

第1章 几何光学基础 I

- § 1. 1 几何光学的基本定律
- § 1. 2 成像的基本概念与完善成像条件
- § 1. 3 光路计算与近轴光学系统
- § 1. 4 球面光学成像系统

背景知识

- 十七世纪初到十九世纪初，物理学各分支学科相继建立并发展。
- **光学**是物理学中最古老的基础学科之一。近代早期对光学的研究主要集中在**对光的直线传播、反射和折射等现象的观察和实验**，并在生产生活的需要下，取得应用。十七世纪，光学的发展取得了转折性的进步，几何光学日臻完善，物理光学也获得一系列重要进展。

基本问题

光的本质？



1638年， 法国数学家皮埃尔·伽森荻(Pierre Gassendi)提出**物质**的“**微粒说**”； 1660年，书中认为**光**亦如此。

1666年，牛顿支持的“**微粒说**”

1678年，惠更斯提出“**波动说**”； 1801年，托马斯·杨的著名实验

1871年，麦克斯韦提出电磁场理论后，**光是电磁波**

1905年，爱因斯坦提出了“**光子说**”

现代物理学认为： **光具有波、粒二象性**



争论的起点

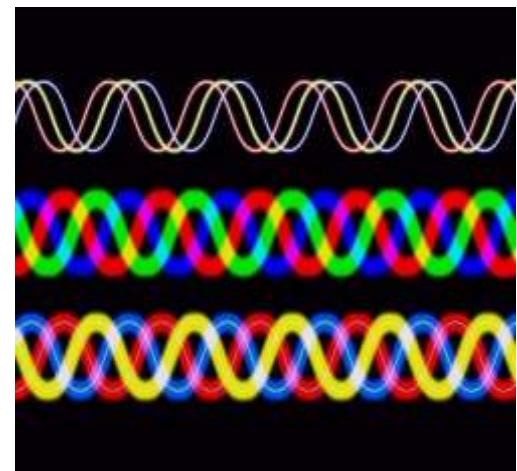
在对光物理学的研究中，光的本性问题和光的颜色问题成为焦点。

笛卡儿在他《方法论》的三个附录之一《折光学》中提出了两种假说。一种假说认为，光是类似于微粒的一种物质；另一种假说认为光是一种以“以太”为媒质的压力。他的这两种假说已经为后来的微粒说和波动说的争论埋下了伏笔。

光的波动学说最早的倡导者—？

1655年，意大利波伦亚大学的数学教授格里马第在观测放在光束中的小棍子的影子时，首先发现了光的衍射现象。据此他推想光可能是与水波类似的一种流体。格里马第第一个提出了“光的衍射”这一概念，是光的波动学说最早的倡导者。

1663年，英国科学家波义耳提出了物体的颜色不是物体的固有性质，而是光照射在物体上产生的效果。他第一次记载了肥皂泡和玻璃球中的彩色条纹。此发现与格里马第有不谋而合之处，为后续研究奠定了基础。



不久后，英国物理学家胡克重复了格里马第的实验，并通过对肥皂泡膜的颜色的观察，提出了“光是以太的一种纵向波”的假说。根据这一假说，胡克也认为光的颜色是由其频率决定的。

以太（Ether/Aether）—古希腊哲学家亚里斯多德提出的假想物质

1672年，牛顿在他的论文《关于光和色的新理论》中谈到了他关于光的色散实验：让太阳光通过一个小孔后照在暗室里的棱镜上，在对面的墙壁上会得到一个彩色光谱。他认为，光的复合和分解就像不同颜色的微粒混合在一起又被分开一样。在这篇论文里他用“微粒说”阐述了光的颜色理论。第一次“波动说”与“粒子说”的争论由“光的颜色”这根导火索引燃了。从此胡克与牛顿之间展开了漫长而激烈的争论。

同年2月，以胡克为主席，由胡克和波义耳等组成的英国皇家学会评议委员会对牛顿提交的论文《关于光和色的新理论》基本上持以否定的态度。

波动说的支持者，荷兰著名天文学家、物理学家和数学家惠更斯继承并完善了胡克的观点。

1666年，惠更斯应邀来到巴黎科学院以后，并开始了对物理光学的研究。在他担任院士期间，惠更斯曾去英国旅行，并在剑桥会见了牛顿。二人彼此十分欣赏，而且交流了对光的本性的看法，但此时惠更斯的观点更倾向于波动说，因此他和牛顿之间产生了分歧。

惠更斯提出了波动学说比较完整的理论。他认为，光是一种机械波；光波是一种靠物质载体来传播的纵向波，传播它的物质载体是“以太”；波面上的各点本身就是引起媒质振动的波源。根据这一理论，惠更斯证明了光的反射定律和折射定律，也比较好的解释了光的衍射、双折射现象和著名的“牛顿环”实验。

1882年，德国天文学家夫琅和费首次用光栅研究了光的衍射现象。在他之后，德国另一位物理学家施维尔德根据新的光波学说，对光通过光栅后的衍射现象进行了成功的解释。

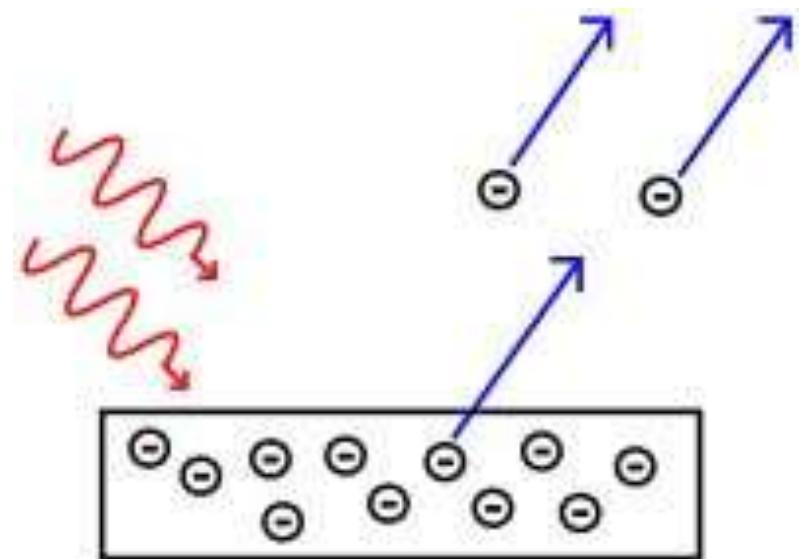
至此，新的波动学说牢固的建立起来了。微粒说开始转向劣势。

1887年，英国物理学家麦克斯韦与化学家莫雷以“以太漂流”实验否定了以太的存在。但此后仍不乏科学家坚持对以太的研究。甚至在法拉第的电磁感应说、麦克斯韦的光的电磁说提出以后，还有许多科学家潜心致力于对以太的研究。

十九世纪中后期，在光的波动说与微粒说的论战中，波动说已经取得了决定性胜利。但人们在为光波寻找载体时所遇到的困难，却预示了波动说所面临的危机。

1887年，德国科学家赫兹发现光电效应，光的粒子性再一次被证明！

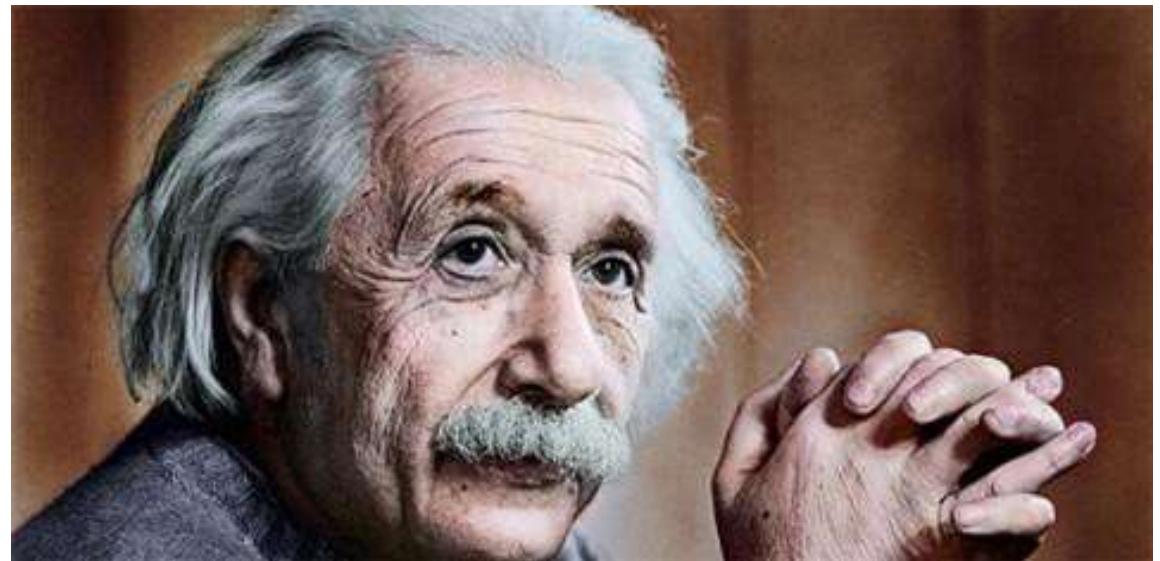
二十世纪初，普朗克和爱因斯坦提出了光的量子学说。



1905年3月，爱因斯坦在德国《物理年报》上发表了题为《关于光的产生和转化的一个推测性观点》的论文。他认为对于时间的平均值，光表现为波动；对于时间的瞬间值，光表现为粒子性。这是历史上第一次揭示微观客体波动性和粒子性的统一，即波粒二象性。这一科学理论最终得到了学术界的广泛接受。



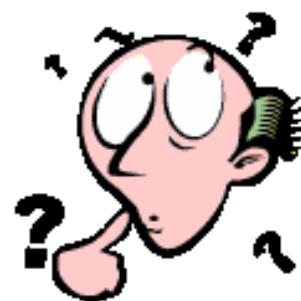
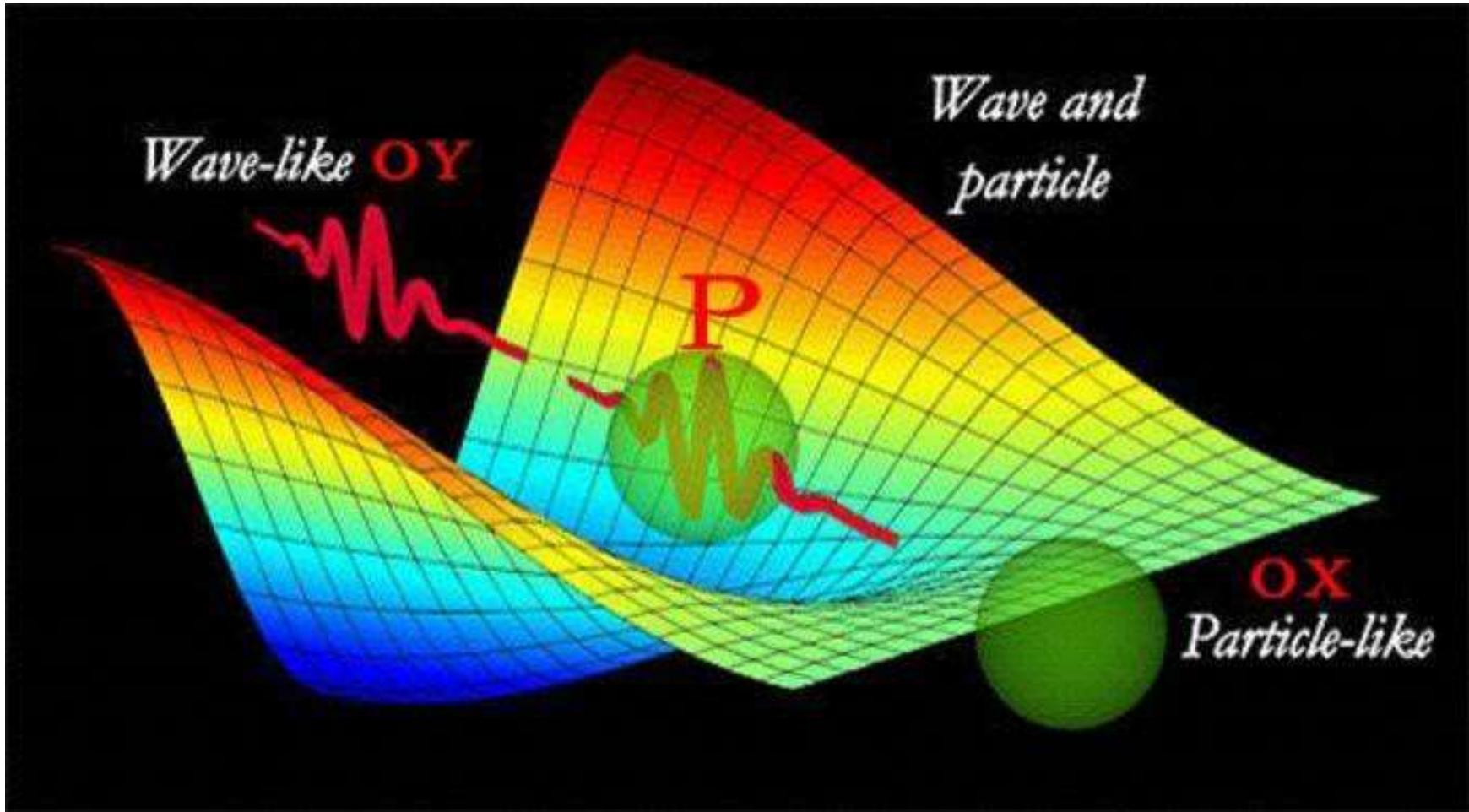
1921年，爱因斯坦因为"光的波粒二象性"这一成就而获得了诺贝尔物理学奖。



光的“波动说”与“微粒说”之争从十七世纪初笛卡儿提出的两点假说开始，至二十世纪初以光的“波粒二象性”告终，前后共经历了三百多年的时间。牛顿、惠更斯、托马斯·杨、菲涅耳等多位著名的科学家成为这一论战双方的主将。正是他们的努力揭开了遮盖在“光的本质”外面那层扑朔迷离的面纱 … …



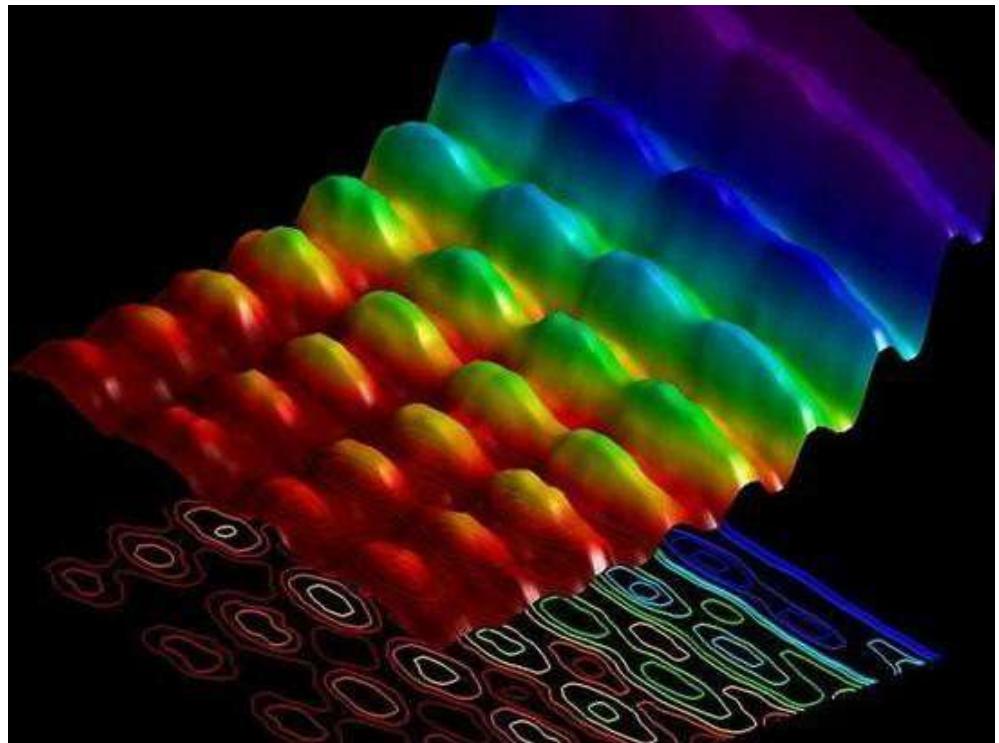
虽然大家暂时接受了从1905年爱因斯坦率先描述光的这种双重状态—“波粒二象性”，并试图依此解释光表现出的一些明显矛盾的行为。但一直以来，科学家从未观察到光同时以这两种状态存在，因此，光的“波粒二象性”成为现代科学界最令人难以捉摸的观点之一。

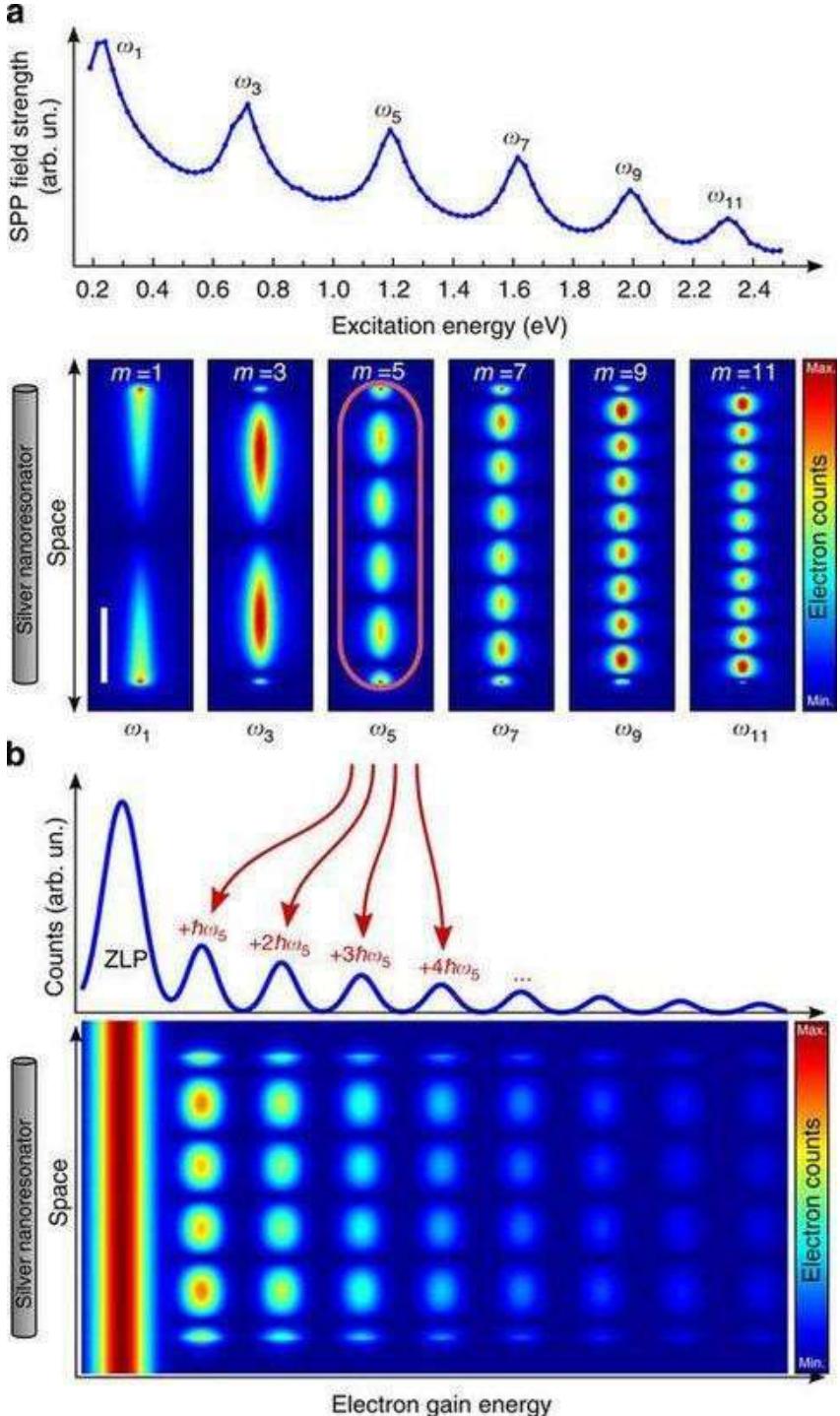




最新的实验结果

2015年3月10日，瑞士联邦理工学院的科学家首次拍摄到同时以波和粒子形式存在的光照片，证明了爱因斯坦的理论，即光线这种电磁辐射同时表现出波和粒子的特性。

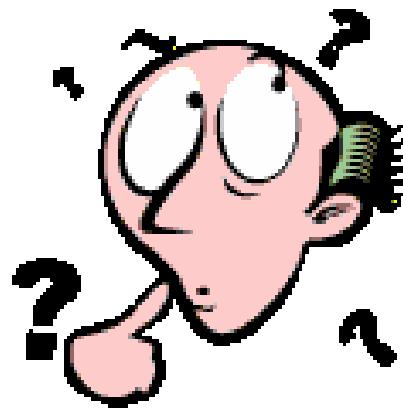




光被认为既是一种波，也是一束粒子流。EPFL的一个由法布里奥·卡彭领导的研究小组进行了一次“聪明的”反向实验：用电子来给光拍照，终于捕获了有史以来第一张光既像波，同时又像粒子流的照片。

“这项实验第一次证明了我们能直接拍摄量子力学现象及其矛盾的性质。”法布里奥·卡彭说。此外，这项开创性研究的重要性在于它能把基础科学拓展到未来技术上。“能在纳米尺度拍摄并控制类似这种量子现象，也为量子计算机开辟了新途径。”

大家相信这是真的吗？即使实验没有问题，那如此解释可否真的合理？… …



对光的研究分为两个层面：**几何光学与物理光学**

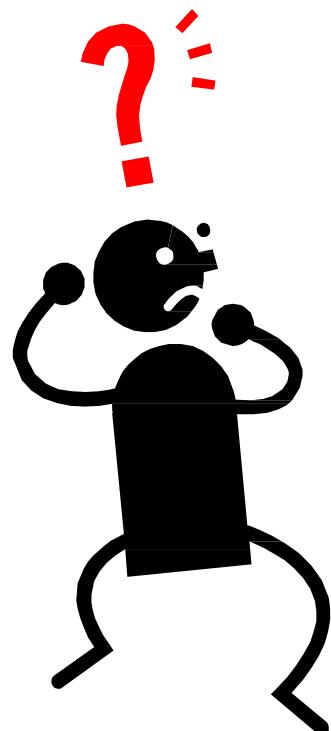
两者的研究范畴如何？

几何光学：研究光的传播现象与规律。

物理光学：研究光的本性，进而研究各种光学现象与其内在规律性。

§ 1.1 几何光学的基本定律

何谓几何光学？



几何光学的理论基础？

§ 1.1 几何光学的基本定律

- 几何光学以光线的概念为基础，用几何的方法研究光在介质中的传播规律和光学系统的成像特性。
- 本章主要介绍几何光学的基本定律、成像的基本概念和完善成像条件、光学系统的光路计算、近轴光学系统和球面光学系统的成像。

§ 1.1 几何光学的基本定律

■ 1.1.1 几何光学中的几个**基本概念**



光波 (单色光、复色光)



光线 (光源、点光源)

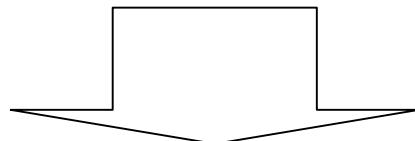


波阵面 (波面[平面波、球面波及任意曲面波]、光束)

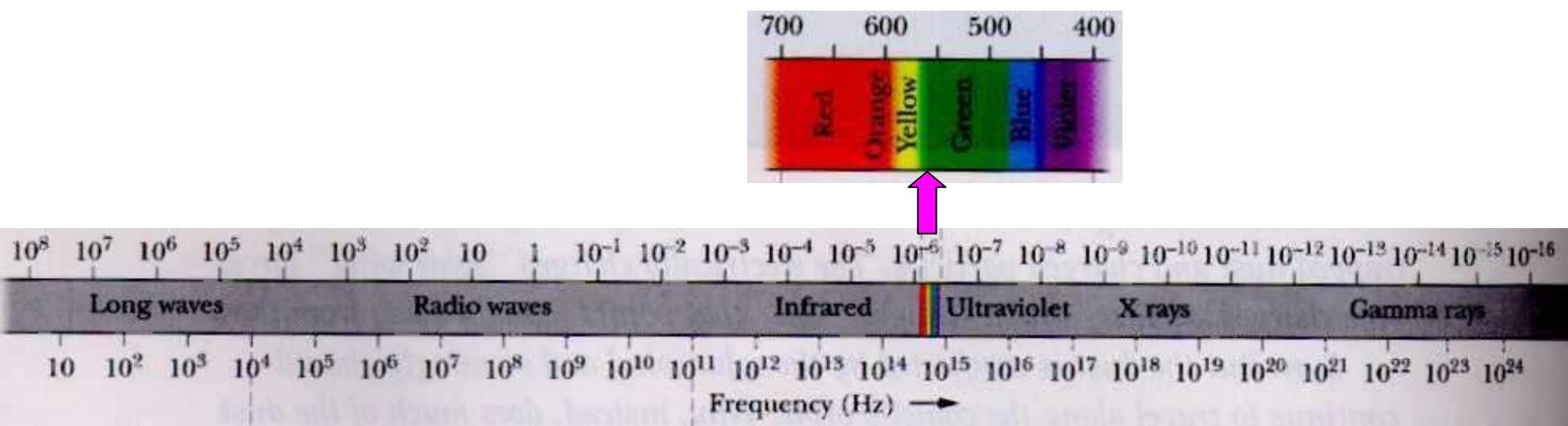
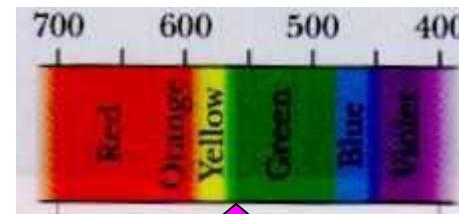
光 波

光 → 一定频率的电磁波

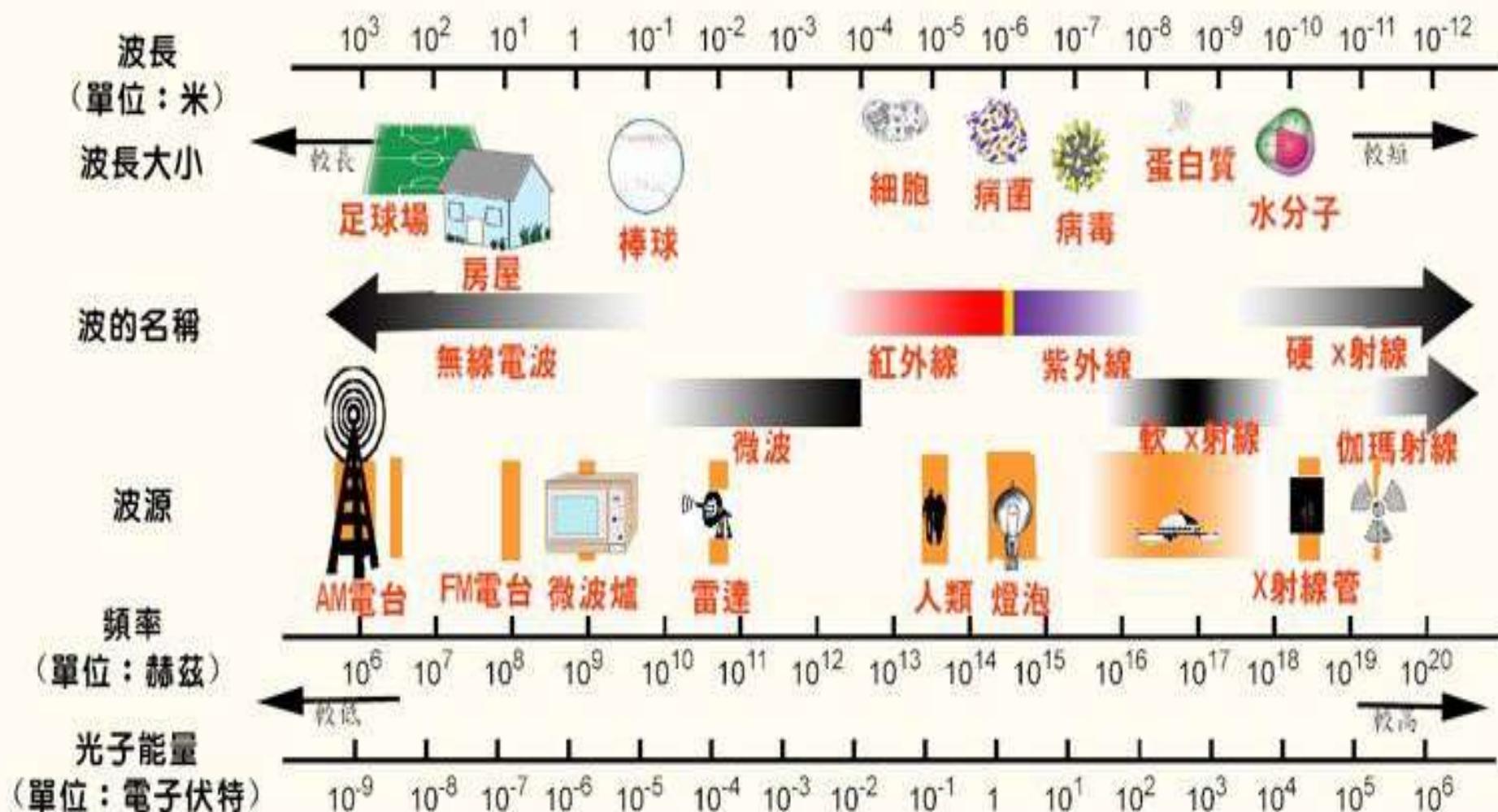
按波长或频率的顺序排列起来



电磁波谱



電磁波譜



无线电波: 由电磁振荡电路通过天线发射。

红外线: 由热物体发出，易被物质吸收并使其温度升高。

可见光: 由炽热物体、气体放电及其他光源中的分子和原子的外层电子所发射，**能引起视觉**。

紫外线: 易使被照射物体发生化学反应。 

X射线: 用高速电子流轰击金属得到，能量高、穿透本领强。

γ 射线: 源自原子核内部状态的变化，能量更高、穿透力更强。

关于紫外线

根据国际照明委员会（CIE）和国际电工委员会（IEC）标准，可将紫外线光谱区（**400~100nm**）分为以下波长区域：

UV-A: 315~400nm, (**化学线**)

UV-B: 280~315nm, (**生物线**)

UV-C: 100~280nm。(**远紫外线**)

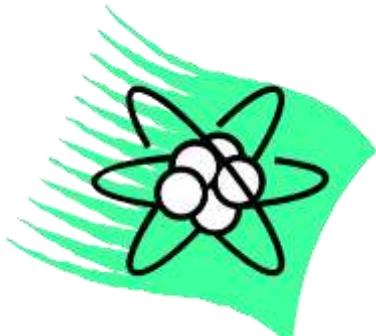
- **UV-A**: 能量较低的**UV-A**光谱具有光化学作用，被称为**化学线**。因此**UV-A**用于有机物的合成、涂料或接着剂的**UV** 固化等领域。



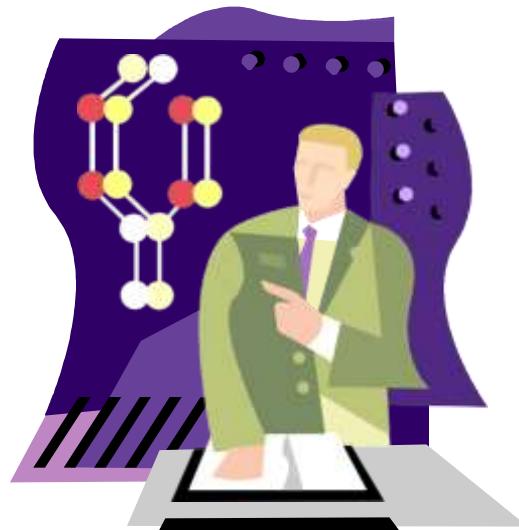


- **UV-B:** 光谱对生物的作用效果较显著，能引起红斑作用及色素沉积等，被称为**生物线**。





- **UV-C**: 光谱为**远紫外线**。波长短、能量大，具有杀菌作用，能分解分子。对固体表面和水中污染物的光处理来说，只有**UV-C**光谱具有很强的杀菌效果。





实例

紫外光源及其光子能量：

- ① **高压汞灯**：高压水银放电管发出的代表性紫外线波长为 $365nm$ ，光子能量为 $328KJ/mol$ 。

- ② **低压汞灯**：低压水银放电管发出的代表性紫外线波长分别为 $253.7nm$ 及 $184.9nm$ ，对应的光子能量分别为 $472KJ/mol$ 和 $647KJ/mol$ 。

实例

部分有机化学分子的结合能

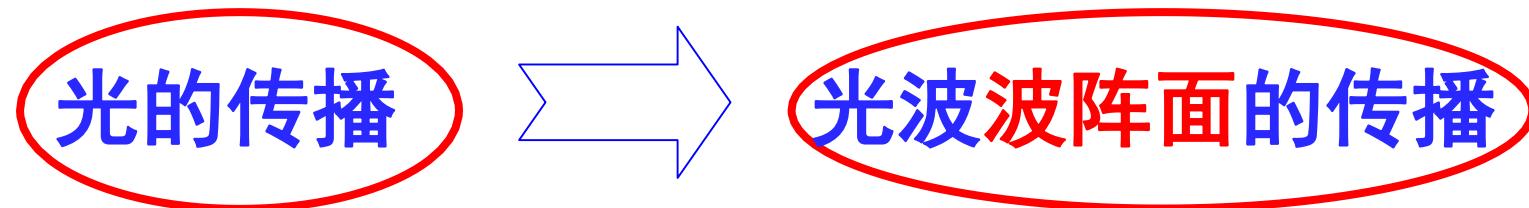
化学建	结合能 (<i>KJ/mol</i>)	化学建	结合能 (<i>KJ/mol</i>)
H-H	436.2	C-H	413.6
H-C	347.9	C-F	441.2
C-C / C=C	359.8 / 607.0	C-N	291.8
C≡C	828.8	C≡N	791.2
N-N	160.7	C-O	351.6
O-O	139.0	C=O	724.2
O=O	490.6	O-H	463.0

$$1KJ/mol = 0.01eV$$

光 线

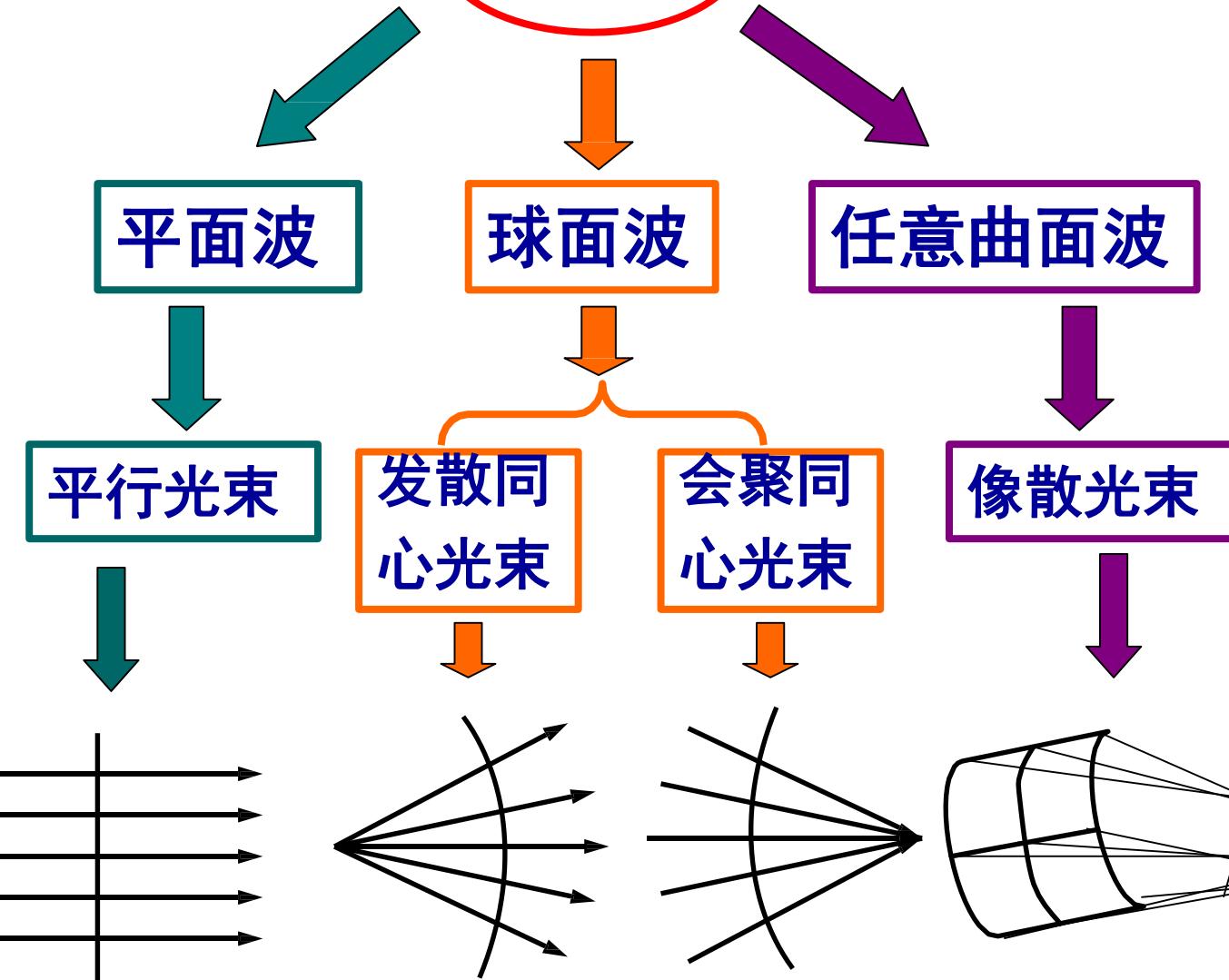
- **光源**: 能够辐射光能量的物体称为发光体或光源。
- **点光源**: 发光体可看作许多发光点组成，每个发光点向四周辐射能量，可抽象为点光源。
- **光线**: 通常将点光源发出的光抽象为许多携带能量并有方向的几何线，即~。光线的方向代表光的传播方向。

波阵面



- **波阵面**: 光源发出的光波向四周传播，某一时刻其振动相位相同的点所构成的等位面称~，简称**波面**。
- 在各向同性介质中，波面上某点的法线方向即**光线**，与波面对应的光线集合称为**光束**。

波阵面



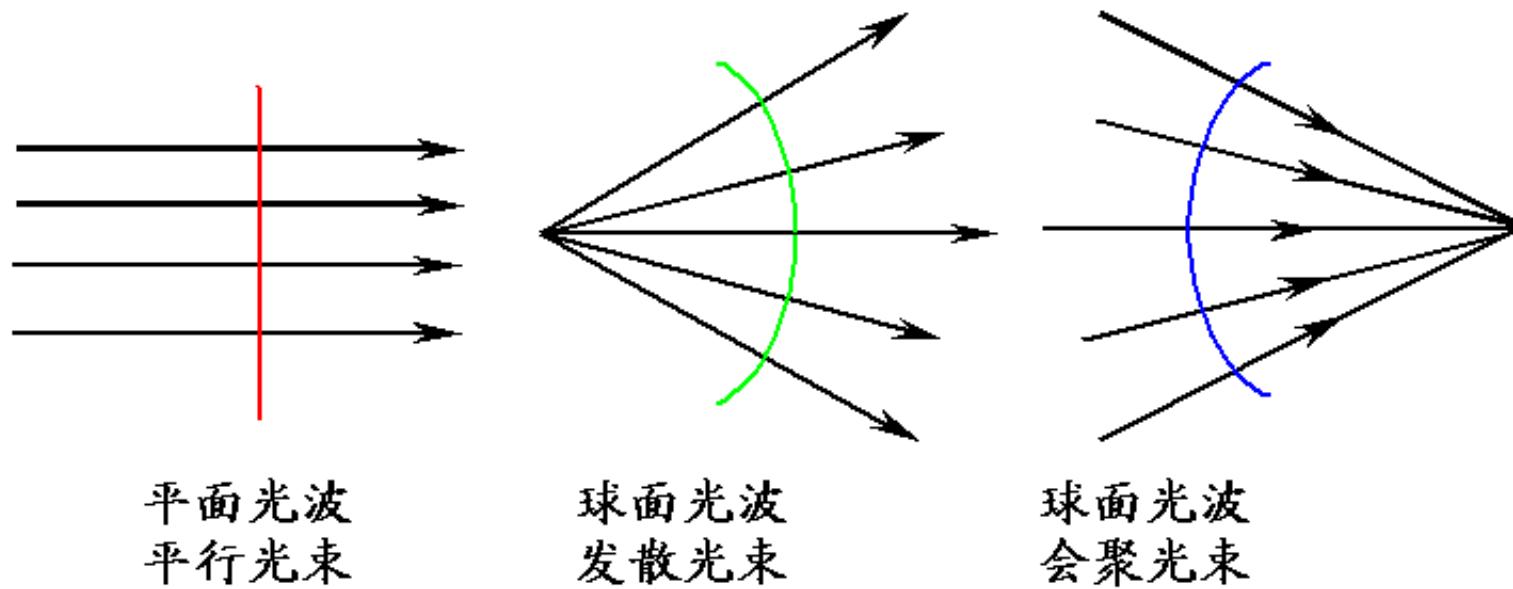
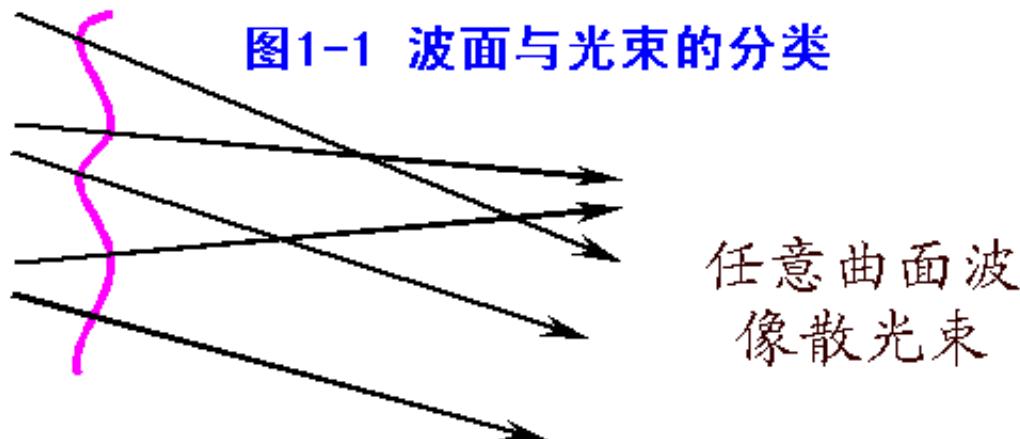
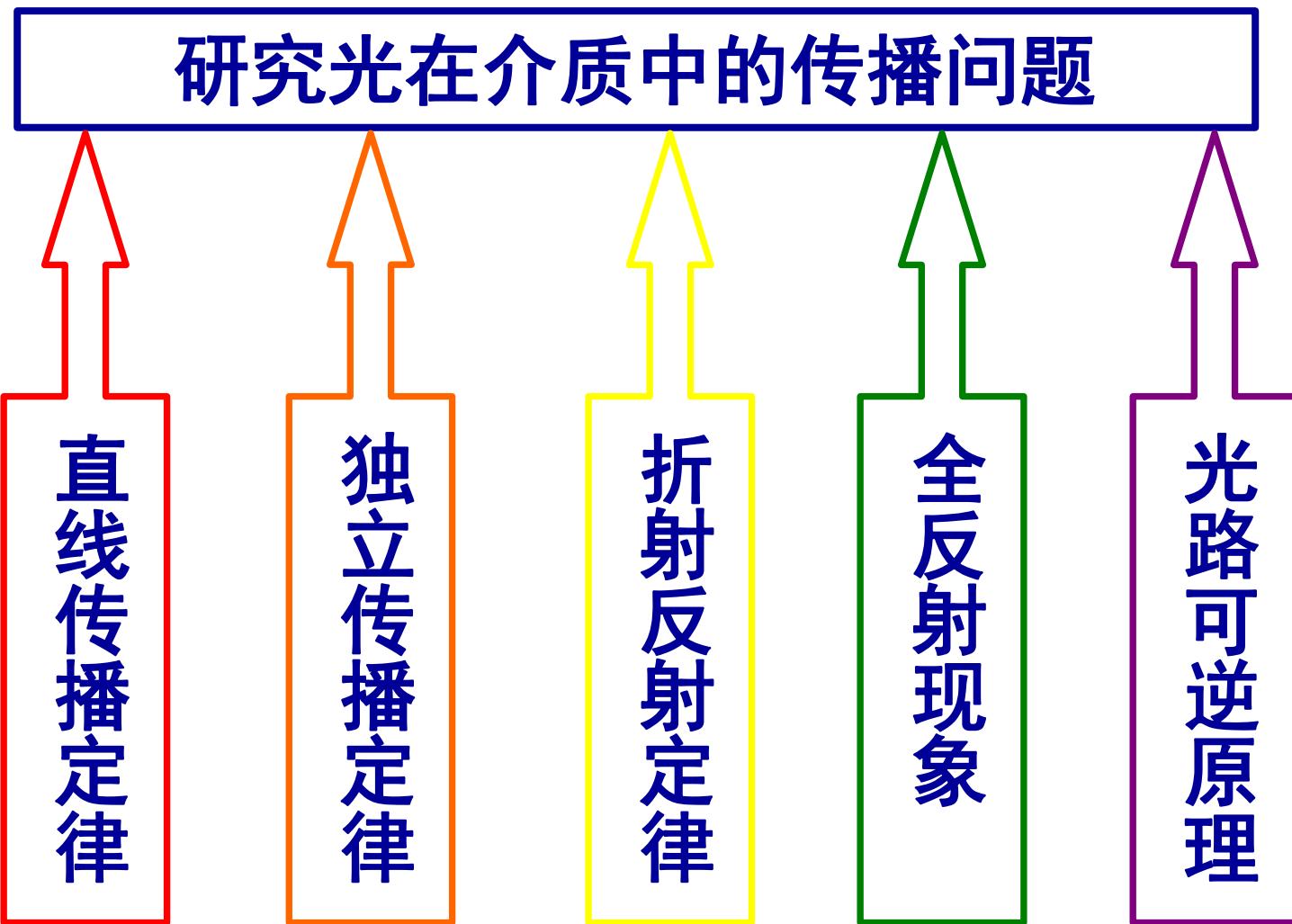


图1-1 波面与光束的分类



■ 1.1.2 几何光学的基本定理

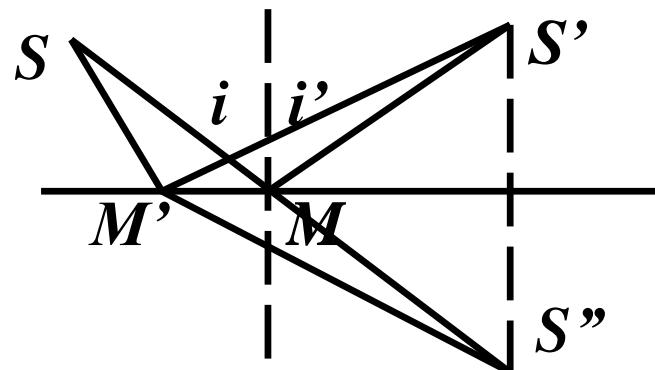


光学也是古希腊发展较早的一门科学。在**欧几里得**（Euclid，约前330-前275年）的著作中可找到有关几何光学的定律。在其《反射光学》中提出了光的反射定律。并把它用于平面镜和球面镜成像，还知道**凹面镜的聚焦作用，并假定其焦点在球心或球心与球面之间。**

此外，书中还讲到凹面镜对准太阳可取火。传说当罗马人包围叙拉古时，**阿基米德**（约前287-212年）曾借助凹面镜聚焦太阳光，使罗马人的舰队起火。

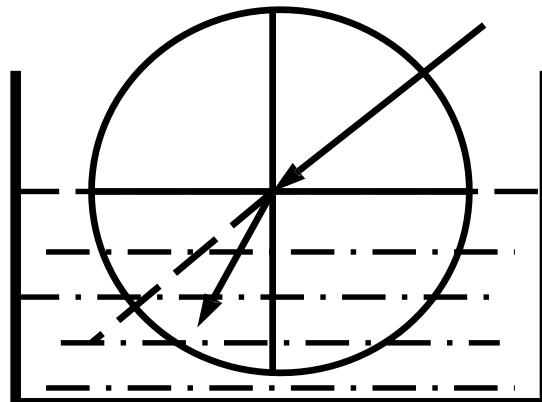
希隆 (Heron, 约公元前150-前100年) 也写过一本名为《反射光学》的书，其内容是关于镜子的理论和实际应用。

他曾以光程最短的原则论证了反射定律：光线在反射时所通过的路程 SMS' 比其它路程 $SM'S''$ 都短。即当光从镜面上反射时，它从一点 S 到达另一点 S' 一定遵从反射所用时间最短的原则，则可得出入射角与反射角相等的结论。



亚里士多德曾经描写过光的折射现象：水中的棍子好像是折断了似的。

托勒密曾用下图所示的装置对光的折射进行实验研究：在一圆盘上装上两把可绕其中心旋转的尺子，将其垂直放入水中，一半在外。分别使两把尺子对准入射光线和折射光线，然后测出入射角和折射角。



入射角	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
折射角	0°	8°	$15^\circ 31'$	$22^\circ 30'$	29°	35°	$40^\circ 30'$	$45^\circ 30'$	50°

托勒密获得了足够精确的数据，但**并没因此发现折射定律**。他断言，**入射角与折射角成正比**，此结论只在入射角很小时才近似正确。

值得指出的是，他求出单位半径的圆中弧与对应的弦长，并巧妙地编制了一个数表（相当于现今的正弦三角函数表）。若再进一步与他测得的数据比较的话，就可发现折射定律！

最终，托勒密与折射定律擦肩而过，直到十七世纪才由荷兰数学家斯涅尔（Willebrod Snell，1591-1626）发现。

折射定律的精确公式是由斯涅尔和笛卡尔提出的。斯涅尔在1621年的一篇未发表的文章中谈到这一问题，但直到他去世后的1626年才被发表。他如此叙述：对于给定的两种介质，入射角与折射角的余割之比总保持相同值。他用实验证了此结论，但没做理论推导。用正弦函数表述的折射定律是笛卡尔在1637年出版的《屈光学》一书中提出的。

笛卡尔从光的微粒说出发进行推导，提出三条假设：

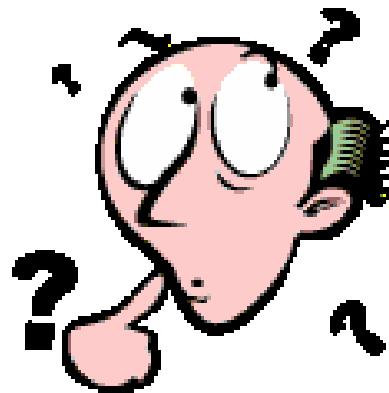
- 1 光速在较密的介质中较大；
- 2 在相同的介质里，光速对各种入射角都有相同的比率；
- 3 折射时，平行于折射面的速度分量保持不变。

显然，第（1）、（3）条是错误的。为证明其结论与假设的正确性，当时不少数学家如哈密顿和高斯等都参加了工作，但都没得出完满的结果。

费马 (Pierr Fermat, 1601-1665) 在作了新的假定后，得出了折射定律。1657年他提出了光在介质中传播时所走的路程取极值的原理，即光以最少的时间从一种介质的某一点传播到另一介质的某一点，又假定光在较密介质中的速度较小，由此推出了光的折射定律和反射定律。

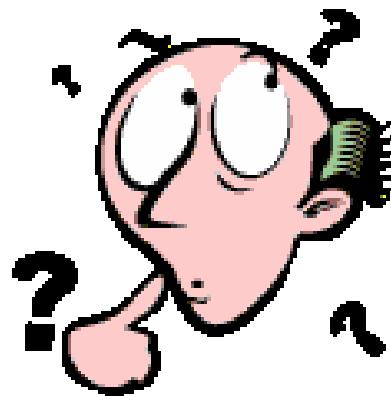
到十七世纪中叶，几何光学的基础已经奠定。

**请问：费马原理的理论依据
是什么？为什么光在介质中传
播时所走的路程取极值？**



**回答：费马原理的依据是
反 射、折 射 定 律！**

**请问：光的直线传播定律、
独立传播定律、折射与反射定
律是如何表述的？**



1光的直线传播定律：在各向同性的均匀介质中，光是沿着直线方向传播的。

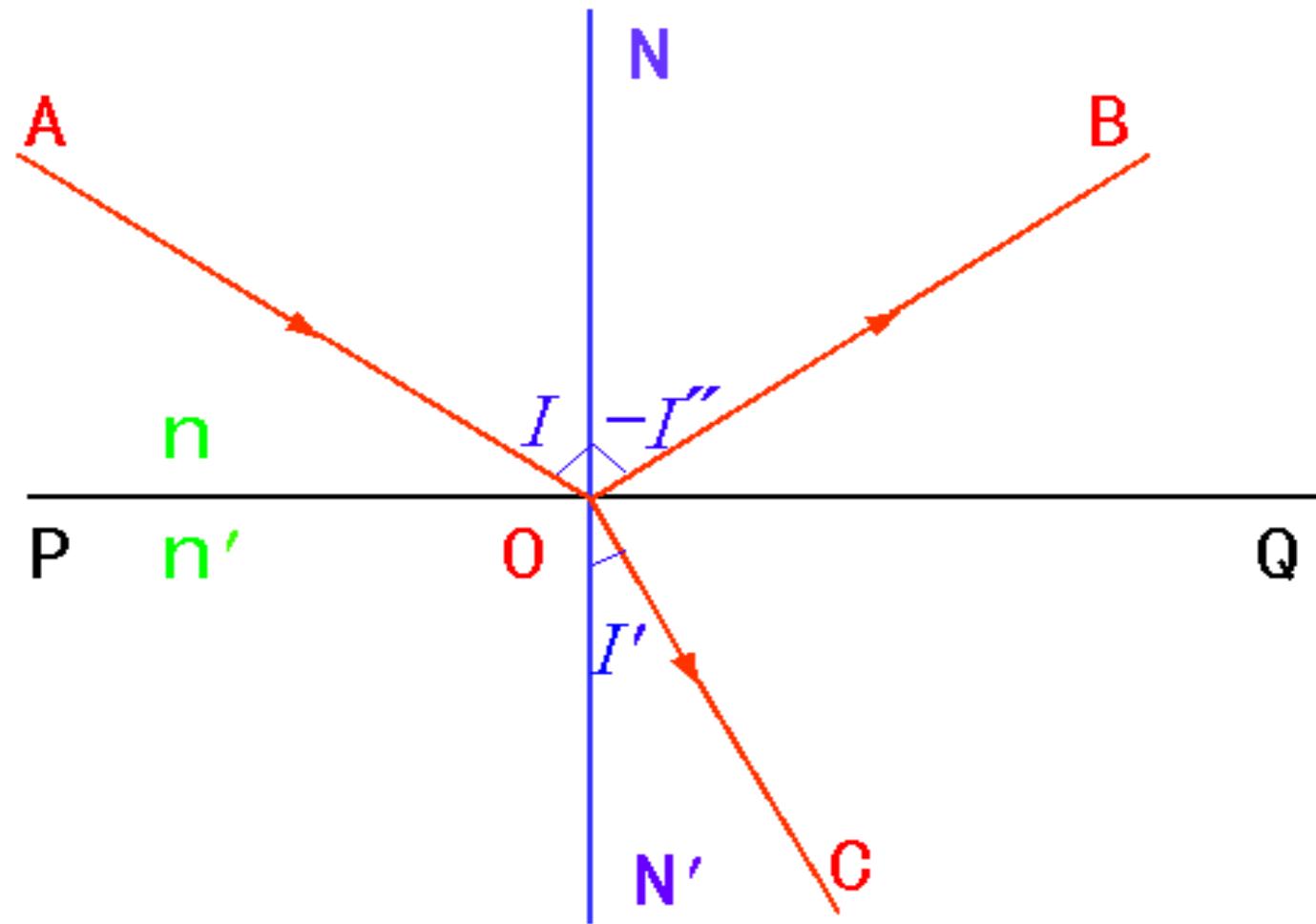
2光的独立传播定律：不同光源发出的光在空间某点相遇时，彼此互不影响地独立传播。

3光的折射、反射定律：研究光传播到两种均匀介质分界面上时的现象和规律。

(3a) 光的反射定律：①反射光位于入射光和法线所决定的平面内；②反射光和入射光位于法线两侧，且反射角与入射角绝对值相等，符号相反，即 $I'' = -I$ 。

(3b) 光的折射定律：①折射光位于入射光和法线所决定的平面内；②折射角的正弦与入射角的正弦之比与入射角大小无关，仅由两种介质的性质决定。通常表示为： $n'sinI' = n sinI$ 。

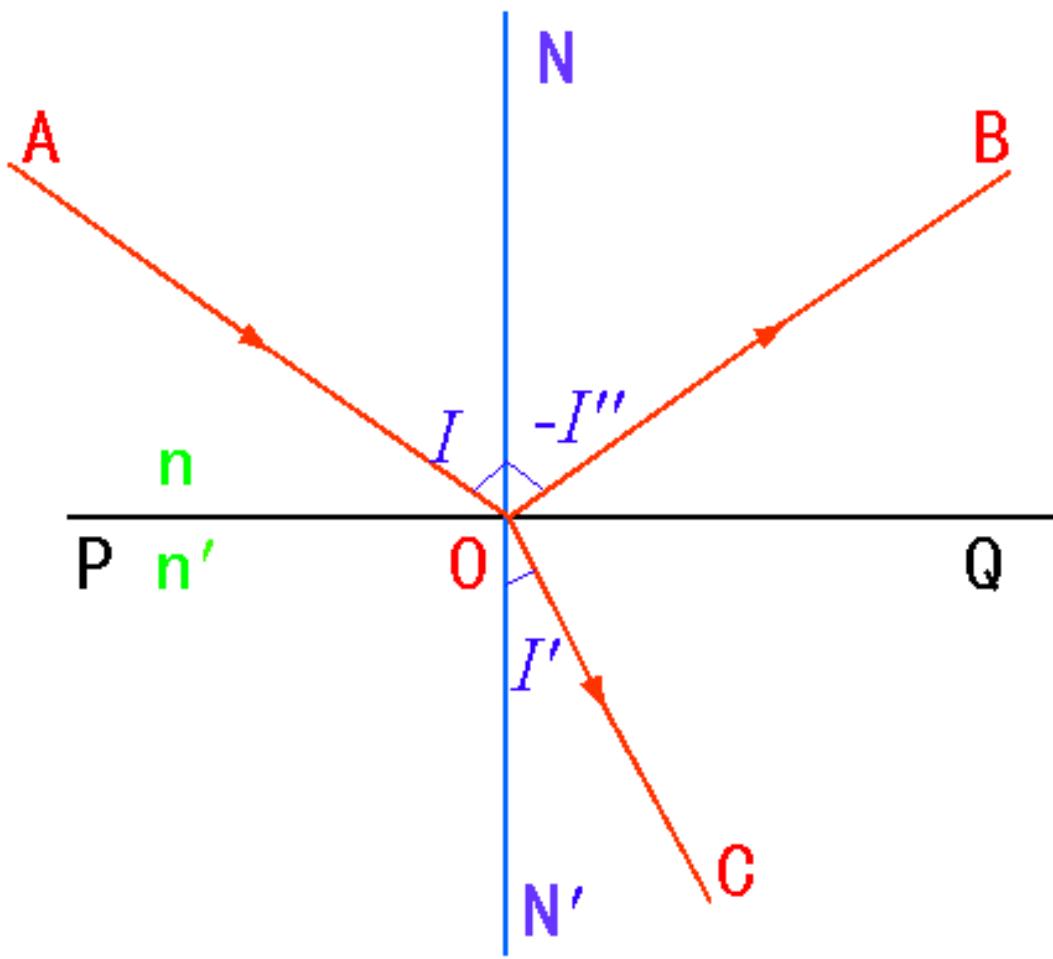
① 入射光线、反射光线和分界面上入射点的法线三者在同一平面内。



② 入射角和反射角的绝对值相等而符号相反，即入射光线和反射光线位于法线的两侧，即

$$I'' = -I$$

图1-2 光的反射与折射现象



① 入射光线、
折射光线和分界
面上入射点的法
线三者在同一平
面内

② 入射角的正弦
与折射角的正弦
之比和入射角的
大小无关，只与
两种介质的折射
率有关 $\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{n'}{n}$

图1-2 光的反射与折射现象

(4) 光的全反射现象：光入射到两种介质的分界面时，通常会发生折射与反射。但在一定条件下，入射光会被全部反射回原来介质中，而无折射光的现象。

发生条件：①光从光密介质入射到光疏介质；②入射角大于临界角。

(5) 光的可逆性原理：光的传播是可逆的。

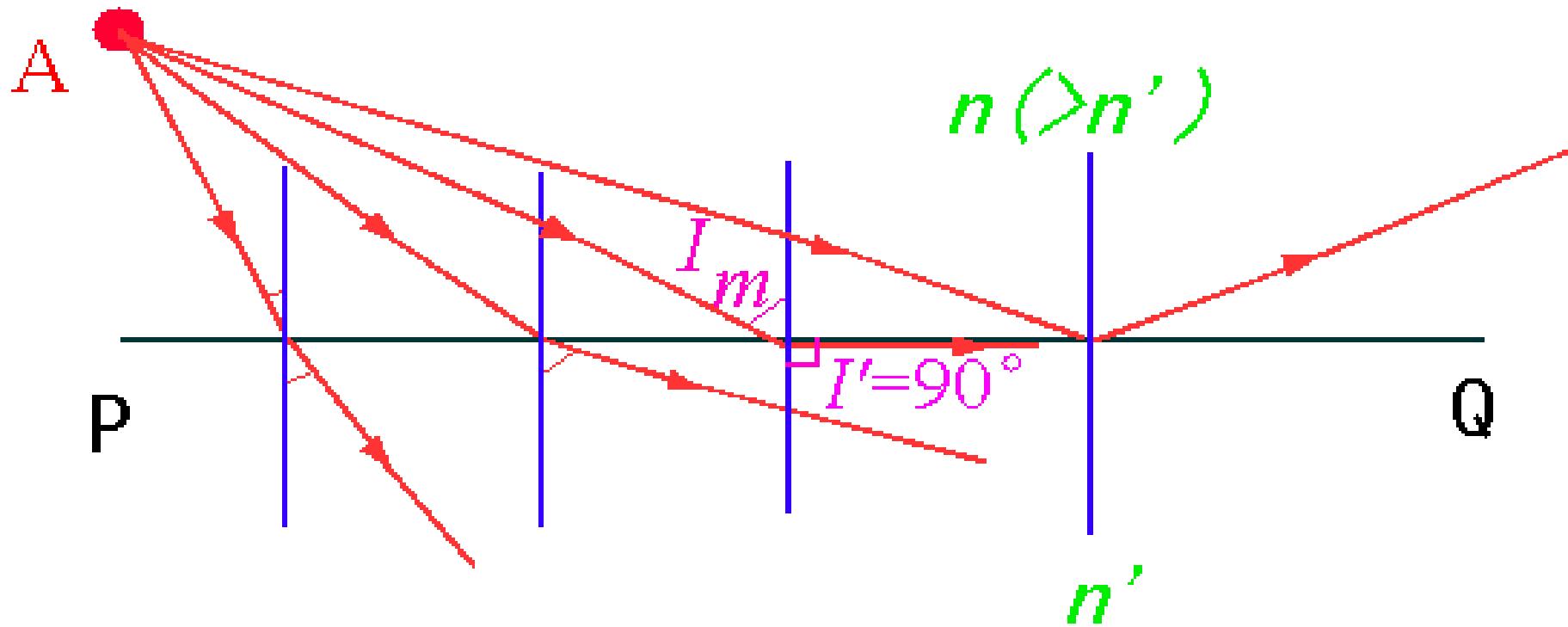
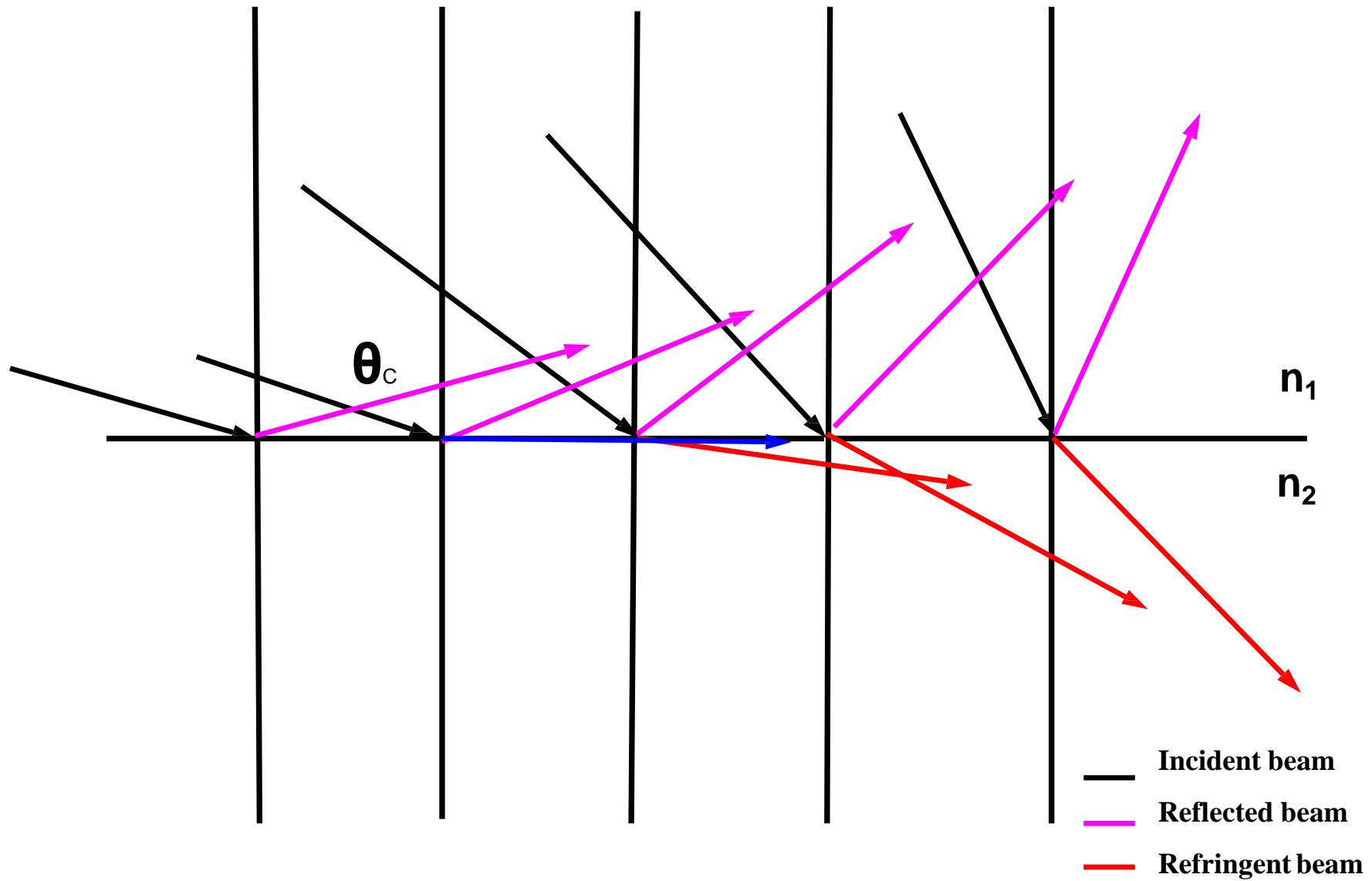


图1-3 光的全反射原理

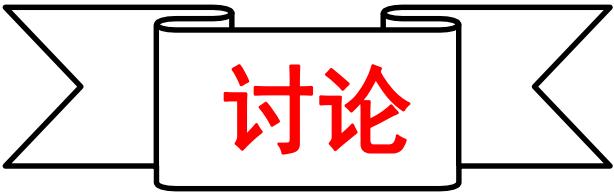




讨论

1) 光的直线传播定律的**局限性**:

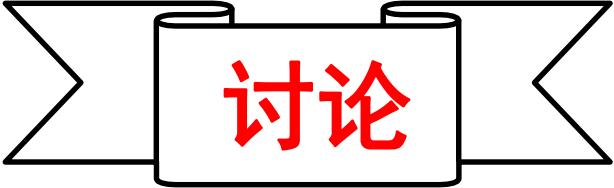
- ① 当光经过尺寸与波长接近或更小的小孔或狭缝时，将发生衍射，不再沿直线传播。
- ② 当光在非均匀介质中传播时，也不再沿直线传播。——**两层含义**



讨论

2) 光的独立传播定律的**局限性**:

没有考虑到光的波动性。当两束发自光源同一点、经不同路径后，在空间某一点交会并满足一定条件时，该点光的强度不是两束光的简单叠加，而是根据光传播路径的不同，可强可弱，即**干涉**现象。



讨论

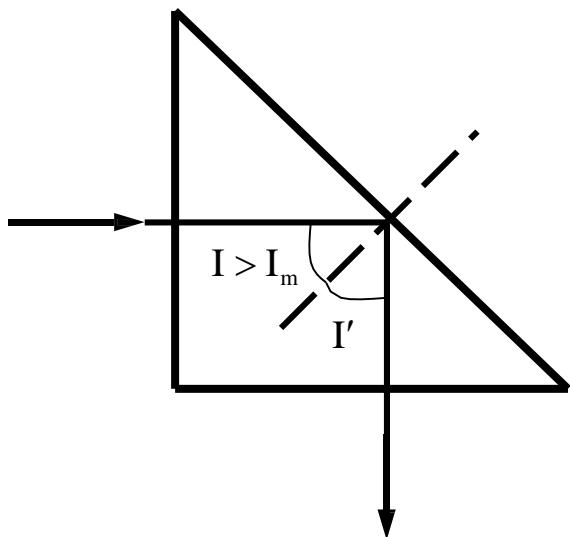
3) 光的折射、反射定律遇到的问题：

研究光在两种均匀介质分界面上时的传播规律。**①** 所研究的“**分界面**”为**理想界面**，但实际上**不存在**理想界面的；**②** **介质的属性不同**引起的传播行为问题。

