



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

# 13. Trofazni sustavi



© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja



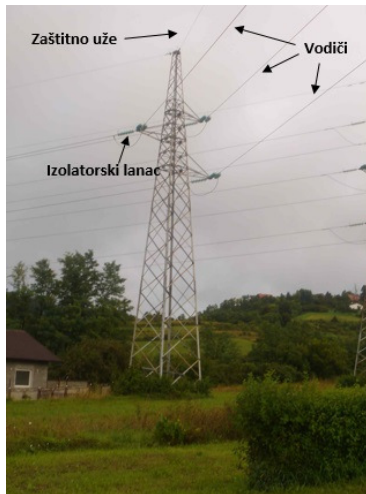
Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/hr/).



## O trofaznim sustavima

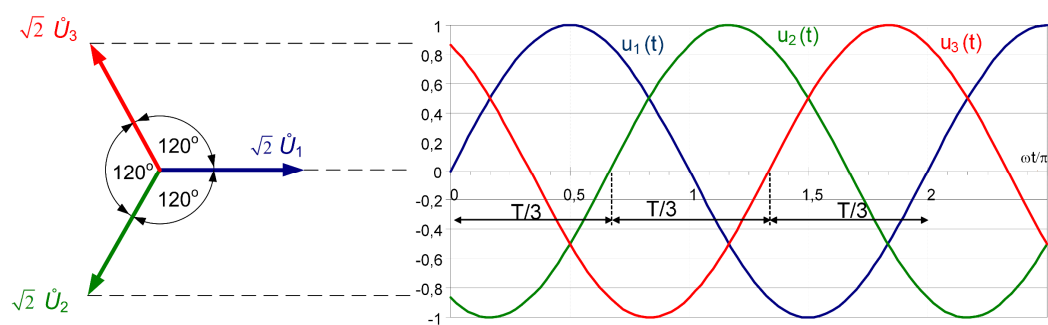
- Trofazni sustavi izmjeničnih napona imaju u proizvodnji, prijenosu i raspodjeli električne energije prednosti u odnosu na jednofazne sustave:
  - Prijenos iste snage s manjim brojem vodiča
  - Prijenos snage koja je u vremenu konstantna:  $p(t) = \text{konst.}$
- Simetrični trofazni sustavi:
  - Jednaki iznosi svih veličina (naponi, impedancije, struje)
  - Jednaki fazni pomaci između veličina (između napona pojedinih faza i između struja pojedinih faza)
- Trofazni sustav napona:
  - iz tri nezavisna naponska izvora generiraju se tri napona iste frekvencije i istog efektivnog iznosa, međusobno pomaknuta za  $120^\circ$ , odnosno za trećinu periode

## Prikaz stupa jednosistemskog i dvosistemskog dalekovoda



## Vektorski prikaz trofaznog sustava

- Oznake za pojedine izvore (faze) su:
  - 1, 2, 3 (oznake prema IEC su: L1, L2, L3)



## Naponi izvora u trofaznom sustavu

- Naponi izvora su:

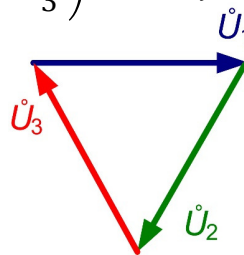
$$u_1(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin(\omega t) \quad ; \quad \dot{U}_1 = U_f \angle 0^\circ$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \quad \dot{U}_2 = U_f \angle -120^\circ$$

$$u_3(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \quad \dot{U}_3 = U_f \angle -240^\circ = U_f \angle 120^\circ$$

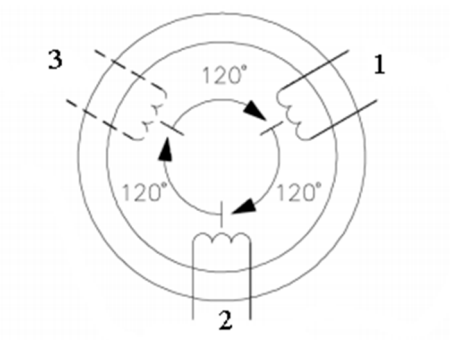
- Zbroj napona izvora je jednak nuli:

