Zadatak 1 (ZIR 2020/2021)**.** *Pretpostavimo da je 220 grešaka raspoređeno slučajno unutar knjige od 200 stranica. Odredite vjerojatnost da dana stranica sadrži:*

(a) niti jednu grešku,

(b) točno jednu grešku,

(c) barem dvije greške.

Rješenje.

$$X - \text{broj grešaka na stranici}$$

$$X \sim \mathcal{B}\left(220, \frac{1}{200}\right)$$

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{220} = 0.332$$

$$P(X=1) = 220 \cdot \frac{1}{200}\left(1 - \frac{1}{200}\right)^{219} = 0.367$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0) = 0.301$$

□

Zadatak 2 (VIS-E; MI 2020/2021)**.**

(a) Bacamo kocku sve dok ne padne šestica. Neka je slučajna varijabla X redni broj bacanja u kojem je prvi put pala šestica. Izračunajte očekivani broj bacanja $E(X)$ kao i vjerojatnost da je broj bacanja manji od očekivanog broja, tj. $P(X < E(X))$.

(b) Neka je slučajna varijabla Y redni broj bacanja u kojem je drugi put pala šestica. Izračunajte razdiobu od Y kao i očekivanje $E(Y)$.

Rješenje.

(a) Očito je $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$ pa imamo

$$P(X=n) = q^{n-1}p \text{ za } n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

za $p = \frac{1}{6}$ i $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Računamo očekivanje koristeći identitet za x (takav da je $|x| < 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Zato je $E(X) = 6$ i $P(X < E(X)) = P(X < 6) = 1 - P(X > 5) = 1 - q^5 = 0.598$.

(b) Slučajna varijabla Y može poprimiti vrijednosti $2, 3, 4, 5, \dots$ Neka je $p = \frac{1}{6}$. Vjerojatnost da u drugom bacanju padne druga šestica jednaka je p^2. Vjerojatnost da u trećem bacanju padne druga šestica jednaka je $2(1-p)p^2$ jer je prva mogla pasti u prvom ili drugom bacanju. Vjerojatnost da u četvrtom bacanju padne druga šestica jednaka je $3(1-p)^2p^2$ jer je prva mogla pasti u prvom, drugom ili trećem bacanju. Općenito, vjerojatnost da u n-tom bacanju padne druga šestica jednaka je $(n-1)(1-p)^{n-2}p^2$ jer je prva šestica mogla pasti u bilo kojem od prvih $n-1$ bacanja. Dakle, zakon razdiobe ove slučajne varijable je $P(Y = n) = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2$ za $n = 2, 3, 4, \dots,$ a njezino očekivanje je

$$E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}p^2 = p^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p} = 12$$

pri čemu smo koristili drugu derivaciju geometrijskog reda (za x za koji red konvergira, tj. $|x| < 1$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Samo očekivanje moglo se jednostavnije izračunati koristeći $Y = X + X$ (ali $Y \neq 2X$) i linearnost očekivanja $E(Y) = E(X + X) = 2E(X) = 2 \cdot \frac{1}{p} = 12$. Preciznije, $Y = X + X'$, gdje je X' nezavisna kopija od X jednako distribuirana kao i X.

□

Zadatak 3 (VIS-E; MI 2021/2022)**.**

(a) Tri igraće kocke bacamo na sreću 10 puta. Slučajnu varijablu X_1 definiramo kao broj bacanja u kojem su te tri kocke pokazale tri uzastopna broja. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X_1 i izračunajte $P(X_1 \geq 2)$.

(b) Tri igraće kocke bacamo na sreću sve dok ne pokažu tri uzastopna broja. Slučajnu varijablu X_2 definiramo kao broj bacanja. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X_2 i izračunajte $P(X_2 \geq 10)$.

Rješenje. Vjerojatnost da na tri kocke padnu tri uzastopna broja je $p = \frac{6 \cdot 4}{6^3} = \frac{1}{9}$, jer na 4 načina možemo odabrati najmanji broj na kockama i za svaki taj odabir, kocke možemo poredati na 6 načina.