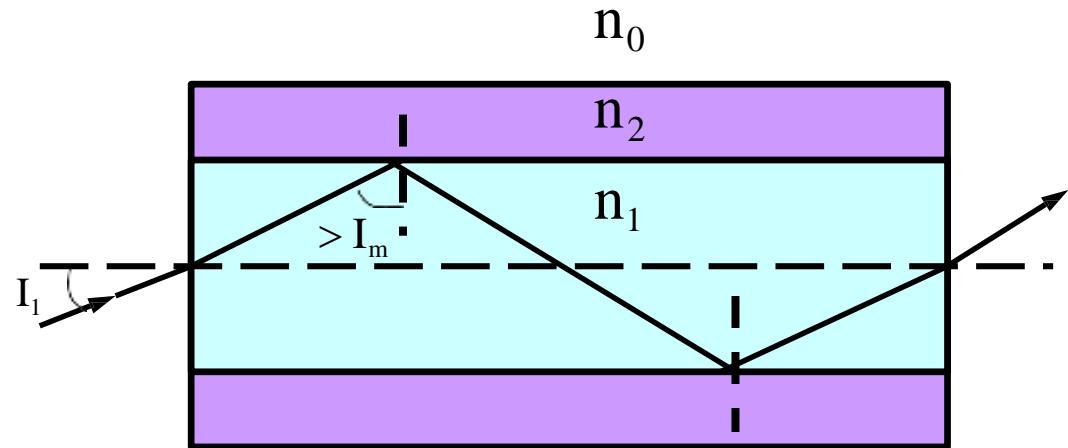
对光在界面上的传播行为在高等光学中有进一步的分析讨论。

讨论

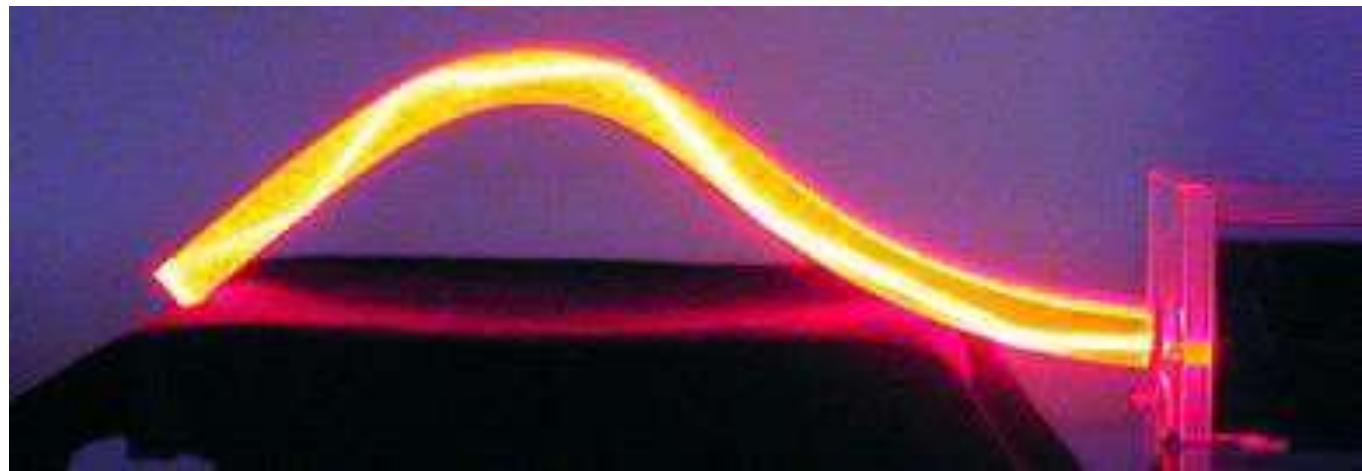
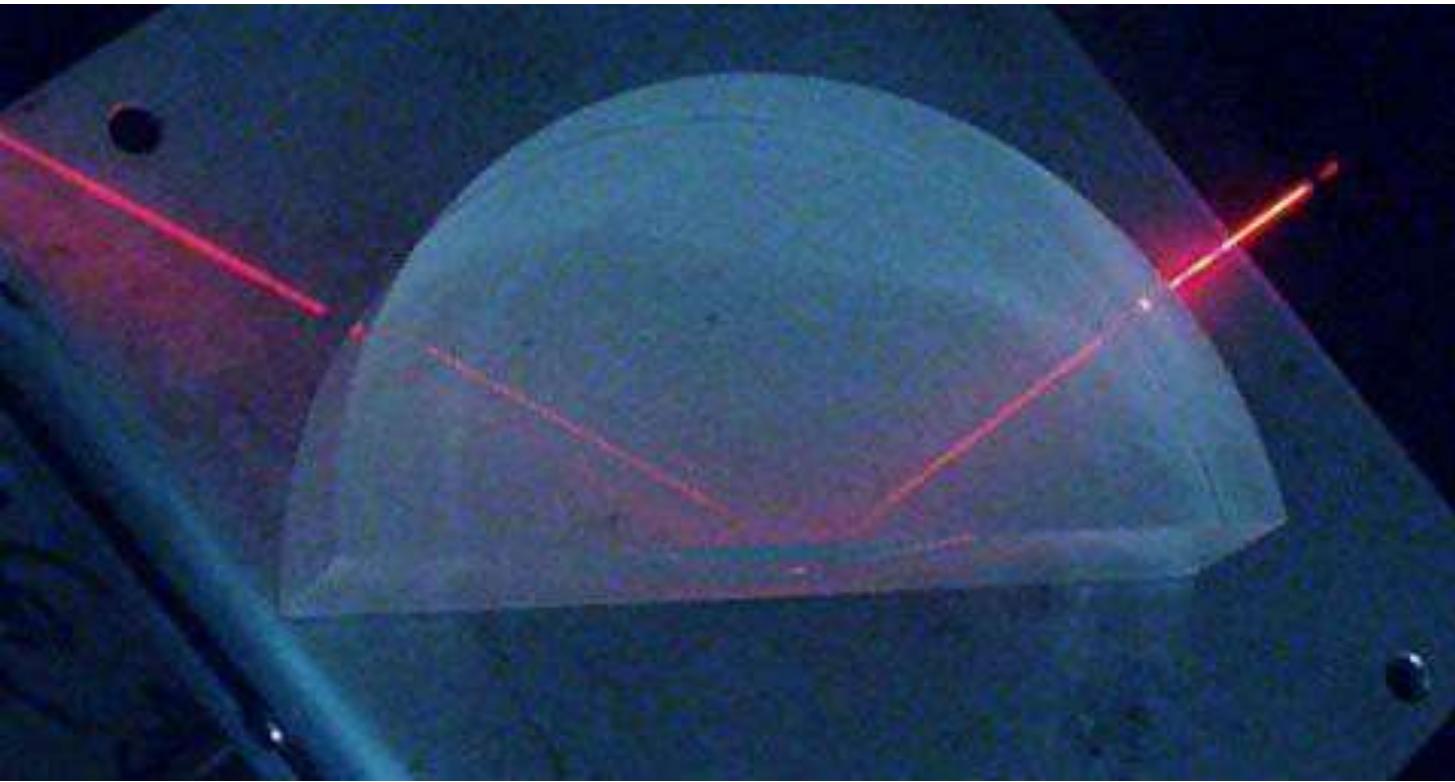
4) 光的全反射现象: (也存在**界面问题**)



全反射直角棱镜

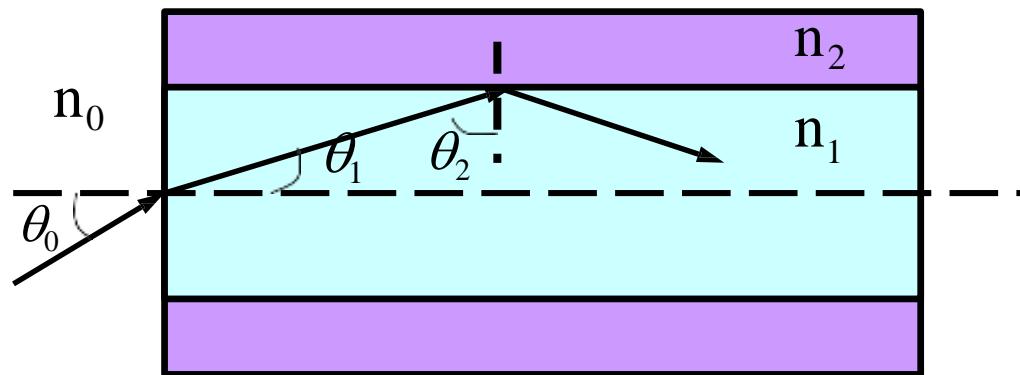


光纤的全反射导光原理



[例题1] 如图所示，设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 n_2 ($n_1 > n_2$)，垂直端面外侧的介质折射率为 n_0 ，试证明能使光线在光纤内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_0 满足下面公式， $n_0 \sin \theta_0$ 为光纤的数值孔径。

$$n_0 \sin \theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

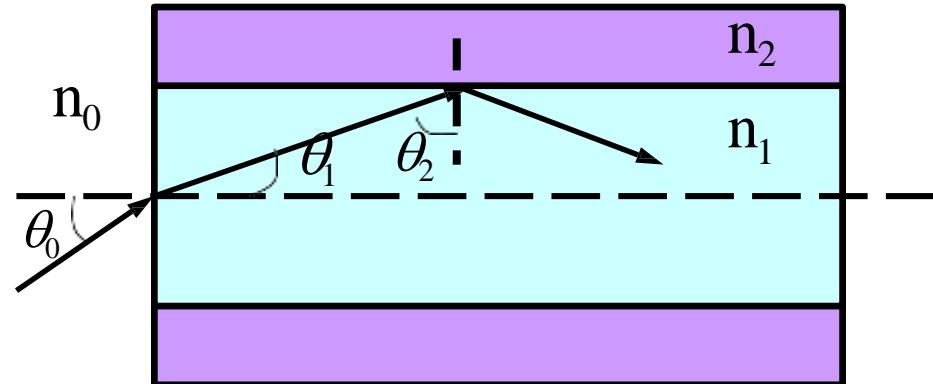


[证明] 由折射定律得,

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$$

又由图中关系得,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_1 \cos \theta_2 = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$$



光线在纤芯与外套界面处发生全发射的条件为,

$$\sin \theta_2 \geq \frac{n_2}{n_1}$$

因此, 发生全内反射时光纤的**数值孔径**为:

$$n_0 \sin \theta_0 \leq \sqrt{n_2 - n_1}$$



讨论

5) 光的可逆性原理的**局限性**:

当光在某些**不同属性的介质间**传播时，将
会存在光路不可逆情形，以致可逆性原理失效。

■ 1.1.3 费马原理

费马原理

“光程”

光的传播规律

光程：光在介质中传播的几何路程 l 与所在介质的折射率 n 的乘积 s ，即~。

$$s = nl = \frac{c}{v} l = ct$$

光在某种介质中的光程

等于同一时间内
光在真空中所走
过的几何路程

■ 1.1.3 费马原理

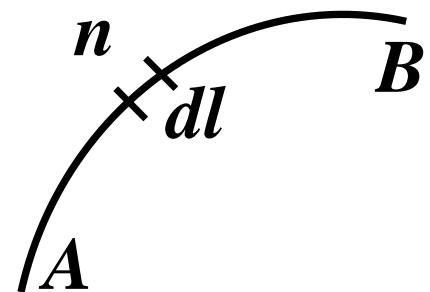
费马原理：光是沿着光程为极值（极大、极小或常量）的路径传播的。

光程极端定律

数学表示：

非均匀介质中的光程

$$s = \int_A^B n dl$$

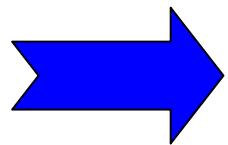


光程有极值，即一次变分为零：

$$\delta s = \delta \int_A^B n dl = 0$$

■ 1.1.3 费马原理

费马原理

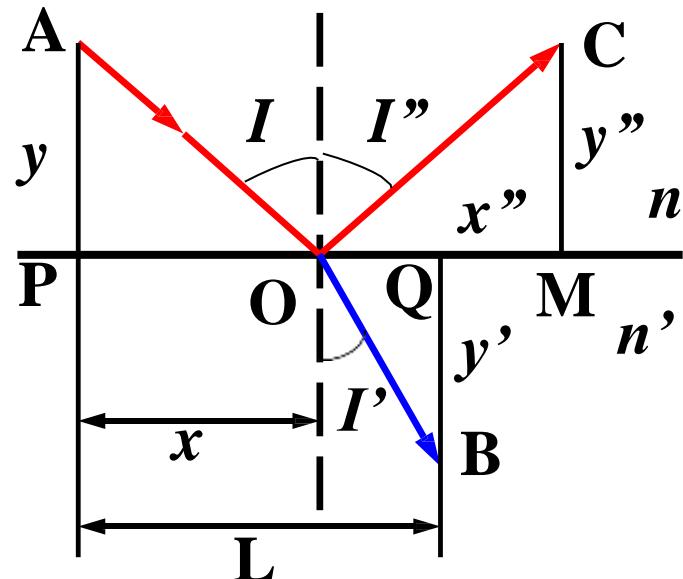


描述光线传播的基本规律

无论是光的直线传播定律，还是光的反射定律与折射定律，均可由费马原理直接导出。

[例题2] 由费马原理证明光的折射定律和反射定律。

[证明] 如图，光线在两透明质表面发生全反射与折射。从A、B和C点分别作垂线AP、BQ和CM，令其长度分别为 y 、 y' 和 y'' ，相应地， PO 、 PQ 和 OM 分别为 x 、 L 和 x'' 。



则A点到B点的光程为：

$$(AOB) = nAO + n'OB = n\sqrt{x^2 + y^2} + n'\sqrt{(L-x)^2 + y'^2}$$

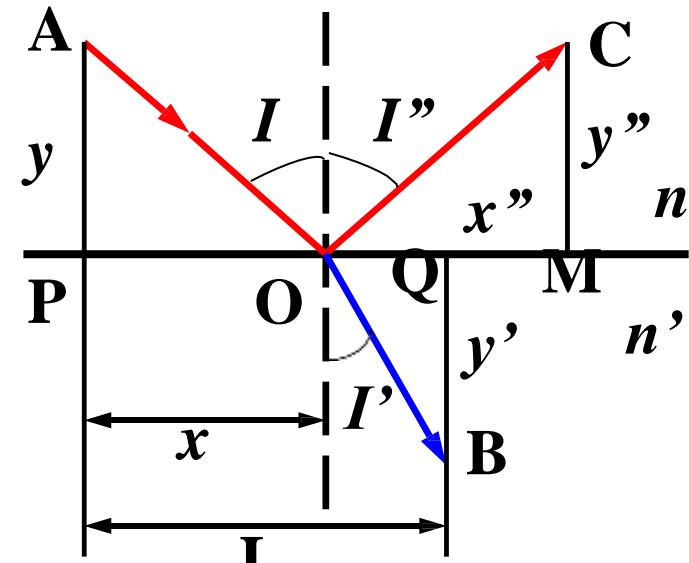
由费马原理，光程为极值的条件为：

$$\frac{d(AOB)}{dx} = \frac{n2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-n'2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + y'^2}} = 0$$

又由图知下式，并代入上式得：

$$\sin I = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin I' = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + y'^2}}$$



$$n \sin I = n' \sin I'$$

折射定律得证。

A点到C点的光程为：

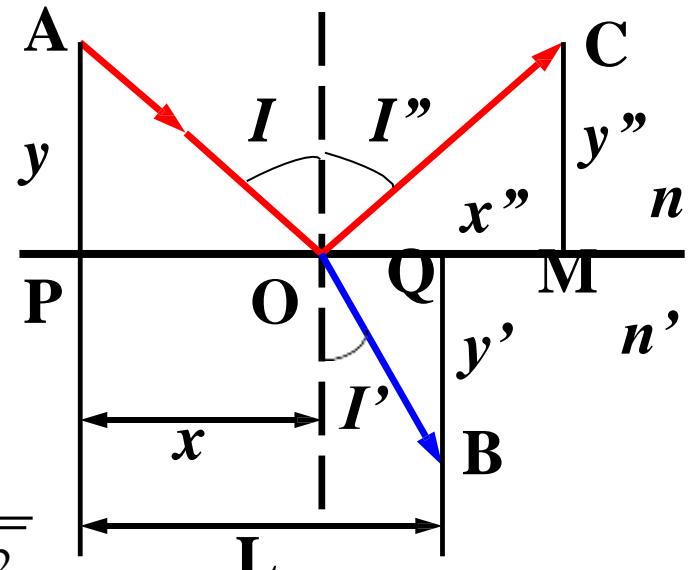
$$(AOC) = nAO + nOC = n\sqrt{x^2 + y^2} + n\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

由费马原理，光程为极值的条件为：

$$\frac{d(AOC)}{dx} = \frac{n2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{n2x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$

又由图知下式，并代入上式得：

$$\sin I = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin I' = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$



$$I = -I'$$

反射定律得证。

■ 1.1.4 马吕斯定律

定律指出，光线束在各向同性的均匀介质中传播时，始终保持着与波面的**正交性**，并且入射波面与出射波面对应点之间的**光程均为定值**。

折射与反射定律、费马原理和马吕斯定律三者中任一个均可视为几何光学的基本定律。

§ 1.2 成像的基本概念与完善成像条件

■ 1.2.1 光学系统与成像概念



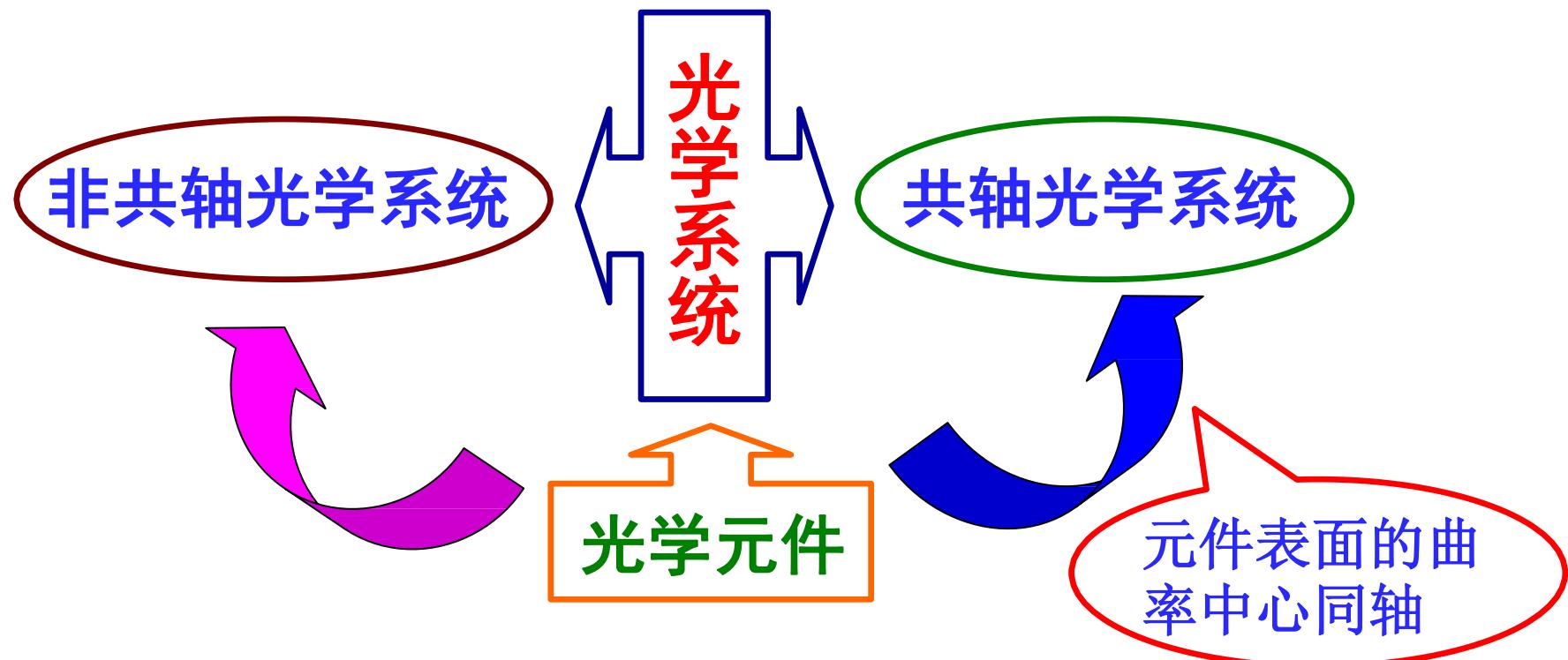
完善像点: 一物点发出的球面波若经过光学系统后仍为球面波，对应的同心光束的中心为物点经 过光学系统所成的完善像点。

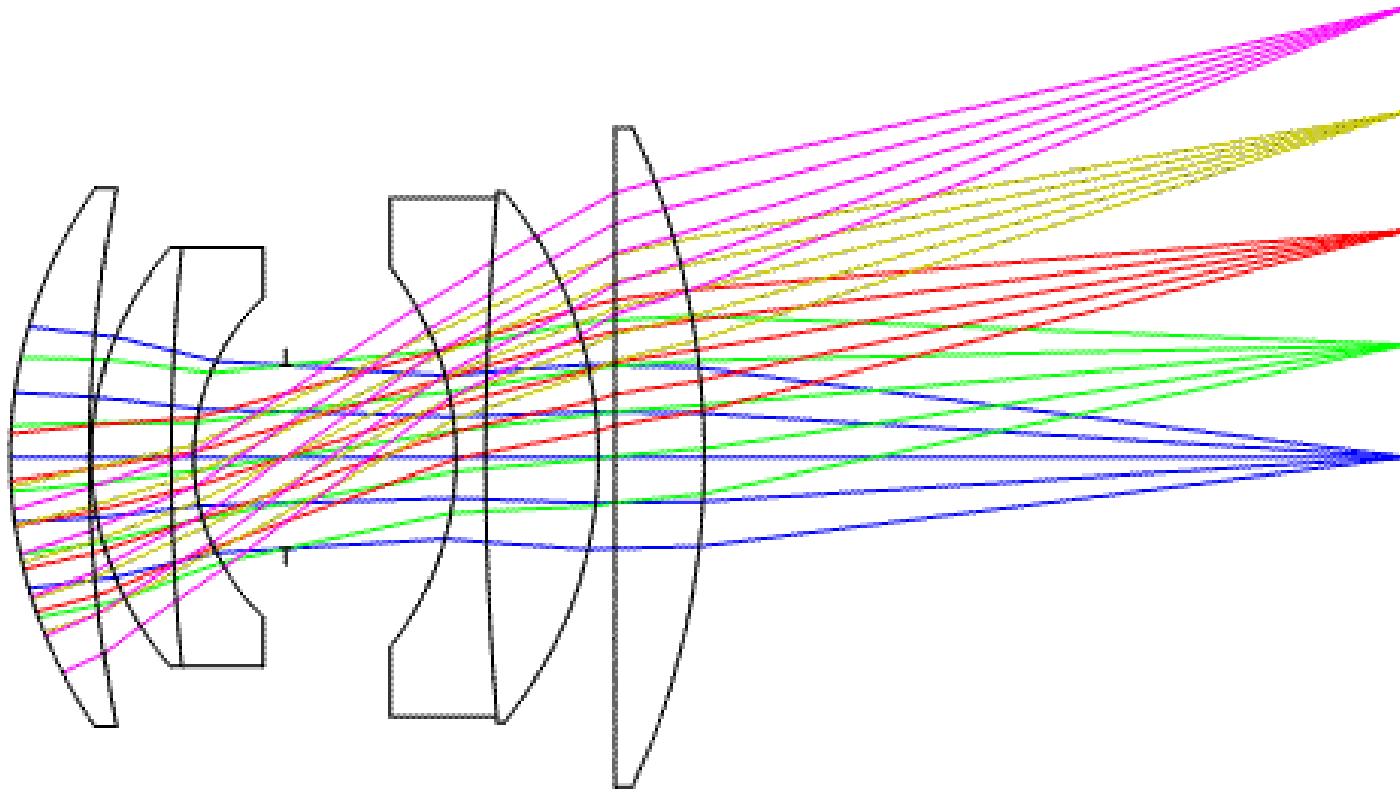
完善像: 物体上每个点经过光学系统后所成完善像点的集合，即该物体经光学系统后的完善像。

物空间：通常把物体所在的空间称为~。

像空间：把像所在的空间称为~。

物像空间的范围均为 $(-\infty, +\infty)$ 。

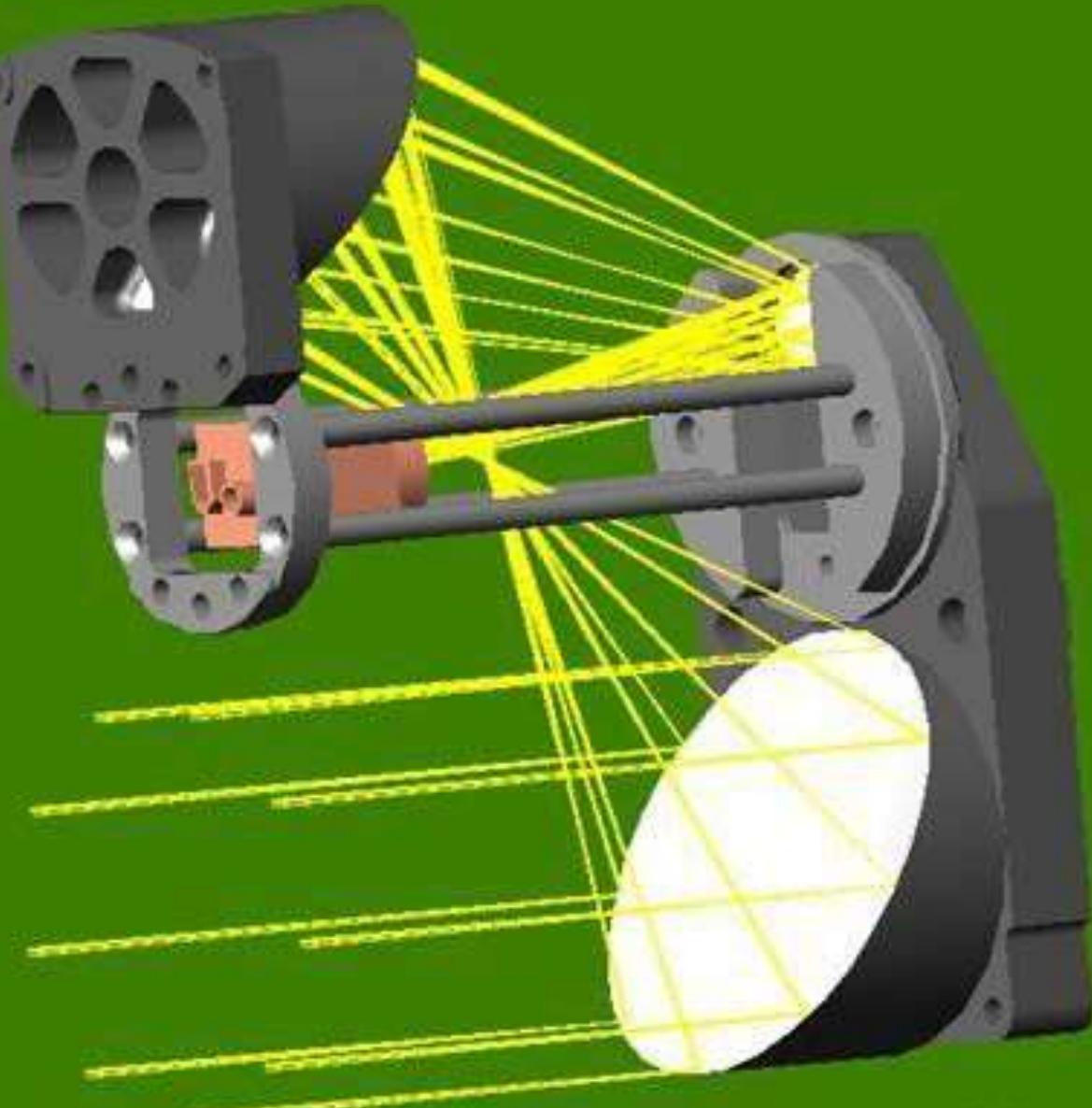




LAYOUT

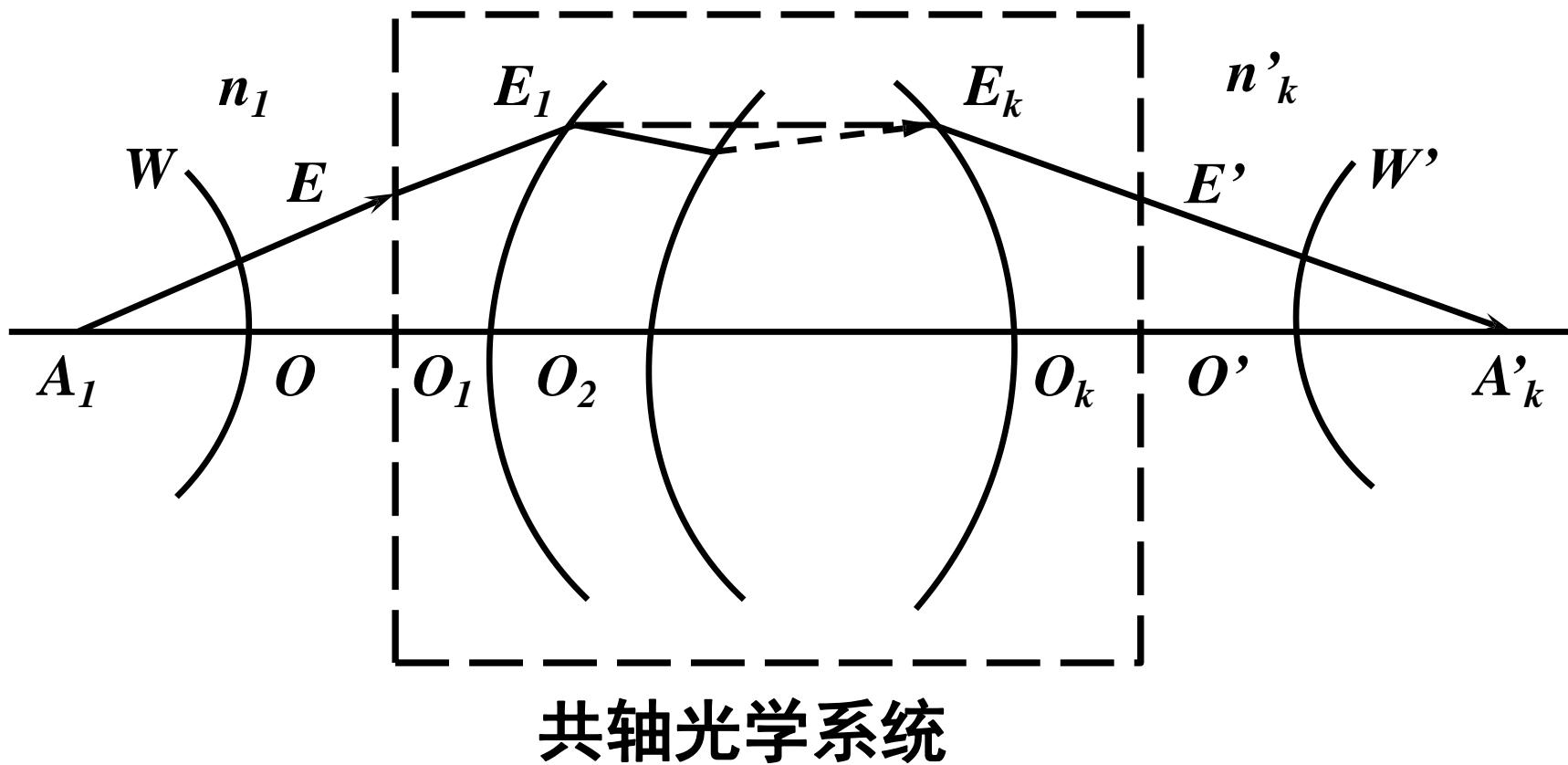
FRI AUG 12 2011
TOTAL LENGTH: 69.97171 MM

ZXT-F50-F266(K-G)1,201X
CONFIGURATION 1 OF 2



www.robomaster.com

■ 1.2.2 完善成像条件



■ 1.2.2 完善成像条件

光学系统成完善像的条件为：**入射波面为球面时，出射波面也为球面波**。或入射光为同心光束，出射光亦为同心光束。

根据马吕斯定律，入射波面与出射波面对应点间的光程相等，则完善成像条件**用光程的概念表述**为：**物点 A_1 及其像点 A_k' 之间任意两条光路光程相等**，即

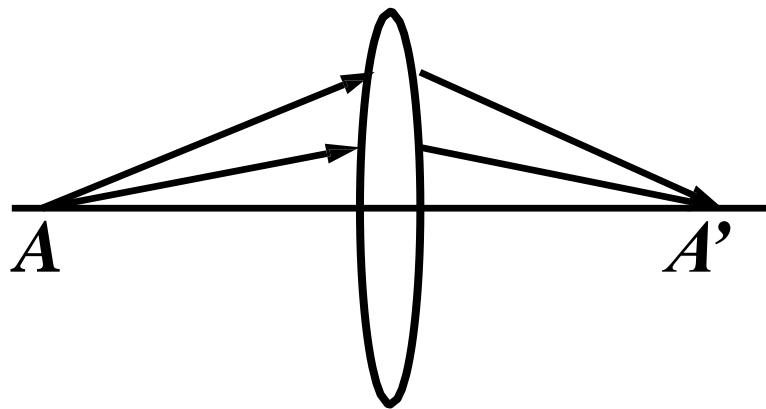
$$(A_1 A_k') = \text{常数}$$

■ 1.2.3 物、像的虚实

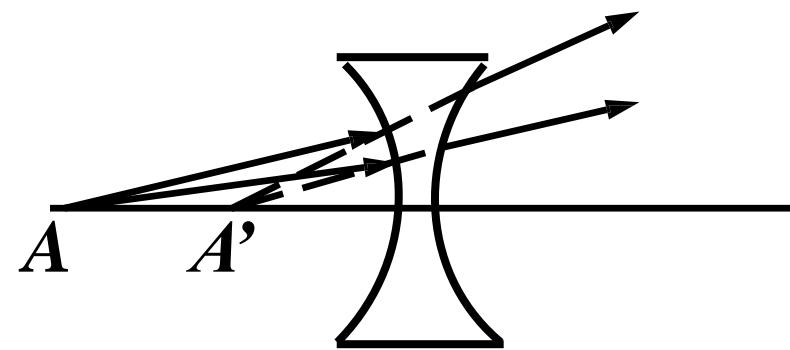
根据物像方同心光束的会聚与发散，物、像有虚实之分。

实像点：由实际光线相交所形成的点为实物点或~。

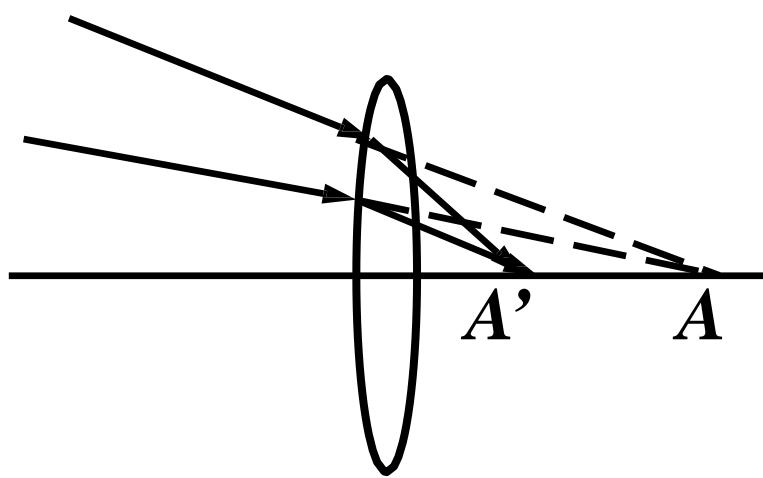
虚像点：由光线的反向延长线相交所形成的点为虚物点或~。



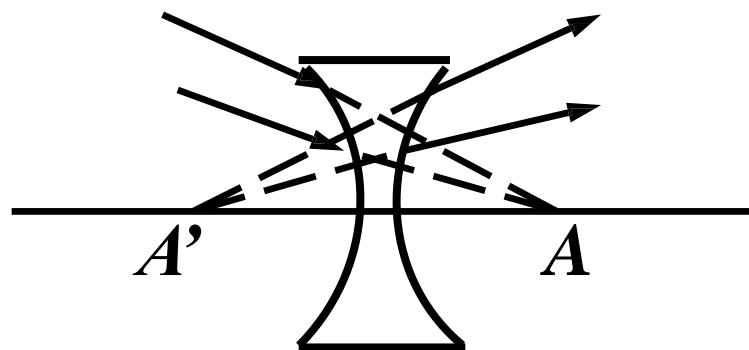
a) 实物成实像



b) 实物成虚像



c) 虚物成实像



d) 虚物成虚像

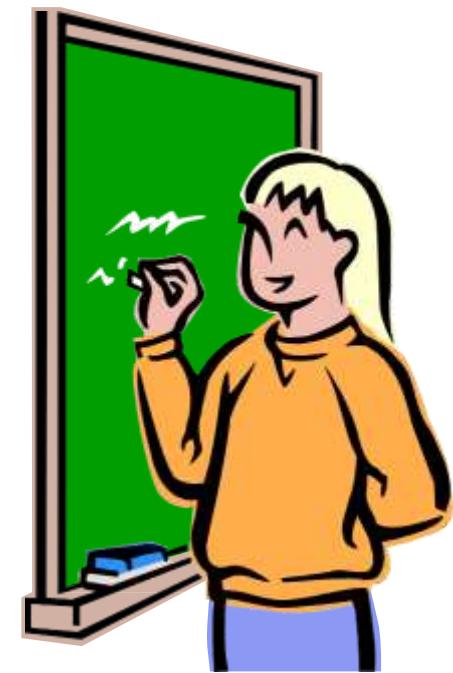
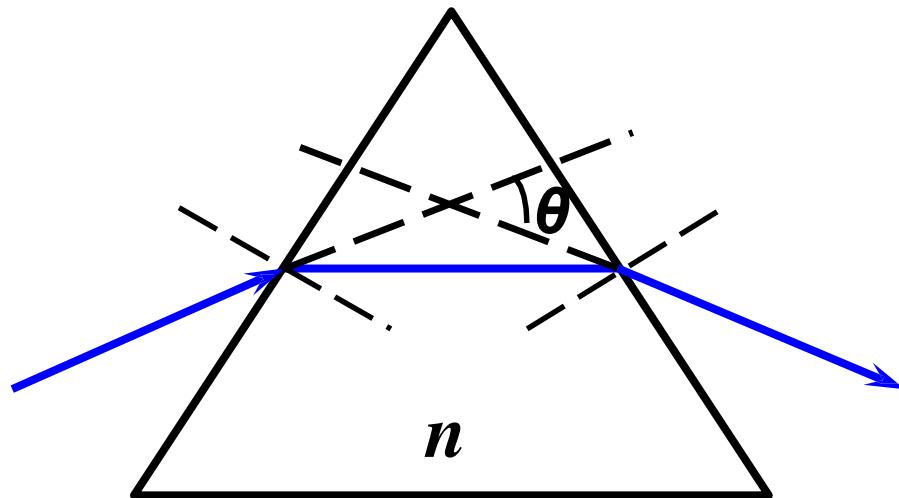
实际应用

如何利用几何光学原理求解
块状透明材料的折射率？

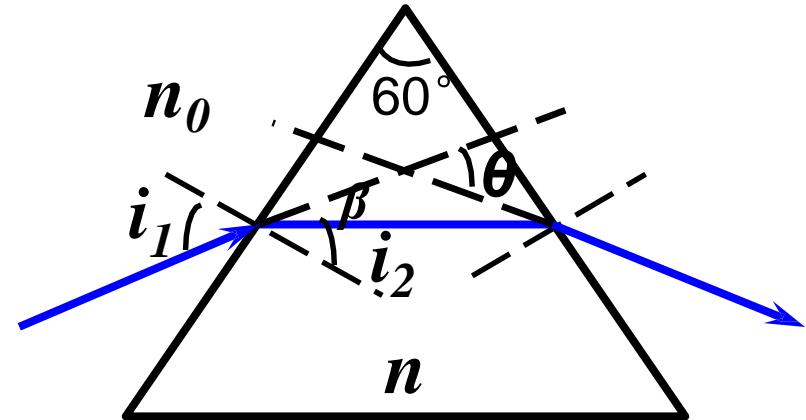
一周后课堂讨论



[例题3] 一个等边三角棱镜，假定入射光线和出射光线关于棱镜对称，出射光线对入射光线的偏转角 θ 为 40° ，求棱镜的折射率 n 。



[解] 如图，光线入射到等边三棱镜，且入射光线与折射光线相对棱镜对称，两光线的偏转角 θ 为 40° 。



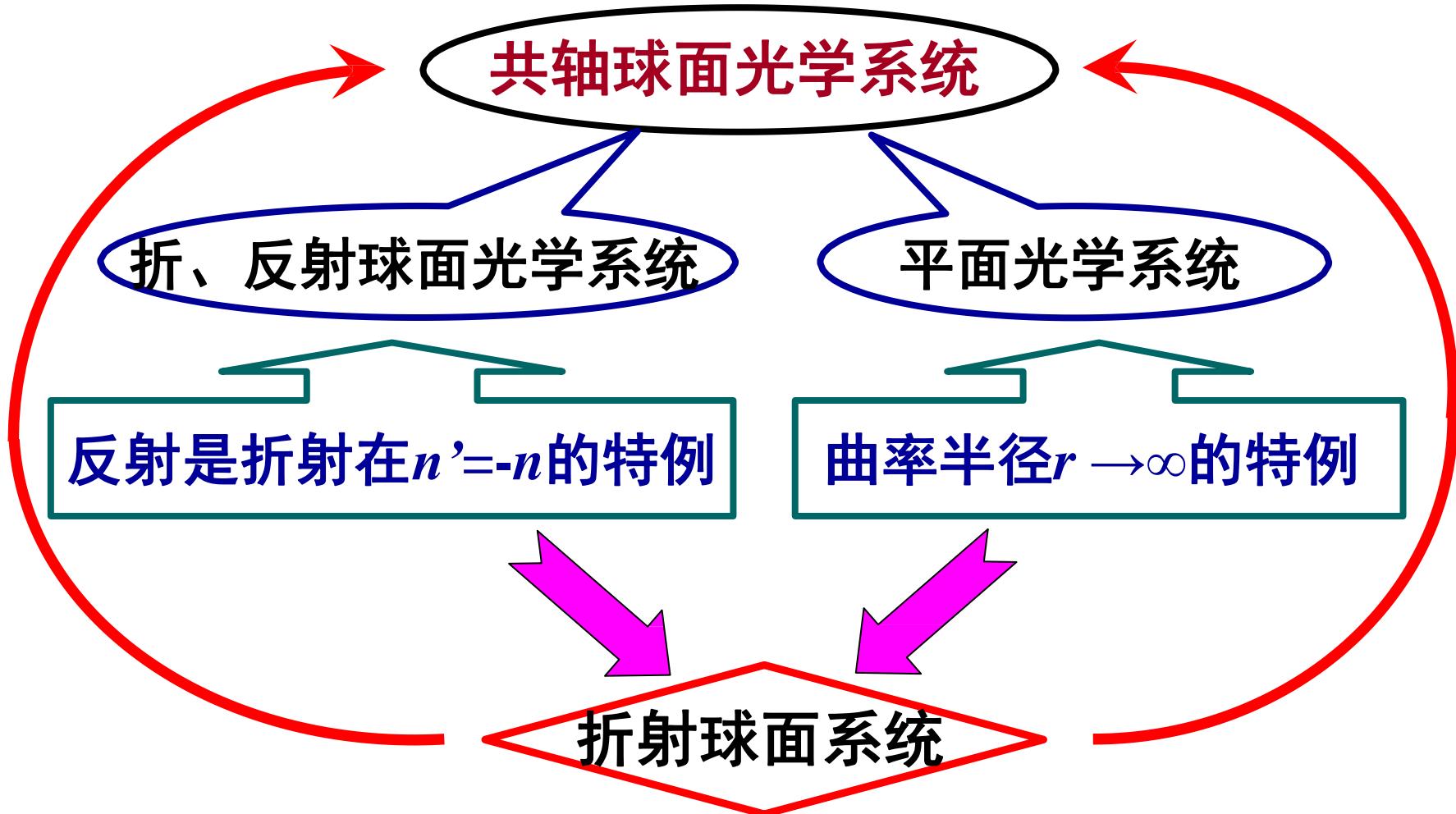
$$\text{可知: } i_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$i_1 = \beta + i_2 = \frac{\theta}{2} + 30^\circ = \frac{40^\circ}{2} + 30^\circ = 50^\circ$$

$$\text{根据折射定律: } n_0 \sin i_1 = n \sin i_2$$

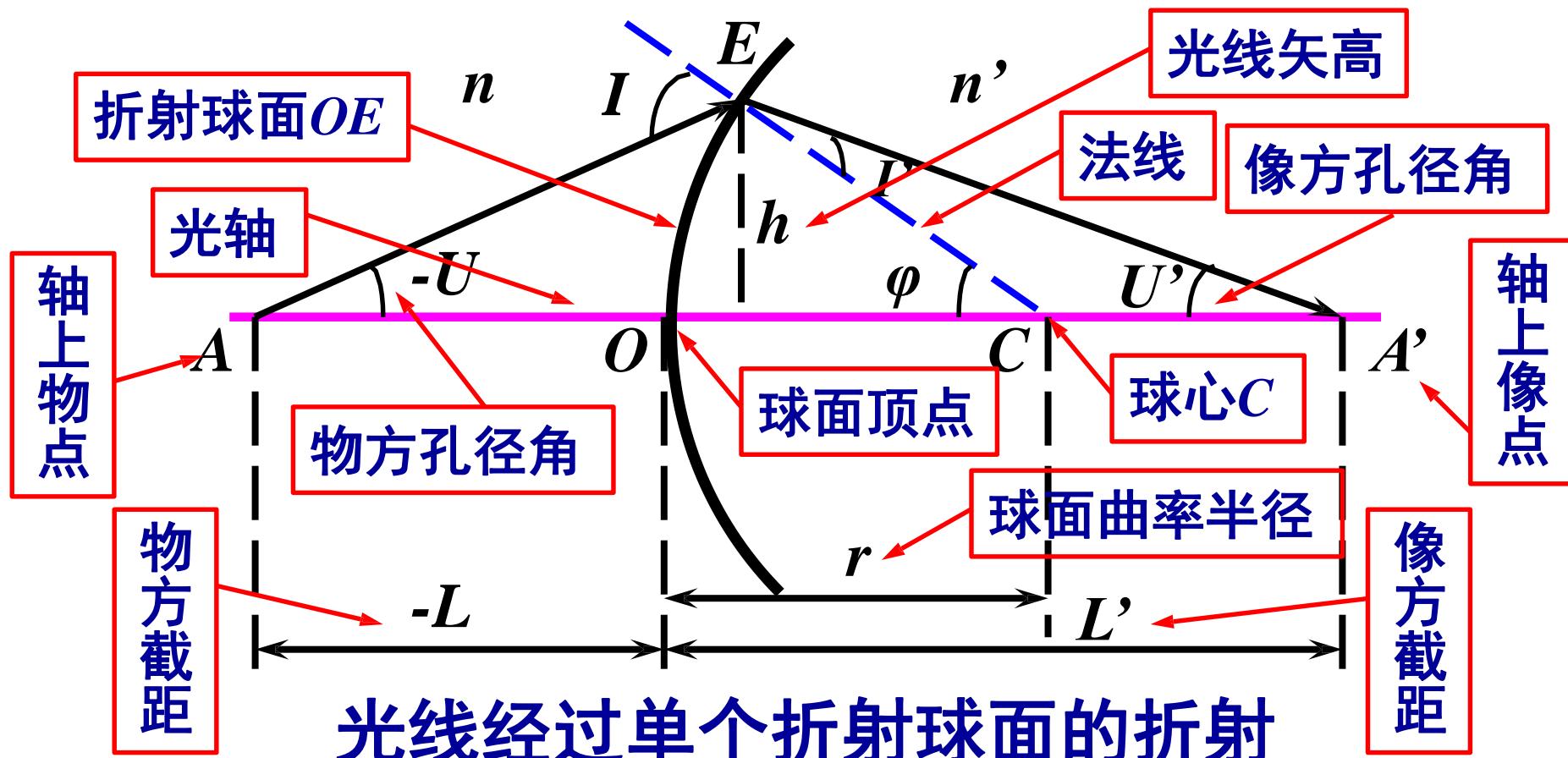
$$\text{棱镜的折射率为: } n = \frac{n_0 \sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{0.7660}{0.5} = 1.532$$

§ 1.3 光路计算与近轴光学系统



§ 1.3 光路计算与近轴光学系统

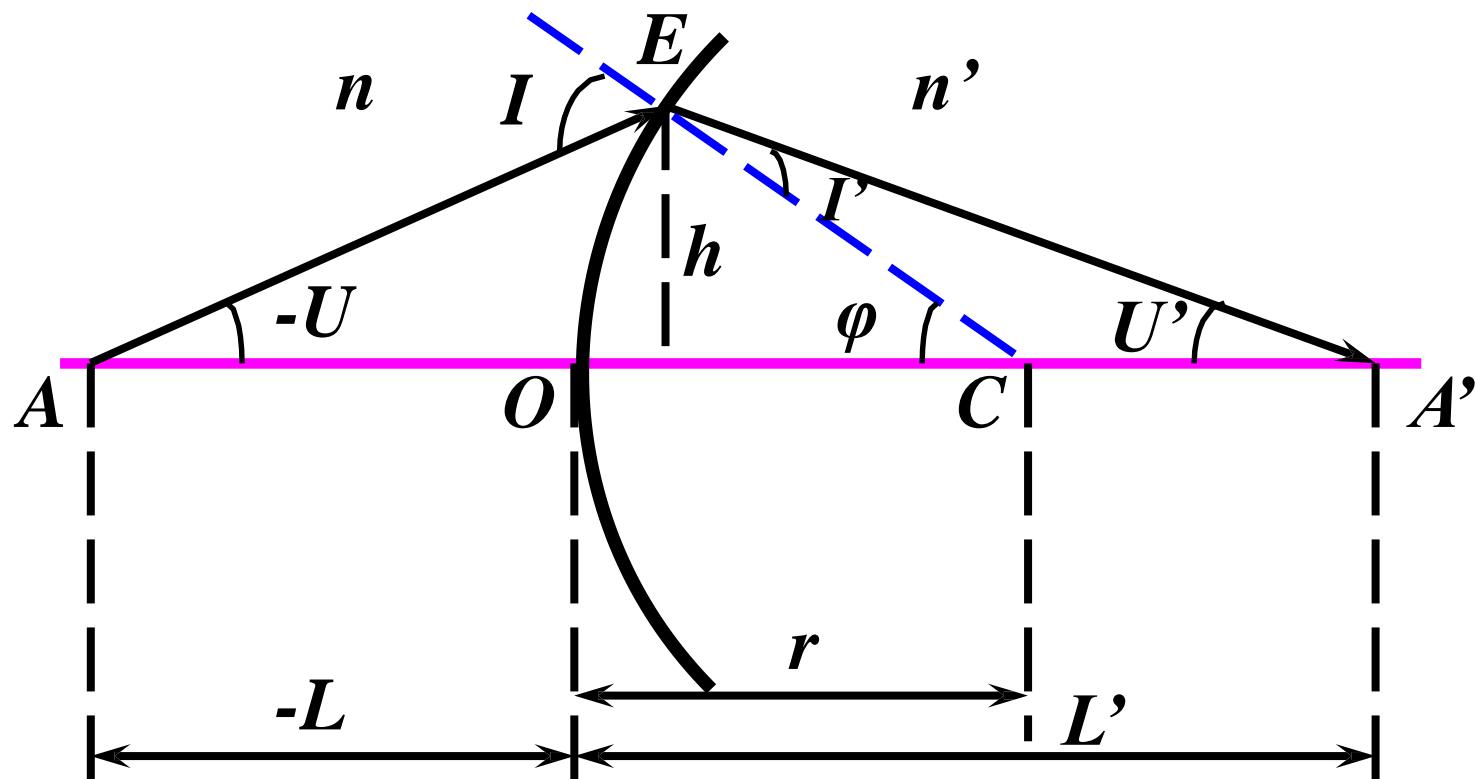
■ 1.3.1 基本概念与符号规则



■ 符号规则：（参见**GB1223-1976**）

- 1 沿轴线段（如 L 、 L' 和 r ）：规定光线传播方向自左至右为正向，相反时取负。
- 2 垂轴线段（如光线矢高 h ）：光轴上方为正，下方为负。
- 3 光线与光轴的夹角（如 U 、 U' ）：由光轴转向光线所形成的锐角度量，顺时针为正、逆时针为负。
- 4 光线与法线的夹角（如 I 、 I' ）：由光线以锐角方向转向法线，顺时针为正，逆时针为负。
- 5 光轴与法线的夹角（如 φ ）：由光轴以锐角方向转向法线，顺时针为正，逆时针为负。
- 6 相邻两折射面间隔（用 d 表示）：由前一面的顶点到后一面的顶点，顺光线方向为正，逆光线方向为负。在折射系统中， d 恒为正值。

■ 1.3.2 实际光线的光路计算

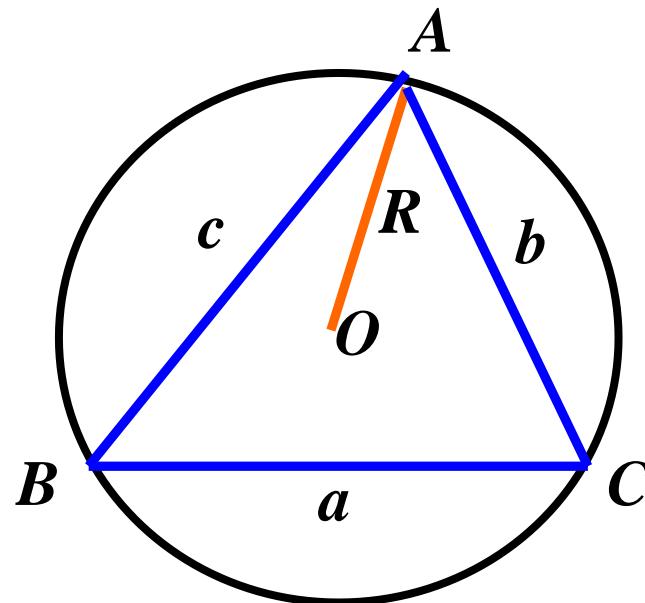


光线经过单个折射球面的折射

三角形基本定理——正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

式中 R 为 ΔABC 的外接圆半径。



如图为光线经过单个折射面的光路，已知球面曲率半径 r ，介质折射率 n 和 n' 及光线物方坐标 L 和 U ，求像方光线坐标 L' 和 U' 。

在 ΔAEC 中，应用正弦定理得：

$$\frac{r}{\sin(-U)} = \frac{-L+r}{\sin I} \Rightarrow \sin I = (L-r) \frac{\sin U}{r} \quad (1)$$

在 E 点应用折射定律得：

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \quad (2)$$

由图知： $\varphi = U + I = U' + I'$

由上式得像方孔径角 U' 为:

$$U' = U + I + I' \quad (3)$$

在 $\Delta A'E C$ 中应用正弦定理得:

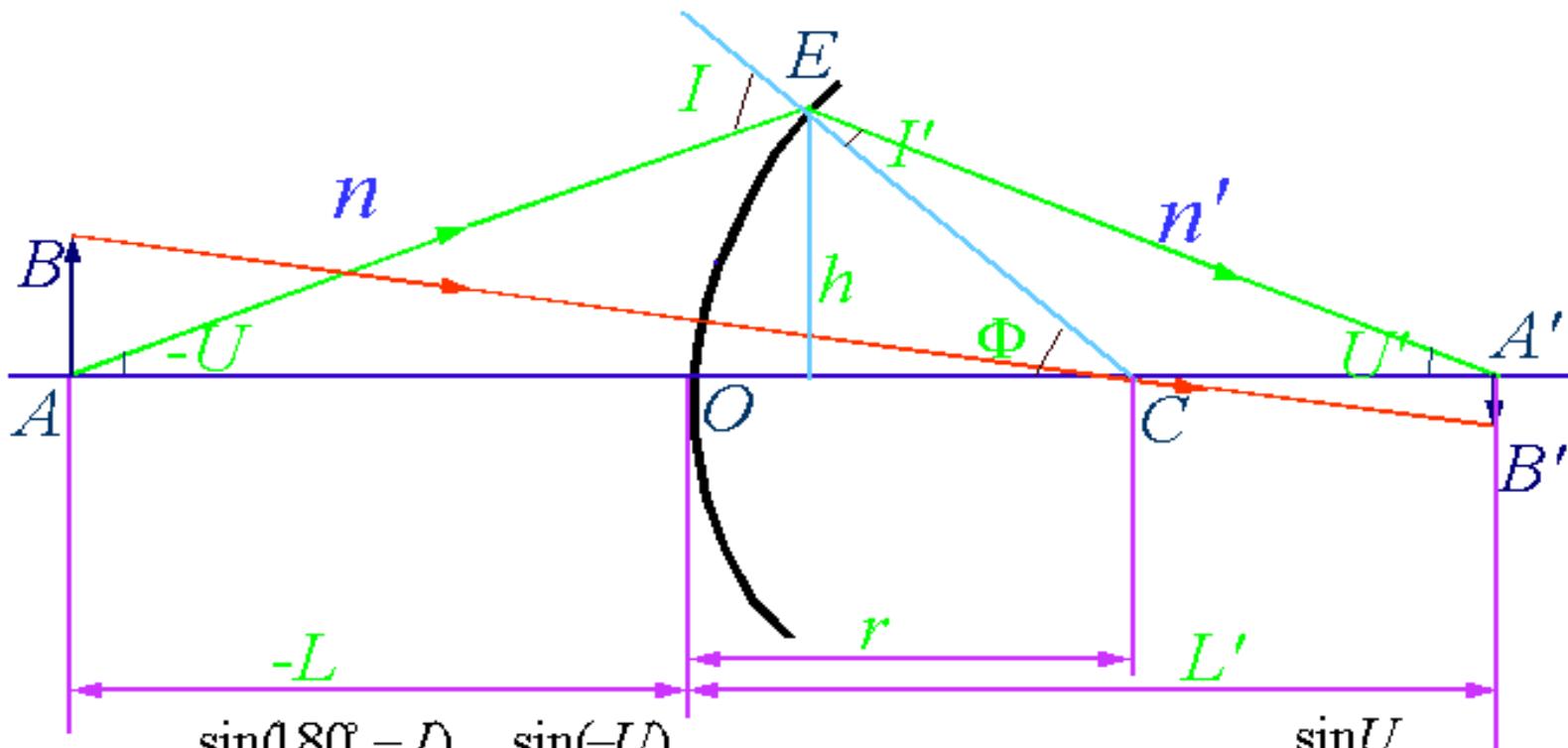
$$\frac{L' - r}{\sin I'} = \frac{r}{\sin U'}$$

于是得像方截距为:

$$L' = r \left(1 + \frac{\sin I'}{\sin U'} \right) \quad (4)$$

上述公式为**子午面内**实际光线经过**单个折射球面**时的光路计算公式。

球差的产生原因

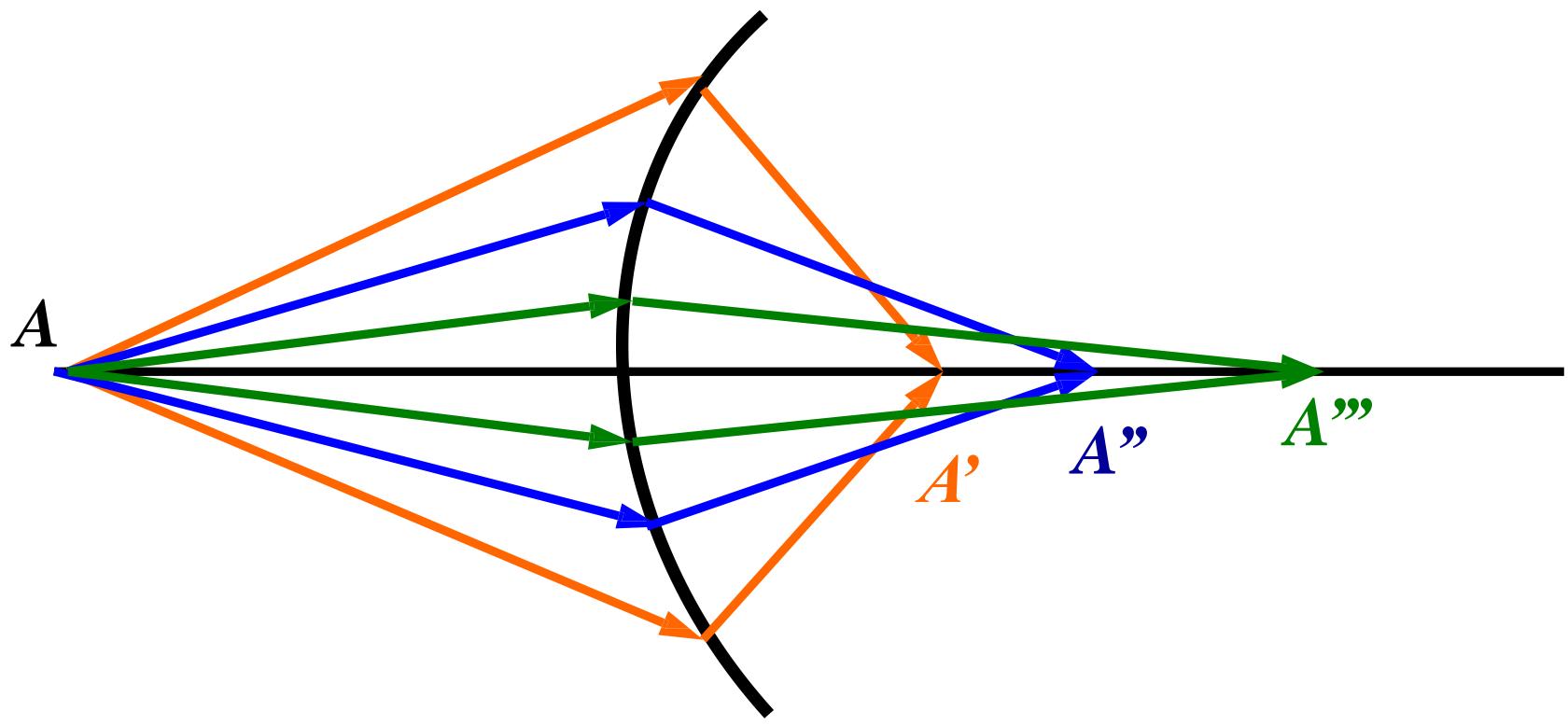


$$\frac{\sin(180^\circ - I)}{-L + r} = \frac{\sin(-U)}{r} \quad \longrightarrow \quad \sin I = (L - r) \frac{\sin U}{r}$$

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I$$

$$\phi = U + I = U + I' \quad \longrightarrow \quad U' = U + I - I'$$

$$\frac{\sin I'}{L' - r} = \frac{\sin U'}{r} \quad \longrightarrow \quad L' = r \left(1 + \frac{\sin I'}{\sin U'} \right)$$



轴上物点经折射球面后成像的**不完善性**

由于折射面乃至整个系统具有轴对称性，故以A为顶点、 $2U$ 为顶角的圆锥面上的光线经折射后均会聚于 A' 。

由上述推导知，当 L 一定时， L' 是 U 的函数。因此，同一物点发出的不同孔径的光线经折射后，具有不同的 L' 值，**原同心光束经折射后不再同心**。

因此，**单个折射球面对轴上物点成不完善像**，此现象称为“**球差**”。球差是球面光学系统的**固有缺陷**。

■ 1.3.3 近轴光线的光路计算

近轴区：当孔径角U很小时，光线在光轴附近很小的区域内，此区域称~。

近轴光线：近轴区域内的光线称为~。

由于近轴光线的有关角度量都很小，在上述公式中，将**角度的正弦值**用其相应的**弧度值**来代替，并用相应的小写字母表示各量，可改写如下。

■ 1.3.3 近轴光线的光路计算

$$i = \frac{l - r}{r} u \quad (1b) \quad i' = \frac{n}{n'} i \quad (2b)$$

$$u' = u + i - i' \quad (3b) \quad l' = r \left(1 + \frac{i'}{u'} \right) \quad (4b)$$

高斯像：轴上物点在近轴区内以细光束成像是完善的，这个像成为~。

高斯像面：通过高斯点且垂直于光轴的平面称为~。

共轭点：这样一对构成物像关系的点成为~。

■ 1.3.3 近轴光线的光路计算

在近轴区内，有 $\textcolor{blue}{l'u'} = \textcolor{blue}{lu} = h$ 。

将式 (1b)、(4b) 代入式 (2b) 得，

阿贝不变量

$$n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l'} \right) = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right) = Q \quad (5)$$

$$n'u' - nu = (n' - n) \frac{h}{r} \quad (6)$$

在像差理论中有重要应用

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r} \quad (7)$$

高斯定理

■ 1.3.3 近轴光线的光路计算

5 式表明，对于单个折射面，物空间与像空间的阿贝不变量 Q 相等，仅随共轭点的位置而变。

6 式表示了物、像方孔径角的相互关系。

7 式表明了单个折射球面的物、像位置关系，已知物体位置 l ，即可求出其共轭像的位置 l' 。反之亦然。

§ 1.4 球面光学成像系统

上节讨论**轴上点**经单个折射球面的成像，主要涉及**物像位置关系**。

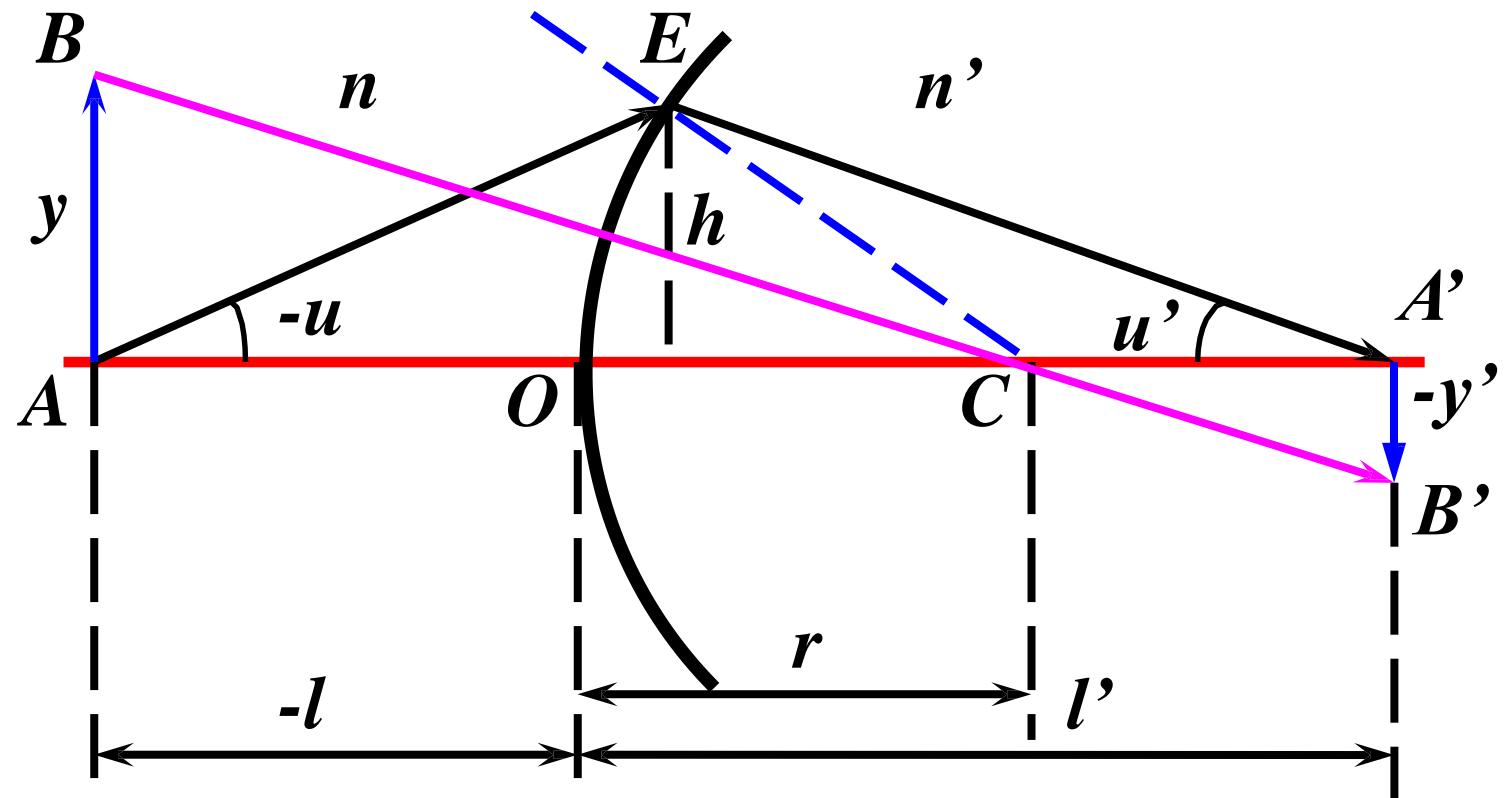
当讨论**有限大小的物体**经折射球面乃至球面光学系统成像时，除了物像位置关系外，还涉及像的放大与缩小、像的正倒与虚实等**成像特性**。下面我们均在**近轴区内**讨论。



问题

为什么光线经过光学系统
后 会有物、像的比例变化以及
虚、 实的成像特性？

■ 1.4.1 单个折射面成像



近轴区有限大小的物体经过单个折射球面的成像

■ 1.4.1.1 垂轴放大率

在近轴区内， AB 为垂直于光轴的平面物体，经球面折射后成像于 $A'B'$ 垂直于光轴 AOA' 。

由轴外物点 B 发出的通过球心 C 的光线 BC 必定通过 B' 点，因 BC 相当于轴外物点 B 的光轴（称辅轴）。

定义垂轴放大率 β 为像的大小与物体大小之比，

即

$$\beta = \frac{y'}{y} \quad (8)$$

■ 1.4.1.1 垂轴放大率

由于 ΔABC 相似于 $\Delta A'B'C'$, 则有

$$-\frac{y'}{y} = \frac{l' - r}{r - l}$$

利用式(5), 得

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n'l'}{n'l} \quad (9)$$

由此可见, 垂轴放大率仅取决于共轭面的位置。

问题

为何定义垂轴放大率？通过它能知道什么？



$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{nl'}{n'l} \quad (9)$$



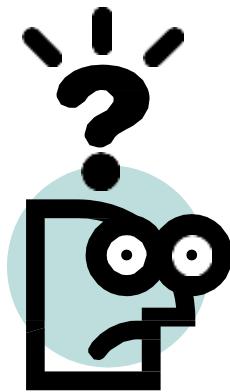
讨论

根据 β 的定义和式（9），可确定物体的**成像特性**，即像的正倒、虚实、放大与缩小：

- 1 若 $\beta>0$ ，即 y' 与 y 同号，成**正像**；反之， y' 与 y 异号，成**倒像**。
- 2 若 $\beta>0$ ，即 l' 与 l 同号，物像**虚实相反**；反之， l' 与 l 异号，物像**虚实相同**。
- 3) 若 $|\beta|>1$ ，则 $|y'|>|y|$ ，成**放大像**；反之， $|y'|<|y|$ ，成**缩小像**。

问题

为何物体经光学系统成像后大都产生变形？



■ 1.4.1.2 轴向放大率

轴向放大率 α 表示光轴上一对共轭点沿**轴向**的移动量之间的关系，定义为物点沿光轴作微小移动 dl 时，引起**像点的移动量** dl' 与**物点移动量** dl 之比，即

$$\alpha = \frac{dl'}{dl} \quad (10)$$

对于单个折射球面，将式(7)两边微分，得

$$-\frac{n'dl'}{l'^2} + \frac{ndl}{l^2} = 0$$

于是得轴向放大率,

$$\alpha = \frac{dl'}{dl} = \frac{nl'^2}{n'l^2} \quad (11)$$

轴向放大率与垂轴放大率的关系为,

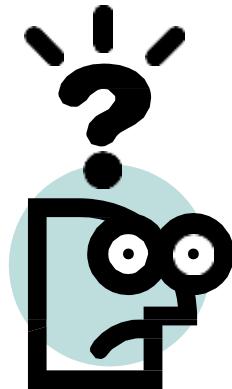
$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2 \quad (12)$$

空间物体成像
形变的原因



问题

请问在一个球面折射系统中，当物点
沿 轴向移动时，像点沿光轴如何移动？





1 折射球面的轴向放大率恒为正。故当物点沿轴向移动时，其像点沿光轴同向移动；

2 轴向放大率与垂轴放大率不等。故空间物体成像时要变形。例如，一个正方体成像后，不再是正方体。

■ 1.4.1.3 角放大率

在近轴区内，角放大率 γ 定义为一对共轭光线与光轴的夹角 u' 与 u 之比值。表示如下，

利用 $l'u' = lu$ ，得

$$\gamma = \frac{u'}{u} \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{l}{l'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta} \quad (14)$$

角放大率 γ 表示折射球面将光束变宽或变窄的能力。上式表明，角放大率只与共轭点的位置有关，而与光线的孔径无关。

垂轴放大率 β 、轴向放大率 α 与角放大率 γ 之间是密切联系的，三者之间的关系表示如下：

$$\alpha\gamma = \frac{n'}{n} \beta^2 \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta} = \beta \quad (15)$$

由右式，

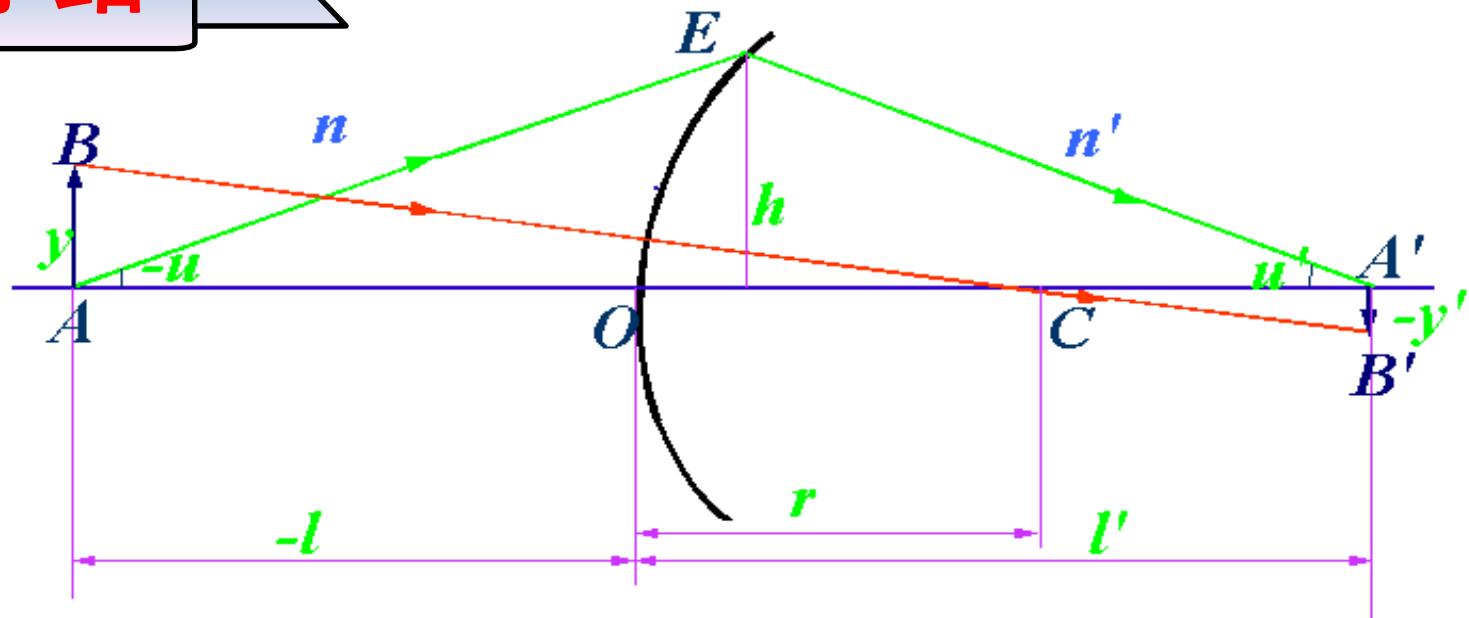
$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{nl'}{n'l} = \frac{nu}{n'u'}$$

