Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

Построение и исследование аналитической модели дискретно-стохастической СМО

Вариант 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнили  ст. группы № 950505  Киреев Ю.В.  Денисов В.А. |  | Проверила  Герман Ю.О. |
|  |  |  |

Минск 2022

# 1 Цель

Изучить методы анализа поведения дискретно-стохастической СМО.

# 2 Задание

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0,10 | 0,20 | 0,40 | 0,30 |
| S1 | 0,30 | 0,10 | 0,40 | 0,20 |
| S2 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,40 |
| S3 | 0,30 | 0,30 | 0,30 | 0,10 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы : P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

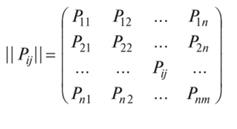
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0,10 | 0,20 | 0,40 | 0,30 |
| S1 | 0,30 | 0,10 | 0,40 | 0,20 |
| S2 | 0,00 | 0,00 | 1,00 | 0,00 |
| S3 | 0,30 | 0,30 | 0,30 | 0,10 |

# 3 Краткие теоретические сведения

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют дискретной марковской цепью.

Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью графа состояний системы, где вершины представляют возможные состояния , *S*2, ..., *Sn* системы, а дуги — возможные переходы из состояния *Sj* в состояние *Sk*, (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Над каждой стрелкой, как правило, проставляются соответствующие вероятности перехода из состояния *Sj* в состояние *Sk*

Однородная марковская цепь может быть полностью описана матрицей переходных вероятностей:

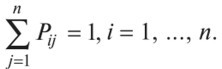


и начальным распределением *рт(*0), где *т =* 1,2,...

Распределение *Х0* называется начальным распределением марковской цепи:

https://studref.com/htm/img/15/6619/239.png

Элементы матрицы переходных вероятностей обладают следующими свойствами: *Pij* > 0



Рассмотрим пример расчета. Пусть матрица переходных вероятностей суть

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

Сумма вероятностей по каждой строке равна 1. Составим систему уравнений для установившегося режима

p0 = 0.1\*p0+ 0.4\*p1+0.6\*p2

p1 = 0.2\*p0+ 0.3\*p1+ 0.3\*p2

1 = p0+ p1 + p2

Решаем систему и находим:

p0= 0.26, p1 = 0.34, p2 = 0.4

Можно также найти вероятности состояний системы на шаге. Для этого нужно знать вероятности состояний системы в начальный момент времени:

(например) P0(0) = 1, P1(0)=0, P2(0)=0. Эти вероятности проще обозначить как вектор: R(0)=<P0(0), P1(0), P2(0)>. Пусть матрица переходных вероятностей обозначена как P. Тогда вероятности состояния системы на шаге k вычисляются по формуле R(k)= R(0)⋅Pk. Здесь Pk - k-ая степень матрицы. На примере: R(1)= R(0)⋅P1 = R(1) = <1, 0,0> ×

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.1, 0.2, 0,7>

R(2) = R(1)⋅P = R(0)⋅P2 = <0.1, 0.2, 0.7> ×

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.51, 0.22, 0.27>

R(3) = <0.51, 0.22, 0.27> ×

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.3, 0.22, 0.48> и т.д.

Видим, что значения постепенно сходятся к установившимся: <0.26, 0.34, 0.4>

Поглощающие марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

# В матричном виде запишем

# T = Q\*T+I,

# где I – единичная диагональная матрица.

Здесь Q – матрица вероятностей переходов, которая получается из матрицы P удалением строк и столбцов, соответствующих поглощающим состояниям. Например, пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0 | 1.0 | 0 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

Здесь одно поглощающее состояние:S1. Удаляем строку и столбец S1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | S0 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.7 |
| S2 | 0.6 | 0.2 |

Это есть матрица Q.

||Q||=

Запишем уравнения T = Q\*T+I

в таком виде:

t1=q11\*t1 +q12\*t2+q1z\*tz+1

t2=q21\*t1 +q22\*t2+q2z\*tz+1

…

tz=qz1\*t1 +qz2\*t2+qzz\*tz+1,

где ti – среднее количество шагов, которое сделаем из состояния ti в поглощающее состояние; qij – вероятность перехода.

