1.

Vjerojatnost

Sadržaj poglavlja

Temeljni pojmovi koje želimo opisati u ovom poglavlju su **algebra događaja** i **vjerojatnost**.

Najjednostavnije je pojam događaja dovesti u vezu s **stohastičkim pokusom**. Tako nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Taj ishod ovisi o nekim nepredvidivim okolnostima i stoga je slučajan. Novčić bačen uvis pada na jednu od svoje dvije strane, na koju — unaprijed ne možemo znati. Vrijeme ispravnog rada nekog uređaja ne može se unaprijed predvidjeti.

Ishod pokusa zovemo **elementarni događaj**. Njih u nekom pokusu može biti konačno, ali i beskonačno mnogo. Kocka će pasti na jednu od šest svojih strana, a biranje na sreću jedne točke unutar, recimo, jediničnog kruga ima kao mogući ishod beskonačno mnogo elementarnih događaja.

Pri svakom se pokusu mogu ostvariti ili ne različiti događaji. Kocka može, na primjer, pasti na paran ili na neparan broj. Hoće li se dogoditi neki događaj možemo predvidjeti pridružujući mu određenu *vjerojatnost*. Što je događaj izvjesniji, njegova će vjerojatnost biti bliža jedinici. Malo vjerojatni događaji imat će vjerojatnost blisku nuli.

Račun s događajima i vjerojatnostima mora se pokoravati izvjesnim zakonima koje ćemo upoznati u ovom poglavlju.

1.1. Algebra događaja

Elementarne ćemo događaje označavati s ω. Skup svih elementarnih događaja označavamo s Ω. Skup Ω i sam je događaj, on se ostvaruje pri svakom ishodu pokusa. Nazivamo ga stoga **sigurni događaj**. Njegova je suprotnost **nemoguć događaj**, koji se pri realizaciji pokusa nikad ne može ostvariti. Označavamo ga simbolom $\emptyset$. Različite događaje vezane uz neki pokus označavat ćemo velikim slovima latinične abecede: A, B, $C\dots$. Oni se sastoje od izvjesnog broja elementarnih događaja. To su dakle podskupovi od Ω.

Primjer 1.1.

Bacamo jednu kocku kojoj su strane označene brojevima od 1 do 6. Odredimo elementarne događaje i skup Ω.

► Elementarni su događaji brojevi na koje kocka može pasti:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \dots, \quad \omega_6 = 6.$$

Skup svih elementarnih događaja je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

U pokusu koji ima samo konačno mnogo ishoda događaj je bilo koji podskup od Ω. Evo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je parni broj}\} = \{2,4,6\}, \\ B &= \{\text{pao je broj veći od } 2\} = \{3,4,5,6\}, \\ C &= \{\text{pao je parni broj manji od } 5\} = \{2,4\} \end{aligned}$$

i slično. Različitih događaja postoji $2^6 = 64$, jer toliko skup Ω ima podskupova. Među njima su nemoguć dogadaja $\emptyset$, 6 jednočlanih (elementarnih) događaja, 15 događaja od po dva elemenentarna, 20 događaja s tri elementarna itd. ◄

Primjer 1.2.

Novčić je bačen tri puta. U svakom bacanju bilježimo je li se pojavilo pismo (P) ili glava (G). Odredimo Ω, elementarne događaje te nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus.

► Elementarnih događaja ima osam. To su

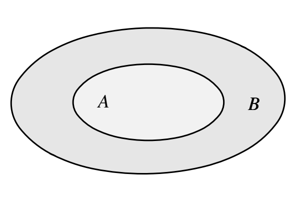
$$\begin{aligned} &\omega_1 = \mathrm{GGG}, && \omega_2 = \mathrm{GGP}, && \omega_3 = \mathrm{GPG}, && \omega_4 = \mathrm{PGG}, \\ &\omega_5 = \mathrm{GPP}, && \omega_6 = \mathrm{PGP}, && \omega_7 = \mathrm{PPG}, && \omega_8 = \mathrm{PPP}, \end{aligned}$$

(poredak nabrajanja nije važan). Ovdje smo, kratkoće radi, s GGP označili uređenu trojku (G, G, P) i slično za ostale elementarne događaje. Siguran događaj sastoji se od gornjih osam elementarnih. Evo nekoliko događaja vezanih uz ovaj pokus (ukupan broj događaja je $2^8 = 256$):

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pismo se pojavilo jednom}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \\ B &= \{\text{pismo se pojavilo u drugom bacanju}\} = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}, \\ C &= \{\text{pojavilo se barem jedno pismo i barem} \\ &\qquad \text{jedna glava}\} = \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_7\}, \\ D &= \{\text{pismo se pojavilo dvaput za redom}\} = \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}. \end{aligned}$$ ◄

1.1.1. Uspoređivanje događaja

Kažemo da događaj A **povlači** događaj B ako iz realizacije događaja A slijedi realizacija događaja B. To znači da B sadrži sve elementarne događaje koji ulaze u događaj A. Pišemo $A \subseteq B$, u skladu s zapisom iz teorije skupova. Koristimo također i zapis $A \implies B$. Govorimo još: A je specijalni slučaj događaja B, B slijedi iz A, A je sadržan u B, A je dovoljan uvjet za B, B je nuždan uvjet za A.



Sl. 1.1. Događaj A povlači događaj B

Primjer 1.3.

Bacamo dvije kocke. Označimo događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{oba broja veća su od } 4\}, \\ B &= \{\text{zbroj brojeva na kockama veći je od } 8\}. \end{aligned}$$

► Vrijedi $A \implies B$, jer je zbroj brojeva koji su veći od 4 sigurno veći od 8. Obrat nije ispunjen, jer zbroj brojeva može biti veći od 8 i kad jedna kocka padne na, recimo, 3, a druga na 6. Tad se ostvario B, ali se nije ostvario A. ◄

Primjer 1.4.

Bacamo dvije kocke. Označimo događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{zbroj brojeva na kockama veći je od } 8\}, \\ B &= \{\text{oba broja veća su od } 2\}. \end{aligned}$$

► Sad vrijedi $A \implies B$. Naime, zbroj brojeva ne može biti veći od 8 ako oba broja nisu veća od 2, jer inače najveći zbroj iznosi $2 + 6 = 8$. Vezu ovih događaja možemo izraziti još ovako:

• Da bi zbroj brojeva bio veći od 8, oba broja nužno moraju biti veća od 2 (B je nuždan uvjet za A).

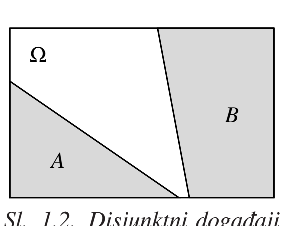
• Želimo li da oba broja na kocki budu veća od 2, dovoljno je da njihov zbroj bude veći od 8 (A je dovoljan uvjet za B). ◄

— ◆ —

Ukoliko vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda kažemo da su A i B **ekvivalentni** ili **jednaki** i pišemo $A = B$. Ekvivalentni događaji sastoje se od istih elementarnih događaja.

Suprotnost ovoj situaciji je ona u kojoj A i B nemaju zajedničkih elementarnih događaja.

Događaji A i B su **disjunktni**, ako se istovremeno ne mogu ostvariti i jedan i drugi[1]. Kažemo još da se A i B **međusobno isključuju**. Tako na primjer, pri bacanju kocke su događaji $A = \{\text{pao je paran broj}\}$ i $B = \{\text{pao je broj } 3\}$ disjunktni.



Sl. 1.2. Disjunktni događaji

Primjer 1.5.

Novčić bacamo četiri puta. Istaknimo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pojavila su se točno tri pisma}\}, \\ B &= \{\text{pojavile su se najviše dvije glave}\}, \\ C &= \{\text{pojavila se točno jedna glava}\}, \\ D &= \{\text{ostvario se niz PGGP}\}. \end{aligned}$$

koji od ovih događaja povlače neki drugi, koji su ekvivalentni, a koji se međusobno isključuju?

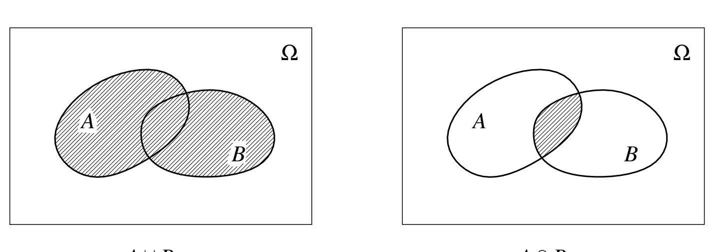
1.1.2. Operacije s događajima

Neka su A, B događaji. Pomoću njih možemo načiniti nove događaje:

Unija i presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario *barem jedan* od događaja A, B naziva se **unija** ili **zbroj** (**suma**) događaja i označava s $A \cup B$, $A + B$, A ili B.

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila *oba* događaja A i B naziva se **presjek** ili **umnožak** (**produkt**) događaja i označava s $A \cap B$, AB, A i B.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$

Sl. 1.3. Unija i presjek dvaju događaja

Primjer 1.6.

Bacamo jednu kocku. Istaknimo događaje

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pao je parni broj}\}, \\ B &= \{\text{pao je broj veći od } 2\}. \end{aligned}$$

Onda je

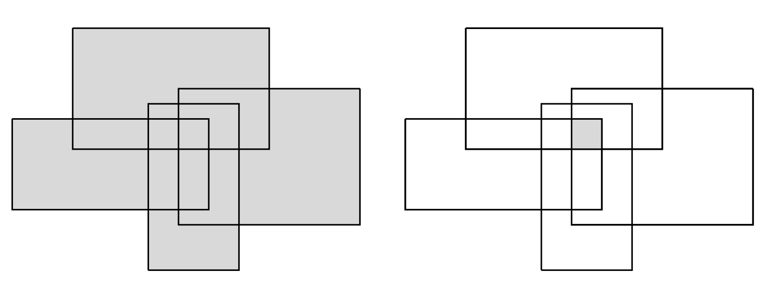
$$\begin{aligned} A \cup B &= \{\text{pao je parni broj ili broj veći od } 2\} \\ &= \{\text{pao je broj veći od } 1\} = \{2,3,4,5,6\}, \\ A \cap B &= \{\text{pao je parni broj veći od } 2\} = \{4,6\}. \end{aligned}$$

— ◆ —

Operacije unije i presjeka mogu se definirati i za nekoliko događaja. Unija n događaja je događaj

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A_1, \ldots A_n$.



$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ $\qquad$ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Sl. 1.4. Unija (lijevo) i presjek (desno) više događaja

Presjek n događaja je događaj

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

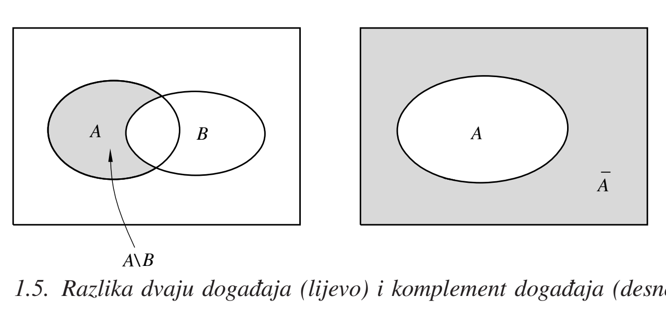
koji se ostvario ako se ostvario svaki od događaja $A_1, \ldots, A_n$.

— ◆ —

Razlika događaja. Komplement događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvari događaj A, a da se ne ostvari događaj B, nazivamo **razlika događaja** A i B i označavamo s $A \setminus B$, $A - B$.

Događaj $\Omega \setminus A$ nazivamo **komplementom** ili **suprotnim događajem** događaja A. On se ostvaruje ako i samo ako se A nije ostvario. Označavamo ga s $\overline{A}$ ili s A^c.



Sl. 1.5. Razlika dvaju događaja (lijevo) i komplement događaja (desno)

Uvjerite se da vrijedi $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = A$.

— ◆ —

Primjer 1.7.

Što se može zaključiti o događajima A, B, C za koje vrijedi

1. $ABC = A$; $\quad$ **2.** $A + B = A$; $\quad$ **3.** $A + B + C = A$;
4. $A + B = \overline{A}$; $\quad$ **5.** $A + B = AB$; $\quad$ **6.** $AB = \overline{A}$?

► (Skiciraj gornje situacije Euler–Vennovim dijagramima).