可得，

$$nuy = n'u'y' = J \quad (16)$$

上式表明，实际光学系统在近轴区成像时，在物像共轭面内，物体大小 y 、成像光束孔径角 u 和物体所在介质的折射率 n 的乘积为一常数 J ，被称为拉格朗日-赫姆霍兹不变量，简称拉赫不变量。它是表征光学系统性能的一个重要参数。

小结



在图中 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$

垂轴放大率 $\beta = y'/y = nl'/n'l$,

轴向放大率 $\alpha = dl'/dl = nl'^2/n'l^2 = n'/n * \beta^2$

角放大率 $\gamma = u'/u = l'/l = n'/n * 1/\beta$

■ 1.4.2 球面反射成像

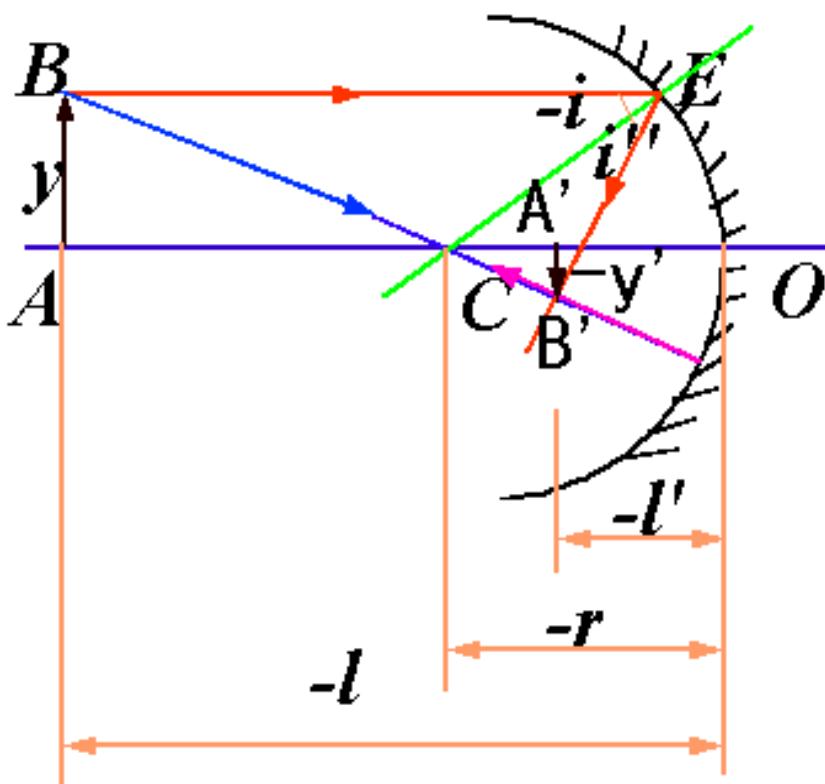
反射可看作折射的特例。令 $n' = -n$ ，即可由单个折射球面的成像结论，导出球面反射镜的成像特性。

■ 1.4.2.1 物像位置关系

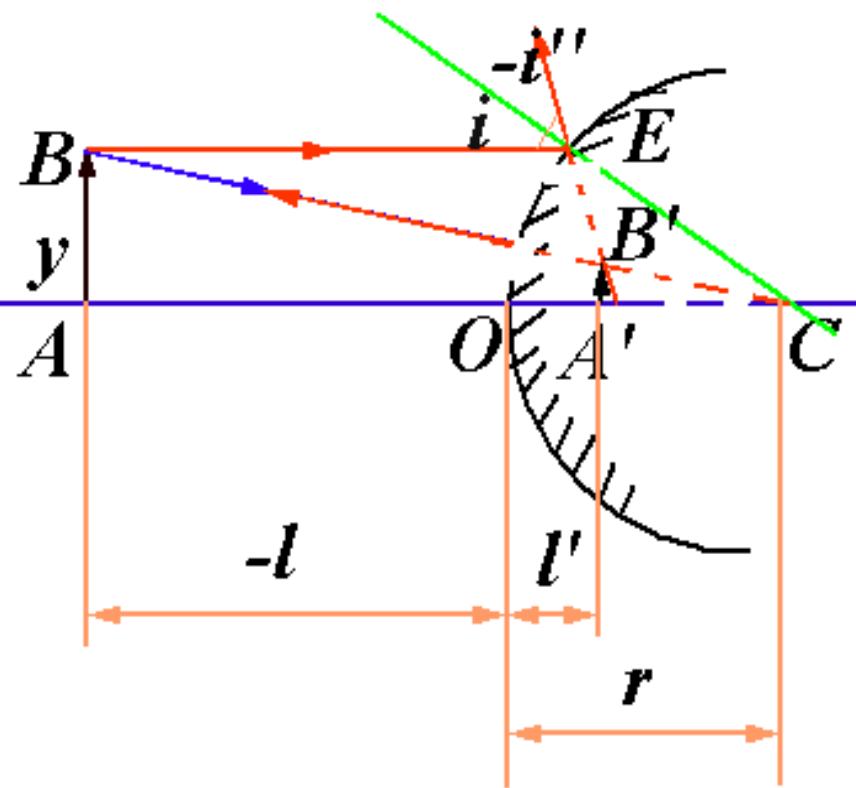
将 $n' = -n$ 代入式（7）中，则得球面镜的**物像关系**如下：

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{2}{r} \quad (17)$$

通常，球面镜分为**凹面镜**（ $r < 0$ ）和**凸面镜**（ $r > 0$ ），其物像关系如下图所示。



a) 凹面镜成像

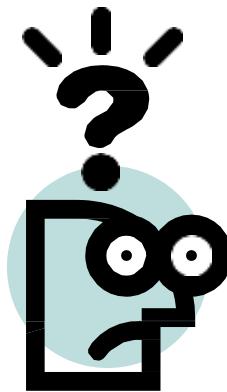


b) 凸面镜成像

图1-12 球面镜成像

问题

为何物体经反射光学系统成像时，当物体沿光轴移动时，像总是向相反的方向移动？



■ 1.4.2.2 成像放大率

将 $n' = -n$ 分别代入式 (9)、(11) 和 (14)，
可得

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{y'}{y} = -\frac{l'}{l} \\ \alpha &= \frac{dl'}{dl} = -\frac{l'^2}{l^2} = -\beta^2 \\ \gamma &= \frac{u'}{u} = -\frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

球面反射镜的轴向放大率 $\alpha < 0$ 表明，当物体沿光轴移动时，像总是向相反的方向移动。

球面镜的拉赫不变量为: $J = uy = -u'y'$ (19)

当物点位于球面镜球心, 即 $l = r$ 时, $l' = r$,

且 $\beta = \alpha = -1$, $\gamma = 1$

此时, 球面镜成倒像。由于反射光线与入射光线的孔径角相等, 即通过球心的光线沿原光路反射, 仍会聚于球心。因此, 球面镜对于球心是等光程面, 成完善像。

■ 1.4.3 共轴球面系统

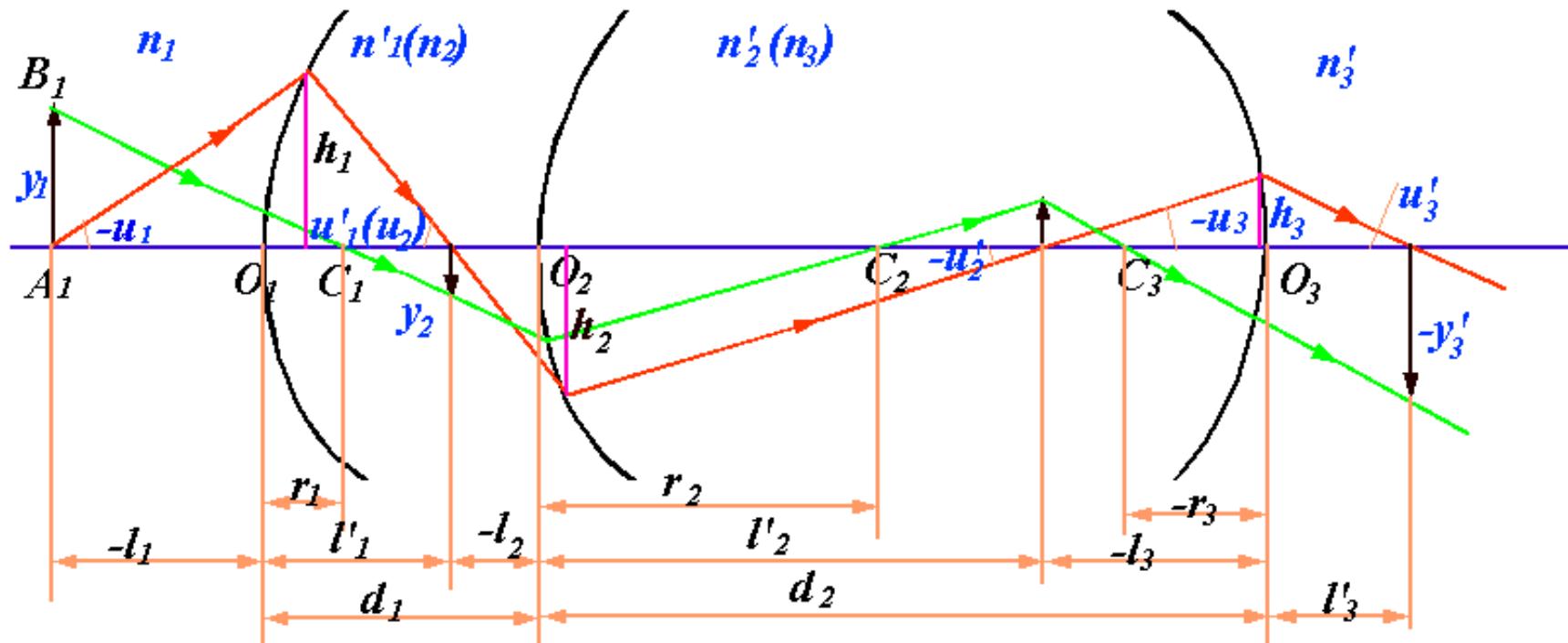
以上讨论了单个折、反射球面的光路计算和成像特性，它对构成光学系统的任何球面是**普适的**。

因此，只要得到**相邻两个球面之间的光路关系**，即可解决整个光学系统的光路计算问题，并可分析整个光学系统的成像特性。

(一) 过渡公式

(二) 成像放大率

图1-13 共轴球面光学系统



$$\left\{ \begin{array}{l} n_2 = n'_1, n_3 = n'_2, \dots, n_k = n'_{k-1} \\ u_2 = u'_1, u_3 = u'_2, \dots, u_k = u'_{k-1} \\ y_2 = y'_1, y_3 = y'_2, \dots, y_k = y'_{k-1} \end{array} \right.$$

$$l_2 = l'_1 - d_1, \quad l_3 = l'_2 - d_2, \quad \dots \quad l_k = l'_{k-1} - d_{k-1}$$

利用过渡公式，容易得出系统的放大率为各面放大率之乘积，即

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{y'_1}{y_1} \cdot \frac{y'_2}{y_2} \cdots \frac{y'_k}{y_k} = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \\ \alpha = \frac{dl'_k}{dl_1} = \frac{dl'_1}{dl_1} \cdot \frac{dl'_2}{dl_2} \cdots \frac{dl'_k}{dl_k} = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \\ \gamma = \frac{u'_k}{u_1} = \frac{u'_1}{u_1} \cdot \frac{u'_2}{u_2} \cdots \frac{u'_k}{u_k} = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k \end{array} \right.$$

可以证明以下面关系，与单个折射面完全相似，因此，**单个折射球面的成像特性具有普遍意义**。

$$\beta = \frac{n_1 l'_1 l'_2 \cdots l'_k}{n'_k l'_1 l'_2 \cdots l'_k}$$

$$\beta = \frac{n_1 u_1}{n'_k u'_k}, \quad \alpha = \frac{n'_k}{n_1} \beta^2, \quad \gamma = \frac{n_1}{n'_k} \frac{1}{\beta}$$

[例题4] 一物体位于半径为 r 的凹面镜前什么位置时，可分别得到：放大4倍的实像、放大4倍的虚像、缩小4倍的实像和缩小4倍的虚像？

- 课后作业:
- P14-15

第1章习题 4, 14题

《工程光学》

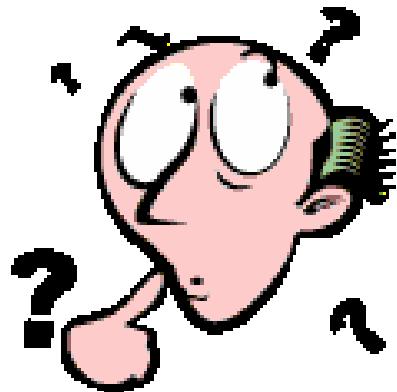
上篇

第2章 理想光学系统 I

本章概要

本章主要介绍**理想光学系统**的主要光学参数、成像关系和放大率、理想光学系统的光组组合和透镜。

何谓理想光学系统？



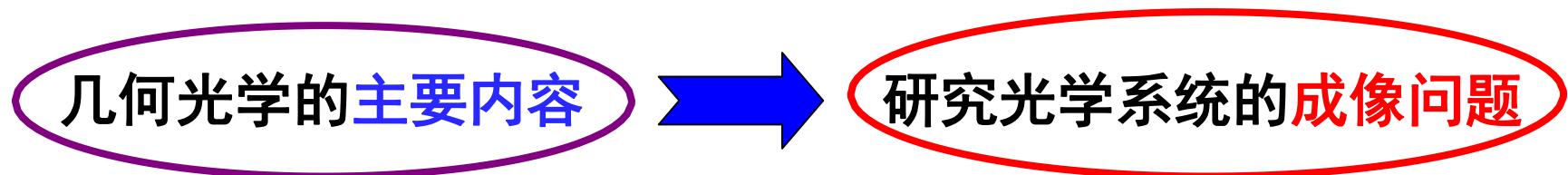
把光学系统在近轴区成完善像的理论推广到任意大的空间，以任意宽的光束都**成完善像**的光学系统称~。

理想光学系统理论是**1841**年由**高斯**提出来的，因此，理想光学系统理论又被称为“**高斯光学**”。

第2章 理想光学系统

- § 2.1 理想光学系统与共线成像理论
- § 2.2 理想光学系统的基点与基面
- § 2.3 理想光学系统的物像关系
- § 2.4 理想光学系统的放大率
- § 2.5 理想光学系统的组合
- § 2.6 透镜

§ 2.1 理想光学系统与共线成像理论



为系统地讨论物像关系，探究光学系统的基本参量，以揭示物、像与系统间的内在关系，可暂时抛开光学系统的具体结构 (r, d, n)，将一般仅在光学系统的近轴区存在的完善成像，拓展到任意大的空间中以任意宽的光束都成完善像的理想模型——理想光学系统。

理想光学系统

物像对应关系

共轭性

光路的可逆性，折、反射定律中光线方向的确定性

物空间的**物点**经系统成像
后 与像空间中的**像点**——

对应

成像变换

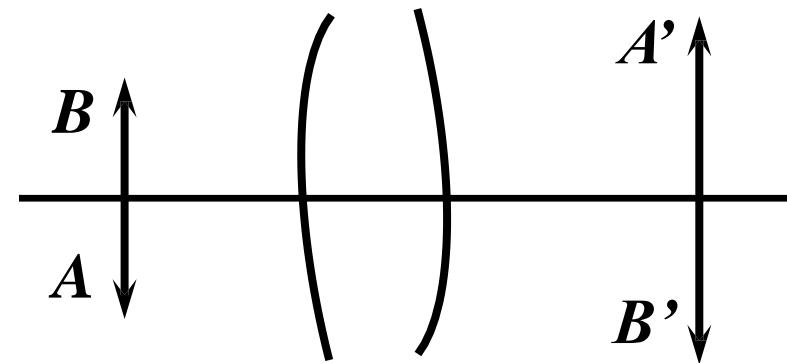
点对点、线对线、面对面的成像变换谓之~。

共线成像

讨论

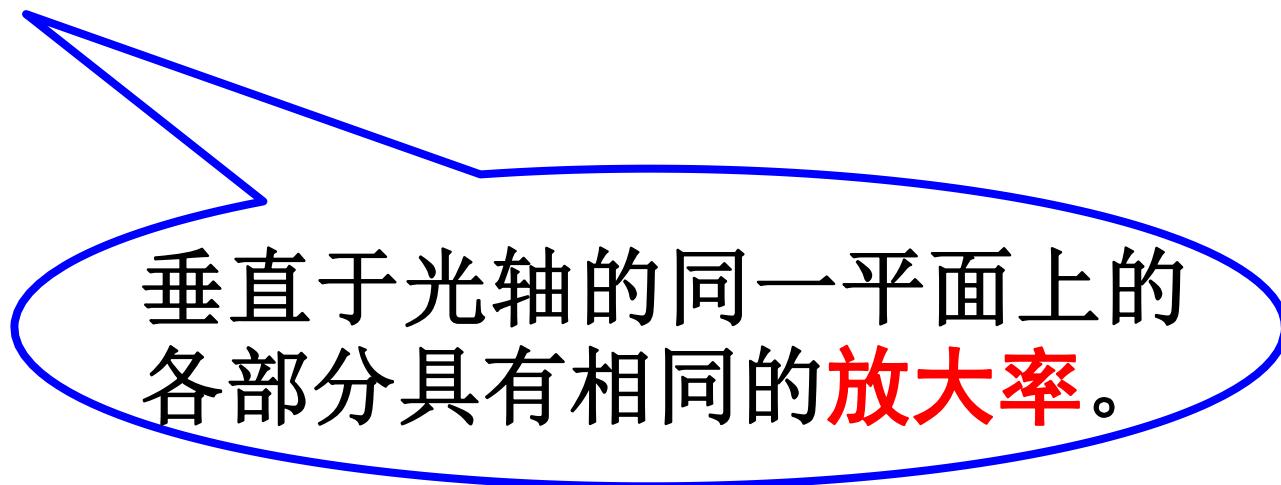
共轴理想光学系统的成像特性：

(1) 位于**光轴上的物点**，其共轭像点也在光轴上；
位于过光轴的截面内的物点对应的共轭像点必位于该平面的共轭像面内；过光轴的任意截面成像性质都相同。



(2) 垂直于光轴的平面物所成的共轭平面像的几何形状完全与物**相似**，也就是说在整个物平面上无论哪一部分，**物和像的大小比例等于常数**。——特性（1）

的推论



(3) 共轴理想光学系统中，若已知**两对共轭面的位置**和**放大率**，或**一对共轭面的位置**和**放大率**，以及轴上**两对共轭点的位置**，则可据此求出其他一切物点的像点。

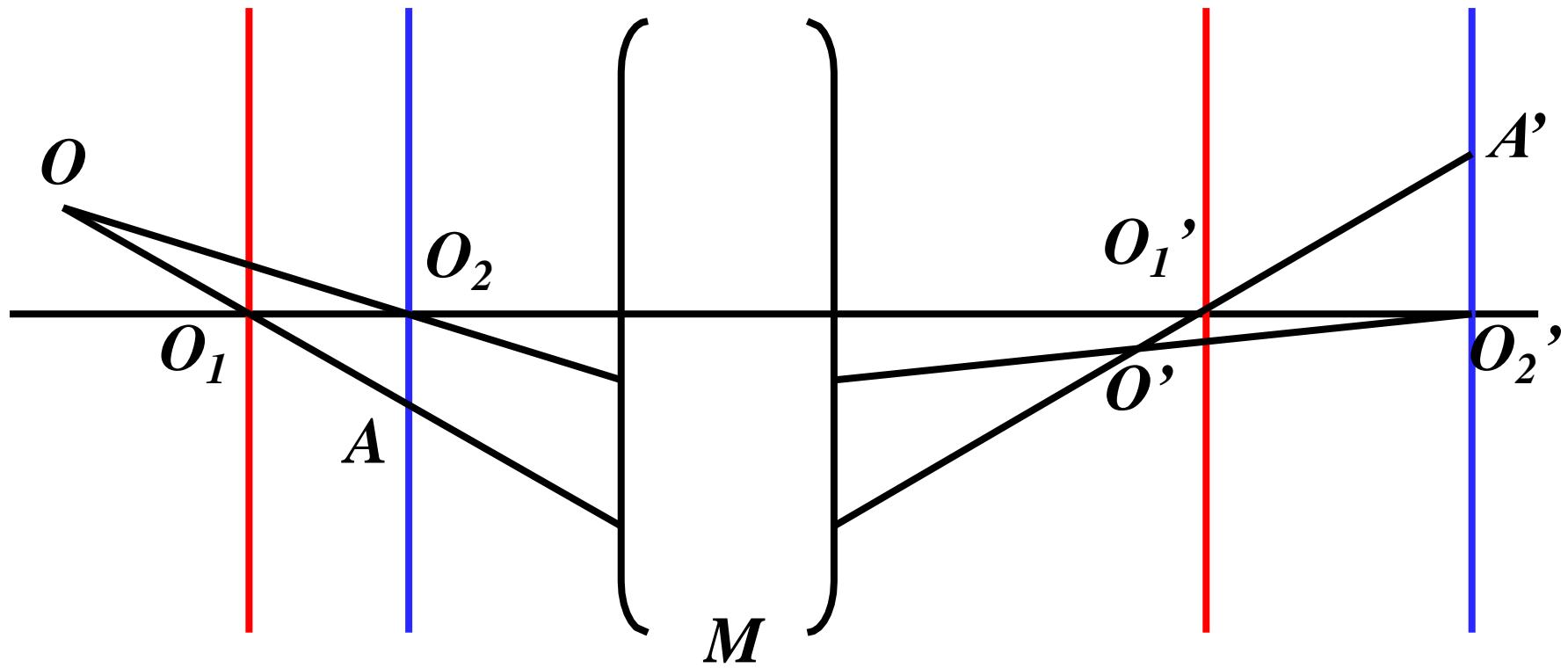
通常，将以上已知的共轭面和共轭点分别称为共轴系统的“**基面**”和“**基点**”。

已知： M 为理想光学系统

像面 O'_1 与物面 O_1 共轭，其对应的放大率 β_1

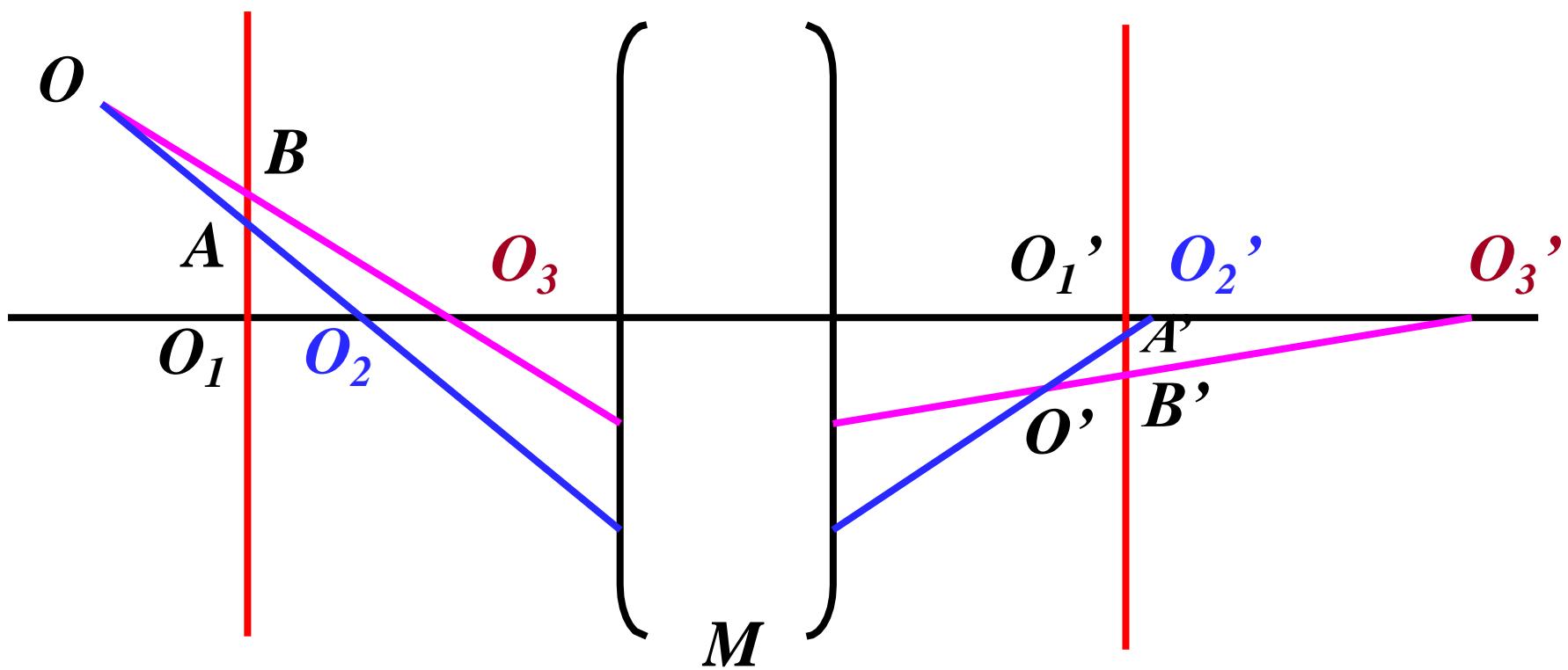
像面 O'_2 与物面 O_2 共轭，其对应的放大率 β_2

求： 物空间任意物点 O 的像点位置 O'



(a) 两对共轭面已知的情况

已知： M 为理想光学系统，
一对共轭面 O_1 与 O'_1
两对共轭点 O_2 与 O'_2 以及 O_3 与 O'_3
求： 物空间任意物点 O 的像点位置 O'



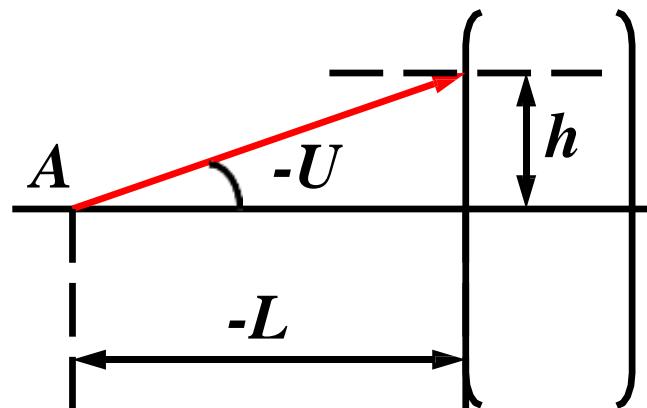
(b) 一对共轭面及两对共轭点已知的情况

§ 2.2 理想光学系统的基点与基面

2.2.1 无限远的轴上物点和它对应的像点 F'

2.2.1.1 无限远轴上物点发出的光线

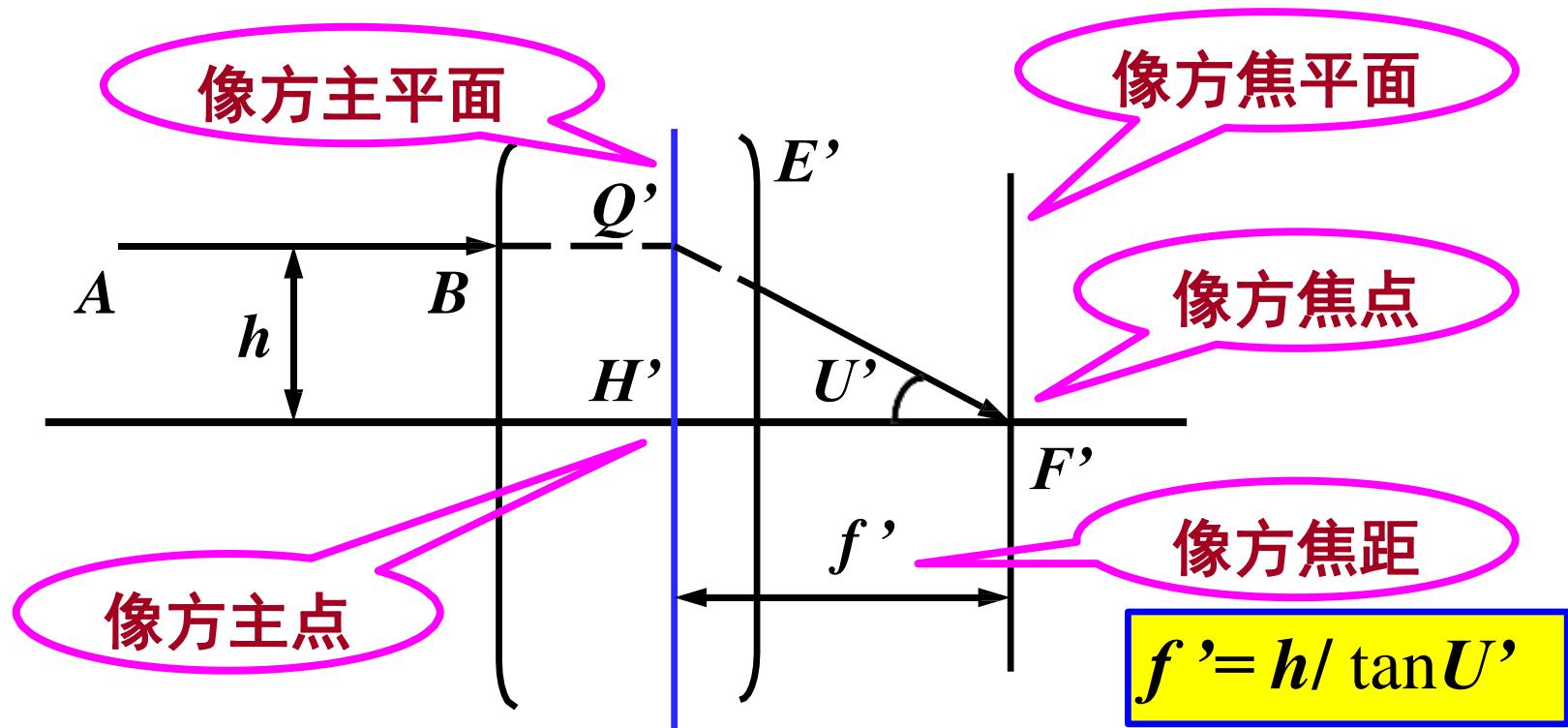
当 $L \rightarrow \infty$ ，即 A 向无限远处左移，由于任何光学系统口径有限，故 $U \rightarrow 0$ ，即无限远轴上物点发出的光线都与光轴平行。



h 、 L 和 U 的关系

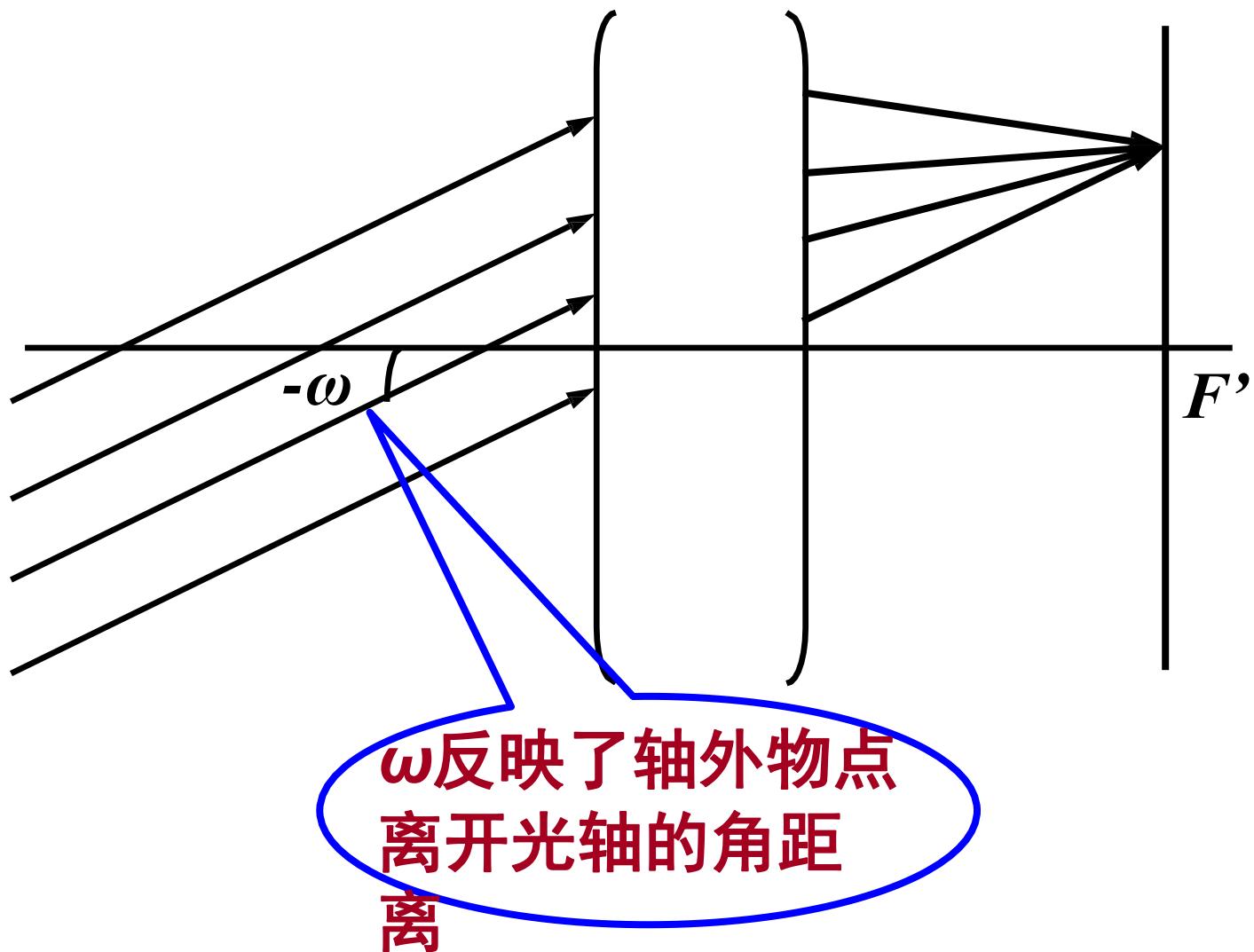
$$\tan U = h/L$$

2.2.1.2 像方焦点、焦平面、焦距， 像方主点、主平面

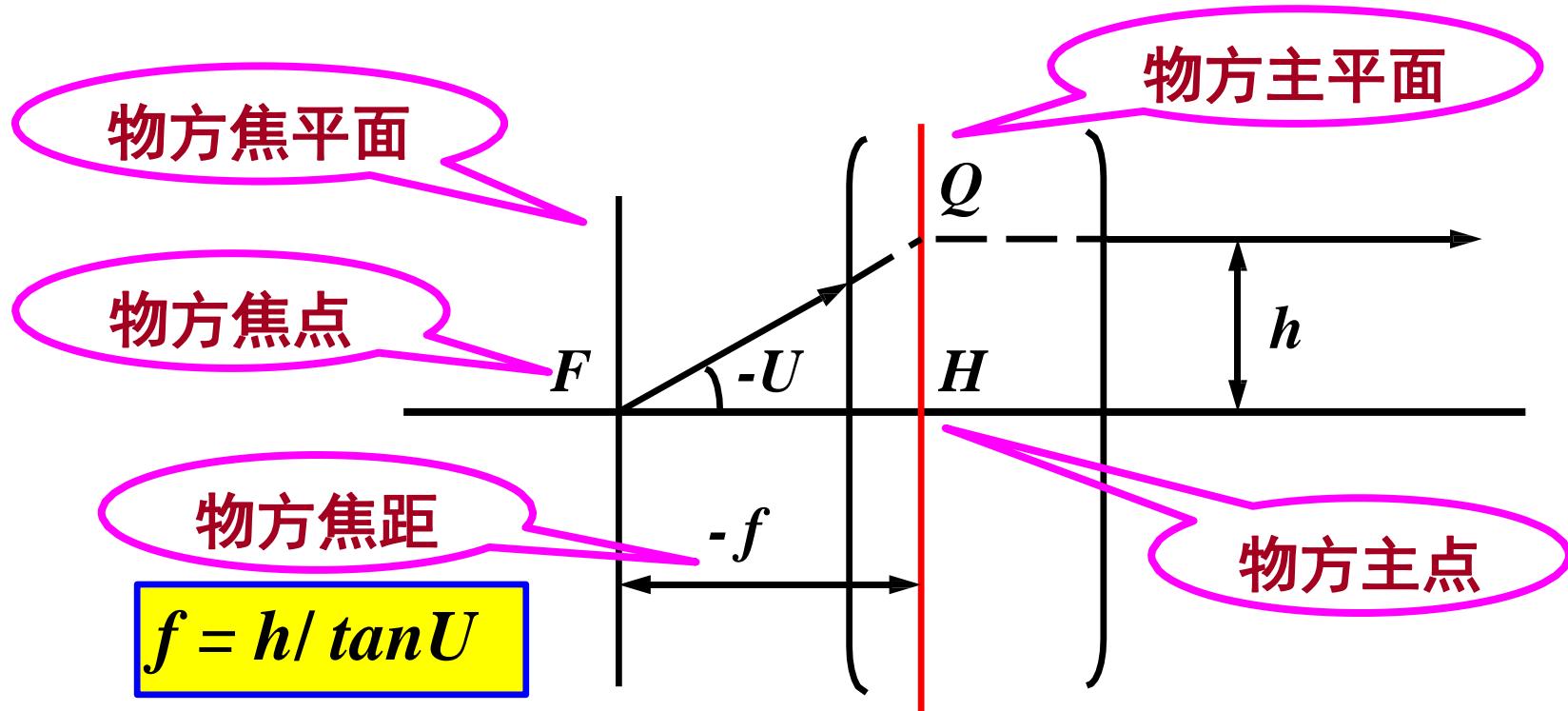


理想光学系统的像方参数

2.2.1.3 无限远轴外物点发出的光线

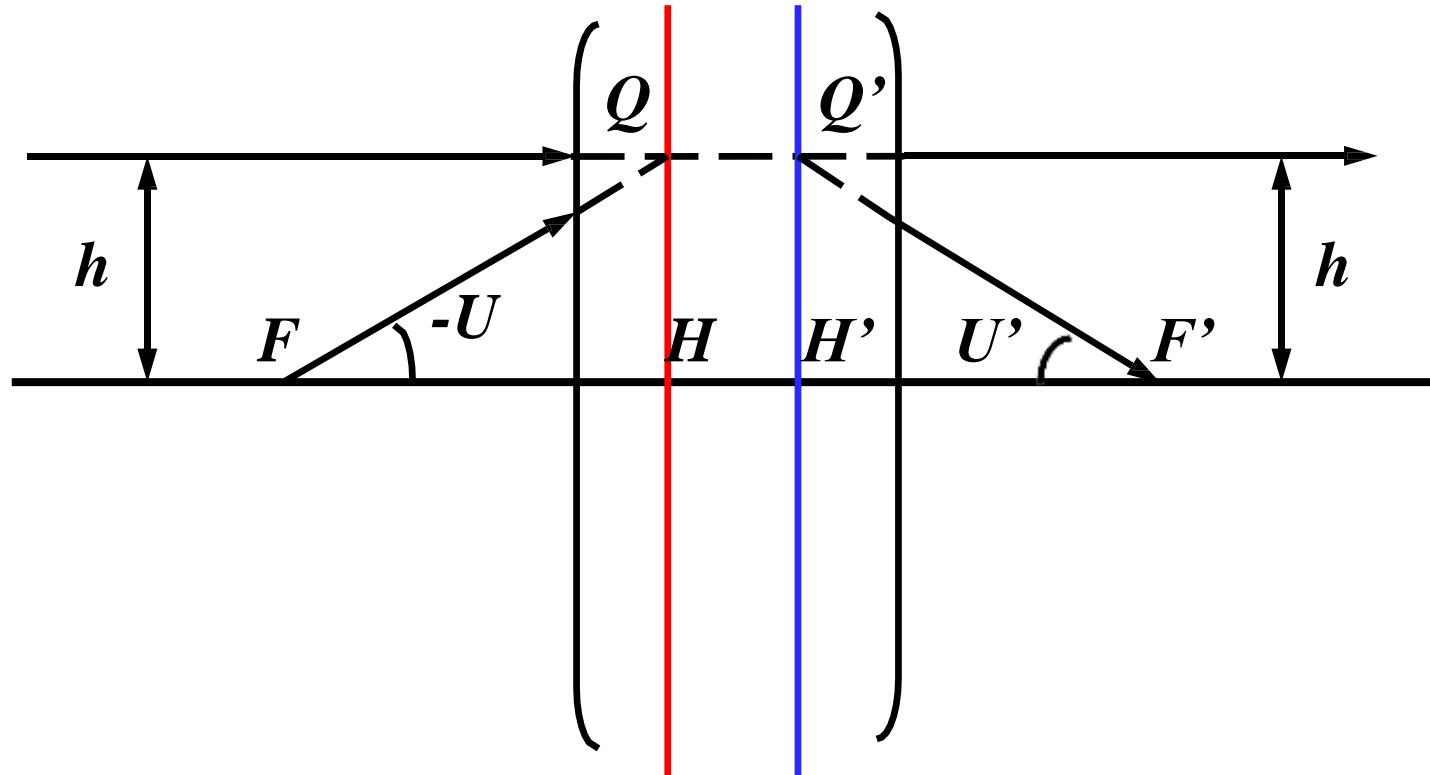


2.2.2 无限远轴上像点对应的物点F

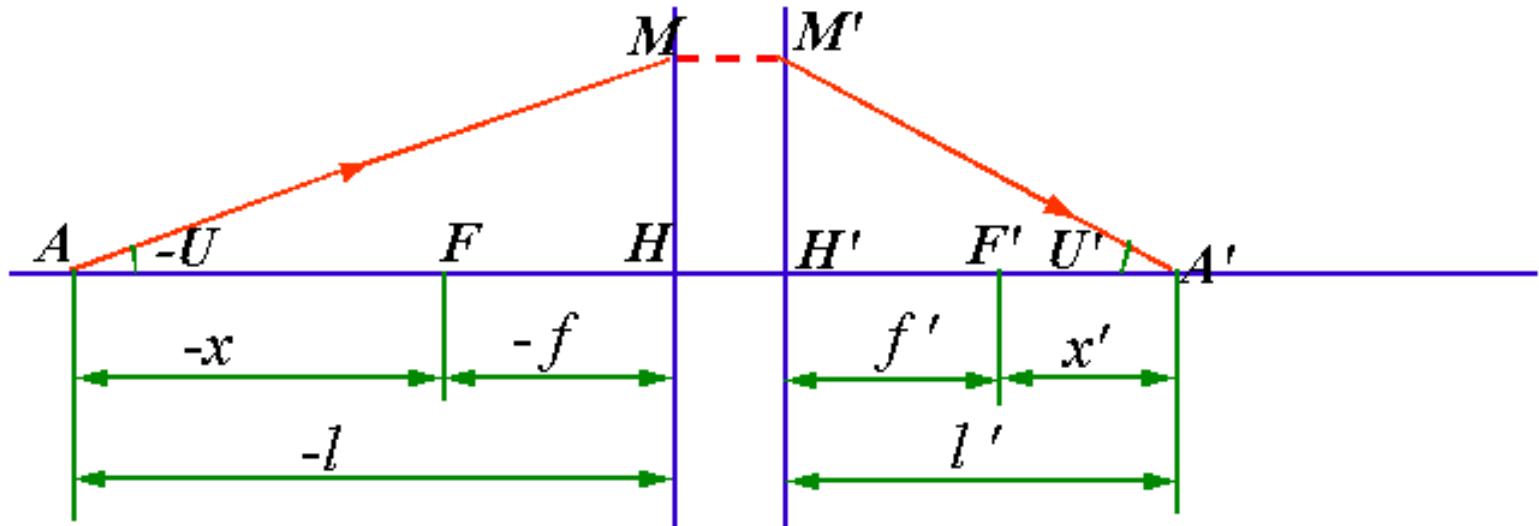


理想光学系统的**物方参数**

2.2.3 物方主平面与像方主平面间的关系



两主平面间的关系



由图 $ltgU = h = l'tgU'$ 或 $(x+f)tgU = (x'+f')tgU'$

又因为 $x = -f \frac{y}{y'}$ 和 $x' = -f' \frac{y'}{y}$ $\rightarrow fy tgU = -f' y' tgU'$

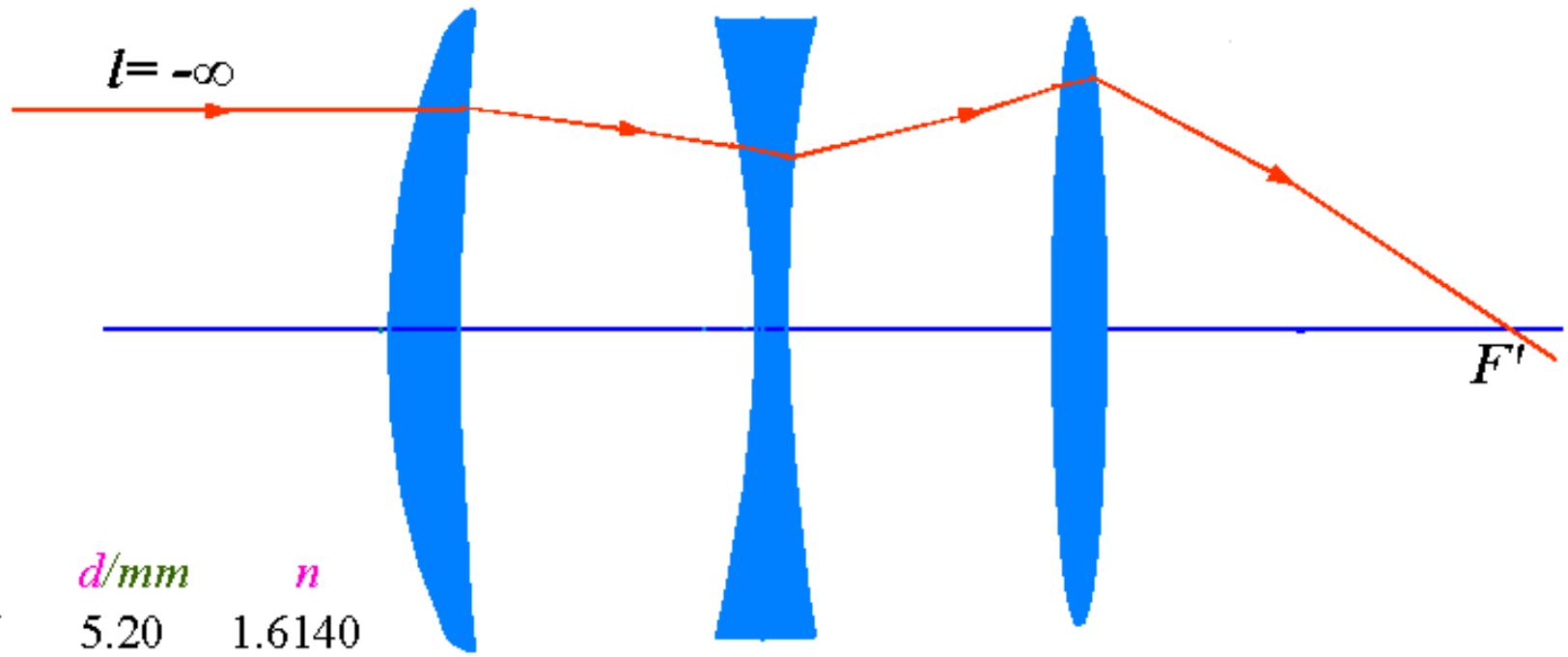
当角度很小时, 有 $f y u = -f' y' u'$

由近轴拉氏公式 $n y u = n' y' u'$ 得 $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$

2.2.4 实际光学系统的基点位置和焦距的计算

[实例1] 三片型照相物镜的参数计算。

参见课本P19–20实例



r/mm	d/mm	n
26.67	5.20	1.6140
189.67	7.95	
-49.66	1.6	1.6745
25.47	6.7	
72.11	2.8	1.6140
-35.00		

沿正向光路追迹一条平行于光轴的近轴光线

三片型照像物镜

求解一

求物镜的像方焦距 f' 、像方焦点 F' 的位置及像方主点 H' 的位置

可沿正向光路从左至右追迹一条平行于光轴的近轴光线，其初始坐标取为：

利用近轴光线的光路计算公式逐面计算，其结果为：

$$l_{F'} = 67.4907 \text{ mm}, \quad u' = 0.1219$$

$$\begin{cases} l_1 = -\infty & (u_1 = 0) \\ h_1 = 10 \text{ mm} \\ i_1 = h_1 / r_1 \end{cases}$$

显然，系统的像方焦点 F' 的位置在系统最后一个折射面右边 67.4907 mm 处。

注意：
有效数字的取舍！

将 $h_1=10mm$, $u'=0.1219$ 代入下公式得系统的像方焦距为,

$$f' = \frac{h}{\tan U'} \approx \frac{h_1}{u'} = \frac{10}{0.1219} \approx 82.0345mm$$

像方主点 H' 的位置可由下式求得,

$$l_{H'}' = l_F' - f' = -14.5438mm$$

像方主点 H' 在第6面左侧14.5438mm处。

求解二

求物镜的物方焦距 f 、物方焦点 F 的位置及物方主点 H 的位置

原则上可作反向光路计算。将系统倒转，再追迹一条平行于光轴的近轴光线，其初始坐标取为：

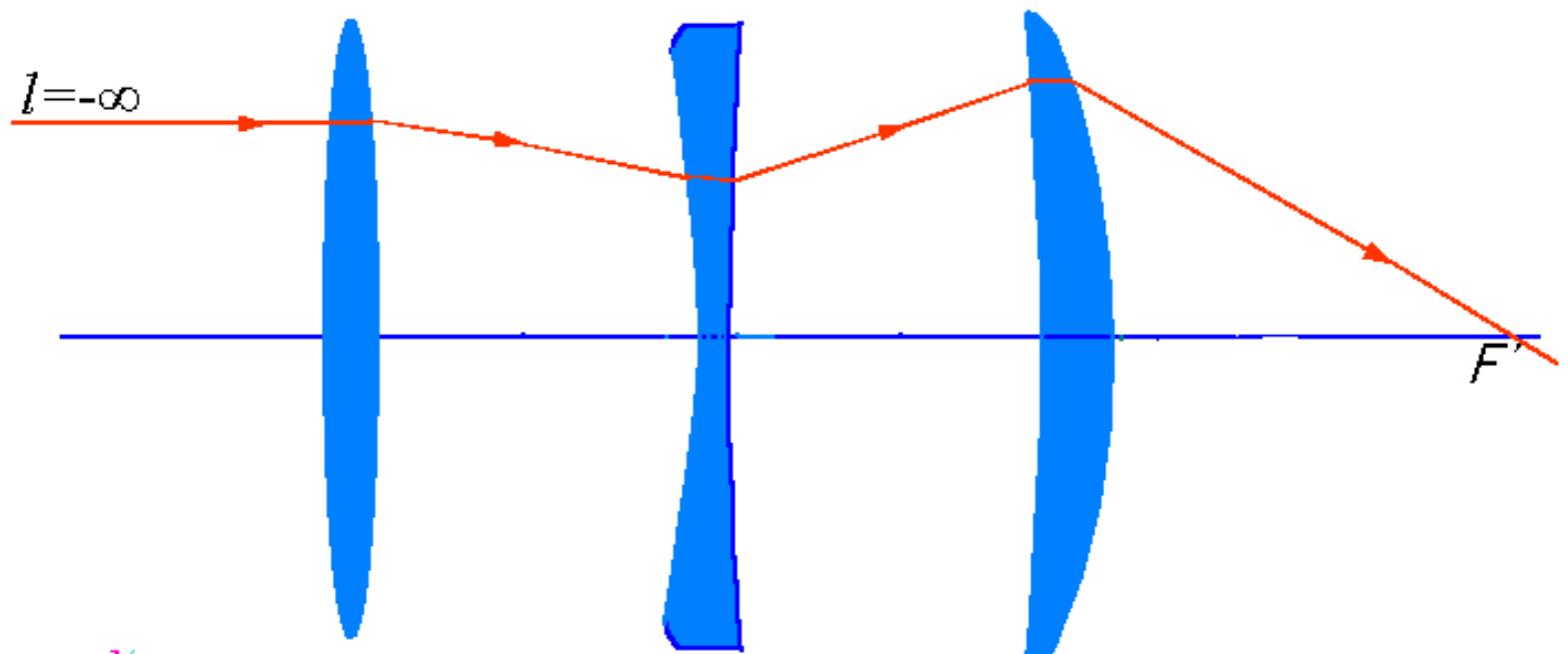
此时， $r_1=35mm$ ，利用近轴光线的光路计算

$$\begin{cases} l_1 = -\infty \quad (u_1 = 0) \\ h_1 = 10mm \\ i_1 = h_1 / r_1 \end{cases}$$

得 $l' = 70.0183 mm$, $u' = 0.1219$

$$l_F = -l' = -70.0183 mm$$

系统的物方焦点 F 的位置在原系统第一个折射面左边70.0183mm处。



r/mm	d/mm	n
35.00	2.8	1.6140
-72.11	6.7	
-25.47	1.6	1.6745
49.66	7.95	
-189.67	5.2	1.6140
-26.67		

沿反向光路追迹一条平行于光轴的光线
左右倒置的三片照像物镜

将 $h_1=10mm$, $u'=0.1219$ 代入下公式得原系统的物方焦距为,

$$f = \frac{h}{\tan U} \approx \frac{h_1}{-u'} = -\frac{10}{0.1219} \approx -82.0345mm$$

物方主点 H 的位置可由下式求得,

$$l_H = l_F - f = 12.0162mm$$

物方主点 H 在原第1面右侧12.0162mm处。

§ 2.3 理想光学系统的物像关系



2.3.1 图解法求像

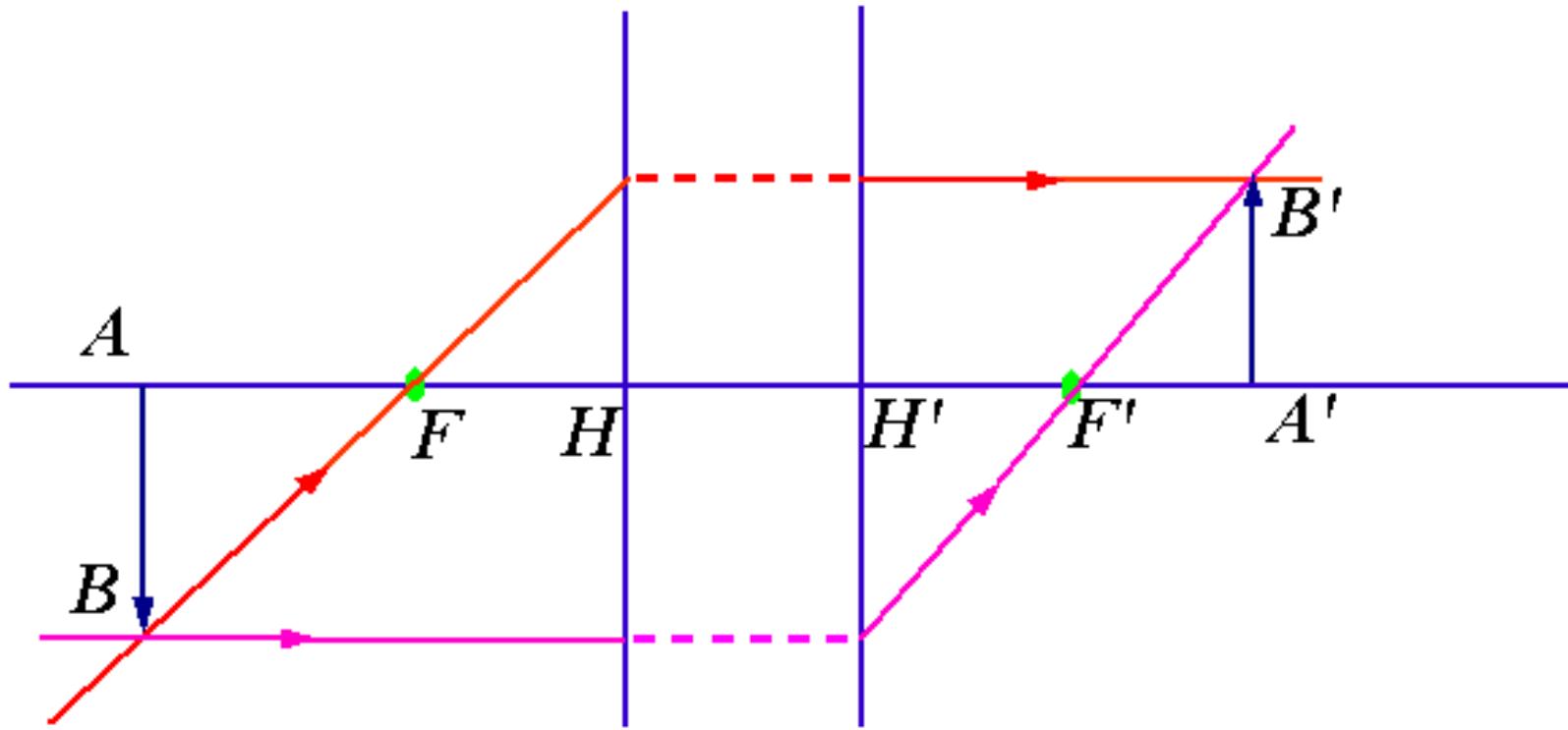
——通过画图追踪典型光线求出像的方法。

可供选择的典型光线及可利用的性质主要有：

- ① 平行于光轴的入射光线，经系统后过像方焦点；

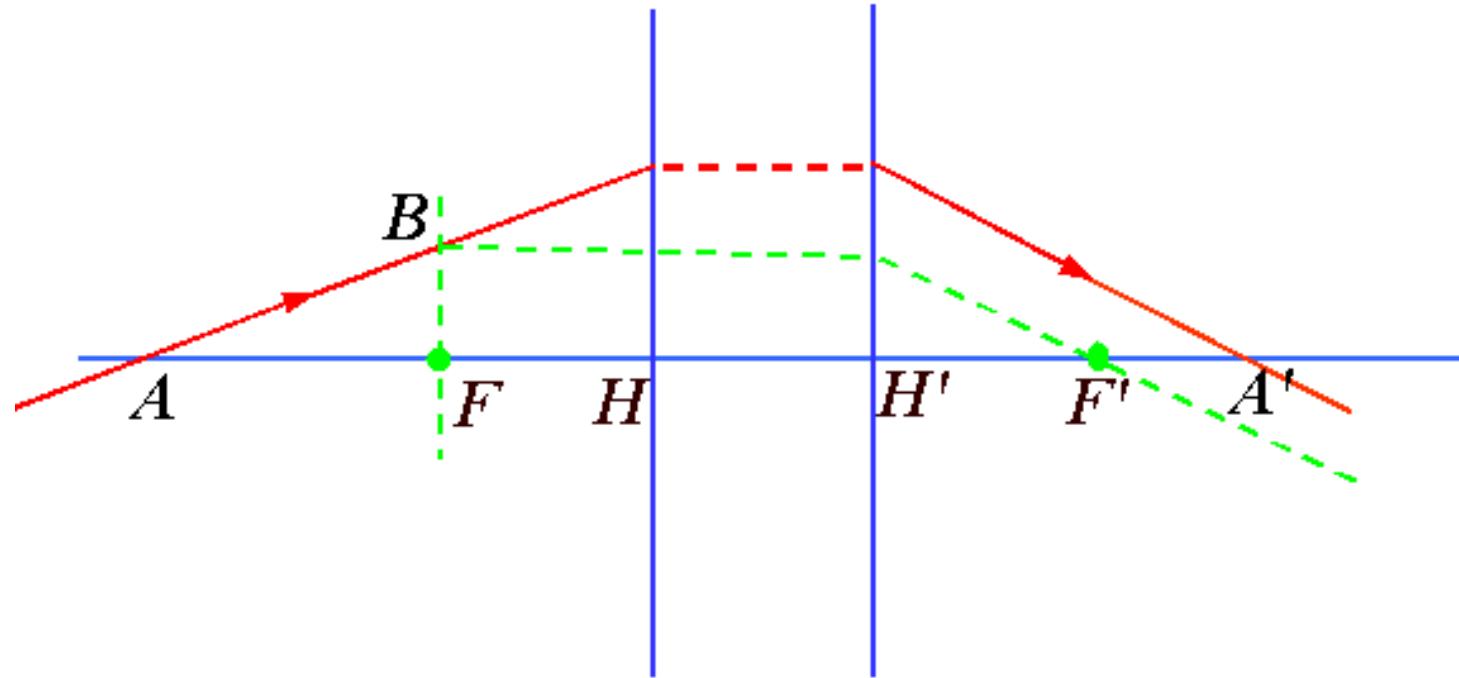
- ② 过物方焦点的光线，经系统后平行于光轴；
- ③ 倾斜于光轴入射的平行光束，经系统后相交于像方焦平面上的一点；
- ④ 自物方焦平面上一点发出的光束，经系统后成倾斜于光轴的平行光束；
- ⑤ 共轭光线在主面上的投射高度相等。

2.3.1.1 轴外物点或一垂轴线段的图解法求像



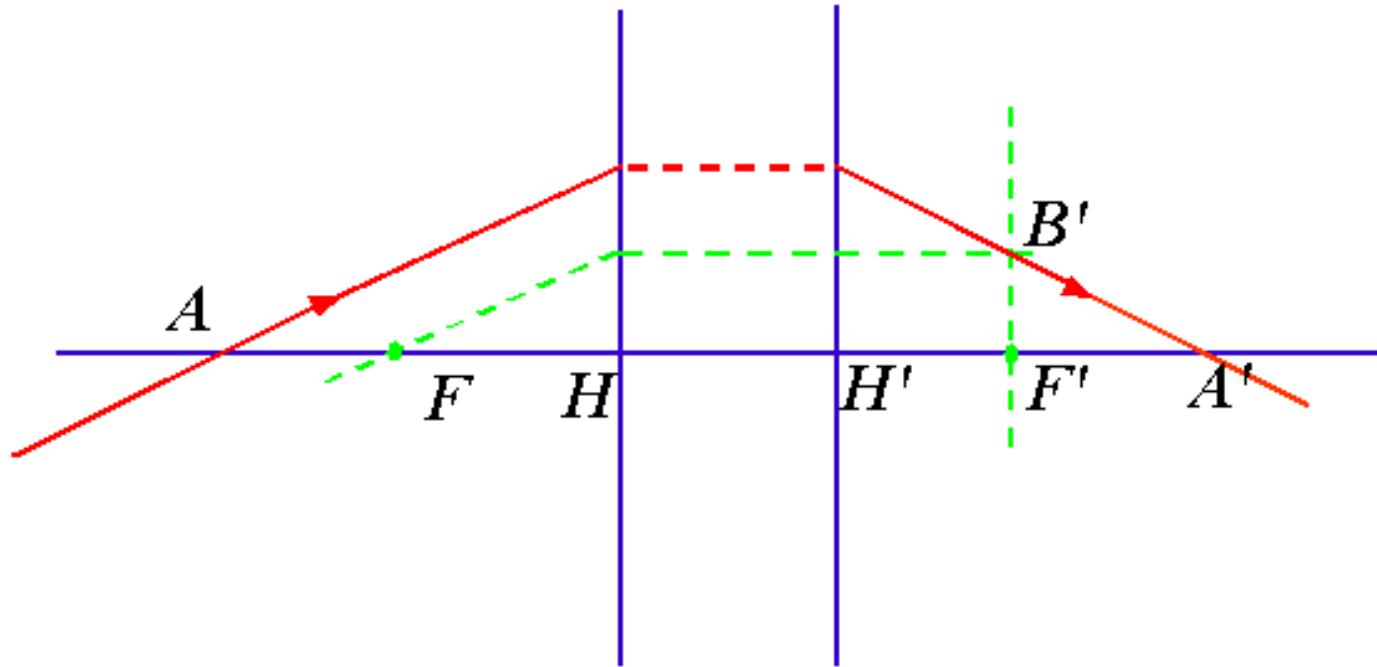
1. 经过物方焦点的光线，经过系统后平行于光轴
2. 平行于光轴的入射光线经系统后过像方焦点

2.3.1.2 轴上物点的图解法求像



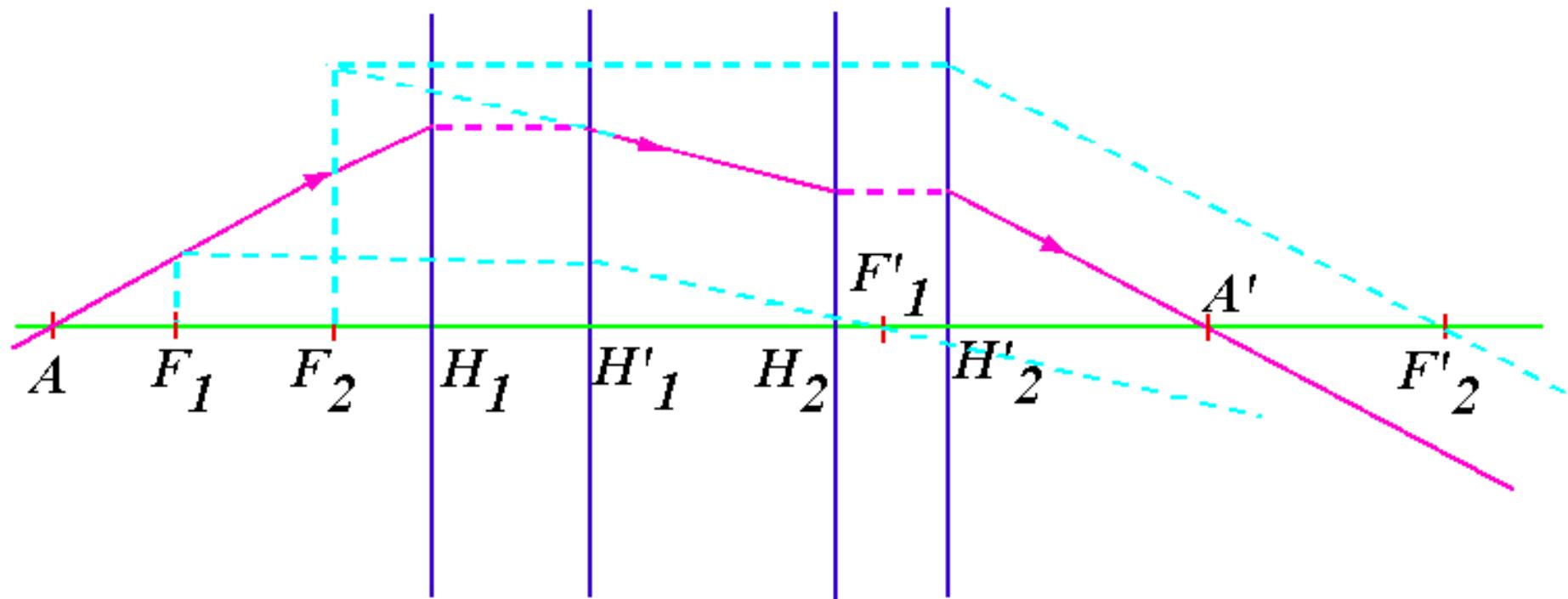
经物方焦平面上一点发出的光束
经系统后成倾斜于光轴的平行光束

2.3.1.2 轴上物点的图解法求像



平行光束经系统后
会集于像方焦平面上一点

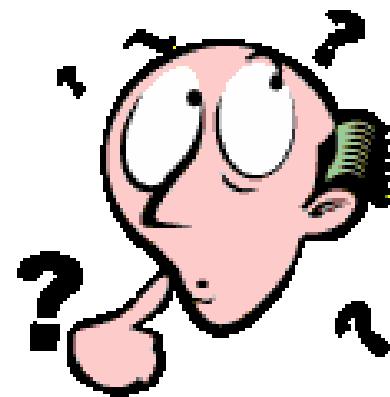
2.3.1.3 轴上点经两个光组的图解法求像



§ 2.3 理想光学系统的物像关系

2.3.2 解析法求像

解析法求像的
理 论依据是什
么？



共轴理想光学系统的成像理论

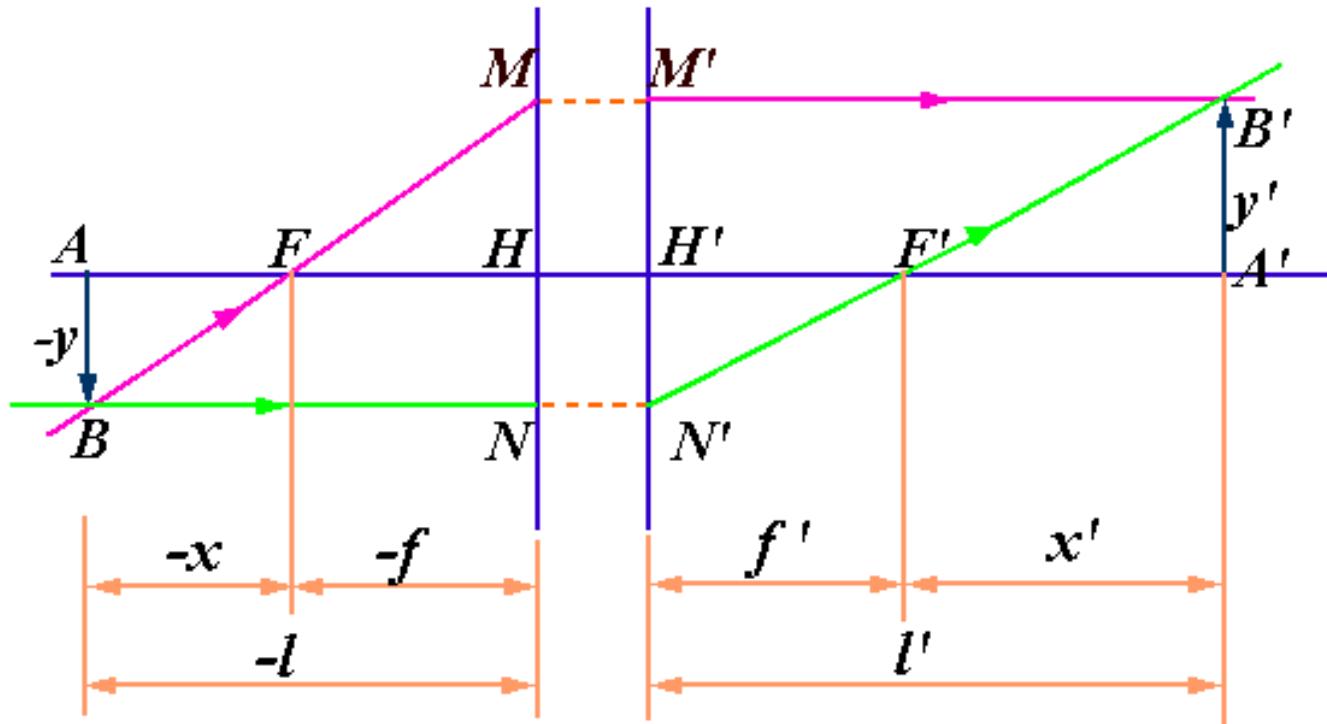
2.3.2.1 牛顿公式

——以焦点为原点的物像位置公式

$$xx' = ff'$$

牛顿公式的垂轴放大率 β :

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$



$\triangle BAF \sim \triangle FHM, \quad \triangle H'N'F' \sim \triangle F'A'B'$

$$-y'/y = -f/-x, \quad -y'/y = x'/f' \rightarrow xx' = ff'$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

牛顿公式(以焦点为原点)

