Zadatak 1 (JIR 2022/2023)**.** *X i Y su dvije nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 1$. Izračunajte*

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1).$$

Rješenje.

$$X, Y \sim \mathcal{E}(1) \implies F_X(x) = 1 - e^{-x},\ F_Y(y) = 1 - e^{-y}$$

Raspišemo traženu vjerojatnost:

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1) = \frac{P(X + Y > 2, X > 1)}{P(X > 1)}$$

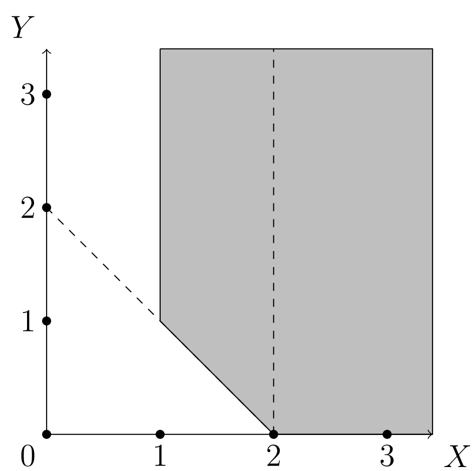
Nazivnik je jednostavno izračunati:

$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F_X(1) = e^{-1}$$

Da bismo izračunali vjerojatnost u brojniku, potrebno je integrirati gustoću slučajnog vektora (X, Y) po području gdje je zadovoljen uvjet $X + Y > 2, X > 1$. Naravno, s obzirom da ima nezavisne komponente, njegova gustoća iznosi

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$$

Skica područja:



Integriranje zbog granica razdvajamo na dva dijela, po vertikalnoj iscrtkanoj liniji na slici.

$$P(X + Y > 2, X > 1) = \int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx + \int_2^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx =$$

$$= \cdots = 2e^{-2}$$

Stoga je rješenje zadatka

$$P(X + Y > 2 \mid X > 1) = \frac{2e^{-2}}{e^{-1}} = 2e^{-1}.$$

□

Zadatak 2 (VIS-R; ZI 2020/2021). *Slučajni vektor (X,Y) zadan je funkcijom gustoće*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{12}{5}xy(1+y), \ \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1.$$

(a) *Izračunajte vjerojatnost $P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y < \frac{2}{3}\right)$.*

(b) *Odredite funkciju razdiobe slučajnog vektora (X,Y).*

(c) *Odredite funkciju razdiobe F_X slučajne varijable X.*

(d) *Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne? Obrazložite.*

(e) *Izračunajte vjerojatnost $P(X < Y)$.*

Rješenje.

(a)

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq Y < \frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{12}{5}xy(1+y)\,dy\,dx =$$

$$= \frac{12}{5}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} y(1+y)\,dy\,dx = \cdots = \frac{41}{720}.$$

(b)

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds =$$

$$= \int_0^x \int_0^y \frac{12}{5}st(1+t)\,dt\,ds = \cdots = \frac{12}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right), \quad x,y \in [0,1].$$

(c)

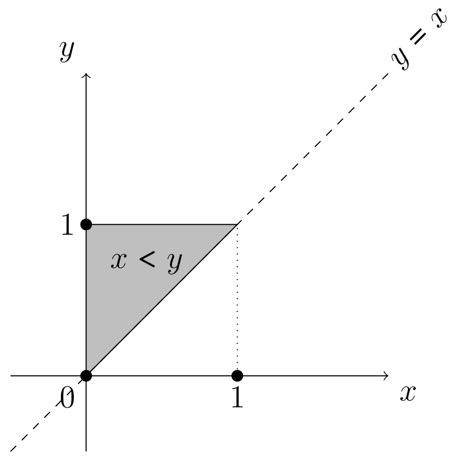
$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = F_{X,Y}(x,\infty) = F_{X,Y}(x,1) = x^2, \quad x \in [0,1].$$

(d) Primijetimo da se gustoća slučajnog vektora može zapisati u obliku

$$f_{X,Y}(x,y) = (c_1 x)\cdot(c_2 y(1+y)) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

iz čega (po teoremu 7.1 iz knjižica) slijedi da su X i Y nezavisne.

