Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Отчет по лабораторной работе № 7

на тему

«Анализ и оптимизация решений на основе моделей массового обслуживания»

Вариант 5

Выполнила: ст. группы 950505

Измайлович А. С.

Проверила: Герман Ю. О.

Минск 2022

1. **Цель работы**

Изучить методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.

1. **Краткие теоретические сведения**

Система массового обслуживания (СМО) – это любая система, предназначенная для обслуживания поступающих в нее заявок.

Примеры СМО – предприятие, выполняющее заказы; станок, обрабатывающий детали; компьютер, решающий задачи; магазин, обслуживающий покупателей, и т.д.

Заявки, поступающие на обслуживание в СМО (заказы, детали, задачи, покупатели и т.д.), образуют поток заявок. Элементы СМО, обслуживающие заявки, называются каналами обслуживания.

В большинстве случаев интервалы времени между моментами поступления заявок и/или времена обслуживания заявок в СМО представляют собой случайные величины. Другими словами, в большинстве случаев заранее точно неизвестно, когда поступит очередная заявка и сколько времени займет ее обслуживание. Поэтому теория систем массового обслуживания основана на математическом аппарате теории вероятностей и математической статистики.

1. **Задание**

**3.1. Системы массового обслуживания: одноканальные системы.**

Станок используется для обработки некоторых деталей. Интервалы между деталями, поступающими на обработку, составляют X минут. Время обработки детали на станке – Y минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют A денежных единиц в час, когда станок работает (т.е. обрабатывает детали), и B денежных единиц в час – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной детали составляет C денежных единиц. Детали продаются по цене D денежных единиц.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **X** | **Y** | **A** | **B** | **C** | **D** |
| 5 | Экспоненциальная величина со средним значением 10 минут | Гауссовская величина со средним значением 7 минут, стандартным отклонением 0.5 минут | 18 | 4 | 2 | 12 |

Предполагая, что интервалы между деталями и времена обработки – экспоненциальные случайные величины, найти следующие вероятности:

- вероятность наличия в системе ровно двух деталей;

- вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит более трех;

- вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит не более четырех;

- вероятность того, что в системе не будет ни одной детали, ожидающей обработки.

**3.2. Системы массового обслуживания: многоканальные системы без ограничений на очередь.**

Два станка используются для обработки некоторых деталей. Интервалы между деталями, поступающими на обработку, составляют Y минут. Время обработки детали на станке – ** минут. Затраты, связанные с работой станка, составляют A денежных единиц в час, когда станок работает (т.е. обрабатывает детали), и B денежных единиц в час – когда станок простаивает. Прочие затраты на обработку одной детали составляет C денежных единиц. Детали продаются по цене D денежных единиц.

| **Вариант** | ***Y*** |  | **A** | **B** | **C** | **D** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 10 | 7 | 18 | 4 | 2 | 12 |

а) Вычислить характеристики системы.

б) Вычислить следующие вероятности состояний:

* вероятность наличия в системе ровно двух деталей;
* вероятность наличия в системе ровно пяти деталей;
* вероятность того, что поступившая деталь будет сразу же (без ожидания в очереди) принята на обработку;
* вероятность наличия в системе не более трех деталей;
* вероятность наличия в системе более чем трех деталей, ожидающих обработки.

в) Найти:

* достаточно ли одного станка для обработки деталей;
* сможет ли система с двумя станками обслуживать детали, если в нее будет поступать дополнительный поток деталей со средним интервалом между деталями 7 минут.

г) Вычислить прибыль за 8 часов работы.

**3.3. Системы массового обслуживания: системы с приоритетами.**

Задание выполняется согласно пункту 10.12.

В некоторой система массового обслуживания обрабатываются заявки двух типов (*A* и *B*). Интервалы между моментами поступления заявок – экспоненциальные случайные величины со средним значением *Y* минут. Время обработки заявок – *X* минут.

Примечание – Для поиска необходимых параметров распределений (например, дисперсии) воспользоваться Интернетом.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | *A* | | *B* | |
| *Y* | *X* | *Y* | *X* |
| 5 | 15 | Экспоненциальная случайная величина, среднее – 3 минуты | 12 | 4 ± 1 минуты |

Вычислить характеристики системы для **трех** дисциплин обслуживания: а) без приоритетов; б) с относительными приоритетами; в) с абсолютными приоритетами. Для дисциплин обслуживания **с приоритетами** более высокий приоритет имеют заявки с меньшим ожидаемым временем обслуживания (т.е. с меньшим значением *X*).

