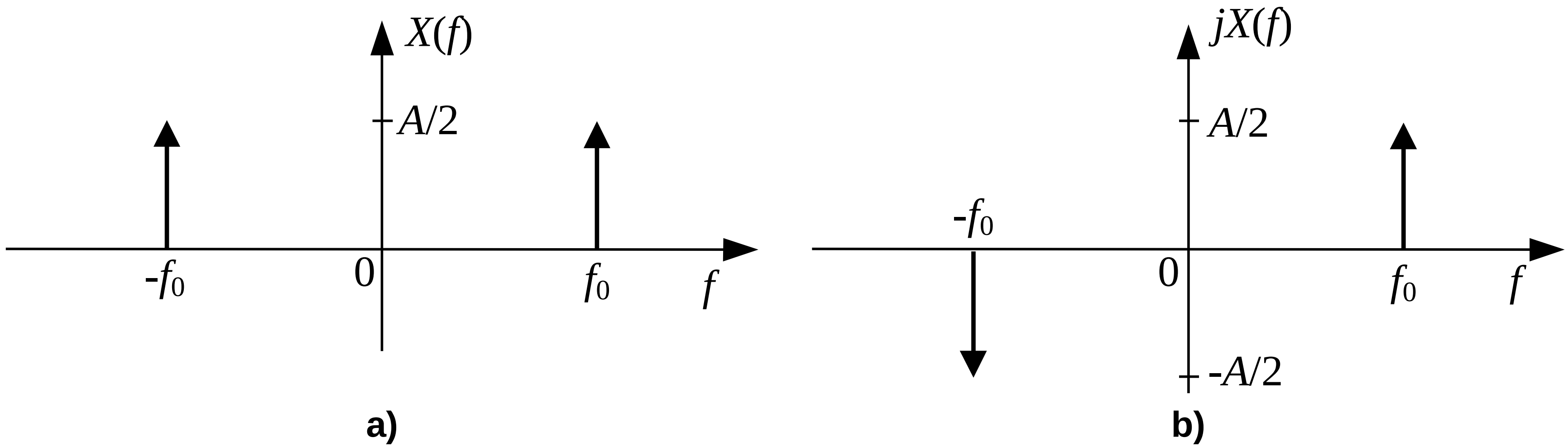
$$c_{-k} = \overline{c_k} \qquad\qquad P = \left|c_0\right|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k\right|^2$$

- srednja snaga periodičkog signala jednaka je zbroju srednjih snaga svih harmoničkih komponenti od kojih je signal sastavljen

Primjer 1: spektar i srednja snaga trigonometrijskih signala

- signal $x(t) = A\sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$
  - spektar $X(f)$ $$X(f) = -j\frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$
- signal $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$
  - spektar $X(f)$ $$X(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$
  - $-j$ u izrazu za spektar sinusnog signala potječe od faznog kašnjenja funkcije sinus u odnosu na funkciju kosinus: $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$, $\forall x \in$ □.

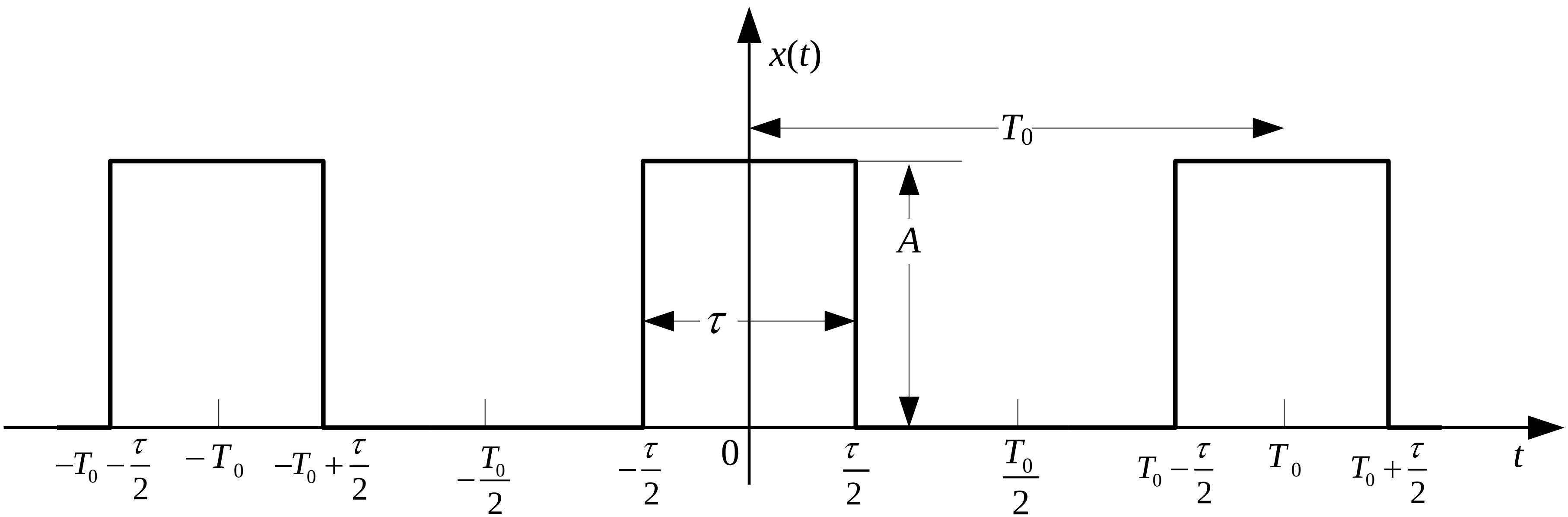
Spektar kosinusnog i sinusnog signala



- a – kosinusni signal, b – sinusni signal

Primjer 2: periodičan slijed pravokutnih impulsa

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{za } 0 \le |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{za } \tau/2 < |t| \le T_0/2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\left(k\omega_0\tau/2\right)}{k\omega_0\tau/2}$$