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$$



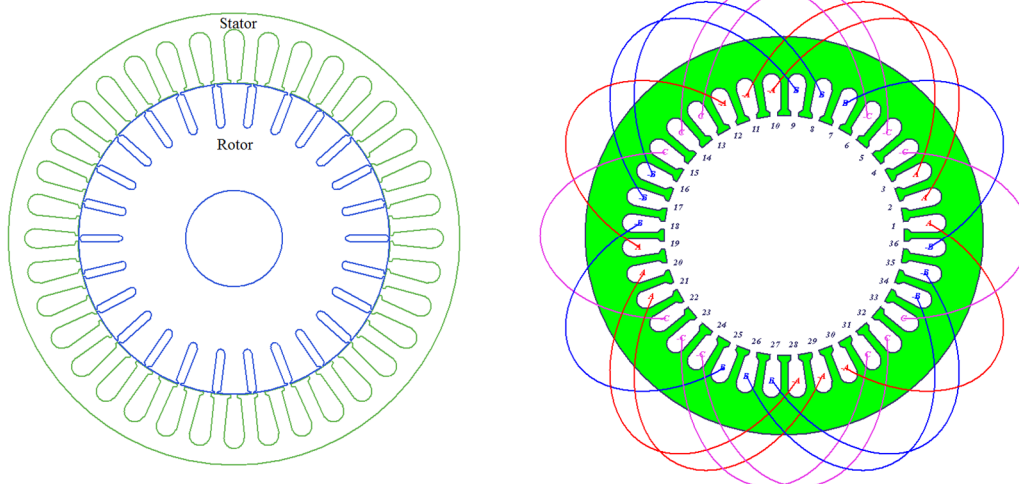
## Principna shema trofaznog stroja

- Tri geometrijski pomaknuta namota za kut  $120^\circ$



## Mogućnost stvarne realizacije trofaznog stroja

Fazni namoti označeni bojama



## Spojevi u trofaznom sustavu

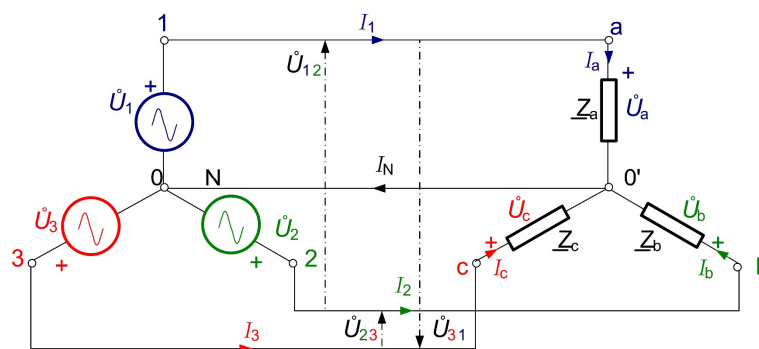
- Jednofazni izvori i trošila povezuju se u dva osnovna trofazna spoja:
  - spoj u zvijezdu: Y
  - spoj u trokut:  $\Delta$

## Trofazni zvijezda spoj

- Krajevi 3 naponska izvora povežu se u jednu zajedničku točku: **zvjezdište (nultočka) izvora (0)**
- Krajevi 3 trošila povežu se u jednu zajedničku točku: **zvjezdište (nultočka) trošila (0')**
- Počeci 3 naponska izvora povežu se s počecima 3 trošila
- Sva 3 povratna vodiča (izvor-trošilo) povezuju se u jedan vodič: **nul vodič (N)**

## Trofazni zvijezda spoj izvora i trošila

- Vodiči koji povezuju izvor i trošilo: **linije**



- Faze izvora: **1,2,3**
- Faze trošila: **a,b,c**
- Nul vodič: **N**

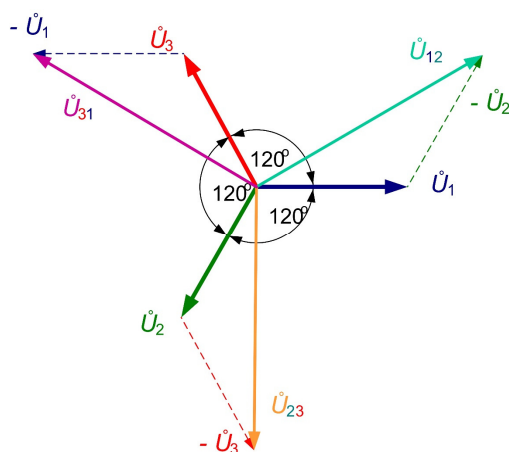
## Naponi i struje u trofaznom zvijezda spoju izvora i trošila

