



## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

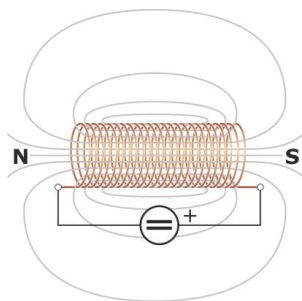
# 14. Međuinduktivno povezani električni krugovi i transformator

© Sveučilište u Zagrebu · Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Zavod za osnove elektrotehnike i električka mjerenja

Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/hrvatska/).

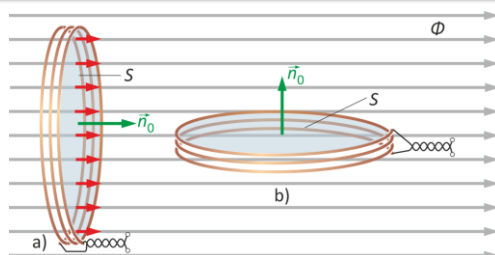
## Međuinduktivitet u električnim krugovima

- Magnetsku indukciju  $B$  možemo vizualizirati pomoću silnica (linija magnetskoga toka)
- To su linije kojima u svakoj njihovoj točki vektor magnetske indukcije predstavlja tangentu
- Silnice magnetskoga polja su zatvorene krivulje



Silnice u ravnoj zavojnici protjecanoj stalnom električnom strujom

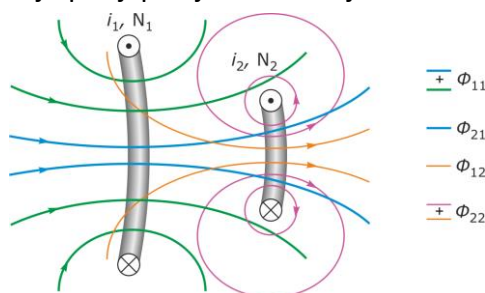
## Međuiduktivitet u električnim krugovima



- Magnetski tok  $\Phi$  kroz površinu  $S$ : Vizualiziramo brojem linija magnetskog toka koje prolaze kroz površinu  $S$
- U položaju zavojnice "a" u homogenom magnetskom polju tok je maksimalan
- U položaju "b" tok je nula
- Općenito u homogenom magnetskom polju:  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n}_0 \cdot S$
- $n_0$  je jedinična normala na površinu  $S$

## Međuiduktivitet u električnim krugovima

- Sustav dviju petlji protjecanih strujama



$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}$$

- Magnetski tok je proporcionalan struji koja ga stvara

- $M$  je međuiduktivitet : jedinica henri (H)

•  $L_1$  i  $L_2$ : induktiviteti - jedinica henri (H)

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} \quad L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{I_2}$$

## Međuintuktivitet u električnim krugovima

- Ukoliko se sav stvoreni magnetski tok zatvara kroz obje petlje (nema rasipnog toka) vrijedi:

$$\Phi_{11} = \Phi_{21}$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{12}$$

$$M^2 = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \cdot \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} \cdot \frac{N_2 \Phi_{22}}{I_2} = L_1 \cdot L_2 \quad M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

- U općem slučaju tokovi nisu jednaki, pa vrijedi:  $M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2}$
- $k$  je faktor magnetske veze – bezdimenzionalna konstanta  
 $0 \leq k \leq 1$

## Međuintuktivitet u električnim krugovima

- Promjena magnetskog toka inducira napon u svitku:

$$\begin{aligned} u_1 &= N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} & \Rightarrow & u_1 = M \frac{di_2}{dt} & u_2 &= N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} & \Rightarrow & u_2 = M \frac{di_1}{dt} \\ \Phi_{12} &= \frac{MI_2}{N_1} & & & \Phi_{21} &= \frac{MI_1}{N_2} & & \end{aligned}$$

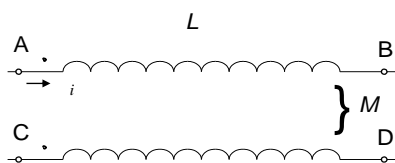
- Napon međuintukcije: vremenski promjenjiva električna struja kroz jednu zavojnicu inducira napon u drugoj zavojnici
- Primjena: transformatori



