Outerplanarni grafi

Jure Kraševec, Urh Videčnik

31. december 2025

1 Uvod

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je V množica vozlišč in E množica povezav med vozlišči. Outerplanarni graf (ang. Outherplanar graph) je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata in da vsa vozlišča ležijo na zunanji strani oziroma zunanjem licu grafa. Takšni grafi so podmnožica planarnih oziroma ravninskih grafov, ki jih lahko narišemo v ravnini brez presekajočih se povezav, vendar vozlišča niso nujno na zunanji strani. Graf je outerplanaren natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa, ki je homeomorfen z K_4 ali z $K_{2,3}$.
Množica vozlišč $S \subseteq V$ grafa G je liha neodvisna množica, če za vsako vozlišče $u \in I$ velja, da je lihe stopnje ter za vsak par $u, v \in I$ velja, da med njima ne obstaja povezava v E. Poleg tega velja, da vsako vozlišče $v \in V \setminus S$ nima nobenega soseda v S: $N(v) \cap S = \emptyset$ ali pa ima liho število sosedov v S: $|N(v) \cap S| \equiv 1 \pmod 2$ je liho število. $N(v)$ označuje množico sosedov vozlišča v. Največji moči takšne množice pravimo liho neodvisno število grafa, ki ga označimo z $\alpha_{od}(G)$.

2 Opredelitev problema

V nalogi nas bo zanimalo število $\alpha_{od}(G)$. Cilj naloge, je preveriti, če za vsak outerplanaren graf G velja neenakost

$$\alpha_{od}(G) \geqslant n/7,$$

kjer je n število vozlišč grafa G. Najprej bo potrebno implementirati funkcijo, ki za dan graf preveri, če je outerplanaren. Nato bo potrebno razviti algoritem, ki za dan outerplanaren graf izračuna liho neodvisno število $\alpha_{od}(G)$ ter preveri, če velja neenakost $\alpha_{od}(G) \geqslant n/7$. V nadaljevanju bo treba implementirati funkcijo, ki bo generirala naključne outerplanarne grafe različnih velikosti in zanje preverila zgornjo neenakost. Večje outerplanarne grafe bomo generirali z združevanjem ciklov poljubne dolžine, katerim dodajamo nepresečne diagonale. Dobljene grafe skupaj zlepimo v drevesno strukturo.

3 Načrt dela

Delo bo potekalo v programskem okolju `SageMath`. Najprej bova implementirala funkcijo `is_outerplanar(G)`, ki za dan graf G preveri, ali je outerplanaren. Pri tem bova uporabila vgrajene metode v SageMath-u za delo s planarnimi in outerplanarnimi grafi oziroma znano karakterizacijo outerplanarnih grafov z izločitvijo grafov K_4 in $K_{2,3}$ kot minorjev.

Nato bova definirala funkcijo `alpha_od(G)`, ki za dan graf G izračuna liho neodvisno število $\alpha_{od}(G)$. Funkcija bo temeljila na pregledu vseh podmnožic množice vozlišč ter preverjanju pogojev lihe neodvisnosti. Ker je takšen pristop računsko zahteven, bo uporabljen le za grafe z manjšim številom vozlišč.

Za sistematično preverjanje majhnih grafov bova uporabila vgrajeno funkcijo `graphs(n)`, s katero bova generirala vse grafe z n vozlišči za majhne vrednosti n. Med temi grafi bova izločila tiste, ki niso outerplanarni, ter za preostale izračunala $\alpha_{od}(G)$ in preverila, ali velja neenakost

$$\alpha_{od}(G) \geq \frac{n}{7}.$$

Za preverjanje večjih primerov bova implementirala funkcijo za naključno generiranje outerplanarnih grafov. Najprej bova generirala 2-povezane outerplanarne grafe tako, da vzameva cikel poljubne dolžine in mu dodajava nepresečne diagonale. Nato bova več takšnih grafov združila v drevesno strukturo, s čimer bova dobila splošne outerplanarne grafe.

Za vsak tako generiran graf bova preverila outerplanarnost, izračunala vrednost $\alpha_{od}(G)$ in preverila veljavnost neenakosti $\alpha_{od}(G) \geq n/7$. Rezultate bova analizirala glede na število vozlišč in povezav ter poskušala identificirati primere, ki so blizu spodnje meje $n/7$.