- Naponi između pojedinih faza izvora i nultocke izvora 0: **fazni naponi izvora**  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$
- Naponi između pojedinih faza trošila i nultocke trošila 0': **fazni naponi trošila**  $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$
- Jednim faznim vodičem i nul vodičem fazni naponi izvora prenose se na faze trošila i jednaki su faznim naponima trošila:  
$$\dot{U}_1 = \dot{U}_a ; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_b ; \quad \dot{U}_3 = \dot{U}_c$$
- **Fazne struje** su struje koje prolaze kroz pojedine faze izvora  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$  i trošila  $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$   $\dot{I}_1 = \dot{I}_a ; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_b ; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_c$
- **Linijske struje** su struje kroz pojedine linije. U zvijezda spoju jednake su faznim strujama:

$$I_l = I_f$$

## Linijski naponi u zvijezda spoju

- **Linijski naponi** su naponi (razlike potencijala) između pojedinih linija



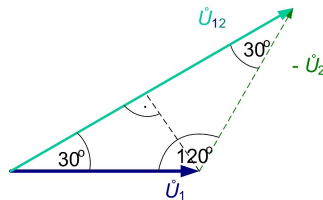
$$\dot{U}_{12} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_2 - \dot{U}_3$$

$$\dot{U}_{31} = \dot{U}_3 - \dot{U}_1$$

## Linijski naponi u zvijezda spoju

- Svi linijski naponi su po iznosu jednaki, hipotenuza su jednakokračnog trokuta:



- Iznos linijskih napona je:  $U_l = 2 \cdot U_f \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot U_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot U_f$

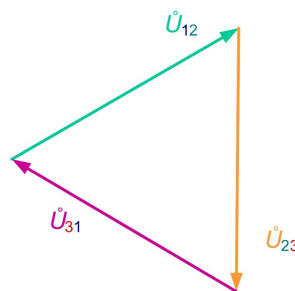
$$U_l = \sqrt{3} \cdot U_f$$

- Fazori linijskih napona su:

$$\dot{U}_{12} = U_l \angle 30^\circ ; \quad \dot{U}_{23} = U_l \angle -90^\circ ; \quad \dot{U}_{31} = U_l \angle 150^\circ$$

## Zbroj linijskih napona u zvijezda spoju

- Zbroj linijskih napona je nula:



$$\dot{U}_{12} + \dot{U}_{23} + \dot{U}_{31} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 + \dot{U}_2 - \dot{U}_3 + \dot{U}_3 - \dot{U}_1 = 0$$

## Struje u simetričnom zvijezda trošilu

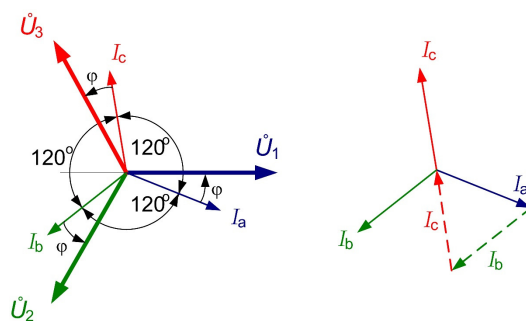
- Za simetrično trošilo  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = |\underline{Z}| \angle \varphi$  fazne struje trošila su:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -\varphi = I_f \angle -\varphi \quad ; \quad I_f = \frac{U_f}{|\underline{Z}|}$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{U_f \angle -120^\circ}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -120^\circ - \varphi = I_f \angle -120^\circ - \varphi$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{U_f \angle -240^\circ}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -240^\circ - \varphi = I_f \angle -240^\circ - \varphi$$

## Struja nul-vodiča za simetrično trošilo



- Struja kroz nul vodič je:  $\dot{I}_N = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$
- Nul vodič **nije potreban**: struje faza poništavaju se u nul točkama izvora 0 i trošila 0'



