11.
Intervalne procjene

Sadržaj poglavlja

11.1. Intervali povjerenja

11.1.1. Kvantili

Zbog primjena koje će uslijediti, upoznajmo detaljnije neke karakteristične točke vezane uz funkciju razdiobe i funkciju gustoće slučajne varijable X.

Neka je F funkcija razdiobe, a f gustoća te varijable. Da bismo izbjegli nepotrebnu složenost, pretpostavit ćemo da postoji interval $\langle a,b\rangle$ takav da je $f(x)$ pozitivan broj u svakoj točki x tog intervala, a jednak nuli za $x<a$ i za $x>b$. Ovakav se interval naziva **nosač** funkcije gustoće. Vrijednosti $a=-\infty$ ili $b=+\infty$ su dopuštene.

Tamo gdje je gustoća pozitivna, funkcija razdiobe je rastuća. Dakle, za nju vrijedi $F(a)=0$, $F(b)=1$ i F je rastuća na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Izaberimo realan broj p, $0<p<1$. Onda jednadžba $F(x)=p$ ima jedincato rješenje.

Kvantil

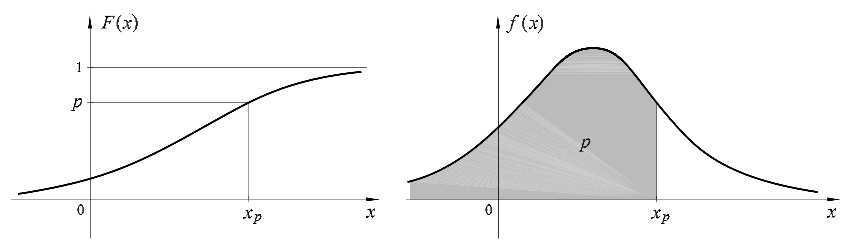
Relan broj x_p za koji vrijedi

$$F(x_p)=p$$

to jest

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(t)\,\mathrm{d}t=p$$

naziva se **kvantil** reda p.



Sl. 11.1. Kvantil reda p.

U primjenama u statistici vrlo se često postavlja pitanje određivanja kvantila x_p za neke specifične vrijednosti od p; npr. za 0.001, 0.01, 0.05, 0.95, 0.99 ili pak 0.999.

Za neke posebne vrijednosti od p kvantili dobivaju posebna imena. Tako, na primjer, za $p=0.25$, 0.50 i 0.75 zovemo ih **kvartilima**, za $p=0.1$, $0.2,\ldots,$ 0.9 zovemo ih **decilima**, a za $p=0.01$, $0.02,\ldots,$ 0.99 zovemo ih **percentilima**.

11.1.2. Intervali povjerenja slučajne varijable

Razdioba slučajne varijable u problemima matematičke statistike najčešće nije potpuno poznata, jer ovisi o jednom ili više nepoznatih parametara. U prethodnom smo poglavlju naučili kako na temelju realizacija dobivenih iz uzorka možemo odrediti **točkastu procjenu** nepoznatog parametra. Ta je procjena više ili manje pouzdana. Poznavanje razdiobe traženog parametra omogućava nam da utvrdimo **interval povjerenja** oko dobivene procjene. Veličina tog intervala govori o pouzdanosti dobivene procjene.

— ◆ —

Radi jednostavnosti, najprije ćemo promotriti problematiku intervala povjerenja za slučajnu varijablu X kojoj je razdioba poznata.

Interval povjerenja slučajne varijable

Neka je $0<p<1$. Interval $[c_1,c_2]$ za koji vrijedi

$$\boldsymbol{P}(c_1<X<c_2)=p$$

naziva se **interval povjerenja reda p** za slučajnu varijablu X.

Ako je p zadan, određivanje intervala povjerenja nije uvijek jednostavan posao.

Ukoliko je lijevi rub intervala $c_1=-\infty$, onda za desni rub možemo uzeti kvantil $c_2=x_p$.

Analogno, ako za desni rub odaberemo $c_2=\infty$, onda je lijevi rub određen kvantilom $c_1=x_{1-p}$.

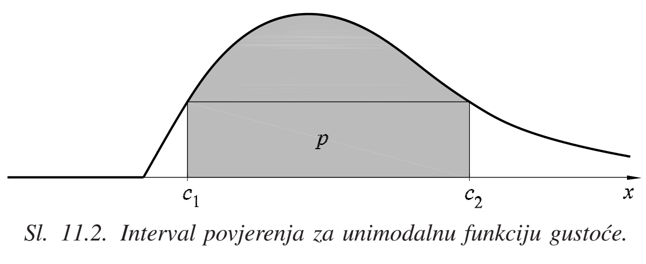
U statistici najčešće želimo odrediti *interval povjerenja najmanje duljine*. Time se zadatak svodi na problem minimizacije:

$$c_2-c_1\longmapsto \min$$
$$\int_{c_1}^{c_2} f(t)\,\mathrm{d}t=p.$$

Ova se zadaća ne može uvijek riješiti eksplicitnim formulama.

Pretpostavimo da funkcija f ima dodatno svojstvo, koje je u primjenama vrlo često ispunjeno: f posjeduje samo jednu točku lokalnog maksimuma. Takvu funkciju gustoće nazivamo **unimodalna**. Lako je onda pokazati da zadaća minimizacije ima jednoznačno rješenje, te da za rub intervala povjerenja vrijedi

$$f(c_1)=f(c_2). \tag{1}$$



Sl. 11.2. Interval povjerenja za unimodalnu funkciju gustoće.