1. $A \subseteq B$ i $A \subseteq C$ $\quad$ **2.** $B \subseteq A$
3. $B \subseteq A$ i $C \subseteq A$ $\quad$ **4.** $A = \emptyset$, $B = \Omega$
5. $A = B$ $\quad$ **6.** $A = \Omega$, $B = \emptyset$. ◄

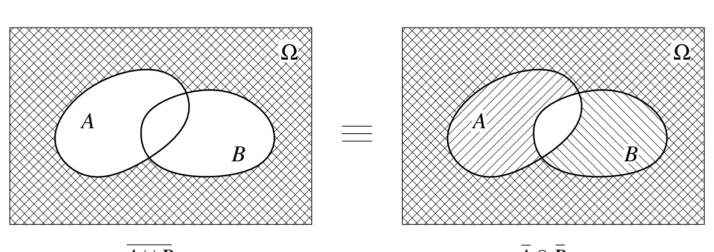
1.1.3. De Morganovi zakoni

Veza između operacija komplementiranja, unije i presjeka iskazana je u sljedećim formulama:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{2}$$

Te formule nazivamo **de Morganovi zakoni**.



$\overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\bar{A} \cap \bar{B}$

Sl. 1.6. De Morganovi zakoni

Dokažimo (1):

$$\begin{aligned} \omega \in \overline{A \cup B} &\iff \omega \notin A \cup B \iff \omega \notin A \text{ i } \omega \notin B \\ &\iff \omega \in \overline{A} \text{ i } \omega \in \overline{B} \iff \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Drugu formulu možemo pokazati na sličan način. Međutim, korisno je vidjeti da ona slijedi iz prve formule. Naime, kako za svaki događaj vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$, možemo računati ovako

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \text{ po (1) } = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

te je

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Primjer 1.8.

De Morganove zakone možemo ilustrirati koristeći se jednostavnim modelima serijskog i paralelnog spoja.

1. Serijski spoj. Neka u serijskom spoju dviju sklopki događaj A označava da je prva sklopka isključena, a događaj B da je isključena druga sklopka.

Veza između točaka 1 i 2 neće postojati ako se ostvari barem jedan od događaja A ili B:

$$\{\text{ne postoji veza}\} = A \cup B.$$

Veza između tih točaka postojat će ako se nije ostvario niti događaj A, niti događaj B (nema prekida niti na jednoj sklopki):

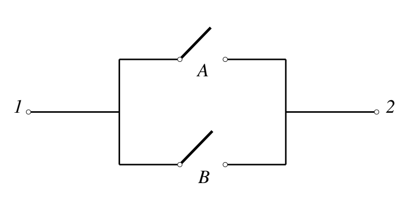
$$\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ova su dva događaja komplementarna. Zato vrijedi

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Dobili smo prvu de Morganovu formulu.

2. Paralelni spoj. Neka su dvije sklopke spojene u paralelnom spoju:



Onda vrijedi:

$$\begin{aligned} &\{\text{ne postoji veza}\} = A \cap B, \\ &\{\text{postoji veza}\} = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}. \end{aligned}$$ ◄

— ◆ —

De Morganovi zakoni poopćavaju se na uniju i presjek n događaja:

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} &= \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n, \\ \overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} &= \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n. \end{aligned}$$

Ilustrirajte ove formule pomoću serijskog i paralelnog spoja n sklopki.

1.1.4. Algebra događaja

Dosadašnji pristup događajima i operacijama zasnivao se na intuiciji. Tako smo, na primjer, prešutno podrazumjevali da su presjek i unija dvaju događaja ponovo događaji. U strogo definiranoj matematičkoj teoriji ovi pojmovi moraju biti vrlo precizno definirani. To je nužno da bi se izbjegli mogući paradoksi unutar same teorije. Tako na primjer, potpuno je jasno da su događaji podskupovi skupa Ω. Međutim, obratna tvrdnja: svaki podskup od Ω je događaj, nije uvijek istinita! Općenito, postojat će situacije kad događaji neće biti svi podskupovi od Ω.

Da izbjegnemo moguće paradokse, događaje ćemo definirati kao elemente algebre događaja:

Algebra događaja

Algebra događaja je svaka familija $\mathscr{F}$ podskupova od Ω na kojoj su definirane **binarna operacija zbrajanja** $+ : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ i **unarna operacija komplementiranja** sa svojstvima

1) $\Omega \in \mathscr{F}$, $\emptyset \in \mathscr{F}$,
2) $A \in \mathscr{F} \implies \overline{A} \in \mathscr{F}$,
3) $A, B \in \mathscr{F} \implies A + B \in \mathscr{F}$.

Elemente algebre $\mathscr{F}$ zovemo **događaji**.

Primijetimo da je bilo dovoljno zahtijevati samo $\Omega \in \mathscr{F}$, jer je $\emptyset = \overline{\Omega}$ pa prema svojstvu **2)** on također pripada algebri $\mathscr{F}$.

Što je s umnoškom događaja? Ako su A i B događaji, onda $\overline{A}$ i $\overline{B}$ pripadaju algebri $\mathscr{F}$, pa toj algebri pripada i njihov zbroj $\overline{A} + \overline{B}$. Konačno je

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}} \in \mathscr{F}.$$

Dakle, umnožak događaja ponovo je događaj.

Isto vrijedi i za **razliku** dvaju događaja, jer za $A, B \in \mathscr{F}$ vrijedi

$$A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathscr{F}.$$

1.1.5. Booleova algebra

U mnogim se primjenama koristi struktura sastavljena od familije $\mathscr{F}$ dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$, unarne operacije komplementiranja koja zadovoljava sljedećih devet svojstava:

1)	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
2)	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3)	$\emptyset + A = A$	$\Omega \cdot A = A$
4)	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
5)	$(\forall A \in \mathscr{F})(\exists \overline{A} \in \mathscr{F})\ A + \overline{A} = \Omega,\ A \cdot \overline{A} = \emptyset,$	

gdje su Ω i $\emptyset$ dva istaknuta elementa. Takvu familiju nazivamo **Booleova algebra**.

Operacije $+$ i $\cdot$ mogu biti definirane na različite načine. Ako su to operacije unije i presjeka, a elementi od $\mathscr{F}$ podskupovi, zaključujemo da je algebra događaja primjer Booleove algebre.

Primjer 1.9.

Pokaži da u svakoj Booleovoj algebri vrijede relacije

1. $A + AB = A$, $\quad$ **2.** $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$,
3. $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}) = \emptyset$, $\quad$ **4.** $A + AB + BC + \overline{A}C = A + C$,
5. $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

►

1. $A + AB = A$ jer je $AB \subseteq A$, ili

$A + AB = AA + AB = A(A + B) = A$, jer je $A \subseteq A + B$, ili

$A + AB = (A + A)(A + B) = A(A + B) = A$.

2. Komplementiranjem relacije $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

3. $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B}) = (A\overline{A} + B)(A\overline{A} + \overline{B}) = B\overline{B} = \emptyset$.

4. $A + AB + BC + \overline{A}C = A + BC + \overline{A}C + AC = A + BC + (\overline{A} + A)C = A + BC + C = A + C$.

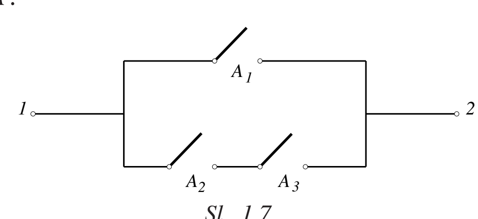
5. $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{A}(B + \overline{B}) + (A + \overline{A})\overline{B} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$. ◄

Primjer 1.10.

Uređaj je prikazan shemom na slici. Neka događaj A_i označava prekid na dijelu i, $i = 1, 2, 3$. Odredi izraz za događaj

$$A = \{\text{uređaj je prestao s radom}\},$$

kao i za događaj $\overline{A}$.



Sl. 1.7.

► Uređaj prestaje s radom ako se ostvari događaj A_1 i barem jedan od događaja A_2, A_3. Dakle,

$$A = A_1(A_2 + A_3)$$

i po de Morganovim formulama

$$\overline{A} = \overline{A_1(A_2 + A_3)} = \overline{A}_1 + \overline{A_2 + A_3} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3.$$ ◄

1.2. Vjerojatnost

Vjerojatnost

Vjerojatnost je preslikavanje $\boldsymbol{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathscr{F}$, koje ima svojstva

1) $\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$, $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$ (**normiranost**),

2) ako je $A \subseteq B$, onda vrijedi $\boldsymbol{P}(A) \leqslant \boldsymbol{P}(B)$ (**monotonost**),

3) ako su A i B disjunktni događaji, onda je $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$ (**aditivnost**).

Broj $\boldsymbol{P}(A)$ nazivamo **vjerojatnost događaja** A.

1.2.1. Svojstva vjerojatnosti

Izvedimo neka dodatna svojstva vjerojatnosti.

Neka je A po volji odabran događaj, a $\overline{A}$ njegov komplement. Onda vrijedi $A \cup \overline{A} = \Omega$ i pritom su A i $\overline{A}$ disjunktni. Zato, po svojstvima normiranosti i aditivnosti vrijedi

$$1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(A \cup \overline{A}) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\overline{A}),$$

te je $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$. Time smo pokazali:

Teorem 1.1. Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$.

— ◆ —

Pokažimo sad kako se računa vjerojatnost unije u slučaju kad A i B nisu disjunktni. Presjek dvaju događaja ovdje ćemo pisati kao umnožak, dakle bez znaka $\cap$.

Teorem 1.2. Vjerojatnost unije

Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

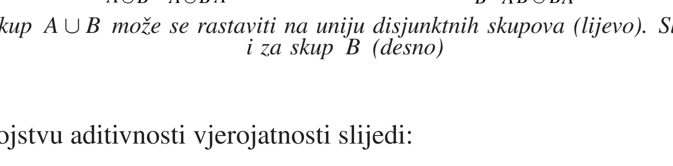
Dokaz. Prikažimo događaj $A \cup B$ u obliku unije dvaju disjunktnih događaja:

$$A \cup B = A \cup (B\overline{A})$$

(vidi sliku 1.8). Slično tome, B možemo rastaviti ovako

$$B = AB \cup B\overline{A}$$

i ponovo su događaji s desna disjunktni.



$A \cup B = A \cup B\overline{A}$ $\qquad$ $B = AB \cup B\overline{A}$

Sl. 1.8. Skup $A \cup B$ može se rastaviti na uniju disjunktnih skupova (lijevo). Slično vrijedi i za skup B (desno)

Po svojstvu aditivnosti vjerojatnosti slijedi:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}),$$
$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(AB) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}).$$

Oduzimanjem dobivamo traženu formulu:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) - \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Primjer 1.11.

Neka su A i B događaji, $\boldsymbol{P}(A) = 0.4$, $\boldsymbol{P}(B) = 0.5$, $\boldsymbol{P}(AB) = 0.2$. Izračunaj $\boldsymbol{P}(A+B)$, $\boldsymbol{P}(\overline{A})$, $\boldsymbol{P}(\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}+\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(A\overline{B})$, $\boldsymbol{P}(\overline{A}B)$.

►

$$\boldsymbol{P}(A+B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.7$$
$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A) = 0.6$$
$$\boldsymbol{P}(\overline{B}) = 1 - \boldsymbol{P}(B) = 0.5$$
$$\boldsymbol{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{A+B}) = 1 - \boldsymbol{P}(A+B) = 0.3$$
$$\boldsymbol{P}(\overline{A}+\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{AB}) = 1 - \boldsymbol{P}(AB) = 0.8$$
$$\boldsymbol{P}(A\overline{B}) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.2$$
$$\boldsymbol{P}(\overline{A}B) = \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB) = 0.3. \ ◄$$

1.2.2. Konačni vjerojatnosni prostor

Vjerojatnosni prostor Ω, koji posjeduje samo konačno mnogo elementarnih događaja nazivamo **konačni vjerojatnosni prostor**. Označimo njegove elemente, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$. Događaj u ovakvu prostoru je *svaki* podskup od Ω. Vjerojatnost bilo kojeg događaja moći ćemo odrediti ako znamo vjerojatnosti elementarnih događaja, tj. ako poznajemo brojeve

$$p_1 = \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}),$$
$$\vdots$$
$$p_N = \boldsymbol{P}(\{\omega_N\}).$$

Ovi brojevi imaju svojstvo

$$p_1 > 0, \ldots, p_N > 0, \quad p_1 + \ldots + p_N = 1.$$

Zaista, kako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, a elementarni događaji su međusobno disjunktni, to je $1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}) + \ldots + \boldsymbol{P}(\{\omega_N\})$.

Neka je $A \in \mathscr{F}$ bilo koji događaj. On se sastoji od nekoliko elementarnih događaja:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_M}\}.$$

Vjerojatnost događaja A računamo tako da zbrojimo vjerojatnosti tih elementarnih događaja

$$\boldsymbol{P}(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_M}.$$

Primjer 1.12.

