Vaje MA - Odvod - Osnovne lastnosti

1. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij:

   (a) $g(x) = x^5, \qquad h(x) = x^3 + 2x - 1,$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad g(x) = 2\sqrt{x} + 1, \qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

2. Odvajaj naslednje funkcije:

   (a) $y = 2x^4 + 3x - x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - 3, \qquad y = \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}},$

   (b) $y = e^x \cos(x), \qquad y = (x^2 + 2^x) \arcsin x,$

   (c) $y = \frac{e^x}{x}, \qquad y = \frac{2e^x+1}{\sqrt[3]{x}+\sin x},$

   (d) $y = \cos(4e^x + 3x), \qquad y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}, \qquad y = e^{x^2 \sin x},$

   (e) $y = \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{2x+1}+sin(2x)}, \qquad y = (1 + \ln(x))^{10} \cos(x^2), \qquad y = \frac{e^{2x}+\arccos(x^2)}{\sqrt[5]{2x+1}},$

   (f) $y = \arctan(e^{2x+1} + \sqrt{2x+1}), \qquad y = \sqrt[5]{\cos(2\ln(x) + 1)},$

   (g) $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \qquad y = (1 + 2x)^{\sin^2(x)}.$

3. *Hiperbolične funkcije*, kosinus, sinus in tangens, so definirane z naslednjimi predpisi:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

   Na območjih, kjer so hiperbolične funkcije injektivne, definiramo izverzne funkcije, *area* funkcije, Arsh, Arch in Arth.

   (a) Utemelji, da je sh injektivna povsod na $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti oziroma definicijsko območje Arsh pa je $\mathcal{Z}_{\text{sh}} = \mathcal{D}_{\text{Arsh}} = \mathbb{R}$. Funkcija ch postane injektivna kot zožitev na $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_{\text{ch}} = [0, \infty) = \mathcal{D}_{\text{Arch}}$, th pa je injektivna povsod na $\mathbb{R}$ z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_{\text{th}} = (-1, 1) = \mathcal{D}_{\text{Arth}}$.

   (b) Izračunaj odvode hiperboličnih in njihovih inverznih funkcij:
   $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x, \qquad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x, \qquad (\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$
   $(\mathrm{Arch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad (\mathrm{Arsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (\mathrm{Arth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$

4. Dana je funkcija $g(x) = \frac{x^3}{3}$.

   (a) Določi tangento na graf funkcije $g$ v točki $(3, 9)$. Poišči tudi vse tangente, ki so vzporedne premici $y = 2y - 4$sekajo, ter vse tangente, ki sekajo $x$-os pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

   (b) Določi koeficient premice $y = kx - 18$, da bo ta tangentna na graf funkcjie $g$.

5. Poišči kot med krivuljama z enačbama $y = x^2 + 3x - 2$ in $y = 2x^2 - 6$. (Kot med krivuljama v presečni točki definiramo kot kot med ustreznima tangentama na krivulji.)

6. Določi tangento na krivuljo $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ v točki $(1, \sqrt{2})$

7. V trenutku $t = 0$ začnemo opazovati prevoženo pot nekega avtomobila v odvisnosti od časa $t$. Opišemo jo s funkcijo $s(t) = t(t-2)^2$.

   (a) Kako se v odvisnosti od časa $t$ spreminja hitrost $v(t)$ in pospešek $a(t)$ avtomobila? (Hitrost in pospešek sta prvi in drugi odvod poti po času.)

   (b) Kaj nam pove predznak hitrosti oziroma kdaj je hitrost enaka 0? Kaj nam predznak pospeška pove o (strogem) naraščanju in padanju hitrosti?

8. Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2bx + a, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}.$$
   Določi parametra $a$ in $b$, da bo funkcija $f$ zvezna v točkah $x = 0$ in $x = 1$? Ali ima potem funkcija v teh dveh točkah enolično določeno tangento oziroma ali je odvedljiva?

9. Dana naj bo funkcija
$$f(x) = \begin{cases} -x + \ln(1+x), & -1 < x < 0 \\ b\cos(\frac{\pi x}{2}) + a, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} - 2bx, & x > 1 \end{cases}.$$
   Določi parametra $a$ in $b$, da bo funkcija $f$ zvezna povsod, kjer je definirana. Ali je pri dobljenih parametrih funkcija $f$ odvedljiva v kateri izmed točk $x = 0$ in $x = 1$?

10. Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$
   Določi odvod funkcije $f$. (Odvod funkcije $f$ v točki $x = 0$ izračunaj po definiciji odvoda v točki.)

11. Izračunaj višje odvode funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = \frac{1}{2x+1}$. Ugani tudi formulo za $n$-ti odvod, ter jo z indukcijo dokaži.