## Struje nesimetričnog trošila u spoju zvijezda s nul vodičem

- Za nesimetrično trošilo  $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$  struja svake faze je drugačijeg iznosa i faznog pomaka pa će kroz nul vodič teći struja:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{\dot{U}_1}{Z_a} = \frac{U_f}{|Z_a| \angle \varphi_a} = \frac{U_f}{|Z_a|} \angle -\varphi_a = I_1 \angle -\varphi_a$$

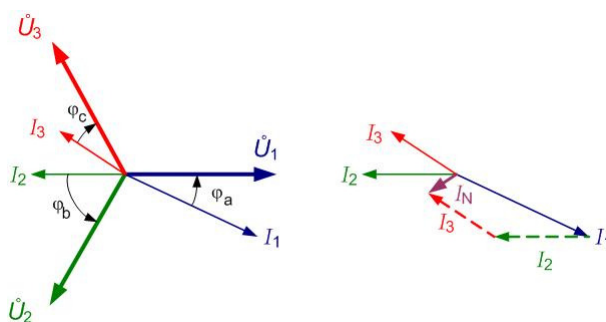
$$\dot{I}_b = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{\dot{U}_2}{Z_b} = \frac{U_f \angle -120^\circ}{|Z_b| \angle \varphi_b} = \frac{U_f}{|Z_b|} \angle -120^\circ - \varphi_b = I_2 \angle -120^\circ - \varphi_b$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{\dot{U}_3}{Z_c} = \frac{U_f \angle -240^\circ}{|Z_c| \angle \varphi_c} = \frac{U_f}{|Z_c|} \angle -240^\circ - \varphi_c = I_3 \angle -240^\circ - \varphi_c$$

$$I_1 = \frac{U_f}{|Z_a|} \quad ; \quad I_2 = \frac{U_f}{|Z_b|} \quad ; \quad I_3 = \frac{U_f}{|Z_c|}$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \neq 0$$

## Struja nul vodiča u slučaju nesimetričnog trošila



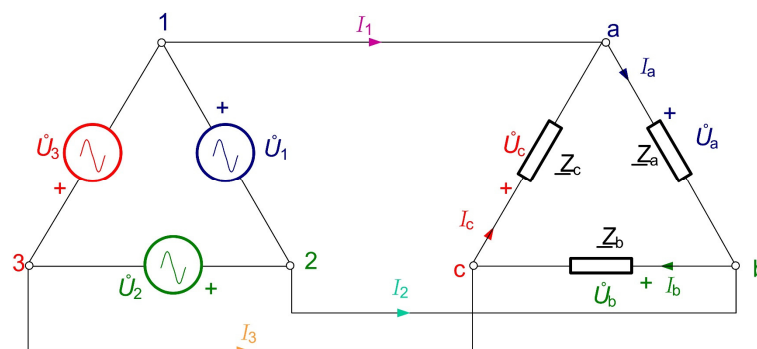
- Ona je manjeg iznosa nego pojedine fazne struje, pa se nul vodič stoga dimenzionira na manji presjek nego fazni vodiči

## Nesimetrija u opterećenju 6. kata C zgrade FERa



## Trofazni trokut spoj

- Krajevi izvora, odnosno impedancija trošila povezuju se u nizu tako da tvore električnu shemu u obliku trokuta



## Struje i naponi u trofaznom trokut spoju

- S dvije linije fazni naponi izvora prenose se na faze trošila i jednaki su faznim naponima na trošilu:  $\dot{U}_1 = \dot{U}_a$  ;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_b$  ;  $\dot{U}_3 = \dot{U}_c$
- To su naponi između linija (linijski naponi). Dakle vrijedi:

$$\boxed{U_l = U_f}$$

- Za simetrično trošilo  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = |\underline{Z}| \angle \varphi$  fazne struje trošila su:

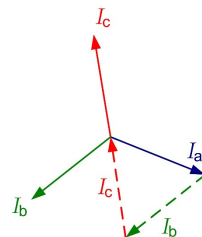
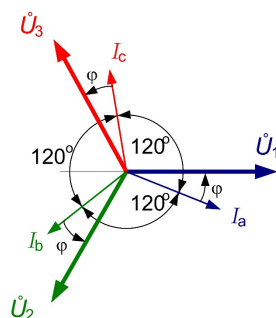
$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -\varphi = I_f \angle -\varphi \quad ; \quad I_f = \frac{U_f}{|\underline{Z}|}$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}} = \frac{U_f \angle -120^\circ}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -120^\circ - \varphi = I_f \angle -120^\circ - \varphi$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}} = \frac{U_f \angle -240^\circ}{|\underline{Z}| \angle \varphi} = \frac{U_f}{|\underline{Z}|} \angle -240^\circ - \varphi = I_f \angle -240^\circ - \varphi$$