Bacamo jedan novčić dok se ne pojavi pismo, ali najviše četiri puta. Opiši vjerojatnosni prostor. Kolika je vjerojatnost događaja

$$A = \{\text{pismo se pojavilo u prva dva bacanja}\},$$
$$B = \{\text{pismo se pojavilo nakon drugog bacanja}\}?$$

► Skup Ω sastoji se od 5 elementarnih događaja. Tim je događajima prirodno pridružiti sljedeće vjerojatnosti:

$$\omega_1 = P \qquad p_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$\omega_2 = \mathrm{GP} \qquad p_2 = \tfrac{1}{4}$$
$$\omega_3 = \mathrm{GGP} \qquad p_3 = \tfrac{1}{8}$$
$$\omega_4 = \mathrm{GGGP} \qquad p_4 = \tfrac{1}{16}$$
$$\omega_5 = \mathrm{GGGG} \qquad p_5 = \tfrac{1}{16}$$

Vrijedi $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4\}$. Zato je $\boldsymbol{P}(A) = p_1 + p_2 = \frac{3}{4}$, $\boldsymbol{P}(B) = p_3 + p_4 = \frac{3}{16}$. ◄

1.2.3. Modeli konačnih vjerojatnosnih prostora

Opišimo nekoliko jednostavnih modela konačnih vjerojatnosnih prostora.

• **Novčić.** Dva su elementarna događaja: $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Ako je novčić ispravan i način njegova bacanja uobičajen, onda je prirodno pretpostaviti da su vjerojatnosti pojavljivanja obaju ovih događaja jednake: $p_1 = \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $p_2 = \boldsymbol{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$.

• **Neispravni novčić.** Još uvijek postoje dva elementarna događaja $\omega_1 = \mathrm{P}$, $\omega_2 = \mathrm{G}$. Međutim, zbog nesimetričnosti novčića ili možda zbog načina njegova bacanja, jedna njegova strana, recimo P, pojavljuje se češće nego druga. Sad je $p_1 > p_2$.

• **Kocka.** Za ispravnu kocku prirodno je uzeti $p_i = \boldsymbol{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$, za svaku od šest mogućnosti na koje kocka može pasti. Za događaje vezane uz pokus bacanja kocke imamo na primjer:

$$\boldsymbol{P}(\{\text{pao je paran broj}\}) = \boldsymbol{P}(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6},$$
$$\boldsymbol{P}(\{\text{pao je broj veći od } 2\}) = \boldsymbol{P}(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6}.$$

• **Bacanje dvaju novčića.** Četiri su elementarna događaja, iako na prvi pogled postoje tri različita ishoda: dva pisma, pismo i glava, te dvije glave:

	1. novčić	2. novčić
ω_1 — palo je	P	P
ω_2 — palo je	P	G
ω_3 — palo je	G	P
ω_4 — palo je	G	G

Da bismo lakše mogli razlikovati elementarne događaje ω_2 i ω_3, možemo zamisliti da bacamo dva različita novčića ili da jedan novčić bacamo dva puta!

• **Bacanje dvaju novčića, drugi model.** Po pisanim dokumentima, francuski je veliki matematičar i enciklopedist d'Alembert (1717–1783) u ovom primjeru postavio samo tri elementarna događaja:

$$\omega_1 = \{\text{pala su dva pisma}\},$$
$$\omega_2 = \{\text{palo je jedno pismo i jedna glava}\},$$
$$\omega_3 = \{\text{pale su dvije glave}\}.$$

I ovaj je pristup ispravan! Međutim, vjerojatnosti ovih elementarnih događaja nisu jednake,[1] već mora biti $\boldsymbol{P}(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $\boldsymbol{P}(\omega_2) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(\omega_3) = \frac{1}{4}$.

• **Bacanje dviju kocki.** Postoji 36 elementarnih događaja. Da bismo razlikovali događaje poput $(2,5)$ i $(5,2)$, možemo zamisliti da su kocke obojene različitim bojama ili pak da umjesto dvije kocke istovremeno, bacamo jednu kocku dva puta tako da znamo koji je rezultat na prvoj, a koji rezultat na drugoj kocki. Ako su kocke i način bacanja ispravni, prirodno je pretpostaviti da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni.

— ◆ —

Primjer 1.13.

Izvlačimo na sreću jednu kartu iz snopa od 52 karte. Kolika je vjerojatnost da je ta karta Q (dama). Kolika je vjerojatnost da je njezina boja ♠ (pik)? Kolika je vjerojatnost da je ta karta dama ili pik boje?

► Označimo s A i B događaje:

$$A = \{\text{izabrana karta je dama}\},$$
$$B = \{\text{izabrana karta je pik boje}\}.$$

Kako postoje četiri dame, vjerojatnost događaja A je $\boldsymbol{P}(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$. 13 je karata pik boje pa je $\boldsymbol{P}(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$. Treći je događaj C unija prvih dvaju. Prvi dojam da je broj povoljnih ishoda jednak $17 = 4 + 13$ pogrešan je, jer događaji A i B nisu disjunktni. Njihov je presjek AB pikova dama! Zato je $\boldsymbol{P}(C) = \dfrac{16}{52} = \dfrac{4}{13}$. Primjetimo da je ovdje $\boldsymbol{P}(AB) = \dfrac{1}{52}$ i da vrijedi:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(C) = \frac{4}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB). \ ◄$$

Primjer 1.14.

Želeći se našaliti s prijateljima u igri *Monopola*, dječak je izbrisao jednu točku sa strane kocke koja označava broj 5, a ucrtao dvije na stranu na kojoj je broj 1, tako da njegova kocka ima sljedeće brojeve na svojim stranama: 2, 3, 3, 4, 4, 6. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja, ako bacamo ovakvu kocku:

$$A = \{\text{pojavio se paran broj}\}.$$
$$B = \{\text{pojavio se broj veći od } 2\}.$$
$$C = \{\text{pojavio se broj } 5\}.$$

► Pokus bacanja kocke ima četiri moguća ishoda: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$ i $\omega_4 = 6$. Ako pretpostavimo da je kocka bila ispravna, tad je razumno pridijeliti ovim elementarnim događajima vjerojatnosti

$$p_1 = \boldsymbol{P}(\{\omega_1\}) = \tfrac{1}{6}, \qquad p_2 = \boldsymbol{P}(\{\omega_2\}) = \tfrac{1}{3},$$
$$p_3 = \boldsymbol{P}(\{\omega_3\}) = \tfrac{1}{3}, \qquad p_4 = \boldsymbol{P}(\{\omega_4\}) = \tfrac{1}{6}.$$

Važno je shvatiti da *ne možemo matematički dokazati* ove vrijednosti. Mi vrijednosti elementarnih događaja možemo zadati po volji, i time dobivamo *matematički model* za bacanje ovakve kocke. Međutim, ako vjerojatnosti izaberemo na ovaj način, očekujemo da će model *biti dobar*, da će vjerno opisivati bacanje ovakve kocke.

Događaju A odgovaraju sljedeći elementarni događaji: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, te je

$$\boldsymbol{P}(A) = p_1 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Događaju B odgovaraju elementarni dogadaji $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, te je

$$\boldsymbol{P}(B) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Mogli smo računati pomoću suprotnog događaja: $\overline{B} = \{\omega_1\}$:

$$\boldsymbol{P}(B) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{B}) = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Događaj C je za ovu kocku nemoguć, $\boldsymbol{P}(C) = 0$. ◄

1.3. Klasični vjerojatnosni prostor

Promatrajmo pokus koji ima konačno mnogo ishoda i u kojem je razumno pretpostaviti da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni (poput bacanja ispravnog novčića, kocke, izvlačenja broja u LOTU, lutriji ili ruletu, izbor karte iz snopa i sl.).

Neka je $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ skup svih elementarnih događaja i $p_1, \dots, p_N$ pripadne vjerojatnosti. Kako su svi ti brojevi jednaki, a njihov je zbroj 1, vrijedi

$$p_i = \boldsymbol{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ovakav vjerojatnosni prostor nazivamo **klasični vjerojatnosni prostor** jer se problemi iz kojih je iznikla teorija vjerojatnosti mogu opisati ovim modelom.

Neka je $A \subseteq \Omega$ bilo koji događaj. Da bismo izračunali vjerojatnost događaja A, nije nam više potrebno znati *koje* elementarne događaje A sadrži, već samo njihov broj. Naime, ako A sadrži M elementarnih događaja, $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\}$, tad je

$$\boldsymbol{P}(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_M} = M \cdot \frac{1}{N} = \frac{M}{N}.$$

Ovu formulu možemo interpretirati na sljedeći način: Svaki elementarni događaj nazovimo mogućim ishodom (svi su jednako vjerojatni). Tako je

$$N = \text{broj svih mogućih ishoda.}$$

Elementarne događaje koji su sadržani u A nazovimo povoljnima za događaj A:

$$M = \text{broj svih povoljnih ishoda.}$$

Klasična vjerojatnost

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{M}{N} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}.$$

Primjer 1.15.

Bacamo jednu ispravnu kocku. Neka je elementaran događaj broj na koji je kocka pala. Opiši vjerojatnosni prostor.

► Skup elementarnih događaja sastoji se od 6 elemenata:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\} = \{1, 2, \dots, 6\}.$$

Algebra događaja sastoji se od svih podskupova od Ω:

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \dots \{6\}, \{1,2\}, \dots, \{5,6\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}.$$

Broj svih događaja je $\operatorname{card}(\mathscr{F}) = 2^6 = 64$.

Zbog pretpostavljene ispravnosti kocke, vjerojatnost pojavljivanja svakog elementarnog događaja je jednaka: $\boldsymbol{P}(\omega_i) = \frac{1}{6}$. ◄

Primjer 1.16.

Bacamo dvije ispravne kocke. Opiši vjerojatnosni prostor. Odredi sljedeće događaje i izračunaj im vjerojatnost:

$A =$ na obje kocke pao je broj 1,
$B =$ obje kocke pokazuju paran broj,
$C =$ pao je jedan paran i jedan neparan broj,
$D =$ zbroj brojeva na obje kocke iznosi barem 10.

► Skup elementarnih događaja sastoji se od uređenih parova:

$$\Omega = \Big\{(\omega_i, \omega_j) : \ \omega_i, \omega_j \in \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}.$$

$N = \operatorname{card}(\Omega) = 36$. Vrijedi $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Broj svih mogućih događaja je $\operatorname{card}(\mathscr{F}) = 2^{36}$! Zbog simetrije vrijedi

$$\boldsymbol{P}\{(\omega_i, \omega_j)\} = \frac{1}{36}.$$

Odredimo sada elementarne događaje od kojih se sastoje događaji A, B, C i D, te vjerojatnosti tih događaja. Pisat ćemo 26 umjesto uređenog para $(2,6)$ itd.

$$\begin{aligned}
&A = \{11\}, && \boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{36},\\
&B = \{22, 24, 26, 42, 44, 46, 62, 64, 66\}, && \boldsymbol{P}(B) = \frac{9}{36},\\
&C = \{12, 14, 16, 32, \dots, 56, 21, 23, 25, 41, \dots, 65\}, && \boldsymbol{P}(C) = \frac{18}{36},\\
&D = \{46, 55, 64, 56, 65, 66\}, && \boldsymbol{P}(D) = \frac{6}{36}. \ ◄
\end{aligned}$$

Računanje vjerojatnosti u klasičnom vjerojatnosnom prostoru povezano je s prebrojavanjem elemenata konačnih skupova, čime se bavi kombinatorika. Stoga je za rješavanje složenijih zadataka nužno poznavanje temeljnih pojmova kombinatorike.

Primjer 1.17. ■ Loto

Kolika je vjerojatnost da će igrač koji je zaokružio jednu kombinaciju u igri LOTO 7 od 35 pogoditi svih sedam brojeva? Kolike su vjerojatnosti za preostale dobitke (za točno pogođenih 6, 5 ili 4 broja)?

► Različitih kombinacija ima $N = \binom{35}{7}$. Povoljnih za glavni dobitak je $M_7 = 1$. Vjerojatnost dobitka iznosi

$$p_7 = \frac{M_7}{N} = \frac{1}{\binom{35}{7}} = \frac{1}{6\,724\,520} = 1.49 \cdot 10^{-7}.$$

Događaje i s puno većom vjerojatnošću tretiramo kao praktično nemoguće. Ipak, zbog velikog broja ukupno ispunjenih kombinacija, ovaj se događaj s vremena na vrijeme ostvaruje.

Šest brojeva između sedam izvučenih možemo odabrati na $\binom{7}{6}$ načina. Jedan broj između preostalih možemo odabrati na 28 načina. Ako zaokružimo bilo koju od ovih $M_6 = \binom{7}{6} \cdot 28$ kombinacija, dobit ćemo zgoditak od šest pogodaka. Zato je:

$$p_6 = \frac{M_6}{N} = \frac{\binom{7}{6} \cdot 28}{\binom{35}{7}} = \frac{196}{6\,724\,520} = 2.91 \cdot 10^{-5}.$$

Ovaj je događaj 196 puta vjerojatniji od prethodnog.

Pet brojeva između sedam možemo odabrati na $\binom{7}{5}$ načina, a dva broja iz skupa od 28 broja koji nisu izvučeni na $\binom{28}{2}$ načina. Zato je vjerojatnost dobitka od pet pogodaka:

$$p_5 = \frac{\binom{7}{5}\binom{28}{2}}{\binom{35}{7}} = \frac{7\,938}{6\,724\,520} = 1.18 \cdot 10^{-3}$$

(prije računanja umnožaka korisno je skratiti brojnik s nazivnikom).