Transformator  
220 V/110 V  
50 VA  
Proizvodnja:  
VOLTA - Zagreb

## Referentni predznaci

- Referentni predznaci kod napona međuidukcije: u shematskom prikazu određeni oznakom točke na priključnicama
- Magnetski tokovi se podupiru ako električna struja ima isti smjer u priključnicama označenim točkama
- Predznaci napona samoindukcije na zavojnici kroz koju protječe struja i napona međuidukcije na drugoj zavojnici su isti na priključnicama označenim točkom

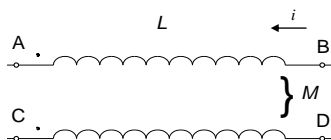


$$u_{AB} = L_{AB} \frac{di}{dt}$$

$$u_{CD} = M \frac{di}{dt}$$

## Referentni predznaci

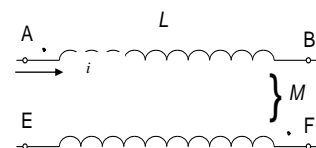
- Uz promjenu referentnog smjera struje:



$$u_{AB} = -u_{BA} = -L_{AB} \frac{di}{dt}$$

$$u_{CD} = -M \frac{di}{dt}$$

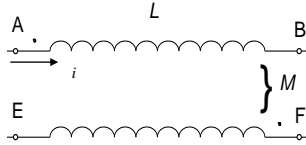
- Uz zamjenu oznaka priključnica (drugačije namatanje svitaka):



$$u_{AB} = L_{AB} \frac{di}{dt}$$

$$u_{EF} = -M \frac{di}{dt}$$

## Fazorski zapis



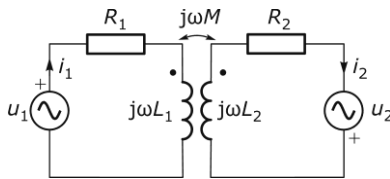
$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \alpha_I)$$

$$\dot{I} = I \angle \alpha_I$$

$$u_{AB} = L_{AB} \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{U}_{AB} = j\omega L_{AB} \dot{I} = jx_{LAB} \dot{I}$$

$$u_{EF} = -M \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{U}_{EF} = -j\omega M \dot{I} = -jx_M \dot{I}$$

## Transformacija kruga s međuinduktivitetom



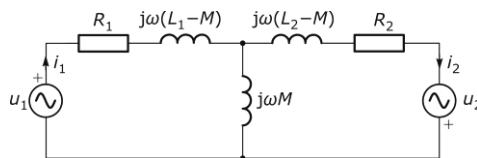
$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1$$

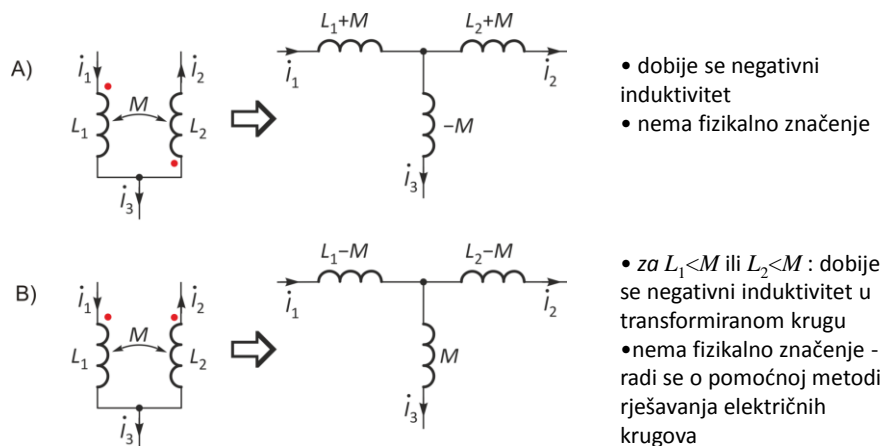
- Uvodimo proširenje:

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M (\dot{I}_2 + \dot{I}_1 - \dot{I}_1) = j\omega (L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_2) = j\omega (L_2 - M) \dot{I}_2 - j\omega M (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$



## Transformacija kruga s međuinduktivitetom



Kod transformacije naznačavamo negativni induktivitet a ne kapacitet jer mu je reaktancija negativna ali upravo proporcionalna s frekvencijom – kod kapaciteta je reaktancija obrnuto proporcionalna s frekvencijom