Čak niti s tim dodatnim uvjetom problem određivanja rubnih točaka nije olakšan. Zato se najčešće zadovoljavamo *bilo kojim* intervalom povjerenja reda p, ili pak njegove rubove određujemo pomoću odabranih kvantila. Na primjer rubne točke možemo odabrati ovako:

$$c_1=x_{\frac12(1-p)},\qquad c_2=x_{\frac12(1+p)} \tag{2}$$

Zaista, u tom slučaju vrijedi

$$\boldsymbol{P}(c_1\leqslant X\leqslant c_2)=\frac12(1+p)-\frac12(1-p)=p.$$

U većini literature koristi se sljedeća standardna oznaka:

Nivo značajnosti

Za zadani broj p, $0<p<1$ koji određuje interval povjerenja, veličina $\alpha=1-p$ naziva se **nivo značajnosti** (**signifikantnosti**). Pri tom za jednostrane kvantile vrijedi:

$$x_p=x_{1-\alpha},\qquad x_{1-p}=x_\alpha,$$

a za dvostrane:

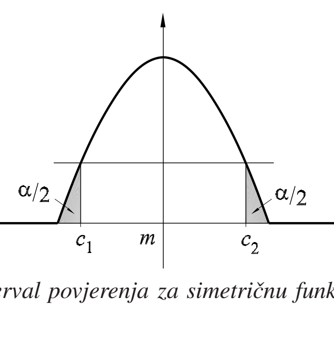
$$x_{\frac12(1-p)}=x_{\alpha/2},\qquad x_{\frac12(1+p)}=x_{1-\alpha/2}.$$

— ◆ —

Ukoliko funkcija gustoće posjeduje svojstvo simetrije (s obzirom na pravac $x=m$):

$$f(m-x)=f(m+x),\qquad \text{za sve } x\in\mathbf{R}, \tag{3}$$

tada će za odabir (2) biti ispunjen uvjet (1).



Sl. 11.4. Interval povjerenja za simetričnu funkciju gustoće.

11.1.3. Interval povjerenja za nepoznati parametar

Neka je sad razdioba varijable X ovisna o nepoznatom parametru ϑ. Taj ćemo parametar procjeniti pomoću neke točkovne procjene. Pokažimo sad kako se određuje kvaliteta te procjene. Ona će biti iskazana duljinom **intervala povjerenja** za nepoznati parametar.

Interval povjerenja za nepoznati parametar

Pretpostavimo da postoje funkcije $\overline{\Theta}(X_1,\ldots,X_n)$ i $\underline{\Theta}(X_1,\ldots,X_n)$ takve da za sve realizacije $x_1,\ldots,x_n$ uzorka vrijedi

$$\boldsymbol{P}\Big\{\underline{\Theta}(x_1,\ldots,x_n)<\vartheta<\overline{\Theta}(x_1,\ldots,x_n)\Big\}=p.$$

Interval $\langle\underline{\Theta},\overline{\Theta}\rangle$ se zove **interval povjerenja** za parametar ϑ reda p.

Ovdje valja napomenuti da je interval $\langle\underline{\Theta},\overline{\Theta}\rangle$ *slučajan*, jer njegovi rubovi ovise o realizaciji uzorka. Međutim, vjerojatnost da parametar ϑ padne unutar tog intervala jednaka je p i ne ovisi o tim realizacijama.

11.2. Intervalne procjene za parametre normalne razdiobe

Pretpostavimo da X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ kod koje su neki od parametara, a moguće i oba, nepoznati.

11.2.1. Intervalna procjena očekivanja uz poznatu disperziju σ^2

Statistika za očekivanje je

$$\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}.$$

Ova statistika nam daje točkastu procjenu očekivanja.

Slučajna varijabla $\overline{X}$ je zbroj nezavisnih normalnih varijabli, pa zato i sama ima normalu razdiobu. Njezini su parametri

$$\boldsymbol{E}(\overline{X}) = \frac{1}{n}[\boldsymbol{E}(X_1)+\ldots+\boldsymbol{E}(X_n)] = \boldsymbol{E}(X) = a,$$

$$\boldsymbol{D}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}[\boldsymbol{D}(X_1)+\ldots+\boldsymbol{D}(X_n)] = \frac{\boldsymbol{D}(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Dakle, $\overline{X} \sim \mathcal{N}(a, \frac{\sigma^2}{n})$.

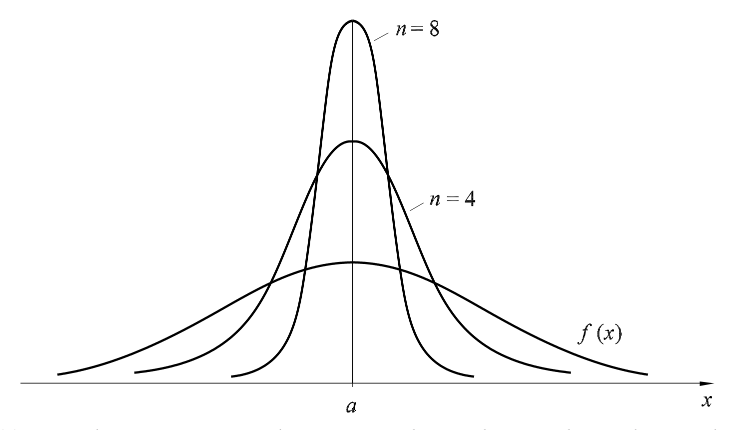
Istaknimo i zapamtimo ovaj važni rezultat.

Teorem 11.1. ■ Razdioba sredine uzorka

Ako populacija X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$, onda za sredinu uzorka vrijedi

$$\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \sim \mathcal{N}(a, \frac{\sigma^2}{n}). \tag{4}$$

Ovdje je važno uočiti efekt povećanja volumena uzorka. Što je n veći, to će disperzija sredine $\overline{X}$ biti manja.



Sl. 11.5. Funkcija gustoće populacije i pripadne sredine, za dva različita volumena uzorka.

Prema zakonu velikih brojeva, znamo da će slučajna varijabla $\overline{X}$ težiti k očekivanju a. Sad smo u mogućnosti precizno opisati kvalitetu i brzinu te konvergencije.

