

Zadatak 1 (VIS-R; ZI 2022/2023).

(a) *Iskažite Levyjev kriterij za konvergenciju slučajnih varijabli po distribuciji.*

(b) *Neka je (Y_n) niz slučajnih varijabli s geometrijskom razdiobom*

$$P(Y_n = k) = \frac{\lambda}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0, \quad \frac{\lambda}{n} < 1.$$

Dokažite da niz (X_n) , gdje je $X_n = \frac{1}{n}Y_n$, konvergira po distribuciji prema eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ kad $n \rightarrow \infty$.

(c) *Neka su $(X_n)_{n=1, \dots, 300}$ nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 10$, te neka je*

$$Y = (X_1 + 2X_2 + 3X_3) + (X_4 + 2X_5 + 3X_6) + \dots + (X_{298} + 2X_{299} + 3X_{300}).$$

Izračunajte $P(Y > 63)$.

Zadatak 2 (JIR 2021/2022). *Masa jabuke je slučajna varijabla s očekivanjem 170 grama te standardnom devijacijom od 15 grama.*

(a) *Kolika je vjerojatnost da 117 nasumično odabranih jabuka ima preko 20 kilograma?*

(b) *Koliko bismo jabuka trebali ubrati da bismo bili 99% sigurni da će njihova ukupna masa biti preko 20 kilograma?*

(c) *Ako je vjerojatnost da je u jabuci crv jednaka 10%, koliko jabuka moramo ubrati da bismo bili barem 95% sigurni da ćemo imati 100 jabuka bez crva?*

Zadatak 3 (ZIR 2020/2021). *Zaokružujemo 108 brojeva na najbliži cijeli broj, a zatim ih zbrajamo. Pretpostavimo da su greške zaokruživanja X_i nezavisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

(a) *Kolika je vjerojatnost da se suma nakon zaokruživanja razlikuje od stvarne sume za više od 3?*

(b) *Neka je $Y_i = |X_i|$ apsolutna pogreška prilikom zaokruživanja i -tog broja. Izračunajte vjerojatnost da ukupna apsolutna pogreška $(Y_1 + \dots + Y_{108})$ nije veća od 30.*

Zadatak 4 (VIS-R; ZI 2020/2021). *Student rješava ispit koji se sastoji od 116 pitanja za kojeg ima na raspolaganju 1 sat. Student odluči ne potrošiti više od jedne minute po pitanju te su vremena koja provede odgovarajući na svako pitanje nezavisna, s funkcijom gustoće*

$$f(x) = 6x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(a) *Izračunajte vjerojatnost da student neće stići odgovoriti na sva pitanja.*

- (b) *Koliki treba biti broj pitanja kako bi student s vjerojatnošću 98% stigao odgovoriti na sve?*

Zadatak 5 (VIS-R; ZI 2021/2022). *Očekivano vrijeme koje je Josipu potrebno da prepliva 25 metara (opuštenim tempom kojeg može držati satima) je 35 sekundi uz standardnu devijaciju od 2 sekunde.*

- (a) *Pokažite da je vjerojatnost da Josip prepliva 25 metara u vremenu između 30 i 40 sekundi veća od 84%.*
- (b) *Kolika bi vjerojatnost u (a) dijelu zadatka bila kad bismo pretpostavili da je vrijeme potrebno da Josip prepliva 25 metara normalna slučajna varijabla?*
- (c) *Kolika je vjerojatnost da Josip ovim tempom prepliva 2 kilometra za manje od 45 minuta?*

Zadatak 6 (VIS-E; ZI 2022/2023). *Broj ostvarenih bodova X na nekom testu za studente modeliran je normalnom razdiobom s očekivanjem $\mu = 75$ i standardnom devijacijom $\sigma = 10$. Bodovi studenata su nezavisni.*

- (a) *Izračunajte vjerojatnost da student dobije manje od 72 boda na tom testu. Izračunajte i očekivani broj studenata, u grupi od 100 studenata, koji imaju manje od 72 boda.*
- (b) *Izračunajte vjerojatnost da prosjek bodova u grupi od 100 studenata bude manji od 72 boda.*
- (c) *Koristeći parametre razdioba, kratko obrazložite zašto je vjerojatnost u (a) dijelu zadatka veća od vjerojatnosti u (b) dijelu zadatka.*

Zadatak 7 (ZIR 2022/2023). *Svaki od 1001 člana jedne grupe baca simetrični novčić i prijavljuje rezultat, a pritom neki varaju i prijavljuju da je pala glava (bez obzira na to što se zaista dogodilo). Koliko najmanje osoba mora varati da bi s vjerojatnošću od barem 75% na kraju bilo prijavljeno više glava nego pisama?*