

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
UNIVERZA V LJUBLJANI

Zunajravninski grafi

Poročilo naloge

Jure Krašovec, Urh Videčnik

Februar 2026

Kazalo

| | |
|---|---|
| 1 Teoretični uvod | 2 |
| 2 Cilj naloge | 2 |
| 3 Zunajravninski grafi na $n \leq 10$ vozliščih | 2 |

1 Teoretični uvod

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer je V množica vozlišč in E množica povezav med vozlišči. Zunajravninski graf (ang. Outerplanar graph) je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata in da vsa vozlišča ležijo na zunanjih strani oziroma zunanjem licu grafa. Takšni grafi so podmnožica ravninskih grafov.

Množica vozlišč $S \subseteq V$ grafa G je liha neodvisna množica, če za vsako vozlišče $u \in S$ velja, da je lihe stopnje ter za vsak par $u, v \in S$ velja, da med njima ne obstaja povezava v E . Za liho neodvisno množico S velja, da vsako vozlišče $v \in V \setminus S$ nima nobenega soseda v S : $N(v) \cap S = \emptyset$ ali pa ima liho število sosedov v S : $|N(v) \cap S| \equiv 1 \pmod{2}$. Z $\alpha_{od}(G)$ označimo največjo moč lihe neodvisne množice grafa G .

2 Cilj naloge

Cilj naloge je preveriti, veljavnost neenakosti

$$\alpha_{od}(G) \geq n/7,$$

za vsak zunajravninski graf G z n vozlišči. Nalogo smo razdelili na dva dela. Prvi del je namenjen preverjanju neenakosti na manjših zunajravninskih grafih - grafih z največ 10 vozlišči. V tem delu bomo implementirali algoritmom, ki bo generiral vse zunajravninske grafe z največ 10 vozlišči in za vsak graf izračunal $\alpha_{od}(G)$. V drugem delu pa bomo s postopkom lepljenja zunajravninskih grafov, generirali zunajravninske grafe z več kot 10 vozlišči in poskušali najti protiprimer, torej graf, za katerega ne velja zgornja neenakost.

3 Zunajravninski grafi na $n \leq 10$ vozliščih

Najprej bomo preverili neenakost $\alpha_{od}(G) \geq n/7$ za vse zunajravninske grafe z največ 10 vozlišči. Prvo bomo implementirali funkcijo, ki za dan graf preveri, ali je zunajravninski. Ker za vsak zunajravninski graf velja, da ga lahko narišemo kot krožno ravninski graf (angl. Circular planar graph), lahko za preverjanje zunajravninskosti uporabimo vgrajeno metodo `is_circular_planar`. Funkcijo za preverjanje zunajravninskosti smo testirali na nekaj grafih, da smo se prepričali o njeni pravilnosti. Za samo iskanje števila vseh zunajravninskih grafov smo definirali funkcijo `outerplanar_graphs(n)`. Znotraj funkcije smo uporabili metodo `planar_graphs(n)`, ki generira vse ravninske grafe z n vozlišči. Uporabo te metode nam omogoča program Plantri, katerega naložimo znotraj SageMath okolja. Na ta način prihranimo čas, saj je

število ravninskih grafov z n vozlišči veliko manjše od števila vseh grafov z n vozlišči. Za nadaljnjo filtracijo uporabimo pogoj $G.size() \leq G.order() - 3$, ki je nujen pogoj za zunajravninske grafe. Potem za vsak graf, ki izpoljuje ta pogoj, preverimo še, ali je zunajravninski z uporabo funkcije `preveri_outerplanarnost(G)`. Ker se želimo izogniti podvajanju izomorfnih grafov, shranjujemo le tiste grafe, ki niso izomorfni z že shranjenimi grafi, kar najlažje dosežemo z uporabo kanonične oblike grafa, ki jo dobimo z metodo `canonical_label()`.

Število zunajravninskih grafov na $n \leq 10$ vozliščih je prikazano v spodnji tabeli:

| n | število zunajravninskih grafov na n vozliščih |
|-----|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 5 |
| 5 | 13 |
| 6 | 46 |
| 7 | 172 |
| 8 | 777 |
| 9 | 3 783 |
| 10 | 20 074 |

Tabela 1: Število zunajravninskih grafov na $n \leq 10$ vozliščih.

Potem smo s funkcijo `check_alpha_od(G)` preverili, ali za vse zunajravninske grafe z največ 10 vozlišči velja neenakost $\alpha_{od}(G) \geq n/7$. Za izračun $\alpha_{od}(G)$ smo implementirali funkcijo `alpha_od(G)`, ki pregleda vse možne podmnožice množice vozlišč in preveri, ali so lihe neodvisne množice. Funkcija vrne največjo moč lihe neodvisne množice. Ugotovili smo, da neenakost velja za vse zunajravninske grafe z največ 10 vozlišči.

Za vsak n smo si še ogledali najmanjšo moč lihe neodvisne množice ter število grafov, pri katerih je ta vrednost dosežena. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli:

| n | $\min \alpha_{od}$ | število zunajravninskih grafov |
|-----|--------------------|--------------------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 3 |
| 5 | 1 | 5 |
| 6 | 1 | 4 |
| 7 | 1 | 2 |
| 8 | 2 | 204 |
| 9 | 2 | 428 |
| 10 | 2 | 687 |

Tabela 2: Število zunajravninskih z minimalno vrednostjo α_{od} na $n \leq 10$ vozliščih.