2.3.2.2 高斯公式

——以主点为原点的物像位置公式

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1$$

高斯公式的垂轴放大率 β :

$$\beta = -\frac{f}{f'} \frac{l'}{l}$$

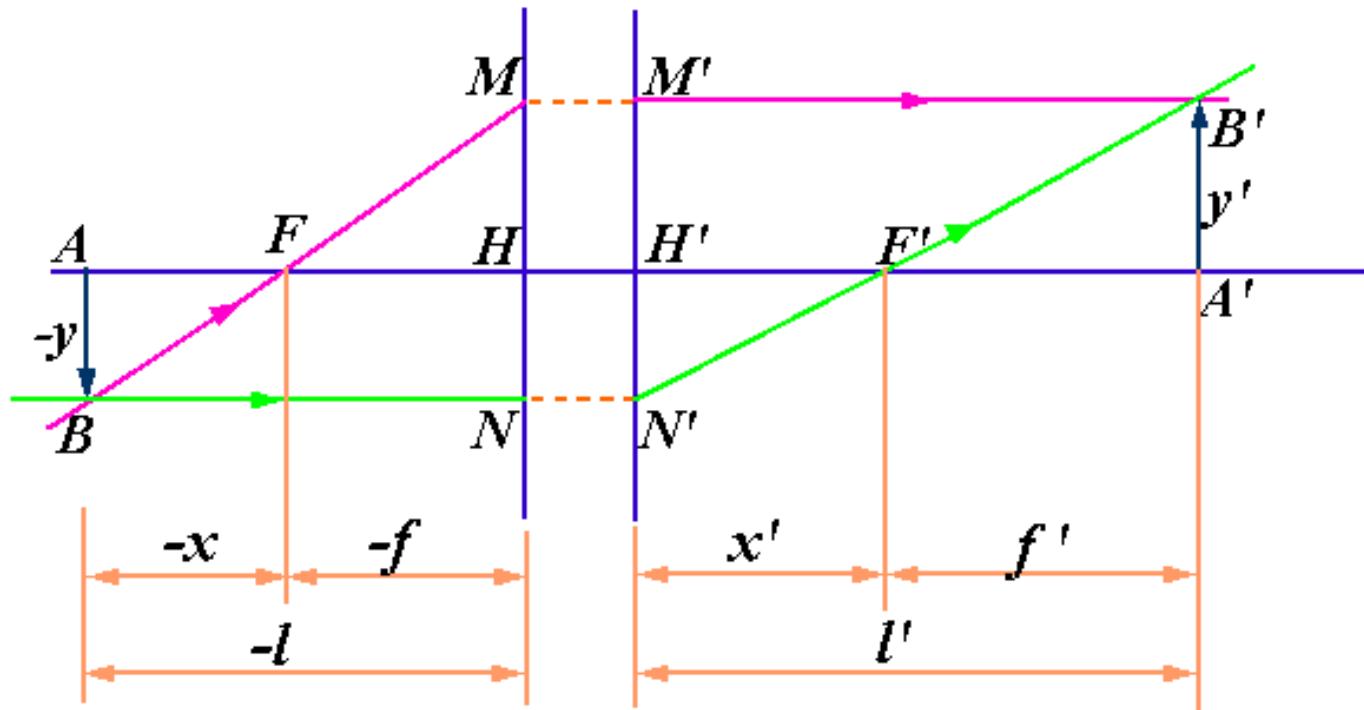
当光学系统的物、像空间的**介质相同时**，
物方和像方焦距有简单关系： $f' = -f$ ，高斯
公式的垂轴放大率 β 可化简为：

$$\beta = \frac{l'}{l}$$



问题

为什么说牛顿公式与高斯公 式是等价的？



1. 牛顿公式 (以焦点为原点) :

$$-y'/y = -f/-x, \quad -y'/y = x'/f' \rightarrow xx' = ff'$$

2. 高斯公式 (以主点为原点) :

$$x = l - f, \quad x' = l' - f' \text{ 代入牛顿公式得 } f'/l' + f/l = 1$$



讨论

(1) 比较牛顿公式与高斯公式的垂轴放大率 β 公式可知，垂轴放大率随物体位置而异，即某一 β 值只对应一个物体位置。在同一对共轭面上， β 值是常数，因此**像与物是相似的**。

(2) 理想光学系统的成像特性主要表现在像的位置、大小、正倒和虚实上，利用上述公式可描述任意位置物体的成像性质。



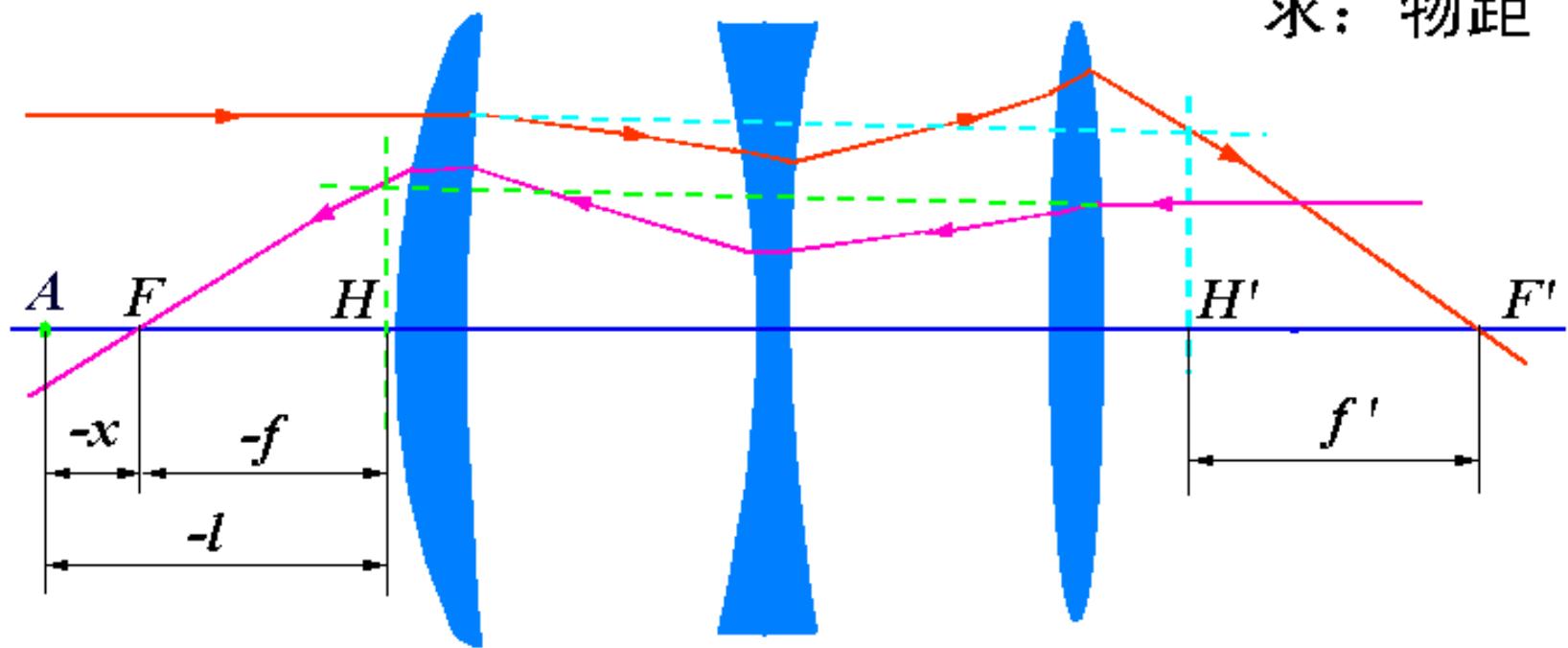
举例

在实际工程中，有一类问题是对于给定的系统，
寻找**物体如何放置**，以满足给定的**倍率**。

例如，前面提到的三片型照相物镜，原理上可
当作投影物镜，欲求此物镜成像-1/10*（即 $\beta=-0.1$ ），
问物平面应在何位置？

$$\beta = -0.1$$

求：物距



r/mm	d/mm	n
26.67	5.20	1.6140
189.67	7.95	
-49.66	1.6	1.6745
25.47	6.7	
72.11	2.8	1.6140
-35.00		

三片型照像物镜



求解

求物平面应放在什么位置？

利用垂轴放大率公式: $\beta = -\frac{f}{x}$

$$x = -\frac{f}{\beta} = -\frac{-82.0345}{-0.1} = -820.3450mm$$

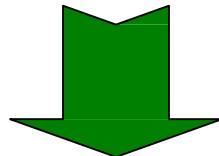
$$l = x + l_F = -820.3450 - 70.0183 = -890.3633mm$$



物平面应放在距三片型物镜第一个折
射面顶点左侧890.3633mm处。

2.3.3 由多个光组构成的理想光学系统的成像

求像需连续应用物像公式于每一光组



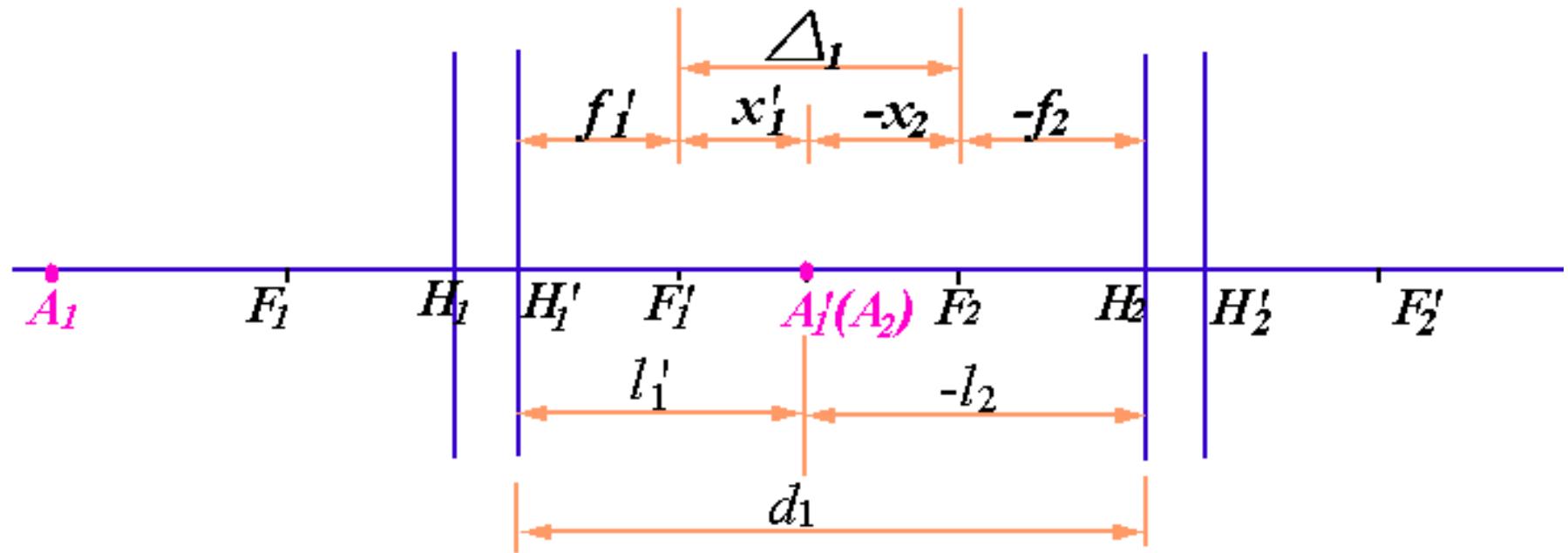
过渡公式

焦点间隔或
光学间隔

$$l_k = l'_{k-1} - d_{k-1}$$

$$x_k = x'_{k-1} - \Delta_{k-1}$$

$$\Delta_k = d_k - f'_k + f_{k+1}$$



$$l_2 = l'_1 - d_1, \quad x_2 = x'_1 - \Delta_I$$

$\Delta = F'_1 F_2$ 称为光学（焦点）间隔，

$$\Delta_I = d_1 - f'_1 + f_2$$

整个系统的放大率 β 等于各光组放大率之积：

$$\beta = \frac{y'_k}{y_1} = \frac{y'_1}{y_1} \frac{y'_2}{y_2} \dots \frac{y'_k}{y_k} = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$$

假定光学系统由 k 个光组构成。

2.3.4 理想光学系统两焦距之间的关系

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

此式表明，光学系统两焦距之比等于相应空间
介质折射率之比。

一般情形下，光学系统皆处于同一介质中使用，
即 $n' = n$ ，故有 $f' = -f$ 。

若光学系统中包括反射面，则两焦距之间的关系由**反射面的个数决定**，假定反射面的数目为 **k** ，则上述公式更一般的形式为：

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{k+1} \frac{n'}{n}$$

根据上述理想光学系统两焦距之间的关系式可得，

$$ny \tan U = n'y' \tan U'$$

此式为**理想光学系统的拉赫公式**。

[例题2] 一理想光组将一物距为 $60mm$ 、大小为 $40mm$ 的实物成一像距为 $60mm$ 、大小为 $20mm$ 的实像。若另有一物距为 $40mm$ 、大小为 $20mm$ 的实物，问其成像情况如何？

[解] 首先须求出理想光组的焦距。

依题意，给定一实物，故物距应取负值，

即 $l = -60\text{ mm}$

实像表明像距为正，即 $l' = 60\text{ mm}$,

实物成实像，应为倒象，物高与像高的符号应相反，

取 $y = 40 \text{ mm}$, $y' = -20 \text{ mm}$,

根据高斯公式的垂轴放大率公式,

$$\frac{-20}{40} = -\frac{f}{f'} \frac{60}{-60} \rightarrow f = -\frac{f'}{2}$$

可知，系统物像方**焦距不相等**，表明物像方不在同一介质中，故利用高斯公式有，

$$\frac{f'}{60} + \frac{-f'/2}{-60} = 1$$

得 $f' = 40 \text{ mm}$, $f = -20 \text{ mm}$ 。

将计算得到的焦距再代入高斯公式，求另一物 体的像

$$\frac{40}{l'} + \frac{-20}{-40} = 1$$

得 $l' = 80 \text{ mm}$, 为实像，位于系统像方主面右方 80 mm 处。放大率为

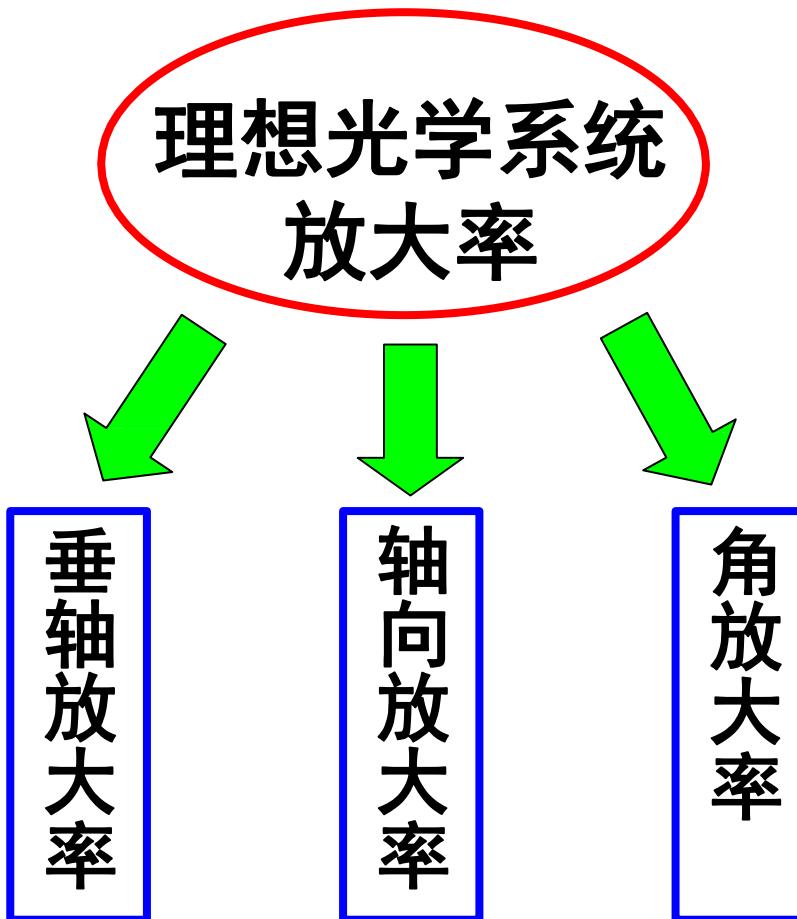
$$\beta = -\frac{fl'}{fl} = -\frac{-20 \times 80}{40 \times (-40)} = -1$$

表明，像与物等高且倒立。

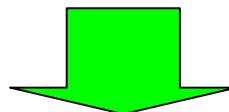
第2章 理想光学系统

- § 2. 1 理想光学系统与共线成像理论
- § 2. 2 理想光学系统的基点与基面
- § 2. 3 理想光学系统的物像关系
- § 2. 4 理想光学系统的放大率
- § 2. 5 理想光学系统的组合
- § 2. 6 透镜

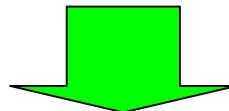
§ 2.4 理想光学系统的放大率



确定的理想光
学系统



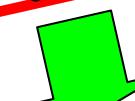
像平面的位置是物平面位置的函数



函数关系式

牛顿公式

高斯公式



$$xx' = ff'$$

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1$$

2.3.2.1 牛顿公式

回顾

——以焦点为原点的物像位置公式

$$xx' = ff'$$

牛顿公式的垂轴放大率 β :

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}$$

2.3.2.1 高斯公式

回顾

——以主点为原点的物像位置公式

$$\frac{f'}{l'} + \frac{f}{l} = 1$$

高斯公式的垂轴放大率 β :

$$\beta = -\frac{f}{f'} \frac{l'}{l}$$

2.4.1 轴向放大率

可利用牛顿公式或高斯公式来导出系统的轴向放大率。

当物平面沿光轴作一微量的移动 dx 时，其像平面相应移动一距离 dx' 。通常定义两者之比为轴向放大率 α ，即

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}$$

当 dx 很小时，可将牛顿公式微分得，

$$xdx' + x'dx = 0 \rightarrow$$

$$\alpha = -\frac{x'}{x}$$

将牛顿公式形式的垂轴放大率公式代入上式得，

$$\beta = -f/x = -x'/f'$$

$$\alpha = -\beta^2 \frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} \beta^2$$

$$f'/f = -n'/n$$

讨论

若此系统置于空气中，则物方与像方**同介质**，有

$$\alpha = \beta^2$$

上式表明，当物体处于 $\beta = \pm 1$ 的位置时，其像保持原有比例；否则，成像的形状将发生改变。

若轴上点移动**有限距离** Δx ，相应的像点移动距离 $\Delta x'$ ，利用牛顿公式可导出**轴向放大率为**

$$\alpha = \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = \frac{n'}{n} \beta_1 \beta_2$$

其中 **β_1** 是物点处于物距 x_1 时的垂轴放大率， **β_2** 是物点移动 Δx 后处于 x_2 时的垂轴放大率。

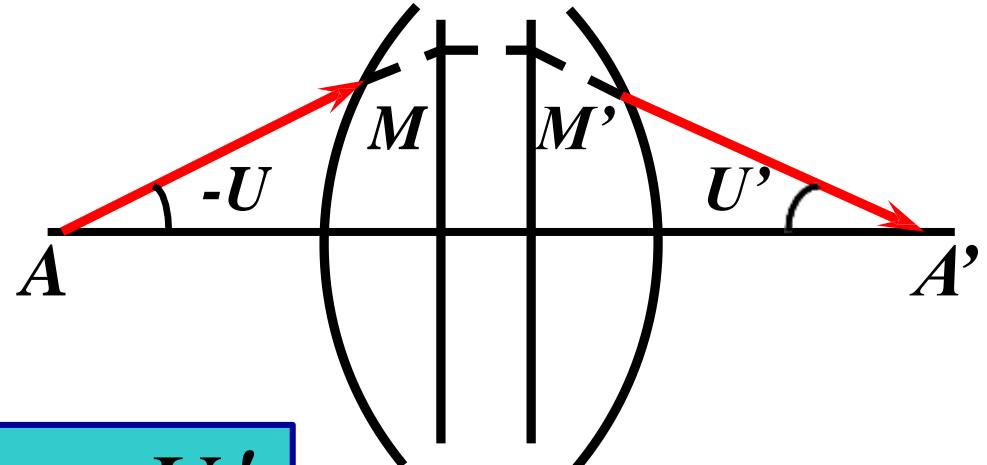


轴向放大率公式常用于光学仪器的装调计算及像差系数的转面倍率等问题中。

2.4.2 角放大率

如图，定义一对共轭点A和

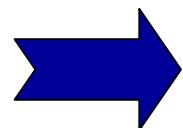
A'的角放大率为



$$\gamma = \frac{\tan U'}{\tan U}$$

利用理想光学系统的拉赫公式得，

$$ny \tan U = n'y' \tan U'$$



$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta}$$

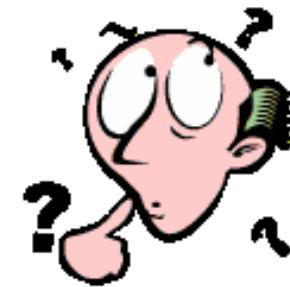
将轴向放大率与角放大率公式左右两端分别相乘得，

$$\alpha\gamma = \beta$$

此式就是**理想光学系统的三种放大率之间的关系式。**

2.4.3 光学系统的节点

节点的概念是什么？



2.4.3 光学系统的节点

节点：光学系统中角放大率为+1的一对共轭点称为~。

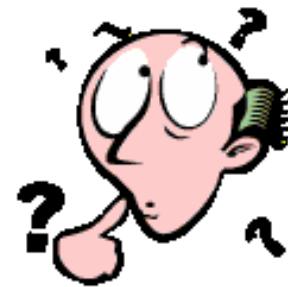
若此系统置于空气中，则物方与像方同介质，角放大率公式可化简为：

$$\gamma = \frac{1}{\beta}$$

此情形下，当 $\beta=1$ 时，即考虑的共轭面是主平面时， $\gamma=1$ ，即**主点为节点**。其**物理意义**：过主点的入射光线经系统后出射方向不变。

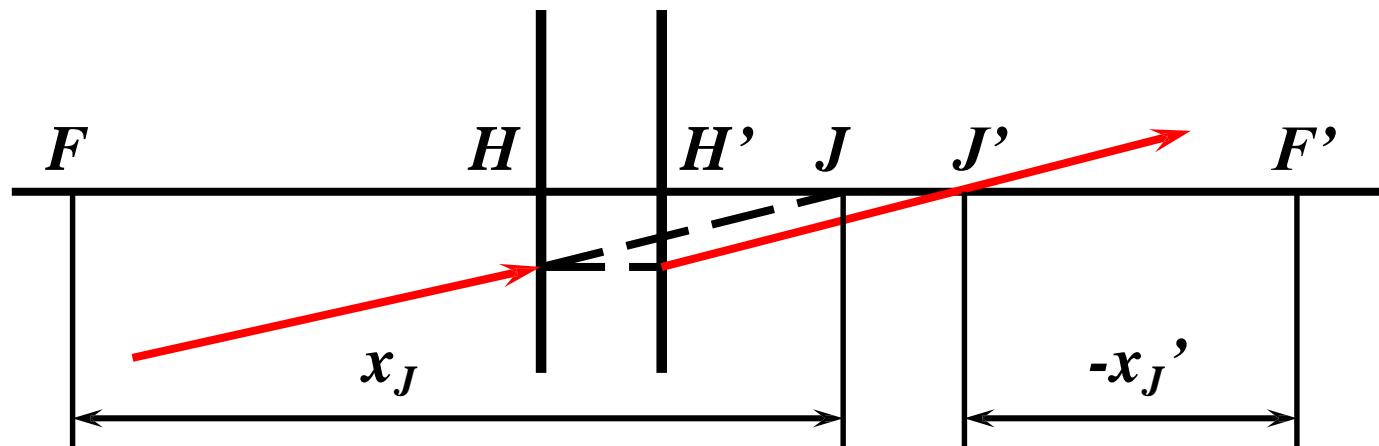
问题

有了主点，为何
还讨论节点？



若光学系统物方与像方空间折射率不同，角放大率 $\gamma = 1$ 的物像共轭点（即**节点**）不再与主点重合。根据角放大率公式、牛顿公式的垂轴放大率及焦距关系式，可求得这对共轭点的位置是

$$x_J = f' \quad x'_J = f$$



过节点的光线



小结

基点: 一对**节点**、一对**主点**和一对**焦点**，
统称为光学系统的**基点**。

得知了基点的位置，就能充分了解理想光
学系统的**成像性质**。

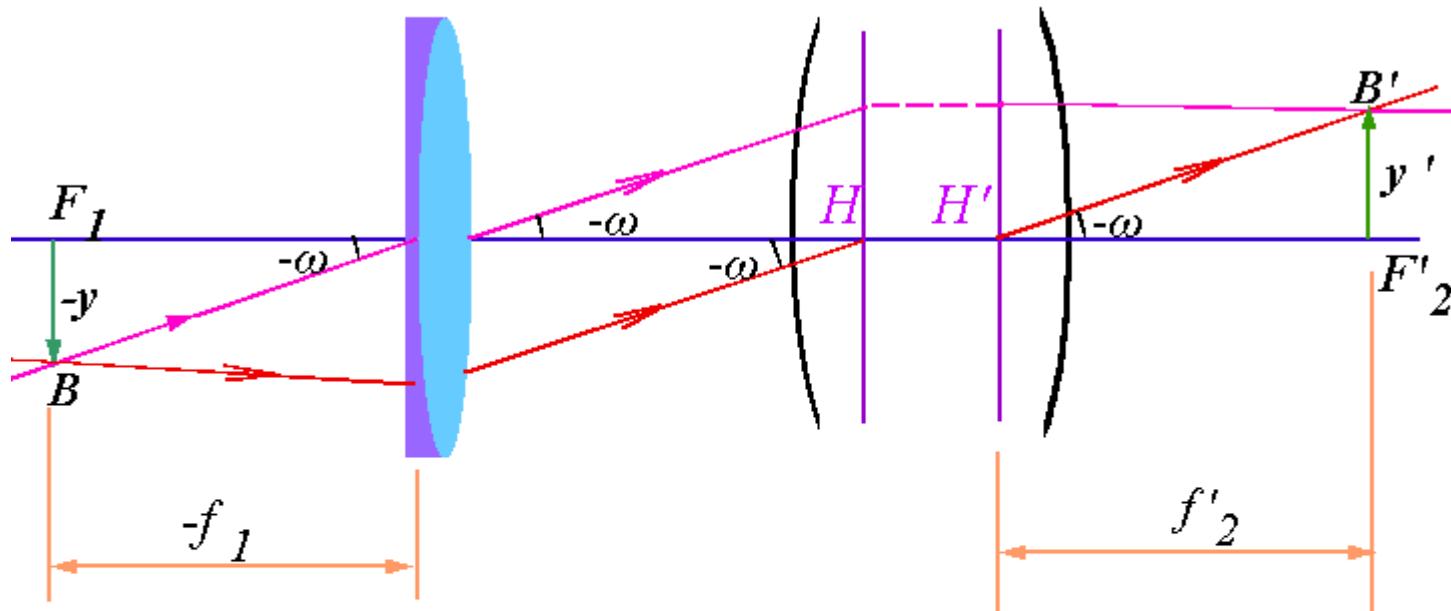
2.4.4 焦距的测定



准备两种透镜焦距的测定方法，下次讨论~

平行光管物镜

待测物镜

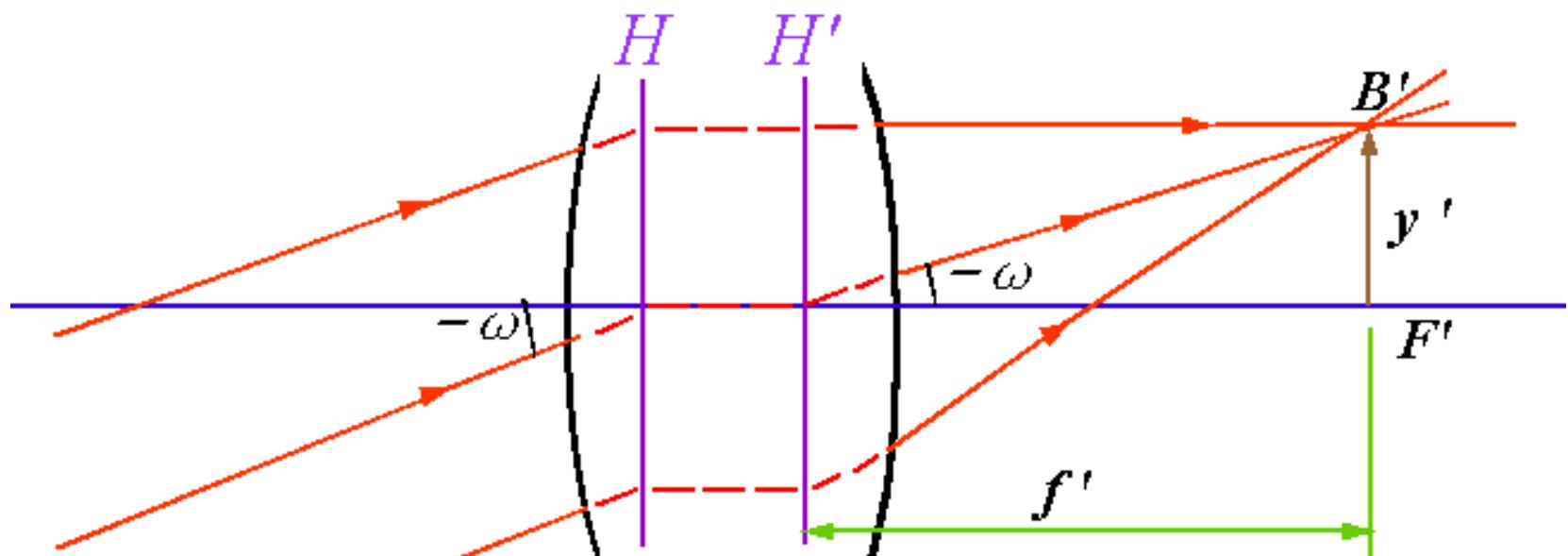


对平行光管，有 $\tan(-w) = (-y)/(-f_1)$ ；

对被测物镜，有 $y'/f'_2 = \tan(-w)$ ；

故

$$f'_2 = \frac{f_1}{y} y'$$



$$y' = -f' \operatorname{tg} \omega$$

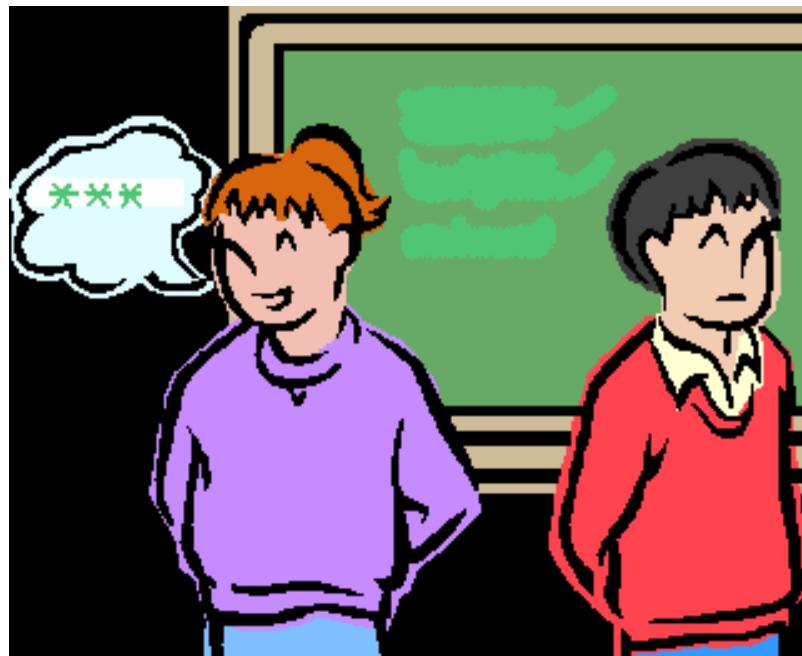


思考问题

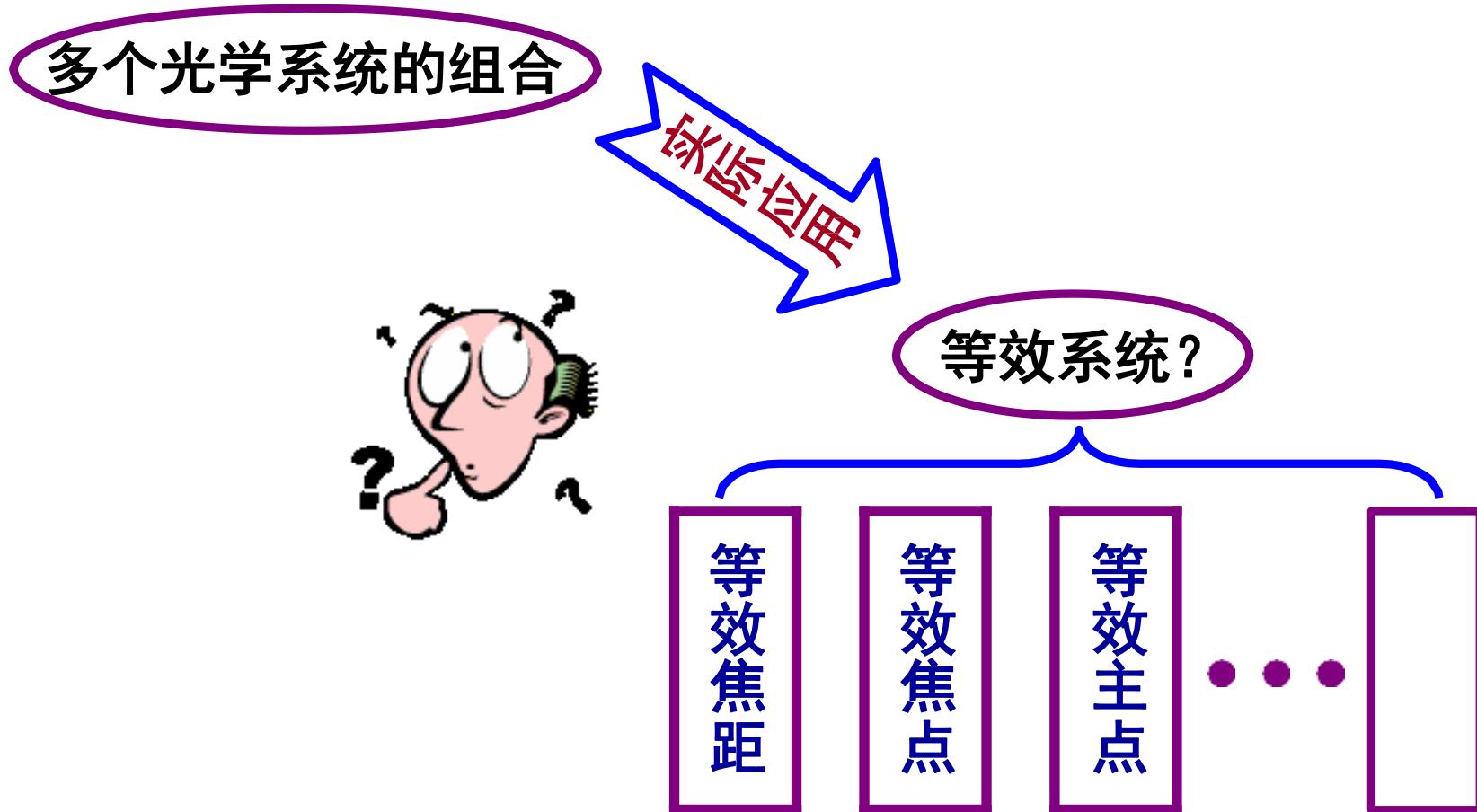


- ① 如何对多理想光组的组合分析计算？
- ② 双光组组合与多光组组合的计算方法是否相同？原因何在？
- ③ 谈谈对书中四种典型光组组合的认识。
- ④ 透镜作为光学系统的最基本单元，如何分类？有何特点？

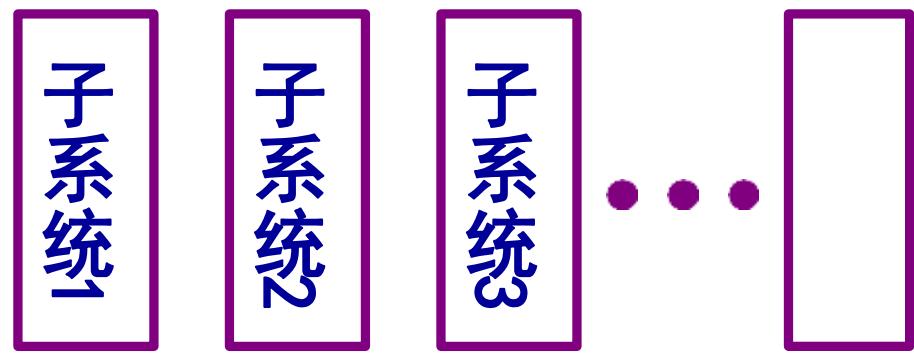
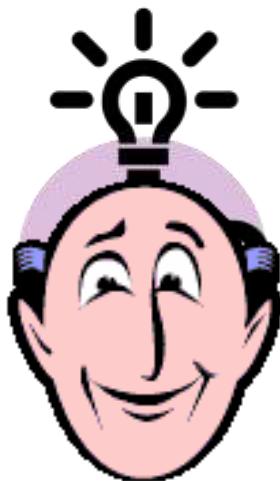
课堂讨论



§ 2.5 理想光学系统的组合



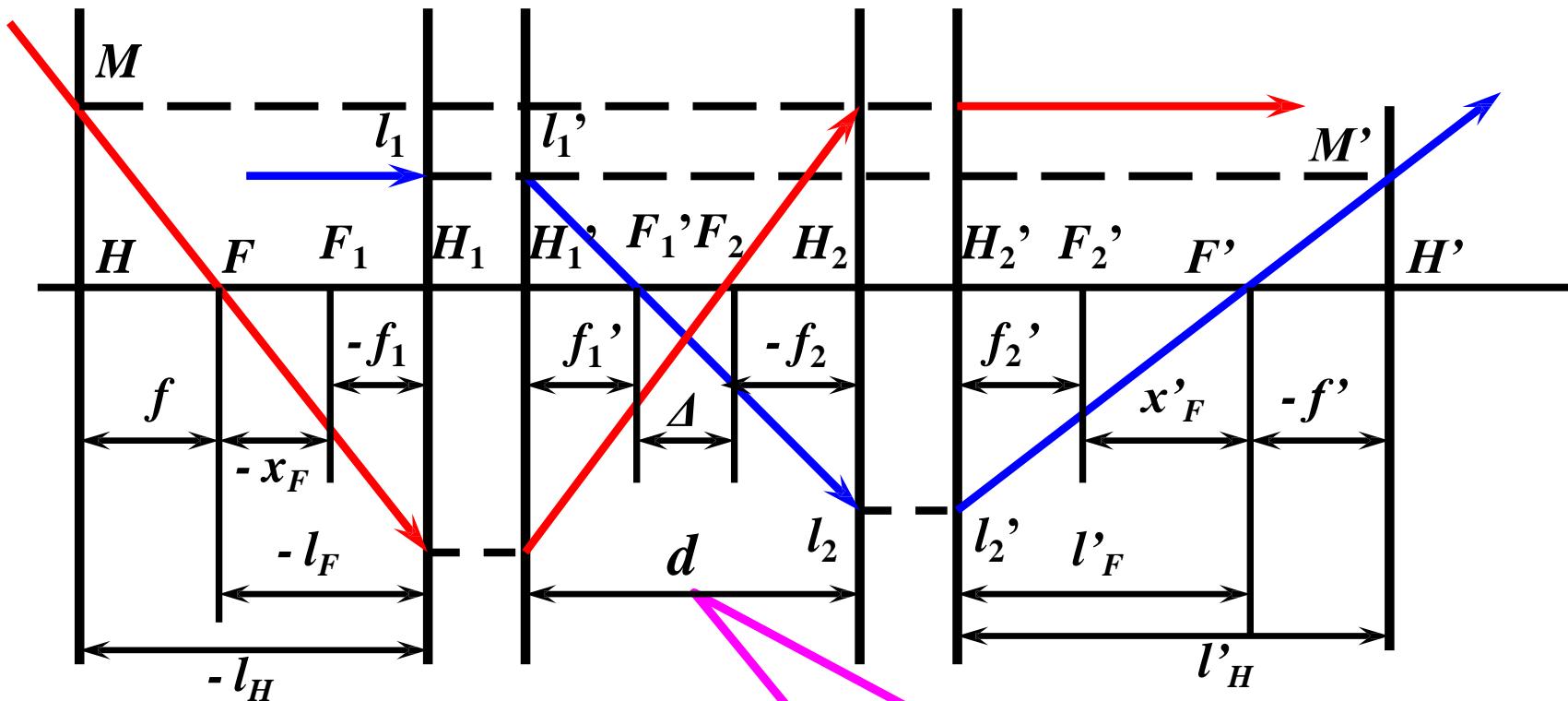
解决方案



复杂光学系统

2.5.1 两个光组组合分析

——最简单的组合形式



两子系统主平面之间距

分析方法及步骤... ...

① 首先求像方焦点 F' 的位置

$$x'_F = - \frac{f_2 f'_2}{\Delta}$$

② 再求出物方焦点 F 的位置

$$x_F = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}$$

③ 焦点位置确定后，可求出系统物、像焦距

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

④ 确定系统**主平面**的位置

两子系统主平面之间距

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{d}{f_1' f_2'}$$

通常，用 Φ 表示像方焦距的倒数，称光焦度。

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2$$

若 d 为零，即在密接薄透镜组的情况下，总光焦度是两薄透镜光焦度之和。

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

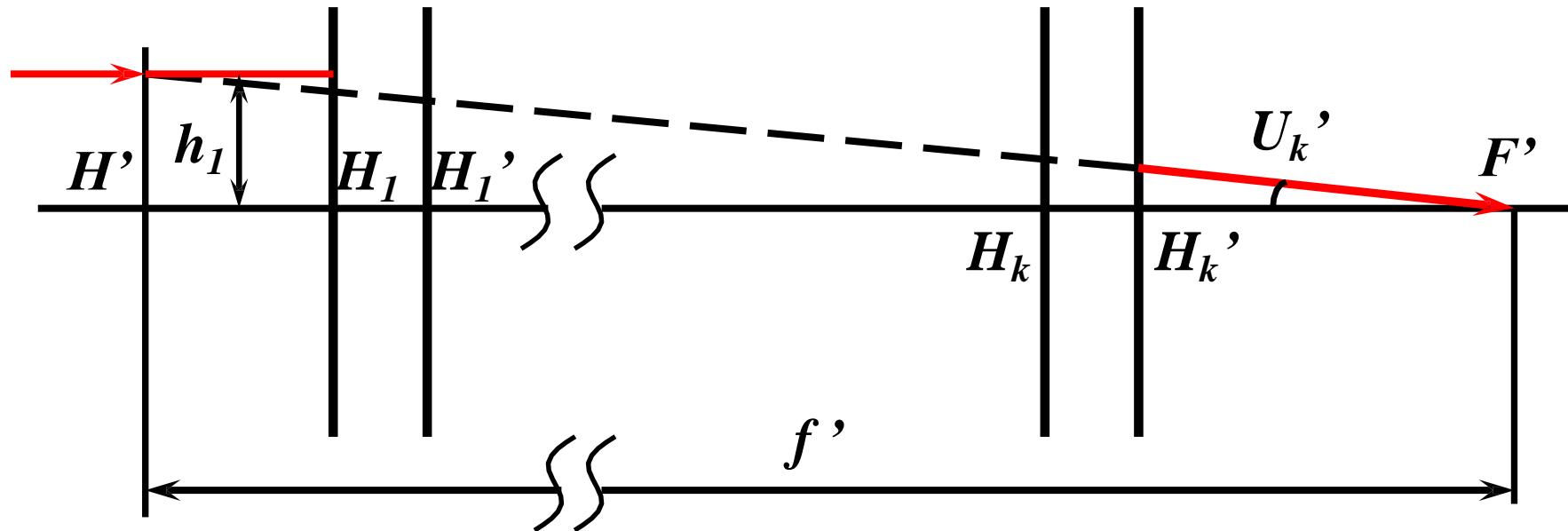
由上图可得，**主平面**的位置

$$l'_H = l'_F - f' = f \left(1 - \frac{d}{f'_1} \right) - f' = -f' \frac{d}{f'_1}$$

$$l_H - l_F - f = f \left(1 + \frac{d}{f_2} \right) - f = f \frac{d}{f_2}$$

2.5.2 多光组组合计算（正切计算法）

——基于计算求组合系统的方法



为求出**组合系统的焦距**，可追迹一条投射高度为 h_1 的平行于光轴的光线。只要算出最终的像方孔径角 U_k' ，则

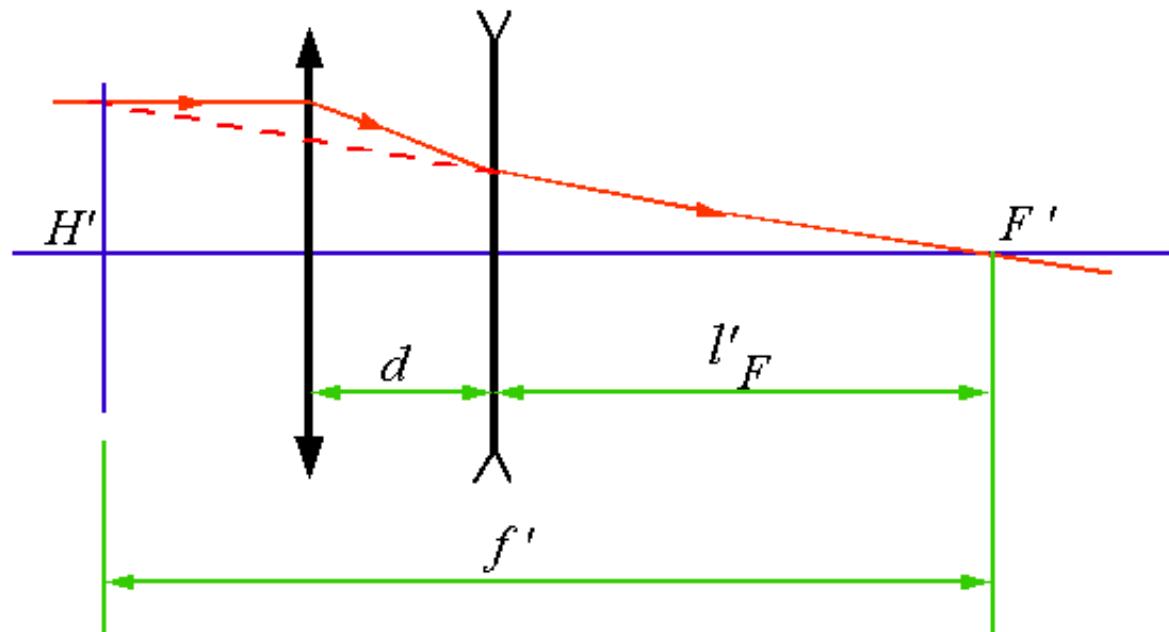
$$f' = \frac{h_1}{\tan U_k'}$$

经推导（P31），**同一条光线**在相邻两个光组上的**投射高度**之间的关系为（ k 为光组序号）

$$h_k = h_{k-1} - d_{k-1} \tan U_{k-1}'$$

2.5.3 实例（几种典型光组组合）

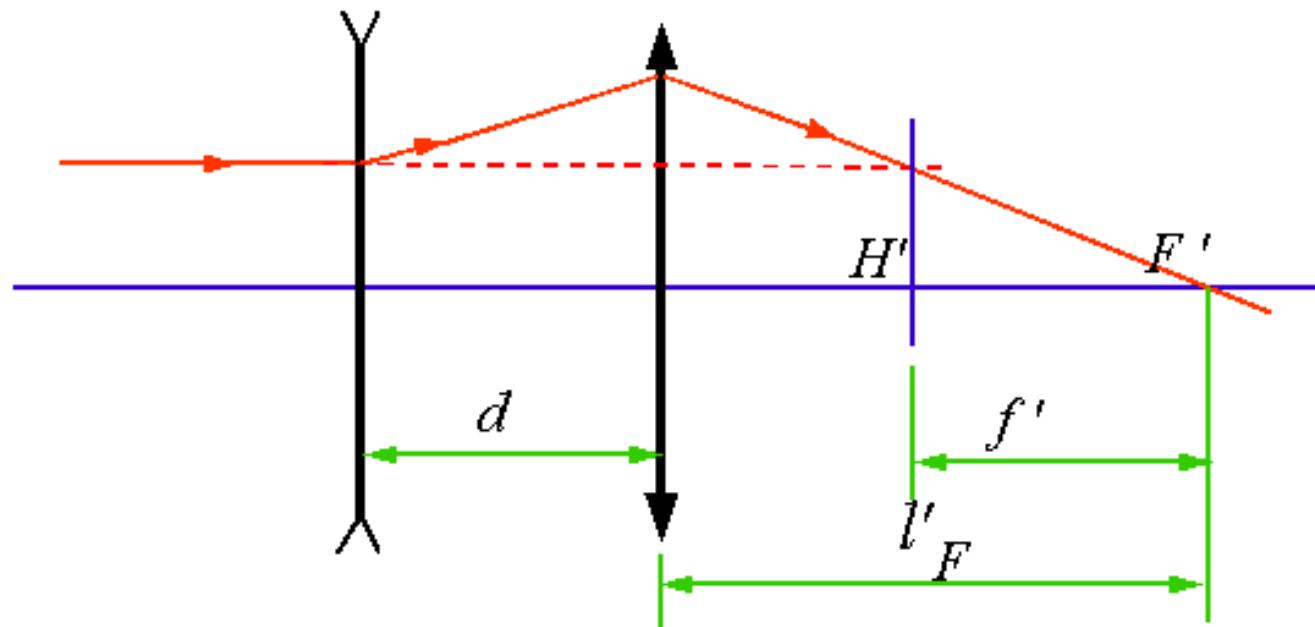
[实例1] 远摄型光组 (请见课本P32)



已知: $f'_1=500\text{mm}$, $f'_2=-400\text{mm}$, $d=300\text{mm}$

求: f' 、 l'_F 、 l'_H 并比较筒长 ($d+l'_F$) 与焦距大小

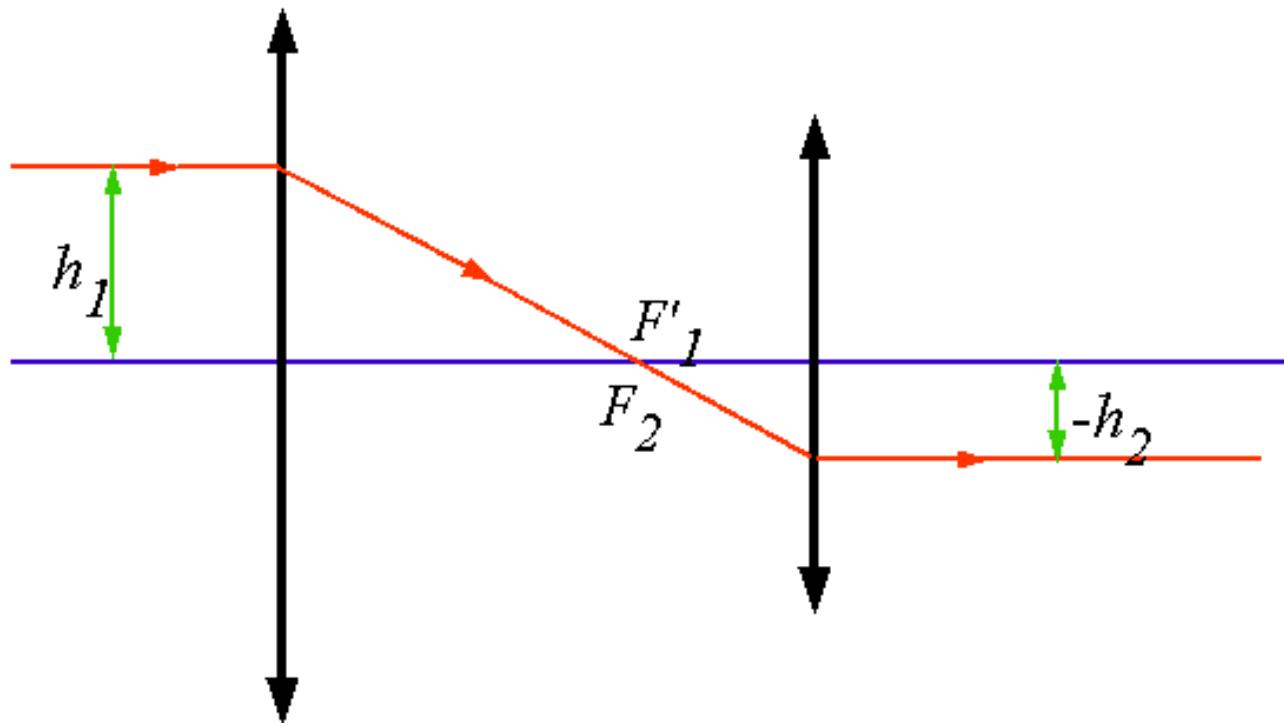
[实例2] 反远距型光组 (请见课本P33)



已知: $f'_1 = -35\text{mm}$, $f'_2 = 25\text{mm}$, $d = 15\text{mm}$

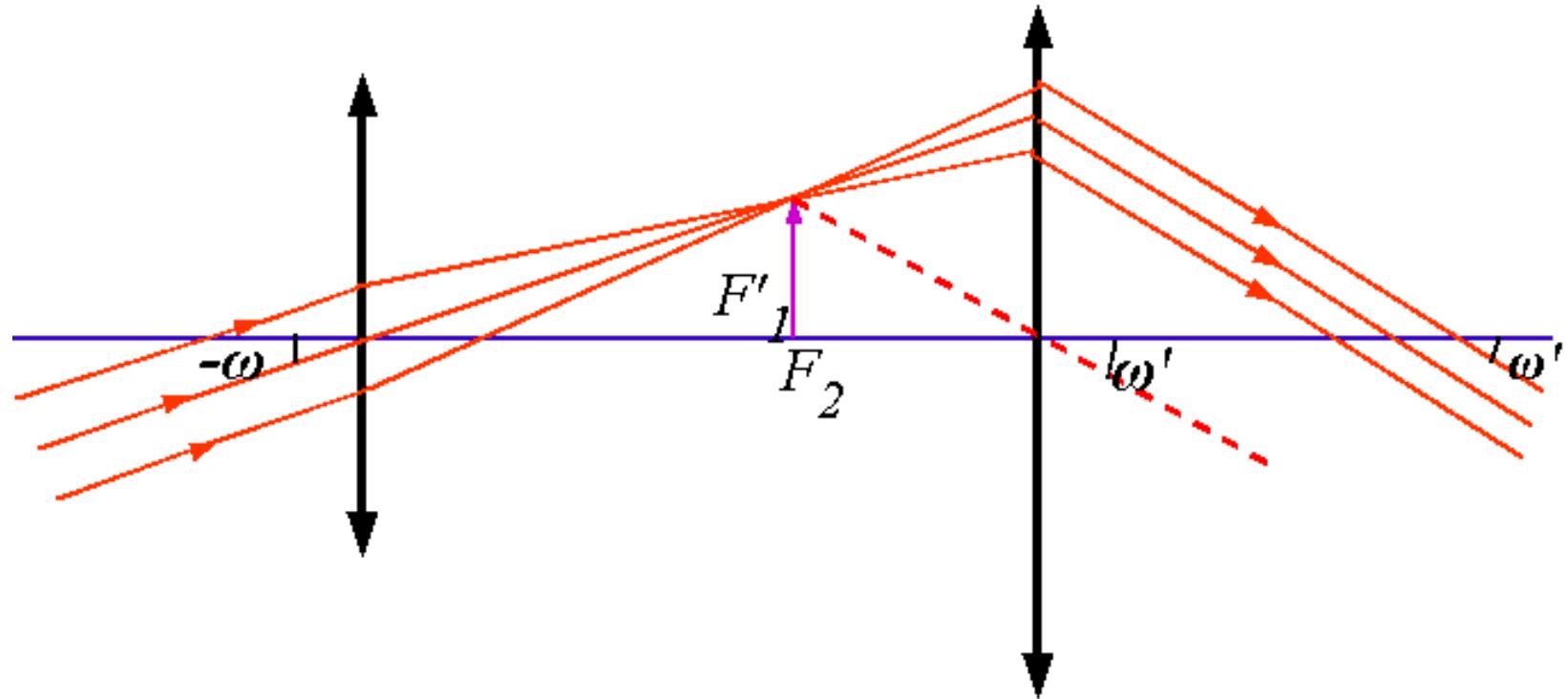
求: f' 、 l'_F 并比较工作距 l'_F 与焦距大小

[实例3] 望远镜系统—目视光学系统(课本P33~34)



$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

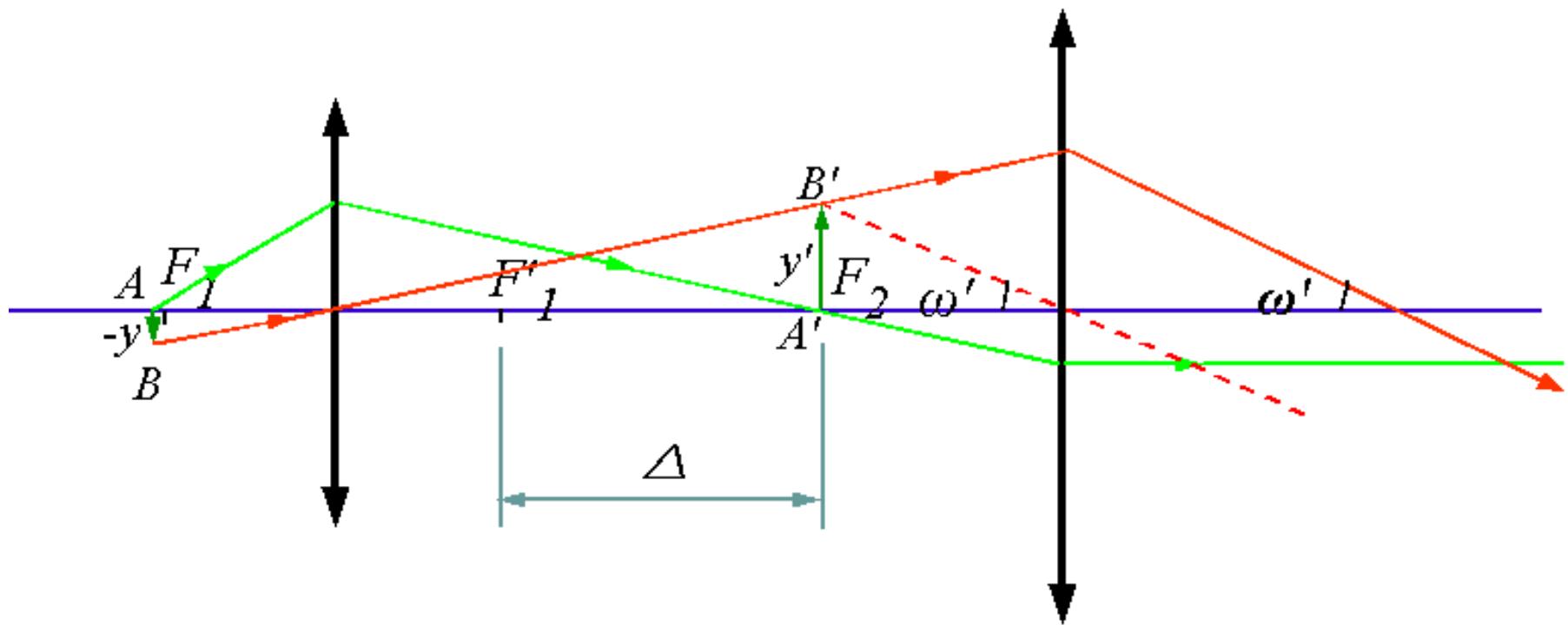
[实例3] 望远镜系统—目视光学系统(课本P34)



视角放大率

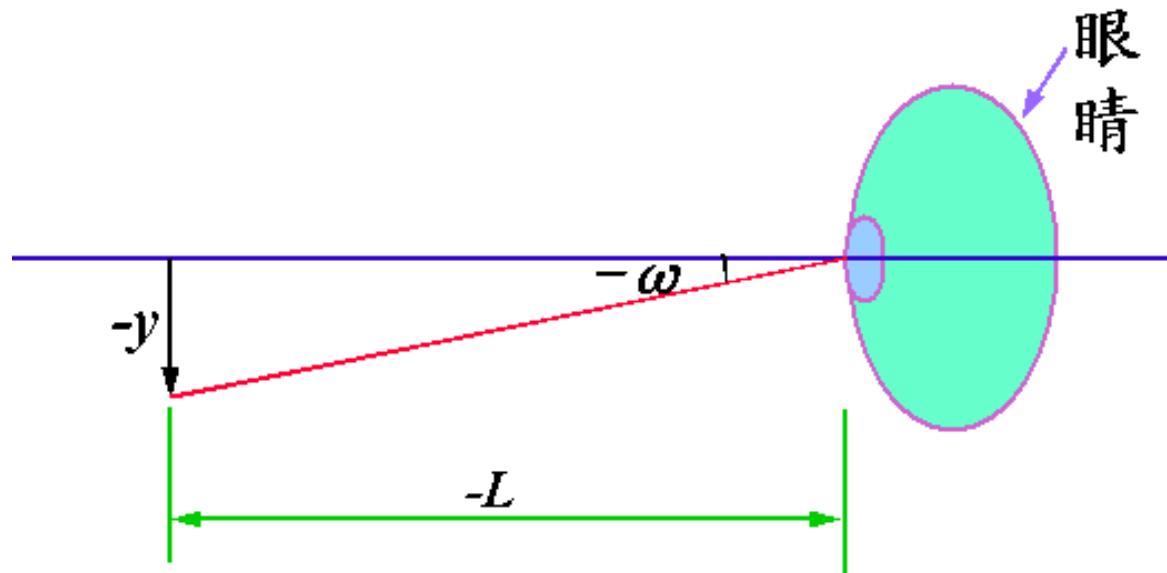
$$\Gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

[实例4] 显微镜系统—目视光学系统(课本P34~35)



$$\tan \omega' = \frac{y'}{f'_2} = \beta \frac{y}{f'_2} = -\frac{\Delta y}{f'_1 f'_2}$$

[实例4] 显微镜系统—目视光学系统(课本P35)



$$\tan \omega' = \frac{y'}{f_2'} = \beta \frac{y}{f_2'} = -\frac{\Delta y}{f_1' f_2'}$$

$$\tan \omega = \frac{y}{L}$$

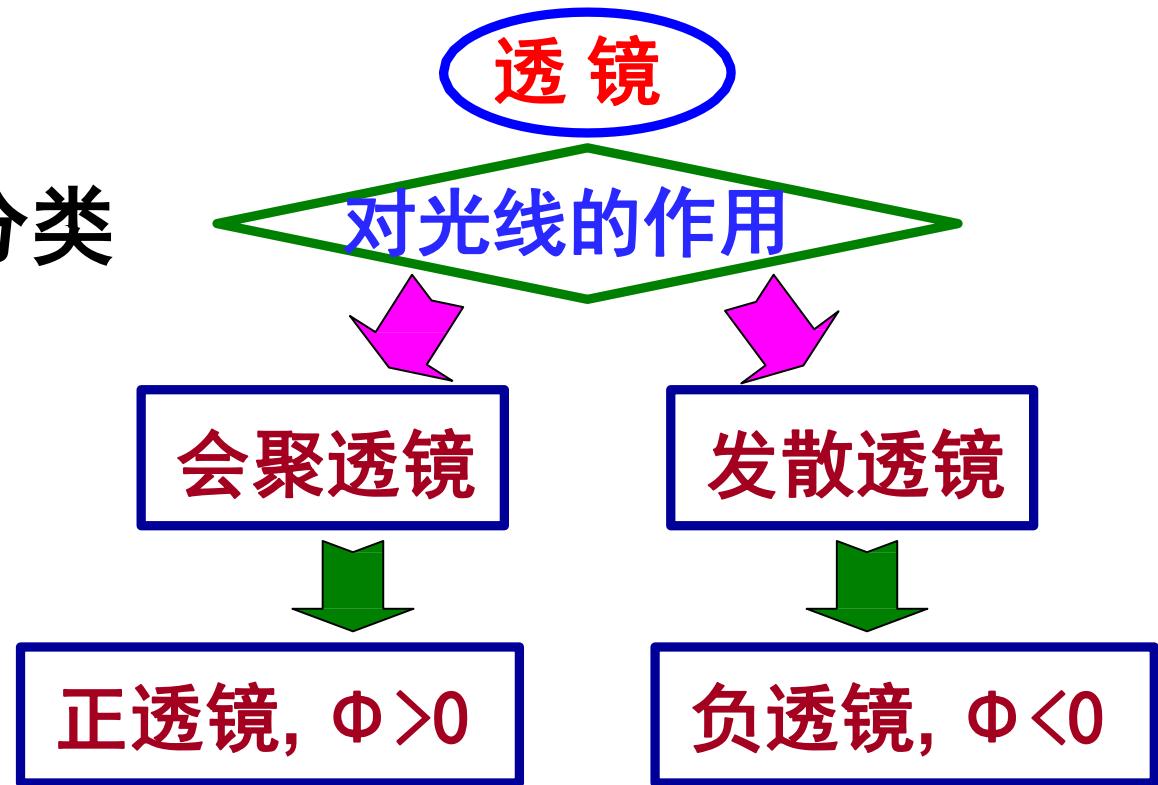
视角放大率

$$\Gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = -\frac{\Delta L}{f_1' f_2'}$$

§ 2.6 透镜

—— 构成光学系统的最基本单元，是由两个折射面包围一种透明介质所形成的光学零件。

2.6.1 透镜的分类



2.6.2 透镜成像关系分析

将透镜的**两个折射球面视为两个单独的光组**，先分别求其焦距和基点位置，便可得出透镜的焦距和基点位置。

利用**单个折射球面的成像公式**

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n' - n}{r}$$

令 l (l') 为无穷大，则 $l' \rightarrow f'$ ($l \rightarrow f$)。假定透镜置于空气中，且材料折射率为 n ，则

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, \quad f'_1 = \frac{nr_1}{n-1}$$

$$f_2 = \frac{nr_2}{n-1}, \quad f'_2 = -\frac{r_2}{n-1}$$

透镜的光学间隔为

$$\Delta = d - f_1' + f_2$$

透镜的焦距公式为

$$f' = -f = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]}$$

写成光焦度的形式为

$$\Phi = \frac{1}{f'} = (n-1)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{(n-1)^2}{n} d \rho_1 \rho_2$$

式中， ρ 为球面曲率半径的倒数。

便可求得透镜的**焦点位置**为

$$l'_F = f' \left(1 - \frac{n-1}{n} d\rho_1 \right)$$

$$l_F = -f' \left(1 + \frac{n-1}{n} d\rho_2 \right)$$

透镜的**主面位置**为

$$l'_H = -f' \frac{n-1}{n} d\rho_1$$

$$l_H = -f' \frac{n-1}{n} d\rho_2$$



结论

(参见原课本P35~37表2-1)

- ① 对于双凹、平凸、平凹和正弯月形透镜，其焦距的正负，即会聚或发散的性质决定于透镜形状或曲率半径与厚度的配置。
- ② 对于双凸透镜和负弯月形透镜，曲率半径固定后，厚度的变化可使其焦距为正值、负值和无穷大值。也可使主面在透镜以内、相互重合、透镜以外或无限远处。

- ③ 平凸和平凹透镜的主面之一与透镜球面顶点重合，另一主面在透镜以内距平面 d/n 处。
- ④ 正弯月形透镜的主面位于相应折射面远离球面曲率中心一侧；负弯月形透镜的主面位于相应折射面靠近曲率中心的一侧。此两种透镜的主面可能有个位于空气中，或两个皆位于空气中，由两个曲率半径和厚度的数值决定。

⑤ 实际应用中，透镜的厚度一般较小。表2-1中的厚度分析只是有助于对透镜特性的理解。

薄透镜：厚度忽略不计的透镜，被称为~。这使问题大大简化，在像差理论中有重要意义。

当 $d \rightarrow 0$ 时，光焦度可写为 $\Phi = (n - 1)(\rho_1 - \rho_2)$

当 $d \rightarrow 0$ 时，主面和球面顶点重合，故薄透镜的性质仅由焦距或光焦度所决定。

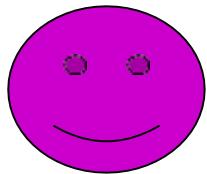
- 课后作业：
- P37-38

第2章 习题 2, 10题

《工程光学》

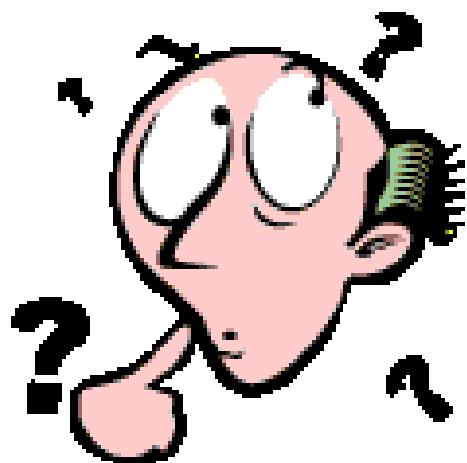
第3章

平面镜与棱镜系统 I



前两章学习了... ...

{ 几何光学基本定律
近轴光学系统的光路计算
球面光学成像系统、放大率
理想光学系统的物像关系
透镜... ...