— ◆ —

S obzirom da poznajemo točnu razdiobu statistike $\overline{X}$, možemo lako odrediti interval povjerenja za očekivanje a. U tu svrhu, označimo s

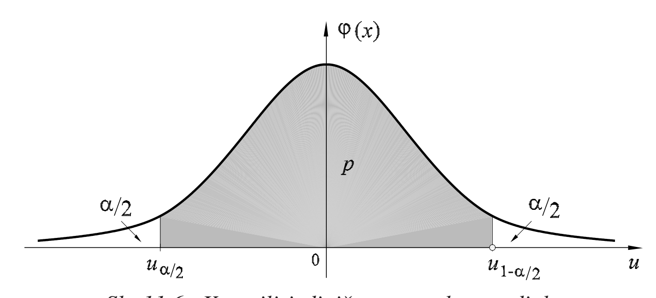
$$U = \frac{\overline{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

pripadnu jediničnu normalnu razdiobu. Neka je sad zadan p, $0 < p < 1$. Označimo $\alpha = 1-p$ i promotrimo uvjet

$$\boldsymbol{P}(|U| < c) = p.$$

Broj c, dobiven kao rješenje ove jednadžbe, dat će interval povjerenja $[-c,c]$ za varijablu U. Odaberimo za c kvantil normalne razdiobe. *Uobičajeno je taj kvantil označavati slovom u:* $c = u_{1-\alpha/2}$. Onda je

$$\boldsymbol{P}(|U| < u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha = p.$$



Sl. 11.6. Kvantili jedinične normalne razdiobe

Sad dobivamo

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < a < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

Algoritam za određivanje intervala povjerenja napisat ćemo u sljedećem obliku:

Intervali povjerenja za očekivanje normalne razdiobe, uz poznati σ^2

1. Zadaje se nivo pouzdanosti p i odredi $\alpha = 1-p$.

2. Iz tablica kvantila normalne razdiobe, odredi se kvantil $u_{1-\alpha/2}$. Najčešće vrijednosti su:

p	0.9	0.95	0.99	0.999
$u_{1-\alpha/2}$	1.645	1.960	2.576	3.291

3. Izračuna se sredina $\overline{x}$ uzorka $x_1,\ldots,x_n$.

4. Izračuna se $u_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}\left(\overline{x} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant a \leqslant \overline{x} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = p. \tag{5}$$

Primjer 11.1.

Iz populacije $\mathcal{N}(a,4)$ izvučen je uzorak

x_j	0	1	2	3	4
n_j	1	4	6	12	2

Odredi procjenu i 90%-tni interval za očekivanje a.

► Imamo $\overline{X} \sim \mathcal{N}(a, \frac{4}{25})$. Iz uzorka računamo procjenu sredine:

$$\overline{x} = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 3\cdot 12 + 4\cdot 2}{25} = 2.40.$$

Sad je $\alpha = 1-p = 0.1$. Iz tablica pročitamo vrijednost kvantila

$$u_{1-\alpha/2} = u_{0.95} = 1.645.$$

Dalje je

$$u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645\cdot\frac{2}{5} = 0.658.$$

Dakle, $\boldsymbol{P}(1.742 < a < 3.058) = 0.9$. ◄

11.2.2. Intervalna procjena za disperziju, uz poznato očekivanje a

Statistika za nepoznatu disperziju, uz poznatu vrijednost očekivanja a je

$$D^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-a}{\sigma}\right)^2.$$

Varijabla $\dfrac{X_k-a}{\sigma}$ ima jediničnu normalnu razdiobu. Kvadrat te slučajne varijable ima **gama razdiobu** s parametrima $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Zbroj kvadrata n nezavisnih jediničnih normalnih razdioba ima gama razdiobu s parametrima $(\frac{1}{2}n,\frac{1}{2})$. Tu razdiobu nazivamo **hi kvadrat razdioba** s n stupnjeva slobode. Označavamo je s χ^2_n. Njezina je gustoća

$$f_{\chi^2_n}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{1}{2}n)}x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Očekivanje i disperzija su

$$\boldsymbol{E}(\chi^2_n) = n, \qquad \boldsymbol{D}(\chi^2_n) = 2n.$$

Eksplicitna formula za nekoliko početnih vrijednosti indeksa n i graf te gustoće dani su u poglavlju §8.2.

— ◆ —

Vratimo se na početni problem. Promatramo statistiku

$$D^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k-a}{\sigma}\right)^2.$$

Prema dokazanom, slučajna varijabla $\dfrac{nD^2}{\sigma^2}$ ima hi hvadrat razdiobu s n stupnjeva slobode. Odavde možemo odrediti interval povjerenja za disperziju.

— ◆ —

Disperzija je veličina koja je uvijek pozitivna. Zato interval povjerenja možemo tražiti bilo kao jednostrani (u kojem je lijeva granica fiksna, jednaka nuli, a desna nepoznata), bilo kao dvostrani, u kojima tražimo i lijevu i desnu granicu.

Jednostrani interval povjerenja. To je interval $[0,t]$ takav da vrijedi

$$\boldsymbol{P}(\sigma^2 \leqslant t) = p,$$

za zadanu vrrijednost p (obično blisku jedinici). Krenimo od uvjeta

$$\boldsymbol{P}(\chi^2_n < x_{1-p}) = 1-p$$

i potražimo kvantil x_{1-p} za koji je ovaj uvjet ispunjen. Taj kvantil se za interesantne vrijednosti od p čita iz tablica hi kvadrat razdiobe. U tim tablicama on je najčešće označen sa $\chi^2_{n,1-p}$. Dakle, vrijedi

$$\boldsymbol{P}(\chi^2_n \geqslant \chi^2_{n,1-p}) = p$$

Varijabla $\dfrac{nD^2}{\sigma^2}$ ima χ^2_n razdiobu. Zato vrijedi

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{nD^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{n,1-p}\right) = p,$$

t.j.

$$\boldsymbol{P}\left(\sigma^2 \leqslant \frac{nD^2}{\chi^2_{n,1-p}}\right) = p.$$