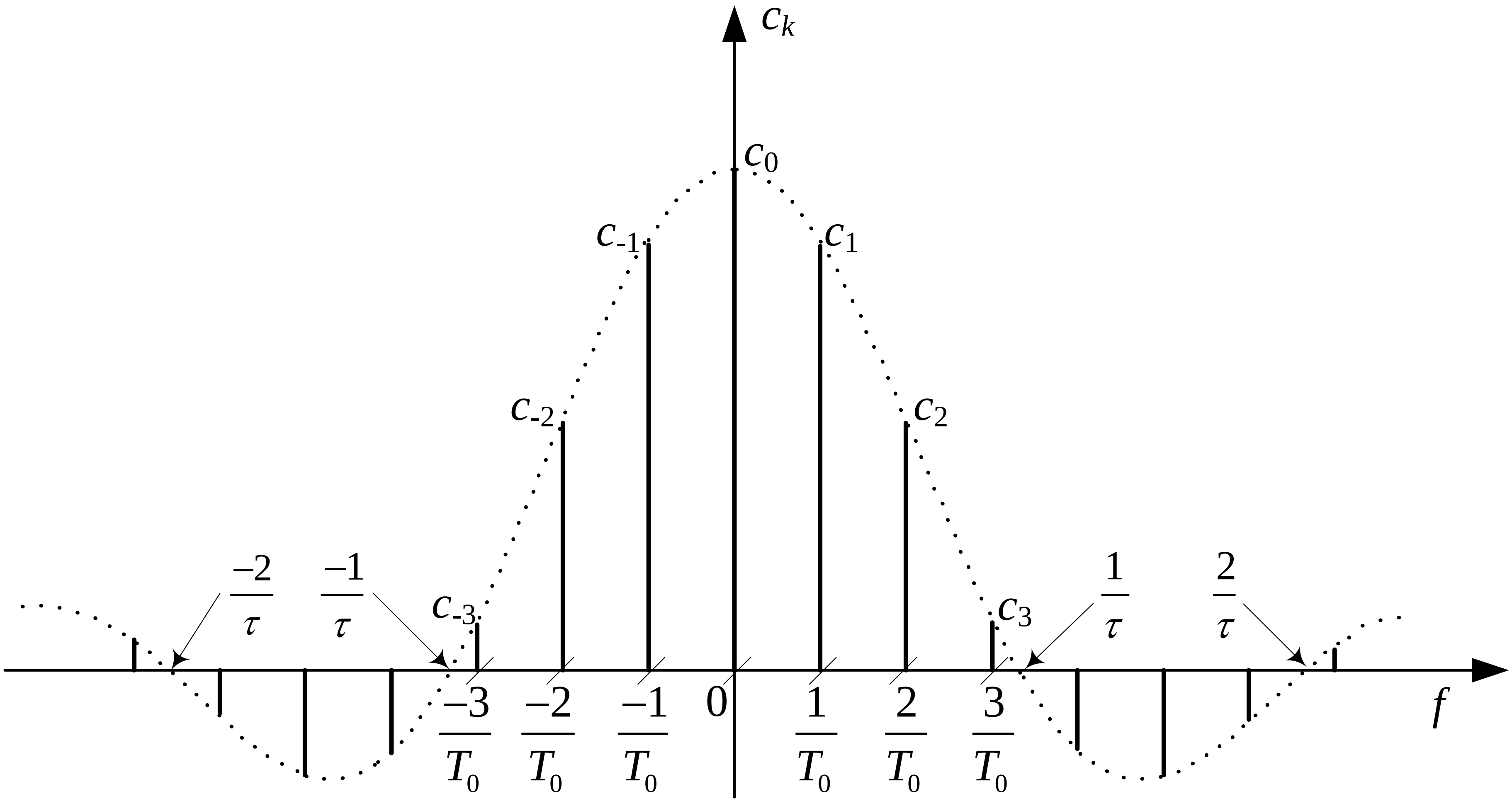
Primjer 2: periodičan slijed pravokutnih impulsa (II)

- spektar periodičkog slijeda pravokutnih impulsa) diskretan
  - komponente c_k pojavljuju samo na diskretnim frekvencijama k/T_0 [Hz], $k \in Z$.

$$x(t) = A\frac{\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}e^{jk\omega_0 t} = A\frac{\tau}{T}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}\cos(k\omega_0 t)\right]$$

$$P = c_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \left(\frac{A\tau}{T}\right)^2\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}\right]^2\right\} = A^2\frac{\tau}{T}$$

Spektar periodičnog slijeda pravokutnih impulsa



Neperiodični signali

- snaga i energija signala *x*(*t*)

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt \, ,$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \, .$$

- spektar signala *x*(*t*), *X*(*f*) – Fourierova transformacija

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \;\; \text{ili} \;\; X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \; \omega = 2\pi f$$

  - Fourirerov transformacijski par

$$x(t) \square \; X(f) \; \text{ili} \; x(t) \square \; X(\omega)$$

Neperiodični signali (II)

- amplitudni i fazni spektar

$$X(f)=\left|X(f)\right|e^{j\theta(f)}$$

- prikaz signala pomoću poznatog spektra

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \text{ ili } x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- energija neperiodičnog signala (Parsevalov teorem)

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(f)\right|^2 df=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega$$

Razredi neperiodičnih signala

- signali koji imaju konačnu ukupnu energiju, tj. $E < \infty$
  - takvi signali moraju imati srednju snagu jednaku nuli;
  - primjer: signal $x(t)$ čija je vrijednost jednaka 1 u intervalu $0 \leq t \leq 1$, a 0 izvan tog intervala
  - za takav signal vrijedi $E = 1$, $P = 0$;
- signali koji imaju konačnu srednju snagu veću od nule
  - ako je $P > 0$, tada je $E = \infty$;
- signali kojima su i srednja snaga i ukupna energija beskonačne
  - primjer: signal $x(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Primjer: Diracov impuls

- spektar Diracovog impulsa

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^0 = 1$$

- promotrimo funkciju $x(t) = K\delta(t)$, $k \in$ □

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = Ke^0 = K$$

Primjer: pravokutni impuls

- definicija pravokutnog impulsa

$$x(t)=\begin{cases} A & \text{za } 0\le |t|<\tau/2 \\ 0 & \text{za } |t|>\tau/2 \end{cases}, t\in \mathbb{R}$$