物像关系中的比例关系产生的基础是什么？
曲面与介质

本章概要

- 光学系统中除利用球面光学元件外，还常用各种平面光学元件（如平面反射镜、平行平板、反射棱镜、折射棱镜和光楔）实现对物体的成像。
- 平面光学元件主要用于改变光路方向、使倒像转换成正像或产生色散用于光谱分析等，是光学系统的重要组成部分。

第3章 平面镜与棱镜系统

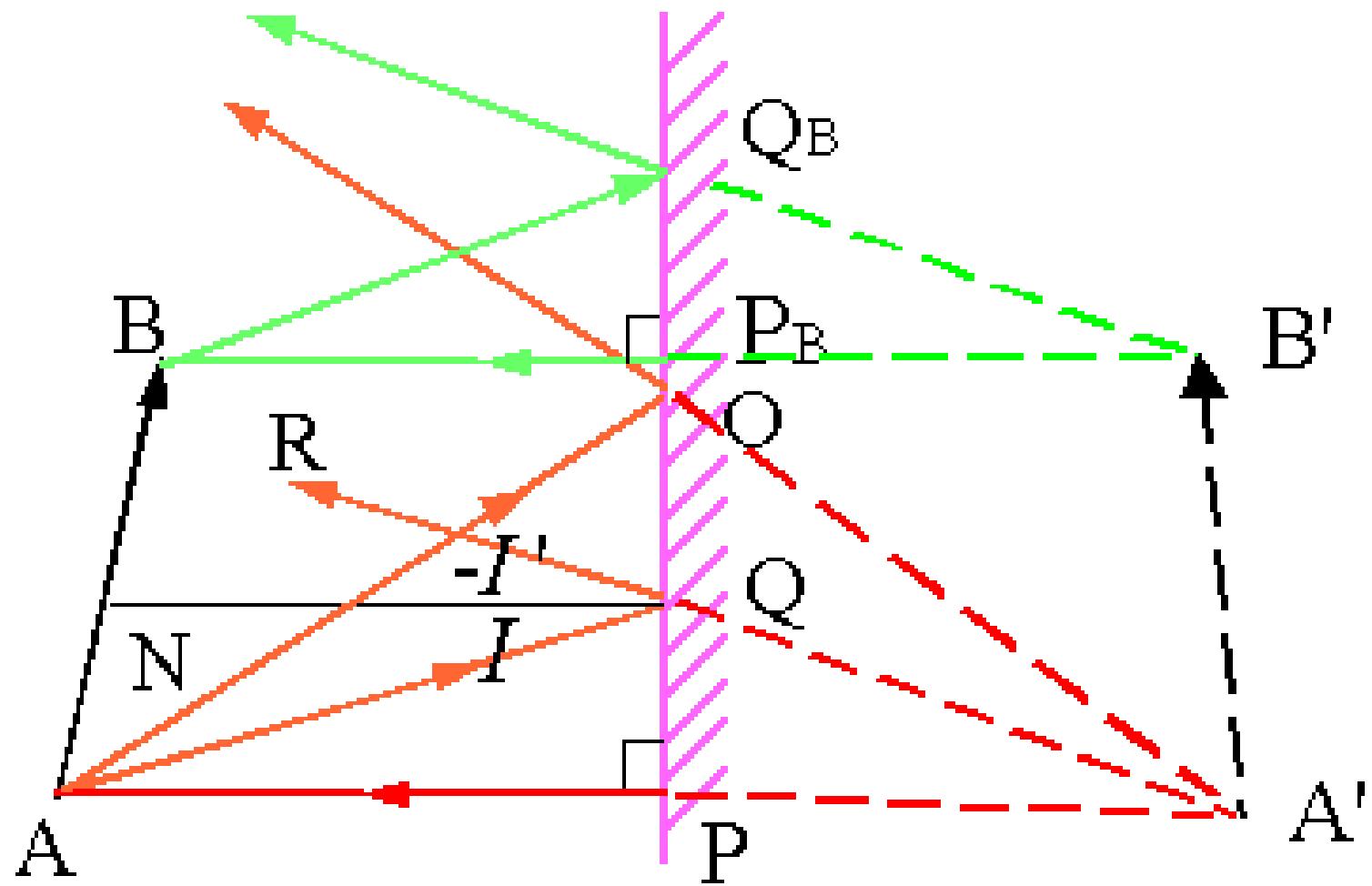
- § 3.1 平面镜成像
- § 3.2 平行平板
- § 3.3 反射棱镜
- § 3.4 折射棱镜与光楔
- § 3.5 光学材料

§ 3.1 平面镜成像

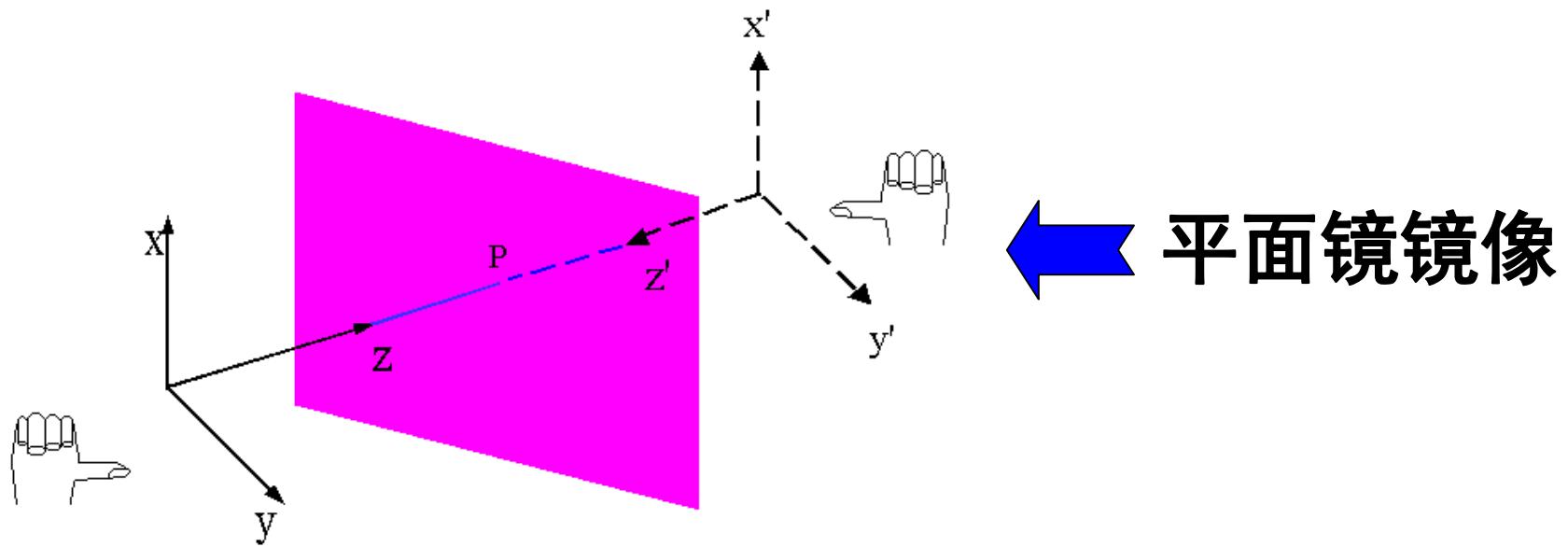
3.1.1 平面镜成像

——平面镜是唯一成完善像的最简单的光学元件，即物体上任意一点发出的同心光束经平面镜后仍为同心光束。

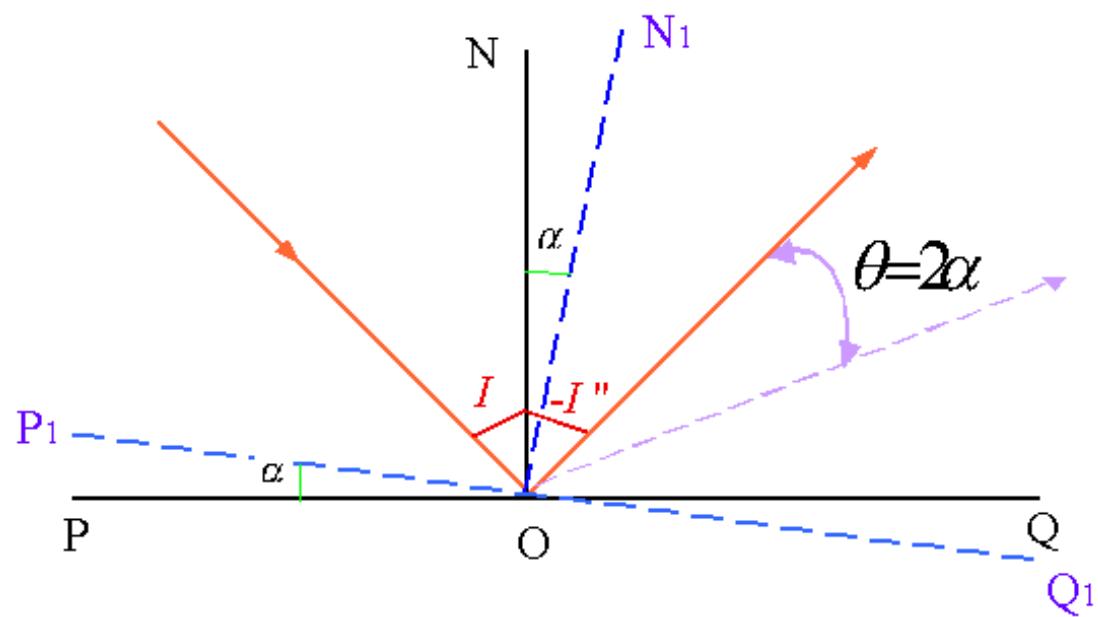




平面镜成像



平面镜旋转 ➡





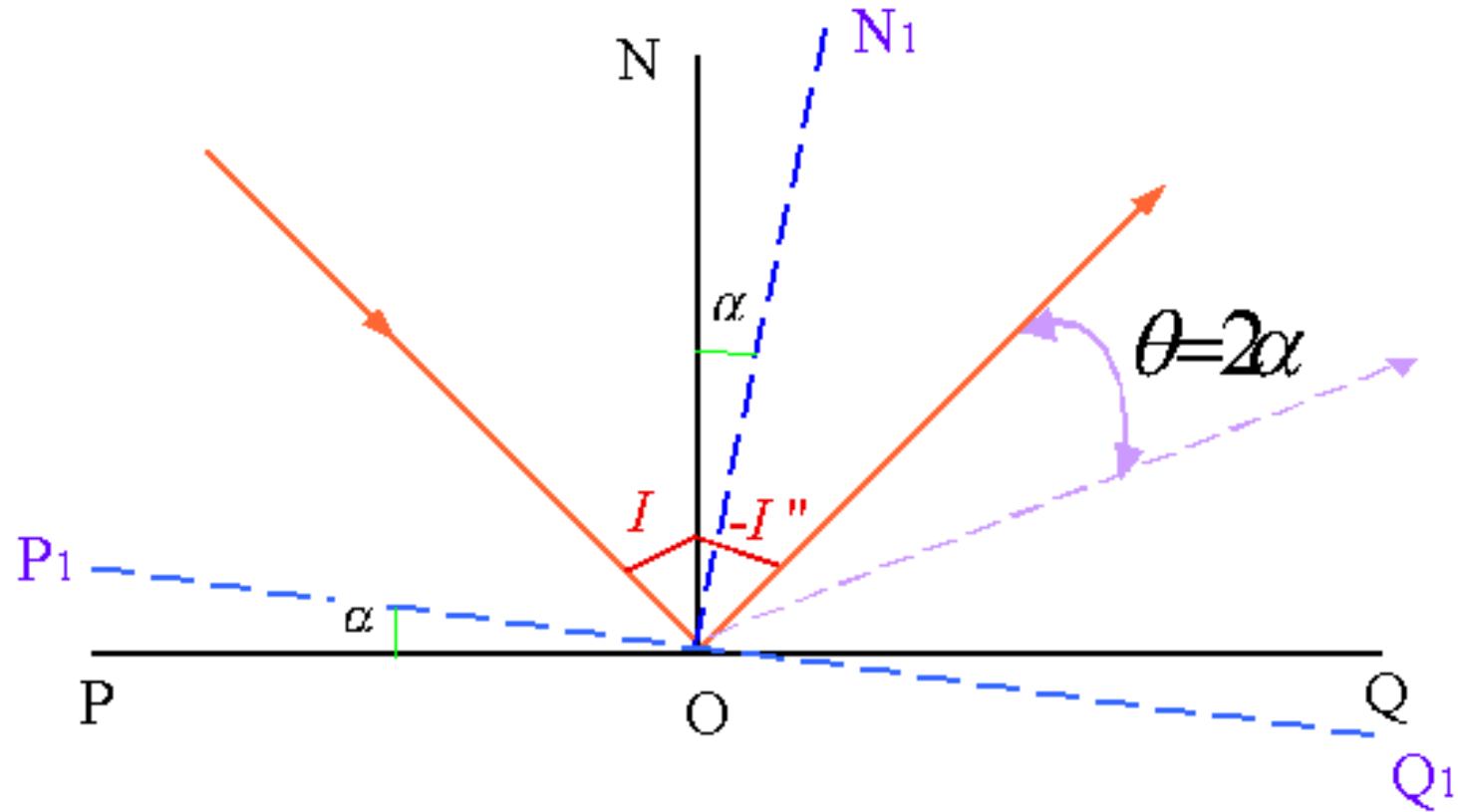
讨论

对于平面镜 $r = \infty$, 据球面镜物像关系和放大率公式可得, $l' = -l$, $\beta = 1$

- ① 物像分布在镜面两边, 大小相等, 虚实相反。故像与物关于镜面对称, 此对称性称**镜像**。
- ② 奇数次反射成**镜像**, 偶数次反射成与物一致的像, 简称**一致像**。
- ③ 当物体旋转时, 其像反方向旋转**相同角度**。

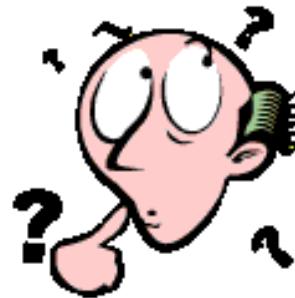
3.1.2 平面镜旋转特性

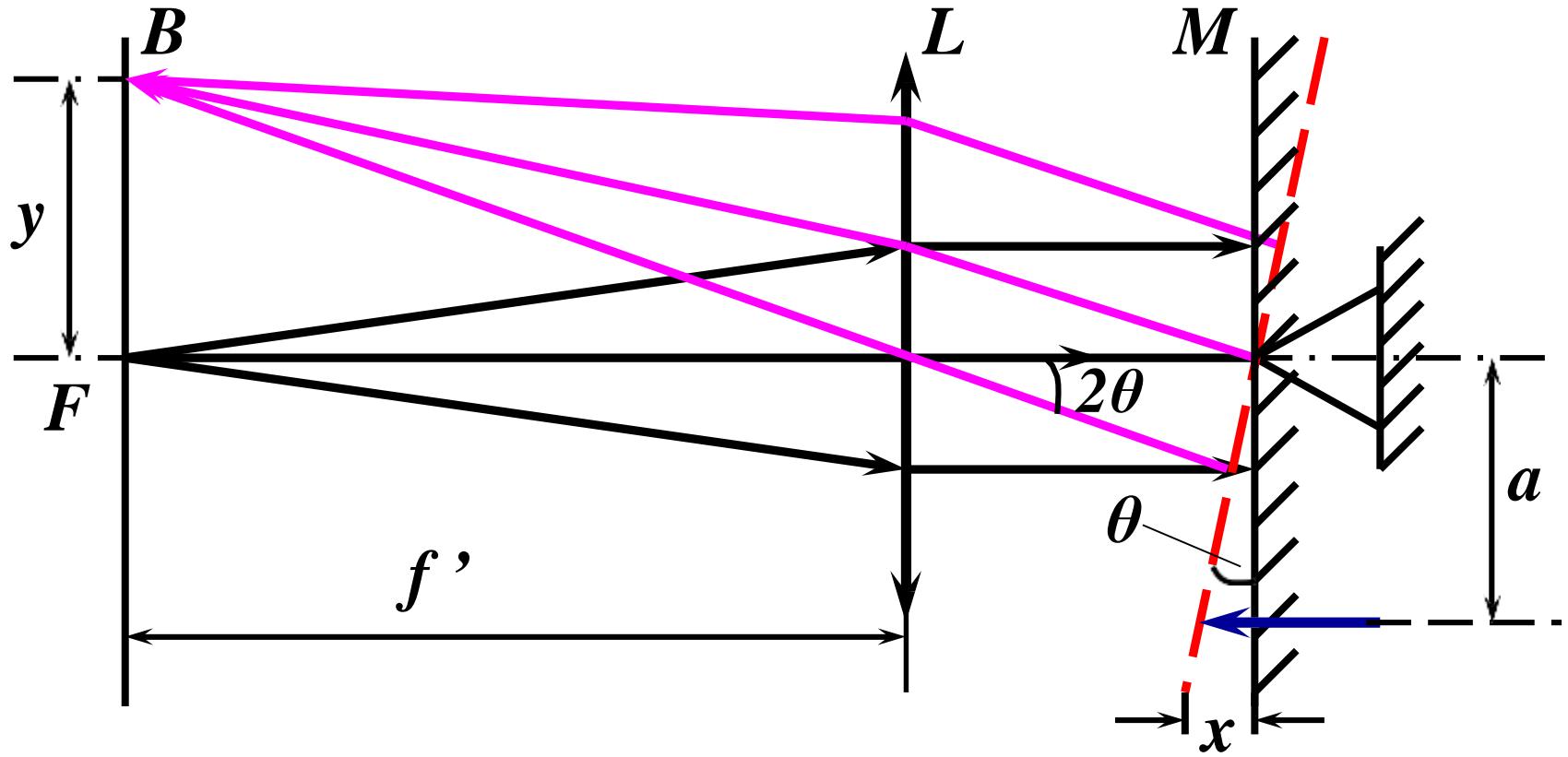
——当入射光线方向不变而转动平面镜时，反射光线的方向将发生改变。



应用

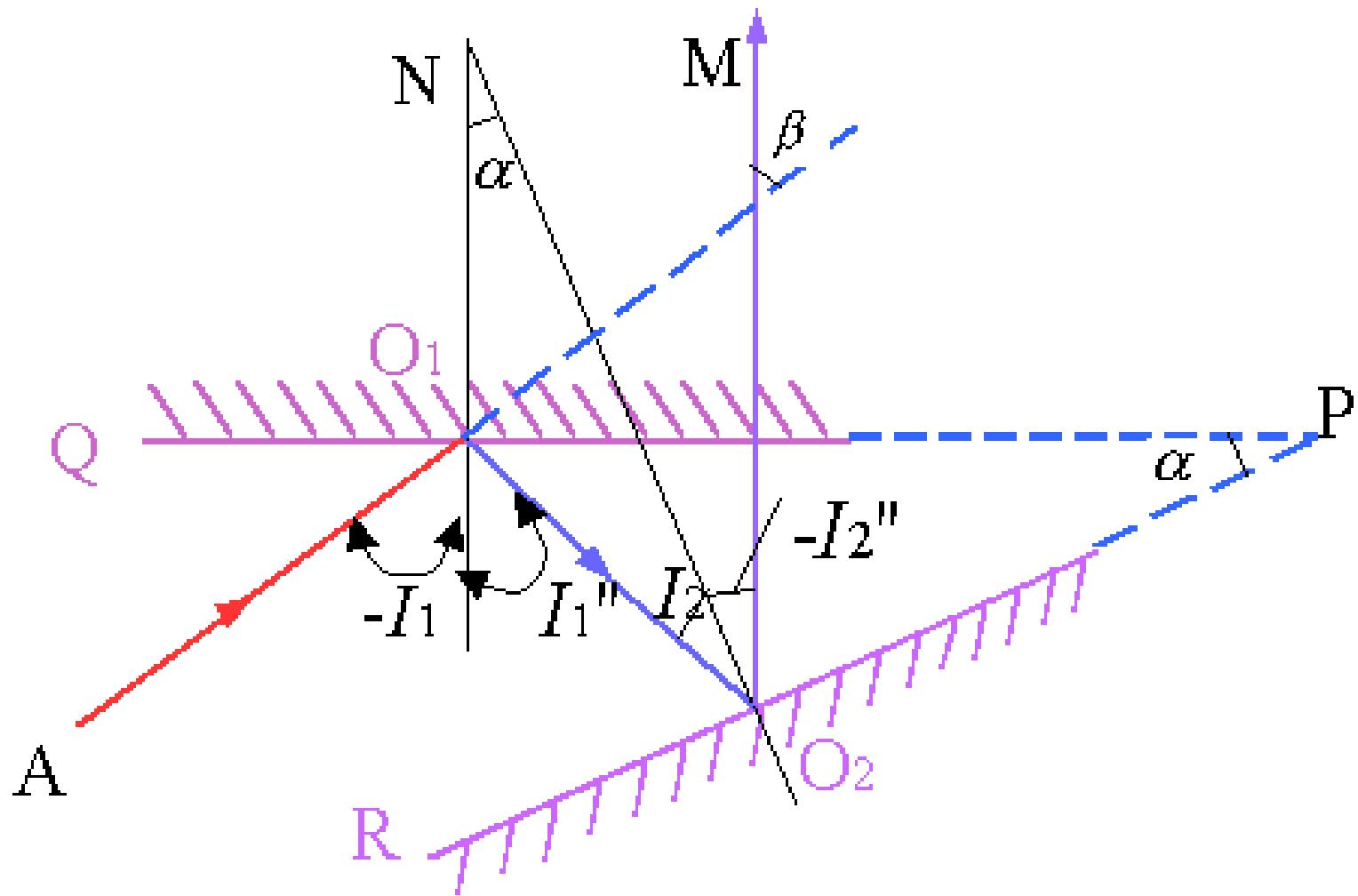
如何运用平面镜成像原理
来 实现对微小角度或微小位移
的测 量呢？





实际应用中，此性质可测量微小角度和位移——光学比较仪中的光学杠杆原理。

3.1.3 双平面镜成像



特性

- ① 出射光线与入射光线的夹角 ($\beta = 2\alpha$) 跟入射角无关，只取决于双面镜夹角 α 。实际应用中，对折转光路极为有利，与单反镜相比，安装精度要求不高。
- ② 只要双面镜夹角 α 不变，双镜面转动时，连续一次像不动。

§ 3.2 平行平板

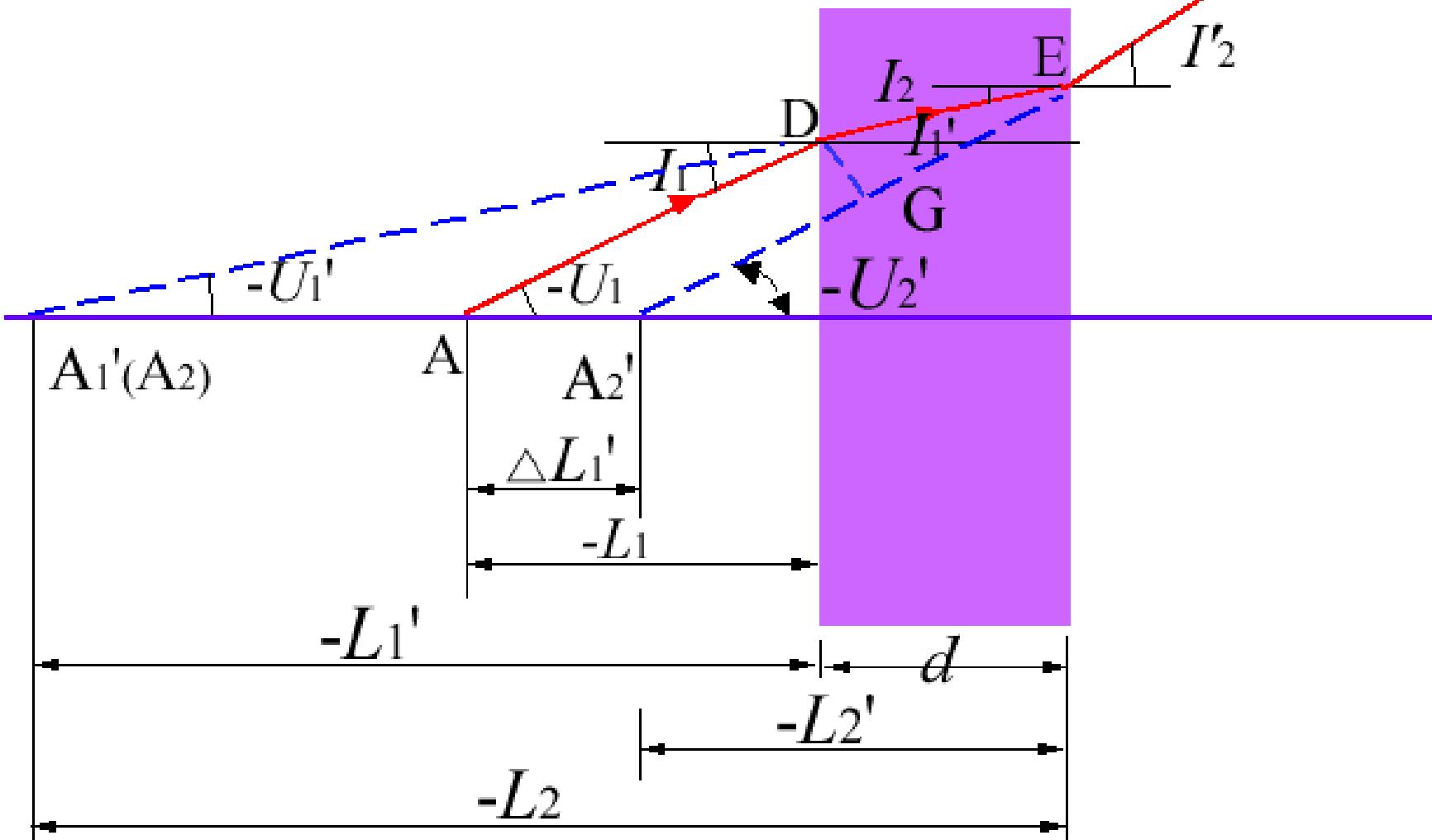
3.2.1 平行平板的成像特性

——平行平板是由两个相互平行的折射平面构成的光学元件。



问题

为什么说反射棱镜可展开，并等效于一个平行平板？

$n_1=1$ $n_2=n_1'=n$ $n_2'=1$ 

平行平板的成像特性

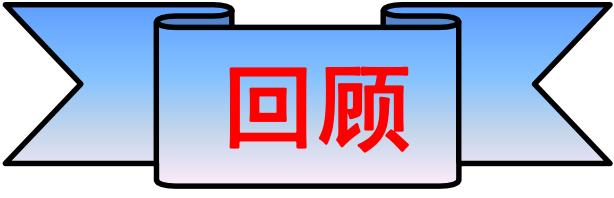


特性

- ① 光线经平行平板后**方向不变**。
- ② 平行平板是**无光焦度的光学元件**，不会使物体放大或缩小，在光学系统中对光焦度无贡献。

试想：平行平板能否完善成像？

- ③ 平行平板**不能成完善像**。



回顾

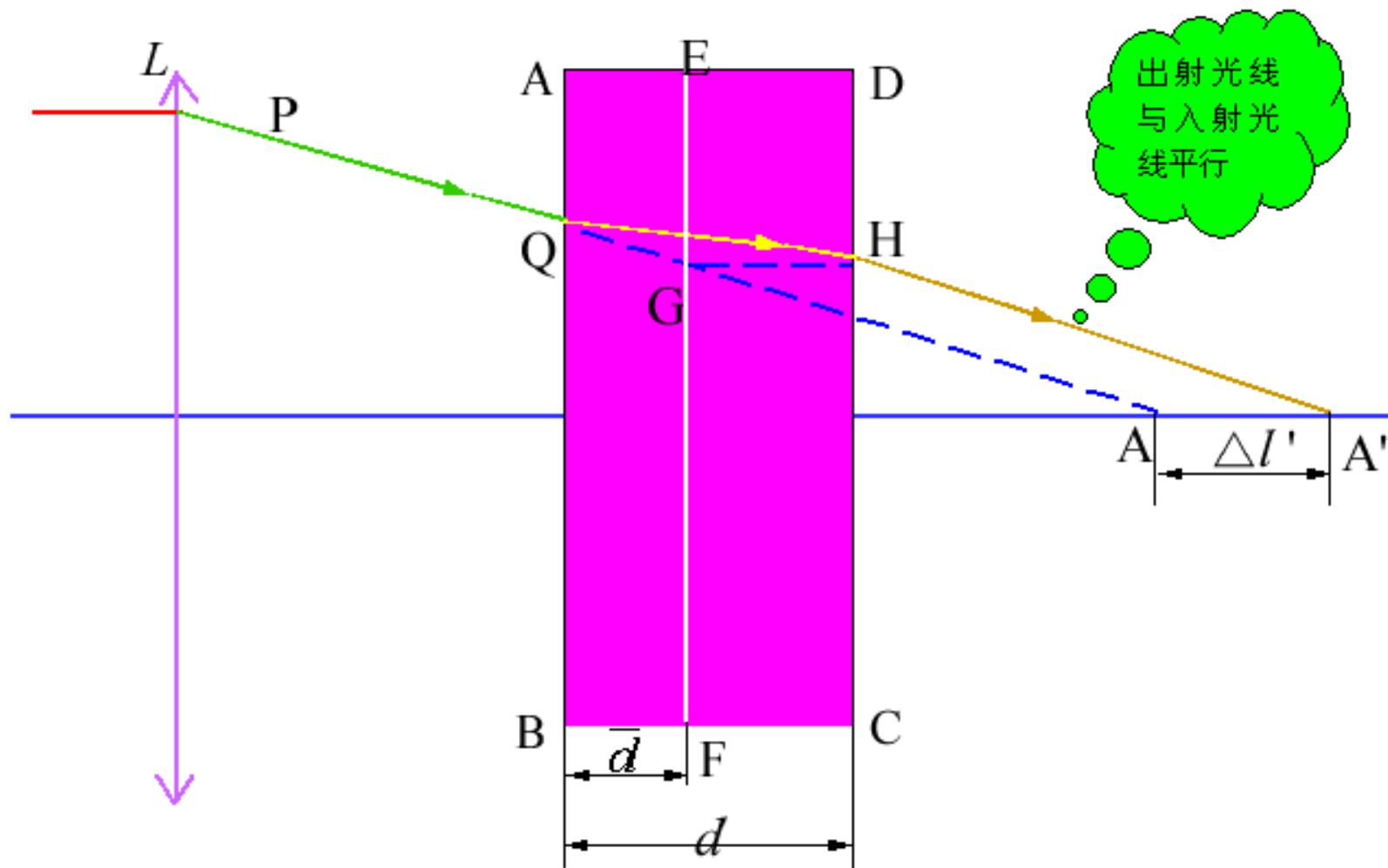
通常，用 Φ 表示像方焦距的倒数，称光焦度。

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2$$

若 d 为零，即在密接薄透镜组的情况下，总光焦度是两薄透镜光焦度之和。

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

3.2.2 平行平板的等效光学系统





特性

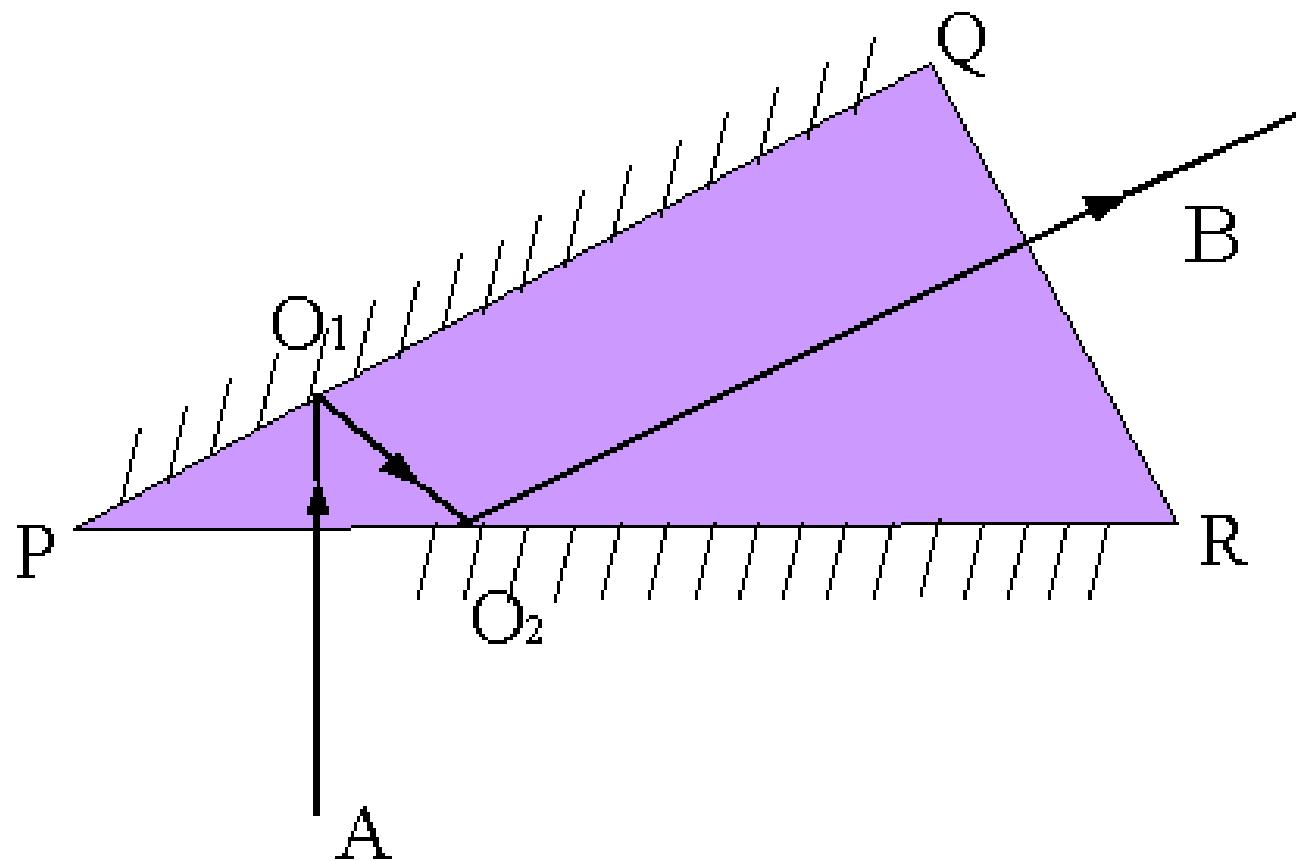
- ① 平行平板在近轴区以细光束成像是完善的。无论物体位置如何，其像可认为是物体移动一轴向位移得到，且轴向位移只与其厚度和折射率有关。
- ② 在实际光学设计时，只需计算出等效空气平板的像方位置，再沿光轴作一轴向位移即可，不必考虑平行平板元件的存在。

§ 3.3 反射棱镜

3.3.1 反射棱镜的类型

反射棱镜——将一个或多个反射面磨制在同一块玻璃上形成的光学元件称为~。反射棱镜在光学系统中主要实现**折转光路、转像和扫描**等功能。

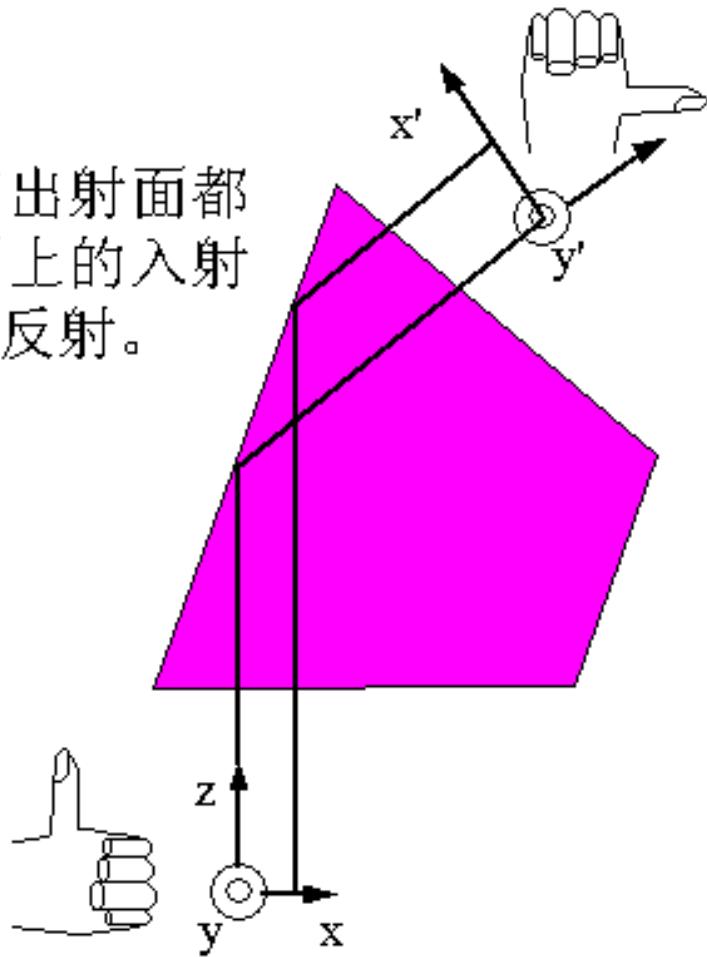
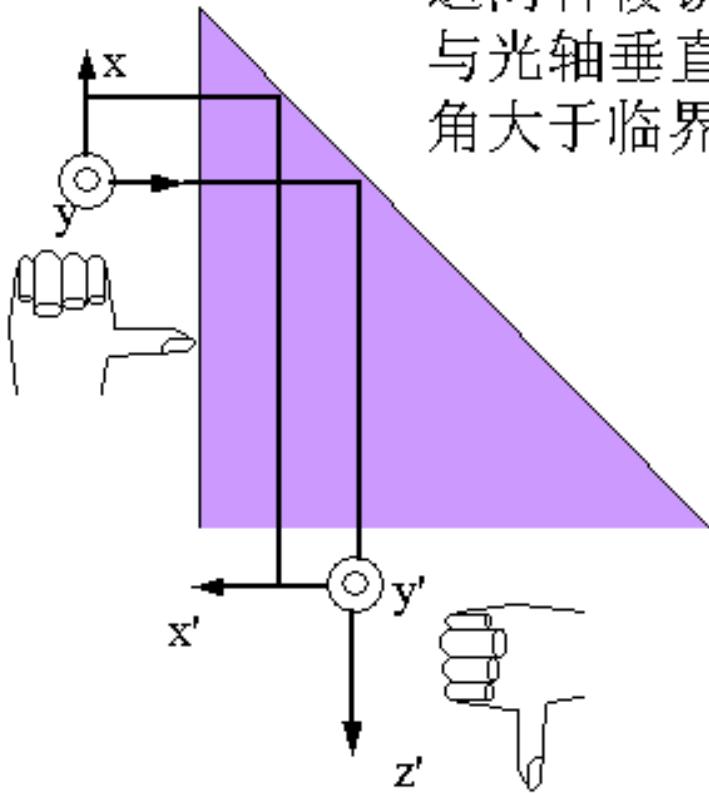
反射棱镜的类型一般分为**简单棱镜、屋脊棱镜、立方角锥棱镜**和**复合棱镜**四类。



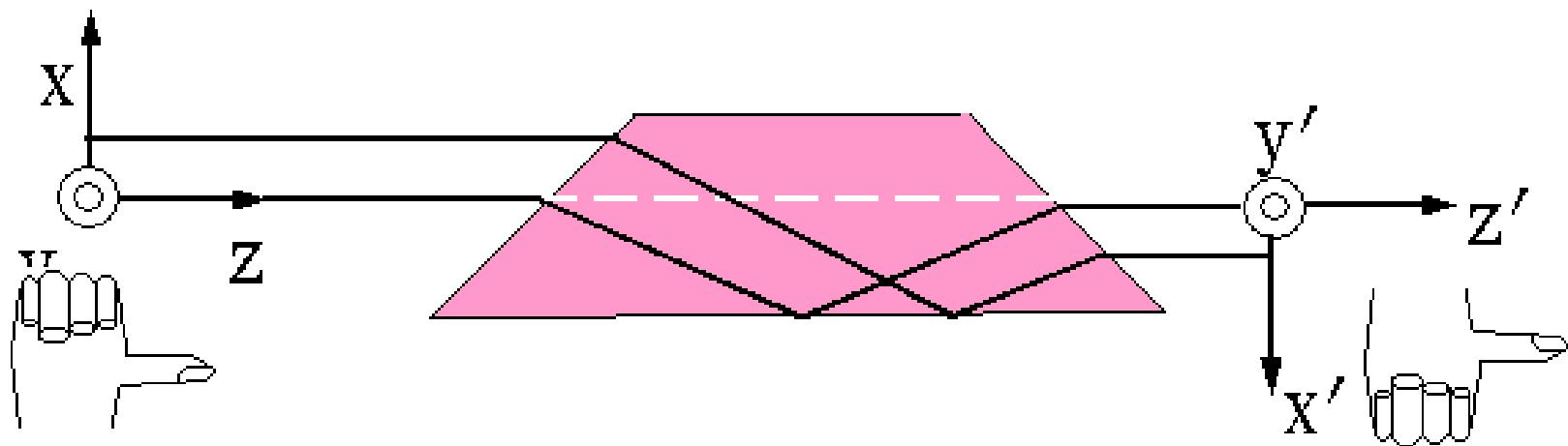
反射棱镜的主截面

3.3.1.1 简单棱镜

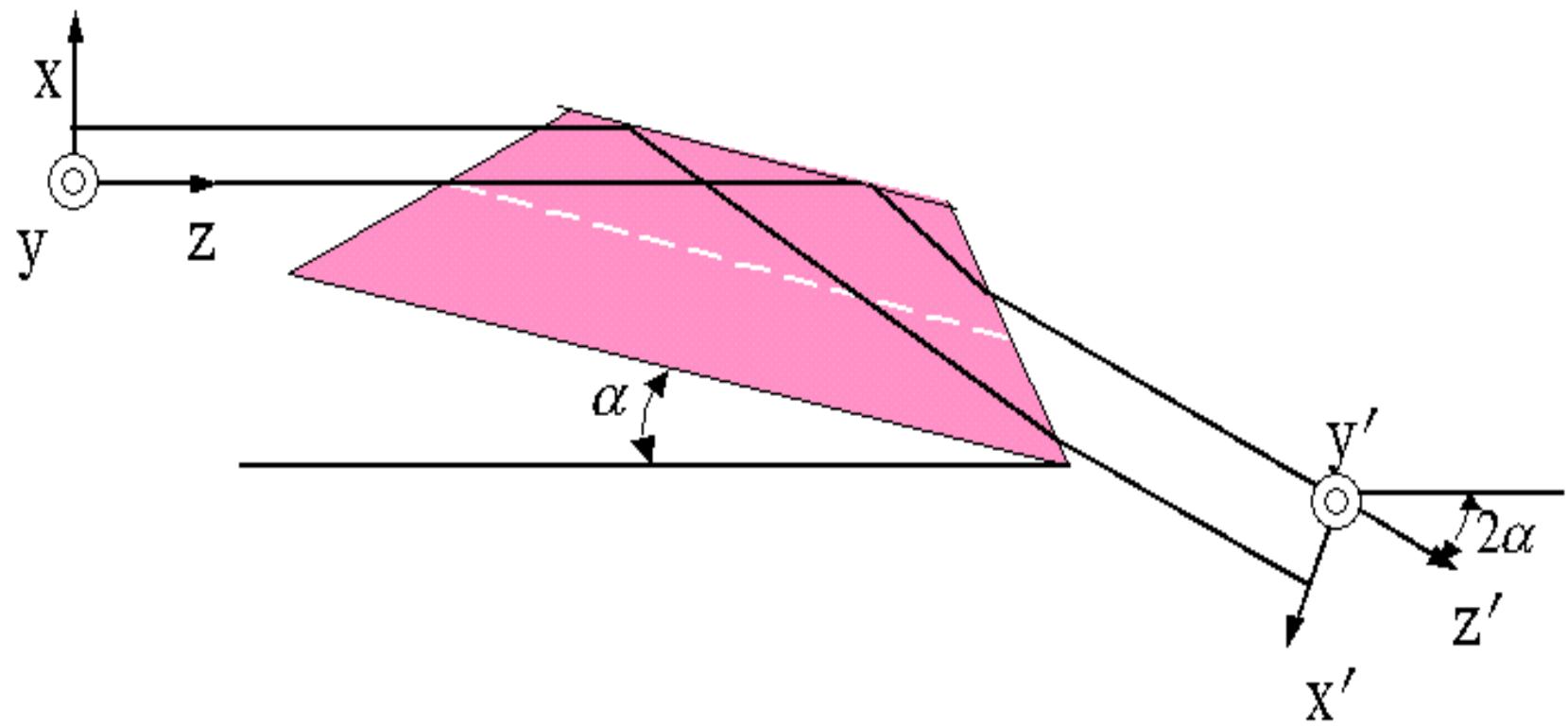
这两种棱镜的入射面和出射面都与光轴垂直，在反射面上的入射角大于临界角，发生全反射。



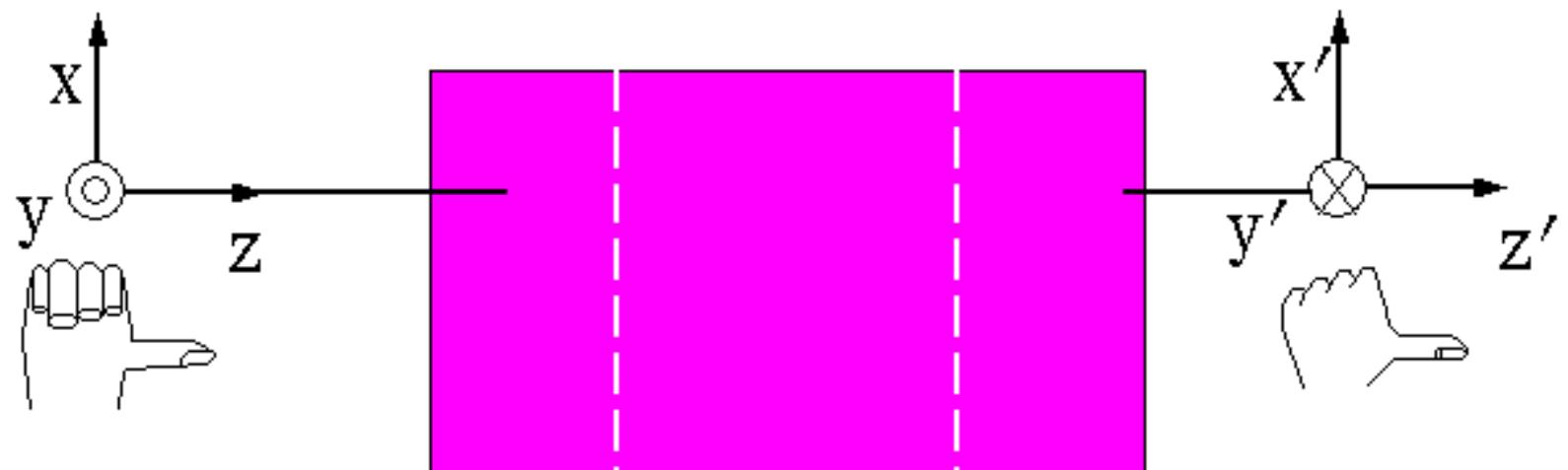
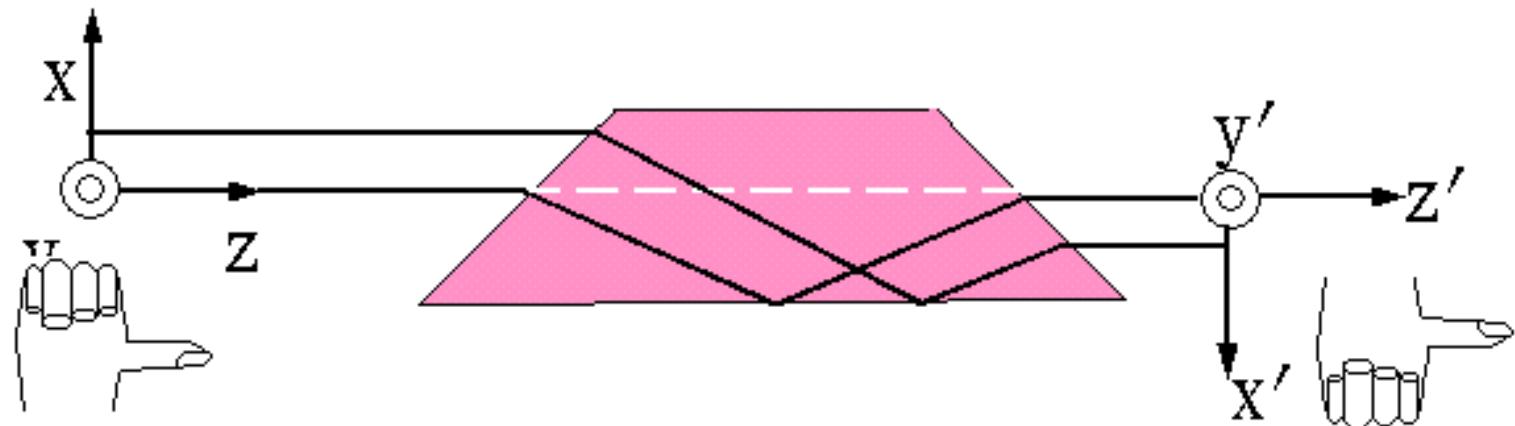
(A) 一次反射棱镜



道威 (Dove) 棱镜



一次反射棱镜——Dove棱镜



一次反射棱镜——Dove棱镜

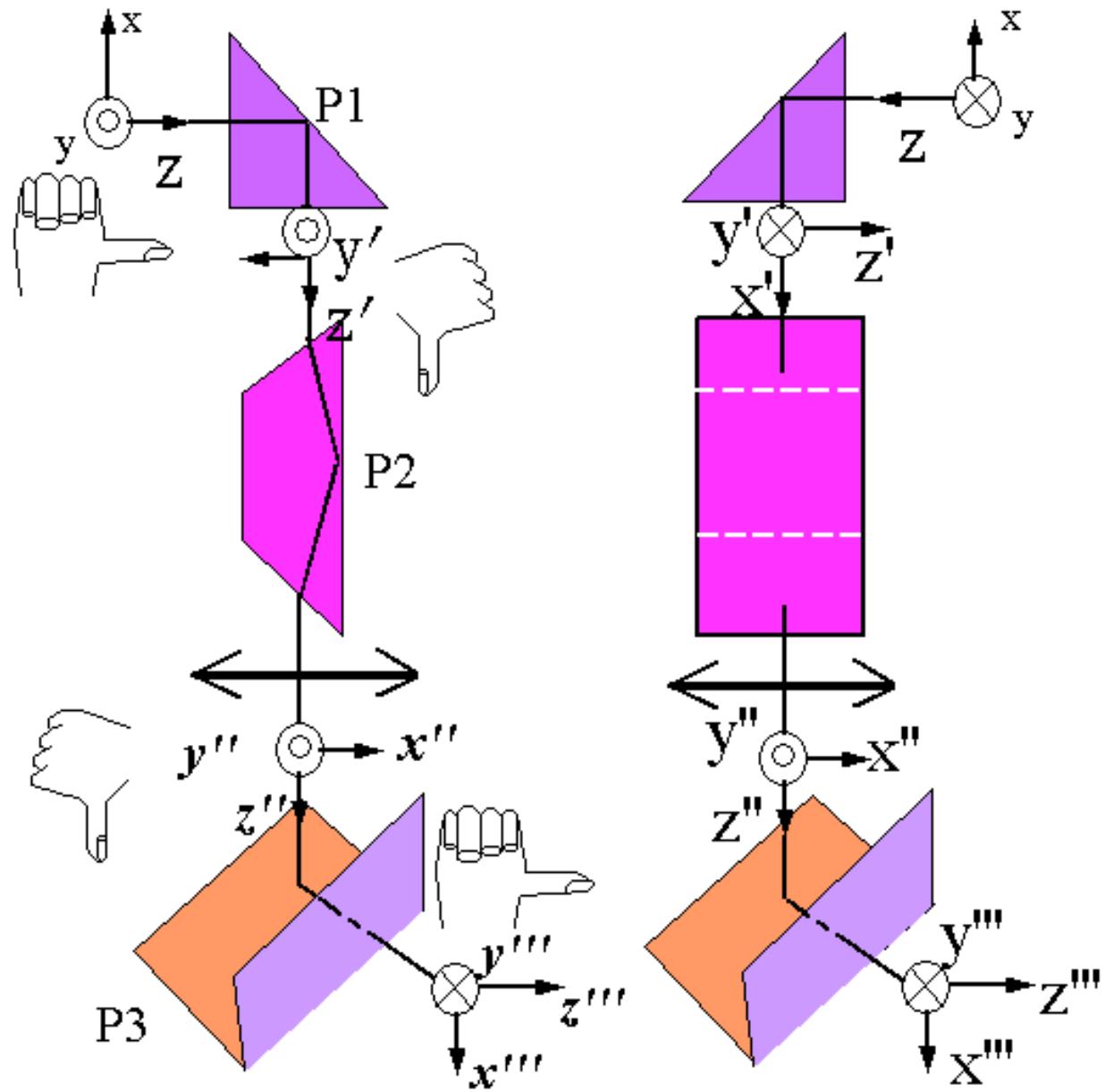
特性

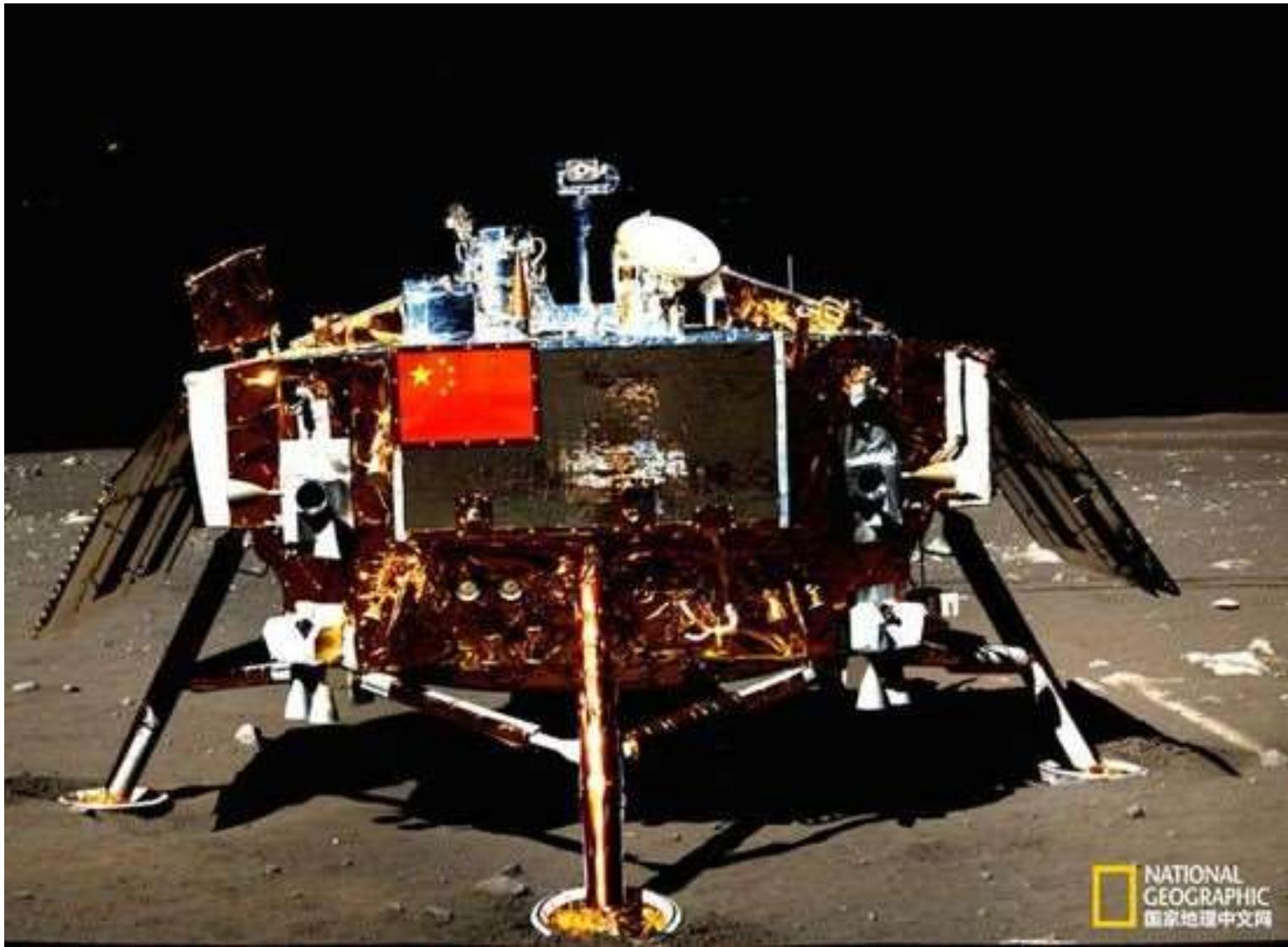
- ① 一次反射棱镜——Dove棱镜是由直角棱镜去掉多余的直角部分而成的，其入射面与出射面均不垂直，但**出射光轴与入射光轴方向不变**。

- ② 当绕其**光轴旋转 α 角**时，**反射像同方向旋转 2α 角**，正如平面镜旋转一样。

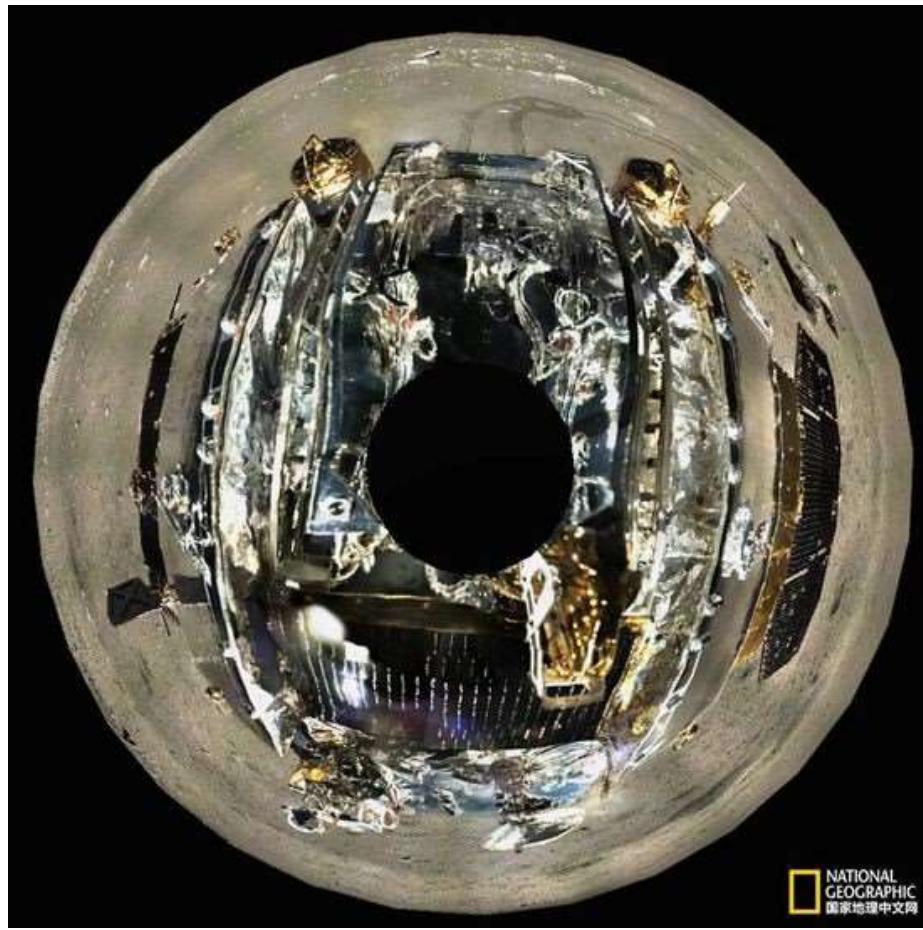
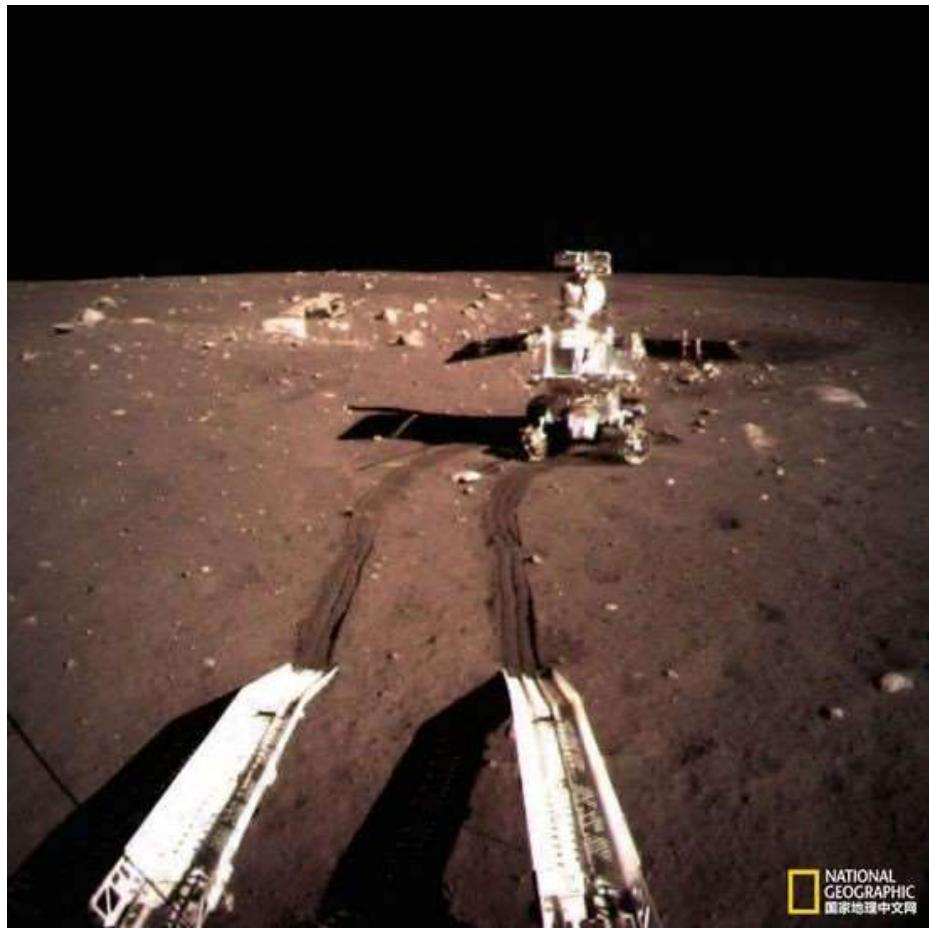
实例

周视瞄准仪 光学系统及 其旋转特性



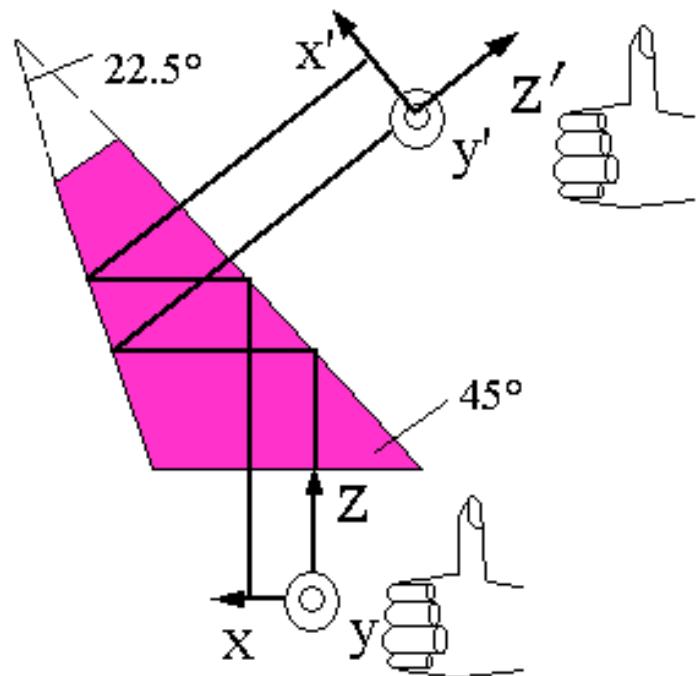


嫦娥三号着陆器，从其光洁的表面上可以看到玉兔号。

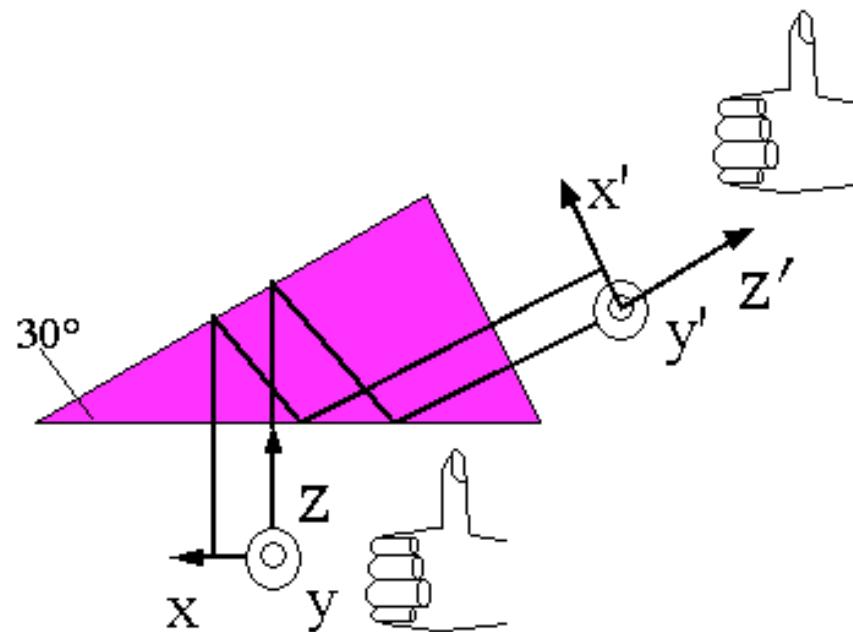


玉兔号及360度自拍照。

(B) 二次反射棱镜

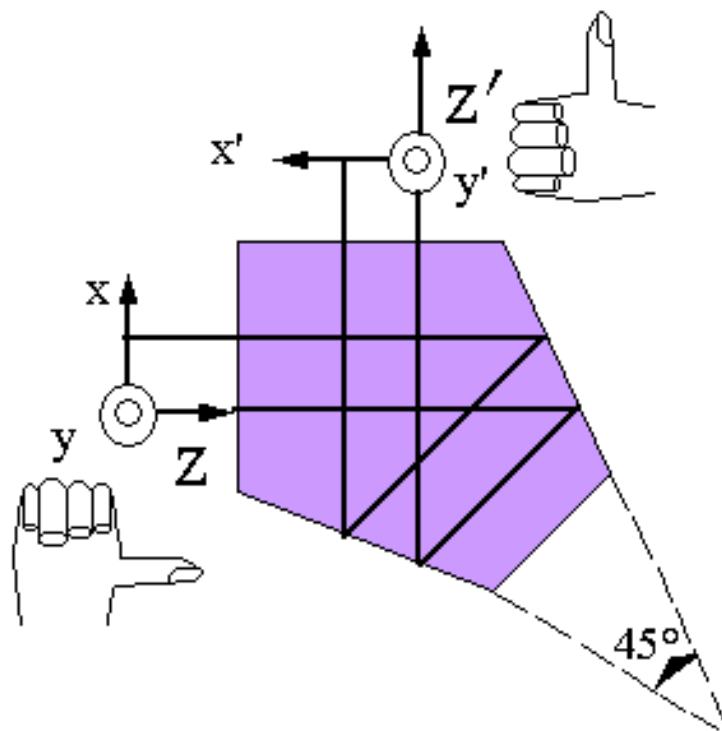


a) 半五角棱镜

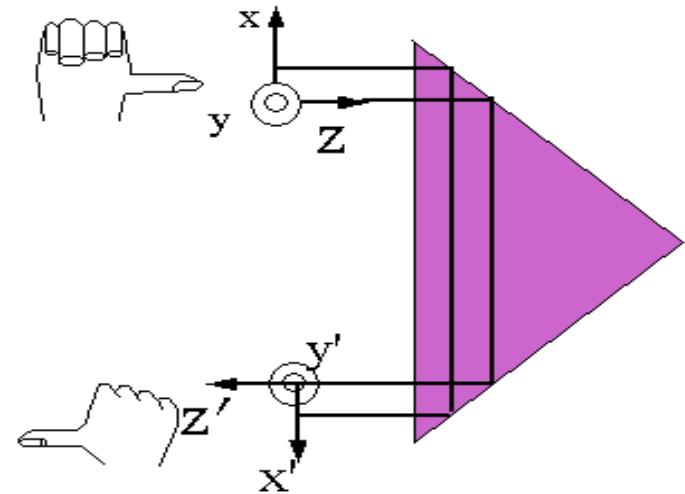


b) 30° 直角棱镜

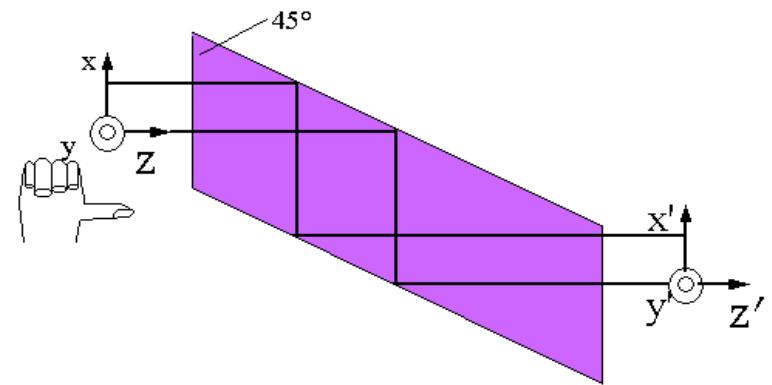
常用二次反射棱镜



c) 五角棱镜



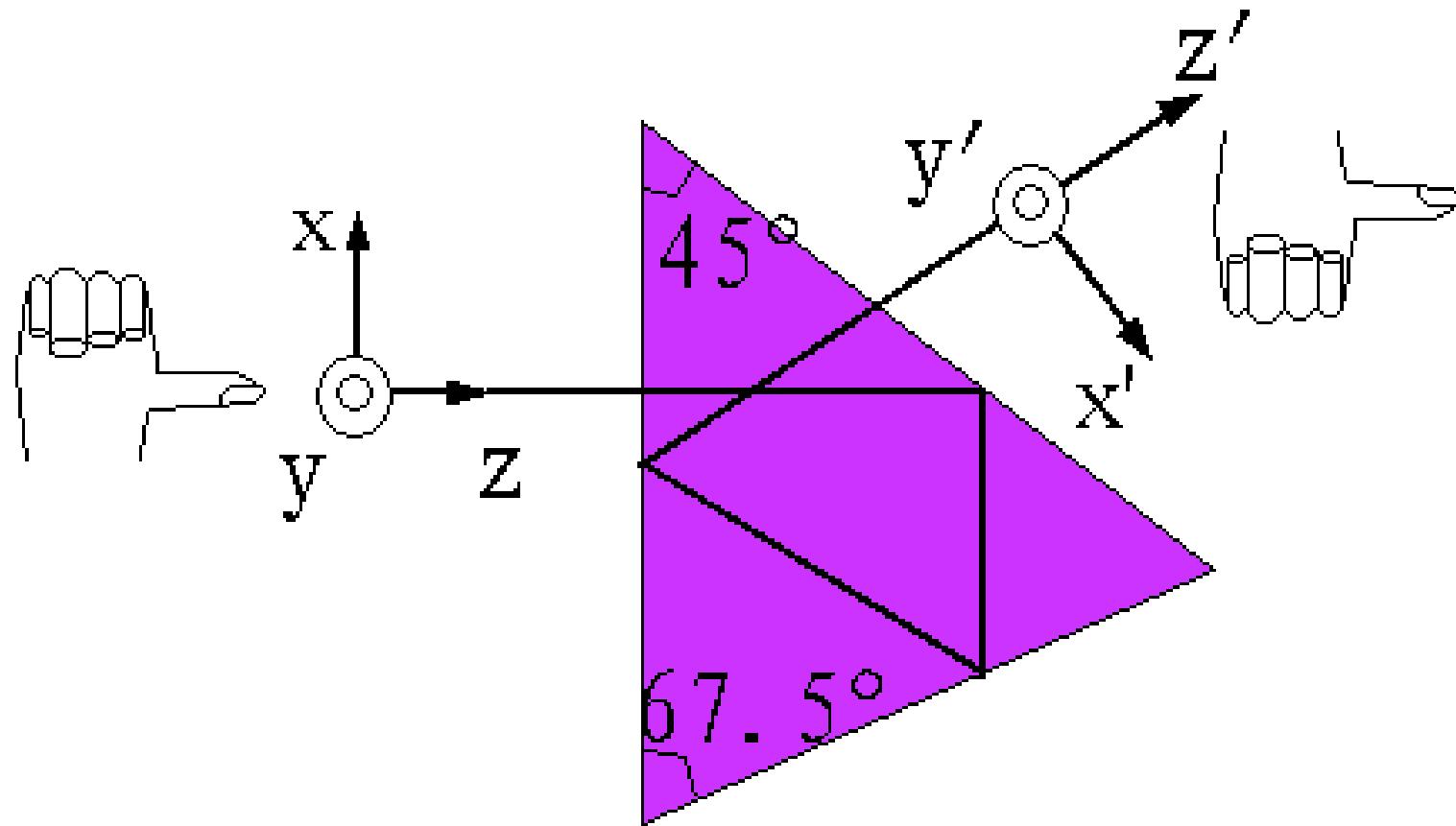
d) 直角棱镜



e) 斜方棱镜

常用二次反射棱镜

(C) 三次反射棱镜

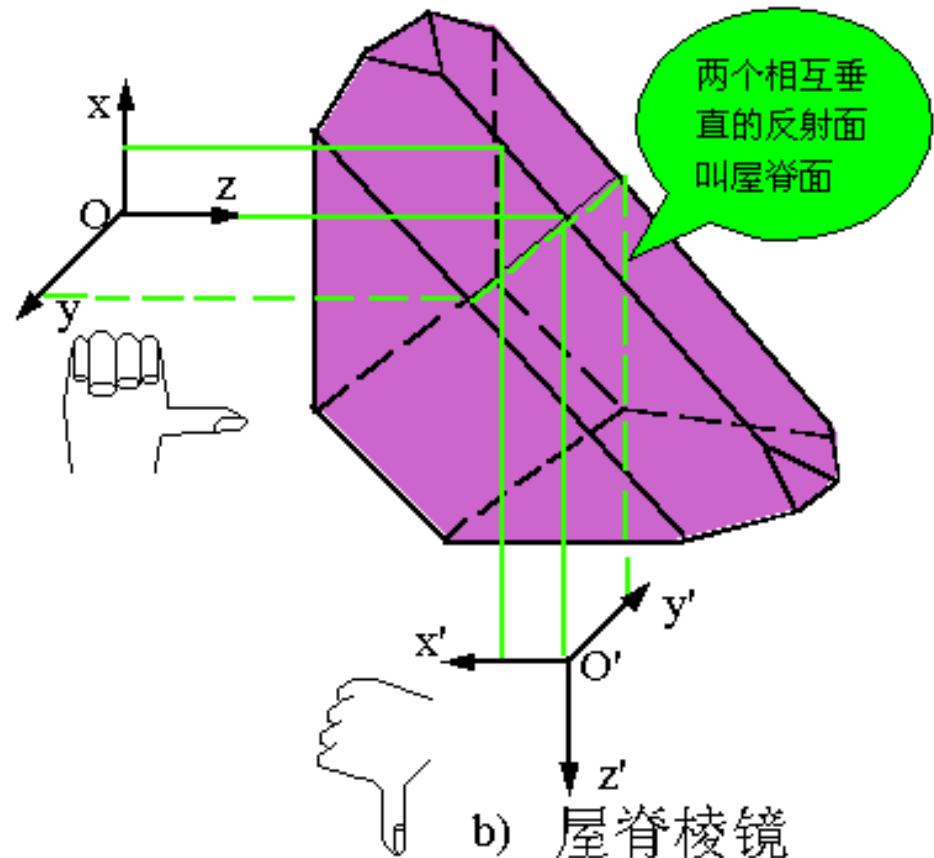
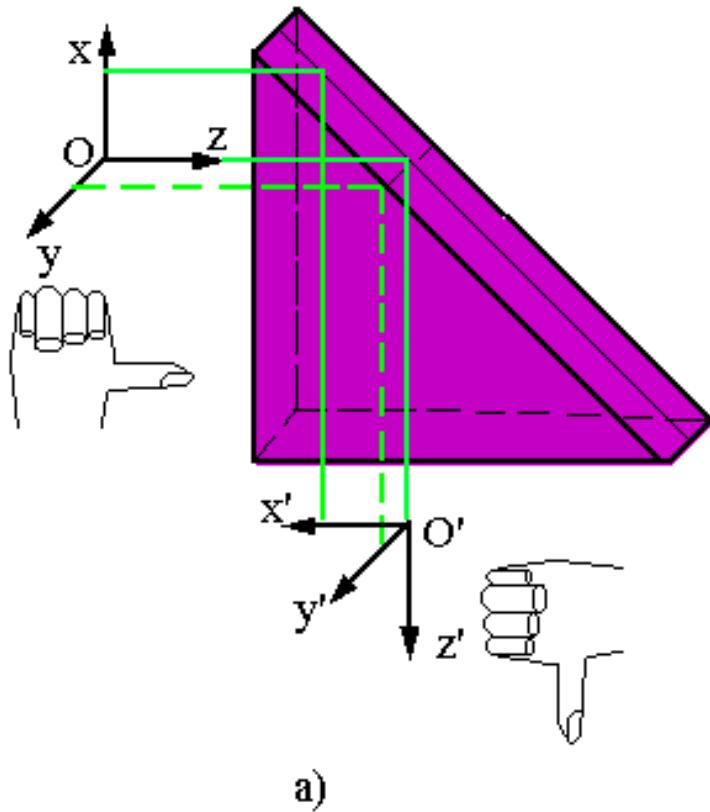