Расчет для обслуживания **без приоритетов** выполнить согласно пункту 10.11 (СМО с заявками с разным временем обслуживания).

Проанализировать полученные характеристики и выбрать дисциплину обслуживания, обеспечивающую кратчайшее среднее время пребывания заявки в СМО.

1. **Ход работы**

**4.1. Системы массового обслуживания: одноканальные системы**

Имеется один канал обслуживания. Интервал между деталями составляет в среднем 10 мин, поэтому λ=1/10 = 0,1 детали/мин. Обработка одной детали занимает в среднем 7 мин, поэтому  = 7 мин, μ=1/7 = 0,143 детали/мин. Число каналов m=1.

Найдем нагрузку на СМО: ρ=λ/(*m*μ) = 0,1/0,143=0,7.

- коэффициент вариации в нашем случае считается по этой формуле, поскольку время обработки деталей – гауссовская величина.

Характеристика станка:

– вероятность простоя СМО: = 1–ρ = 1 – 0,7 = 0,3

– вероятность отказа: *P*отк = 0

– вероятность обслуживания: *P*обсл = 1– *P*отк = 1

– коэффициент загрузки СМО: *U*= ρ =0,7

*–* среднее число заявок в очереди: = 0,82 детали

– среднее число заявок на обслуживании: = 0,7 детали

– среднее число заявок в СМО: = 0,083 + 0,7 = 1,52 детали

– среднее время пребывания заявки в очереди: = 8,2 мин

– среднее время пребывания заявки в СМО: = 15,2 мин

– пропускная способность: γ = λ= 0,1

Вероятность наличия в системе ровно двух деталей:

= ρ*2*(1–ρ) = 0,49 \* 0,3 = 0,79

Вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит более трех:

*P*(*j*>3) = = = 0,3 + 0,21 + 0,79 + 0,1029 = 1,403

Вероятность того, что количество деталей, ожидающих обработки, составит не более четырех:

*P*(*j*≤4) = = = 0,3 + 0,21 + 0,79 + 0,1029 +

+ 0,07203 = 1,475

Вероятность того, что в системе не будет ни одной детали, ожидающей обработки, является вероятностью простоя системы:

= 1–ρ = 1 – 0,7 = 0,3

Прибыль от работы станка за рабочую смену:

Доход за 480 минут:

денежных единиц

Прочие затраты для обработки деталей за смену:

денежных единиц

денежных единиц

Итоговая прибыль: денежных единиц

**4.2. Системы массового обслуживания: многоканальные системы без ограничений на очередь**

Имеется два канала обслуживания. Интервал между деталями составляет в среднем 10 мин, поэтому λ=2/10 = 0,2 детали/мин. Обработка одной детали занимает в среднем 7 мин, поэтому  = 7 мин, μ=2/7 = 0,286 детали/мин. Число каналов m=2.

Найдем нагрузку на СМО: ρ=λ/(*m*μ) = 0,2/2\*0,286=0,35.

а) Характеристики системы:

– вероятность простоя СМО: = 1/(1+0,377 +

+ 0,7 + 0,377) = 0,408

– вероятность отказа: *P*отк = 0

– вероятность обслуживания: *P*обсл = 1– *P*отк = 1

– коэффициент загрузки СМО: *U*= ρ =0,35

*–* среднее число заявок в очереди: = 0,07/0,845 =

= 0,083 детали

– среднее число заявок на обслуживании: = 0,7 детали

– среднее число заявок в СМО: = 0,083 + 0,7 = 0,783 детали

– среднее время пребывания заявки в очереди: = 0,083 / 0,2 =

= 0,415 мин

– среднее время пребывания заявки в СМО: = 0,783 / 0,2 = 3,915 мин

– пропускная способность: γ = λ= 0,2

б) Вероятности состояний:

* вероятность наличия в системе ровно двух деталей:

= m*2*ρ*2*\* / 2! = 0,1

вероятность наличия в системе ровно пяти деталей:

= m*5*ρ*5*\* / 5! = 0,00057

* вероятность того, что поступившая деталь будет сразу же (без ожидания в очереди) принята на обработку. Для этого требуется, чтобы количество деталей, находящихся в системе, не превышало двух. Вероятность такого состояния находится по формуле:

*P*(*j*≤2) = = = 0,408 + 0,286 + 0,1 = 0,794

* вероятность наличия в системе не более трех деталей:

*P*(*j*≤3) = = = 0,408 + 0,286 + 0,1 +

*+* 0,023 = 0,817

* вероятность наличия в системе более чем трех деталей, ожидающих обработки:

*P*(*j*>4) = = = 0,408 + 0,286 + 0,1 +

*+* 0,023 + 0,004 = 0,821

в) Достаточно ли одного станка для обработки деталей?

Система загружена на 35% от всего времени своей работы. В течение 65% времени система простаивает из–за отсутствия заявок. Таким образом, одного станка достаточно.

Сможет ли система с двумя станками обслуживать детали, если в нее будет поступать дополнительный поток деталей со средним интервалом между деталями 7 минут?

Интервал между деталями составляет в среднем 10 мин и 7 минут, поэтому λ1=1/10 = 0,1 детали/мин и λ2=1/7 = 0,143 детали/мин.

λ = 0,1 + 0,143 = 0,243

Обработка одной детали занимает в среднем 7 мин, поэтому  = 7 мин, μ=1/7 = 0,143 детали/мин.

Найдем нагрузку на СМО:

ρ = λ/(*m*μ) = 0,243/2\*0,143 = 0,85

Таким образом, система сможет обслуживать детали, поскольку общая загруженность составить 85%.

г) Прибыль за 8 часов работы:

Выручка от обслуживания заявок в СМО в течение времени *T*:

*V* = γ *C* *T* = 0,2 \* 12 \* 480 = 1152 денежных единиц

Прочие затраты для обработки деталей за смену:

денежных единиц

денежных единиц

Итоговая прибыль:

денежных единиц

**4.3. Системы массового обслуживания: системы с приоритетами**

Характеристики системы для трех дисциплин обслуживания:

а) без приоритетов

Имеется один канал обслуживания. Среднее время обработки деталей всех видов:

= 0,447·3+0,553·4 =1,341 + 2,212 = 3,553 мин.

Интервал между заявками составляет в среднем 15 и 12 мин, поэтому λА=1/15 = 0,067 заявки/мин и λВ=1/12 = 0,083 заявки/мин. Обработка одной заявки занимает в среднем 3 и 4 мин, поэтому μА =1/3 = 0,33 заявки/мин и μВ =1/4 = 0,25 заявки/мин. Число каналов m=1.

λ = 0,067 + 0,083 = 0,15 заявки/мин

μ=1/3,553 = 0,28 заявки/мин

Найдем доли деталей каждого вида в общем потоке деталей:

*PA* = 0,067/0,15 = 0,447

*PB* = 0,083/0,15 = 0,553

Найдем нагрузку на СМО:

ρA=λA/(*m*μA) = 0,067/0,33 = 0,2

ρB=λB/(*m*μB) = 0,083/0,25 = 0,332

ρ= 0,15/0,28 = 0,536

Найдем коэффициент вариации времени обработки всех заявок.

Время обработки заявок А – случайная величина, распределенная экспоненциально. Из теории вероятностей известно, что дисперсия такой величины определяется по формуле:

= 0,0045

Время обработки заявок В – случайная величина, распределенная по гауссовскому закону. Для нее известно стандартное отклонение: σ=1 мин. Из теории вероятностей известно, что дисперсия такой величины определяется по формуле:

= 1

Так как поток заявок пуассоновский, интервалы времени между заявками – экспоненциальные случайные величины. Поэтому коэффициент вариации интервалов времени между заявками ν=1.

Вторые начальные моменты времен обработки деталей каждого вида: α*A*=*DA* + = 0,0045+32 = 9,0045

α*B* =1 + 16 = 17

Второй начальный момент времени обслуживания всех заявок: α=0,447·9,0045 + 0,553·17 = 4,025 + 9,401 = 13,426

Дисперсия времени обслуживания всех заявок:

*D* =13,426 – 3,5532= 0,802191.