Vjerojatnost zgoditka od četiri pogotka je:

$$p_4 = \frac{\binom{7}{4}\binom{28}{3}}{\binom{35}{7}} = \frac{114\,660}{6\,724\,520} = 0.0171\,.$$

Vjerojatnost da ne pogodimo niti jedan broj je:

$$p_0 = \frac{\binom{28}{7}}{\binom{35}{7}} = 0.176\,. \ ◄$$

Primjer 1.18. ■ Kontrola kvalitete

U pošiljci koja se sastoji od N proizvoda ima M neispravnih. Iz pošiljke se na sreću bira uzorak od n proizvoda (radi kontrole). Ako se među njima nađe barem m neispravnih, pošiljka se vraća. Kolika je vjerojatnost da se pošiljka neće vratiti? Izračunaj za $N = 1000$, $M = 20$, $n = 20$, $m = 1$.

► Označimo događaje

$A = \{$pošiljka nije vraćena$\}$,
$A_i = \{$u uzorku je pronađeno točno i neispravnih proizvoda$\}$.

Tada je

$$A = A_0 + A_1 + \dots + A_{m-1}$$

i događaji A_i su disjunktni. Zato je $\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} \boldsymbol{P}(A_i)$.

$$\boldsymbol{P}(A_i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n} \implies \boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\binom{N-M}{n-i}\binom{M}{i}}{\binom{N}{n}}.$$

U konkretnom primjeru je

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{\binom{980}{20}\binom{20}{0}}{\binom{1000}{20}} = \frac{980 \cdot \ldots \cdot 961}{1000 \cdot \ldots \cdot 981} = 0.66. \ ◄$$

Primjer 1.19. ■ Problem rođendana 1

Koliko ljudi treba biti u društvu da bi s vjerojatnošću 0.5 ili većom, barem dva bila rođena istog dana?

► Koristimo za rješavanje model u kojemu su svi dani rođenja za svakog čovjeka jednako vjerojatni (zanemarujemo npr. mogućnost da u skupini postoje blizanci) te također mogućnost da je netko rođen 29. veljače. Uzimanje u obzir bilo koje od ovih pretpostavci znatno bi iskompliciralo račun, no ne bi bitno promijenilo rezultat jer je riječ o malo vjerojatnim događajima.

Rješavanje zadatka ćemo olakšati označimo li sa n broj dana u godini. Neka je i r broj ljudi. Odredimo vjerojatnost da su svi rođeni raznih dana u godini.

Prvi ima na raspolaganju n dana, drugi $n-1$ itd. Vjerojatnost ovog događaja je

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

Tražena vjerojatnost iznosi

$$\boldsymbol{P}_r = 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}.$$

Tako treba riješiti nejednadžbu $\boldsymbol{P}_r \geqslant 0.5$, što je vrlo neugodan posao. Za konkretni n možemo uvrštavati različite vrijednosti od r i procijeniti pa potom provjeriti pravu vrijednost. Ukoliko je n neodređen, korisno je koristiti sljedeću aproksimaciju.

Krenimo od prikaza funkcije e^{-x}, odnosno njene aproksimacije za malene x:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \approx 1 - x$$

Zato je

$$\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} \approx e^{-k/n},$$

i stoga

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} \approx e^{-[0+1+\ldots+(r-1)]/n} = e^{-r(r-1)/2n}$$

Sada imamo

$$1 - e^{-r(r-1)/2n} \geqslant 0.5 \implies e^{-r(r-1)/2n} \leqslant 0.5 \implies \frac{r(r-1)}{2n} \geqslant -\ln 0.5 \approx 0.693.$$

Odavde dobivamo, za $n = 365$, $r = 23$. Za taj n imamo sljedeću tablicu vjerojatnosti $\boldsymbol{P}_r$:

r	10	20	22	23	30	40	60	70	80
$\boldsymbol{P}_r$	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.994	0.9992	0.9999

◄

Primjer 1.20. ■ Problem rođendana 2

Koliko ljudi treba biti u skupini da bi vjerojatnost da je neko od njih rođen istog dana kad i Vi bude veća od 0.5 ?

► Ovaj zadatak ne smijemo brkati s prethodnim. Sad nam nije važno hoće li neka druga dva čovjeka biti rođena istog dana (ukoliko se taj dan ne podudara s Vašim). Još je jedna razlika. Dok među 366 ljudi sigurno postoje dva s istim danom rođenja, ovdje je moguće da u po volji velikoj skupini baš nitko ne bude rođen istoga dana kad i Vi!

Vjerojatnost da jedan čovjek ne bude rođen istog dana kad i Vi je $\frac{n-1}{n}$. Vjerojatnost za r ljudi je $\frac{(n-1)^r}{n^r}$. Zato je tražena vjerojatnost

$$\boldsymbol{P}_r = 1 - \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^r.$$

Da bi bilo $\boldsymbol{P}_r > 0.5$, treba biti

$$\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^r < 0.5 \implies r > \frac{\log 0.5}{\log[(n-1)/n]} \approx 253$$

ukoliko je $n = 365$. Općenito, $r \approx 0.693n$. ◄

1.3.1. Silvesterova formula

Formula za vjerojatnost unije dvaju događaja poopćava se na uniju triju događaja ovako:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(AB) - \boldsymbol{P}(AC) - \boldsymbol{P}(BC) + \boldsymbol{P}(ABC).$$

Računanje vjerojatnosti unije događaja često je složenije od računanja vjerojatnosti umnoška događaja. Stoga je korisno odrediti poopćenje ove formule na uniju n događaja.

Teorem 1.3. ■ Silvesterova formula

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = &\sum_{i=1}^n \boldsymbol{P}(A_i) - \sum_{i<j} \boldsymbol{P}(A_iA_j)\\
&+ \sum_{i<j<k} \boldsymbol{P}(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\boldsymbol{P}(A_1A_2\cdots A_n).
\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po n. Baza je indukcije dokazana za $n = 2$. Pretpostavimo da formula vrijedi za familije od najviše $n-1$ članova. Označimo potom

$$B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \qquad C_i = A_i \cap A_n \ (i < n)$$

i iskoristimo bazu indukcije:

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \boldsymbol{P}(B \cup A_n) = \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(A_n) - \boldsymbol{P}(B \cap A_n).$$

Kako je

$$B \cap A_n = \Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i,$$

možemo primijeniti i pretpostavku indukcije

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(B) &= \sum_{i<n} \boldsymbol{P}(A_i) - \sum_{i<j<n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n \boldsymbol{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big)\\
\boldsymbol{P}(B \cap A_n) &= \sum_{i<n} \boldsymbol{P}(C_i) - \sum_{i<j<n} \boldsymbol{P}(C_i \cap C_j) + \ldots + (-1)^n \boldsymbol{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\Big)\\
&= \sum_{i<n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_n) - \sum_{i<j<n} \boldsymbol{P}(A_i \cap A_j \cap A_n) + \ldots
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo Silvesterovu formulu.

Primjer 1.21. ■ Totalna zbrka

1) n ljudi je bacilo šešire u zrak. Svako je nakon toga pokupio prvi šešir na kojeg je naišao. Kolika je vjerojatnost da je barem jedan dobio svoj šešir?

2) (Rastreseni) profesor napisao je n pisama i zalijepio ih u koverte. Potom je napisao adrese na koverte. Kolika je vjerojatnost da je barem jedno pismo otišlo na pravu adresu?

► Riječ je o identičnom problemu. Označimo

$$A_i = \{i\text{-to pismo stiglo je na pravu adresu}\}.$$

Očito je $\boldsymbol{P}(A_i) = \frac{1}{n}$. Računajmo dalje, za $i \neq j$:

$$\boldsymbol{P}(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Naime da dva pisma stignu na točne adrese, reba se ostvariti jedina povoljna od $n \cdot (n-1)$ mogućnosti na koje ta dva pisma mogu biti poslana. Slično je

$$\boldsymbol{P}(A_iA_jA_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

i t.d. Neka je A traženi događaj: barem jedan čovjek dobio je svoj šešir. Vrijedi $A = \bigcup A_i$. Po Silvesterovoj formuli je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A) &= \sum_i \boldsymbol{P}(A_i) - \sum_{i<j} \boldsymbol{P}(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} \boldsymbol{P}(A_iA_jA_k) - \ldots\\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots\\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Kolika je ta vrijednost za, recimo, $n = 10$? Gornja suma teži (vrlo brzo) ka broju $1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2.71828} = 0.632121$ i to je tražena vjerojatnost. ◄

1.4. Beskonačni vjerojatnosni prostor

Iako smo naučili mnogo o svojstvima vjerojatnosti, još uvijek ne možemo odgovoriti na mnoga pitanja povezana s nekim vrlo jednostavnim modelima.

• Novčić bacamo dok se ne pojavi pismo. Kolika je vjerojatnost da se pismo neće nikad pojaviti?

• Biramo 'na sreću' realan broj unutar intervala $[0,1]$. Kolika je vjerojatnost da ćemo izabrati $\frac{1}{3}$?

Zajedničko je svojstvo u oba ova pokusa to što je skup Ω elementarnih događaja beskonačan. U prvom slučaju broj bacanja u kojem se pismo može pojaviti bilo koji prirodni broj, pa elementarnih ishoda ima prebrojivo mnogo. U drugom slučaju, elementaran je događaj izbor bilo kojeg realnog broja x iz intervala $[0,1]$. Tih događaja ima neprebrojivo mnogo.

Razmislimo li o vjerojatnostima događaja koje smo istaknuli, osjećamo da je u oba slučaja ta vjerojatnost jednaka nuli. I dok se u prvom primjeru to ne kosi sa zorom (jer se pismo 'mora' pojaviti ako je novčić ispravan), u drugom slučaju je takav zaključak direktno protivan 'zdravoj logici', zato što kao rezultat pokusa mi moramo dobiti *neki* realni broj.

Ovi uvodni primjeri pokazuju da pri promatranju modela s beskonačnim vjerojatnosnim prostorom možemo imati ozbiljnih logičkih poteškoća. Da bismo ih otklonili, moramo biti precizni u definiranju svojstava algebre događaja i pripadne vjerojatnosti.

1.4.1. Neprekinutost vjerojatnosti

Uvjet zatvorenosti algebre na zbrajanje moramo proširiti i na uniju od *prebrojivo mnogo* događaja. Isto tako, zahtjevat ćemo da aditivnost vjerojatnosti vrijedi i za *prebrojivu* uniju disjunktnih događaja.

σ-algebra i σ-aditivnost vjerojatnosti

Ako je Ω beskonačan skup, tad zahtjevamo da algebra događaja $\mathscr{F}$ bude **σ-algebra**, tj. za nju vrijedi

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

Vjerojatnost $\boldsymbol{P}$ na σ-algebri $\mathscr{F}$ mora zadovoljavati uvjet **σ-aditivnosti** (prebrojive aditivnosti):

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_n), \qquad \text{ako je } A_nA_m = \emptyset \text{ za sve } n \neq m.$$

Prema uvjetu monotonosti vjerojatnosti znamo da za rastuće događaje vrijedi

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \implies \boldsymbol{P}(A_1) \leqslant \boldsymbol{P}(A_2) \leqslant \ldots \leqslant \boldsymbol{P}(A_n).$$

Neka je sada (A_n) niz rastućih događaja:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots .$$

Prema uvjetu σ-aditivnosti, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ element je algebre $\mathscr{F}$. Taj događaj označujemo još ovako:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Prirodno je očekivati da je vjerojatnosti događaja A_n teže ka vjerojatnosti događaja A. Pokazat ćemo da je ta tvrdnja ekvivalentna uvjetu σ-aditivnosti vjerojatnosti $\boldsymbol{P}$.

Teorem 1.4. **Neprekinutost vjerojatnosti**

Neka je $\boldsymbol{P}$ konačno aditivna vjerojatnost na σ-algebri $\mathscr{F}$. $\boldsymbol{P}$ je σ-aditivna ako i samo ako vrijedi

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big). \tag{3}$$

Dokaz. Neka je (A_n) rastući niz događaja. Definirajmo

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1, \\ B_2 &:= A_2 \setminus A_1, \\ &\vdots \\ B_n &:= A_n \setminus A_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Skupovi $B_1, B_2, \ldots$ su disjunktni i vrijedi za svaki n

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \tag{4}$$

Zato je i $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je $\boldsymbol{P}$ σ-aditivna, onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(B_n).$$

S druge strane, iz (4) imamo

$$\boldsymbol{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(B_i).$$

Zato je

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(B_n)$$

pa je $\boldsymbol{P}$ neprekinuta.