Jednostrani interval povjerenja za disperziju, uz poznato očekivanje a

1. Zadaje se nivo pouzdanosti p.

2. Iz tablica kvantila hi kvadrat razdiobe s n stupnjeva slobode, odredi se odgovarajući kvantil $\chi^2_{n,1-p}$.

3. Izračuna se procjena disperzija $\widehat{d^2}$ iz uzorka $x_1,\ldots,x_n$.

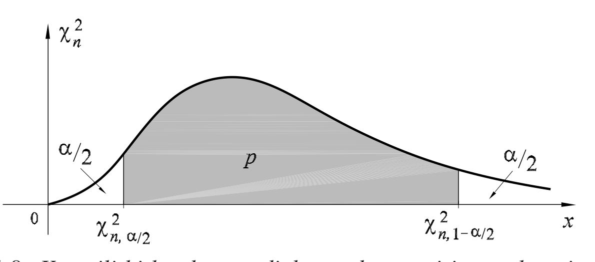
4. Izračuna se $\dfrac{n\widehat{d^2}}{\chi^2_{n,1-p}}$.

Jednostrani interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}\left(0 \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{n\widehat{d^2}}{\chi^2_{n,1-p}}\right) = p. \tag{6}$$

Dvostrani interval povjerenja. Odredimo sad dvostrani interval povjerenja za disperziju σ^2, dakle, interval $[\beta_1,\beta_2]$ sa svojstvom $\boldsymbol{P}(\beta_1 < \sigma^2 < \beta_2) = p$.

Postupit ćemo na sljedeći način.



Sl. 11.8. Kvantili hi kvadrat razdiobe za dvostrani interval povjerenja.

Označimo $\alpha = 1-p$ i odredimo kvantile $c_1 = \chi^2_{n,\alpha/2}$ i $c_2 = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$. Sad imamo

$$\boldsymbol{P}(\chi^2_n < c_1) = \alpha/2, \qquad \boldsymbol{P}(\chi^2_n < c_2) = 1-\alpha/2,$$

pa je

$$\boldsymbol{P}(c_1 \leqslant \chi^2_n \leqslant c_2) = 1-\alpha/2-\alpha/2 = 1-\alpha = p.$$

Dakle, površina ispod funkcije gustoće, a između ovih kvantila, jednaka je p.

Slučajna varijabla $\dfrac{nD^2}{\sigma^2}$ ima χ^2_n razdiobu. Tako dobivamo

$$\boldsymbol{P}(c_1 \leqslant \frac{nD^2}{\sigma^2} \leqslant c_2) = p$$

odnosno

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{nD^2}{c_2} < \sigma^2 < \frac{nD^2}{c_1}\right) = p.$$

Dvostrani interval povjerenja za disperziju, uz poznato očekivanje a

1. Zadaje se nivo pouzdanosti $p = 1-\alpha$.

2. Iz tablica kvantila hi kvadrat razdiobe s n stupnjeva slobode, odrede se kvantili $c_1 = \chi^2_{n,\alpha/2}$, i $c_2 = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$.

3. Izračuna se disperzija $\widehat{d^2}$ uzorka $x_1,\ldots,x_n$.

4. Izračunaju se $\beta_1 = \dfrac{n\widehat{d^2}}{c_2}$, $\beta_2 = \dfrac{n\widehat{d^2}}{c_1}$.

Dvostrani interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}(\beta_1 \leqslant \sigma^2 \leqslant \beta_2) = p. \tag{7}$$

11.2.3. Svojstva hi kvadrat razdioba

Sad ćemo promotriti najčešći slučaj. Za populaciju nam je poznato samo da se ravna po normalnoj razdiobi, ali nam nisu poznati niti očekivanje niti disperzija te razdiobe.

Te veličine računamo iz uzorka pomoću njihovih nepristranih statistika:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2.$$

Međutim, sada nije jednostavno objasniti koju razdiobu ima slučajna varijabla S^2. Slučajne varijable $X_k - \overline{X}$ su normalno distribuirane, zato što i X_k i $\overline{X}$ imaju normalnu razdiobu, međutim, one nisu nezavisne za različite vrijednosti od k! Vrijedi naime

$$(X_1 - \overline{X}) + \ldots + (X_n - \overline{X}) = X_1 + \ldots + X_n - n\overline{X} = 0,$$

te među njima postoji linearna zavisnost. Pokazat ćemo da $(n-1)S^2/\sigma^2$ ima χ^2-razdiobu, međutim, zbog te linearne zavisnosti među njezinim pribrojnicima, broj stupnjeva slobode će se smanjiti za jedan; bit će riječ o χ^2_{n-1} razdiobi!

Teorem 11.2.

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne s $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ razdiobom. Tada su $\overline{X}$ i S^2 nezavisne slučajne varijable! Pri tom $(n-1)S^2/\sigma^2$ ima χ^2_{n-1} razdiobu.

Dokaz. Definirajmo

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}X_n,\\ Y_2 &= c_{21}X_1 + \ldots + c_{2n}X_n,\\ &\ \vdots\\ Y_n &= c_{n1}X_1 + \ldots + c_{nn}X_n. \end{aligned}$$

Vektore $\vec{c}_k = (c_{k1}, \ldots, c_{kn})^\top$ možemo izabrati tako da budu jedinični te da $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ čine ortonormiranu bazu. Tada je matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \ldots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ c_{21} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ortogonalna.