(e) Potrebno je integrirati funkciju gustoće slučajnog vektora po području na kojem je $X < Y$, a koje je označeno na skici ispod:



Rješenje će dakle biti:

$$P(X < Y) = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{12}{5} xy(1+y)\, dx \right) dy = \cdots = \frac{27}{50}.$$

□

Zadatak 3 (VIS-R; ZI 2022/2023)**.** *Udio ostvarenih bodova na ispitu iz hrvatskog jezika i iz matematike su nezavisne slučajne varijable koje prate jednoliku razdiobu na segmentu* $[0,1]$. *Da bi osobe mogle upisati fakultet, zbroj ta dva udjela mora biti veći od* 1. *Stoga slučajni vektor* (X,Y) *koji opisuje udio bodova iz hrvatskog jezika i matematike među ljudima koji su upisali fakultet ima uniformnu distribuciju na trokutu danom s vrhovima* $(1,0)$, $(1,1)$ *i* $(0,1)$.

(a) *Koliki je koeficijent korelacije između ostvarenog udjela bodova na ispitu iz hrvatskog jezika i matematike među ljudima koji su upisali fakultet?*

(b) *Kolika je vjerojatnost da je osoba koja je upisala fakultet riješila ispit iz matematike barem dvostruko bolje od ispita iz hrvatskog jezika?*

Rješenje.

□

Zadatak 4 (DIR 2021/2022)**.** *Duljine stranica pravokutnika su nezavisne slučajne varijable s funkcijama gustoće*

$$f_X(x) = \frac{A}{x^2},\ x \in [1,4], \quad f_Y(y) = \frac{1}{2}y + B,\ y \in [2,3].$$

(a) *Odredite konstante* A *i* B.

(b) *Izračunajte vjerojatnost da je površina pravokutnika s duljinama stranica* X *i* Y *manja od* 6.

(c) *Izračunajte vjerojatnost da se duljine stranica ovog pravokutnika razlikuju za manje od* 1.

Rješenje.

$\square$

Zadatak 5 (VIS-E; ZI 2021/2022)**.** *Biramo na sreću dva broja* X_1 *i* X_2 *u intervalu* $[0,1]$. *Neka je* $X = \max(X_1, X_2)$. *Potom na sreću biramo broj* Y *u intervalu* $[0, X]$. *Odredite funkciju gustoće slučajne varijable* X, *funkciju gustoće slučajne varijable* Y *i izračunajte vjerojatnost* $P\left(Y > \frac{1}{2}\right)$.

Rješenje.

$\square$

Zadatak 6 (VIS-E; ZI 2020/2021)**.** *Slučajni vektor* (X, Y) *zadan je funkcijom gustoće*

$$f(x, y) = x + y, \quad \text{za } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Izračunajte vjerojatnosti događaja:

(a) $P\left(X^2 + Y^2 > 1\right)$,

(b) $P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y < \frac{1}{2}\right)$.

Rješenje.

$\square$

Zadatak 7 (ZIR 2021/2022)**.** *Slučajna varijabla* X *ima eksponencijalnu razdiobu, a slučajna varijabla* Y *normalnu razdiobu s pripadnim gustoćama*

$$f_X(x) = 3e^{-3x}, \quad x > 0,$$

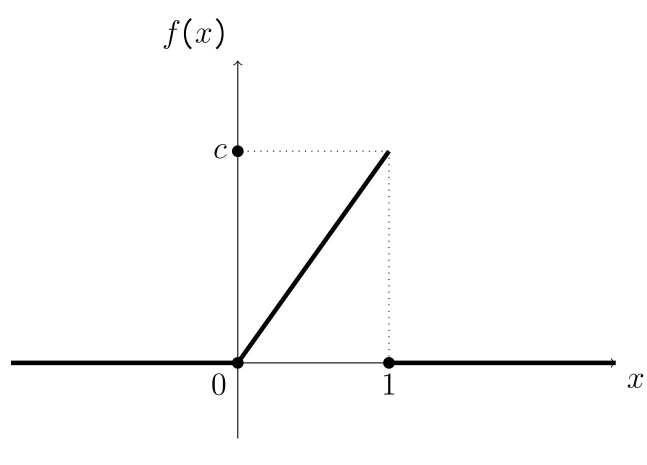
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+4)^2}{8}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ako su X *i* Y *međusobno korelirane slučajne varijable s koeficijentom korelacije* $r(X, Y) = -0.5$, *izračunajte očekivanje slučajne varijable* $Z = X^2 - 3XY + 2Y^2$.

Rješenje.

$\square$

Zadatak 8 (ZIR 2019/2020)**.** *Neka su* X *i* Y *nezavisne slučajne varijable čiji je graf funkcije gustoće dan na sljedećoj slici:*



(a) *Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora* (X, Y).

(b) *Izračunajte* $P\left(X^2 + Y^2 > 1\right)$.

(c) *Izračunajte* $P\left(X^2 + Y^2 > 1 \mid X > \frac{1}{2}\right)$.

Rješenje.

$\square$