Pokažimo obrat. Neka je $B_1, B_2, \ldots$ niz disjunktnih događaja. Stavimo

$$\begin{aligned} A_1 &:= B_1, \\ A_2 &:= B_1 \cup B_2, \\ &\vdots \\ A_n &:= B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kako su $B_1, B_2, \ldots$ disjuntni, za svaki n vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(B_i)$$

Dobili smo niz (A_n) rastućih događaja za koji je

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Ako je $\boldsymbol{P}$ neprekinuta, onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \boldsymbol{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(B_i)$$

te je vjerojatnost $\boldsymbol{P}$ σ-aditivna.

Korolar 1.5.

Ako je (A_n) niz padajućih događaja i $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n).$$

Dokaz. Dovoljno je primijeniti teorem na događaje $\overline{A}_n$ koji čine rastući niz događaja.

— ◆ —

1.4.2. Prebrojivi vjerojatnosni prostor

Pretpostavimo da je Ω beskonačan prebrojiv skup:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}.$$

I sada će algebra svih događaja biti $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, skup svih podskupova od Ω. Ona zadovoljava uvjet

$$A_n \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

tako da je $\mathscr{F}$ σ-algebra.

Vjerojatnost $\boldsymbol{P}$ na algebri $\mathscr{F}$ mora zadovoljavati uvjet prebrojive aditivnosti:

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_n), \qquad \text{ako je } A_nA_m = \emptyset \text{ za sve } n \neq m.$$

Kao i prije, $\boldsymbol{P}$ je zadana ako su zadani brojevi $p_i = \boldsymbol{P}(\omega_i) > 0$. Pri tom je

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(\omega_i) = \boldsymbol{P}(\Omega) = 1.$$

Međutim, svi događaji ω_i ne mogu biti jednako vjerojatni, tako da klasična definicija vjerojatnosti gubi smisao.

Primjer 1.22.

Novčić se baca dok se ne pojavi pismo. Opiši vjerojatnosni prostor. Izračunaj vjerojatnost događaja:

A = pismo se pojavilo u prvih pet bacanja,
B = pismo se uopće nije pojavilo.

▶ Skup elementarnih događaja je beskonačan i prebrojiv, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. gdje je

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \mathrm{P} && \boldsymbol{P}(\omega_1) = 1/2, \\ &\omega_2 = \mathrm{GP} && \boldsymbol{P}(\omega_2) = 1/4, \\ &\omega_3 = \mathrm{GGP} && \boldsymbol{P}(\omega_3) = 1/8, \\ &\ \vdots \\ &\omega_n = \mathrm{G}\cdots\mathrm{GP} && \boldsymbol{P}(\omega_n) = 1/2^n, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Odredimo događaje A, B i njihove vjerojatnosti. Vrijedi

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \qquad \boldsymbol{P}(A) = \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n} = \frac{31}{32}.$$

Da bismo odredili vjerojatnost događaja B, definirajmo najprije

$$A_n = \text{pismo se pojavilo u prvih } n \text{ bacanja}.$$

Neka je i

$$B_n = \text{pismo se nije pojavilo u prvih } n \text{ bacanja} = \overline{A}_n.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A_n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}, \\ \boldsymbol{P}(B_n) &= 1 - \boldsymbol{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Očito je

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \quad \text{i} \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Zato po uvjetu neprekinutosti vjerojatnosti

$$\boldsymbol{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Do istog zaključka možemo doći i ovim razmišljanjem. Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja $\omega_1, \omega_2 \ldots$ je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$. B je događaj disjunktan sa svim elementarnim, pa njegova vjerojatnost ne može biti pozitivna.

Primjer 1.23.

U urni se nalaze dvije bijele i četiri crne kuglice. Dva igrača izvlače naizmjence po jednu kuglicu. Pobjeđuje onaj koji prvi izvuče bijelu kuglicu. Opiši vjerojatnosni postor. Izračunaj vjerojatnost sljedećih događaja

A = pobijedio je prvi igrač,
B = pobijedio je drugi igrač,
C = igra se završila u prva četiri izvlačenja,

u svakom od sljedeća dva načina izvlačenja
a) nakon izvlačenja kuglica se vraća u urnu,
b) izvučena kuglica ne vraća se natrag.

▶ **a**) Vjerojatnosni prostor je beskonačan. Elementarne događaje sačinjavaju svi konačni nizovi oblika

$$\begin{aligned} &\omega_1 = B, && \boldsymbol{P}(\omega_1) = \frac{1}{3}, \\ &\omega_2 = CB, && \boldsymbol{P}(\omega_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \\ &\omega_3 = CCB, && \boldsymbol{P}(\omega_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}, \\ &\ \vdots \\ &\omega_n = \underbrace{C\cdots C}_{n-1}B, && \boldsymbol{P}(\omega_n) = \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vjerojatnosti događaja A, B, C iznose:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) &= \boldsymbol{P}(\omega_1 + \omega_3 + \omega_5 + \ldots) = \frac{1}{3} + \Big(\frac{2}{3}\Big)^2 \frac{1}{3} + \Big(\frac{2}{3}\Big)^4 \frac{1}{3} + \ldots \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}, \\ \boldsymbol{P}(B) &= 1 - \boldsymbol{P}(A) = \frac{2}{5}, \\ \boldsymbol{P}(C) &= \boldsymbol{P}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{65}{81}. \end{aligned}$$

b) U ovom je slučaju vjerojatnosni prostor konačan. Sastoji se od sljedećih elementarnih događaja

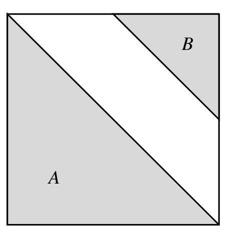
$$\begin{aligned} &\omega_1 = B, && \boldsymbol{P}(\omega_1) = \frac{1}{3} && = \frac{5}{15}, \\ &\omega_2 = CB, && \boldsymbol{P}(\omega_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} && = \frac{4}{15}, \\ &\omega_3 = CCB, && \boldsymbol{P}(\omega_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} && = \frac{3}{15}, \\ &\omega_4 = CCCB, && \boldsymbol{P}(\omega_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} && = \frac{2}{15}, \\ &\omega_5 = CCCCB, && \boldsymbol{P}(\omega_5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} && = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Prema tome, vjerojatnosti događaja A, B, C su

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) &= \boldsymbol{P}(\omega_1 + \omega_3 + \omega_5) = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}, \\ \boldsymbol{P}(B) &= 1 - \boldsymbol{P}(A) = \frac{2}{5}, \\ \boldsymbol{P}(C) &= 1 - \boldsymbol{P}(\omega_5) = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$ ◀

1.5. Geometrijska vjerojatnost

Zamislimo pokus u kojem biramo na slučajan način točku unutar kvadrata Ω sa stranicom duljine a. Istaknimo neke podskupove tog kvadrata. Neka je A polovina kvadrata ispod dijagonale. Neka je B trokut dobiven spajanjem polovišta susjednih stranica.



Sl. 1.9. Geometrijska vjerojatnost: vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa

Biramo li točku unutar kvadrata, možemo se upitati kolika je vjerojatnost da će ta točka biti izabrana unutar nekih od ovih podskupova. U ovdje opisanom pokusu prirodno je sljedećim događajima pridružiti vjerojatnosti:

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\{\text{točka je pala u skup } A\} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}\{\text{točka je pala u skup } B\} = \frac{\frac{1}{8}a^2}{a^2} = \frac{1}{8}.$$

Te smo vjerojatnosti dobili promatrajući *omjer površina* podskupova i čitava kvadrata.

— ◆ —

Opišimo općenitu situaciju.

Geometrijska vjerojatnost

Neka je Ω ograničeni podskup n-dimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$). Pretpostavit ćemo da je Ω *izmjeriv* skup, tj. da postoji njegova mjera $m(\Omega)$ (duljina za $n = 1$, površina za $n = 2$, obujam za $n = 3$). Neka je A izmjeriv podskup od Ω. Kažemo da biramo točku **na sreću** unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{5}$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo **geometrijska vjerojatnost**.

— ◆ —

Formulom (5) uistinu je definirana vjerojatnost. Provjerimo jesu li ispunjena svojstva vjerojatnosti $1^\circ - 3^\circ$.

1°. U geometrijskoj vjerojatnosti nemoguć događaj je izbor točke unutar praznog skupa. Mjera praznog skupa je 0, pa je:

$$\boldsymbol{P}(\emptyset) = \frac{m(\emptyset)}{m(\Omega)} = 0, \qquad \boldsymbol{P}(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{m(\Omega)} = 1.$$

2°. Ako su A i B podskupovi od Ω takvi da je $A \subseteq B$, onda je $m(A) \leqslant m(B)$. Zato:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \leqslant \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \boldsymbol{P}(B).$$

3°. Ako su A i B disjunktni podskupovi od Ω, onda je mjera njihove unije jednaka zbroju mjera pojedinih skupova. Zato je vjerojatnost da točka bude izabrana unutar jednog od podskupova jednaka:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{m(\Omega)} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} + \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B).$$

— ◆ —

Primjer 1.24.

Biramo na sreću točku unutar kvadrata Ω sa stranicom duljine a. Kolika je vjerojatnost da ona padne unutar kruga upisanog u taj kvadrat?

► Neka je A traženi događaj. Površina kruga je:

$$m(A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi,$$

pa je odgovarajuća vjerojatnost:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}a^2\pi}{a^2} = \frac{\pi}{4}. \ ◄$$

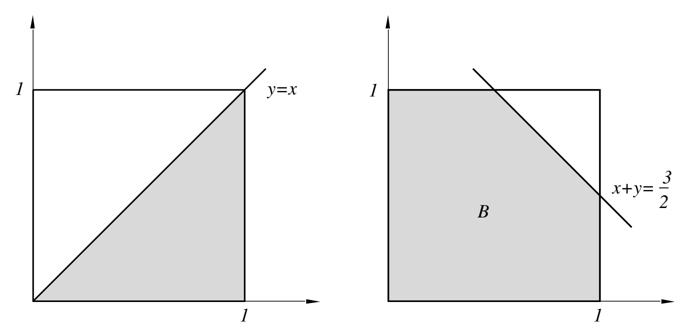
Primjer 1.25.

Unutar intervala $[0, 1]$ biraju se na sreću dva broja x i y. Odredi vjerojatnost događaja: **a**) $A = \{x > y\}$; **b**) $B = \{x + y < \frac{3}{2}\}$; **c**) $C = \{x = y\}$.

► Izbor dvaju brojeva x i y unutar intervala $[0, 1]$ odgovara izboru jedne točke (x, y) unutar jediničnog kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$. Označimo taj kvadrat s Ω (slika 1.10). On predstavlja skup elementarnih događaja. Da bismo odredili tražene vjerojatnosti, moramo izračunati površinu podskupova od Ω koji odgovaraju tim događajima.

a) Događaju A odgovara istoimeni podskup: skup svih točaka jediničnog kvadrata za koje je $x > y$. Tad vrijedi:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$



Sl. 1.10. Izbor dviju točaka unutar intervala $[0, 1]$ odgovara izboru jedne točke unutar jediničnog kvadrata

b) Sad je $B = \{(x, y) : x + y < \frac{3}{2}\}$, te imamo:

$$\boldsymbol{P}(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{7}{8}.$$

c) Skup svih točaka (x, y) za koje je $x = y$ je dijagonala kvadrata. Površina takvog skupa je 0. Zato je i pripadna vjerojatnost jednaka nuli: birajući na sreću dva broja unutar intervala $[0, 1]$ vjerojatnost da ta dva broja budu jednaka jest 0! To ne znači da je ovaj događaj nemoguć, jer u vjerojatnosnom modelu s neprebrojivo mnogo ishoda (kao što je geometrijski model vjerojatnosti) razlikuju se pojmovi nemogućeg događaja[1] i događaja s vjerojatnošću nula!

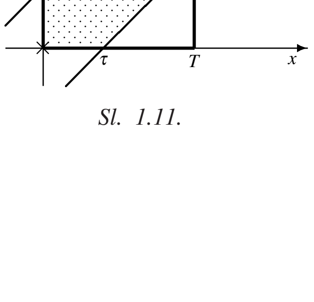
Kao posljedica ovog, događaji $\{x < y\}$ i $\{x \leqslant y\}$ imaju jednaku vjerojatnost. Isto vrijedi za sve slične skupove. ◄

Primjer 1.26.

Trenutak u kojem će signal stići do prijemnika je na sreću odabrani trenutak unutar intervala $[0, T]$. Prijemnik neće registrirati drugi signal, ukoliko je razlika između dva uzastopna signala manja od τ, $\tau \ll T$. Odredi vjerojatnost da prijemnik neće registrirati drugi signal.