- spektar pravokutnog impulsa

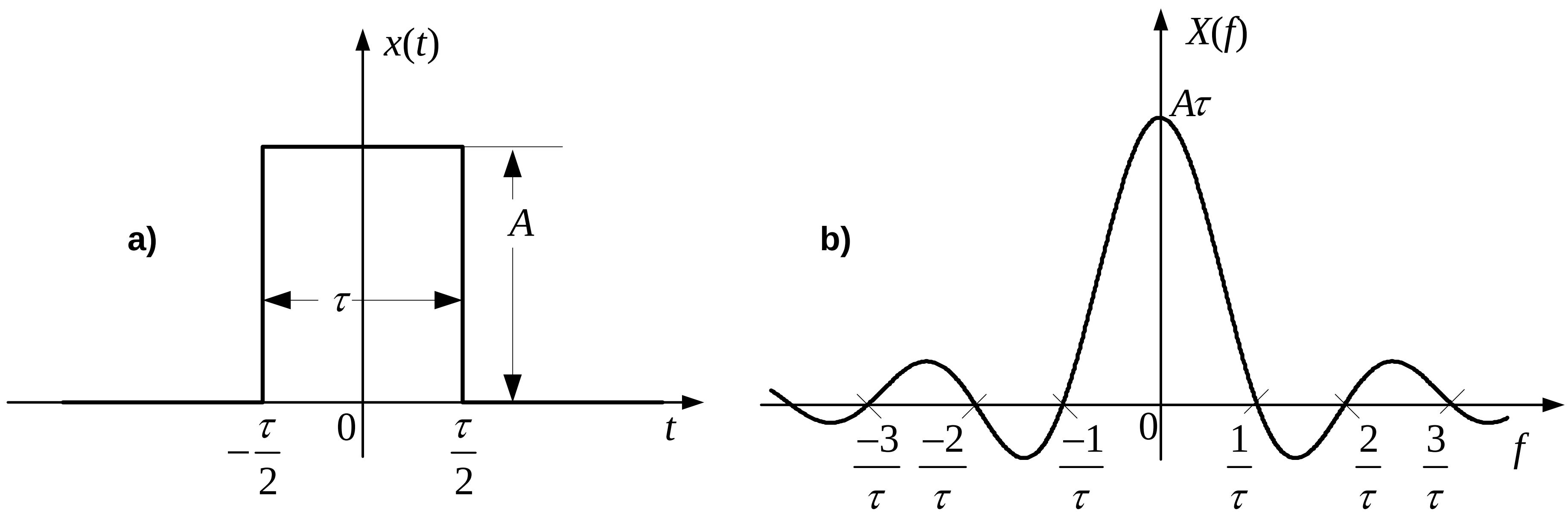
$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt=A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft}dt=A\tau\frac{\sin(2\pi f\tau/2)}{2\pi f\tau/2}$$

- energija pravokutnog impulsa

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df=A^2\tau$$

- srednja snaga pravokutnog impulsa jednaka nuli

Spektar pravokutnog impulsa



- spektar ima maksimalnu vrijednost za frekvenciju $f = 0$ Hz i iznosi $X(0) = A\tau$
- spektar prolazi kroz nulu u točkama $f_k = k/\tau$, $k \in Z$.

Slučajni signali

- slučajni proces $X(t)$ je familija slučajnih varijabli $\{X(t),\ t \in$ □$\}$
- srednja vrijednost slučajnog procesa

$$\mu_X(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,t)\, dx$$

  - $f_X(x,t)$ je funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa $X(t)$

- autokorelacijska funkcija i autokovarijanca slučajnog procesa $X(t)$

$$R_X(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)\,X(t_2)\right]$$

$$C_X(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1)-\mu_X(t_1)\right]\left[X(t_2)-\mu_X(t_2)\right]\right\} = R_X(t_1,t_2) - E\left[X(t_1)\right]E\left[X(t_2)\right]$$

Stacionarni slučajni procesi

- ako je slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu, tada zadovoljava sljedeće uvjete

$$E\left[X(t)\right]=\mu_X, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$R_X(t_1,t_2)=K_X\left(\left|t_2-t_1\right|\right)=K_X(\tau),\ \forall t_1,t_2 \in \mathbb{R},$$

  - neka je autokorelacijska funkcija slučajnog procesa u kontinuiranom vremenu, $X(t)$, koji je stacionaran u širem smislu definirana kao

$$R_X(\tau)=E\left[X(t)X(t+\tau)\right]$$

- neka vrijedi: $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$, $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ i $R_X(0) = E[X^2(t)] \geq 0$

Spektralna gustoća snage slučajnog signala

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \; [\mathrm{W/Hz}]$$

- ako je spektralna gustoća snage $S_X(f)$ poznata

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- srednja snaga P slučajnog signala modeliranog stacionarnim slučajnim procesom