斯密特棱镜

特性

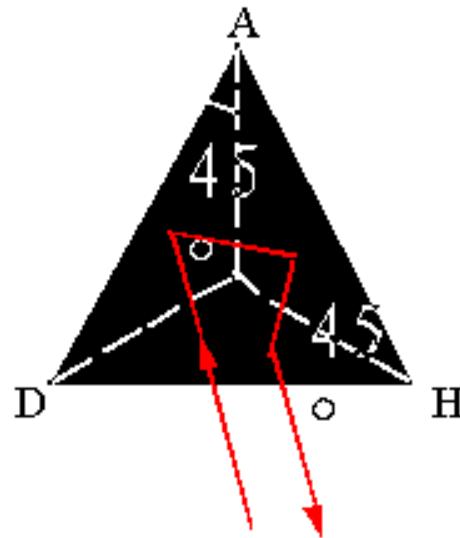
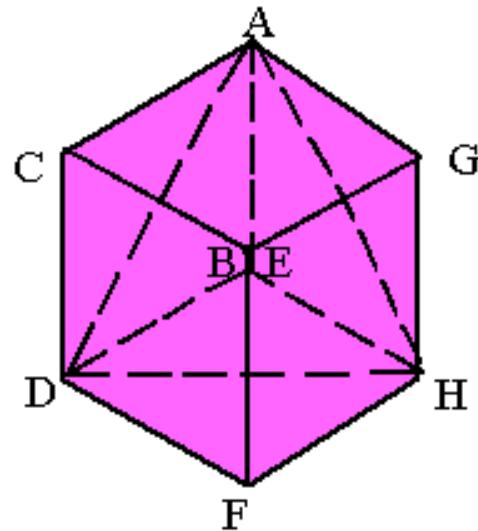
- ① 斯密特棱镜，其出射光线与入射光线的夹角为 45° ，奇次反射成镜像。
- ② 其最大特点是因为光线在棱镜中的光路很长，可以折叠光路，使仪器结构紧凑。

3.3.1.2 屋脊棱镜



3.3.1.3 立方角锥棱镜

立方角锥棱镜——由立方体切下一角而成。



当立方角棱镜绕其顶点旋转时

特点：当绕顶点旋转时，出射光线**方向不变**，
仅产生一个平行**位移**。



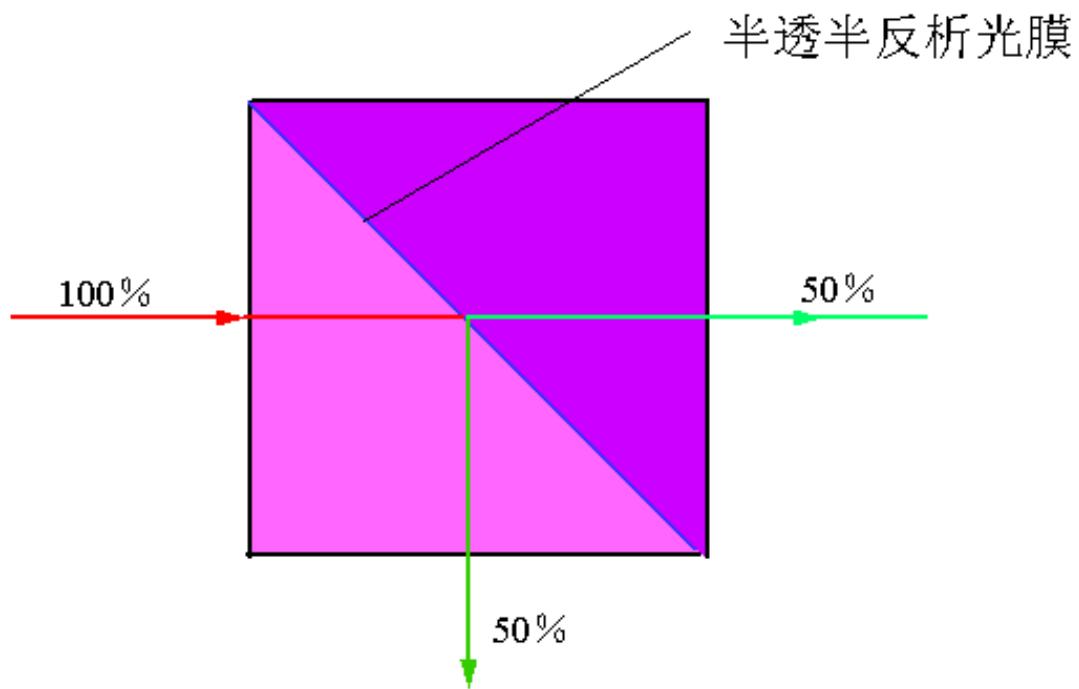
应用

- ① 立方角锥棱镜可以和激光测距仪配合使用。
- ② 还可用于激光谐振腔中，构成免调谐激光器。

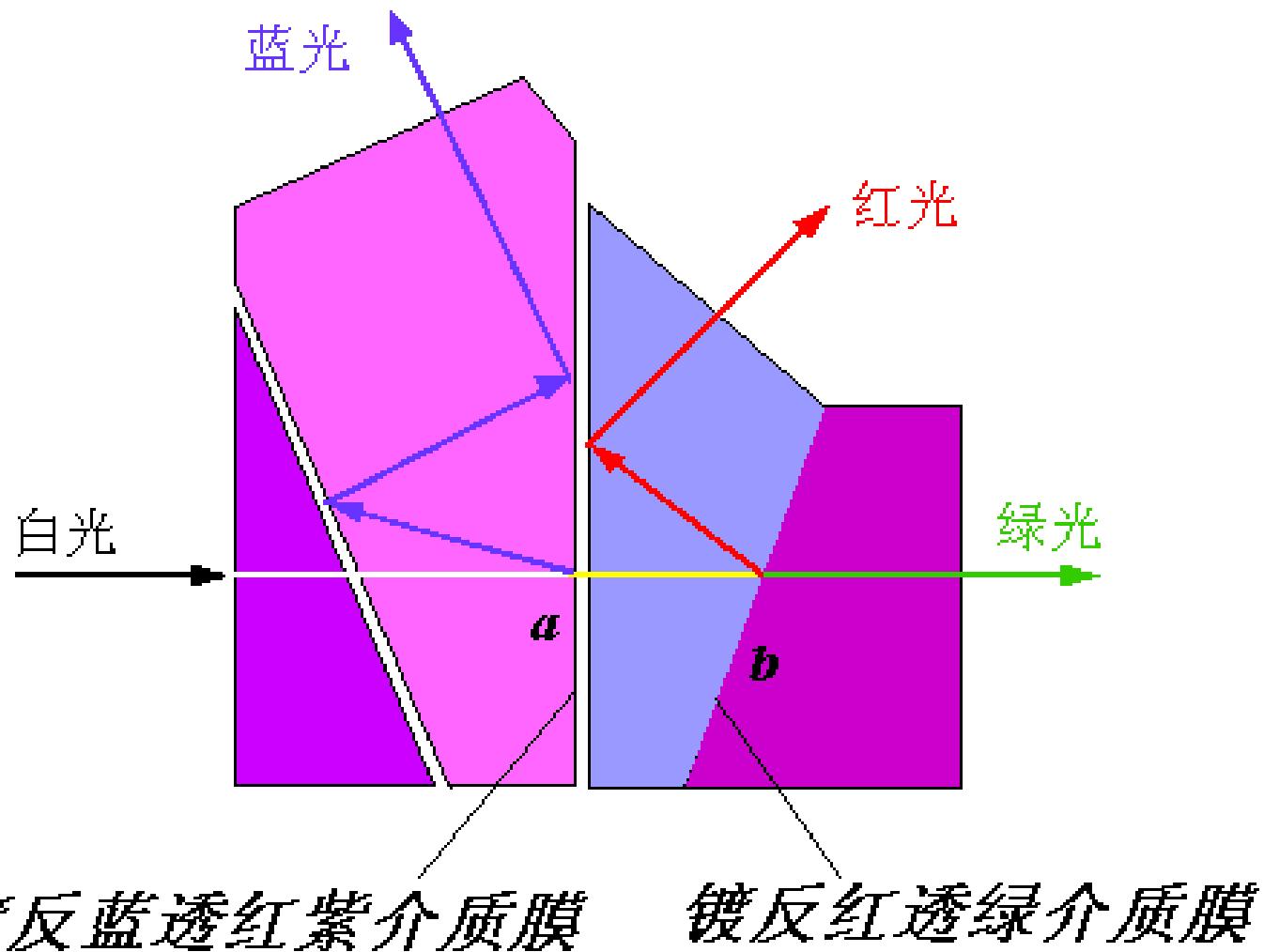
3.3.1.4 复合棱镜——棱镜的组合

两个以上的棱镜组合起来，可实现单个棱镜难以实现的特殊功能。

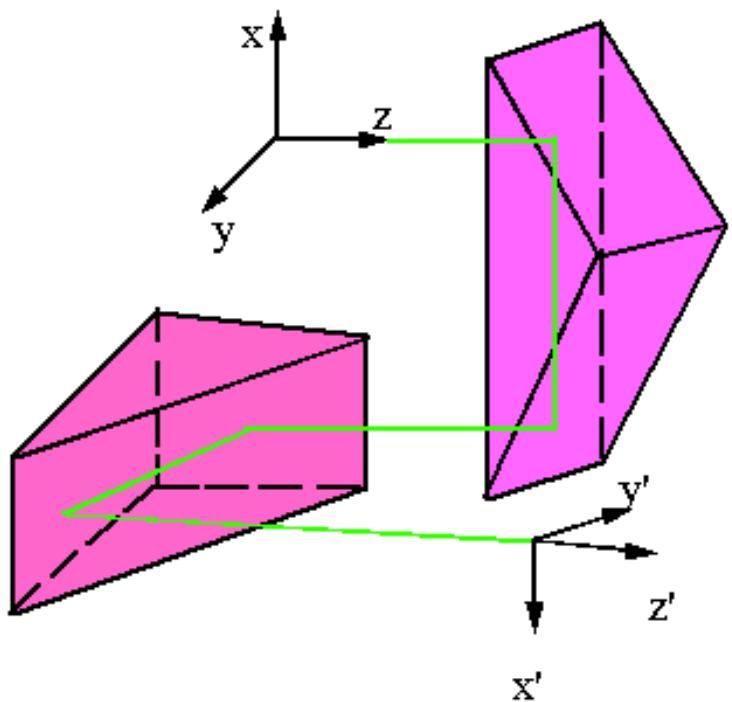
(A) 分光棱镜



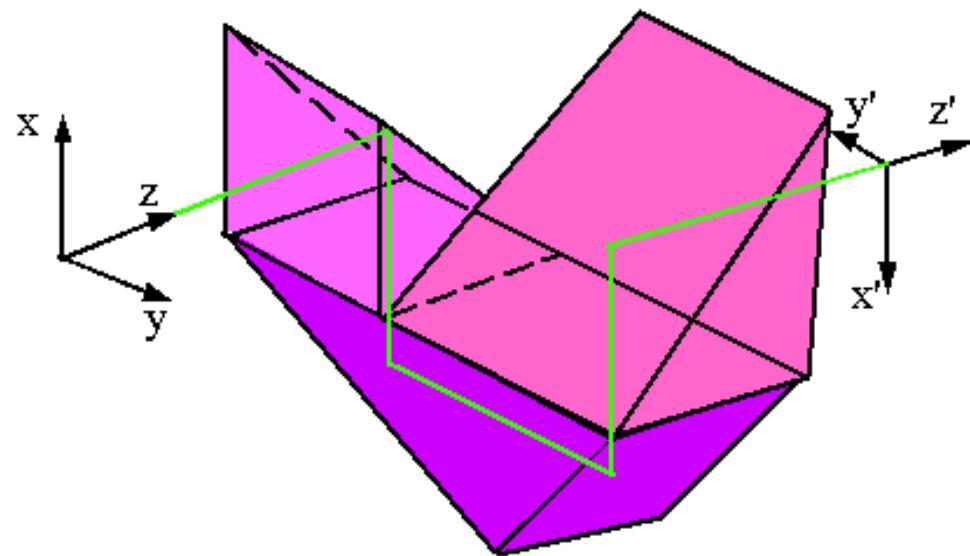
(B) 分色棱镜



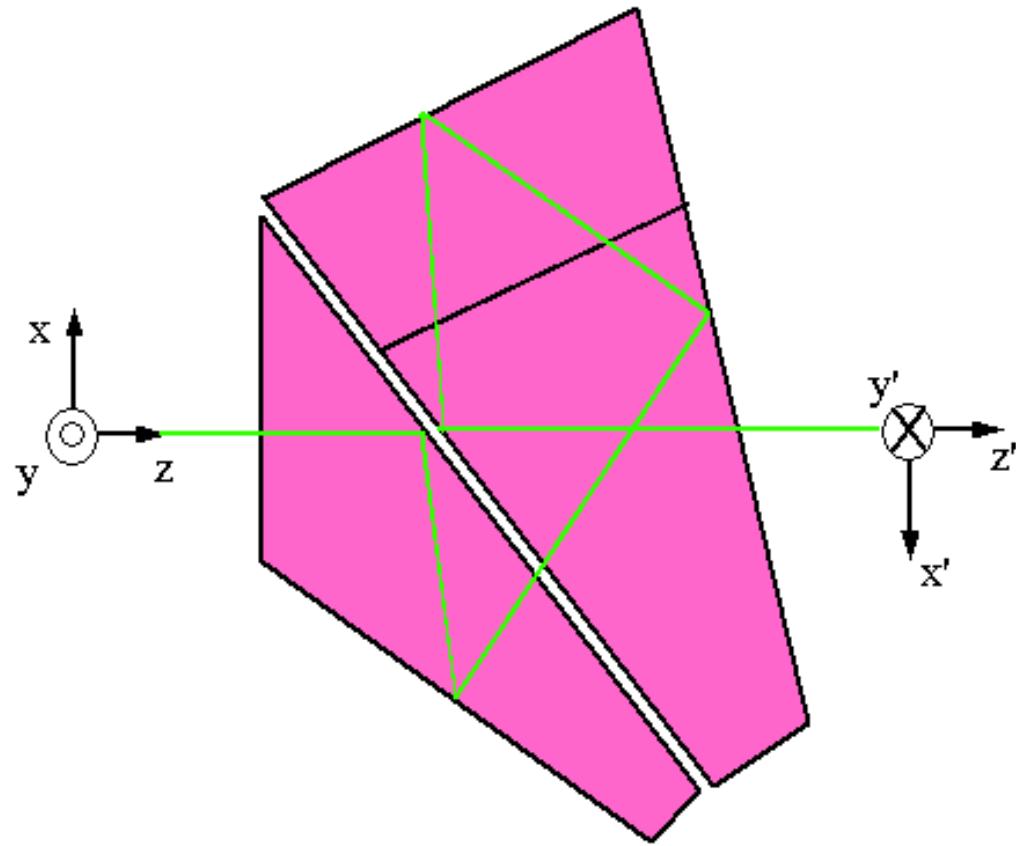
(C) 转像棱镜



a) 普罗I型转向棱镜



b) 普罗II型转向棱镜

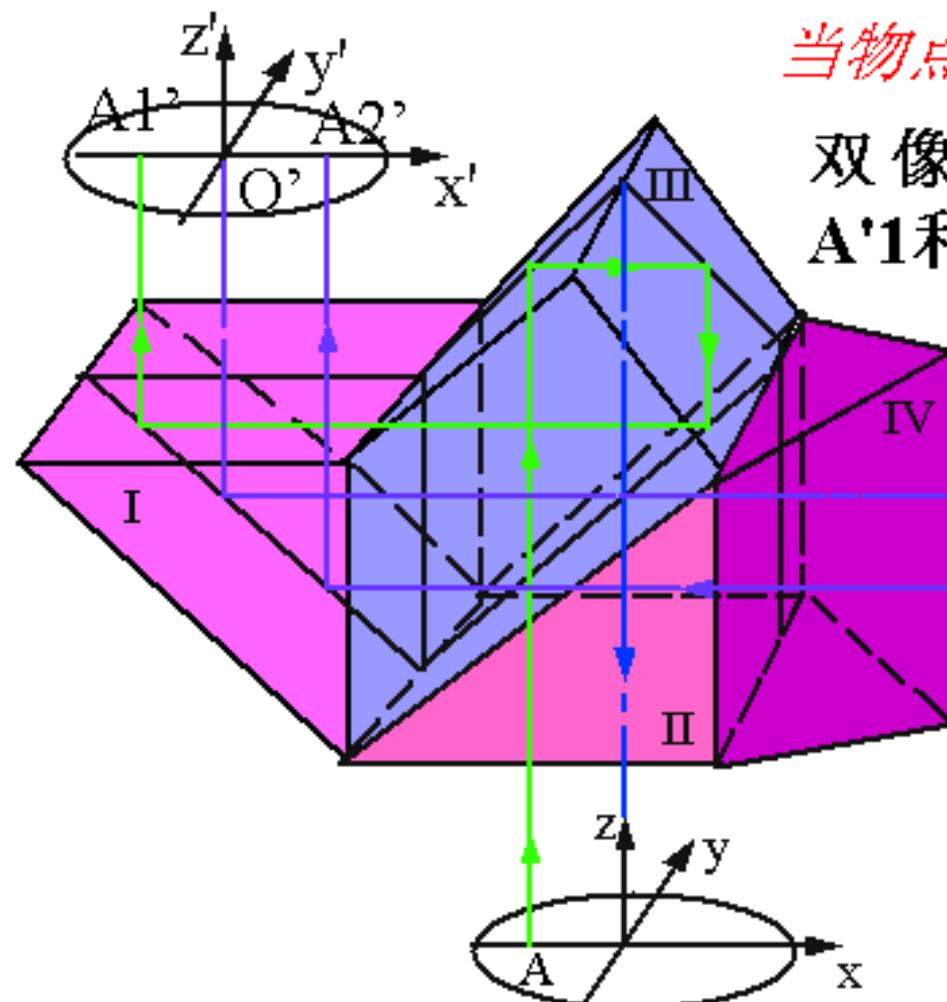


别汉棱镜

特性

出射光轴与入射光轴平行，实现完全倒像，并能在棱镜中折转很长的光路，可用于望远镜光学系统中实现倒像。

(D) 双像棱镜



当物点 A 移向光轴 O 时

双像棱镜输出的两个像
 $A'1$ 和 $A'2$ 重合在光轴 O' 上



应用

双像棱镜与目镜联用，构成**双像目镜**，用于对圆孔的瞄准很方便。

(E) 球面棱镜

球面棱镜——将球面甚至非球面加工在棱镜上，制成~。

特点

球面棱镜在满足**折转光路**和**转像**的同时，**实现一定的光焦度**，使整个光学系统结构尽可能简化或紧凑。

3.3.2 棱镜系统的成像方向判断

判断原则：（参见课本P47）

- ① $O'z'$ 坐标轴和光轴的出射方向一致。
- ② 垂直于主截面的坐标轴 $O'y'$ 视屋脊面的个数而定，若有奇数个屋脊面，则其像坐标轴方向与物坐标轴方向 Oy 方向相反；无屋脊面或有偶数个屋脊面，则像坐标轴与物坐标轴方向一致。

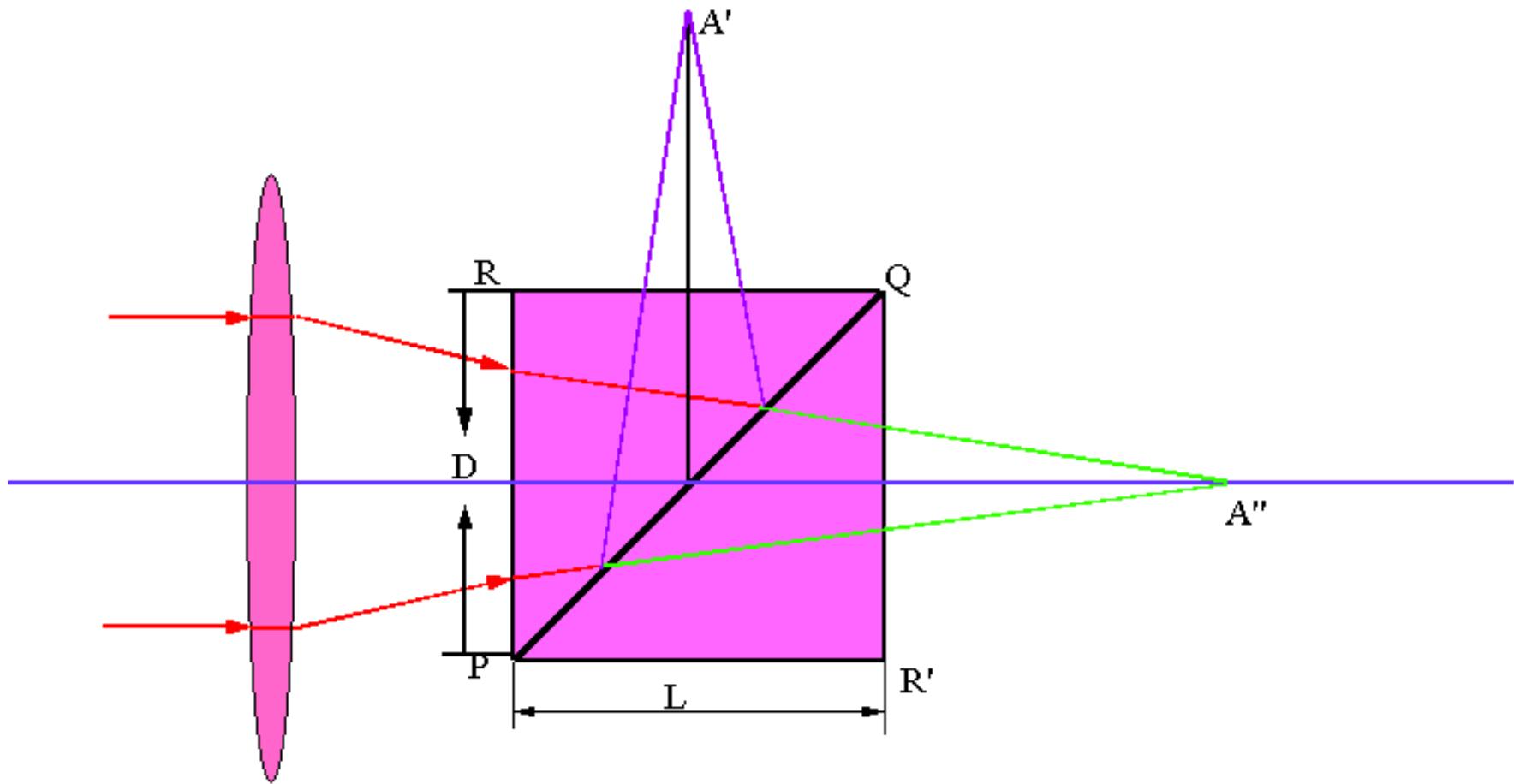
③ 平行于主截面的坐标轴 $O'x'$ 的方向视反射面的个数（屋脊面按两个反射面计算）而定。若物坐标系为右手坐标系，当反射面个数为偶数时， $O'x'$ 坐标轴按右手坐标系确定；而当反射面个数为奇数时， $O'x'$ 坐标轴按左手坐标系确定。

3.3.3 反射棱镜的等效作用与展开

反射棱镜由两个折射面和若干个反射面组成，主要起折转光路和转像作用，其作用相当于平面反射镜。

等效作用：如果不考虑棱镜反射面的作用，光线在两折射面间的光路可等效于一个平行平板。

3.3.3.1 棱镜的等效作用和展开方法



3.3.3.2 常见棱镜的展开

常见棱镜的展开过程、光轴长度与结构参数参
数参见课本P48-49表3-1

其中屋脊棱镜的展开具有特殊性。如果反
射棱镜的反射面被屋脊面所取代，将使原有口
径被切割；为确保棱镜的通光孔径，必须加大
棱镜的高度。实际光学系统中，常用复合棱镜
来取代屋脊棱镜以实现转像作用。

§ 3. 4 折射棱镜与光楔

3.4.0 几个概念

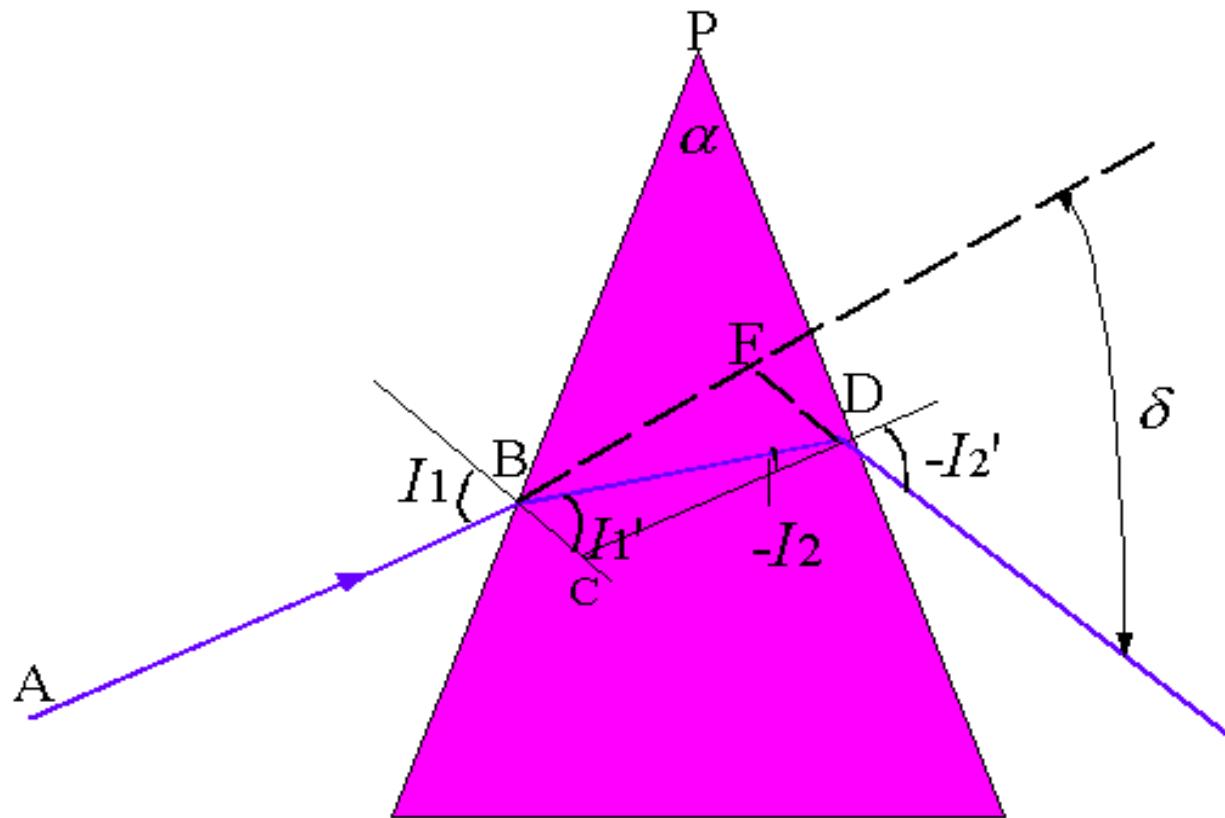
折射棱镜的**工作面**：两个折射面。

折射棱：两个折射面的交线。

折射角：两折射面间的二面角 α 。

主截面：垂直于折射棱的平面，称折射棱镜的~。

3.4.1 折射棱镜的偏向角



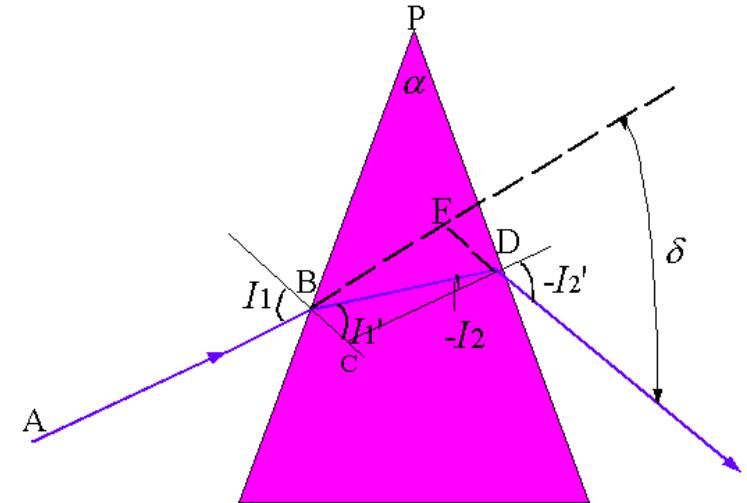
折射棱镜的工作原理

在两个折射面分别应用折射定律，有

$$\sin I_1 = n \sin I'_1$$

(3.4.1)

$$\sin I'_2 = n \sin I_2$$



将式相减，并利用和差化积公式，有

$$\sin \frac{1}{2}(I_1 - I'_2) \cos \frac{1}{2}(I_1 + I'_2) = n \sin \frac{1}{2}(I'_1 - I_2) \cos \frac{1}{2}(I'_1 + I_2)$$

(3.4.2)

在 $\triangle ABCD$ 中，有 $\alpha = I'_1 - I_2$ (3.4.3)

在 $\triangle ABFD$ 中，有

$$\begin{aligned}\delta &= \angle FBD + \angle FDB \\&= (I_1 - I'_1) + (I_2 - I'_2) \\&= I_1 - I'_2 - \alpha\end{aligned}$$

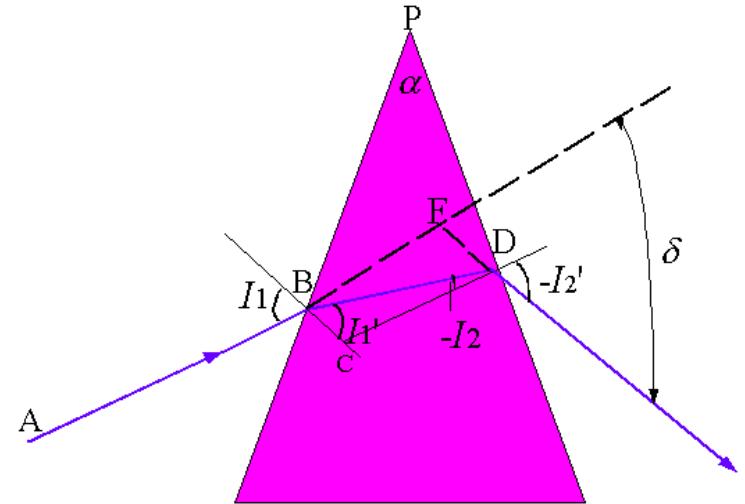


$$\alpha + \delta = I_1 - I'_2$$

(3.4.4)

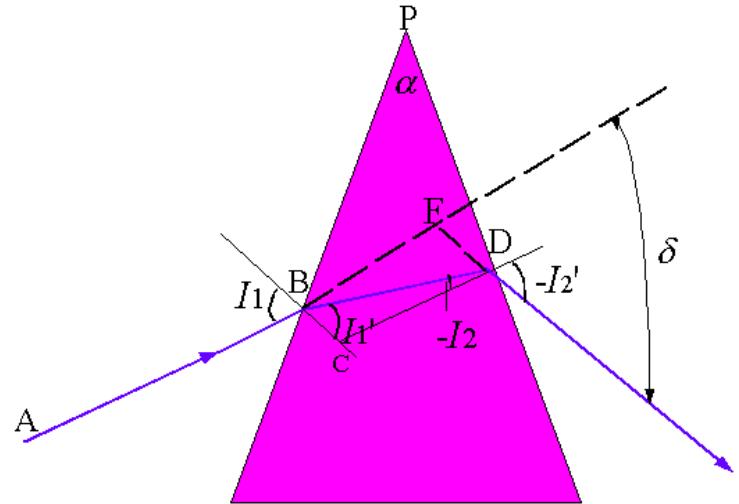
代入前式 (3.4.2) 得

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \delta) = n \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{1}{2}(I'_1 + I'_2)}{\cos \frac{1}{2}(I_1 + I'_2)} \quad (3.4.5)$$



式 (3.4.4) 对 I_1 微分得

$$\frac{d\delta}{dI_1} = 1 - \frac{dI_2'}{dI_1} \quad (3.4.6)$$



对式 (3.4.1) 两边分别求微分得

$$\cos I_1 dI_1 = n \cos I_1' dI_1' \quad (3.4.7)$$

$$\cos I_2' dI_2' = n \cos I_2 dI_2$$

对式 (3.4.3) 微分代入上式，并将两式相除得

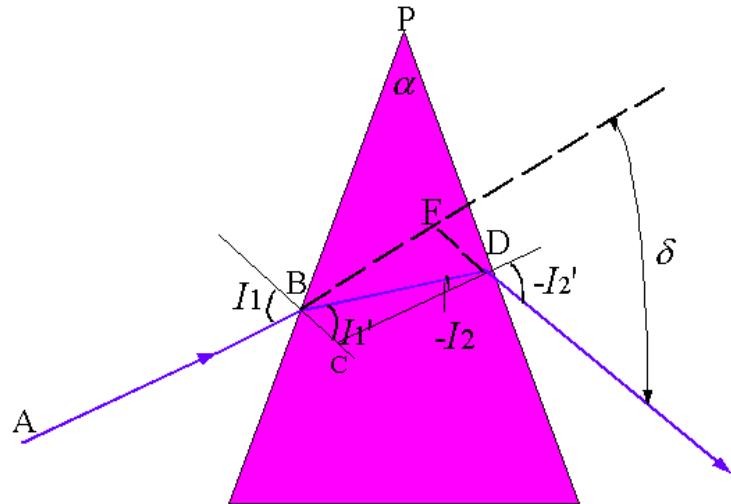
$$\frac{dI'_2}{dI_1} = \frac{\cos I_1 \cos I_2}{\cos I'_1 \cos I'_2} \quad (3.4.8)$$

令 $\frac{d\delta}{dI_1} = 0$

(3.4.6) 式可得 $\frac{dI'_2}{dI_1} = 1$ 代入 (3.4.8) 式可得

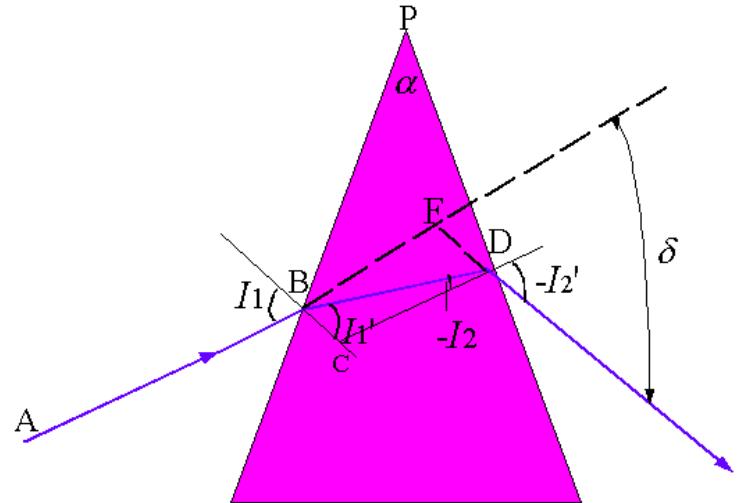
折射棱镜偏向角取得极值时必须满足以下条件：

$$\frac{\cos I_1}{\cos I'_1} = \frac{\cos I'_2}{\cos I_2} \quad (3.4.9)$$



由 (3.4.1) 式可得

$$\frac{\sin I_1}{\sin I_1'} = \frac{\sin I_2'}{\sin I_2} = n \quad (3.4.10)$$



欲使 (3.4.9) 和 (3.4.10) 式同时成立须满足

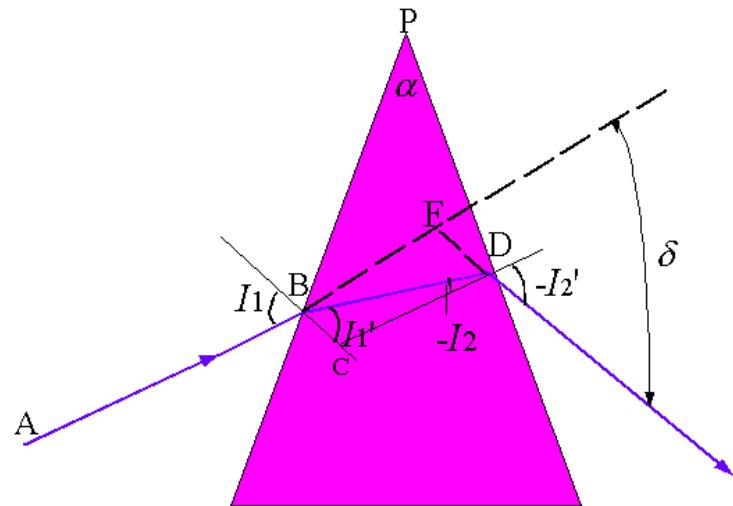
$$I_1 = -I_2' \quad I_1' = -I_2 \quad (3.4.11)$$

可以证明，此时 $\frac{d^2\delta}{dI_1^2} > 0$ 即偏向角 δ 取极小值。

显然，光线光路对称于折射棱镜时，偏向角取最小值。

将 (3.4.11) 代入 (3.4.5) 式，
得折射棱镜**最小偏向角**的表达
式为：

$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta_m) = n \sin \frac{\alpha}{2}$$



(3.4.12)

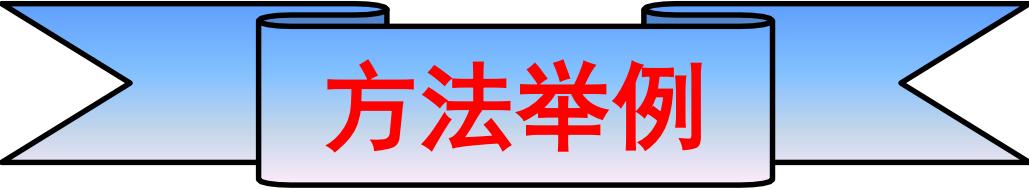
应用

实际应用中，常通过测量折射棱镜的**最小偏向角**
的方法来测量玻璃的**折射率**。

思考

请思考并总结一下, 有几种方法可以实现
对块体透明材料折射率的测量? 原理如何?





方法举例

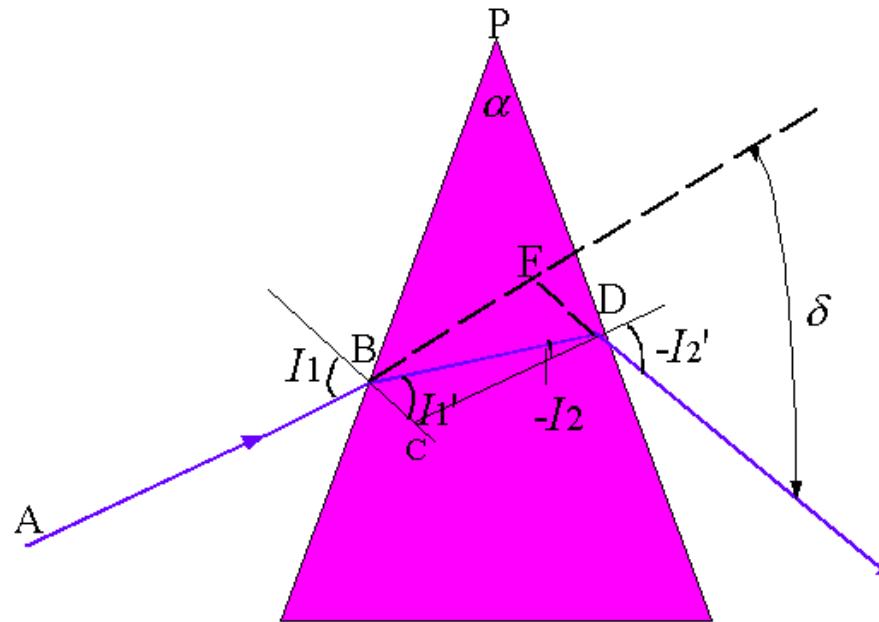
- (1) 最小偏向角法
- (2) 自准直法
- (3) V棱镜法
- (4) 阿贝法
- (5) 光焦法
- (6) 油浸法（浸液法）



方法举例

- (7) 棱镜耦合法
- (8) 光栅耦合法
- (9) 布鲁斯特角法
- (10) 椭圆偏振光谱法
- (11) 干涉法
- (12) 其它...

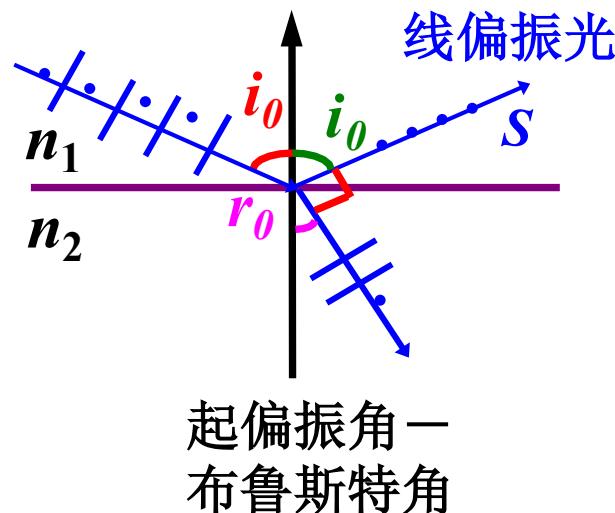
(1) 最小偏向角法



$$\sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta_m) = n \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3.4.12)$$

(9) 布鲁斯特角法

- 自然光以某一特定角度 i_0 入射到两种介质的界面时，反射光是振动面与入射面垂直的线偏振光， i_0 称为**起偏振角**或**布儒斯特角**。



布鲁斯特定律 (1812年)

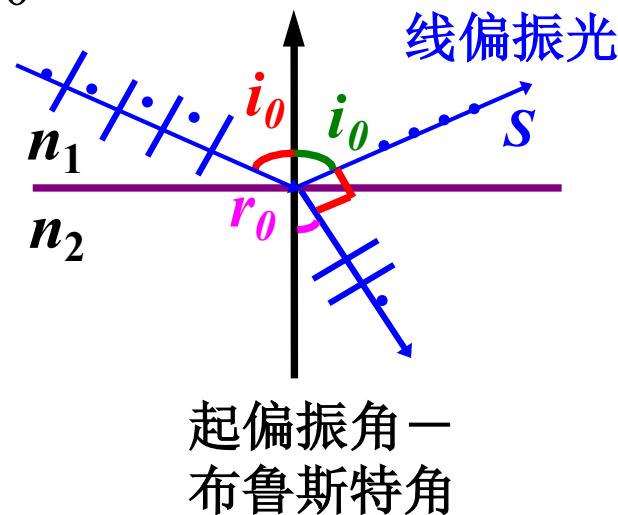
- 1. 定律的描述:
 - (1) 反射光为部分偏振光, S 光矢量占优;
 - (2) 折射光为部分偏振光, P 光矢量占优;
 - (3) 当入射角为布鲁斯特角 i_0 时, 反射光变为 S 偏振光, 且反射光与折射光相互垂直。

此时 i_0 满足关系式: $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$

- 称此为**布鲁斯特定律**。

- 2. 讨论:
- (1) 当入射角 $i = i_0$ 时,
- 由折射定律: $n_1 \sin i_0 = n_2 \sin r_0$
- 与布鲁斯特定律比较得,

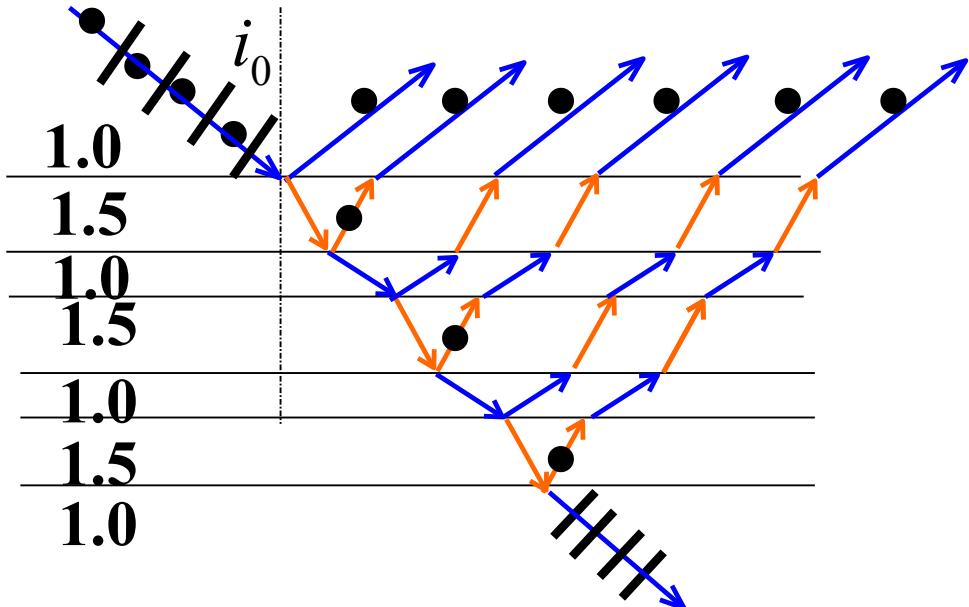
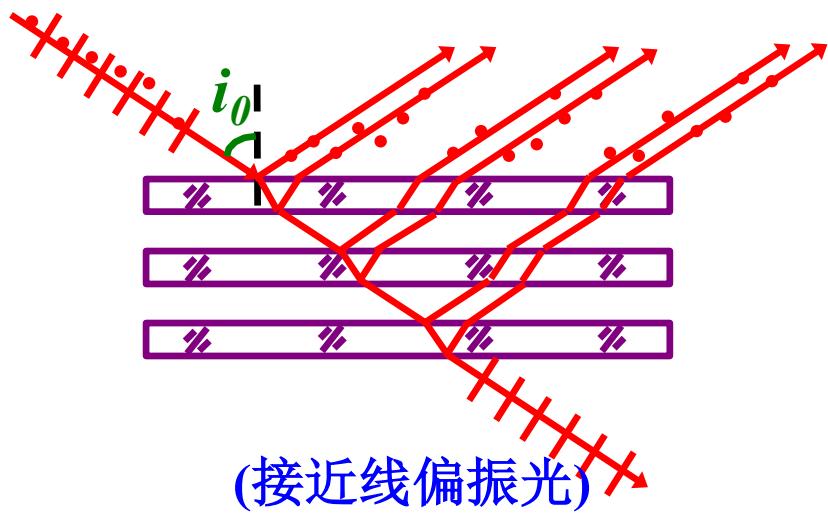
$$\cos i_0 = \sin r_0$$
- 则
$$i_0 + r_0 = \pi/2$$
- 可见, 反射光与折射光相互垂直。



- (2) 若 $n_1 = 1.00$ (空气), $n_2 = 1.50$ (玻璃), 则:

$$\left. \begin{array}{l} \text{空气} \rightarrow \text{玻璃}, \quad i_0 = \tan^{-1} \frac{1.50}{1.00} = 56.3^\circ \\ \text{玻璃} \rightarrow \text{空气}, \quad i_0 = \tan^{-1} \frac{1.00}{1.50} = 33.7^\circ \end{array} \right\} \text{互余}$$

- **实验表明:** 反射所获得的线偏光仅占入射自然光总能量的**7.4%**, 而约占**85%**的垂直分量和**全部**平行分量都折射到玻璃。



- 为增加折射光的偏振化程度，可采用玻璃片堆的办法。一束自然光以起偏角 56.3° 入射到20层平板玻璃上，若在玻璃片下表面处的反射，其入射角 33.7° 也正是光从玻璃射向空气的起偏振角，则反射光仍是垂直于入射面振动的偏振光。

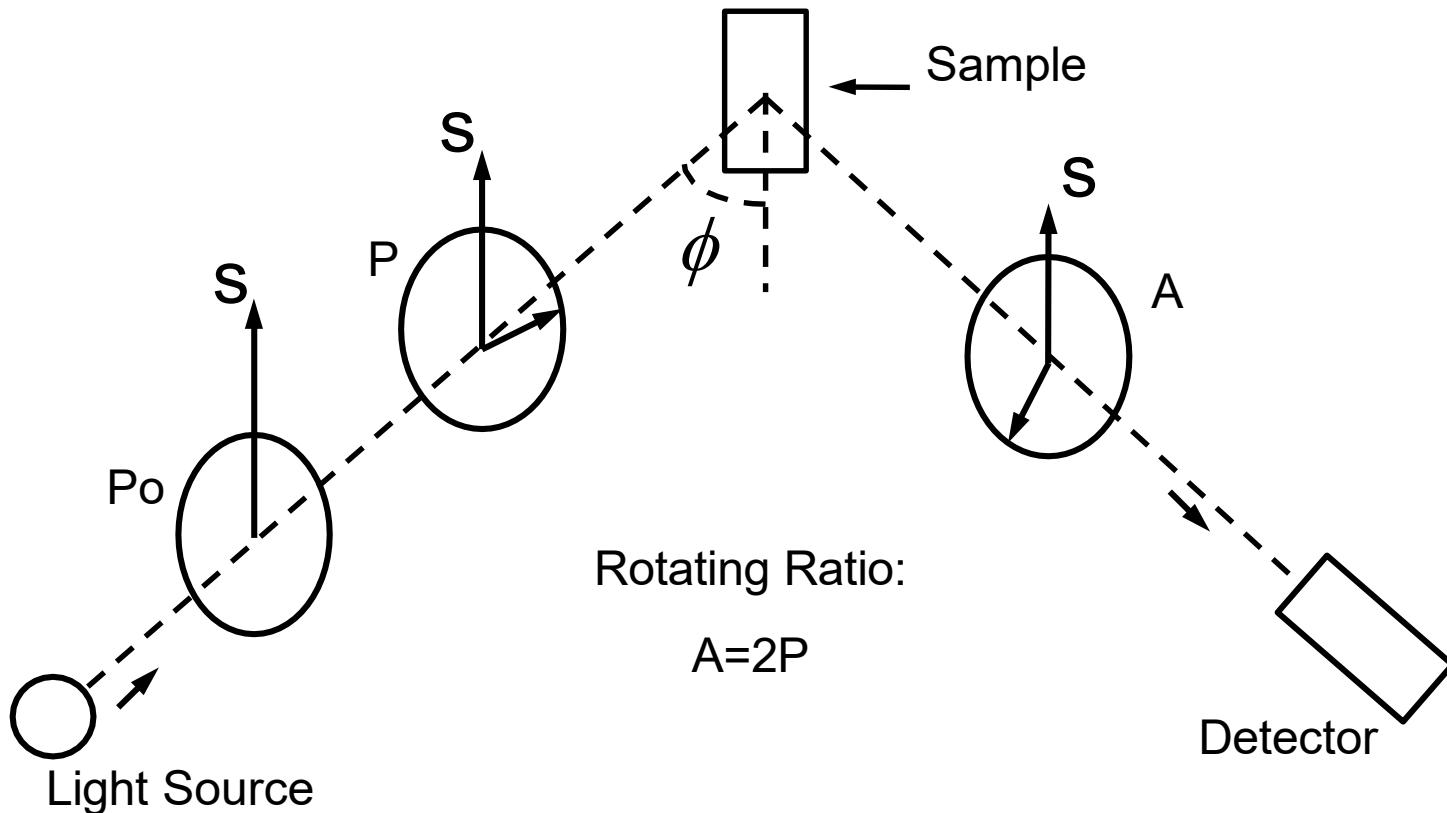
- 【例题】已知某材料在空气中的布儒斯特角 i_0 为 58^0 ，求它的折射率？若将它放在水中（水的折射率为1.33），求布儒斯特角？该材料对水的相对折射率是多少？

- 【解】设该材料的折射率为 n , 空气的折射率为1。根据布鲁斯特定律得,

$$\tan i_0 = \frac{n}{1} = \tan 58^0 \approx 1.60$$

- 若放在水中, 则有 $\tan i_{\text{水}} = \frac{n}{n_{\text{水}}} = \frac{1.60}{1.33} \approx 1.20$
- 所以, $i_{\text{水}} \approx 50.2^0$
- 该材料对水的相对折射率为1.20。

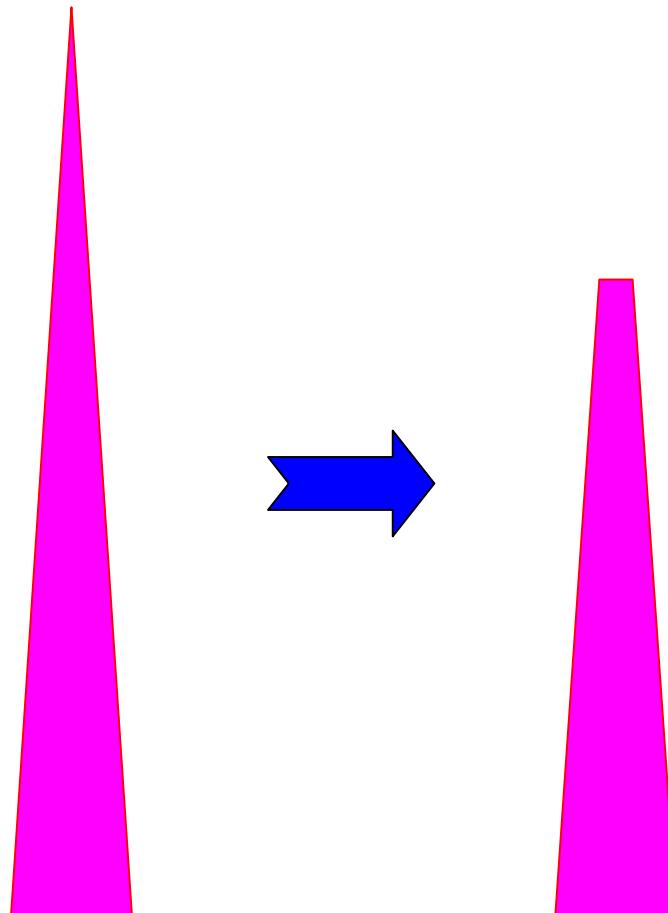
(10) 椭圆偏振光谱法



RAP型动态光度式椭偏仪原理图

3.4.2 光楔及其应用

光楔: 折射角很小的棱镜称为~。

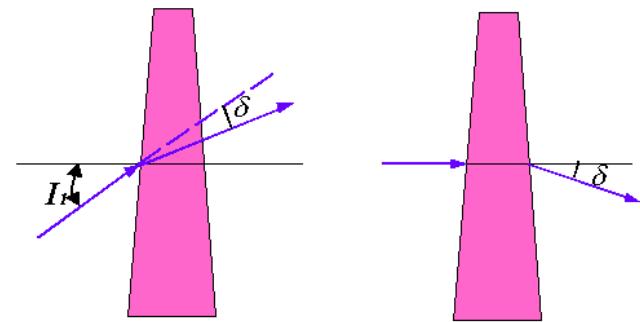


由于折射角很小，其偏向角公式可大为简化。

当 I_1 为有限大小时，因 α 很小，**可近似看作平行平板**，

则有 $I_1' \approx I_2$, $I_1 \approx I_2'$ ，代入(3.4.5)式，并用 α 和 δ 的弧度代替正弦值，得

$$\delta = \left(n \frac{\cos I_1'}{\cos I_1} - 1 \right) \alpha \quad (3.4.13)$$



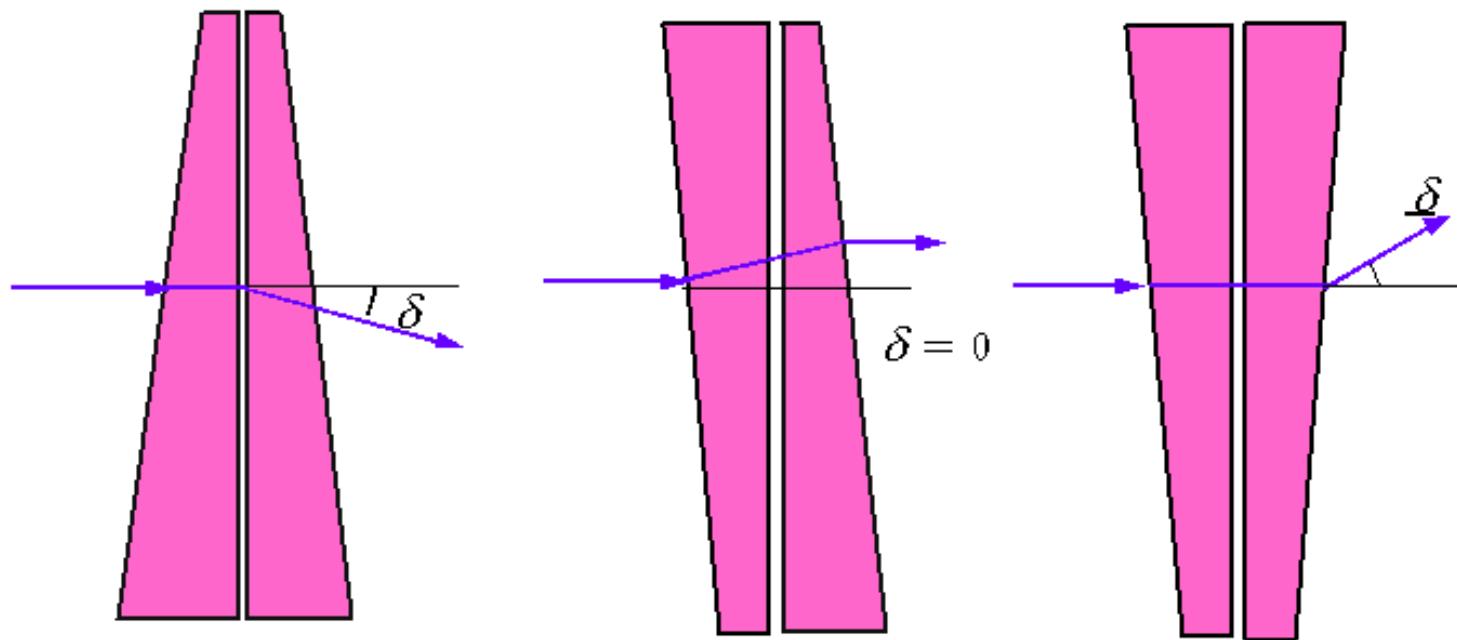
当 I_1 很小时， I_1' 也很小，则上式的余弦可用1代替，有 $\delta = (n - 1)\alpha$ (3.4.14)

显然：当光线垂直入射或接近垂直入射时，所产生的**偏向角**仅由光楔的**楔角** α 和**折射率** n 决定。



光楔在**小角度**和**微位移**测量中有着重要的应用。

① 双光楔测量微小角度。



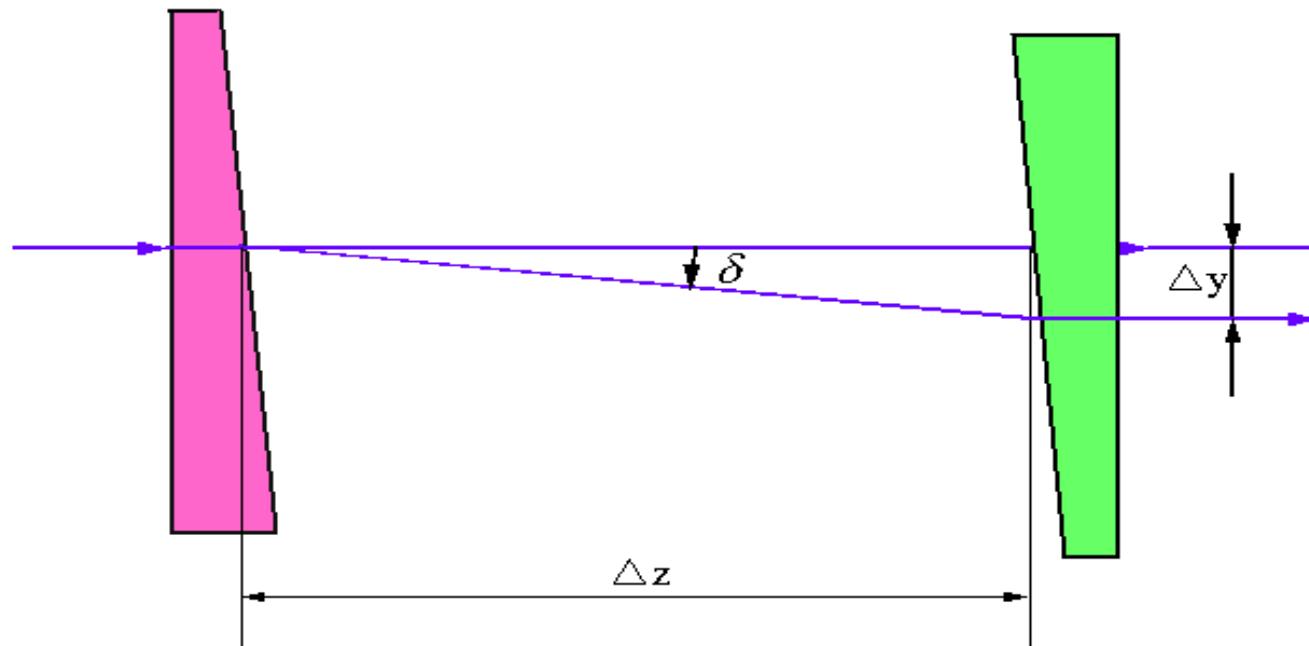
a) 主截面平行同向放置，产生偏向角最大。

b) 一光楔绕光轴转 180° 产生偏向角为0。

c) 两光楔绕光轴相对转 φ 角。

$$\delta = 2(n - 1)\alpha \cos \varphi$$

② 双光楔移动测微系统



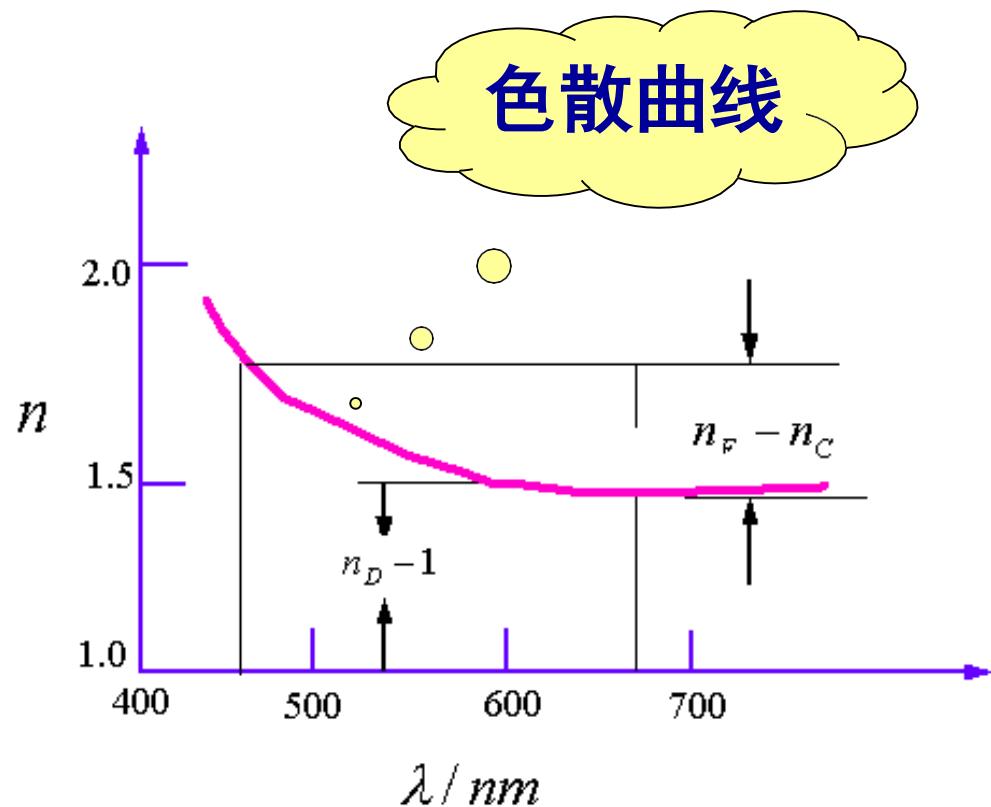
当两光楔沿**轴向**相对移动时，出射光线
相对于入射光线在**垂直方向**产生的**平移**为

$$\Delta y = \Delta z \delta = (n - 1) \alpha \Delta z$$

3.4.3 棱镜色散

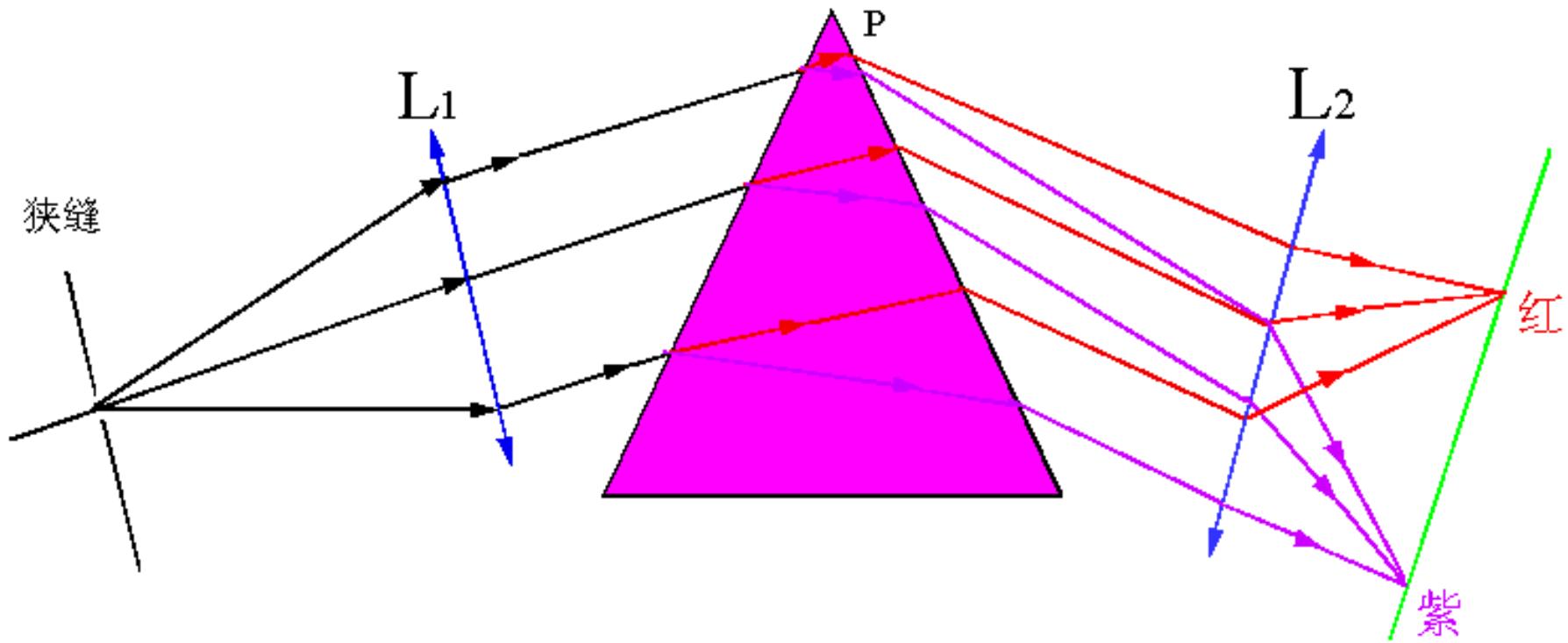
色散: 不同频率的光波在透明介质中传播时的速度不同且偏向的现象称为~。

由上节内容可知，以同一角度入射到折射棱镜上的**不同波长**的单色光，将有**不同的偏向角**。



光学上，常用**夫琅和费谱线**作为特征谱线。

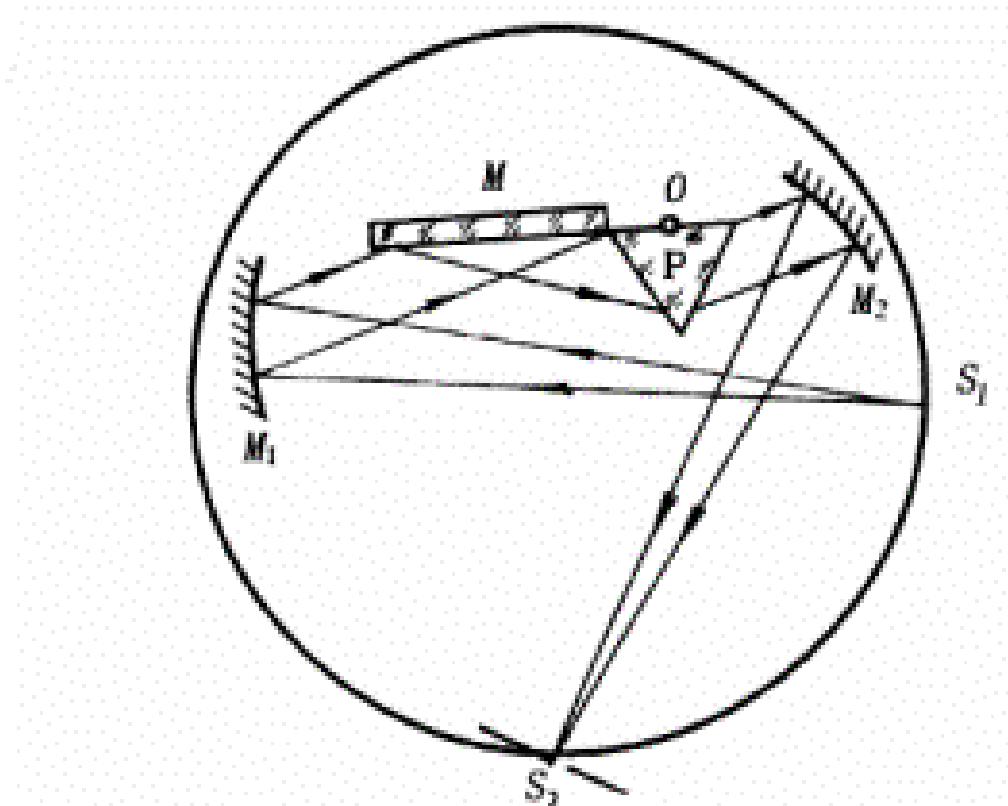
谱线符号	红外	A'	b	C	C'	D	d	e	F	g	G'	h	紫外
颜色		红		橙	黄		绿	青		蓝	紫		
波长 nm	>770.0	766.5	709.5	656.3	643.9	589.3	587.6	546.1	486.1	435.8	434.1	404.7	<400.0
对应元素		K	He	H	Cd	Na	He	Hg	H	Hg	H	Hg	



折射棱镜的主要作用之一就是利用其色散特性做成分光元件，制成各种分光光谱仪。

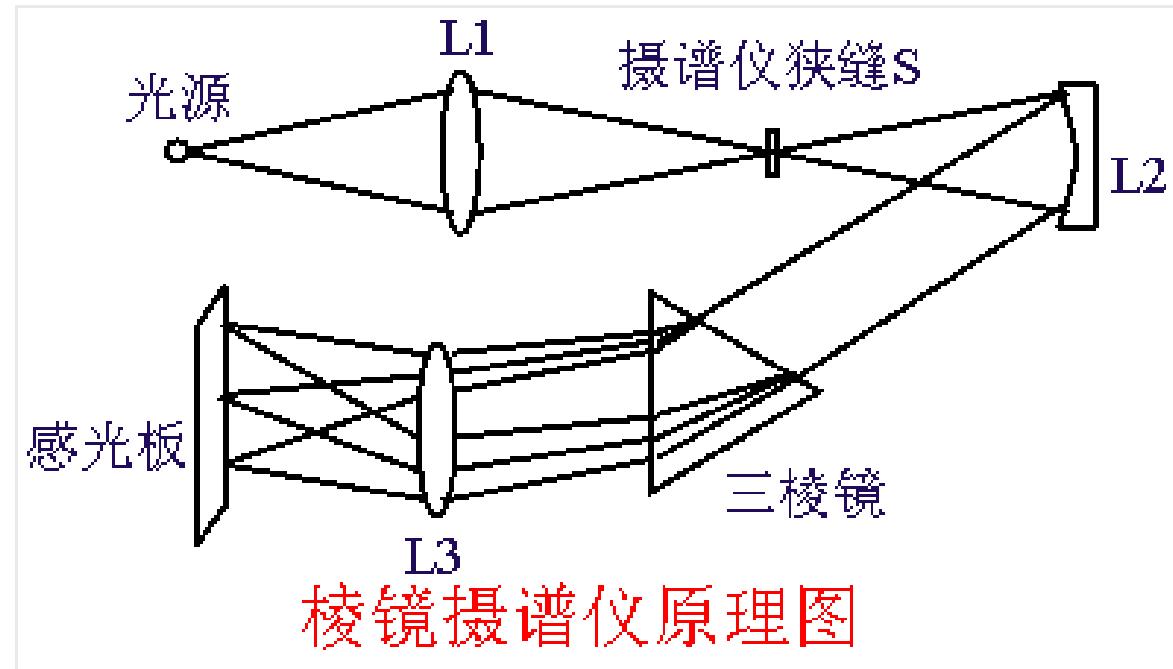
举例

1. 棱镜单色仪



举例

2. 棱镜摄谱仪



- 课后作业：
- P55-56

第3章 习题2, 4, 10题

《工程光学》

上篇

第4章

光学系统中的光束限制 I



前面讨论了... ...

理想光学系统的物像关系... ...

