Analiza 1

5. domača naloga

(1) Po definiciji pokaži, da je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n+2^n} = 0.$$

(2) Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom
$$a_n = \frac{n}{1+n^2}.$$

(a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Obravnavaj omejenost zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
(d) Za katere $n \in \mathbb{N}$ se a_n razlikuje od $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ za manj kot $\frac{1}{100}$.

$\boxed{\text{(a) padajoče (b) omejeno (c) } 0 \text{ (d) } n \geq 100}$

(3) Določi stekališča zaporedij:

(a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$ (b) $a_n = \left(\dfrac{n+(-1)^n}{n+10}\right)^n$ (c) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Katera so konvergentna?

$\boxed{\text{(a) } 1, -1 \text{ (b) } e^{-9},\ e^{-11} \text{ (c) } 0, 1, 2}$

(4) Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s splošnim členom
$$a_n = \frac{2^n+3}{2^{n+1}-1}.$$

(a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Ali je zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno?
(c) Ugotovi, ali obstajajo $\min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ in $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Tiste, ki obstajajo, tudi določi.

$\boxed{\text{(a) padajoče (b) omejeno (c) } \max\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{5}{3},\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{1}{2},\ \min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ ne obstaja}}$

(5) Če obstaja, poišči primer zaporedja, ki zadošča:
(a) je naraščajoče in konvergentno
(b) je naraščajoče in ima dve stekališči
(c) je neomejeno in konvergentno
(d) ima dve stekališči in je neomejeno

$\boxed{\text{(a) } a_n = 1 - \frac{1}{n} \text{ (b) ne obstaja (c) ne obstaja (d) } 1, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 5, 1, 2, 6, \ldots}$

(6) Konstruiraj zaporedja, ki ima za stekališča natanko vsa naravna števila. Ali obstaja zaporedje, ki ima za stekališča natanko vsa racionalna števila? Kaj pa realna števila?