$$P = E\left[X^2(t)\right] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

Primjer: Gaussov bijeli šum

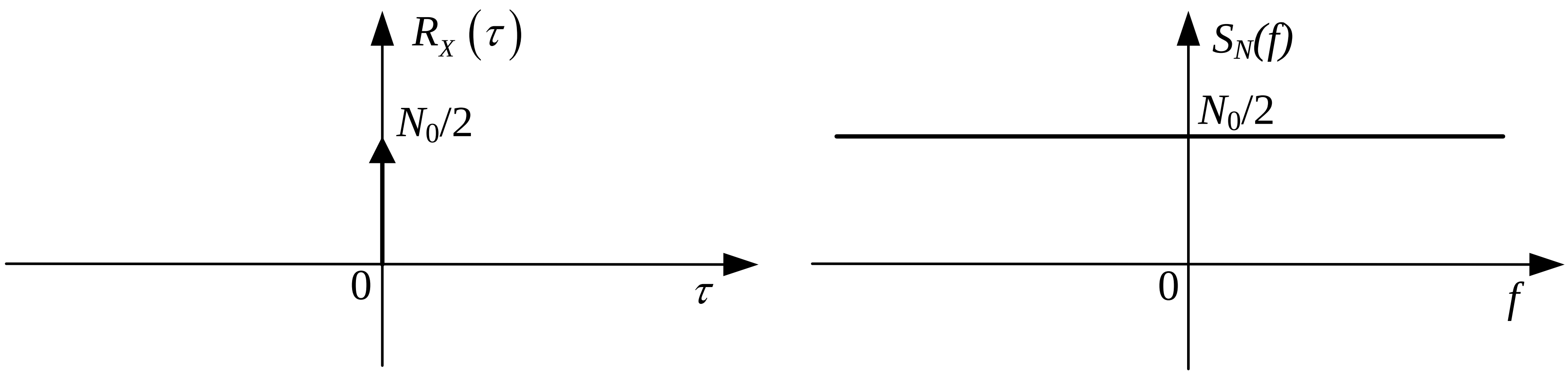
- slučajan proces $W(t)$ nazivamo **bijeli šum** ako su njegove vrijednosti, tj. slučajne varijable u trenucima t_i i t_j, $t_i \neq t_j$, međusobno potpuno nekorelirane
  - tada je autokovarijanca $C_X(ti, tj)$ jednaka nuli kad god vrijedi $t_i \neq t_j$
  - ako su slučajne varijable $W(t_i)$ i $W(t_j)$ istovremeno nekorelirane i neovisne, tada se radi o striktno bijelom šumu
  - bijeli šum u kontinuiranom vremenu je stacionarni slučajni proces u širem smislu, $W(t)$

Gaussov bijeli šum (II)

- srednja vrijednost bijelog šuma je jednaka nuli

$$R_W(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

$$S_W(f) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sigma^2$$



a) b)

Gaussov bijeli šum (III)

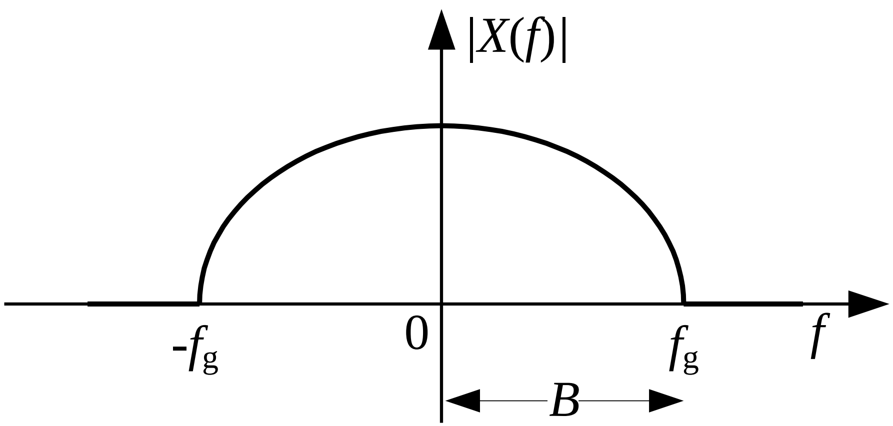
- slučajni proces nazivamo **bijeli Gaussov šum** ako su zadovoljena prethodno navedena svojstva bijelog šuma i ako su slučajne varijable slučajnog procesa Gaussove
  - za neku slučajnu varijablu *X* kažemo da ima Gaussovu razdiobu ako je njena funkcija gustoće vjerojatnosti definirana kao

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu_X)^2 / (2\sigma_X^2)}$$

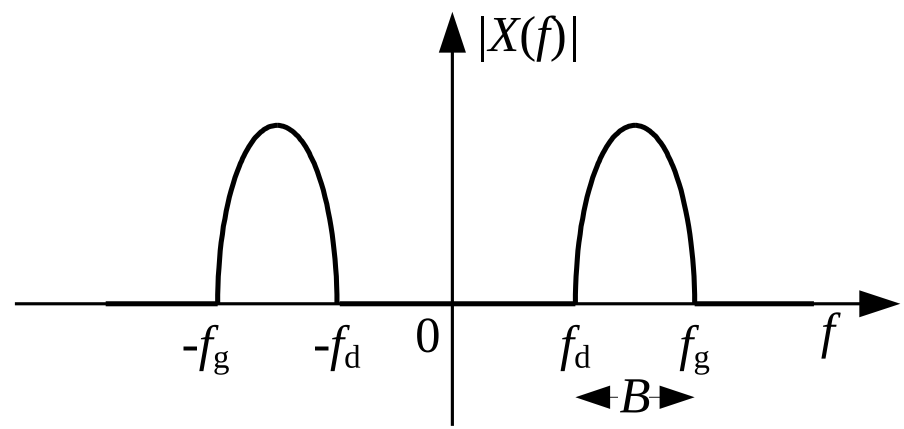
  - varijanca ili disperzija $\operatorname{var}(X) = E\left\{(X - E[X])^2\right\} = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 = \sigma_X^2$
  - ako vrijedi *E*[*X*] = 0, tada je $\operatorname{var}(X) = E\left[X^2\right] = \sigma_X^2$
    - tj. varijanca je jednaka srednjoj snazi signala na otporu 1 om

Širina spektra signala

- ovisno o pojasu frekvencija kojeg zauzima amplitudni spektar signala, signale dijelimo na
  - a) signale u osnovnom frekvencijskom pojasu
  - b) signale u pomaknutom frekvencijskom pojasu



a)



b)

- primjer: širina spektra pravokutnog signala
  - slajd 24

Komunikacijski kanal

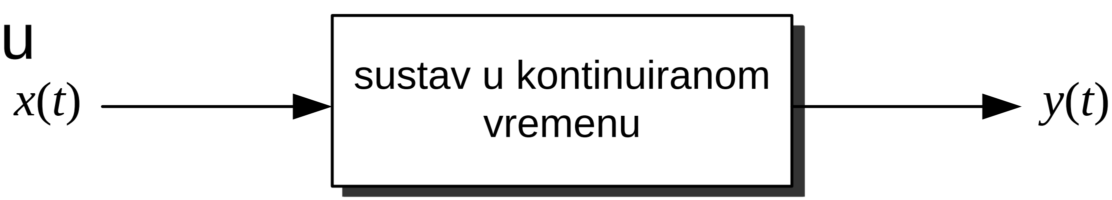
- komunikacijski kanal ≈ prijenosni medij
- prijenosni mediji
  - žični
    - upredene parice
    - koaksijalni kabeli
    - vodovi energetske mreže
  - optičke niti
  - bežični
    - radijski, mikrovalni ili optički (ovisi o frekvenciji)
- primjer komunikacijskog kanala
  - telefonski kanal: od 300 do 3400 Hz
- po definiciji ITU-T-a kanal je sredstvo za **jednosmjerni** prijenos između predajnika i prijemnika