实际光学系统有所不同，其参与成像的光束宽度和成像范围都有限，其限制来自于光学零件的尺寸大小。这是在实际光学设计中不可忽视的问题。

本章概要

- 本章讲述了光阑的类型、作用和相关的术语。以几种典型系统的简化模型为例分析成像光束的选择，并通过对这些具体系统的分析来掌握合理选择成像光束的一般原则。

第4章 光学系统中的光束限制

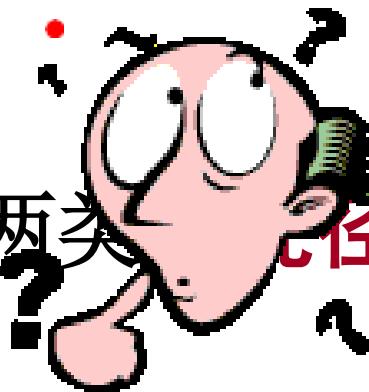
- § 4.1 光阑
- § 4.2 照相系统中的光阑
- § 4.3 望远镜系统中成像光束的选择
- § 4.4 显微镜系统中的光束限制与分析
- § 4.5 光学系统的景深

§ 4.1 光阑

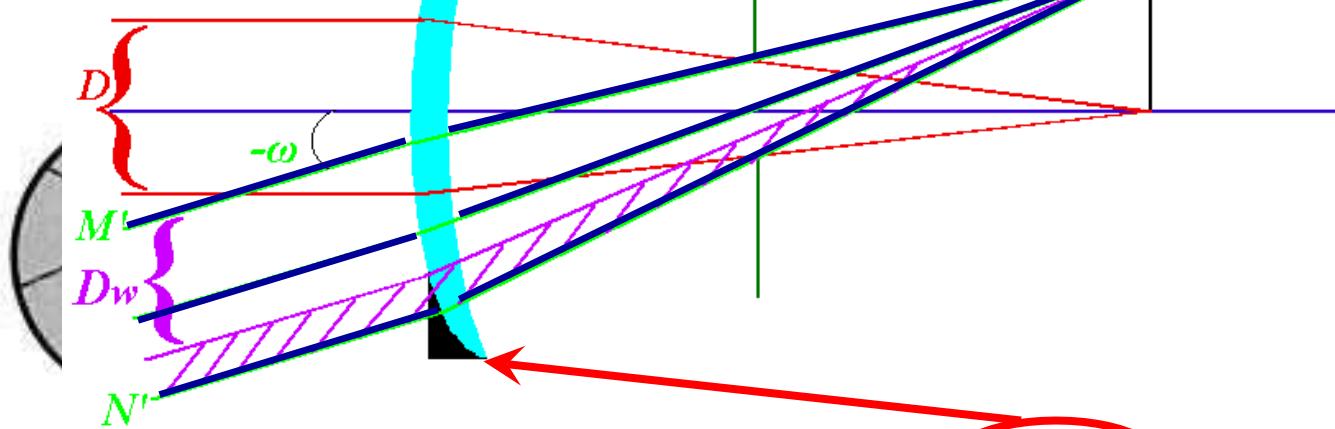
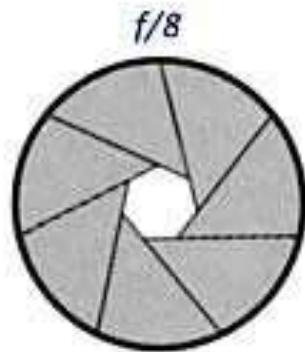
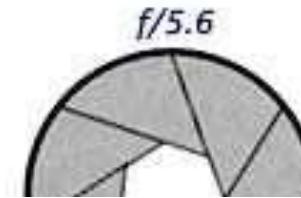
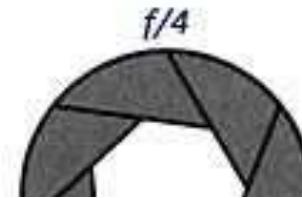
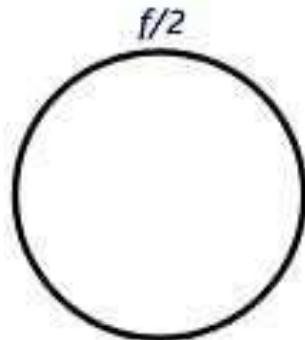
4.1.0 光阑的概念与分类

光阑: 光学系统中限制光束和成像范围的装置被称为~。

光阑主要有两类: **光径光阑** 和 **视场光阑**。



举例



透镜的边框起到“拦光”的作用(即渐晕光阑)

$$\text{渐晕系数: } K = \frac{D_w}{D}$$

4.1.1 孔径光阑

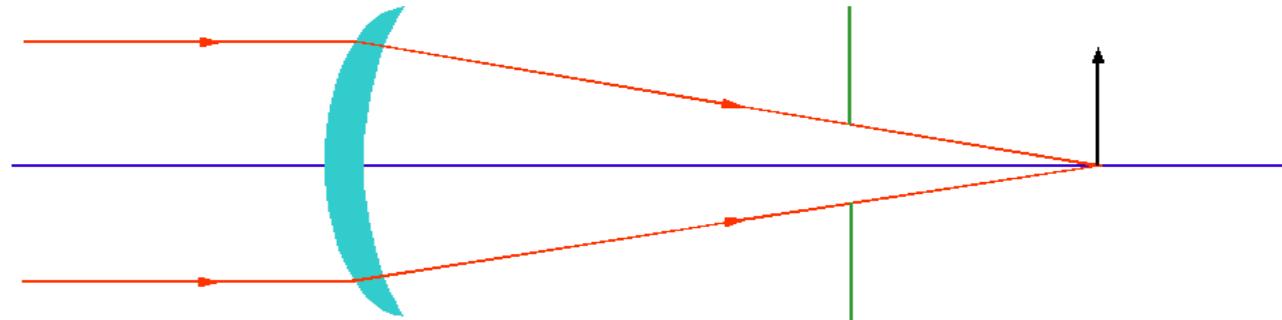
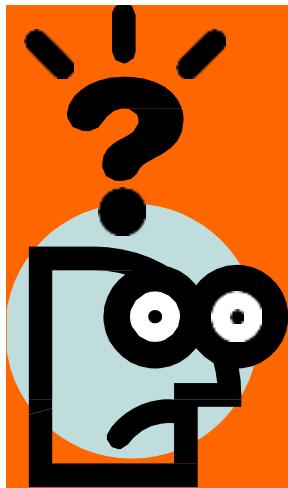
4.1.1.1 孔径光阑的定义与作用

孔径光阑：限制轴上物点**孔径角**大小的圆片称为~。

更严格地讲，限制**轴上**物点孔径角大小，或限制轴上物点成像光束宽度、并有选择**轴外**物点成像光束位置作用的光阑称为**孔径光阑**。

讨论

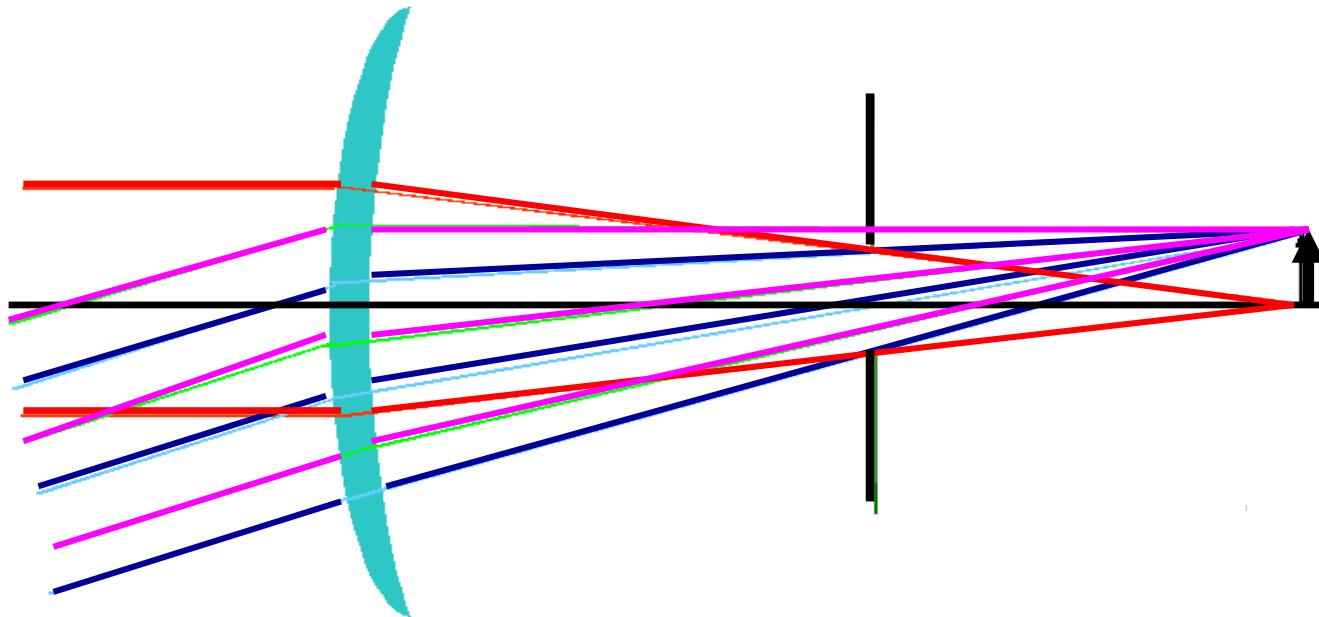
① 对于**轴上物点**，仅就限制孔径角大小的作用来说，孔径光阑置于**透镜前**、与**透镜框密接**或**置于透镜后**，三者对轴上物点**成像的位置**的限制作用**没有区别**。



就限制轴上点的光束宽度而言，
孔径光阑处于什么位置，成像并没有区别

讨论

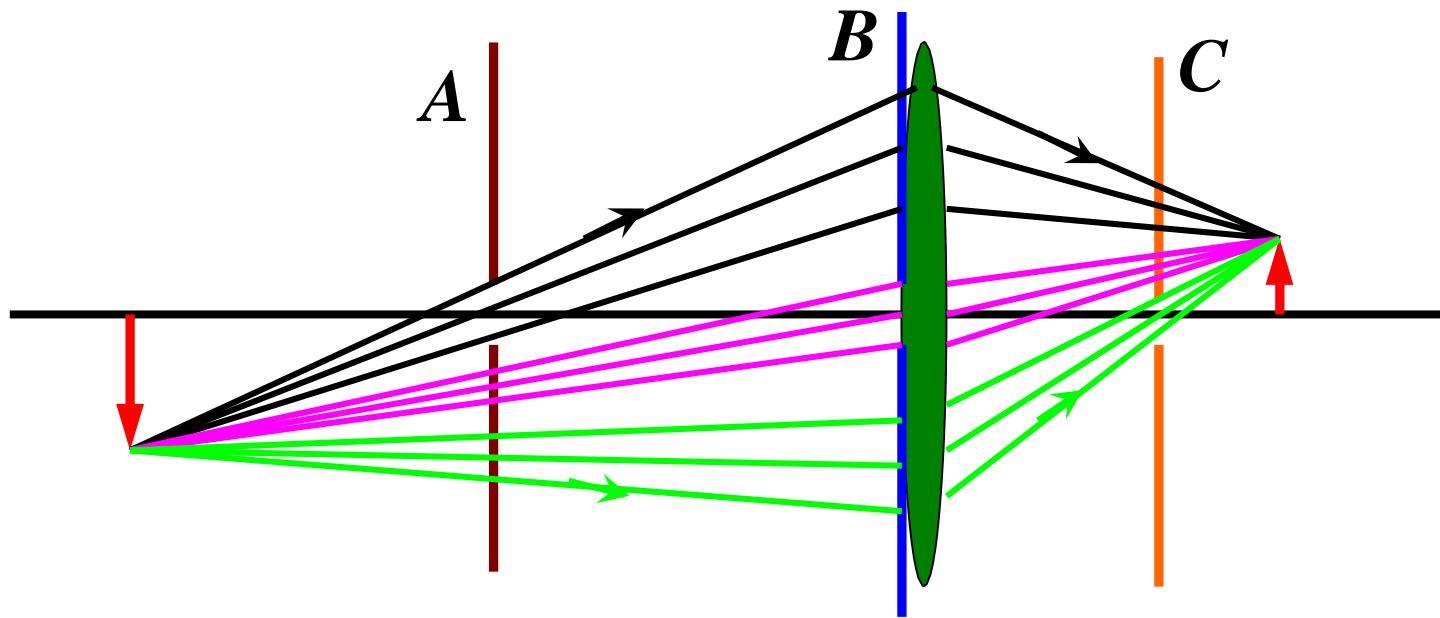
- ② 对于**轴外物点**，孔径光阑的位置不同，轴外物点参与**成像的光束位置就不同**。



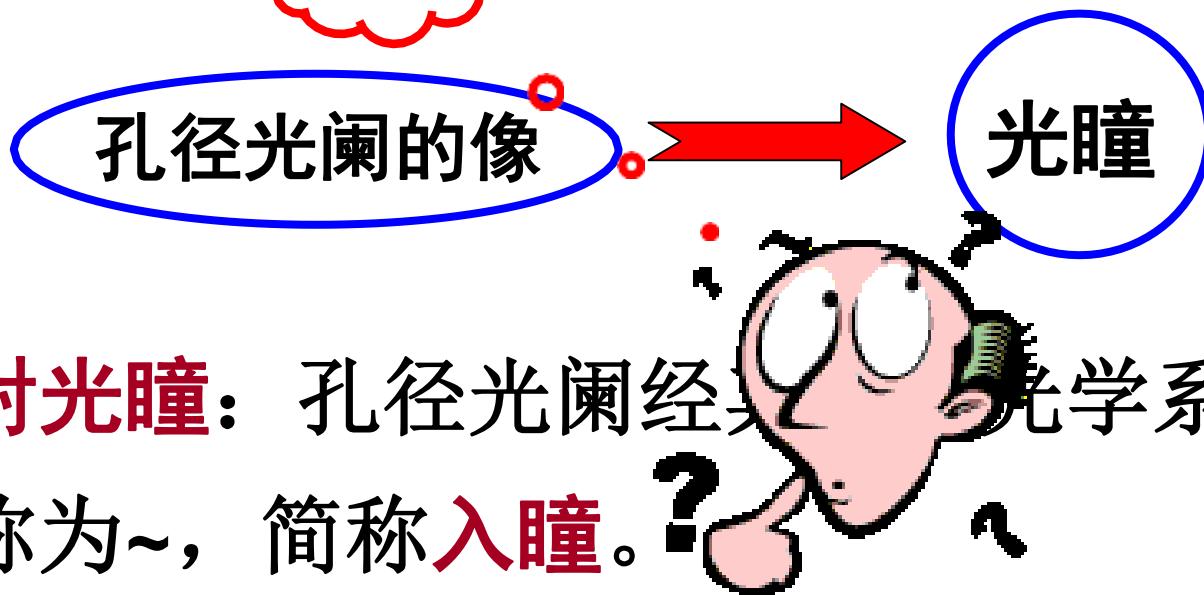
就限制轴外点的光束宽度而言，
孔径光阑位置对成像产生较大影响

讨论

③ 孔径光阑的位置不同，轴外物点发出并参与成像的光束通过透镜的部位就不同。

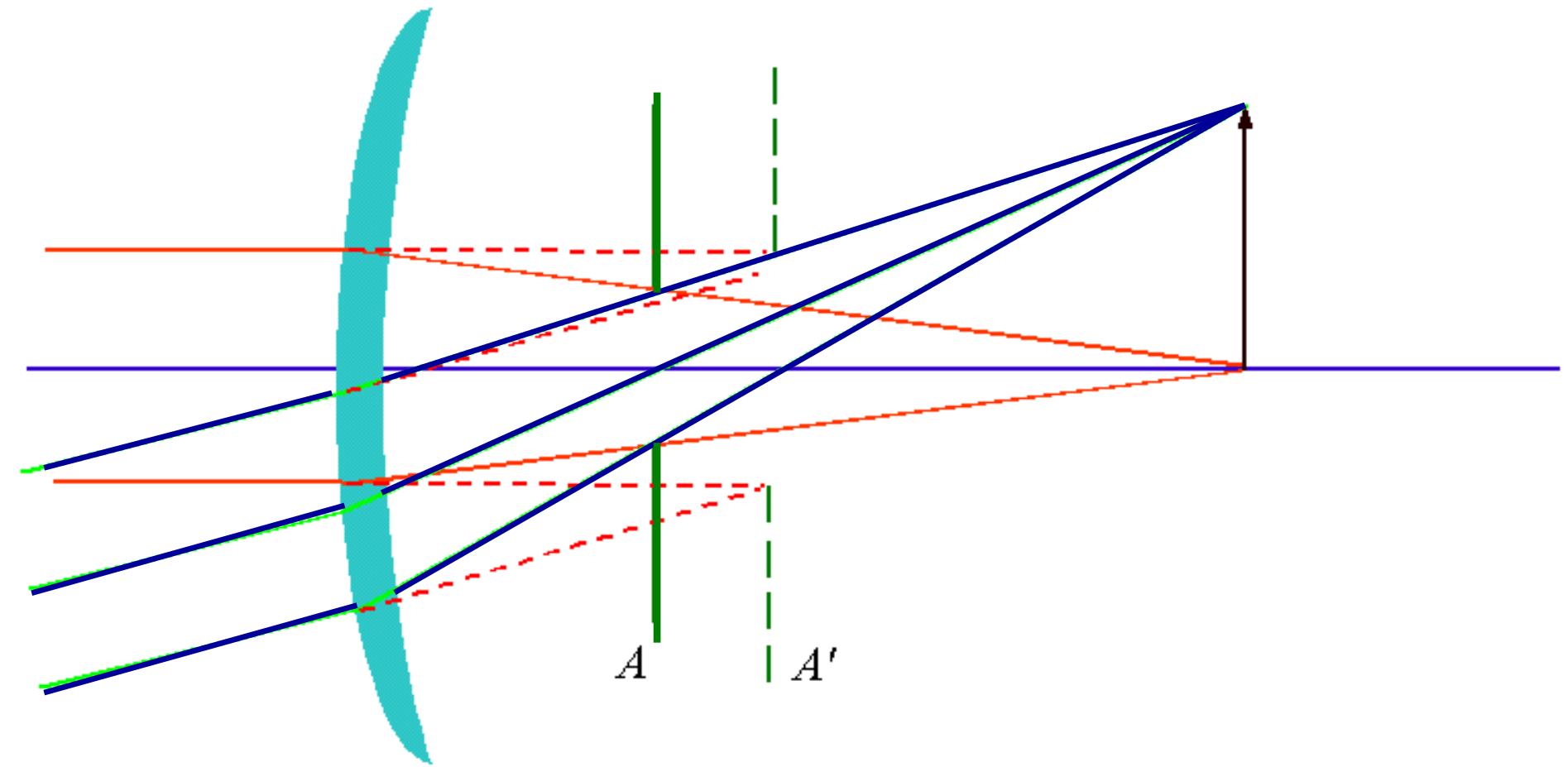


4.1.1.2 入射光瞳和出射光瞳



入射光瞳：孔径光阑经其前面光学系统所成的像称为~，简称**入瞳**。

出射光瞳：孔径光阑经其后面光学系统所成的像称为~，简称**出瞳**。



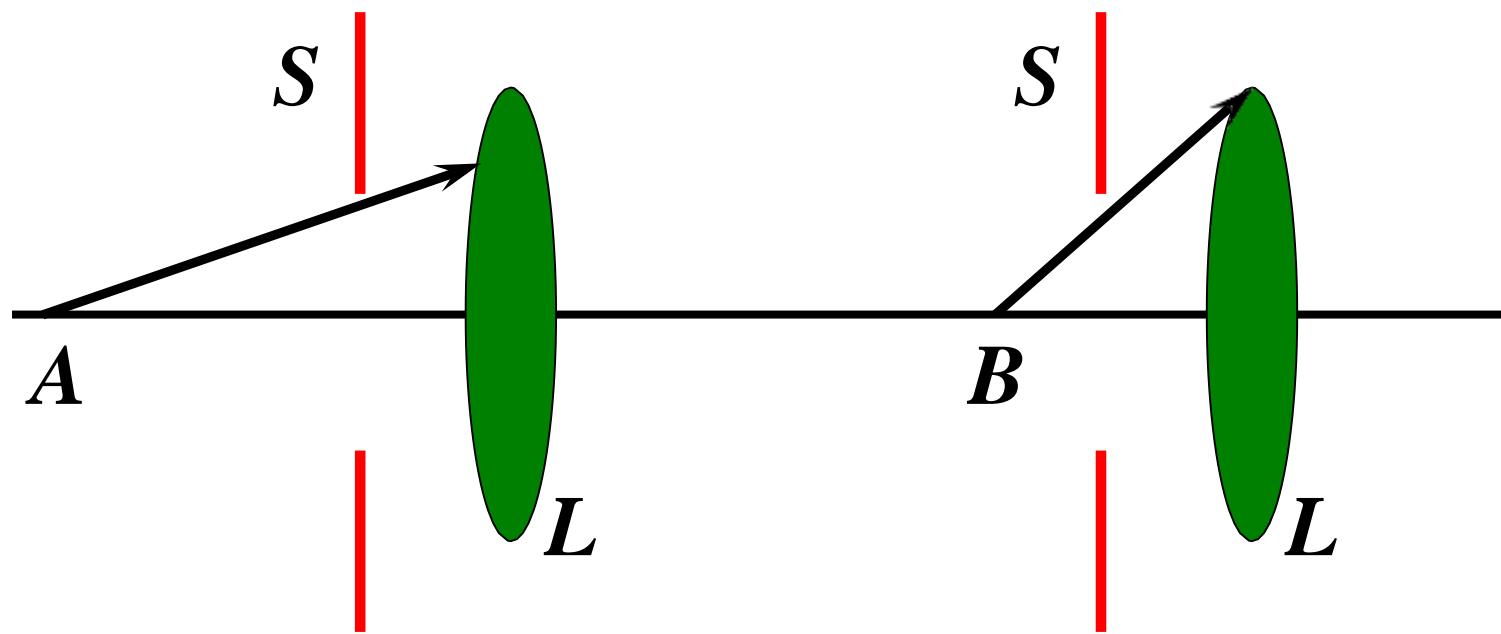
孔径光阑与入瞳

小结

- ① 孔径光阑在光学系统的**最前面**，系统的入瞳与孔径光阑重合，孔径光阑本身即是**入瞳**。
- ② 孔径光阑**置于光学系统上**（与透镜框密接），若透镜为薄透镜，则孔径光阑本身既是**系统的入瞳**，也是**系统的出瞳**。
- ③ 孔径光阑在光学系统的**最后面**，系统的出瞳与孔径光阑重合，孔径光阑本身即是**出瞳**。

4.1.1.3 关于孔径光阑的几个需注意的问题

① 在具体光学系统中，若**物平面的位置发生了改变**，作为限制轴上物点光束宽度的**孔径光阑**将发生改变。



② 若几块口径一定的透镜组合，对于确定的轴上物点位置，通常有**两种**方法确定哪个透镜的边框是**孔径光阑**：

A. 从**轴上物点**追迹一条近轴光线，求出光线在每个折射面上的投射高度，并与相应折射面的实际口径对比，**比值最大的**，其边框就是这组透镜的**孔径光阑**。

B. 将每一块透镜经其前面的所有透镜成像并求出像的大小，对给定的轴上物点所**张角最小者**，其相应的透镜边框就是这组透镜的孔径光阑。

③ 孔径光阑位置的**安放原则**因不同的光学系统而异。

A. 在目视光学系统中，系统地出瞳**必须在目镜外**的一定位置，便于人眼**瞳孔与其衔接**；

- B. 在投影计量光学系统中，为使投影像的倍率不因物距的变化而变，要求入瞳或出瞳位于无限远处；
- C. 当仪器不对光阑位置提出要求时，设计者应将光阑位置确定在轴外光束像差校正较完善的位置，即把光阑位置的选择作为校正像差的手段之一。
- D. 若遵循上述原则之后，光阑位置还有选择余地，则应考虑如何合理匹配各元件的孔径。

4.1.2 视场光阑

4.1.2.1 视场光阑的定义与作用

实际光学系统

物面上每一点
发 出并进入系
统参 与成像的
光束宽 度是有
限的

能够清晰成像
的 物面大小也
是有 限的

物方视场: 把能清晰成像的物面范围称为光学系统的~。

像方视场: 与物方视场相应的像面范围称为光学系统的~。

视场光阑: 可限定清晰成像范围的光阑称为光学系统的~。

4.1.2.2 入射窗和出射窗

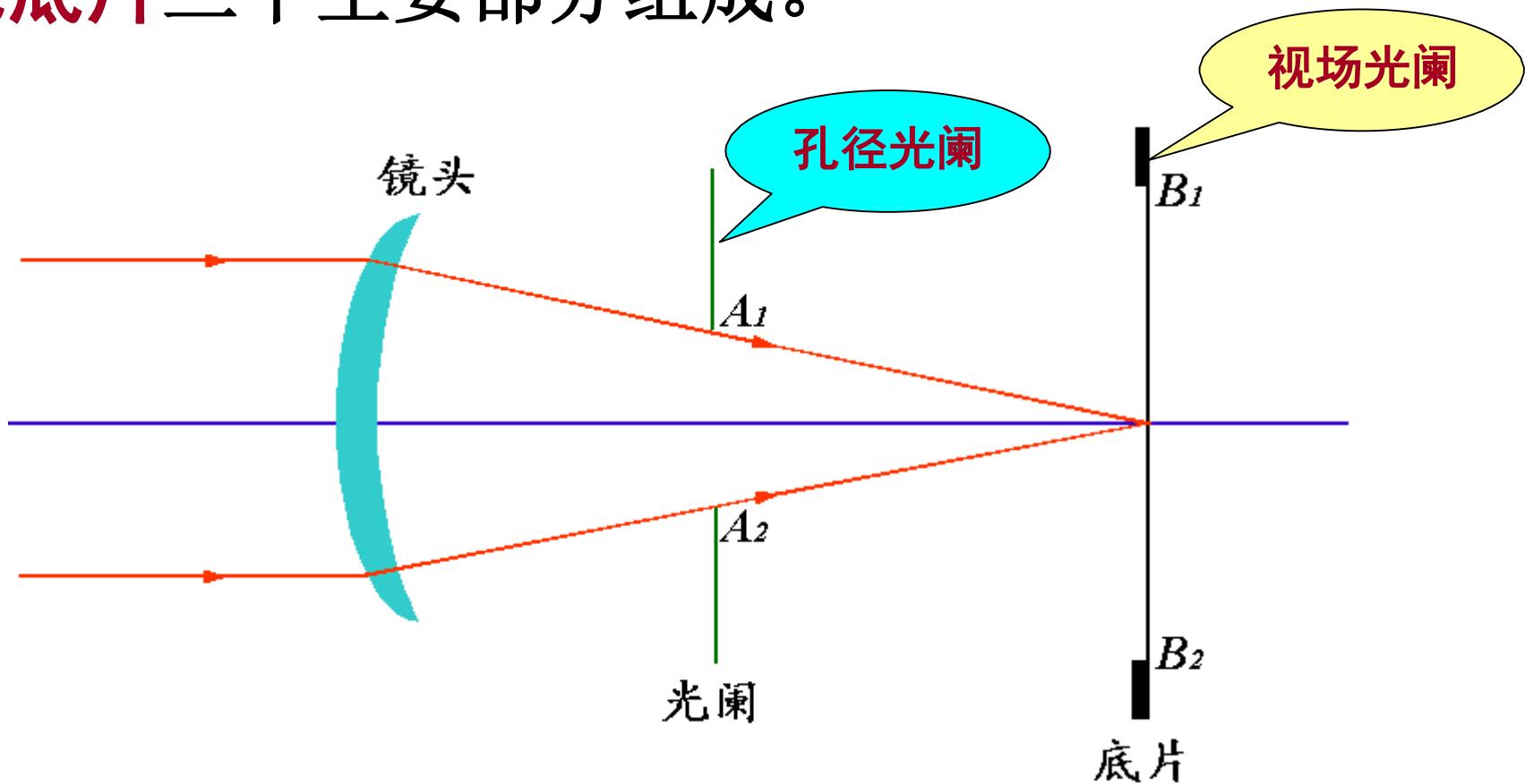
入射窗：视场光阑经其**前面**的光学系统所成的像称为~。

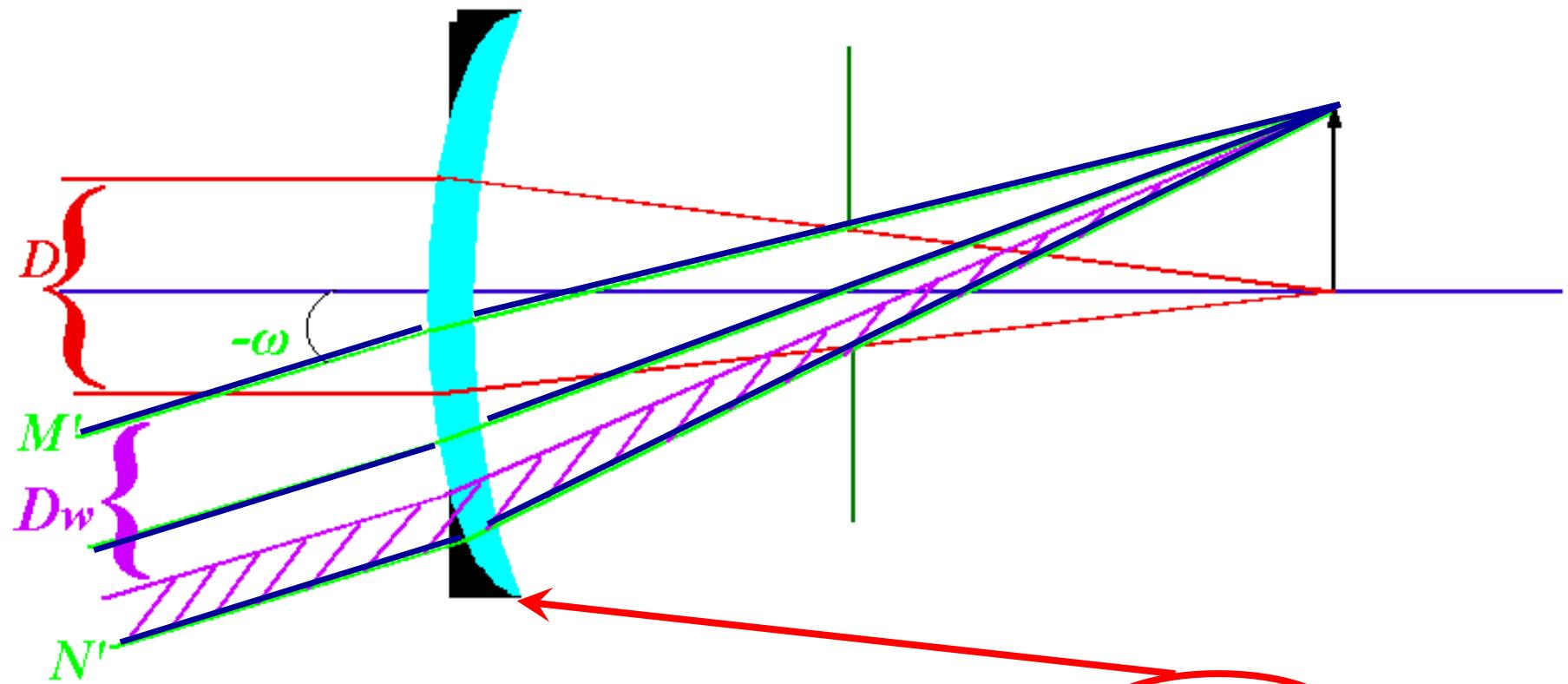
出射窗：视场光阑经其**后面**的光学系统所成的像称为~。

入射窗、视场光阑和出射窗三者是互为物像关系的。

§ 4.2 照相系统中的光阑

普通照相系统由**照相镜头**、**可变光阑**和**感光底片**三个主要部分组成。





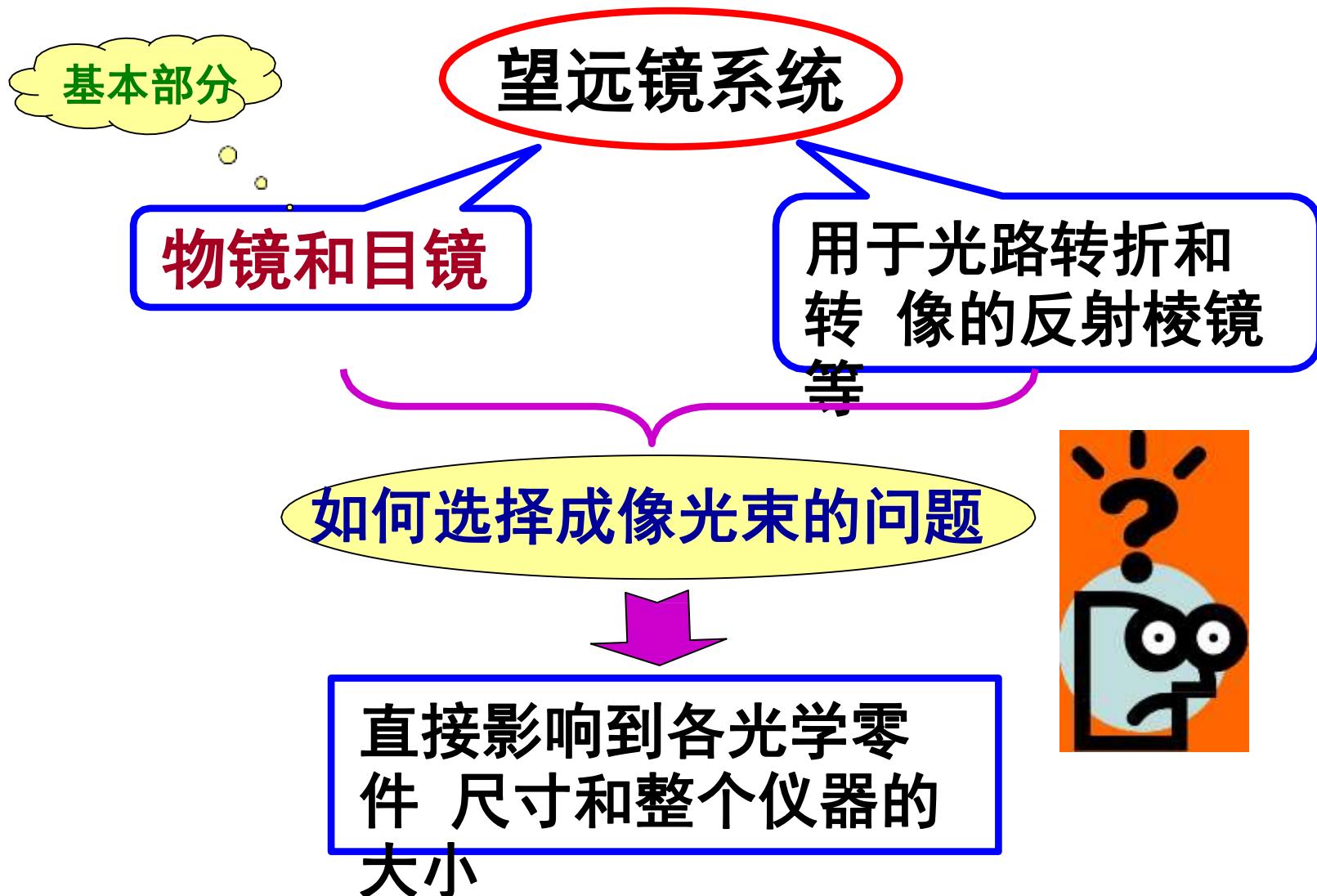
透镜的边框起到"拦光"的作用(即渐晕光阑)

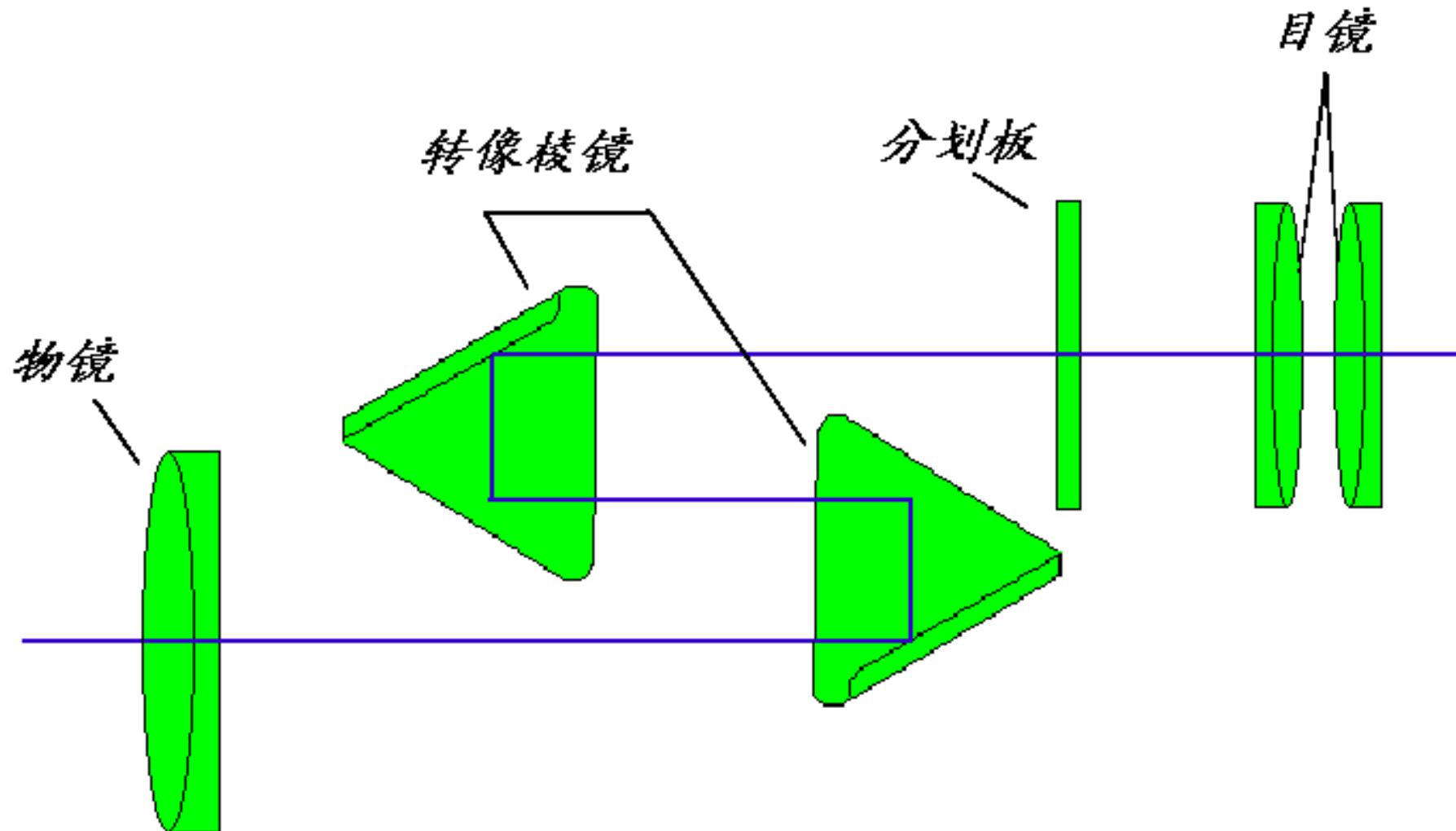
$$\text{渐晕系数: } K = \frac{D_w}{D}$$

结论

- ① 在照相光学系统中，根据轴外光束的像质来选择孔径光阑的位置，其大致位置在照相物镜的某个空气间隔中。（参见P62图4-14）
- ② 在有渐晕的情形下，轴外点光束宽度不仅由孔径光阑的口径确定，而且与渐晕光阑的口径有关。
- ③ 照相光学系统中，感光底片的边框就是视场光阑。

§ 4.3 望远镜系统中成像光束的选择

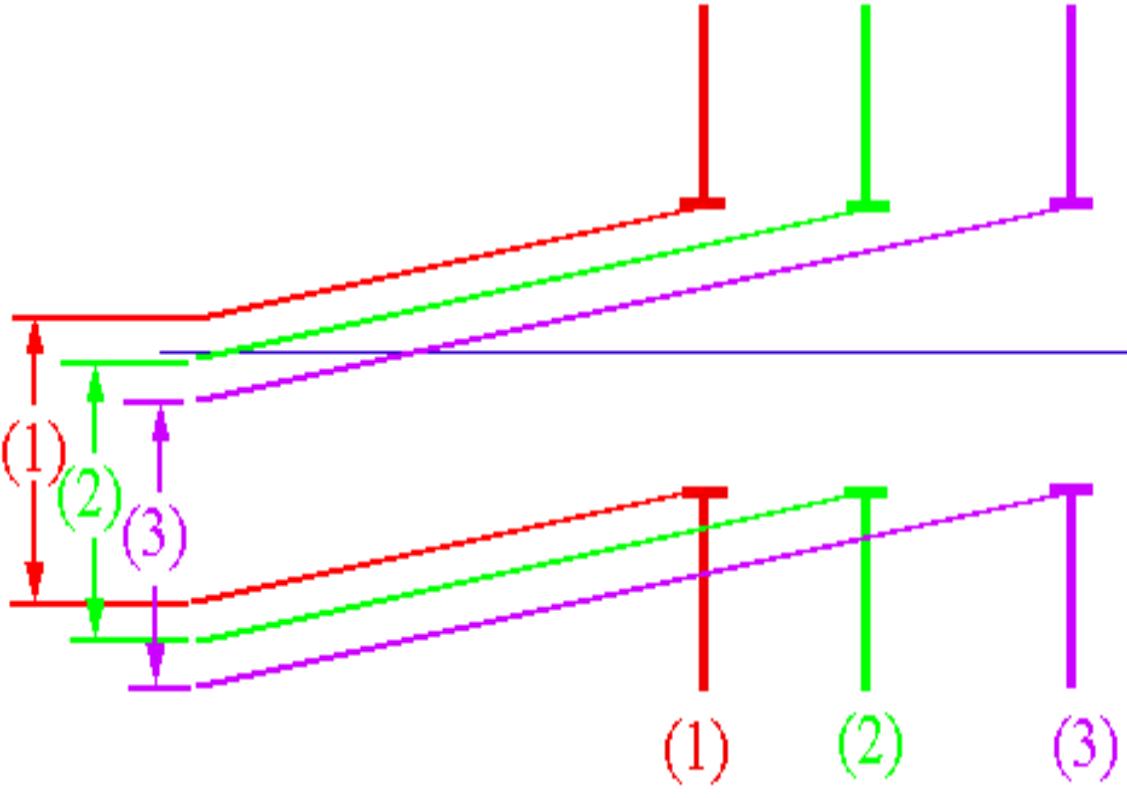




双目望远镜系统

若将物镜、目镜当作薄透镜，暂不考虑棱镜并拉直光路，可将望远镜系统如下简化。

望远镜系统简化图



1. 光阑位于(1)时，
光束上半部分参与成像。

2. 光阑位于(2)时，
光束中间部分参与成像。

3. 光阑位于(3)时，
光束下半部分参与成像。

光阑位置对轴外光束位置的选择

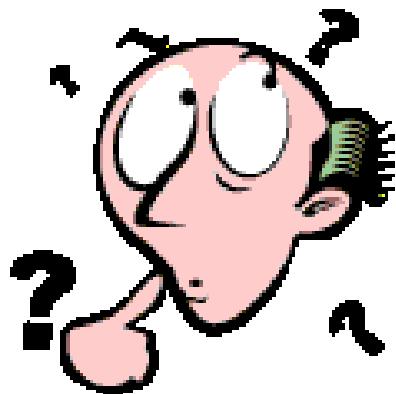


小结

- ① 两个光学系统联用时，一般应满足**光瞳衔接原则**；
- ② 目视光学系统的出瞳一般在外，且**出瞳距不能短于 6 mm** ，军用仪器一般为 **20 mm** ；
- ③ 望远系统的孔径光阑大致在物镜左右，具体位置可考虑**尽量减小**光学零件的尺寸和体积来设定；
- ④ **分划板框**是望远系统的**视场光阑**。

回顾

何谓“孔径光阑” 和“视场光阑”？



孔径光阑：限制轴上物点**孔径角**大小并有选择**轴外**物点**成像光束位置**作用的光阑称为~。

视场光阑：可限定**清晰成像**范围的光阑称为光学系统的~。

§ 4.4 显微镜系统中的光束限制与分析

4.4.1 简单显微系统中的光束限制

显微镜一般由物镜和目镜组成，系统中成像光束的口径往往由物镜框限制，物镜框是孔径光阑。位于目镜物方焦面上的圆孔光阑或分划板框限制了系统的成像范围，成为系统的视场光阑。

孔径光阑

视场光阑

出瞳

D'

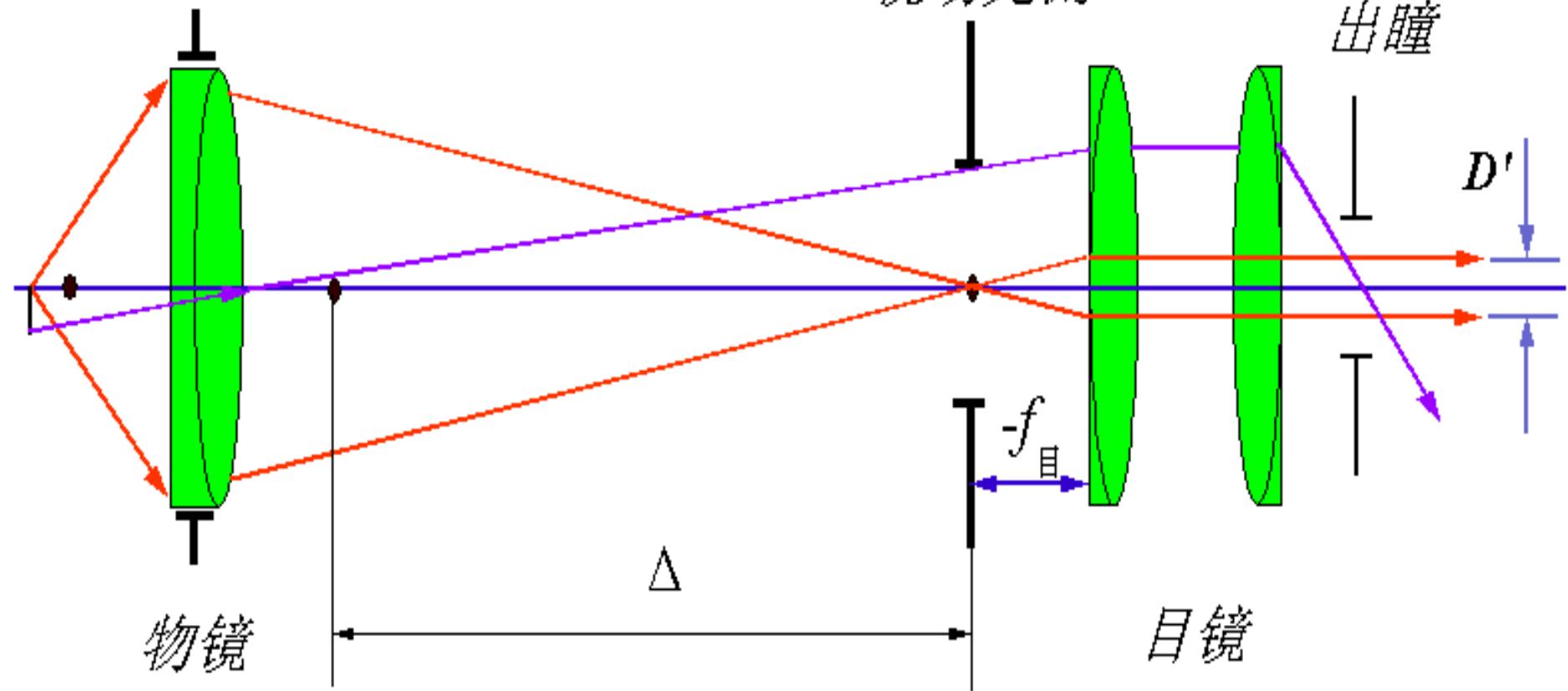
$f_{\text{目}}$

Δ

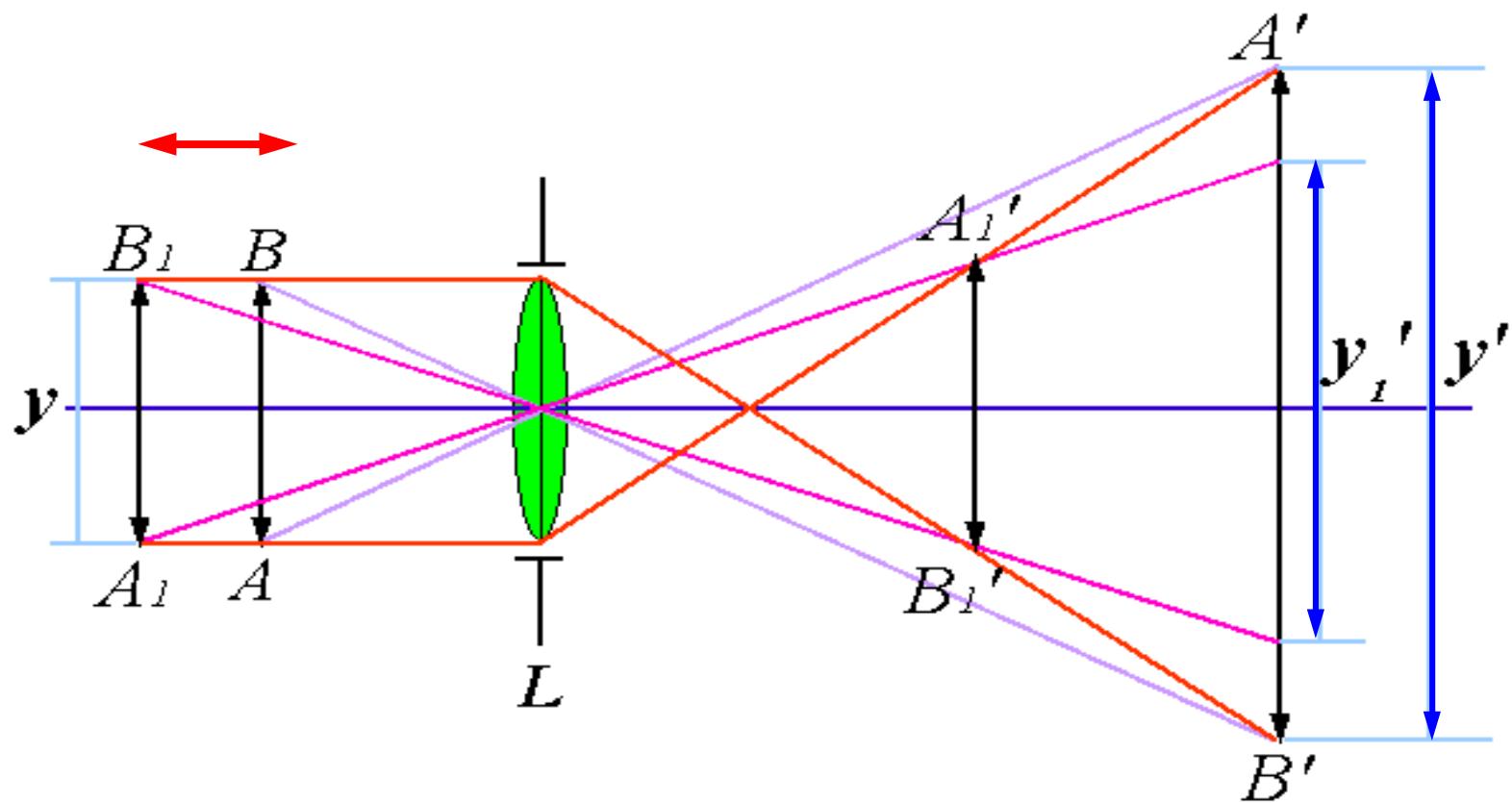
物镜

目镜

显微镜系统光路



4.4.2 远心光路



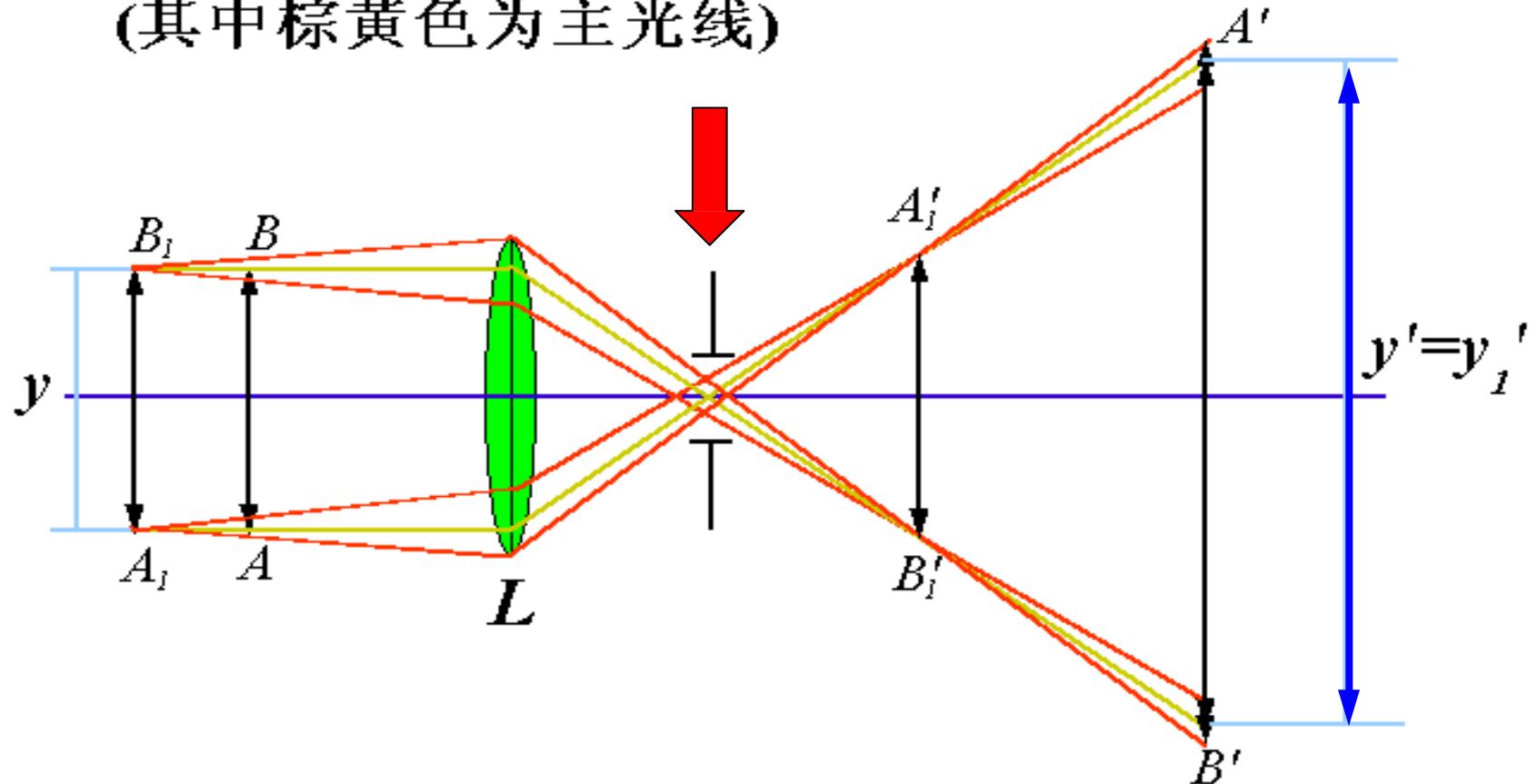
L为测量物镜，当物镜框为孔径光阑时，
由于调焦不准，其测量存在误差



解决方案

将孔径光阑移至物镜的像
方焦平面上。

L为测量物镜,当孔径光阑位于像方焦平面时,
可以矫正由于调焦不准而带来的测量误差
(其中棕黄色为主光线)



物方远心光路

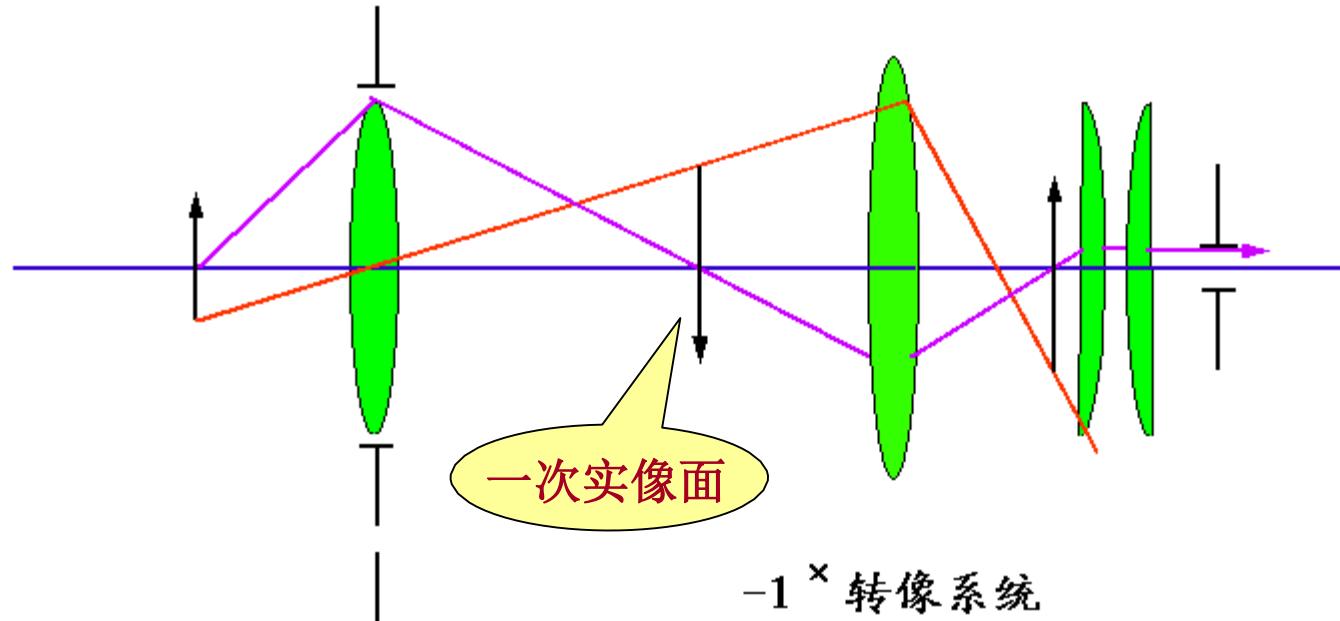


特点

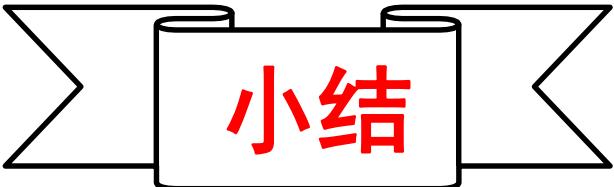
此光路的特点：入瞳位于无穷远，轴外点主光线平行于光轴，故称其为“物方远心光路”。

4.4.3 场镜的应用

实际应用中，有时具体的仪器结构需要长光路的显微镜系统。如需要大大加长物镜与目镜之间的光路，一般就加一个 $-1\times$ 透镜转像系统来达到目的。 $-1\times$ 成像系统在原理上是物体位于它的2倍焦距处的透镜系统（如下图所示）。



长光路显微镜系统与加入场镜的系统



小结

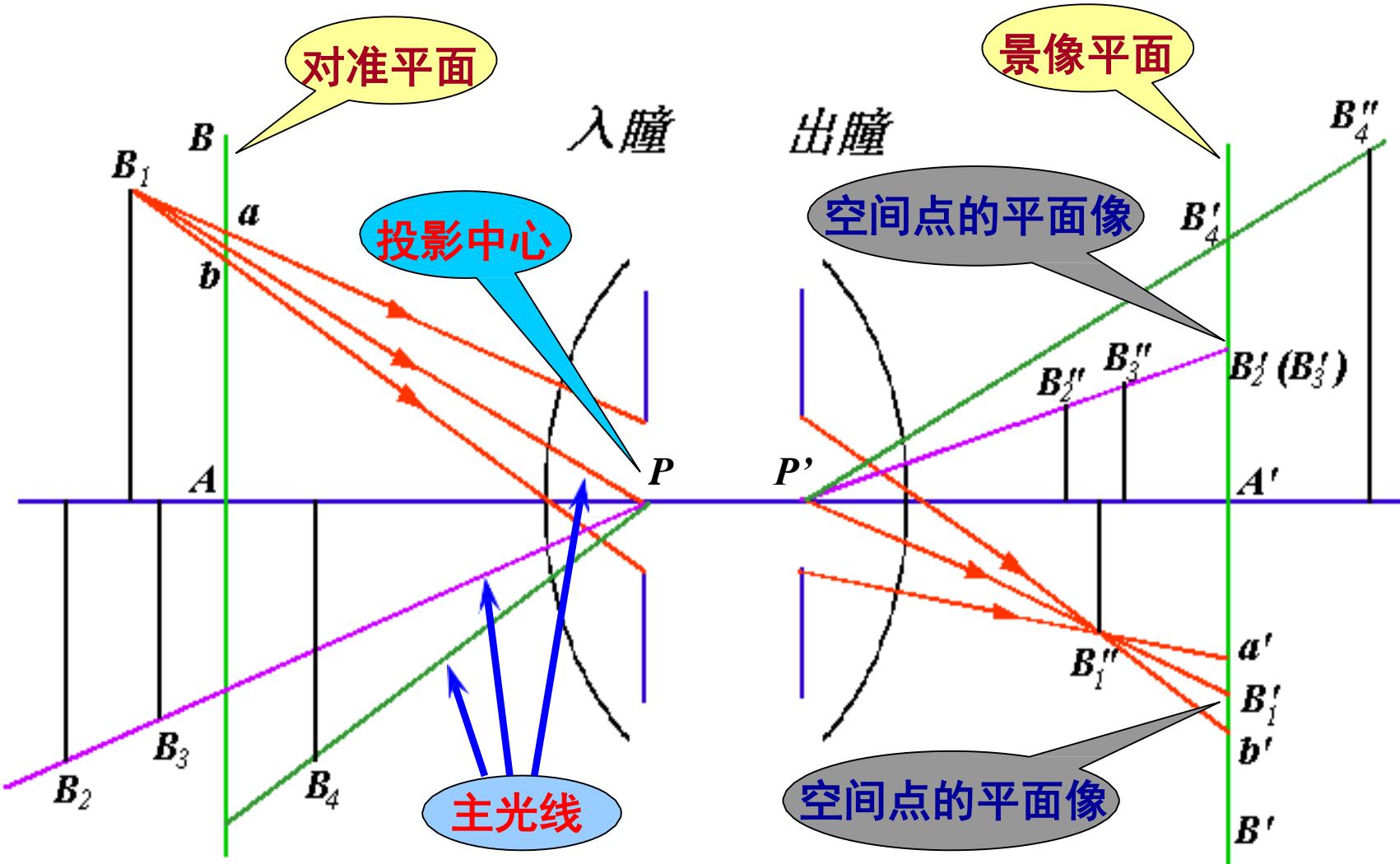
- ① 一般显微系统中，孔径光阑置于显微物镜上；一次实像面处安放系统的视场光阑；
- ② 显微系统用于测长等目的时，为消除测量误差，孔径光阑安放在显微镜的像方焦面处，称为“物方远心光路”。
- ③ 在长光路系统中，常利用场镜衔接前后系统的光瞳，以减小光学系统的口径。场镜在减小后续系统的口径及望远系统中均有应用。

§ 4.5 光学系统的景深

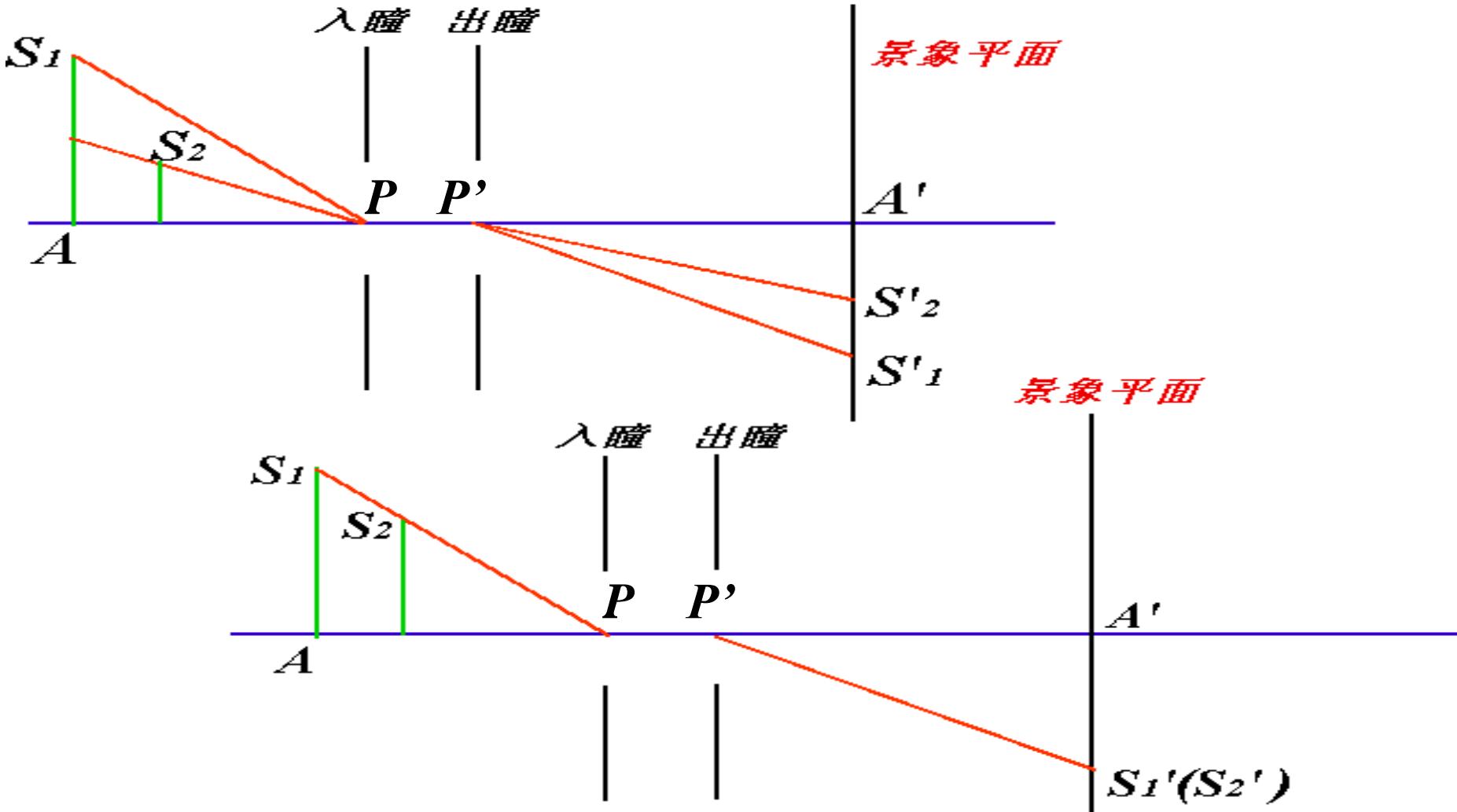
4.5.1 光学系统的空间像

前面讨论的只是垂直于光轴的物平面上的点的成像问题。实际光学系统中，如：照相制版物镜和电影放映镜等属于此类。

把空间中的物点成像在一个像平面上，称为平面上的空间像，如：望远镜、照相物镜等属于此类。其成像原则与平面物体有所不同。

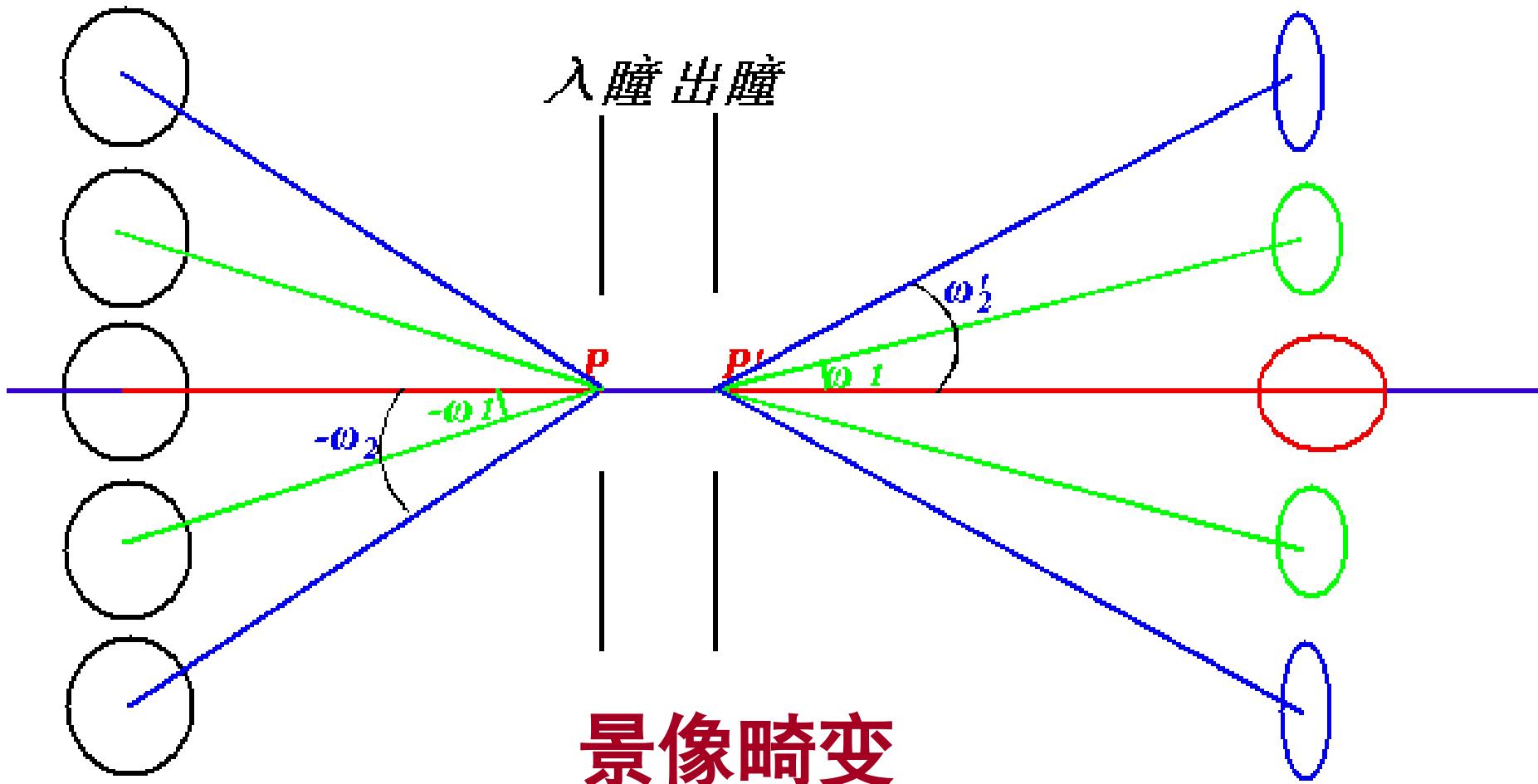


光学系统的空间像



投影中心前后移动，投影像的变化和景物是不成比例的，此现象称透视失真。

用广角物镜拍摄物体时，球状物在像平面上的像随 ω' 的不同而异，该现象称为**景像畸变**。

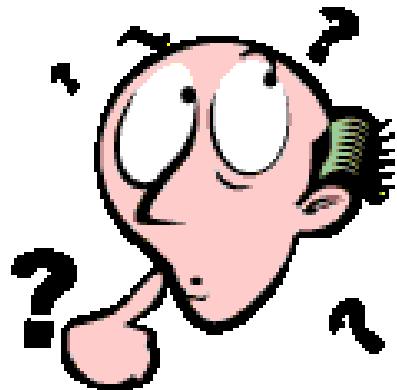


“景像畸变”举例

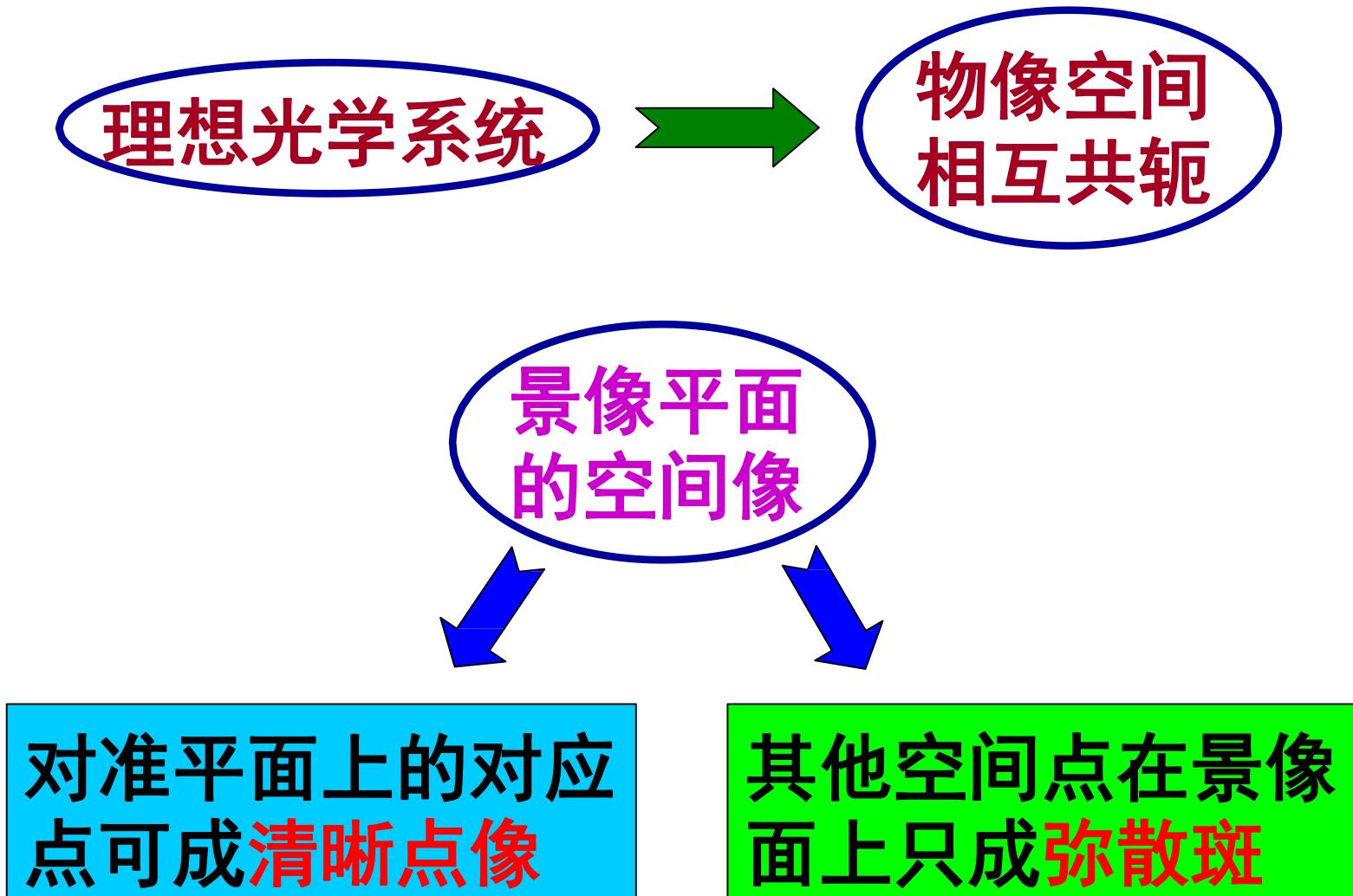


问题

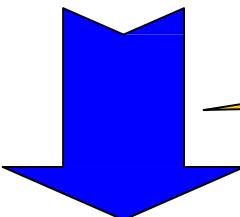
如何获得尽量小失真的空间像？



4.5.2 光学系统的景深

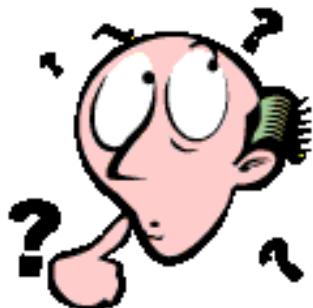


弥散斑小于一定限
度时，近似为“点”