## Serijski spoj međuinduktivno povezanih zavojnica

- Suglasna veza: naponi samoindukcije i naponi međuindukcije se zbrajaju

$$u_{AB} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$u_{AB} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

- Nesuglasna veza: naponi međuindukcije se oduzimaju od napona samoindukcije

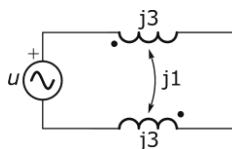
$$u_{AB} = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

$$L_{ekv} = L_1 + L_2 - 2M$$

$$u_{AB} = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}$$

## Međuiduktivitet u električnim krugovima

**Primjer 1.** Za spoj prikazan slikom odredite struju u krugu. Zadano  $U=8\text{ V}$ .

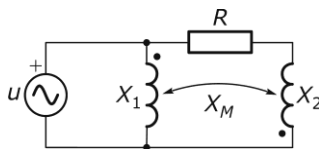


Rješenje:

$$I=1\text{ A}$$

## Međuiduktivitet u električnim krugovima

**Primjer 2.** Izračunajte snagu na otporniku  $R=25\ \Omega$  prema slici. Zadano je  $X_1=X_2=25\ \Omega$ ,  $X_M=20\ \Omega$ ,  $U=25\text{ V}$ .

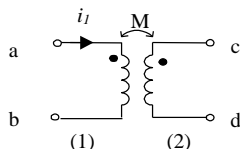


Rješenje:

$$P=71,7\text{ W}$$

## Međuintuktivitet u električnim krugovima

**Primjer 3.** Kojeg je predznaka inducirani napon  $u_{cd}$  zavojnice (2) ako je struja kroz zavojnicu (1) rastuća naznačenog smjera?

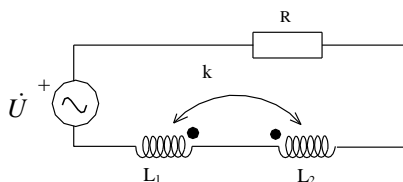


Rješenje:

$$u_{cd} > 0$$

## Međuintuktivitet u električnim krugovima

**Primjer 4.** Odredite frekvenciju naponskog izvora u mreži prema slici ako kroz otpornik R teče struja efektivne vrijednosti 0,5 A. Zadano je  $U=30$  V ,  $R=40$   $\Omega$  ,  $L_1=0,1$  H ;  $L_2=0,4$  H i faktor magnetske veze  $k=1$ .



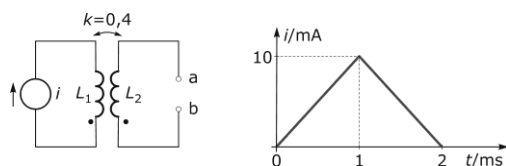
Rješenje:

$$f=71,2 \text{ Hz}$$



## Međuintuktivitet u električnim krugovima

**Primjer 5.** Na neferomagnetsku jezgru su namotane dvije zavojnice induktiviteta  $L_1=1\text{ H}$  i  $L_2=4\text{ H}$ . Promjena struje strujnog izvora dana je na dijagramu. Ako je faktor magnetske veze  $k=0,4$  odredite napon  $u_{ab}$  u trenutku  $t=1,5\text{ ms}$ .



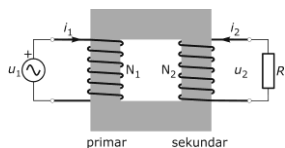
Rješenje:

$$u_{ab} = -8\text{ V}$$

## Transformator

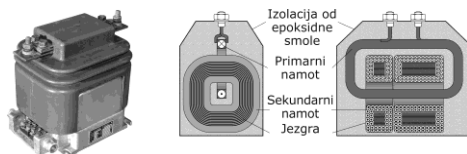
- Transformator je statički elektromagnetski uređaj u kojem se električna energija iz jednog ili više izmjeničnih krugova prenosi u jedan ili više izmjeničnih krugova s nepromijenjenom frekvencijom
- Služi za povećanje ili smanjenje napona u izmjeničnim strujnim krugovima i/ili za galvansko odvajanje električnih krugova
- Sastoji se od dva ili više svitaka (zavojnice) koji su međusobno povezani međuintuktivnom vezom
- Svitak koji je spojen na izvor napona (ili struje) nazivamo primarnim svitkom (često skraćeno **primar**), a svitak na koji se spaja trošilo nazivamo sekundarnim svitkom (**sekundar**).
- Dvonamotni transformator: s jednim primarnim i jednim sekundarnim svitkom