Klasifikacija komunikacijskih kanala

- linearni i nelinearni kanali
  - telefonski kanal je primjer linearnog kanala
  - satelitski kanal je obično nelinearan (ali ne uvijek)
- neovisni o vremenu ili ovisni o vremenu
  - primjer vremenski nepromjenjivog kanala: optička nit
  - primjer vremenski promjenjivog kanala: radijski kanal u pokretnoj komunikacijskoj mreži
- ograničenja kanala
  - po širini prijenosnog pojasa (primjer: telefonski kanal) i
  - po raspoloživoj snazi predajnika (primjer: optički prijenos)

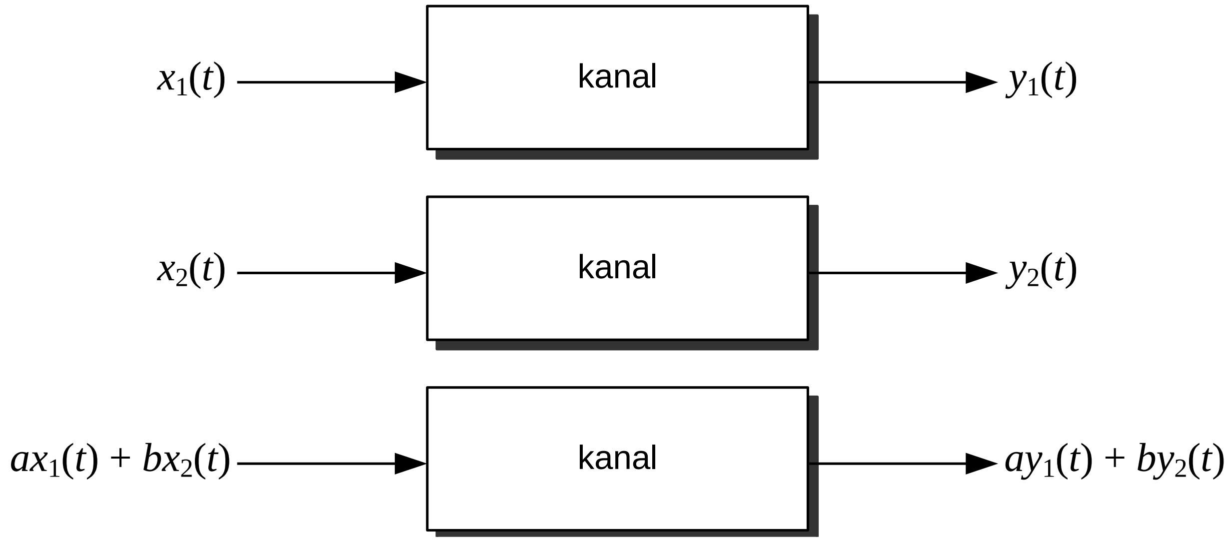
Matematički model kanala

- sustav definiramo kao preslikavanje skupa *F* (ulaz u sustav) u skup *G* (izlaz iz sustava)
  - u kontekstu komunikacija - sustav je proces uslijed kojeg su ulazni signali transformirani djelovanjem sustava u izlazne signale
  - **kontinuiran** ili **analogni** sustav - elementi skupova *F* i *G* funkcije kontinuirane varijable
  - **diskretan** ili **digitalni** sustav - elementi skupova *F* i *G* funkcije diskretne varijable
  - kanal je moguće modelirati sustavom u **kontinuiranom** ili diskretnom vremenu

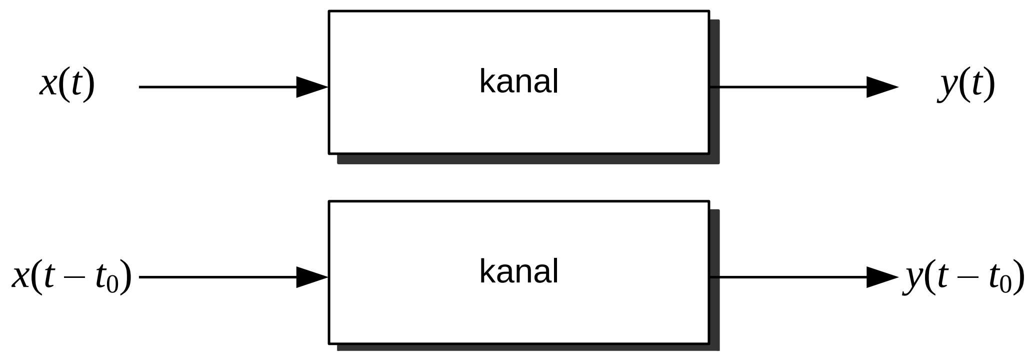


Linearni i vremenski nepromjenjivi kanali

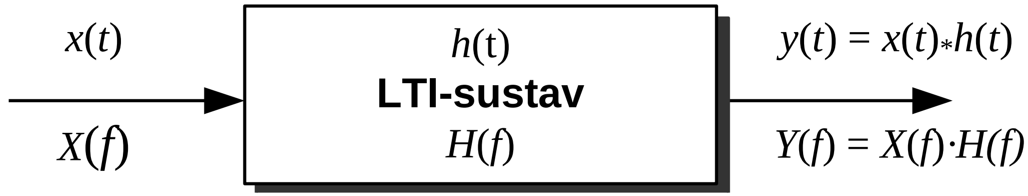
- kanal je linearan ako vrijedi:



- kanal je vremenski nepromjenjiv ako vrijedi:



Impulsni odziv i prijenosna funkcija kanala



- $h(t)$ – impulsni odziv sustava
  - odziv sustava na pobudu Diracovim impulsom

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

- $H(f)$ – impulsni odziv sustava

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Svojstva prijenosne funkcije

$$H(f) = \left|H(f)\right| e^{-j\theta(f)}$$

- amplitudni i fazni odziv $\left|H(-f)\right| = \left|H(f)\right|,$

$$\theta(-f) = -\theta(f).$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

- impulsni odziv i prijenosna funkcija LTI-sustava čine Fourierov transformacijski par

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

Slučajni signali i LTI-sustav

- pretpostavka: na ulazu LTI-sustava prijenosne funkcije $H(f)$ djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$
  - srednja vrijednost μ_X
  - spektralna gustoća snage $S_X(f)$

$$\mu_Y = \mu_X H(0)$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

- prolaskom kroz LTI-sustav, slučajni proces zadržava stacionarnost i na izlazu sustava

Širina prijenosnog pojasa kanala

- širina prijenosnog pojasa kanala je područje frekvencija u kojem komunikacijski kanal propušta signale sa svog ulaza na izlaz
- realni kanali prigušuju signale koje prenose
  - srednja snaga izlaznog signala uvijek je manja od srednje snage ulaznog signala
  - vrijedi i za energiju signala
- prigušenje kanala $A(f) = 1/|H(f)|$
- kanal djeluje i na fazu signala
  - faze frekvencijskih komponenti ulaznog signala se razlikuju od faza frekvencijskih komponenti izlaznog signala – **disperzija signala**

Širina prijenosnog pojasa kanala (II)

- na ulaz LTI-kanala dovedemo signal *x*(*t*) čiji je spektar *X*(*f*) definiran kao $X(f)=\left|X(f)\right|e^{j\varphi(f)}$

- za spektar signala na izlazu LTI-kanala, *Y*(*f*), vrijedi

$$Y(f)=\left|Y(f)\right|e^{j\vartheta(f)},$$

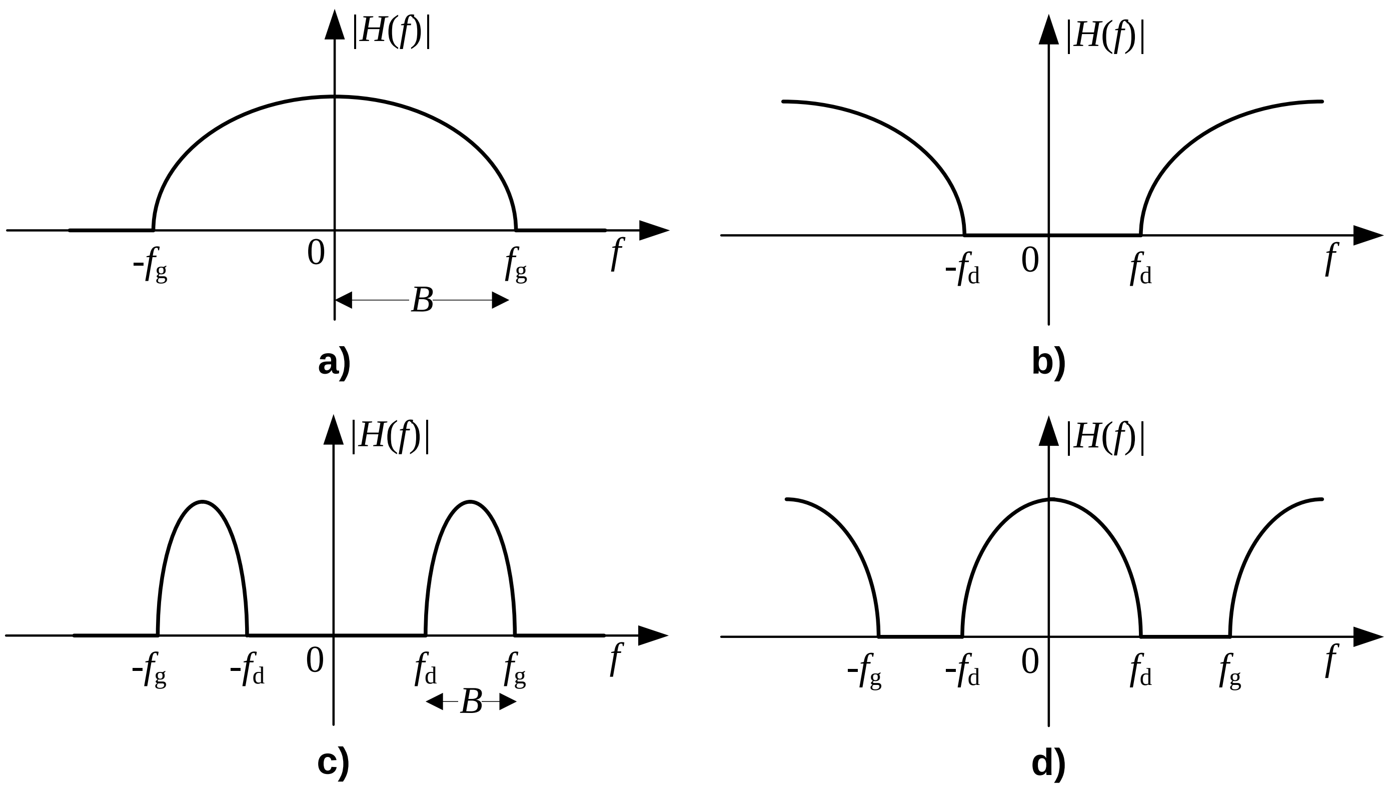
$$\left|Y(f)\right|=\left|X(f)\right|\left|H(f)\right|,$$

$$\vartheta(f)=\varphi(f)-\theta(f),$$

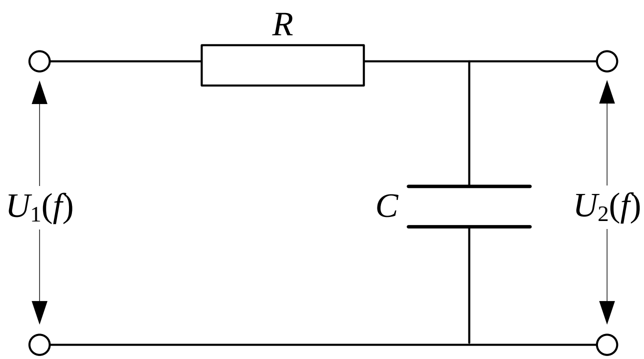
- kanal propušta one frekvencije na kojima je njegov amplitudni odziv veći od nule