## Zbroj faznih struja trošila u trokut spoju

- Zbroj faznih struja trošila je nula:

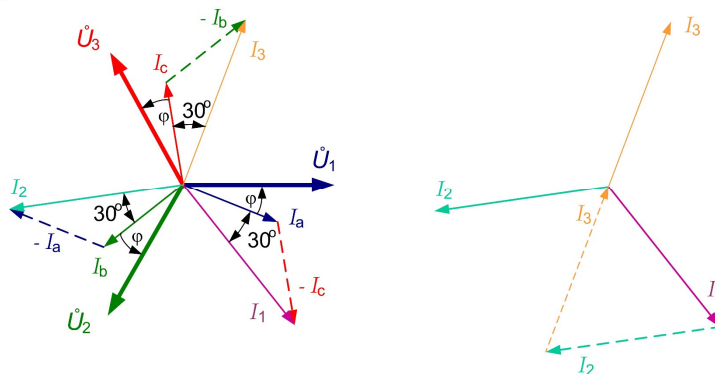


$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$$

- Linijske struje su razlike faznih struja trošila:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_a - \dot{I}_c \quad ; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_b - \dot{I}_a \quad ; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_c - \dot{I}_b$$

## Zbroj linijskih struja u trokut spoju



- Zbroj linijskih struja je nula:

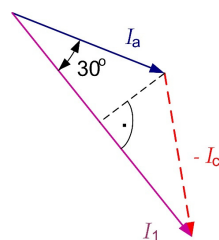
$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_a - \dot{I}_c + \dot{I}_b - \dot{I}_a + \dot{I}_c - \dot{I}_b = 0$$

- Fazori linijskih struja su:

$$\dot{I}_1 = I_l \angle -30^\circ - \varphi ; \quad \dot{I}_2 = I_l \angle -150^\circ - \varphi ; \quad \dot{I}_3 = I_l \angle 90^\circ - \varphi$$

## Zbroj linijskih struja u trokut spoju i nesimetrično trošilo

- Sve linijske struje su po iznosu jednake; hipotenuza su jednakokračnog trokuta:



Iznos linijskih struja je:

$$I_l = 2 \cdot I_f \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot I_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_f$$

$$\boxed{I_l = \sqrt{3} \cdot I_f}$$

- Nesimetrično trošilo u trokut spoju rješava se istim postupkom kao i simetrično s tim da onda vrijedi:

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c \neq 0 \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_a - \dot{I}_c + \dot{I}_b - \dot{I}_a + \dot{I}_c - \dot{I}_b = 0$$

## Snaga simetričnog trofaznog sustava

- Ukupna radna snaga i ukupna jalova snaga trofaznog trošila zbroj su radnih i jalovih snaga pojedinih faza trošila:

$$P_{uk} = \sum_{i=1}^3 P_i = \sum_{i=1}^3 U_i I_i \cos \varphi_i \quad ; \quad Q_{uk} = \sum_{i=1}^3 Q_i = \sum_{i=1}^3 U_i I_i \sin \varphi_i$$

- Ako je trofazni sustav simetričan:

$$P_a = P_b = P_c = U_f I_f \cos \varphi \quad ; \quad Q_a = Q_b = Q_c = U_f I_f \sin \varphi$$
$$P_{uk} = 3U_f I_f \cos \varphi \quad ; \quad Q_{uk} = 3U_f I_f \sin \varphi$$

## Snage izražene preko linijskih vrijednosti:

- Za spoj Y:

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} \quad ; \quad I_f = I_l \quad ; \quad P_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \cos \varphi \quad ; \quad Q_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \sin \varphi$$

- Za spoj Δ:

$$U_f = U_l \quad ; \quad I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}} \quad ; \quad P_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \cos \varphi \quad ; \quad Q_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l I_l \sin \varphi$$