► Ako je X trenutak prijema prvog signala, a Y trenutak prijema drugog signala (riječi prvi i drugi ovdje se ne odnose na vrijeme prijema). Posljednje primljeni signal neće biti registriran ako je $|X - Y| < \tau$. X i Y su dva na sreću izabrana broja unutar intervala $[0, T]$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\{|x-y| < \tau\} &= \boldsymbol{P}\{x - \tau < y < x + \tau\} \\ &= \boldsymbol{P}\{(x, y) \in G\} = \frac{m(G)}{m(S)} \\ &= \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2}. \ ◄\end{aligned}$$

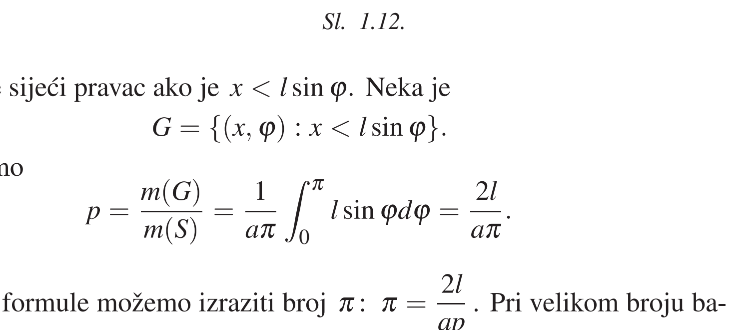


Sl. 1.11.

Primjer 1.27. ■ Buffonov problem

Ravnina je podijeljena paralelnim pravcima koji su udaljeni jedan od drugog za $2a$. Na tu se ravninu baca na sreću igla duljine $2l$, $(l < a)$. Izračunaj vjerojatnost da igla presjeca neki pravac.

► Označimo sa x udaljenost središta igle to najbližeg pravca, sa φ kut kojeg igla zatvara s tim pravcem. *Igla se baca na sreću* trebamo prevesti sa: x i φ se biraju na sreću unutar intervala $[0, a]$, $[0, \pi]$, neovisno jedan o drugom. Položaj igle jednoznačno je određen izborom para (x, φ). Njega pak biramo unutar pravokutnika S (slika 1.12).



Sl. 1.12.

Igla će sijeći pravac ako je $x < l \sin \varphi$. Neka je

$$G = \{(x, \varphi) : x < l \sin \varphi\}.$$

Tada imamo

$$p = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{1}{a\pi} \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Iz ove formule možemo izraziti broj π: $\pi = \dfrac{2l}{ap}$. Pri velikom broju bacanja, vjerojatnost p možemo aproksimirati relativnom frekvencijom. Tako dobivamo

$$\pi \approx \frac{2ln}{am}.$$

Ponavljanjem pokusa moguće je dobiti približnu vrijednost broja π. Među svima koji su na ovaj način isprobavali stohastičke zakone i ispravnost bacanja obično se spominju Wolf koji je 1850. bacio iglu 5000 puta, dobivši $\pi \approx 3.1596$ te Lazzarini koji je 1901. iz 3408 pokušaja dobio neobično točan rezultat $\pi \approx 3.1415929$. ◄

1.6. Elementi kombinatorike*

1.6.1. Kartezijev umnožak skupova

Neka su A i B dva neprazna skupa. **Kartezijev umnožak** skupova A i B je skup $A\times B$ čiji su elementi uređeni parovi (a,b), pri čemu je $a\in A$, $b\in B$. Pišemo

$$A\times B=\{(a,b),\ a\in A,\ b\in B\}.$$

Dva su uređena para (a,b) i (x,y) jednaka ako i samo ako je $a=x$, $b=y$.

Koliki je *broj elemenata* u Kartezijevu umnošku skupova?

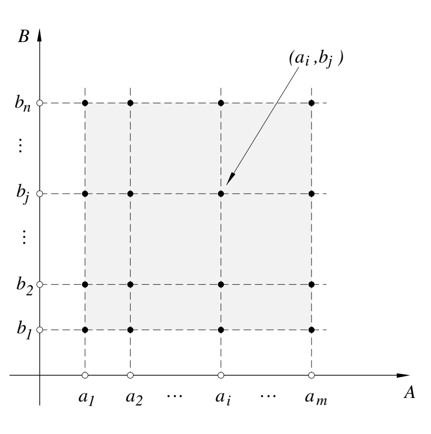
Ako je $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$, onda su elementi Kartezijeva umnoška sljedeći uređeni parovi:

$$\begin{array}{llll}
(a_1,b_1) & (a_1,b_2) & \dots & (a_1,b_n)\\
(a_2,b_1) & (a_2,b_2) & \dots & (a_2,b_n)\\
(a_3,b_1) & (a_3,b_2) & \dots & (a_3,b_n)\\
\vdots & & & \\
(a_m,b_1) & (a_m,b_2) & \dots & (a_m,b_n)
\end{array}$$

Njihov je broj mn. Tako vrijedi:

Broj elemenata Kartezijeva umnoška

Ako skup A ima m elemenata, a skup B n elemenata, tad Kartezijev umnožak $A\times B$ ima mn elemenata. Pišemo $k(A\times B)=k(A)\cdot k(B)$.



Sl. 1.13. Kartezijev umnožak dvaju skupova

Poredak skupova u Kartezijevu umnošku važan je, jer za $A\neq B$ vrijedi $A\times B\neq B\times A$. Međutim, broj elemenata u oba ova skupa podudara se. Tako, ako nas zanima samo broj elemenata u Kartezijevu umnošku, ne moramo paziti na poredak skupova.

Na potpuno identičan način može se opisati i Kartezijev umnožak nekoliko skupova. Neka su $S_1,\dots,S_k$ zadani skupovi. Kartezijev umnožak tih skupova skup je svih uređenih k-torki:

$$S_1\times S_2\times\cdots\times S_k=\{(s_1,s_2,\dots,s_k):s_1\in S_1,\ s_2\in S_2,\dots,s_k\in S_k\}.$$

Primjer 1.28.

Koliko postoji različitih troznamenkastih brojeva?

▶ Odgovor je 900: to su brojevi od 100 do 999. Povezat ćemo ga s Kartezijevim umnoškom skupova. Ovdje se radi o umnošku triju skupova: skupa $S_1=\{1,2,\dots,9\}$ iz kojeg biramo prvu znamenku, skupa $S_2=\{0,1,2,\dots,9\}$ iz kojeg biramo drugu znamenku i istovjetnog skupa S_3. Primjerice, ako uređena trojka (s_1,s_2,s_3) ima oblik $(3,5,3)$, ona određuje troznamenkasti broj 353.

Broj 900 jednak je umnošku $9\cdot10\cdot10$ broja elemenata iz svakoga skupa: prvu znamenku možemo birati na devet načina, drugu na deset i treću također na deset načina. Prema tome, u ovom primjeru vrijedi

$$k(S_1\times S_2\times S_3)=900=9\cdot10\cdot10=k(S_1)\cdot k(S_2)\cdot k(S_3).$$ ◀

Na istovjetan način računat ćemo broj elemenata Kartezijeva umnoška više skupova. Neka je n_1 broj elemenata u skupu S_1, n_2 broj elemenata u skupu S_2 itd. Prvu komponentu iz skupa S_1 možemo izabrati na n_1 načina. Svakoj toj komponenti možemo dodati drugu komponentu iz skupa S_2 na n_2 načina. Tako prve dvije komponente možemo odabrati na $n_1\cdot n_2$ načina. Treću komponentu možemo birati na n_3 načina, pa uređenih trojki ima $n_1\cdot n_2\cdot n_3$ itd.

Kartezijev umnožak nekoliko skupova

Broj elemenata u Kartezijevu umnošku k skupova je

$$k(S_1\times S_2\times\cdots\times S_k)=n_1\cdot n_2\cdots n_k=k(S_1)\cdot k(S_2)\cdots k(S_k).\qquad(6)$$

Primjer 1.29.

Varijacije s ponavljanjima u skupu S. Neka je $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ zadani skup.

- Koliko postoji različitih uređenih k-torki elemenata skupa S?

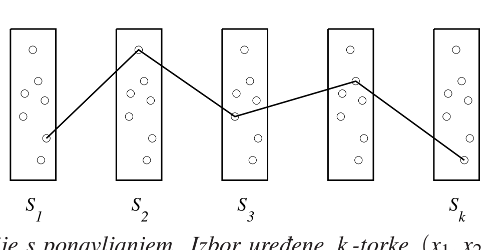
Isto pitanje možemo postaviti i na ovaj način:

- Na koliko se različitih načina može izabrati k elemenata skupa S pazeći na njihov poredak, s tim da se elementi mogu ponavljati?

Riječ je očito o broju elemenata u Kartezijevu umnošku k istovjetnih skupova $S\times S\times\cdots\times S$. Njihov je broj n^k.

Varijacija s ponavljanjem k-tog razreda u n-članom skupu S je *svaka uređena k-torka* Kartezijeva umnoška k skupova $S\times S\times\cdots\times S=S^k$. Broj varijacija s ponavljanjem označavamo s $\overline{V}_n^k$. On jednak je broju elemenata Kartezijeva umnoška S^k:

$$\overline{V}_n^k=k(S\times S\times\cdots\times S)=[k(S)]^k=n^k.$$



Sl. 1.14. Varijacije s ponavljanjem. Izbor uređene k-torke $(x_1,x_2,\dots,x_k)$ određuje jedan put, koji povezuje izabrane elemente pojedinih skupova

Tako su na primjer varijacije s ponavljanjima drugog razreda u skupu $S=\{1,2,3,4\}$:

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Njihov je broj $\overline{V}_4^2=4^2=16$.

Ovdje i u sličnim primjerima, radi jednostavnosti pisat ćemo 11 umjesto uređenog para $(1,1)$, a slično i za ostale parove. Također, umjesto uređene k-torke govorimo često o **nizu** elemenata, i pišemo $x_1,x_2,\dots,x_n$, sa ili bez zareza između elemenata.

Primjer 1.30. ■ Broj podskupova zadanog skupa

Koliki je broj podskupova skupa S koji ima n elemenata (uključujući prazan skup i cijeli skup)?

▶ Svakom elementu skupa S možemo pridružiti broj 0 ili 1, sa značenjem

0: taj se element ne uzima u podskup,

1: taj se element uzima u podskup.

Tako dobivamo niz duljine n koji se sastoji od nula i jedinica, a koji opisuje način izbora podskupa.

Na primjer, ako je $S=\{a,b,c,d,e\}$, tad niz $1,0,0,1,1$ određuje podskup $\{a,d,e\}$, a niz $0,0,1,0,0$ određuje podskup $\{c\}$. Niz $\{0,0,0,0,0\}$ odgovara praznom podskupu, a niz $\{1,1,1,1,1\}$ cijelom skupu.

Time smo pokazali da je broj podskupova jednak broju nizova duljine n koji se sastoje od nula i jedinica. Prvu znamenku u tom nizu možemo izabrati na dva načina, drugu i sve ostale također na dva načina. Zato je ukupan broj različitih nizova 2^n.

Skup svih podskupova skupa S označavamo s $\mathscr{P}(S)$ i nazivamo **partitivnim skupom** skupa S. Dakle, ako je $k(S)=n$, onda je $k(\mathscr{P}(S))=2^n$. ◀

1.6.2. Princip uzastopnog prebrojavanja

Brojanje elemenata Kartezijeva umnoška možemo poopćiti i na slučaj kad promatramo broj elemenata u nekim njegovim podskupovima. Pogledajmo sljedeći jednostavni primjer.

Primjer 1.31.

Koliko postoji dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?

▶ Prvu znamenku biramo iz skupa $S_1=\{1,2,\dots,9\}$, a drugu iz skupa $S_2=\{0,1,2,\dots,9\}$, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku. Zato će izbor biti uređeni par (s_1,s_2), pri čemu je $s_2\neq s_1$. Time je određen neki podskup Kartezijeva umnoška, koji (u složenijim primjerima) nije jednostavno opisati. Međutim, broj njegovih elemenata možemo lako odrediti.

Prvu znamenku možemo birati po volji, devet je mogućih izbora. Bez obzira koju znamenku s_1 izabrali, drugu znamenku biramo između devet *preostalih* znamenki skupa S_2, koje su različite od s_1. Njihov izbor ovisi dakle o izboru prve znamenke, ali *njihov broj ne ovisi*. Ukupan broj svih mogućnosti je $9\cdot9$. ◀

Primjer 1.32.

Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se 0 ne smije naći niti na prvom, niti na posljednjem mjestu, a sve znamenke moraju biti različite?

▶ Brojeva kod kojih nula nije na prvom mjestu ima $6\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$, jer prva znamenka mora biti različita od nule, druga bilo koja od preostalih itd. Neki od ovih brojeva imat će nulu na posljednjem mjestu. Zato ćemo sada prebrojati koliko je takvih brojeva. Kod njih prvu znamenku možemo odabrati na 6 načina, drugu na 5 načina, treću na četiri načina, a četvrtu na 4 načina. Peta znamenka je nula. Ukupno ima $6\cdot5\cdot4\cdot3$ ovakvih brojeva. Prema tome, svega je $6\cdot6\cdot6\cdot5\cdot3-6\cdot5\cdot4\cdot3=5\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=1800$ koji zadovoljavaju oba uvjeta. ◀

Način razmišljanja u svim dosadašnjim primjerima možemo formulirati na sljedeći način:

Princip uzastopnog prebrojavanja

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1,s_2,\dots,s_k$ jednak

$$N=n_1\cdot n_2\cdots n_k.$$

Princip obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 način, drugi dio posla na n_2 načina,…, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na $n_1\cdot n_2\cdots n_k$ načina[1].