(a)

$$X_1 \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{9}\right)$$

$$P(X_1 = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{10-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

$$P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X_1 < 2) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) = 0.30712$$

(b)

$$X_2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$P(X_2 = k) = \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(X_2 \geq 10) = \sum_{k=10}^{\infty} P(X_2 = k) = \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \sum_{k=9}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} =$$

□

Zadatak 4 (VIS-R; MI 2020/2021)**.**

(a) Pretpostavimo da se pojava kišnog dana u jednom tjednu ljeti ravna po geometrijskoj razdiobi. Vjerojatnost za kišu u svakom danu je 0.2. Kolika je vjerojatnost da će cijeli tjedan biti sunčan?

(b) Ako je do srijede bilo sunčano, kolika je vjerojatnost da će preostala četiri dana biti sunčano?

(c) Ako je u subotu kišilo, kolika je vjerojatnost da je u petak bilo sunčano?

Rješenje.

(a)

$$X \sim \mathcal{G}(0.2)$$

$$P(X = k) = (1 - 0.2)^{k-1} \cdot 0.2 = 0.8^{k-1} \cdot 0.2$$

$$P(X > 7) = (\text{vjerojatnost repa geom. razdiobe}) = (1 - 0.2)^{7} = 0.8^{7} = 0.2097152$$

(b)

$$P(X > 7 \mid X > 3) = (\text{svojstvo odsustva pamćenja}) = P(X > 4) =$$

$$= (\text{vjerojatnost repa geom. razdiobe}) = (1 - 0.2)^{4} = 0.8^{4} = 0.4096$$

(c) Radi se o nezavisnim događajima, stoga je

$$P(\text{petak sunčano} \mid \text{subota kiša}) = P(\text{petak sunčano}) = 1 - 0.2 = 0.8$$

□

Zadatak 5 (VIS-R; MI 2021/2022)**.** *Ponavljamo pokus sve dok se ne realizira jedan od disjunktnih događaja A ili B. Neka je $p_A = P(A)$ i $p_B = P(B)$. Odredite vjerojatnost da se A dogodio prije B.*

Rješenje. Označimo $p = P(A \cup B) = p_A + p_B$ i sa p_n vjerojatnost da je pokus završio u n-tom ponavljanju realizacijom događaja A. Tada je

$$p_n = (1-p)^{n-1} \cdot p_A.$$

Sada je vjerojatnost da se A dogodio prije B jednaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot p_A = p_A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \text{(suma geometrijskog reda)} =$$

$$= p_A \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p_A \cdot \frac{1}{p} = \frac{p_A}{p}.$$

□

Zadatak 6 (VIS-R; MI 2019/2020). *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable koje imaju geometrijsku razdiobu s parametrima $p_1, \ldots, p_n$, redom. Dokažite da slučajna varijabla $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ također ima geometrijsku razdiobu. Koliko iznosi parametar te razdiobe? Uputa: Izrazite $P(Y = k)$ preko $P(Y > k-1)$ i $P(Y > k)$.*

Rješenje. Osnovna ideja: Da bi Y bio veći od nekog broja k, to znači da svi X_i moraju biti veći od tog k. To se uvrsti umjesto Y te se iskoristi činjenica da su svi X_i međusobno nezavisni. **Ovo je standardni trik koji se često pojavljuje!**

$$Y = \min(X_1, \ldots, X_n), \quad X_i \sim \mathcal{G}(p_i), \;\; P(X_i = k) = (1-p_i)^{k-1} p_i = q_i^{k-1} p_i$$

$$P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k) =$$

$$= P(X_1 > k-1, \ldots, X_n > k-1) - P(X_1 > k, \ldots, X_n > k) = \text{(iskoristimo nezavisnost)} =$$

$$= P(X_1 > k-1)P(X_2 > k-1) \ldots P(X_n > k-1) - P(X_1 > k)P(X_2 > k) \ldots P(X_n > k) =$$

$$= \text{(ovo su sve vjerojatnosti repa geom. razdiobe)} =$$

$$= q_1^{k-1} \cdot q_2^{k-1} \cdot \cdots \cdot q_n^{k-1} - q_1^k \cdot q_2^k \cdot \cdots \cdot q_n^k = (q_1 \cdot \cdots \cdot q_n)^{k-1}(1 - q_1 \cdot \cdots \cdot q_n)$$