## Trenutna snaga u trofaznom sustavu

- Ukupna trenutna snaga u simetričnom trofaznom sustavu je:

$$p_{uk}(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t) \cdot i_i(t)$$

$$u_i(t) = \sqrt{2} \cdot U_f \sin\left(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{3}\right) ; \quad i_i(t) = \sqrt{2} \cdot I_f \sin\left(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$$

- Trenutna snaga jedne faze je:

$$p_i(t) = u_i(t) \cdot i_i(t) = 2U_f I_f \sin\left(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - (i-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$$

- Vrijedi:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

## Trenutna snaga u trofaznom sustavu

- pa je trenutna snaga jedne faze:

$$p_i(t) = U_f I_f \left[ \cos \varphi - \cos\left(2\omega t - 2(i-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right]$$

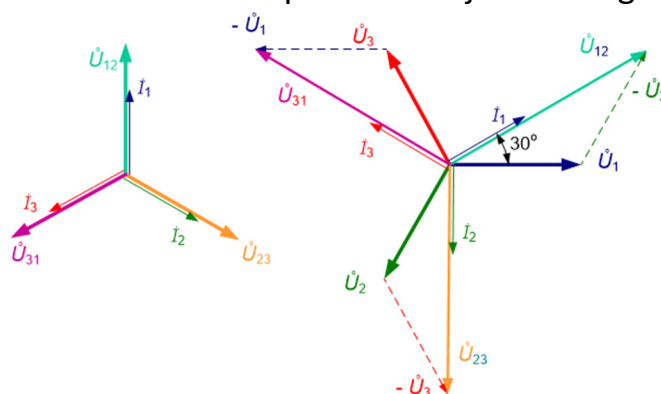
- Ukupna trenutna snaga je:

$$p_{uk}(t) = 3U_f I_f \cos \varphi - U_f I_f \sum_{i=1}^3 \cos\left[2\omega t - 2(i-1)\frac{2\pi}{3} - \varphi\right]$$

$$p_{uk}(t) = 3U_f I_f \cos \varphi = \text{konst.}$$

### Primjer 1.

Vektorski dijagram linijskih struja i napona simetričnog trofaznog trošila spojenog u zvijezdu prikazan je na slici. Ako je  $I_1=10\text{ A}$  i  $U_1=380\text{ V}$ , odredite impedanciju trošila. Odredite ukupnu radnu i jalovu snagu trošila.



### Primjer 2.

U simetričnom trofaznom trošilu spojenom u trokut struja linije 1 je  $\dot{I}_1 = 100 \angle -60^\circ \text{ A}$ . Ako je linijski napon  $\dot{U}_{12} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$ , odrediti impedanciju jedne faze trošila, te ukupnu radnu i jalovu snagu.

### Primjer 3.

---

Na simetričnu trofaznu mrežu linijskog napona  $U_l = 380 \text{ V}$  priključeno je simetrično trofazno trošilo impedancije jedne faze  $\underline{Z} = 10 \angle 30^\circ \Omega$ .

Odrediti iznose faznih struja, linijskih struja i ukupne radne snage ako je trošilo spojeno:

a) u trokut

b) u zvijezdu.

Koliki su omjeri linijskih struja i ukupne radne snage u ova dva spoja?

### Primjer 4.

---

Trofazno simetrično trošilo spojeno je četverovodno na trofazni izvor. Kako se promijeni ukupna snaga trošila ako se napon jedne faze smanji za 5%?



### Primjer 5.

---

Na simetričan trofazni generator priključeno je simetrično trošilo u trokut spoju. Radna snaga trošila je 1000 W. Kolika je radna snaga trošila nakon što pregori osigurač u jednom od linijskih vodova?

### Primjer 6.

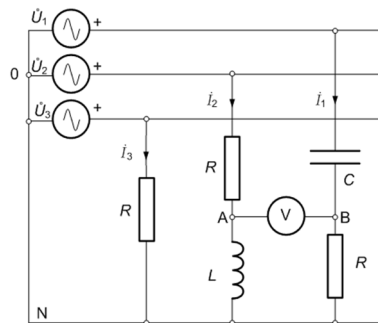
---

Tri otpornika spojena su u zvijezdu i četverovodno priključeni na trofazni simetričan izvor faznog napona  $U_f = 220 \text{ V}$ . Kolika struja teče kroz nul-vodič ako se na otpornicima razvijaju snage  $P_1 = 220 \text{ W}$ ,  $P_2 = 440 \text{ W}$ ,  $P_3 = 440 \text{ W}$ .