Ukoliko poredak elemenata nije važan, pri primjeni principa o uzastopnom prebrojavanju moramo biti vrlo oprezni. Objasnit ćemo to kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 1.33.

Koliko dijagonala ima pravilan n-terokut?

▶ Dijagonala je određena s dva nesusjedna vrha n-terokuta. Prvi vrh možemo odabrati na n načina. Za drugi vrh nakon toga na raspolaganju imamo $n-3$ nesusjedna vrha. Ukupan broj (uređenih) parova vrhova je $n(n-3)$. Međutim, broj dijagonala je dva puta manji, jer svaka dijagonala povezuje dva vrha: dva uređena para (A,B) i (B,A) vrhova određuju istu dijagonalu. Dakle, broj dijagonala je $N=\frac{1}{2}n(n-3)$. Ovaj je broj uvijek cjelobrojan, jer su brojevi n i $n-3$ različite parnosti. ◀

Primjer 1.34.

Snop karata sastoji se od 52 karte, podijeljenih u četiri boje (po 13 karata svaka). Na koliko različitih načina možemo odabrati dvije karte iste boje?

▶ Boju možemo odabrati na četiri načina. Prvu kartu u toj boji na 13 načina. Nakon što smo odabrali prvu kartu, preostaje 12 mogućnosti za izbor druge karte iste boje. Ponovno je svaki par brojen dva puta. Ukupan broj izbora dviju karata je $4\cdot13\cdot12\cdot\frac{1}{2}=312$. ◀

Primjer 1.35. ■ Varijacije bez ponavljanja

Uređena k-torka različitih elemenata istog skupa $S=\{a_1,\dots,a_n\}$ naziva se **varijacijom** k-tog razreda u skupu od n elemenata. Pri tom mora biti $k\leqslant n$. Broj varijacija označavamo s V_n^k.

Odredimo taj broj koristeći princip uzastopnog prebrojavanja. Prvi element možemo odabrati na n načina. Nakon toga, drugi element možemo odabrati na $n-1$ način, jer mora biti različit od prvog. Treći možemo odabrati na $n-2$ načina. Posljednji, k-ti na $n-(k-1)=n-k+1$ način. Zato je

$$V_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Primjer 1.36.

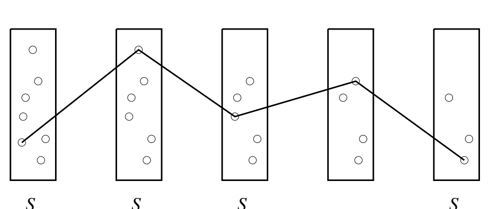
Na koliko se različitih načina može podijeliti zlatna, srebrna i brončana medalja između osam natjecatelja?

▶ Riječ je o varijacijama trećeg razreda u skupu od osam elemenata. Zato je traženi broj $N=V_8^3=8\cdot7\cdot6=336$.

Svakako je korisnije zapamtiti način na koji smo došli do ovog broja, nego samu formulu. Moramo biti sigurni da razumijemo princip uzastopnog prebrojavanja:

- zlatnu medalju možemo podijeliti na 8 načina,
- srebrnu medalju možemo podijeliti na 7 načina (među preostalih 7 natjecatelja),
- brončanu medalju možemo podijeliti na 6 načina (među preostalih 6 natjecatelja).

Zato je broj različitih načina za dodjelu sve tri nagrade jednak $8\cdot7\cdot6$. ◀



Sl. 1.15. Varijacije bez ponavljanja u skupu od n elemenata. Prvi element biramo po volji, drugi element tako da bude različit od prvog itd.

Primjer 1.37.

Abeceda u hrvatskome jeziku sastoji se od 30 slova od kojih je 5 samoglasnika i 25 suglasnika. Na koliko se različitih načina može ispisati riječ od pet slova ako:

A. sva slova u riječi moraju biti različita,

B. poredak slova je suglasnik-samoglasnik-suglasnik-samoglasnik-suglasnik,

C. isto što i B.; ali su sva slova u riječi različita.

▶

A. Na $30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26=17\,100\,720$ načina.

B. Na $25\cdot5\cdot25\cdot5\cdot25=390\,625$ načina.

C. Na $25\cdot5\cdot24\cdot4\cdot23=276\,000$ načina. ◀

1.6.3. Permutacije

Permutacija skupa $S=\{a_1,\dots,a_n\}$ od n različitih elemenata uređena je n-torka svih njegovih članova.

Tako su na primjer, permutacije skupa $S=\{1,2,3\}$: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$, i to su sve moguće permutacije. Jedna permutacija skupa $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ je $(1,3,5,7,9,0,2,4,6,8)$. Koliko različitih permutacija ovog skupa postoji?

Broj različitih permutacija skupa s n elemenata označavamo s P_n. Taj broj dobivamo ovako:

- prvi element možemo izabrati na n načina,
- drugi element možemo izabrati nakon toga na $n-1$ načina,

$\vdots$

- pretposljednji element možemo izabrati na dva načina (jer su samo dva elementa preostala),
- posljednji element biramo samo na jedan način, jer je jedini preostao.

Broj permutacija

Broj različitih permutacija skupa od n elemenata je

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!\qquad(7)$$

Primjećujemo da je permutacija zapravo varijacija n-tog razreda u skupu od n elemenata. Zato je $V_n^n=P_n$.

Primjer 1.38.

Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može sastaviti od svih slova riječi POVIJEST ako

A. slova možemo postavljati po volji;

B. suglasnici dolaze na prvo, treće, peto, sedmo i osmo mjesto, baš kao i u početnoj riječi?

▶ **A.** Svaki raspored slova određuje jednu permutaciju. Ukupan broj rasporeda je $N=P_8=8!=40\,320$.

B. Svaki suglasnik može doći na bilo koje od pet mjesta. Broj mogućih rasporeda suglasnika je $N_1=P_5=5!=120$. Broj mogućih rasporeda samoglasnika je $N_2=P_3=3!=6$. Po principu uzastopnog prebrojavanja, ukupan broj mogućih rasporeda je $N=N_1N_2=720$. ◀

1.6.4. Permutacije s ponavljanjem

Želimo li izračunati broj permutacija od n elemenata među kojima ima i jednakih, njihov će broj biti očito manji. Naime, neke od permutacija ispisanih na gore opisani način nećemo više moći razlikovati i njihov će se ukupni broj smanjiti.

Primjer 1.39.

Odredimo sve permutacije koje možemo dobiti od slova riječi SOS. Pretpostavimo za trenutak da možemo razlikovati oba slova S, tj. da naša riječ ima oblik $\mathrm{S_1OS_2}$. Tad imamo $3!=6$ različitih permutacija. To su redom:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{OS_1S_2} & \mathrm{S_1OS_2} & \mathrm{S_1S_2O}\\
\mathrm{OS_2S_1} & \mathrm{S_2OS_1} & \mathrm{S_2S_1O}
\end{array}$$

Pritom $\mathrm{S_1OS_2}$ i $\mathrm{S_2OS_1}$ izgledaju kao različite permutacije, ali, uklonimo li indekse, one će postati jednake.

Neka P označava broj različitih permutacija slova S, O, S. U svakoj od njih postoje dva slova S, koja ne razlikujemo. Dodavanjem indeksa od njih bismo dobili $2!$ različitih permutacija. Zato je u ovom slučaju

$$2!\cdot P=P_3\implies P=\frac{3!}{2!}=3.$$

Primjer 1.40.

Slova riječi MAMA možemo permutirati na sljedećih šest načina:

AAMM
AMAM
AMMA
MAAM
MAMA
MMAA

Razlikovanjem pojedinih slova A i M iz svake od ovih permutacija dobili bismo $2!\cdot2!=4$ nove permutacije. Na primjer:

$$\mathrm{AAMM}=\begin{cases}\mathrm{A_1A_2M_1M_2}\\ \mathrm{A_1A_2M_2M_1}\\ \mathrm{A_2A_1M_1M_2}\\ \mathrm{A_2A_1M_2M_1}\end{cases}$$

Na taj bismo način dobili ukupno $P_4=24$ permutacije od četiri različita elementa. Zato za broj permutacija P slova u riječi MAMA vrijedi:

$$2!\cdot2!\cdot P=P_4\implies P=\frac{4!}{2!\cdot2!}=6.$$

Poopćavajući ova razmatranja, dolazimo do sljedećeg zaključka:

Permutacije s ponavljanjem

Neka u nizu $s_1,s_2,\dots,s_n$ postoji prva skupina od k_1 identičnih elemenata, druga skupina od k_2 identičnih elemenata,…, r-ta skupina od k_r identičnih elemenata, $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$. Bilo koji razmještaj elemenata takva niza nazivamo **permutacijom s ponavljanjem**. Njihov ukupni broj označavamo s $P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r}$ i vrijedi

$$P_n^{k_1,k_2,\dots,k_r}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_r!}.\qquad(8)$$

Primjer 1.41.

Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi MATEMATIKA?

▶ Ovdje je riječ o nizu slova A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. Zato je

$$N=P_{10}^{3,1,1,1,2,2}=\frac{10!}{3!1!1!1!2!2!}=151\,200.$$

Po dogovoru, u ovakvim primjerima ne pišemo broj 1 niti u oznaci, niti u razlomcima:

$$N=P_{10}^{3,2,2}=\frac{10!}{3!2!2!}.$$ ◀

1.6.5. Kombinacije

U mnogim problemima prebrojavanja poredak izabranih elemenata nije bitan. Na primjer, u igri LOTO 7 od 35 nije važno kojim se redom izvlači prvih 7 brojeva, već samo koji su to brojevi. Na koliko se načina može izvući 7 brojeva od 35? Općenitije, pitamo se:

• Na koliko se načina može izvući k elemenata iz skupa S od n elemenata, ne pazeći na njihov poredak? Označimo taj broj s C_n^k.

Svaki izbor k različitih elemenata skupa $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ određuje jedan njegov podskup koji ima k elemenata.

C_n^k

Sa C_n^k označavamo broj načina na koji iz skupa od n elemenata možemo odabrati k elemenata, ne pazeći na njihov poredak.

Odredimo taj broj. Primjetimo da je on jednak broju različitih podskupova s k elemenata uzetih iz skupa od n elemenata. Izbor jednog takvog podskupa određen je nizom nula i jedinica duljine n, ali takvih da u njemu postoji točno k jedinica.

Primjer 1.42.

Ilustrirajmo izbor podskupova koji imaju dva elementa na skupu $S=\{a,b,c,d\}$. Na koliko načina možemo odabrati dva njegova elementa?

► Ispišimo niz nula i jedinica i njemu odgovarajući izbor elemenata ovoga skupa:

$1,1,0,0$	a,b
$1,0,1,0$	a,c
$1,0,0,1$	a,d
$0,1,1,0$	b,c
$0,1,0,1$	b,d
$0,0,1,1$	c,d

Broj svih načina jednak je broju svih permutacija niza $1,1,0,0$, kojih ima

$$P_4^{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{24}{2\cdot 2}=6.$$ ◄

Vidimo da je ukupan broj načina jednak broju permutacija u nizu od n nula i jedinica, u kojem ima k jedinica i $n-k$ nula:

$$C_n^k=P_n^{k,n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Kombinacije

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo **kombinacijom** u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}. \tag{9}$$

Primjer 1.43.

U ravnini je zadano deset točaka, od kojih nikad po tri točke nisu na jednom pravcu. Koliko se pravaca može odrediti tim točkama? Koliko trokuta postoji s vrhovima u tim točkama?

► Svaki je pravac određen s dvije točke. Te dvije točke od deset zadanih možemo odabrati na

$$C_{10}^2=\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$$

načina. Trokuta ima onoliko koliko ima izbora triju točaka od deset zadanih. Njih možemo odabrati na

$$C_{10}^3=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=120$$

načina. ◄

Primjer 1.44.

Na koliko se načina u igri LOTO može izvući 7 brojeva i jedan dopunski broj od 35 zadanih?

► Najprije se izvlači 7 brojeva od 35. To se može učiniti na C_{35}^7 načina:

$$\binom{35}{7}=\frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=6\,724\,520.$$

Nakon toga, dopunski se broj može odabrati na 28 načina. Ukupan je broj različitih izbora

$$N=28\cdot\binom{35}{7}=188\,286\,560.$$ ◄

— ◆ —

Pokazat ćemo još jedan način na koji možemo potvrditi ovu formulu, a koji može biti koristan u različitim prebrojavanjima.