— ◆ —

Retke ove matrice čine vektori $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$. Među njezinim svojstvima izdvojimo sljedeća

1. $A^{-1} = A^\top$. Zaista,

$$A \cdot A^\top = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^{\,\top} \\ \vdots \\ \vec{c}_n^{\,\top} \end{bmatrix} [\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n] = [\vec{c}_i^{\,\top}\vec{c}_j] = [\delta_{ij}] = I.$$

2. Po prvom svojstvu,

$$1 = \det(A^\top A) = \det(A^\top)\det(A) = \det(A)^2$$

te je $\det(A) = \pm 1$, odnosno $|\det(A)| = 1$

3. Ortogonalno preslikavanje čuva normu: ako je $\vec{y} = A\vec{x}$, tada imamo

$$\|\vec{y}\|^2 = \vec{y}^{\,\top}\vec{y} = \vec{x}^{\,\top}A^\top A\vec{x} = \vec{x}^{\,\top}\vec{x} = \|\vec{x}\|^2.$$

— ◆ —

Odredimo gustoću vektora $\vec{Y} = A\vec{X}$. Imamo

$$\begin{aligned} g(y_1, \ldots, y_n) &= f(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{1}{|\det(A)|}\\ &= f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)\\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2\Big\}. \end{aligned}$$

Transformirajmo zbroj u eksponentu, koristeći svojstvo 3 i definiciju za y_1 ::

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2 - 2a\sum_{k=1}^{n}x_k + na^2 = \sum_{k=1}^{n}y_k^2 - 2a\sqrt{n}y_1 + na^2\\ &= (y_1 - \sqrt{n}\,a)^2 + \sum_{k=2}^{n}y_k^2 \end{aligned}$$

Tako dobivamo

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{(y_1 - \sqrt{n}a)^2}{2\sigma^2}\Big\} \cdot \prod_{k=2}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{y_k^2}{2\sigma^2}\Big\}.$$

Funkcija gustoće g se faktorizira, pa su $Y_1, \ldots, Y_n$ nezavisne. Pri tom je $Y_1 \sim \mathcal{N}(a\sqrt{n}, \sigma^2)$, te $Y_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $k = 2, \ldots, n$.

Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} (n-1)S^2 &= \sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{n}X_k^2 - n(\overline{X})^2\\ &= \sum_{k=1}^{n}Y_k^2 - Y_1^2 = \sum_{k=2}^{n}Y_k^2. \end{aligned}$$

Dakle, $(n-1)S^2 = \sum_{k=2}^{n}Y_k^2$ i $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_1$ su nezavisne. Pri tom vrijedi i

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{Y_k}{\sigma}\Big)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

budući su varijable Y_k/σ, $k = 2, \ldots, n$ nezavisne s jediničnom normalnom razdiobom. ◄

11.2.4. Studentova razdioba

Neka su $X, X_1, \ldots, X_n$ nezavisne jedinične normalne varijable. Tada kažemo da slučajna varijabla

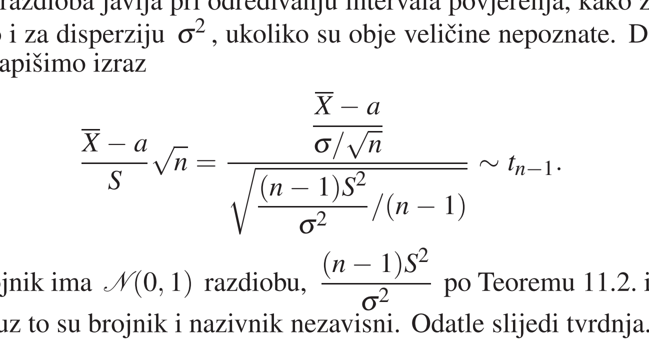
$$t := \frac{X}{\sqrt{(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n}} = \frac{X}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$$

ima **Studentovu razdiobu**[1] (ili t-**razdiobu**) s n stupnjeva slobode. Kad je to važno, navodimo stupanj slobode u indeksu razdiobe: t_n.

Gustoća t_n-razdiobe iznosi

$$f(x) = C_n\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

gdje je C_n neka konstanta normiranja.



Sl. 11.9. Graf gustoće Studentove razdiobe.

Ova se razdioba javlja pri određivanju intervala povjerenja, kako za očekivanje a, tako i za disperziju σ^2, ukoliko su obje veličine nepoznate. Da bismo to dokazali, napišimo izraz

$$\frac{\overline{X} - a}{S}\sqrt{n} = \frac{\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} \sim t_{n-1}.$$

Naime, brojnik ima $\mathcal{N}(0,1)$ razdiobu, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ po Teoremu 11.2. ima χ^2_{n-1}-razdiobu i uz to su brojnik i nazivnik nezavisni. Odatle slijedi tvrdnja.

11.2.5. Intervalne procjene za očekivanje uz nepoznatu disperziju

Intervale povjerenja za očekivanje određujemo na potpuno analogan način kao u slučaju poznate disperzije. Umjesto kvantila normalne razdiobe, koristit ćemo kvantile Studentove razdiobe. *Ti se kvantili uobičajeno označuju slovom t*. Razdioba je simetrična, pa će za određivanje intervala povjerenja biti dovoljan jedan kvantil.

Neka je $\alpha = 1 - p$ i

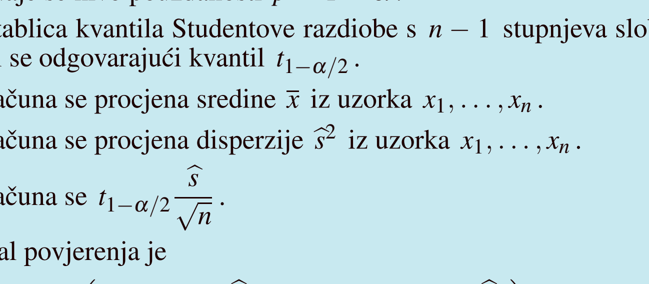
$$\boldsymbol{P}\big(|t_{n-1}| \leqslant t_{1-\alpha/2}\big) = p.$$

(S lijeve strane nejednakosti nalazi se slučajna varijabla t_{n-1}, a s desne strane kvantil $t_{1-\alpha/2}$.) Sada vrijedi

$$\boldsymbol{P}\Big(\Big|\frac{\overline{X} - a}{S}\sqrt{n}\Big| \leqslant t_{1-\alpha/2}\Big) = p$$

i odavde

$$\boldsymbol{P}\Big(\overline{X} - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant a \leqslant \overline{X} + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\Big) = p.$$