Коэффициент вариации времени обслуживания всех заявок:

= 0,252

Характеристики системы:

– вероятность простоя СМО: = 1–ρ = 1 – 0,536= 0,464

– вероятность отказа: Pотк = 0

– вероятность обслуживания: Pобсл = 1– Pотк = 1

– коэффициент загрузки СМО: U= ρ = 0,536

– среднее число заявок в очереди: = 0,33 заявки

– среднее число заявок на обслуживании: = 1,072 заявки

– среднее число заявок в СМО:  = 0,33 + 1,072 = 1,402 заявки

– среднее время пребывания заявки в очереди: = 0,33 / 0,15 =

= 2,2 мин

– среднее время пребывания заявки в СМО: = 1,402 / 0,15 = 9,347 мин

– пропускная способность: γ = λ= 0,15

Проанализируем полученные характеристики СМО.

Система загружена на 53,6% от всего времени своей работы. В течение 46,4% времени система простаивает из–за отсутствия заявок. Таким образом, загрузка системы невелика. Такую загрузку можно считать нормальной. Таким образом, дальнейшее увеличение загрузки возможно.

В среднем в очереди находится 0,33 заявки, а в очереди и на обслуживании – 1,402 заявки. Время от поступления заявки в систему до начала ее обслуживания (т.е. время пребывания заявки в очереди) составляет в среднем 2,2 мин. Время от поступления заявки в систему до окончания ее обслуживания составляет в среднем 9,347 мин.

б) с относительными приоритетами

В СМО сотносительными приоритетами заявка, поступившая на обслуживание (т.е. в канал), всегда обслуживается до конца, даже если в это время поступает заявка с более высоким приоритетом.

Расчет характеристик СМО с приоритетами во многих случаях удобно начинать с вычисления среднего времени пребывания в очереди для заявок с различными уровнями приоритета.

* для заявок с высшим приоритетом (с приоритетом 1):

= 0,4 мин

* для заявок с приоритетами 2,3,…,*R*:

= 1,2 мин

Среднее время пребывания заявки в очереди:

= 0,8426 мин

Среднее время пребывания заявки в СМО:



3,4 мин

5,2 мин

= 4,4 мин

Среднее число заявок в СМО:

, *i*=1,…,*R*,

0,23 заявки

0,43 заявки

= 0,66 заявок

Среднее число заявок на обслуживании (среднее число занятых каналов):

, *i*=1,…,*R*,

= 0,536 заявок

Среднее число заявок в очереди:

, *i*=1,…,*R*,

= 0,03 + 0,098 = 0,128 заявок

Пропускная способность СМО:

, *i*=1,…,*R*,

= 0,15 заявок/мин

Вероятность простоя СМО:

*P*0 = 1 – ρ = 0,464

Коэффициент загрузки СМО:

, *i*=1,…,*R*,

= 0,536

в) с абсолютными приоритетами

В СМО с абсолютными приоритетами обслуживание заявки прерывается, если поступает заявка с более высоким приоритетом. Заявка, обслуживание которой было прервано, возвращается в очередь и поступает на дообслуживание только тогда, когда в очереди не останется ни одной заявки с более высоким приоритетом.

Расчет характеристик СМО с приоритетами во многих случаях удобно начинать с вычисления среднего времени пребывания в очереди для заявок с различными уровнями приоритета.

* для заявок с высшим приоритетом (с приоритетом 1):

= 0,4 мин

* для заявок с приоритетами 2,3,…,*R*:

= 2 + 2,74 = 4,74 мин

Среднее время пребывания заявки в очереди:

= 2,8 мин

Остальные характеристики аналогичны расчетам с относительным приоритетом:

Среднее время пребывания заявки в СМО:



3,4 мин

8,74 мин

= 6,37 мин

Среднее число заявок в СМО:

, *i*=1,…,*R*,

0,23 заявки

0,725 заявки

= 0,955 заявок

Среднее число заявок на обслуживании: 0,536 заявок

Среднее число заявок в очереди:

, *i*=1,…,*R*,

= 0,03 + 0,642 = 0,672 заявок

Пропускная способность СМО: 0,15 заявок/мин

Вероятность простоя СМО: *P*0 = 0,464

Коэффициент загрузки СМО: 0,536

Таким образом, дисциплина обслуживания с относительными приоритетами обеспечивает кратчайшее среднее время пребывания заявки в СМО.

1. **Вывод**

В результате выполнения лабораторной работы были изучены методы анализа и оптимизации решений на основе моделей массового обслуживания.