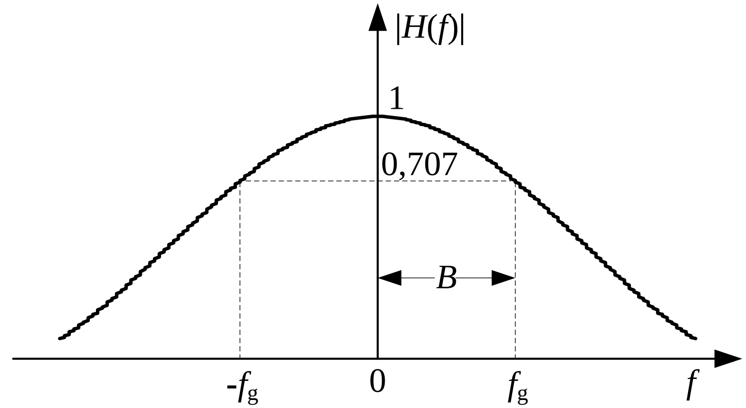
Oblik amplitudnog odziva i vrste kanala

- a) niskopropusni kanal, b) visokopropusni kanal
- c) pojasnopropusni kanal, d) pojasna brana



Primjer: RC-krug





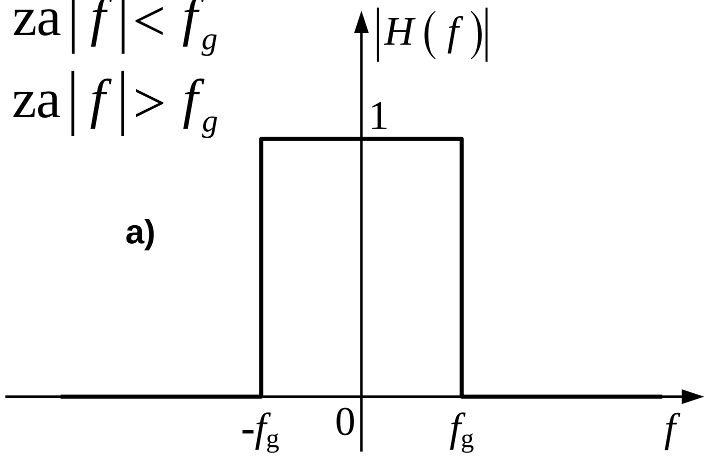
- amplitudni odziv RC-kruga: $$|H(f)| = \left|\frac{U_2(f)}{U_1(f)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$$
- u praksi se širina prijenosnog pojasa računa pomoću tzv. točaka prigušenja 3 decibela

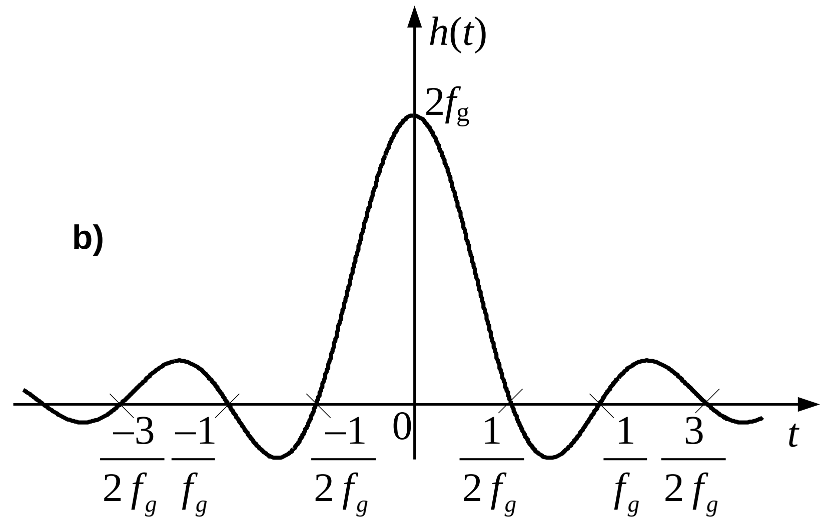
$$20\log\left(\frac{|H(f)|}{|H(0)|}\right) = 20\log(|H(f)|) - 20\log(|H(0)|) = 20\log(|H(f)|)\,[dB]$$

  - $|H(0)| = 1$, pa vrijedi $20\log(|H(0)|) = 0$ dB
  - na f na kojoj $|H(f)| \approx 0{,}707$ amplitudni je odziv za 3 dB slabiji od $|H(0)|$

Idealan niskopropusni kanal

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{za} \ |f| < f_g \\ 0 & \text{za} \ |f| > f_g \end{cases}$$