Sl. 11.10. Kvantili t_n razdiobe

Intervali povjerenja za očekivanje normalne razdiobe, uz nepoznati σ^2

1. Zadaje se nivo pouzdanosti $p = 1 - \alpha$.

2. Iz tablica kvantila Studentove razdiobe s $n-1$ stupnjeva slobode, odredi se odgovarajući kvantil $t_{1-\alpha/2}$.

3. Izračuna se procjena sredine $\overline{x}$ iz uzorka $x_1, \ldots, x_n$.

4. Izračuna se procjena disperzije $\widehat{s}^2$ iz uzorka $x_1, \ldots, x_n$.

5. Izračuna se $t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}$.

Interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}\Big(\overline{x} - t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} \leqslant a \leqslant \overline{x} + t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}\Big) = p.$$

Primjer 11.2.

Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s nepoznatim parametrima. Odredi točkaste procjene za očekivanje i disperziju, te 90%-tni interval povjerenja za očekivanje, na osnovu vrijednosti iz uzorka

x_j	110	115	120	125	130	135
n_j	2	3	6	5	2	2

► Izračunajmo sredinu:

$$\overline{x} = 120 + \frac{-20 - 15 + 25 + 20 + 30}{20} = 122.$$

Također,

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{19}(2 \cdot 12^2 + 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 13^2) = \frac{970}{19} = 51.05.$$

Odredimo interval povjerenja za matematičko očekivanje. Vrijedi $\alpha = 1 - p = 0.1$ i $1 - \alpha/2 = 0.95$.

Odgovarajući kvantil je (tablice Studentove razdiobe s 19 stupnjeva slobode):

$$t_{1-\alpha/2} = t_{0.95} = 1.729\,.$$

Odavde

$$t_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}} = 2.76\,.$$

Prema tome, 90%-tni interval povjerenja za očekivanje je 122 ± 2.76.

— ◆ —

Pretpostavimo za trenutak da je disperzija populacije bila poznata *te da se podudara s ovom izračunatom iz uzorka*: $\sigma^2 = 51.05$. U tom bismo slučaju kvantil $x_{1-\alpha/2}$ dobili iz tablica normalne razdiobe:

$$u_{0.95} = 1.645$$

i granica intervala povjerenja bila bi određena brojem

$$u_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.63\,.$$

U ovom bi slučaju interval povjerenja bio 122 ± 2.63.

Interval povjerenja uz nepoznatu disperziju uvijek je širi u odnosu na slučaj poznate disperzije, jer nam je poznato manje informacija o razdiobi populacije. ◄

11.2.6. Intervalne procjene za disperziju uz nepoznato očekivanje

Intervale povjerenja za disperziju određujemo iz statistike

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2.$$

U Teoremu 11.2 je dokazano da slučajna varijabla $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ima hi kvadrat razdiobu s $n-1$ stupnjeva slobode.

Intervali povjerenja za disperziju normalne razdiobe, uz nepoznato očekivan

1. Zadaje se nivo pouzdanosti p i odredi $\alpha = 1 - p$.

2a. Za jednostrani interval, iz tablica kvantila hi kvadrat razdiobe s $n-1$ stupnjeva slobode, odredi se odgovarajući kvantil $c = \chi^2_{n-1,\alpha}$.

2b. Za dvostrani interval, iz tablica kvantila hi kvadrat razdiobe s $n-1$ stupnjeva slobode, odrede se kvantili $c_1 = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$, i $c_2 = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$.

3. Izračuna nepristrana procjena disperzije $\widehat{s}^2$ uzorka $x_1, \ldots, x_n$.

4a. Izračuna se $\beta = \frac{(n-1)\widehat{s}^2}{c}$.

4b. Izračunaju se $\beta_1 = \frac{(n-1)\widehat{s}^2}{c_2}$, $\beta_2 = \frac{(n-1)\widehat{s}^2}{c_1}$.

Jednostrani interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}(0 \leqslant \sigma^2 \leqslant \beta) = p.$$

Dvostrani interval povjerenja je

$$\boldsymbol{P}(\beta_1 \leqslant \sigma^2 \leqslant \beta_2) = p.$$

11.3. Intervalne procjene za razdiobe različite od normalne

Ukoliko razdioba populacije X nije normalna, tada je praktički nemoguće utvrditi točnu distribuciju za statistike $\overline{X}$ i S^2. Ipak, tehnike opisane u ovom poglavlju mogu se primjeniti, ukoliko uzorak ima dovoljnu dimenziju.

Tu činjenicu treba zahvaliti *centralnom graničnom teoremu*. Prisjetimo se iskaza tog teorema, danog u §9.7:

Teorem 11.3.

Neka je (X_n) niz identički distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabla s očekivanjem a i disperzijom σ^2. Označimo $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$. Onda vrijedi

$$\frac{Z_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1).$$

To znači da se upute iz ovog poglavlja mogu primjenjivati i u ovom slučaju, s tim da je točnost računa to bolja što je ova aproksimacija točnija.

Iskustvo pokazuje da je prikladna minimalna veličina uzorka $n = 20$ za interval povjerenja za očekivanje, te $n = 50$ za interval povjerenja za varijancu.

Primjer 11.3.

Neka je veličina izmjerena 25 puta mjernim instrumentom koji nema sistematske pogreške, a slučajna pogreška je normalna varijabla s odstupanjem $\sigma = 10\ \mu\text{m}$. Srednja vrijednost uzorka mjerene veličine je $\overline{x} = 100\ \mu\text{m}$. Odredi interval u kojem se s vjerojatnošću 0.99 nalazi ta veličina.

► Prirodno je pretpostaviti da pogreška mjerenja ima normalnu razdiobu, ali je volumen uzorka dovoljno velik da račun neće ovisiti o tome.