Sada uvodimo oznaku $p = 1 - q_1 \cdot \cdots \cdot q_n$ te je očigledno da se radi o zakonu razdiobe geometrijske slučajne varijable s parametrom p. □

Zadatak 7 (VIS-E; MI 2022/2023). *Mate i Mišo naizmjence gađaju koš, pri čemu Mate pogađa koš u jednom bacanju s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$, a Mišo s vjerojatnošću $\frac{7}{8}$. S obzirom na to da je Mate nešto lošiji igrač, Mišo mu daje prednost da gađa prvi.*

(a) Odredite očekivani broj gađanja onog od njih dvojice koji prvi puta pogodi koš.

(b) Odredite vjerojatnost da Mate pogodi koš prije Miše.

Rješenje. Neka je X broj pokušaja dok Mate ne pogodi koš, a Y broj pokušaja dok Mišo ne pogodi koš. Očigledno se radi o geometrijskim slučajnim varijablama s parametrima $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$, redom.

(a) Broj gađanja onoga koji je prvi od njih pogodio koš je slučajna varijabla definirana kao $Z = \min(X, Y)$. Radi se, dakako, o istom triku iz prethodnog zadatka (minimum nezavisnih slučajnih varijabli), te na isti način možemo dobiti da je Z geometrijska slučajna varijabla s parametrom

$$1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - (1 - \frac{3}{4}) \cdot (1 - \frac{7}{8}) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{31}{32}.$$

Stoga je očekivanje te slučajne varijable,

$$E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{32}{31}.$$

(b) S obzirom da Mate gađa u prvoj rundi, Mišo u drugoj, Mate u trećoj itd., jasno je da Mate pobjeđuje ako se igra završi u neparnom broju $(2k+1)$ gađanja. Vjerojatnost da se to dogodi, za neki dani $k \in \mathbb{N}_0$ je

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right)}_{\text{obojica su promašili u } 2k \text{ rundi}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Mate je pogodio u } 2k+1\text{-voj rundi}}$$

Stoga je vjerojatnost događaja $A = \{\text{Mate je pobijedio}\}$ jednaka

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{32}\right)^k \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{32}\right)^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{32}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{31} = \frac{24}{31}.$$

□

Zadatak 8 (JIR 2022/2023).

a) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable, s Poissonovim zakonom $P(\lambda_1)$, odnosno $P(\lambda_2)$. Poznato je da je njihov zbroj $X_1 + X_2$ poprimio vrijednost n. Dokažite da je tada vrijednost od X_1 raspoređena po binomnom zakonu s parametrima n i $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, tj.

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

b) Neka su Y_1 i Y_2 nezavisne slučajne varijable, obje s geometrijskim zakonom $\mathcal{G}(p)$. Poznato je da je njihov zbroj $Y_1 + Y_2$ poprimio vrijednost n. Dokažite da je tada vrijednost od Y_1 raspoređena po diskretnom uniformnom zakonu s vrijednostima u skupu $\{1, 2, \dots, n-1\}$, tj.

$$P(Y_1 = k \mid Y_1 + Y_2 = n) = \frac{1}{n-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Rješenje.

a)

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) &= \frac{P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{P(X_1 = k, X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \\
&= \frac{P(X_1 = k)P(X_2 = n - k)}{P(X_1 + X_2 = n)} = \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(Y_1 = k \mid Y_1 + Y_2 = n) &= \frac{P(Y_1 = k, Y_2 = n - k)}{P(Y_1 + Y_2 = n)} = \frac{P(Y_1 = k)P(Y_2 = n - k)}{\sum_{i=1}^{n-1} P(Y_1 = i)P(Y_2 = n - i)} \\
&= \frac{q^{k-1}p \cdot q^{n-k-1}p}{\sum_{i=1}^{n-1} q^{i-1}p \cdot q^{n-i-1}p} = \frac{q^{n-2}p^2}{(n-1)q^{n-2}p^2} = \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}
$$

□