### Primjer 7.

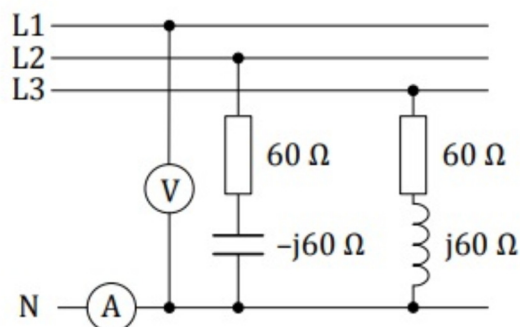
Struja kroz nul vodič u spoju prema slici iznosi 1 A. Zadano  $R = 100 \, \Omega$  i  $X_L = X_C = \frac{100}{\sqrt{3}} \, \Omega$ .

- odrediti napon voltmetra i ukupnu radnu i jalovu snagu.
- ako se umjesto voltmetra stavi ampermetar koliku će struju mjeriti?



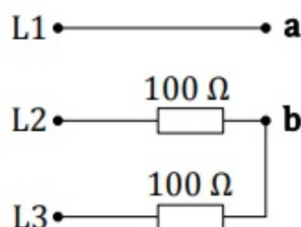
### Primjer 8.

U spoju prema slici voltmetar pokazuje napon  $U_V = 230 \, \text{V}$ . Odredite pokazivanje ampermetra.



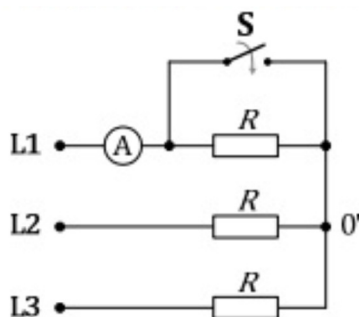
### Primjer 9.

Odredite parametre Théveninovog nadomjesnog spoja obzirom na stezaljke **a** i **b**. Linijski napon je  $U_1 = 381 \text{ V}$ .



### Primjer 10.

Na simetrični trofazni izvor priključeno je trošilo prema slici. Odredite pokazivanje ampermetra nakon što zatvorimo sklopku **S**. Linijski napon je  $U_1 = 400 \text{ V}$ , a iznos otpora  $R = 90 \Omega$ .



## Rješenja primjera

1.  $\underline{Z} = 19 - j10,97 \, \Omega$        $P_{\text{uk}} = 5700 \, \text{W}$        $Q_{\text{uk}} = 3291 \, \text{VAr (kap.)}$
2.  $\underline{Z} = 2\sqrt{3}\angle 30^\circ \, \Omega$        $P_{\text{uk}} = 30 \, \text{kW}$        $Q_{\text{uk}} = 10000\sqrt{3} \, \text{VAr (ind.)}$
3. a) trokut:       $I_f = 38 \, \text{A}$        $I_l = 65,82 \, \text{A}$        $P_{\text{uk}} = 37516,22 \, \text{W}$   
b) zvijezda:       $I_f = 21,94 \, \text{A}$        $I_l = 21,94 \, \text{A}$        $P_{\text{uk}} = 12505,41 \, \text{W}$   
omjeri:       $I_{l(\text{trokut})}/I_{l(\text{zvijezda})} = 3$        $P_{\text{uk}(\text{trokut})}/P_{\text{uk}(\text{zvijezda})} = 3$
4. ukupna snaga trošila se smanji za 3,25%
5. 500 W
6.  $|\dot{I}_0| = 1 \, \text{A}$
7. a)  $\dot{U}_{AB} = 100\angle -120^\circ \, \text{V}$        $P_{\text{uk}} = 250 \, \text{W}$        $Q_{\text{uk}} = 0 \, \text{VAr}$   
b)  $I_A = 2 \, \text{A}$       ( $I_N$  iz Nortonovog teorema)
8.  $I_A = 1,4 \, \text{A}$
9.  $E_T = 330 \, \text{V}$        $Z_T = 50 \, \Omega$
10.  $I_A = 7,69 \, \text{A}$