Ovdje je $\alpha = 1 - p = 1 - 0.99 = 0.01$ pa je dovoljno odrediti kvantil

$$u_{1-\alpha/2} = u_{0.995} = 2.58\,.$$

Sada računamo

$$u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{10}{5} = 5.16\,.$$

99%-tni interval povjerenja je $[94.84, 105.16]$. ◄

11.3.1. Interval povjerenja za vjerojatnost događaja

U Primjeru 10.7 odredili smo točkastu procjenu za vjerojatnost p nekog događaja A. Ovaj pokus prati indikatorska slučajna varijabla

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Pokazali smo da je veličina

$$\widehat{p} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{m}{n}$$

nepristrana procjena za vjerojatnost p. Ovdje je m broj realizacija događaja A u n ponavljanja pokusa.

Odredimo sad *interval povjerenja* za vjerojatnost p.

Slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu $\mathscr{B}(1,p)$ pa zbroj n nezavisnih kopija te varijable ima također binomnu razdiobu:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$

Ovu razdiobu možemo aproksimirati normalnom razdiobom, s parametrima $a = np$, $\sigma^2 = npq$. Zato je

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \approx \mathscr{N}\Big(p, \frac{pq}{n}\Big).$$

Definirajmo sad statistiku

$$\Theta = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{pq}}(\widehat{p} - p).$$

Ona ima približno jediničnu normalnu razdiobu. Sad možemo odrediti interval povjerenja reda $1 - \alpha$ za tu razdiobu:

$$\boldsymbol{P}(-u_{1-\alpha/2} < \Theta < u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Radi jednostavnosti zapisivanja u nastavku, označit ćemo ovaj kvantil s $c = u_{1-\alpha/2}$. Dakle:

$$\boldsymbol{P}\Big(-c < \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(\widehat{p} - p) < c\Big) = 1 - \alpha.$$

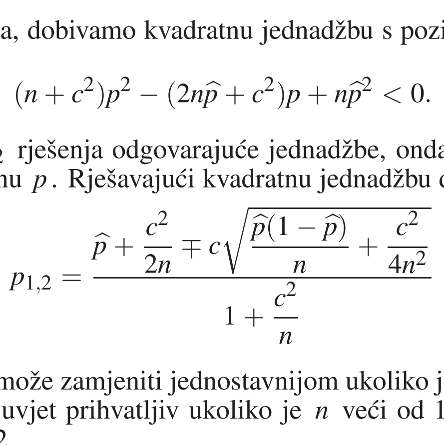
Da bismo odavde dobili interval povjerenja za vjerojatnost p, moramo ove nejednakosti razriješiti po p:

$$\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\ |\widehat{p} - p| < c.$$

Nejednakost ekvivalentna ovoj je

$$n(\widehat{p} - p)^2 < c^2 p(1-p).$$

Sve točke u ravnini koje zadovoljavaju ovu nejednakost leže unutar elipse nacrtane na sljedećoj slici. Primjetite da ta elipsa prolazi točkama $(0,0)$ i $(1,1)$.



Sl. 11.11. Interval povjerenja za vjerojatnost p, u ovisnosti o sredini $\overline{x}$.

Nakon sređivanja, dobivamo kvadratnu jednadžbu s pozitivnim vodećim koeficijentom:

$$(n + c^2)p^2 - (2n\widehat{p} + c^2)p + n\widehat{p}^2 < 0.$$

Ako su $p_1 < p_2$ rješenja odgovarajuće jednadžbe, onda je $[p_1, p_2]$ interval povjerenja za veličinu p. Rješavajući kvadratnu jednadžbu dobivamo

$$p_{1,2} = \frac{\widehat{p} + \dfrac{c^2}{2n} \mp c\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n} + \dfrac{c^2}{4n^2}}}{1 + \dfrac{c^2}{n}} \tag{8}$$

Ova se formula može zamjeniti jednostavnijom ukoliko je c^2 zanemariv prema broju n. Ta je uvjet prihvatljiv ukoliko je n veći od 100, jer za kvantil c obično vrijedi $c \leqslant 2$.

Zanemarimo li članove u prethodnom izrazu u kojima se pribraja član c^2, dobivamo jednostavni izraz

$$p_{1,2} = \widehat{p} \mp c\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.$$

Intervalna procjena za vjerojatnost p događaja

Procjena vjerojatnosti p događaja A računa se pomoću relativne frekvencije pojavljivanja tog događaja:

$$\widehat{p} = \frac{m}{n}.$$

Interval povjerenja za vjerojatnost reda $1 - \alpha$ jest

$$\boldsymbol{P}(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = 1 - \alpha$$

pri čemu se rubovi računaju formulom

$$p_{1,2} = \widehat{p} \mp u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}. \tag{9}$$

Veća se točnost postiže korištenjem formule (8).

Primjer 11.4.

Anketa rađena na uzorku od 300 osoba utvrdila je da 210 među njima ne podržava trenutnu vladinu mirovinsku politiku. Odredite 90%-tni interval povjerenja za postotak populacije koja ne podržava tu politiku.

► Vjerojatnost izračunata iz uzorka je

$$\widehat{p} = \frac{210}{300} = 0.7$$

što daje točkovnu procjenu od 70%. Interval povjerenja računat ćemo formulom (9). Odgovarajući kvantil je $u_{1-\alpha/2} = u_{0.95} = 1.64$ pa dobivamo

$$p_{1,2} = 0.7 \mp 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{300}} = 0.7 \mp 0.04339\,.$$

Dakle, 90 %-tni interval povjerenja je $[0.657, 0.743]$.

Da smo računali prema formulama (8) dobili bismo interval $[0.655, 0.741]$. ◄

Primjer 11.5.

Deset na sreću odabranih studenata prve godine rješavalo je probni test i šestorica su ga položila. Koliki je postotak svih studenata te godine koji bi s pouzdanošću od 95% rješilo taj test?