## Transformator



- Načelna konstrukcija dvonamotnoga transformatora: dva međuinduktivno povezana svitka namotana na jezgru
- Na sekundarni svitak spojeno je trošilo

- Osim za prijenos energije, transformatori se koriste i kao mjerni transformatori
- Mjerni transformatori svode mjerene napone i struje na vrijednosti prikladne za mjerenje – na sekundar se spaja voltmetar, odnosno ampermetar



Konstrukcija strujnog mjernog transformatora  
50 A/ 5 A  
Proizvodnja: Končar mjerni transformatori

## Transformator



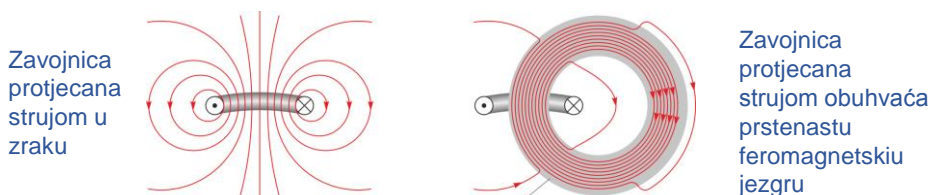
1000 MVA  
420/300/10,5 kV  
Ukupna masa 325 t  
Proizvodnja: KONČAR KPT - Zagreb



90,8 MVA (za visokonaponsku istosmjernu mrežu)  
332/√3±16%/107 kV  
Ukupna masa 155 t  
Proizvodnja: KONČAR KPT - Zagreb

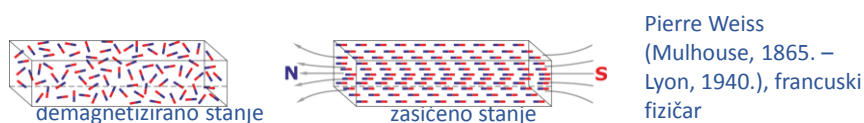
## Transformator

- Za transformaciju naponskih razina u sustavima u kojima se prenosi energija koriste se transformatori s feromagnetskom jezgrom
- Zračni transformatori – sa jezgrom od neferomagnetskog materijala
- Feromagnetski materijali (željezo i njegove legure, kobalt, nikal ..):
  - kanaliziraju magnetski tok – smanjuje se rasipni magnetski tok
  - povećavaju magnetsku indukciju  $B$  u svitku uz istu električnu struju



## Feromagnetski materijali

- Feromagnetski materijali: tipični predstavnici željezo (Fe), kobalt (Co), nikal (Ni) - magnetizacija postoji i bez vanjske el. struje
- Proces magnetizacije feromagnetskih materijala objašnjavamo postojanjem Weissovih domena, odnosno postojanja područja spontane magnetiziranosti u takvim materijalima



- Za magnetske indukcije veće od nekog iznosa, dolazi do zasićenja, u kojemu su sve Weissove domene poravnate
- U zasićenju feromagnetski materijal jezgre gubi sposobnost izrazitog kanaliziranja magnetskog toka – stoga u radnim uvjetima maksimalna indukcija u feromagnetskoj jezgri mora biti dovoljno mala da ne dođe do zasićenja

## Idealni transformator

- Idealni transformator:
  - ✓ Gubici transformatora jednaki su ničtici
  - ✓ Nema rasipnog toka – sve magnetske silnice se zatvaraju kroz jezgru i kroz oba svitka – faktor magnetske veze  $k=1$

$N_1$  – broj zavoja primara  
 $N_2$  – broj zavoja sekundara

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad u_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1 \frac{d\Phi}{dt}}{N_2 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Prva transformatorska  
jednadžba

## Idealni transformator

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

Prijenosni omjer transformatora

Neka se magnetski tok u jezgri transformatora mijenja po zakonu:  $\Phi = -\Phi_m \cos(\omega t)$

