**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.**

***Построение и исследование аналитической модели дискретно – стохастической СМО***

**Цель**. Изучить методы анализа поведения дискретно-стохастической СМО.

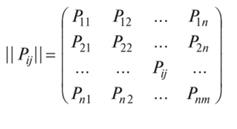
**Краткое теоретическое введение.**

Рассматриваем СМО с марковскими процессами.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют **дискретной марковской цепью.**

Такие процессы удобно иллюстрировать с помощью **графа состояний** системы, где вершины представляют возможные состояния , *S*2, ..., *Sn* системы, а дуги — возможные переходы из состояния *Sj* в состояние *Sk*, (на графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния). Над каждой стрелкой, как правило, проставляются соответствующие вероятности перехода из состояния *Sj* в состояние *Sk*

Однородная марковская цепь может быть полностью описана **матрицей переходных вероятностей**:

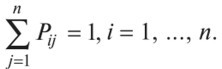


и начальным распределением *рт(*0), где *т =* 1,2,...

*Замечание.* Распределение *Х0* называется начальным распределением марковской цепи:

https://studref.com/htm/img/15/6619/239.png

Элементы матрицы переходных вероятностей обладают следующими свойствами: *Pij* > 0



Рассмотрим пример расчета. Пусть матрица переходных вероятностей суть

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

Сумма вероятностей по каждой строке равна 1.

Составим систему уравнений для установившегося режима

p0 = 0.1\*p0+ 0.4\*p1+0.6\*p2

p1 = 0.2\*p0+ 0.3\*p1+ 0.3\*p2

1 = p0+ p1 + p2

Решаем систему и находим:

p0= 0.26

p1 = 0.34

p2 = 0.4

Можно также найти вероятности состояний системы на шаге. Для этого нужно знать вероятности состояний системы в начальный момент времени:

(например) P0(0) = 1, P1(0)=0, P2(0)=0. Эти вероятности проще обозначить как вектор: **R**(0)=<P0(0), P1(0), P2(0)>. Пусть матрица переходных вероятностей обозначена как **P**. Тогда вероятности состояния системы на шаге k вычисляются по формуле

**R**(k)= **R**(0)⋅**P**k.

Здесь **P**k - k-ая степень матрицы. На примере:

**R**(1)= **R**(0)⋅**P**1 =

**R**(1) = <1, 0,0> **×**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.1, 0.2, 0,7>

**R**(2) = **R**(1)⋅**P** = **R**(0)⋅**P**2 = <0.1, 0.2, 0.7> **×**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.51, 0.22, 0.27>

**R**(3) = <0.51, 0.22, 0.27> **×**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0.4 | 0.3 | 0.3 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

= <0.3, 0.22, 0.48>

и т.д.

Видим, что значения постепенно сходятся к установившимся: <0.26, 0.34, 0.4>

И последнее. Нас будет интересовать расчет систем с поглощающими состояниями.

**Поглощающие** марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

# В матричном виде запишем

# T = Q\*T+I,

# где I – единичная диагональная матрица.

Здесь Q – матрица вероятностей переходов, которая получается из матрицы P удалением строк и столбцов, соответствующих поглощающим состояниям. Например, пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.7 |
| S1 | 0 | 1.0 | 0 |
| S2 | 0.6 | 0.2 | 0.2 |

Здесь одно поглощающее состояние:S1. Удаляем строку и столбец S1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | S0 | S2 |
| S0 | 0.1 | 0.7 |
| S2 | 0.6 | 0.2 |

Это есть матрица Q.

||Q||=

Запишем уравнения

# T = Q\*T+I

в таком виде:

t1=q11\*t1 +q12\*t2+q1z\*tz+1

t2=q21\*t1 +q22\*t2+q2z\*tz+1

…

tz=qz1\*t1 +qz2\*t2+qzz\*tz+1,

где ti – среднее количество шагов, которое сделаем из состояния ti в поглощающее состояние;

qij – вероятность перехода.

Согласно примеру получаем всего два уравнения:

t0=q00\*t0 +q02\*t2+1

t2 =q20\*t0 + q22\*t2 +1

или

t0=0.1\*t0 +0.7\*t2+1

t2 =0.6\*t0 + 0.2\*t2 +1

Матрица Т выражается в виде формулы

Т = (I – Q)-1.

Матрица I-Q имеет такой вид в нашем случае:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | S0 | S2 |
| S0 | 0.9 | -0.7 |
| S2 | -0.6 | 0.8 |

С помощью Excel найдем обратную матрицу:

|  |  |
| --- | --- |
| 2,666667 | 2,333333 |
| 2 | 3 |

Итак, если система стартует из состояния S0, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 2.66+2.33 = 5 шагов.

Если система стартует из состояния S2, то она попадает в поглощающее состояние в среднем за 2+3 шага (сумма берется по строке матрицы

Т = (I – Q)-1. ).

**Задание**.

**Вариант 1**.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| S1 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| S2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы :P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| S1 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| S2 | 0 | 0 | 1.0 | 0 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

**Вариант 2**.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.7 |
| S1 | 0.3 | 0.3 | 0.2 | 0.2 |
| S2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.5 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы :P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.7 |
| S1 | 0 | 1.0 | 0 | 0 |
| S2 | 0 | 0 | 1.0 | 0 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

**Вариант 3**.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.6 | 0.1 |
| S1 | 0.3 | 0.5 | 0.1 | 0.1 |
| S2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |
| S3 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы : P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.6 | 0.1 |
| S1 | 0.3 | 0.5 | 0.1 | 0.1 |
| S2 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |
| S3 | 0 | 0 | 0 | 1.0 |

**Вариант 4**.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| S1 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| S2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы :P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |
| S1 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |
| S2 | 0 | 0 | 1.0 | 0 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

**Вариант 5**.

Пусть матрица переходных вероятностей P суть

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 0.6 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| S1 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |
| S2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

1. Найти установившиеся вероятности состояний системы :P0, P1, P2, P3.
2. Рассчитать вероятности состояний системы на третьем шаге (k=3)
3. Рассчитать число шагов до попадания в поглощающее состояние для матрицы вероятностей переходов

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | S1 | S2 | S3 |
| S0 | 1.0 | 0 | 0 | 0 |
| S1 | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |
| S2 | 0 | 0 | 1.0 | 0 |
| S3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

**Контрольные вопросы**.

1. Что такое марковский процесс?
2. Что представляет собой дискретная цепь (система) маркова?
3. Как дискретная марковская СМО представляется графически?
4. Какова формула для оценки вероятностей состояний дискретной СМО Маркова в установившемся режиме?
5. Как вычислить число шагов до попадания в поглощающее состояние?