► Uzorak je premalog volumena da bismo koristili jednostavniju formulu (9). Procjena postotka:

$$\widehat{p} = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

Za kvantil vrijedi $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ pa je $1 - \alpha/2 = 0.975$ i $u_{0.975} = 1.96$. Sad dobivamo, prema formuli (8)

$$p_{1,2} = 0.57225 \mp 0.25958$$

pa je traženi interval $[0.313, 0.832]$.

Računajući prema (9) dobili bismo interval $[0.296, 0.904]$.

Vidimo da su intervalne procjene vrlo neprecizne za malene volumene uzorka. ◄

11.3.2. Intervalna procjena parametra eksponencijalne razdiobe

Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu, $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. Njezina je gustoća

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Znamo da vrijedi

$$\boldsymbol{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \boldsymbol{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Pretpostavimo da je parametar λ nepoznat. Pokazali smo da je njegova točkasta procjena

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Odredimo sad interval povjerenja za tu procjenu.

U ovom slučaju možemo odrediti točnu razdiobu za statistiku $\overline{X}$. Naime, slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne, s eksponencijalnom razdiobom $\mathscr{E}(\lambda)$, zato zbroj $X_1 + \ldots + X_n$ ima gama razdiobu s parametrima n i λ. (Vidi §8.2.) Tu razdiobu nazivamo **Erlangova razdioba**, a njezina je gustoća

$$h(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Zato sredina $\overline{X}$ ima gustoću

$$g(x) = \frac{n^n \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda n x}, \qquad x > 0.$$

Teorijski, odavde bismo mogli izračunati interval povjerenja, na temelju poznate realizacije $x = \overline{x}$.

Ovakav bi račun imao smisla za maleni volumen uzorka. Međutim, ako je n dovoljno velik, mnogo je jednostavnije aproksimirati zbroj $X_1 + \ldots + X_n$ normalnom razdiobom s parametrima $\dfrac{n}{\lambda}$ i $\dfrac{n}{\lambda^2}$. Tako sredina ima približno razdiobu

$$\overline{X} \approx \mathscr{N}\Big(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2}\Big).$$

Neka je p zadani nivo pouzdanosti, $\alpha = 1 - p$ i $u_{1-\alpha/2}$ kvantil normalne razdiobe. Onda je

$$\boldsymbol{P}\Big(\frac{1}{\lambda} - u_{1-\alpha/2}\frac{1}{\lambda\sqrt{n}} < \overline{x} < \frac{1}{\lambda} + u_{1-\alpha/2}\frac{1}{\lambda\sqrt{n}}\Big) = p.$$

Odavde slijedi

$$\boldsymbol{P}\Big(\frac{1 - u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}}{\overline{x}} < \lambda < \frac{1 + u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}}{\overline{x}}\Big) = p.$$

Primjer 11.6.

Trajanje žarne niti je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Uzorak od 100 žarnih niti je promatran, i on je dao srednju vrijednost 260 sati. Koliki je 95%-tni interval povjerenja za očekivano vrijeme života žarne niti?

► Ovdje je $\alpha = 1 - p = 0.05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$. To nam daje sljedeći interval povjerenja reda 0.95:

$$\frac{1 - 1.96/10}{260} < \lambda < \frac{1 + 1.96/10}{260}$$
$$0.00309 < \lambda < 0.00460$$

Zato za očekivanje vrijedi $217.4 < \boldsymbol{E}(X) < 323.4$, s vjerojatnošću 0.954. ◄

11.3.2. Interval povjerenja za parametar Poissonove razdiobe

Neka slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s nepoznatim parametrom λ:

$$\boldsymbol{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Znamo da vrijedi $\boldsymbol{E}(X) = \lambda$, $\boldsymbol{D}(X) = \lambda$. Zato je razdioba sredine $\overline{X}$ za veliki broj n približno normalna, $\overline{X} \sim \mathscr{N}\Big(\lambda, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$. Odatle slijedi

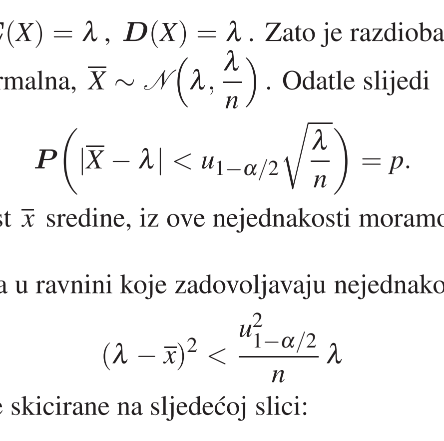
$$\boldsymbol{P}\Big(|\overline{X} - \lambda| < u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\Big) = p.$$

Za zadanu vrijednost $\overline{x}$ sredine, iz ove nejednakosti moramo odrediti interval za λ.

Skup svih točaka u ravnini koje zadovoljavaju nejednakost

$$(\lambda - \overline{x})^2 < \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n}\lambda \tag{10}$$

leže unutar parabole skicirane na sljedećoj slici:



Sl. 11.12. Interval povjerenja za parametar Poissonove razdiobe.

Za sadanu vrijednost $\overline{x}$, rubovi intervala λ_1 i λ_2 odrede se rješavanjem kvadratne nejednadžbe (10).

Primjer 11.7.

Broj poziva na centrali je Poissonova slučajna varijabla. Bilježeni su pozivi u svakoj minuti jednog sata i dobivena je srednja vrijednost $\overline{x} = 5.8$. Odredimo 95%-tni interval povjerenja za parametar λ.

► Volumen uzorka je dovoljno velik i aproksimacija normalnom razdiobom će biti odlična. Računamo

$$\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{n} = 0.064$$

pa trebamo riješiti kvadratnu nejednadžbu

$$(\lambda - 5.8)^2 < 0.064\,\lambda.$$

Njezina su rješenja $\lambda_{1,2} = 5.832 \mp 0.61$. Tako dobivamo interval povjerenja $5.22 < \lambda < 6.44$. ◄