Primjer 1.45. ■ Veza kombinacija, permutacija i varijacija

Broj varijacija k-tog razreda u skupu S od n elemenata je $V_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Sve varijacije možemo dobiti tako da najprije odaberemo k elemenata skupa S, a zatim ih permutiramo na sve moguće načine. Izbor elemenata možemo učiniti na C_n^k načina, a permutirati ih na P_k načina. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, ukupan broj varijacija jednak je

$$V_n^k=C_n^k\cdot P_k,$$

odakle slijedi

$$C_n^k=\frac{V_n^k}{P_k}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Primjer 1.46.

Košarkaški tim raspolaže s tri centra, četiri krila i pet braniča. Igru započinje jedan centar, dva krila i dva braniča. Na koliko načina trener može izabrati početnu petorku?

► Centar se može odabrati na tri načina, dva krila na $\binom{4}{2}=6$ načina, dva braniča na $\binom{5}{2}=10$ načina. Broj različitih početnih postava je $3\cdot 6\cdot 10=180$. ◄

Primjer 1.47.

Snop od 52 karte sastoji se od 13 karata različite jakosti u svakoj od četiri boje. Na koliko načina možemo odabrati:

A. dvije karte iste boje,
B. dvije karte različitih boja,
C. dvije karte iste jakosti,
D. dvije karte različitih jakosti?

► **A.** Boju možemo izabrati na četiri načina, a dvije karte u toj boji na C_{13}^2 načina. $N=4\cdot\binom{13}{2}=312$.

Možemo razmišljati i ovako: prvu kartu biramo po volji, pa imamo 52 mogućnosti. Nakon toga, drugu kartu biramo između 12 karata koje su iste boje. Time smo dobili uređeni par. Kako nas poredak karata ne zanima, ukupan je broj mogućnosti $N=\dfrac{52\cdot 12}{2}=312$.

B. Dvije boje možemo odabrati na C_4^2 načina, a po jednu kartu iz svake boje na 13 načina. $N=\binom{4}{2}\cdot 13\cdot 13=1014$.

Razmišljajući na drugi način, računamo ovako: za izbor prve karte imamo 52 mogućnosti. Nakon toga, drugu kartu biramo između 39 karata koje nisu iste boje. Ukupan je broj mogućnosti za izbor dviju karata dvostruko manji: $N=\dfrac{52\cdot 39}{2}=1014$.

C. Razmišljajući na oba ovakva načina, dobivamo $N=13\cdot\binom{4}{2}=\dfrac{52\cdot 3}{2}=78$.

D. Sad je $N=\binom{13}{2}\cdot 4\cdot 4$ ili $N=\dfrac{52\cdot 48}{2}=1248$. ◄

Promotrimo još jedan složeniji primjer.

Primjer 1.48.

U pokeru se dobiva 5 karata od 52. Njihov poredak nije važan. Na koliko se različitih načina može dobiti 5 karata koje sadrže

A. jedan par (npr. K K J 6 3),
B. dva para (npr. J J 2 2 8),
C. tri karte iste jakosti (npr. 8 8 8 K 2),
D. tri karte iste jakosti i jedan par (npr. A A A 7 7)?

A. Dvije karte iste jakosti možemo odabrati na $13\cdot\binom{4}{2}$ načina. Prvu od preostale tri karte na 48, drugu na 44, treću na 40 načina. Množeći ove brojeve dobit ćemo permutaciju preostale tri karte, pa je zato broj kombinacija posljednjih triju karata $3!$ puta manji i iznosi $\dfrac{48\cdot 44\cdot 40}{3!}$. Pomnožimo ova dva broja:

$$N=13\binom{4}{2}\cdot\frac{48\cdot 44\cdot 40}{3!}.$$

Jesmo li time ponovno brojili permutacije? Odgovor je: ne! Mi uvijek možemo brojati ovakve kombinacije od pet karata tako da prvo istaknemo dvije karte koje čine par, a zatim tri preostale. Te su skupine različite po svojim svojstvima.

B. Razmišljajmo na isti način: $13\cdot\binom{4}{2}$ je načina da se odabere prvi par. Nakon što smo njega odabrali, ima $12\cdot\binom{4}{2}$ načina za izbor drugog para. Međutim, ukupan broj načina za izbor prvih četiriju karata dvostruko je manji od umnoška ovih brojeva, jer su i prvi i drugi par skupine istih svojstava i u ovim su izborima brojeni dva puta (kao uređeni parovi). Nakon izbora prvih četiriju karata, petu možemo odabrati na 44 načina. Zato je

$$N=\frac{13\binom{4}{2}\cdot 12\binom{4}{2}}{2!}\cdot 44.$$

C. Razmišljajući kao u A. dobivamo

$$N=13\binom{4}{3}\cdot\frac{48\cdot 44}{2!}.$$

D. Skupine od tri karte i od dvije karte različitih su svojstava. Zato je

$$N=13\binom{4}{3}\cdot 12\binom{4}{2}.$$ ◄

1.6.6. Razdioba predmeta

Razdiobe predmeta na različite osobe predstavlja interesantan kombinatorni problem. Izdvojit ćemo u sljedećim primjerima nekoliko tipičnih situacija.

Primjer 1.49.

Na koliko se načina deset jednakih predmeta može podijeliti na četiri osobe (moguće je da neka osoba ne dobije niti jedan predmet)?

► Predmeti su jednaki, pa ih možemo označiti kružićem. Jednu moguću razdiobu možemo opisati na sljedeći način:

$$\circ\,\circ\,|\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ\,|\,|\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ$$

Ovdje smo zajedno s kružićima rasporedili i tri crtice. Crtice označavaju način dijeljenja: prva osoba dobiva dva predmeta, druga četiri, treća nijedan, četvrta četiri predmeta.

Različitih rasporeda ima koliko i permutacija od 13 elemenata među kojima su dvije skupine od po deset i tri jednaka predmeta:

$$N=P_{13}^{10,3}=\frac{13!}{10!3!}=286.$$

Općenito, ako dijelimo n jednakih predmeta na k osoba, tad postupamo na identičan način. Različitih rasporeda ima onoliko koliko i permutacija od $n+k-1$ elementa, među kojima ima n kružića i $k-1$ crtica:

$$N=P_{n+k-1}^{n,k-1}=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Isti broj dobit ćemo ako se zapitamo na koliko različitih načina možemo postaviti $k-1$ crticu na raspoloživih $n+k-1$ mjesta:

$$N=C_{n+k-1}^{k-1}=\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Na primjer, deset predmeta se na tri osobe može podijeliti na

$$\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

načina. Dva predmeta se na deset osoba može podijeliti na

$$\binom{2+10-1}{10-1}=\binom{11}{9}=\binom{11}{2}=55$$

načina. (Deset je načina u kojih jedna osoba dobije dva predmeta, a 45 načina u kojih dvije osobe dobiju po jedan predmet.) ◄

Primjer 1.50.

Na koliko se načina deset jednakih predmeta može podijeliti na četiri osobe tako da svaka osoba dobije barem jedan predmet?

► Označimo ponovno predmete kružićima. Poredajmo ih i postavimo između njih tri crtice, ali tako da dvije crtice ne smiju doći zajedno. Jedna moguća razdioba opisana je ovako:

$$\circ\,\circ\,\circ\,|\,\circ\,\circ\,|\,\circ\,|\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ$$

(prva osoba dobiva tri, druga dva, treća jedan i četvrta četiri predmeta). Crtice se moraju ubaciti na tri od devet mogućih mjesta između kružića. Broj mogućih načina je $\binom{10-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84$.

Općenito, ako n predmeta dijelimo na k osoba, ali tako da svaka osoba mora dobiti barem jedan predmet, onda postupamo ovako: $k-1$ crticu postavimo na neka od $n-1$ mjesta između kružića. Broj je različitih načina jednak

$$N=C_{n-1}^{k-1}=\binom{n-1}{k-1}.$$ ◄

— ◆ —

Primjer 1.51.

Na koliko se načina osam različitih predmeta može podijeliti na četiri osobe, ali tako da svaka osoba dobije po dva predmeta?

► Dva predmeta koja će pripasti prvoj osobi biramo na $\binom{8}{2}$ načina. Nakon toga, dva predmeta za drugu osobu možemo izabrati na $\binom{6}{2}$ načina itd. Ukupan broj različitih podjela je

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=28\cdot 15\cdot 6\cdot 1=2520.$$

Primijetimo da je jedna podjela određena permutacijom niza $1,1,2,2,3,3,4,4$. Tako na primjer nizu

$$2,4,1,1,3,2,3,4$$

odgovara podjela u kojoj prva osoba dobiva treći i četvrti, druga osoba prvi i šesti, treća osoba peti i sedmi a četvrta osoba drugi i osmi predmet. Ovakvih permutacija ima

$$P_8^{2,2,2,2}=\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=2520.$$

Promotrimo općeniti problem: n različitih predmeta trebamo podijeliti na k osoba, ali tako da prva dobije n_1 predmeta, druga n_2 predmeta,..., posljednja n_k predmeta, $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$. Broj različitih načina na koji se to može učiniti je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$ ◄

— ◆ —

1.6.7. Kombinacije s ponavljanjima

Pretpostavimo da birajući elemente nekoga skupa imamo mogućnost izabrati isti element više puta.

• Na koliko se načina može izabrati k elemenata iz skupa od n međusobno različitih elemenata, ako svaki element možemo birati više puta, a poredak izabranih elemenata nije bitan?

Možemo zamisliti da iz bubnja — u kojem se nalazi n kuglica označenih brojevima od 1 do n — biramo k kuglica, jednu po jednu i to tako da se nakon svakog izbora kuglica vraća u bubanj. Redoslijed izabranih brojeva nije nam pri tome važan.

Jedan takav izbor nazivamo **kombinacijom s ponavljanjem** k-tog razreda u skupu od n elemenata, a njihov ukupan broj označavamo s $\overline{C}_n^k$.

Primjer 1.52.

Ispišimo sve kombinacije s ponavljanjem:

a) drugog razreda u skupu $S=\{1,2,3,4\}$:

11 12 13 14 22 23 24 33 34 44.

Dakle, $\overline{C}_4^2=10$.

b) trećeg razreda u skupu $S=\{1,2,3\}$:

111 112 113 122 123 133 222 223 233 333.

Dakle, $\overline{C}_3^3=10$.

c) četvrtog razreda u skupu $S=\{1,2\}$:

1111 1112 1122 1222 2222.

Dakle, $\overline{C}_2^4=5$.

d) četvrtog razreda u skupu $S=\{1,2,3\}$:

1111 1112 1113 1122 1123 1133 1222 1223
1233 1333 2222 2223 2233 2333 3333.

Dakle, $\overline{C}_3^4=15$.

U svim su primjerima kombinacije poredane *leksikografskim poretkom*. Kako ćemo utvrditi broj $\overline{C}_n^k$?

Učinimo sljedeću transformaciju: drugom elementu u gornjim kombinacijama dodajmo broj 1, trećem broj 2, a četvrtom broj 3. Pritom će kombinacije s ponavljanjem prijeći u kombinacije *bez ponavljanja* u većem skupu:

a) drugog razreda u skupu $S=\{1,2,3,4,5\}$:

12 13 14 15 23 24 25 34 35 45.

b) trećeg razreda u skupu $S=\{1,2,3,4,5\}$:

123 124 125 134 135 145 234 235 245 345.

c) četvrtog razreda u skupu $S=\{1,2,3,4,5\}$:

1234 1235 1245 1345 2345.

d) četvrtog razreda u skupu $S=\{1,2,3,4,5,6\}$:

1234 1235 1236 1245 1246 1256 1345 1346
1356 1456 2345 2346 2356 2456 3456.

Općenito, ovom transformacijom skup kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda u skupu od n elemenata prelazi u skup kombinacija bez ponavljanja k-tog razreda u skupu od $n+k-1$ elemenata. Zato je:

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^n=\binom{n+k-1}{k}.$$

U gornjim primjerima ti brojevi iznose:

a) $$\overline{C}_4^2=\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10,$$

b) $$\overline{C}_3^3=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10,$$

c) $$\overline{C}_2^4=\binom{2+4-1}{4}=\binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5,$$

d) $$\overline{C}_3^4=\binom{3+4-1}{4}=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15.$$

Primjer 1.53.

Iz snopa od 52 karte biramo dvije, ali tako da nakon izbora svake karte zapišemo njezinu vrijednost, a samu kartu vratimo u snop. Na koliko načina možemo odabrati

A. dvije karte iste boje; **B.** dvije karte iste jakosti?

► **A.** Boju možemo izabrati na četiri načina. Dvije karte iste boje možemo odabrati na $\overline{C}_{13}2$ načina. Zato je $N=4\binom{13+2-1}{2}=4\binom{14}{2}$ načina.

B. Jakost možemo odabrati na 13 načina, a dvije karte te jakosti na $\overline{C}4^2=\binom{4+2-1}{2}$ načina. Zato je $N=13\binom{5}{2}$. ◄