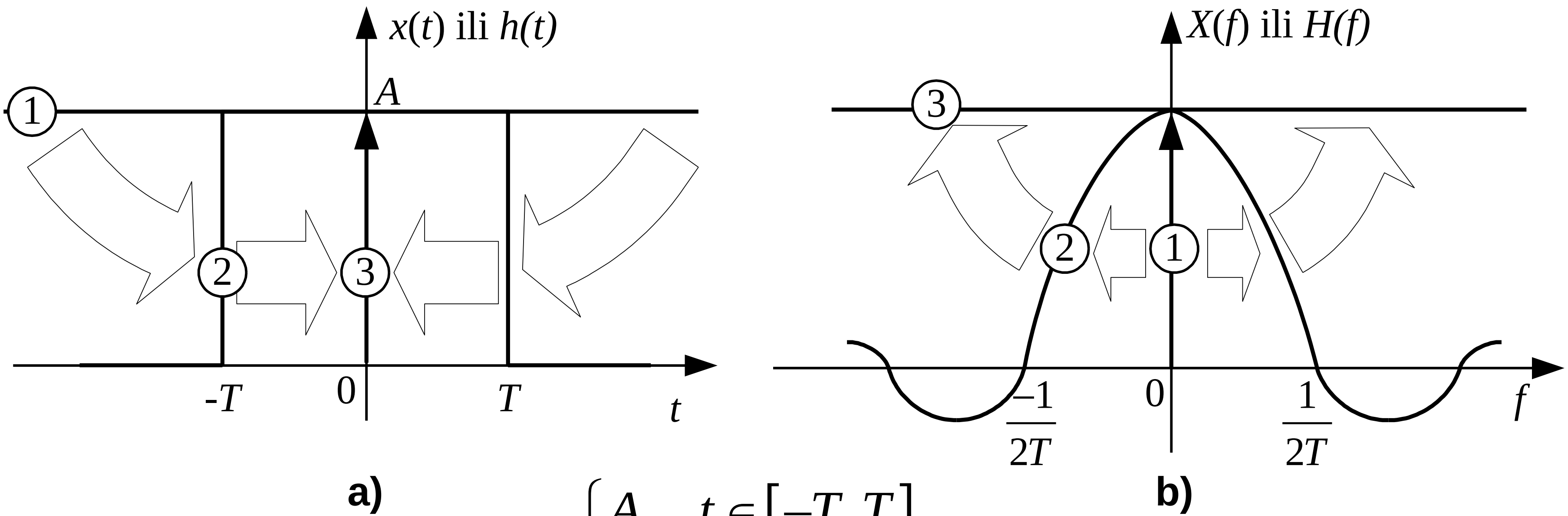




$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_g}^{f_g} e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi ft} df = 2 f_g \frac{\sin\left[2\pi f_g (t-\tau)\right]}{2\pi f_g (t-\tau)}$$

- svi su realni sustavi kauzalni, tj. odziv sustava ne može početi prije pobude
- u stvarnosti niskopropusni kanal ne može biti striktno ograničen na neki pojas frekvencija

Ograničavanje signala u vremenu



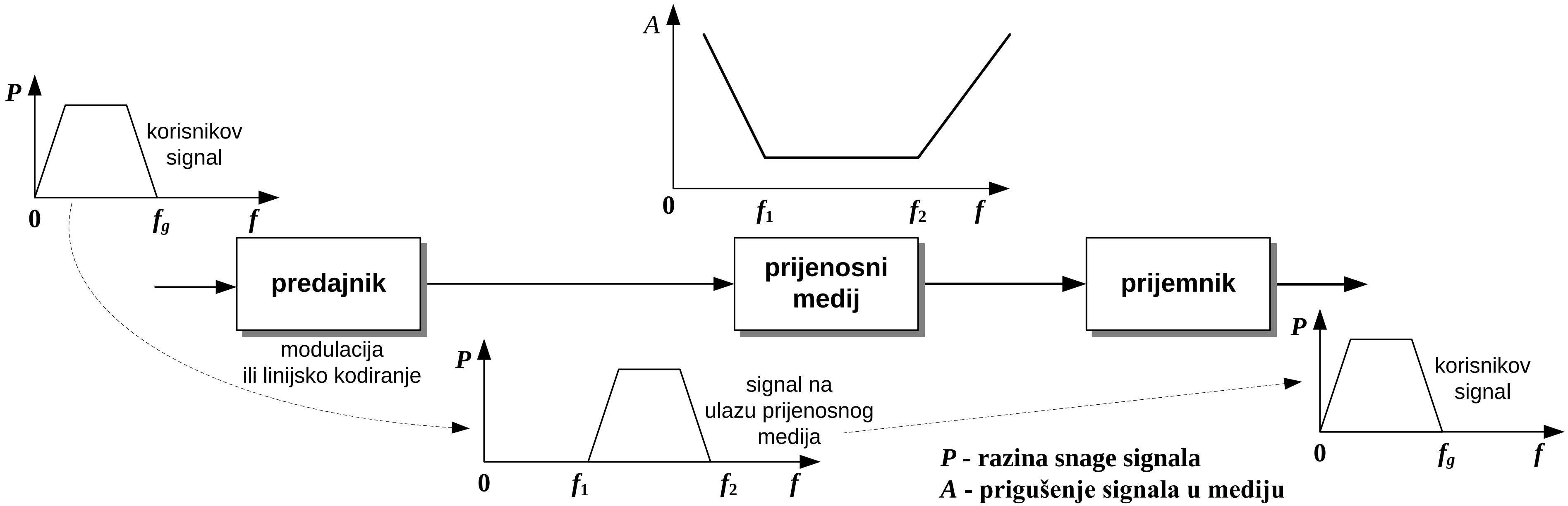
$$x(t)=\begin{cases} A, & t\in[-T,T] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- gornje razmatranje vrijedi i kad bi na apscisi na slici a) bila frekvencija, a na slici b) vrijeme

Praktično određivanje širine prijenosnog pojasa

- kako bi u praksi mogli odrediti točnu širinu prijenosnog pojasa kanala, ***B***, potrebno je definirati iznos prigušenja iznad kojeg smatramo da je prijenosna funkcija kanala praktično jednaka nuli
  - za niskopropusni kanal
    - potrebno je definirati frekvenciju f_g takvu da vrijedi
    - $|X(f)| \approx 0$ za $|\, f \,| > f\mathrm{g}$, $B = f\mathrm{g}$
  - za pojasnopropusni kanal
    - potrebno je definirati frekvencije f_d i f_g takve da vrijedi $|X(f)| > 0$ samo ako je $f_\mathrm{g} > |\, f \,| > f_\mathrm{d}$, $B = f_g - f_d$

Veza između širine prijenosnog pojasa kanala i širine spektra signala



P **- razina snage signala**
A **- prigušenje signala u mediju**

- signal prije prijenosa kanalom oblikuje kako bi se svojim spektrom što bolje uklopio u prijenosni pojas kanala
  - modulacijski postupci
  - linijsko kodiranje