Napon primara je tada:

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = N_1 \frac{d(-\Phi_m \cos(\omega t))}{dt} = \omega N_1 \Phi_m \sin(\omega t) = U_{1\max} \sin(\omega t)$$

$$U_{1\max} = \omega N_1 \Phi_m$$

Efektivna vrijednost  
primarnog napona:

$$U_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} N_1 \Phi_m$$

$$U_1 = 4,44 f N_1 \Phi_m$$

$$\Phi_m = B_m \cdot S$$

Kod projektiranja transformatora mora se poštovati da maksimalna magnetska indukcija u jezgri  $B_m$  ne premaši vrijednost kod kojega dolazi do zasićenja. Tipične maksimalne vrijednosti  $B_m$  su u rasponu 1,2 T do 1,7 T.

## Idealni transformator

Kod idealnog transformatora nema gubitaka, pa će snage na primaru i na sekundaru biti jednake:

$$P_1 = P_2$$

Ukoliko zbog jednostavnosti pretpostavimo da je na sekundar transformatora spojen radni otpor  $R$  vrijedit će

$$P_1 = U_1 I_1 \quad P_2 = U_2 I_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 I_2$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{Druga transformatorska jednadžba}$$

## Idealni transformator

-Pretpostavimo da je na sekundar idealnog transformatora spojen radni otpor  $R$

-Tada će ulazni otpor transformatora biti jednak

$$R_{1u} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{n U_2}{\frac{I_2}{n}} = n^2 R$$

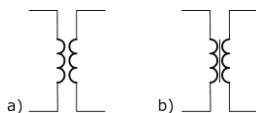
- Ukoliko je idealni transformator opterećen impedancijom  $\underline{Z}$ , možemo poopćiti

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n}$$

$$\underline{Z}_{1u} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n \dot{U}_2}{\frac{\dot{I}_2}{n}} = n^2 \underline{Z}$$

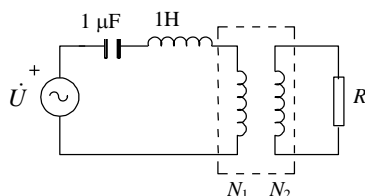
Simbol transformatora



Simbol transformatora s feromagnetskom jezgrom

## Idealni transformator

**Primjer 6.** Efektivna vrijednost struje izvora na shemi prema slici iznosi 1 A uz  $\omega_1=1000$  rad/s. Ako je prijenosni omjer idealnog transformatora  $n=N_1:N_2=0,1$ , a pri kružnoj frekvenciji  $\omega_2=1500$  rad/s efektivna vrijednost struje izvora iznosi 0,5 A, odredite otpor  $R$ .

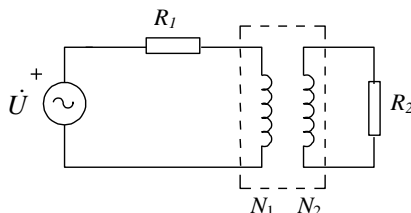


Rješenje:

$$R=48,1 \text{ k}\Omega$$

## Idealni transformator

**Primjer 7.** Ako je prijenosni omjer idealnog transformatora  $n=N_1:N_2=0,1$  odredite otpor  $R_2$  tako da snaga koja se razvija na njemu bude dvostruko veća od snage koja se razvija na otporniku  $R_1 = 20 \Omega$ .

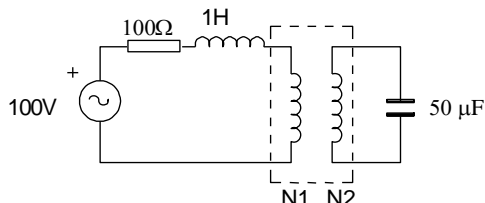


Rješenje:

$$R_2 = 4 \text{ k}\Omega$$

## Idealni transformator

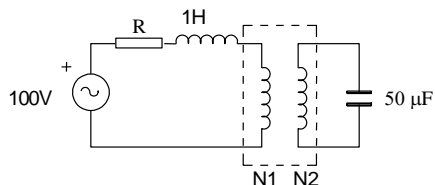
**Primjer 8.** Koliki mora biti prijenosni omjer ( $n=N_1:N_2$ ) idealnog transformatora ako želimo postići da struja izvora iznosi 0,5 A uz  $\omega=200$  rad/s, i da kasni u odnosu na napon izvora.