Согласно примеру получаем всего два уравнения:

t0=q00\*t0 +q02\*t2+1

t2 =q20\*t0 + q22\*t2 +1

или

t0=0.1\*t0 +0.7\*t2+1

t2 =0.6\*t0 + 0.2\*t2 +1

Матрица Т выражается в виде формулы

Т = (I – Q)-1.

Матрица I-Q имеет такой вид в нашем случае:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | S0 | S2 |
| S0 | 0.9 | -0.7 |
| S2 | -0.6 | 0.8 |

С помощью Excel найдем обратную матрицу:

|  |  |
| --- | --- |
| 2,666667 | 2,333333 |
| 2 | 3 |

Итак, если система стартует из состояния S0, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 2.66+2.33 = 5 шагов. Если система стартует из состояния S2, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 2+3 шага (сумма берется по строке матрицы Т = (I – Q)-1. ).

# Ход работы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0,10 | 0,20 | 0,40 | 0,30 |
| S1 | 0,30 | 0,10 | 0,40 | 0,20 |
| S2 | 0,20 | 0,20 | 0,20 | 0,40 |
| S3 | 0,30 | 0,30 | 0,30 | 0,10 |

Для заданного варианта составим систему уравнений:

p0=0.1\*p0+0.3\*p1+0.2\*p2+0.3\*p3

p1=0.2\*p0+0.1\*p1+0.2\*p2+0.3\*p3

p2=0.4\*p0+0.4\*p1+0.2\*p2+0.3\*p3

p3=0.3\*p0+0.2\*p1+0.4\*p2+0.1\*p3

1=p0+p1+p2+p3

Решив ее, получим p0 = 0.22, p1 =0.21, p2 = 0.31 p3 =0.26. Их мы и примем за начальное состояние.

Найдем состояние системы на первом, втором и третьем шаге.

**R**(k)= **R**(0)⋅**P**k.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| R0 | 0,22402 | 0,205352 | 0,311761 | 0,258867 |
| R1 | 0,2240 | 0,2054 | 0,3118 | 0,2589 |
| R2 | 0,2240 | 0,2054 | 0,3118 | 0,2589 |
| R3 | 0,2240 | 0,2054 | 0,3118 | 0,2589 |

R3 - состояние системы на 3 шаге.

Исключим из данной матрицы столбец и строку поглощающего состояния S2 и S2 и получим следующую матрицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S3 |
| S0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| S1 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |
| S3 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |

Это есть матрица Q.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ||Q|| | q00 | q01 | q03 |
|  | q10 | q11 | q13 |
|  | q30 | q31 | q33 |

Запишем уравнения T = Q\*T+I в таком виде:

t0=q00\*t0+q01\*t1+q03\*t3+1;  
t1=q10\*t0+q11\*t1+q13\*t3+1;  
t3=q30\*t0+q31\*t1+q33\*t3+1;  
или  
t0=0,1\*t0+0,2\*t1+0,3\*t3+1;  
t1=0,3\*t0+0,1\*t1+0,2\*t3+1;  
t3=0,3\*t0+0,3\*t1+0,1\*t3+1;

Матрица Т выражается в виде формулы Т = (I – Q)-1. Матрица I-Q имеет такой вид в нашем случае:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S3 |
| S0 | 0,9 | -0,2 | -0,3 |
| S1 | -0,3 | 0,9 | -0,2 |
| S3 | -0,3 | -0,3 | 0,9 |

Найдем обратную матрицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| S0 | 1,497006 | 0,538922 | 0,618762 | = | 2,654691 |
| S1 | 0,658683 | 1,437126 | 0,538922 | = | 2,634731 |
| S3 | 0,718563 | 0,658683 | 1,497006 | = | 2,874251 |

Итак, если система стартует из состояния S0, то она попадет в поглощающее состояние в среднем за 2,65 то есть за 3 шага, если стартует из состояния S1 то в среднем за 2,63 то есть за 3 шага, если стартует из состояния S3 то в среднем за 2,87 то есть за 3 шага.

**5 Вывод**

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы анализа поведения дискретно-стохастической СМО.