

Zadatak 1 (JIR 2021/2022). U grupi od 10 studenata koji su došli na usmeni ispit, 3 studenta su pripremili ispit odlično, 4 dobro, 2 dovoljno i 1 loše. Na ispitu student dobiva 3 pitanja od mogućih 20. Odlično pripremljen student zna odgovor na svih 20 pitanja, dobro pripremljen na 16, dovoljno pripremljen na 10 i loše pripremljen na 5. Slučajno odabrani student je odgovorio točno na sva tri postavljena pitanja. Izračunajte vjerojatnost da je to bio student koji se loše pripremio za ispit.

Zadatak 2 (LJIR 2021/2022). Neka su A i B događaji takvi da je $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$.

(a) Dokažite ako je $P(A | B) = P(A)$, onda je i $P(B | A) = P(B)$.

(b) Dokažite ako je $P(A^c) > 0$ i $P(B | A) = P(B | A^c)$ onda su A i B nezavisni.

Zadatak 3 (LJIR 2021/2022). Dva gusara dijele blago koje se sastoji od 120 zlatnika i 80 srebrnjaka. Budući da se nisu mogli nagoditi, odlučili su bacati novčić. Ako padne pismo prvi će gusar dobiti 10 zlatnika, a drugi 10 srebrnjaka, ako padne glava prvi će dobiti 10 srebrnjaka a drugi 10 zlatnika. Nakon što na ovaj način podijele sve srebrnjake, preostale će zlatnike podijeliti na dva jednaka dijela. Ako je novčić lažan, uz vjerojatnost da padne pismo jednaku $\frac{1}{3}$, izračunajte vjerojatnost da će:

(a) drugi gusar dobiti sve zlatnike,

(b) drugi gusar dobiti sve srebrnjake,

(c) drugi gusar dobiti barem 60 srebrnjaka,

(d) prvi gusar dobiti 30 ili 40 srebrnjaka?

Zadatak 4 (ZIR 2021/22). Neka su A i B proizvoljni događaji.

(a) Neka je $P(A) = 1$. Dokažite da tada vrijedi $P(A \cap B) = P(B)$.

(b) Neka je $P(A | B \cap C) = P(A | C)$. Dokažite da tada vrijedi $P(A \cap B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$.

(c) Dokažite da vrijedi $P(A \cup B) \cdot P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B)$.

Zadatak 5 (VIS-R; MI 2021/22). Neki izvor emitira tri vrste poruka: AAAA, BBBB, i CCCC. Vjerojatnosti njihovog emitiranja iznose redom 0.3, 0.4 i 0.3. Kao posljedica smetnji u kanalu, svaki se znak A , B ili C prima ispravno s vjerojatnošću 0.6. Vjerojatnost da znak bude pogrešno interpretiran iznosi 0.2 za obje preostale mogućnosti. Pretpostavlja se da je prijem svakog znaka u poruci nezavisan jedan od drugog. Izračunajte vjerojatnost da je emitirana poruka AAAA, ukoliko je primljena ACAB.

Zadatak 6 (VIS-R; MI 2022/23). Na ulazu u zgradu nalaze se 3 automata za kavu. Jedan je neispravan, jedan uvijek radi, a jedan radi s vjerojatnošću 0.5. S tri kovanice po 5kn u džepu, Matko želi utvrditi koji je automat potpuno ispravan. Ako je isprobao prvi i nije radio, a zatim drugi dvaput za redom od čega je oba puta radio, kolika je vjerojatnost da je drugi automat potpuno ispravan?

Zadatak 7 (LJIR 2022/23). Neka su A i B događaji za koje vrijedi $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Kažemo da događaj B sugerira događaj A ako vrijedi $P(A \mid B) > P(A)$, a ukoliko vrijedi $P(A \mid B) < P(A)$, onda kažemo da događaj B ne sugerira događaj A .

- a) Pokažite da događaj B sugerira događaj A ako i samo ako događaj A sugerira događaj B .
- b) Pretpostavite da je $P(B^c) > 0$. Pokažite da događaj B sugerira događaj A ako i samo ako događaj B^c ne sugerira događaj A .
- c) Znamo da je blago skriveno na jednoj od dvije lokacije, s vjerojatnostima β i $1 - \beta$, respektivno, gdje je $0 < \beta < 1$. Mi pretražujemo prvo od ta dva mjesta i ako je blago tamo, naći ćemo ga s vjerojatnošću $p > 0$. Pokažite da događaj kada ne uspijemo pronaći blago na prvom mjestu sugerira da je blago na drugom mjestu.

Zadatak 8 (VIS-R; MI 2019/20). U jednoj posudi se nalazi 6 bijelih i 4 crne kuglice, a u drugoj posudi 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Igrač iz svake od dvije posude izvlači 3 puta po jednu kuglicu bez vraćanja (ukupno 6 izvlačenja). Ako su ukupno izvučene 2 bijele kuglice, izračunajte vjerojatnost da:

- (a) iz prve posude nije izvučena niti jedna bijela kuglica,
- (b) je iz prve posude izvučena jedna bijela kuglica,
- (c) su iz prve posude izvučene dvije bijele kuglice.