Rješenje:  
0,52

## Idealni transformator

**Primjer 9.** Koliki mora biti prijenosni omjer ( $n=N_1:N_2$ ) idealnog transformatora ako želimo postići da struja kroz otpornik  $R$  bude maksimalna. Zadana je kružna frekvencija izvora  $\omega=200$  rad/s.



Rješenje:  
1,41

## Idealni transformator

---

**Primjer 10.** Primarni namot transformatora sastoji se od  $N_1=1000$  zavoja. Ako je transformator priključen na napon  $U=220$  V frekvencije  $f=50$  Hz, odredite amplitudu magnetske indukcije u jezgri. Otpor namota i rasipanje magnetskog toka zanemarujemo. Površina jezgre je  $10 \text{ cm}^2$ .

Rješenje:

1 T

**Primjer 11.** Na realni sinusni naponski izvor unutarnjeg otpora  $R_i=100 \Omega$  priključeno je preko idealnog transformatora trošilo otpora  $R$ . Ako je prijenosni omjer transformatora  $N_1:N_2=0,1$  odredite otpor  $R$  uz koji će snaga na trošilu biti maksimalna.

Rješenje:

$R=10 \text{ k}\Omega$

## Idealni transformator

---

**Primjer 12.** Idealni transformator ima odnos broja namotaja  $N_1:N_2=10$ . Na sekundar je spojen kondenzator  $X_c=10 \Omega$ , a na primar idealni izvor sinusne struje iznosa  $10 \text{ mA}$  (efektivno). Kolika je efektivna vrijednost napona na stezaljkama primara?

Rješenje:

10 V

**Primjer 13.** Idealni transformator koji ima prijenosni omjer  $N_1:N_2=2$  opterećen je otporom  $R=5 \Omega$ . Izračunajte struju primara ako je primar priključen na realni naponski izvor s parametrima:  $U_{ph}=12 \text{ V}$ ,  $f=50 \text{ Hz}$ ,  $R_i=50 \Omega$ . Kolike su struje primara i sekundara ako sekundarne stezaljke kratko spojimo?

Rješenje:

$I_p=0,171 \text{ A}$

Uz kratki spoj sekundara:  $I_p=0,24 \text{ A}$ ,  $I_s=0,48 \text{ A}$



## Idealni transformator

---

**Primjer 14.** Trošilo impedancije  $\underline{Z}$  priključeno je preko idealnog transformatora na realni naponski izvor s parametrima  $U_{ph}=14,14 \text{ V}$ ,  $\underline{Z}_i=-3j \text{ } \Omega$ . Ako je radna snaga trošila  $P$ , a jalova  $Q$ , odredite moguće iznose radnog i reaktivnog otpora trošila, te napon na stezaljkama izvora. Zadano:  $N_1=1000$ ,  $N_2=500$ ,  $P=100 \text{ W}$ ,  $Q=200 \text{ VAr (ind)}$ .

Rješenje:

$0,45+j0,9 \text{ } \Omega$  ;  $30 \text{ V}$  ili

$0,25+j0,5 \text{ } \Omega$ ;  $22,4 \text{ V}$

**Primjer 15.** Idealni transformator ima prijenosni omjer  $n=4$ . Primarni napon je  $U_1=100 \text{ V}$ , a primarna struja je  $I_1=2 \text{ A}$  ( $f=50 \text{ Hz}$ ). Izračunajte otpor koji je priključen na sekundar, te radnu snagu na sekundaru.

Rješenje:

$3.125 \text{ } \Omega$  ;  $200 \text{ W}$

## Idealni transformator

---

**Primjer 16.** Transformator je priključen na sinusni napon  $U=220 \text{ V}$  frekvencije  $f=50 \text{ Hz}$ . Maksimalna indukcija u jezgri je  $B_m$ . Otpor namota i rasipanje magnetskog toka zanemarujemo. Odredite napon  $U_1$  frekvencije  $f/2$  koji možemo priključiti na transformator a da maksimalna magnetska indukcija ostane jednaka.

Rješenje:

$110 \text{ V}$