入射光瞳一定

物空间有多大深度
范围的物体可在景
像面上成清晰像？



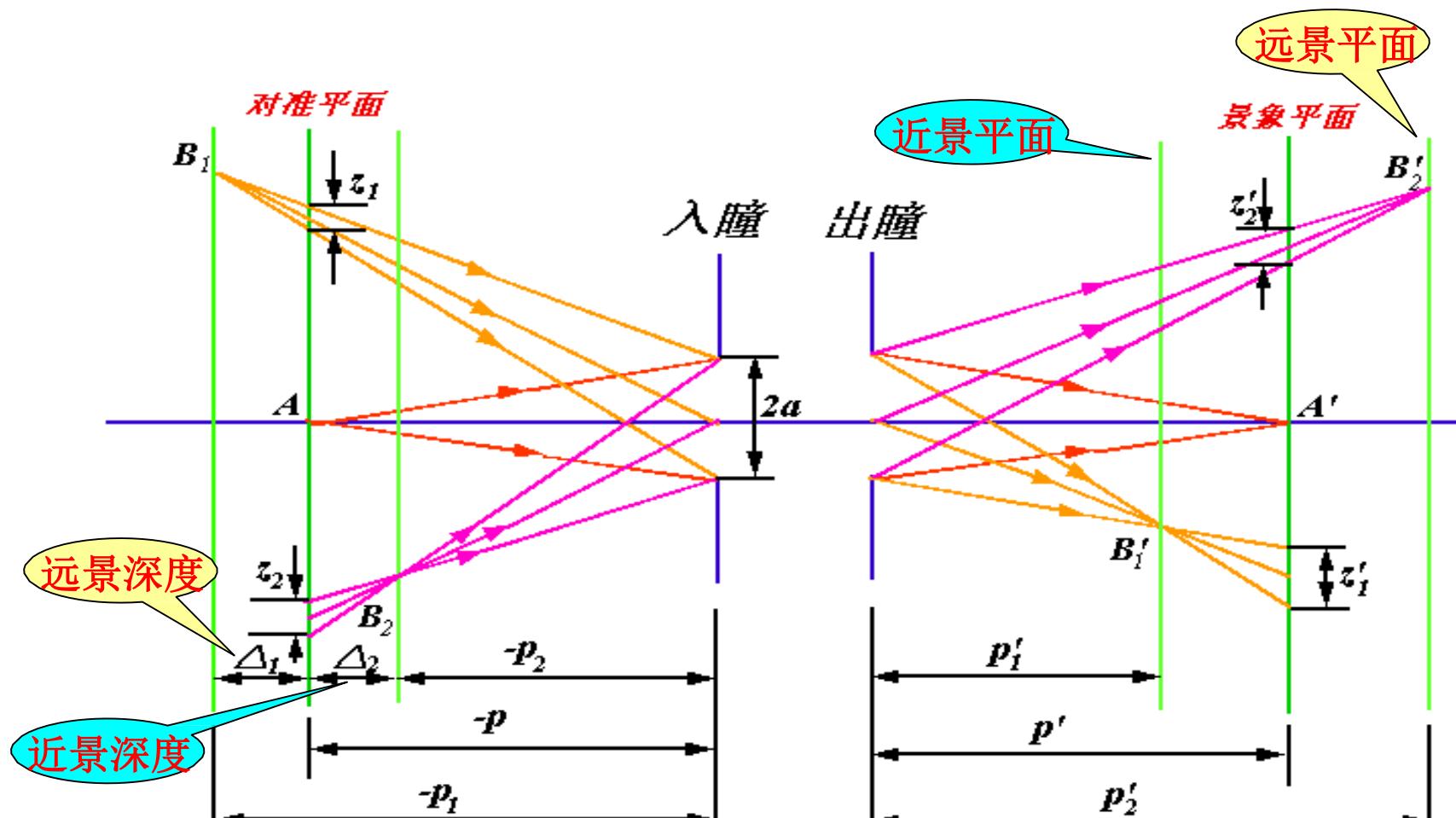
概念的引入

景深：在景像平面上所获得的成清晰像的**物**

空间深度称为成像空间的**景深 Δ** 。

远景平面：能成清晰像的**最远**的平面称为~。

近景平面：能成清晰像的**最近**的平面称为~。



$$\Delta_1 = \frac{p^2 \varepsilon}{2a - p\varepsilon}$$

$$\Delta_2 = \frac{p^2 \varepsilon}{2a + p\varepsilon}$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

景深的几何量表示

正确透视

正确透视距离

$$\tan \omega = \frac{y}{p} = \tan \omega' = \frac{y'}{D}$$

$$D = \frac{y'}{y} p = \beta p$$

景像面上或照片上弥散斑直径的允许值为：

$$z' = z'_1 = z'_2 = D\varepsilon = \beta p\varepsilon$$

对应于对准平面上弥散斑直径的允许值为：

$$z = z_1 = z_2 = \frac{z'}{\beta} = p\varepsilon$$

人眼极限分辨角 ε

景深 Δ 可以表示为：

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{4ap^2\varepsilon}{4a^2 - p^2\varepsilon^2}$$

若用孔径角 U 取代入瞳直径，则：

$$2a = 2p \tan U$$

$$\Delta = \frac{4p\varepsilon \tan U}{4 \tan^2 U - \varepsilon^2}$$



结论

入瞳的直径越小，即孔径角越小，景深越大。



实例

拍照时，缩小光圈 (f/D) 可获得大的空间深度的清晰像，其原因就在于此。

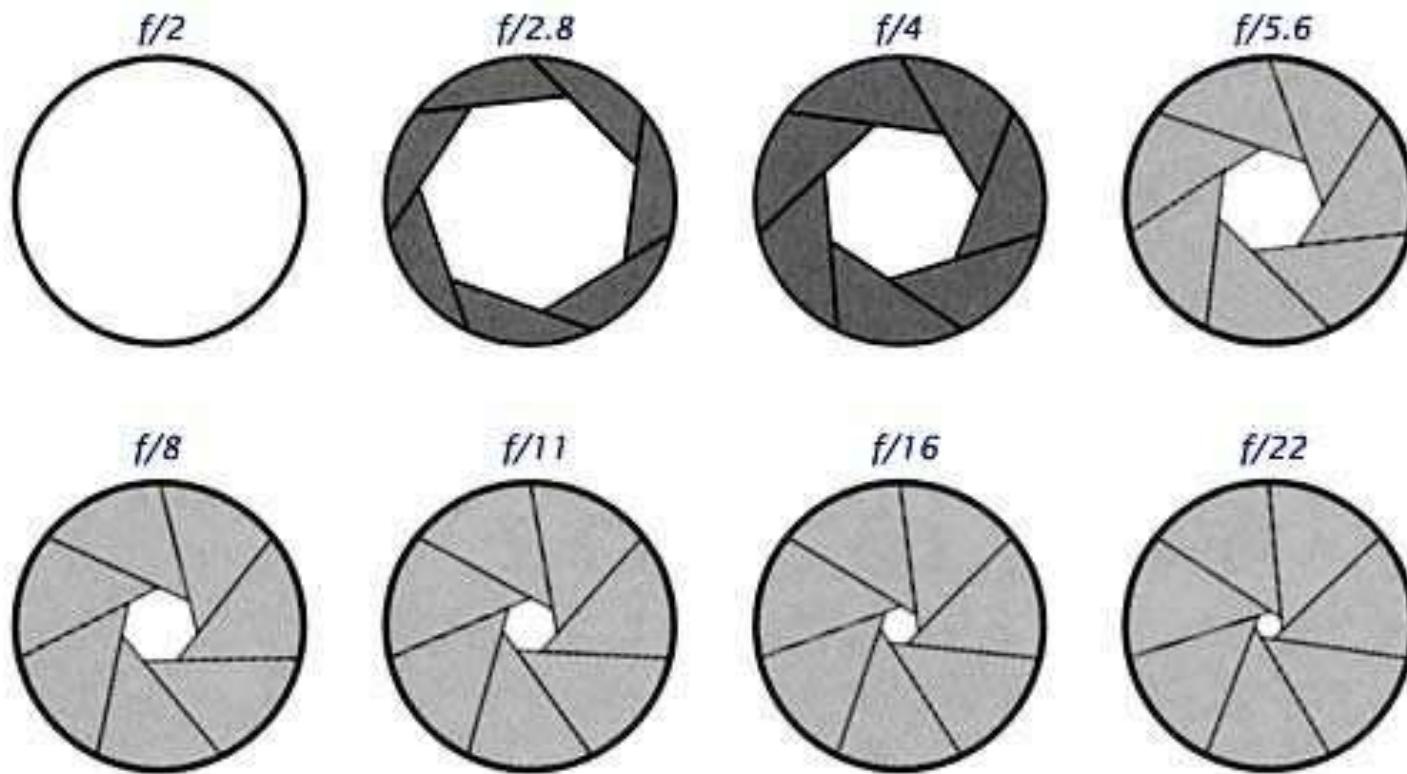


实例

课本P72-73 第6节 数码相机镜头的景深

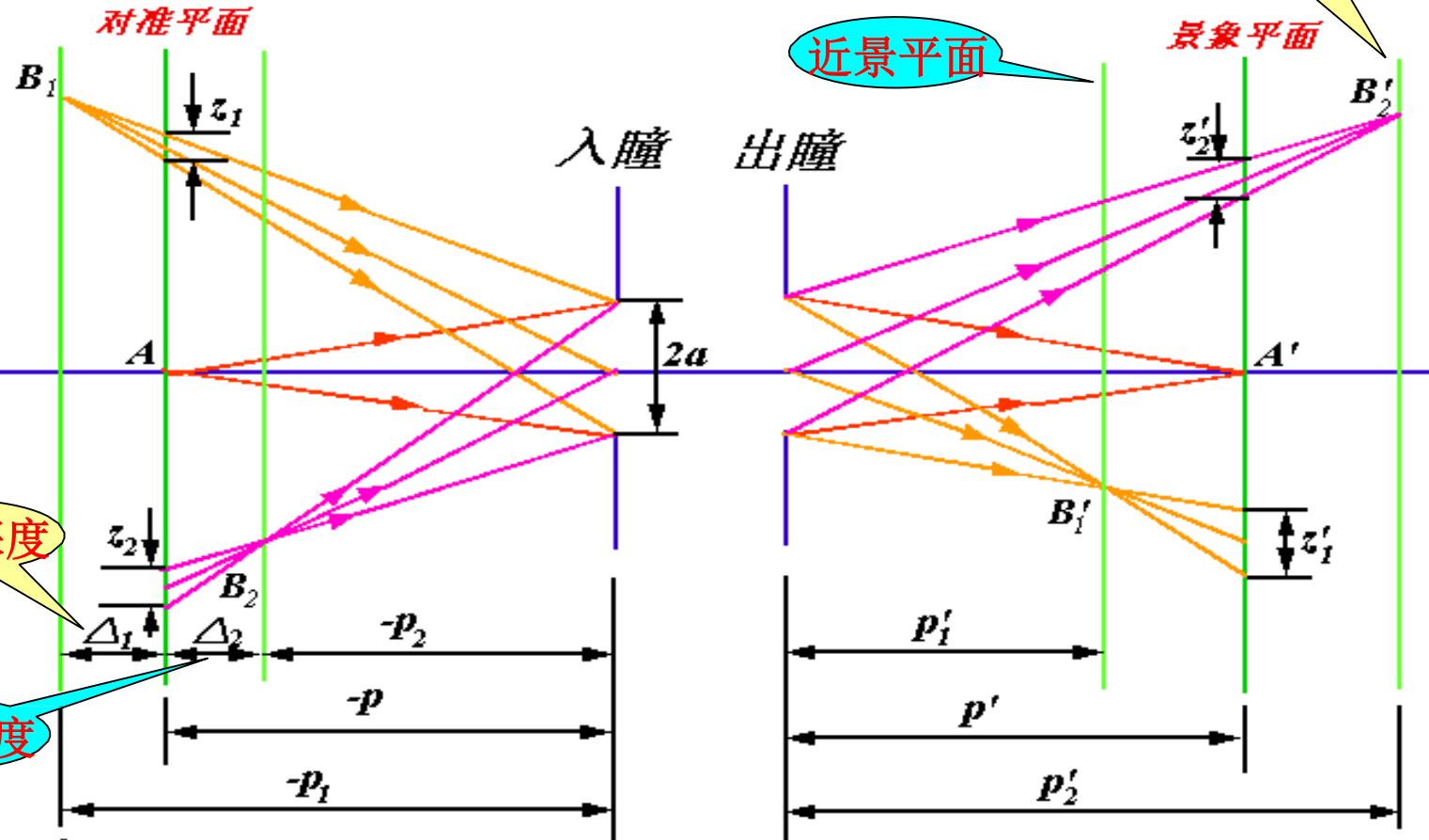
景深与镜头的焦距成反比，因此，数码相机镜头较之普通照相物镜具有更大的景深范围。

光圈 (Aperture) : 用来控制透过镜头进入机身内感光面的光量，是照相镜头的一个极其重要的指标参数。光圈F值=镜头的焦距/镜头有效口径的直径。



数码相机通常: **F2.8-F11**

讨论



$$\Delta_1 = \frac{p^2 \varepsilon}{2a - p\varepsilon}$$

$$\Delta_2 = \frac{p^2 \varepsilon}{2a + p\varepsilon}$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$



讨论

1) 若欲使**对准平面前**的整个空间都能在景像平面上成**清晰像**，即远景深度 $\Delta_1=\infty$

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \frac{p^2 \varepsilon}{2a - p\varepsilon} &= \infty & \rightarrow & \quad 2a - p\varepsilon = 0 \\ \therefore \quad p &= \frac{2a}{\varepsilon}\end{aligned}$$

从对准平面中心看入瞳时，其对眼睛的张角 应等于极限分变角 ε 。此时，近景位置 P_2 为

$$p_2 = p - \Delta_2 = p - \frac{P_2^2 \varepsilon}{2a + p\varepsilon} = \frac{p}{2} = \frac{a}{\varepsilon}$$

因此，照相物镜调焦于 $p=2a/\varepsilon$ 处，在景像平面上可得到，从入瞳前 a/ε 处的平面起至无穷远的整个空间内物体的清晰像。



讨论

2) 若将照相物镜调焦至无限远，即 $p=\infty$ ，以 $z_2=p\varepsilon$ 代入近景到入瞳的距离 p_2 ，并对 $p=\infty$ 求极限，则可求得近景位置为

$$p_2 = \frac{2ap}{2a + z_2} = \frac{2ap}{2a + p\varepsilon} = \frac{2a}{2a/p + \varepsilon}, \quad p = \infty$$

$$\therefore p = \frac{2a}{\varepsilon}$$

上式表明，此时的景深等于从物镜前 $2a/\epsilon$ 的平面到无穷远。



对比1) 和2) 两种情况，对准平面置于 $p=2a/\epsilon$ 处时近景距离为 a/ϵ ；而置于无穷远($p=\infty$) 时近景距离为前者2倍；因此，将对准平面置于无穷远时的景深要小些。



讨论

3) 以上讨论是假定在正确透视距离下，故与焦距无关。但若规定景像平面上的弥散斑不能超过某一数值时，景深则与物镜焦距有关。

$$z' = \beta z = -\frac{f}{x} z$$

当 z' 一定时，对于某一对准平面位置 x ， f' 越大， z 就越小，即景深随焦距的增大而减小。

景深效果实例





例题

P71 例题[1], [2]

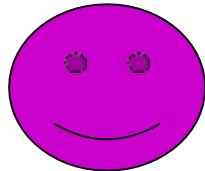
- 课后作业：
- P74

第4章 习题 第3、6题

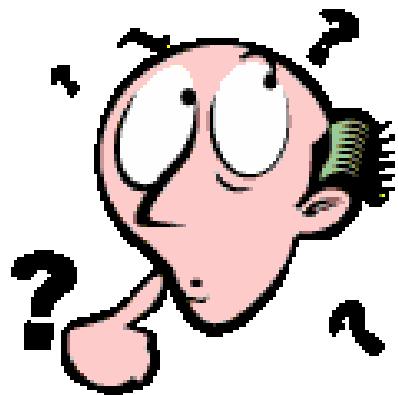
《工程光学》

第5章

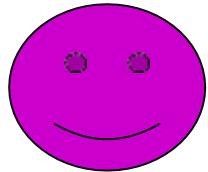
光线光路计算及像差理论 I



通过前面内容的学习，我们知道 对于理想光学系统成像，其物、像空间互为共轭……



实际光学系统中的物、像空间的共轭关系被破坏，原因何在？



实际光学系统与理想光学系统有很大的差异，即物空间的一个物点发出的光线经实际光学系统后，不再会聚于像空间的一点，而是一个弥散斑，弥散斑的大小与系统的像差有关。

本章概要

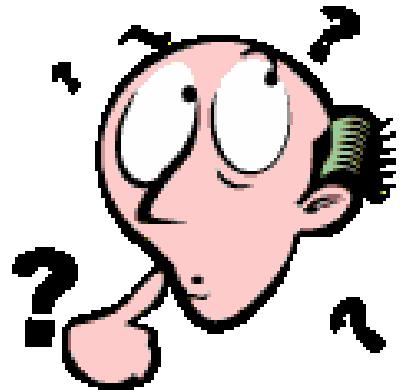
- 本章主要介绍实际光学系统的单色像差和色差的基本概念、产生像差的原因及校正像差的方法。

第5章 光线追迹及像差理论

- § 5.1 概述
- § 5.2 光线的光路计算
- § 5.3 轴上点的球差
- § 5.4 正弦差和彗差
- § 5.5 场曲和像散
- § 5.6 畸变
- § 5.7 色差
- § 5.8 像差特征曲线与分析
- § 5.9 波像差
- § 5.10 像差容限

§ 5.1 概述

5.1.1 基本概念



何谓“像差”？

像差：光学系统所成的**实际像**与**理想像**之间的差异称为~。

景深效果实例



“
景像畸变”
举例

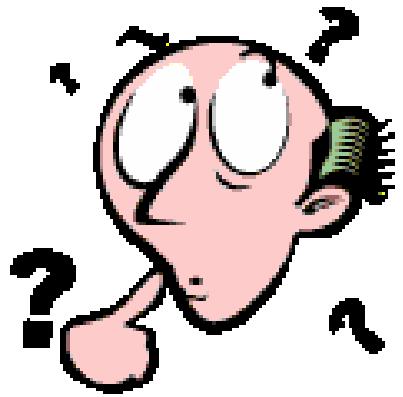


微距超景深效果



依然存在“像场弯曲”

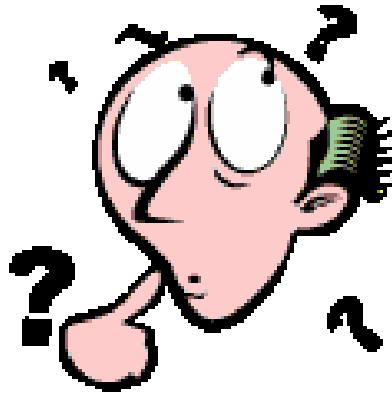




“像差”造成的原因？

在近轴光学系统中，导出了 $\sin\theta = \theta$ ，
 $\cos\theta=1$ 时的理想物像关系式。它只适用于近轴
的小物体以细光束成像。

对实际光学系统而言，一定的相对孔径和
视场才与系统的功能及使用价值紧密相连。



什么原因导致在实际光学系统成像与近轴光学计算的差异?

正弦函数的级数展开为:

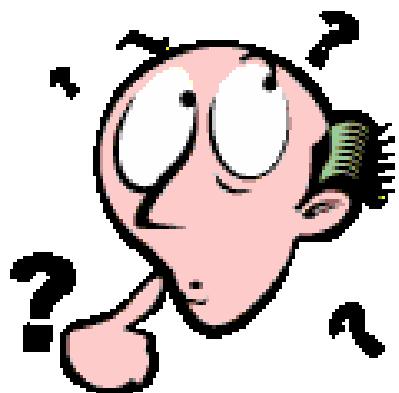
$$\sin \theta = \theta$$

$$\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

理想系统，
近轴公式

被忽略的高次项为
造成像差的原因！

显然，实际光学系统成像均有一定的孔径与视场，**不同孔径**的入射光线其**成像位置不同**，**不同视场**的入射光线其**成像的倍率不同**，**子午面**和**弧矢面光束成像的性质也不同**。



在实际光学系统中，**像差是如何分类的呢？**

像差

基于几何光学

基于波动光学

几何像差

波像差

光频

衍射

单色像差

色像差

理想球面波成像后
其波面已不是球面

单色像差

球
差

彗
差

像
散

场
曲

畸
变

成像后离心的同心光束发出轴上点发出

失去对称宽光束成像轴外物点、

轴向距离像点分开的子午和弧矢

相切于高斯像面中心点的子午和弧矢像面组成

差，仅是视场的函数。主光线的像

平行光

焦点不能以点的方式集中于光轴

光轴

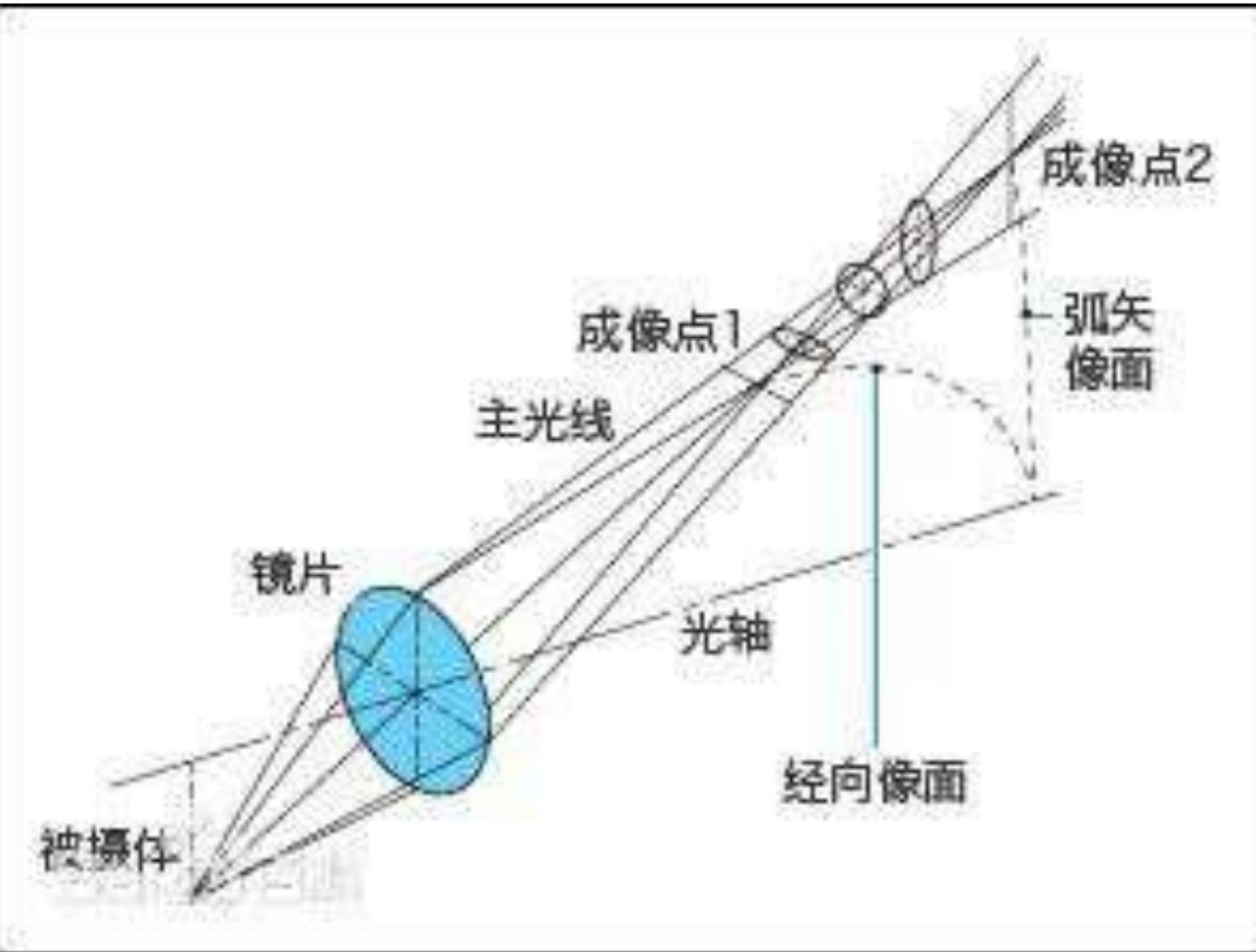
球差

倾斜光线不能以点的方式集中于成像面

轴外平行光线束

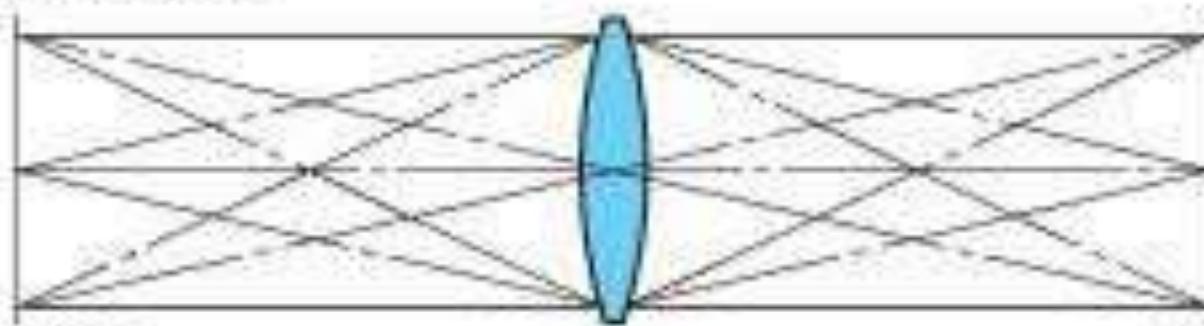
光轴

彗差



像 散

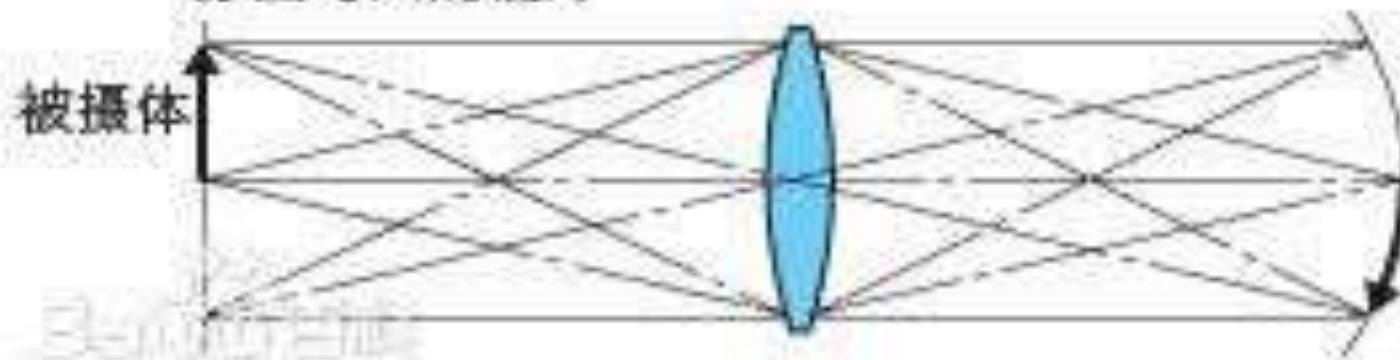
理想的镜片



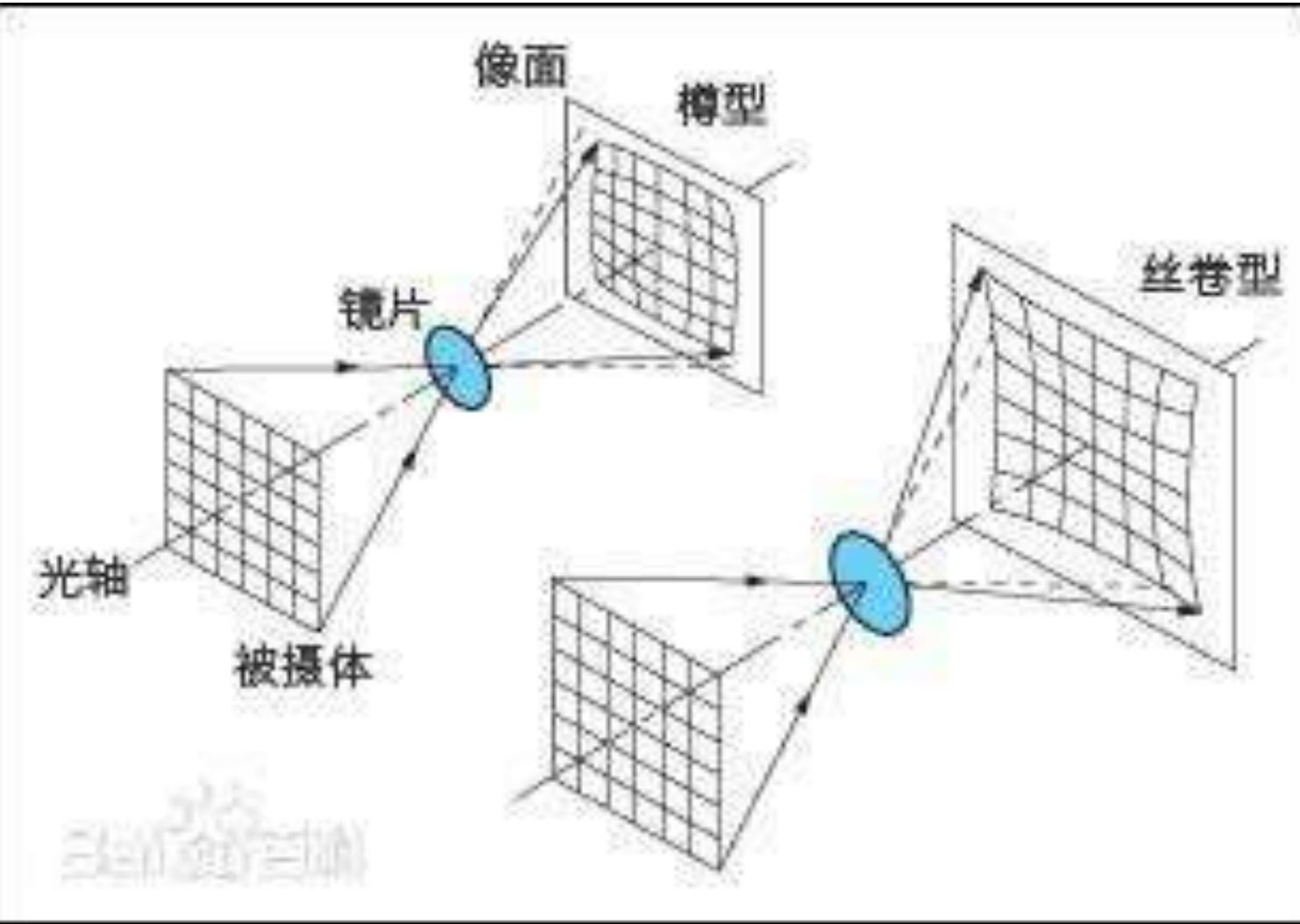
被摄体面

像面

像面弯曲的镜片



场曲



畸变

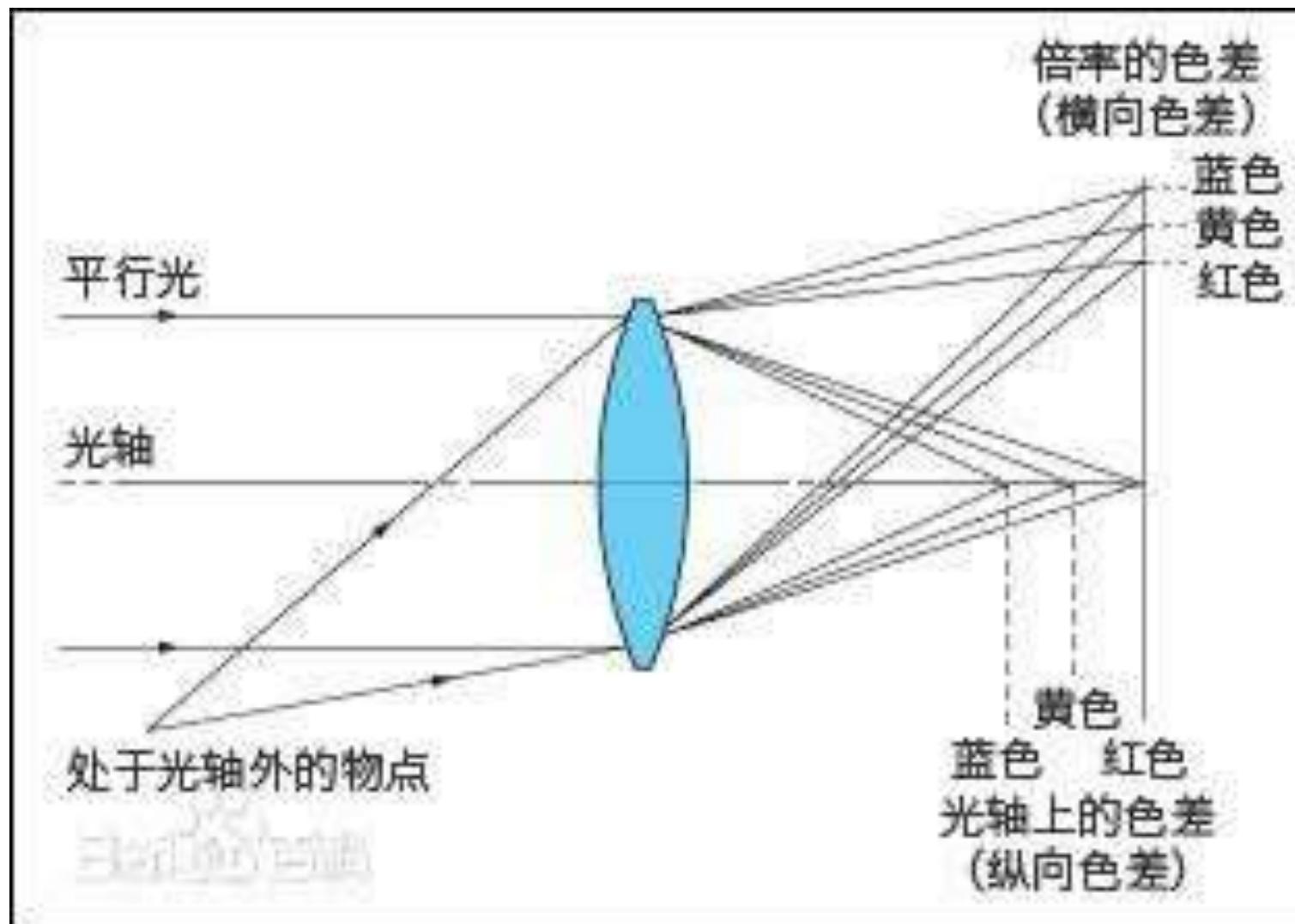
色差

位置色差

倍率色差

对轴上点，两种色光成像位置的差异，
亦称轴向色差。

对轴外物点，不同色光的垂轴放大率不等，
亦称垂轴色差。



色差



讨论

- ① **单色像差**是对光能接收器**最灵敏的色光**而言的；**色差**是对接收器的有效波段内**接近边缘的两种色光**来考虑的。

- ② 实际光学系统，**不可能**将各种**像差完全校正**和**消除**。只因人眼和其它光能接收器也存在一定的缺陷，只要最大限度地将像差校正到接收器**探测不到成像的缺陷**即可。

5.1.2 像差计算的谱线选择

——计算和校正像差时，对谱线的选择主要取决于光能接收器的光谱特性。

基本原则：

- ① 对光能接收器**最灵敏的谱线**校正单色像差；
- ② 对接收器所接收的**波段两边缘**附近的谱线校正色差；
- ③ 同时要考虑**光源**及光学系统**材料**的限制。



应用

(参见课本P106)

对实际光学系统计算和校正像差时谱线的选择：

- ① 目视光学系统
- ② 普通照相系统
- ③ 近红外和近紫外光学系统
- ④ 特殊光学系统

光学上，常用**夫琅和费谱线**作为特征谱线。

谱线符号	红外	A'	b	C	C'	D	d	e	F	g	G'	h	紫外
颜色		红		橙	黄		绿	青		蓝	紫		
波长 nm	>770.0	766.5	709.5	656.3	643.9	589.3	587.6	546.1	486.1	435.8	434.1	404.7	<400.0
对应元素		K	He	H	Cd	Na	He	Hg	H	Hg	H	Hg	

§ 5.2 光线的光路计算

从物点发出进入光学系统后成像的光线有无数条，**如何选择合适的光线进行光路计算呢？**



一般只选择对计算像差有特征意义的光线进行光路计算，研究不同视场的物点对应不同孔径和不同色光的像差值。



计算原则

对计算像差有特征意义的光线主要有三类：

- ① 子午面内的光线光路计算，包括近轴光线和实际光线，以求出理想像和实际像的位置和大小以及有关像差值。
- ② 轴外物点沿主光线的细光束光路计算，以求像散和场曲。
- ③ 子午面外的空间光线光路计算，求得其子午像差和弧矢像差分量，以全面了解像质。



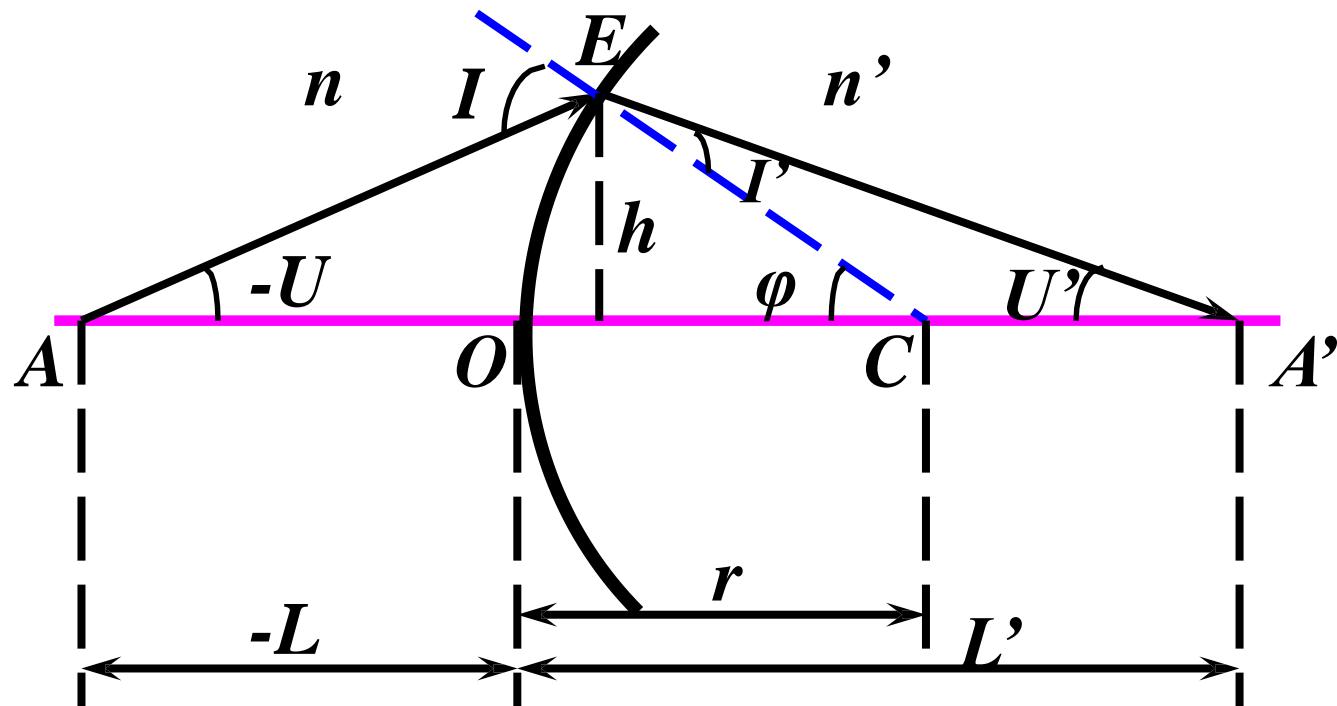
举例

- ① 对于**小视场**的光学系统，例如望远镜、显微镜等，因只需要校正与**孔径**有关的像差，只需作**第一种光线**的光路计算即可。

- ② 对于**大孔径、大视场**的光学系统，如照相机物镜等，要求校正所有像差，因此需对上述**三种光线**的光路都进行计算。

5.2.1 子午面内的光线光路计算

5.2.1.1 近轴光线的光路计算



光线经过单个折射球面的折
射

轴上点近轴光线的光路计算（又称第一近轴光线）的初始数据为 l_I, u_I 。根据近轴光线通过单个折射面的计算公式：

$$i = \frac{l - r}{r} u \quad (\text{当 } l_I = \infty \text{ 时}, \ u_I = 0, i_I = h_I/r_I)$$

$$i' = \frac{n}{n'} i$$

$$u' = u + i - i'$$

$$l' = r \left(1 + \frac{i'}{u'} \right)$$

对于一个有 k 个面组成的光学系统，利用过
渡公式得：

$$l_k = l'_{k-1} - d_{k-1}$$

$$u_k = u'_{k-1}$$

$$n_k = n'_{k-1}$$

校对公式为： $h = lu = l'u'$

或者用拉赫不变量： $nu_y = n'u'y' = J$

如此可计算出像点位置 l' 和系统各基点位置。

若要计算系统的焦点位置，可令 $l_1=\infty$ ， $u_1=0$ ，由近轴光路计算出的 l_k' 即为**系统的焦点位置**，系统的**焦距**为

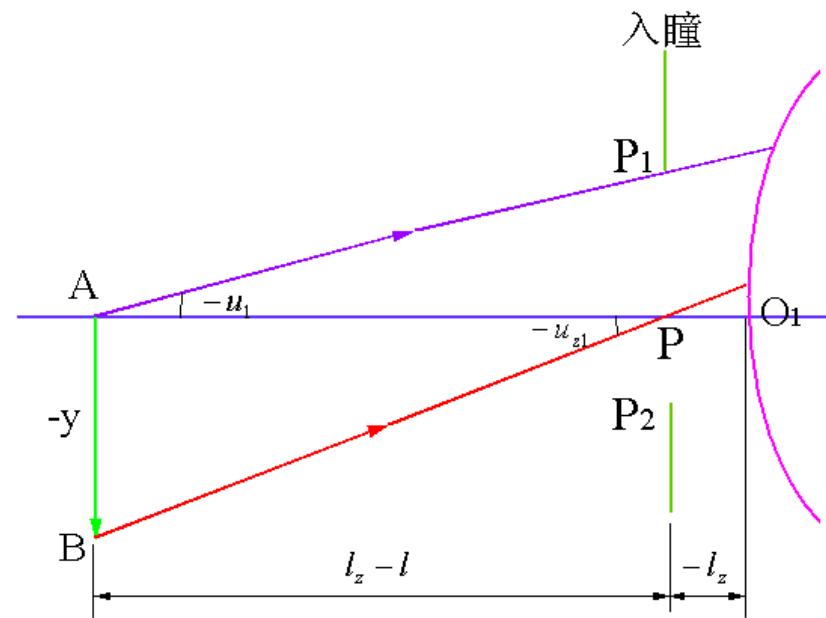
$$f' = h_1/u_k'$$

轴外点近轴光线的光路计算（又称第二近轴光线），一般要对五个视场（0.3, 0.5, 0.707, 0.85, 1）的物点分别进行计算，以求出不同视场的主光线与理想像面的交点高度，即理想像高 y_k' 。

轴外点近轴光的初始数据为：

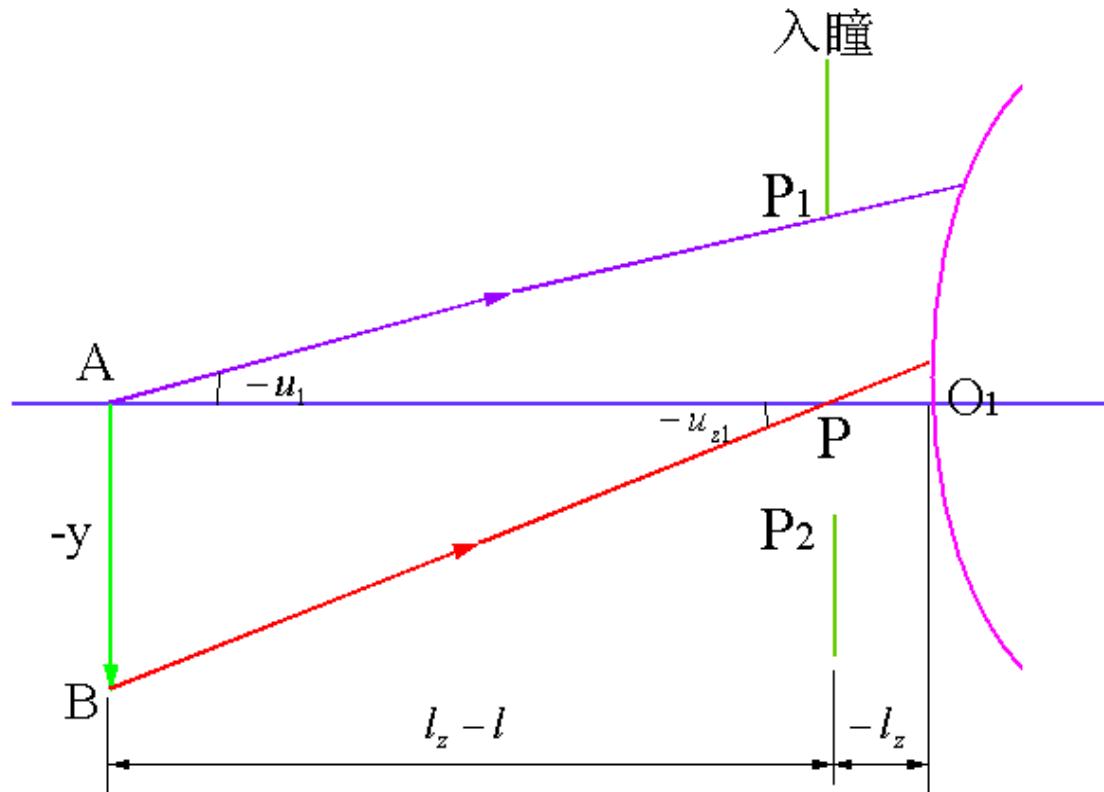
$$l_z, \quad u_z = y/(l_z - l_1)$$

（当 $l_1=\infty$ 时， $u_z=\omega$ ）



可按上述第一近轴光线的光路计算公式计算，所得结果为 l_z' 和 u_z' ，由此可求得**理想像高**为：

$$y' = (l_z' - l') u_z'$$



5.2.1.2 远轴光线的光路计算

轴上点远轴光线的光路计算，初始数据为
 L_1 、 $\sin U_1$ ，根据实际光线的光路计算公式：

$$\sin I = (L - r) \sin U / r$$

(当 $L_1 = \infty$ 时， $U_1 = 0$, $\sin I_1 = h_1/r_1$)

$$\sin I' = n \sin I / n'$$

$$U' = U + I - I'$$

$$L' = r + r \sin I' / \sin U'$$

相应的过渡公式（转面公式）为：

$$L_k = L'_{k-1} - d_{k-1}$$

不计透镜厚度

$$U_k = U'_{k-1}$$

$$n_k = n'_{k-1}$$

校对公式为：

$$L' = \frac{L \sin U}{\cos \frac{1}{2}(I-U)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(I'-U')}{\sin U'}$$

计算结果为 L'_k 、 U'_k ，由此可求出通过该孔径光线的实际成像位置和像点弥散情况。



“校对公式”从何而来？依据如何？

为确保结果的可靠性，须在计算中逐面校对，通常用**PA校对法**，即

$$\frac{L' \sin U'}{\cos \frac{1}{2}(I' - U')} = PA = \frac{L \sin U}{\cos \frac{1}{2}(I - U)}$$

式中，**PA**是光线入射点到球面顶点的距离。



说明

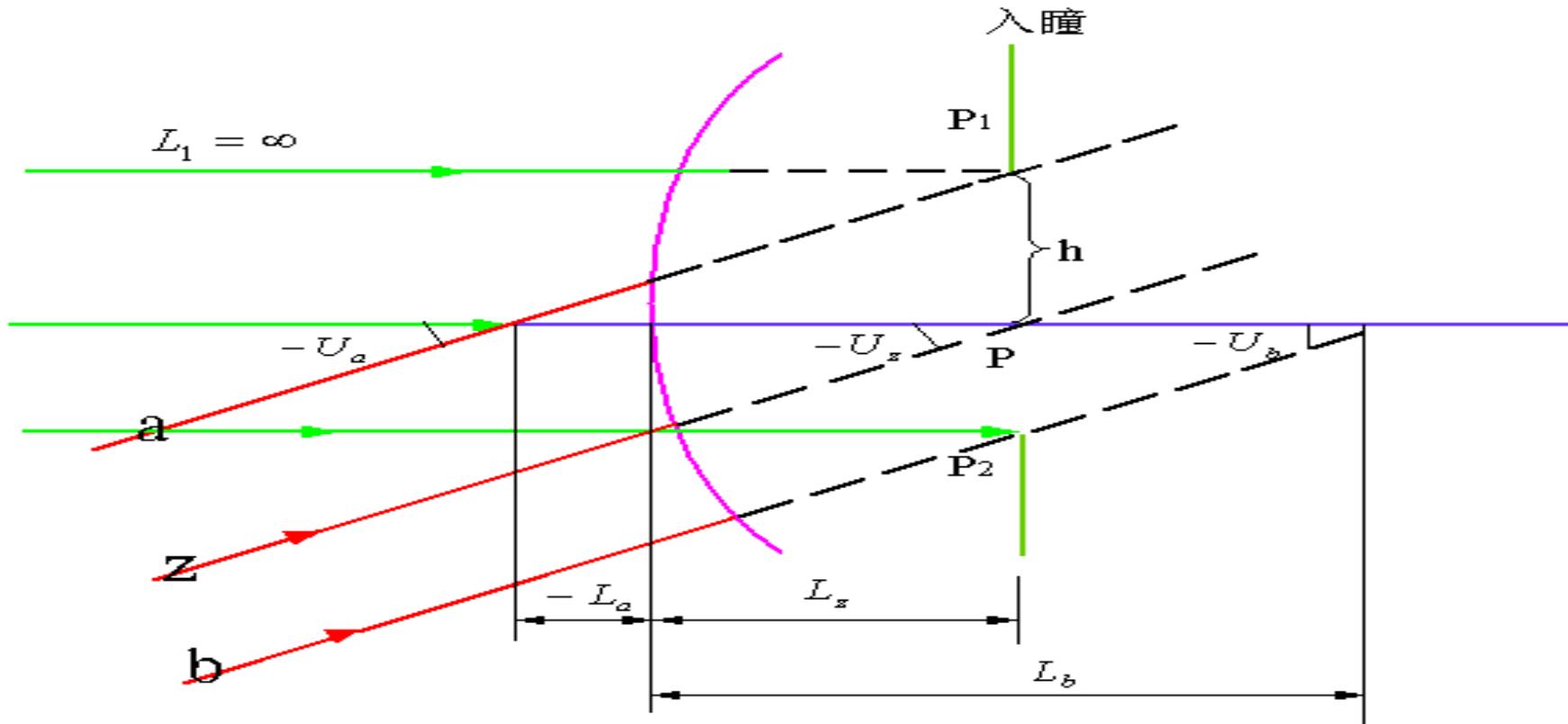
- ① 只要**折射光线与入射光线的PA值相等**，且
折射角 **I'** 和入射角 **I** 符合**折射定律**，就能使折射
与入射光线在球面上**衔接**，以确保计算无误。

- ② 此方法的**不足**是公式中**没包含折射率因子**，
因此，在由 **$\sin I$** 求 **$\sin I'$** 时如发生错误是不会影
响校对结果的，须特别注意。

轴外点子午面内远轴光线的光路计算与轴上点不同，光束**中心线**即**主光线**不是光学系统的对称轴，故一般地，对各个视场要计算多（**11条**）条光线。考虑到问题的**简化**，此处只选代表性的**3条**光线，即**主光线**和上、下光线。

物体在无限远处，若光学系统的视场角为 ω ，入瞳半孔径为 h ，入瞳距为 L_z ，则其三条光线的初始数据如下：

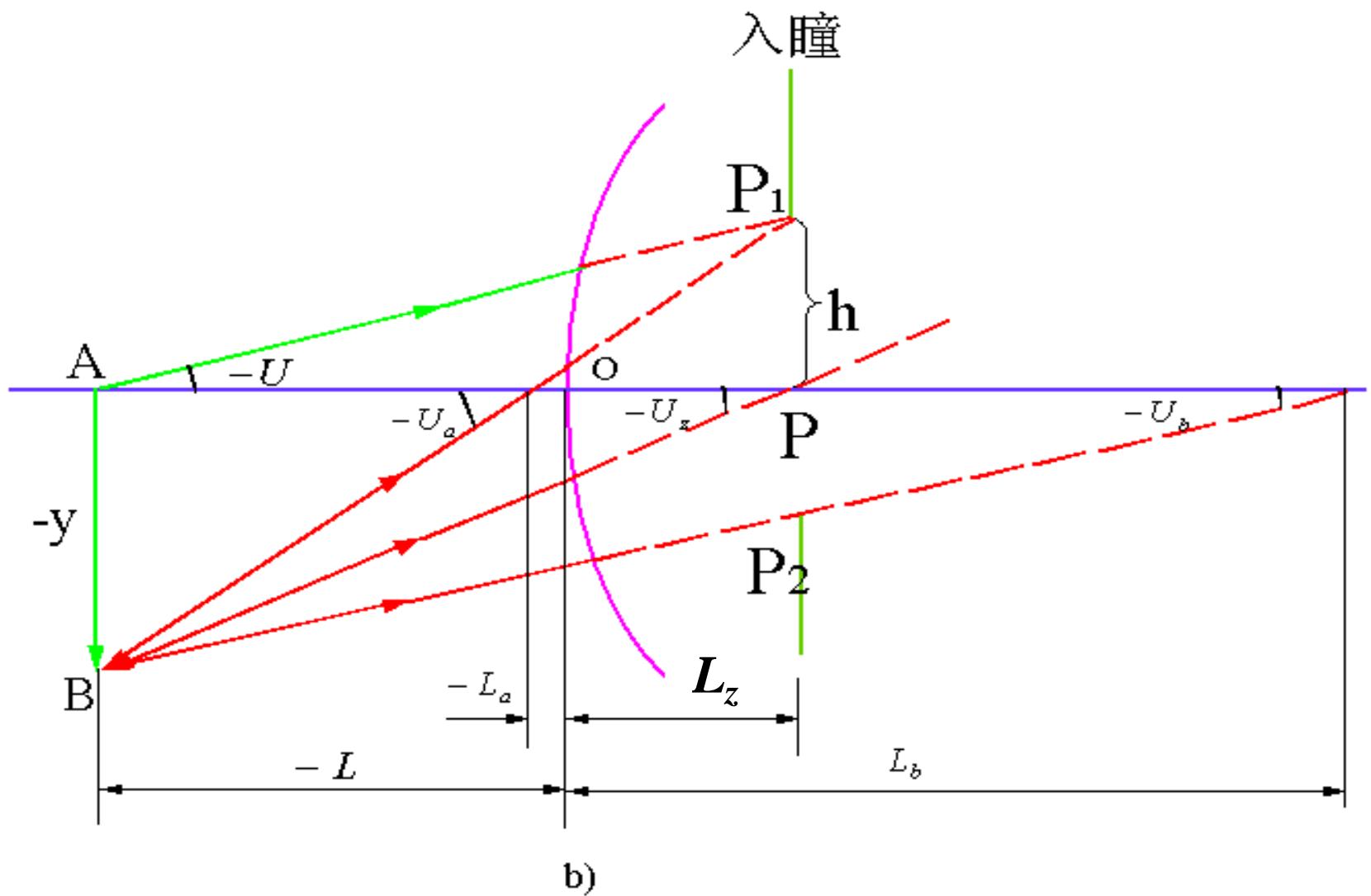
上光线 $U_a = U_z$, $L_a = L_z + h/\tan U_z$
 主光线 $U_z = \omega$, L_z
 下光线 $U_b = U_z$, $L_b = L_z - h/\tan U_z$



a)

物体在有限远处，若光学系统的物距为 L ，物高为 $-y$ ，入瞳半孔径为 h ，入瞳距为 L_z ，则其三条光线的初始数据为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{上光线 } \tan U_a = (y-h)/(L_z-L), \quad L_a = L_z + h/\tan U_a \\ \text{主光线 } \tan U_z = y/(L_z-L), \quad L_z \\ \text{下光线 } \tan U_b = (y+h)/(L_z-L), \quad L_b = L_z - h/\tan U_b \end{array} \right.$$



远轴光计算

光线的初始数据确定后，利用实际光线计算公式和过渡公式逐面计算，可得**实际像高**为

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a' = (L_a' - l') \tan U_a' \\ y_z' = (L_z' - l') \tan U_z' \\ y_b' = (L_b' - l') \tan U_b' \end{array} \right.$$



- ① 上述光路计算虽然应用了校对公式，但还会在两处发生错误。其一，由 $\sin I$ 计算 $\sin I'$ 时；其二，是由 L_{k-1}' 计算 L_k 时。
- ② 当光线的入射高度**超过**折射面半径时，出现 $\sin I > 1$ ；当光线由玻璃进入空气**发生全反射**时，出现 $\sin I' > 1$ ，此两种情况都表示该光线**不能通过**该光学系统。

5.2.1.3 折射平面和反射面的光路计算

折射平面远轴光线的光路计算公式为

$$\left\{ \begin{array}{l} I = -U \\ \sin I' = n \sin I / n' \\ U' = -I' \\ L' = L \tan U / \tan U' \end{array} \right.$$

当 U 角很小时，为提高计算精度，作如下变换：

$$L' = L \frac{n' \cos U'}{n \cos U}$$

类似地，折射平面近轴区光线的光路计算公式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} i = -u \\ i' = n i / n' = -nu/n' \\ u' = -i' \\ l' = l u / u' = l n'/n \end{array} \right.$$

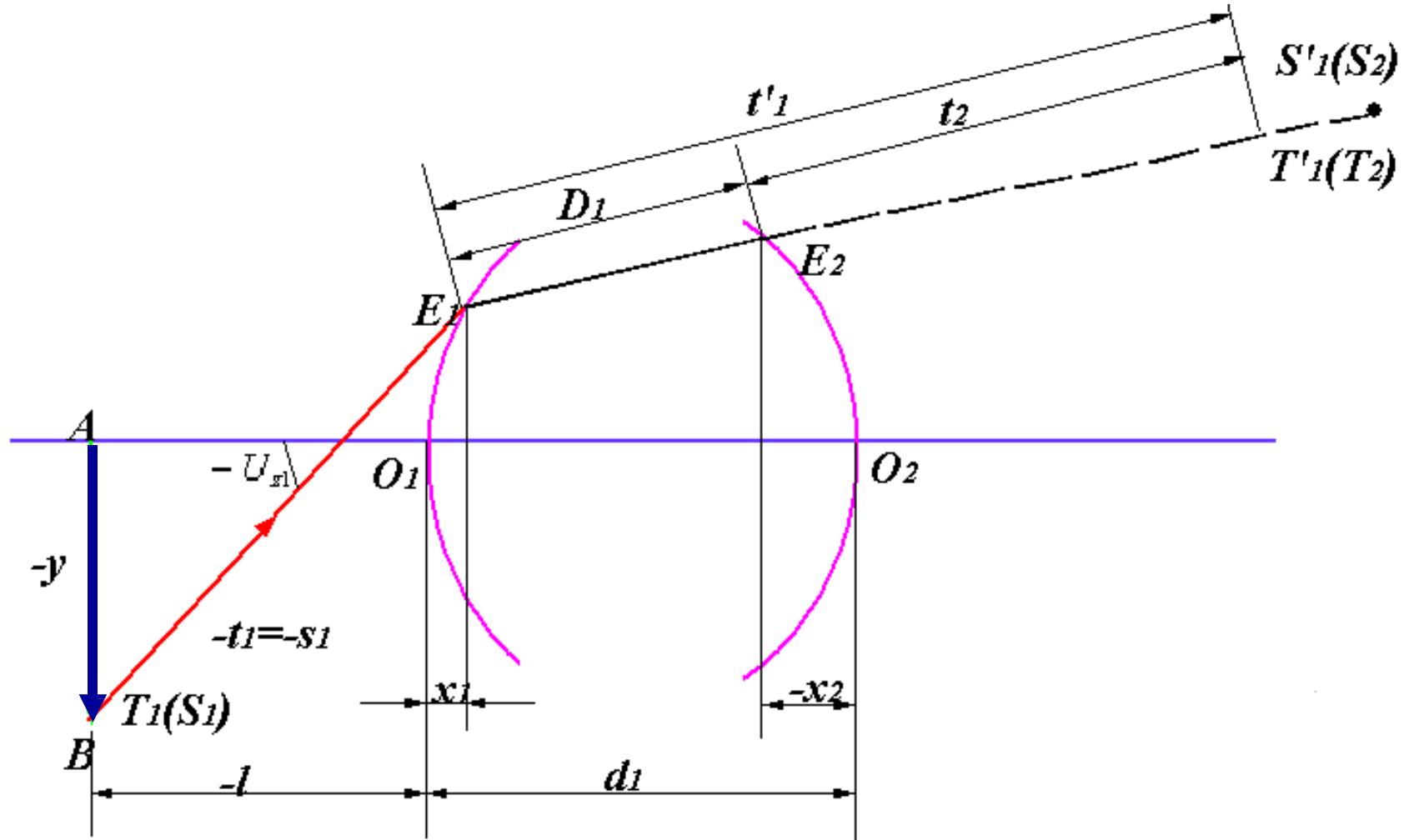
球面校对公式仍然适用于平面。

反射面可作为折射面的特例，在计算时，令 $n' = -n$ ，且将反射面后的光学间隔 d 取负，即可应用折射面公式计算。

5.2.2 沿轴外点光线细光束的光路计算

轴外点细光束的计算是沿主光线进行的，主要研究在子午面内的子午细光束和在弧矢面内的弧矢细光束的成像情况。

若子午光束和弧矢光束的像点不在主光线上的同一点，则系统存在像散。



轴外点细光束计算

子午像点和弧矢像点的计算公式为：

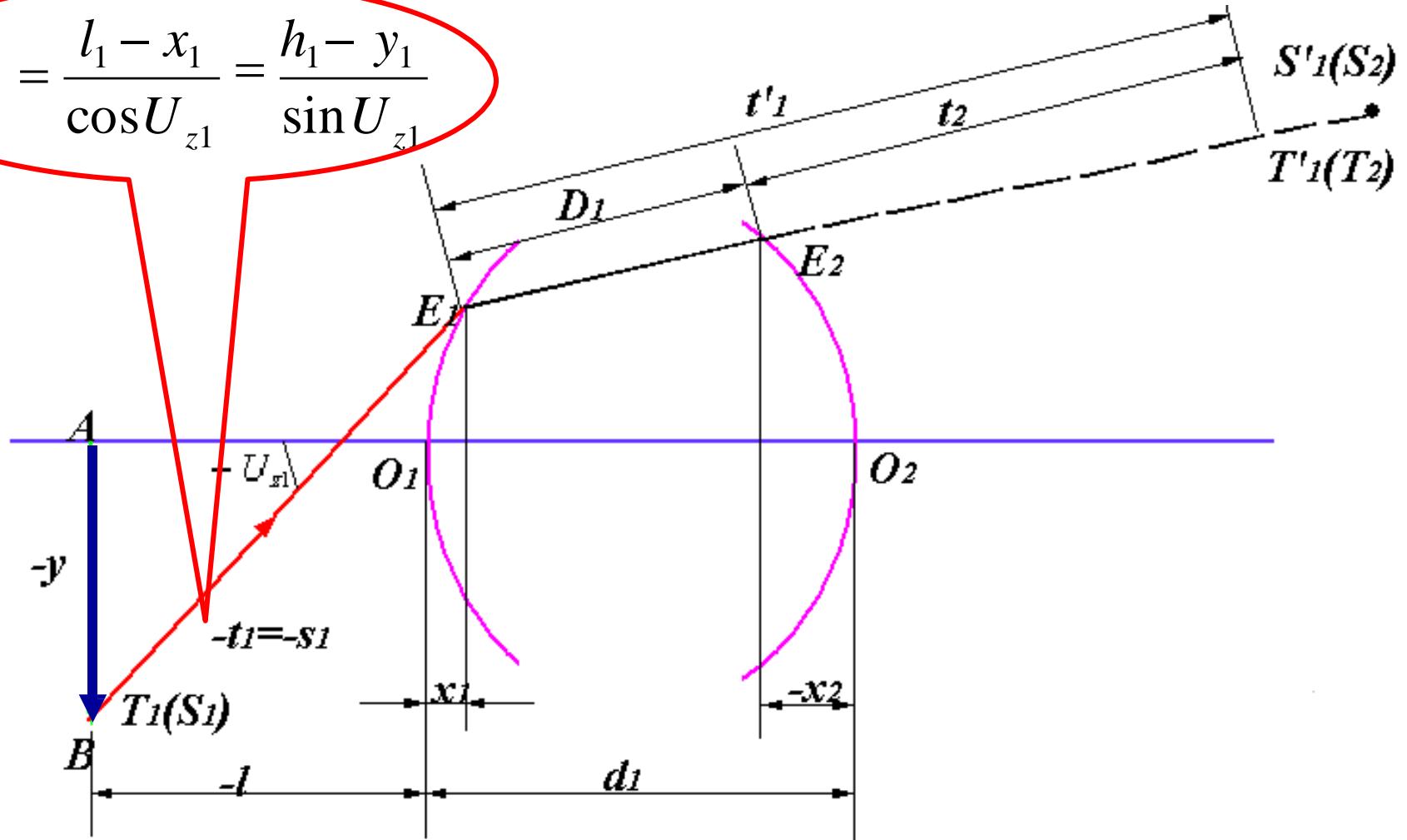
$$\frac{n' \cos^2 I'_z}{t'} - \frac{n \cos^2 I_z}{t} = \frac{n' \cos I'_z - n \cos I_z}{r}$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos I'_z - n \cos I_z}{r}$$

杨氏公式

式中， I_z 、 I'_z 为主光线的入射角和折射角； t 、 t' 为沿主光线计算的子午物距和像距； s 、 s' 为沿主光线计算的弧矢物距和像距。

$$t_1 = s_1 = \frac{l_1 - x_1}{\cos U_{z1}} = \frac{h_1 - y_1}{\sin U_{z1}}$$



轴外点细光束计算

转面是沿主光线进行计算的，过渡公式为：

$$\begin{cases} t_k = t'_{k-1} - D_{k-1} \\ s_k = s'_{k-1} - D_{k-1} \end{cases}$$

式中， D_{k-1} 为相邻折射面间沿主光线方向的间隔。

$$\begin{aligned} D_k &= (h_k - h_{k+1}) / \sin U'_{zk} \\ &= (d_k - x_k + x_{k+1}) / \cos U'_{zk} \\ h_k &= r_k \sin(U_{zk} + I_{zk}) \end{aligned}$$



说明

空间光线的计算比较复杂，一般地，只在
视场和孔径均很大时的系统才有必要进行计算。



实例

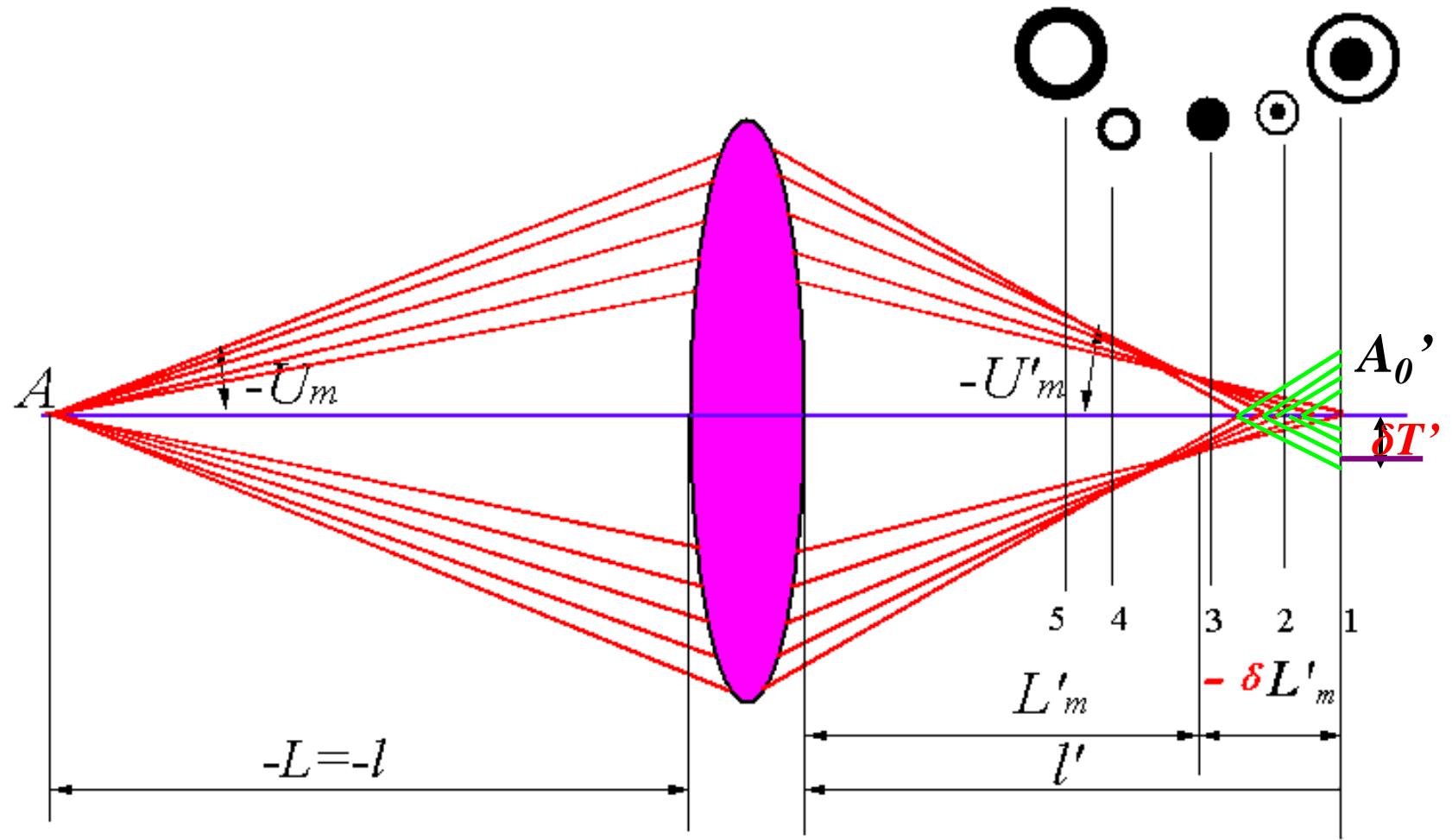
参见课本P110-111

§5.3 球差

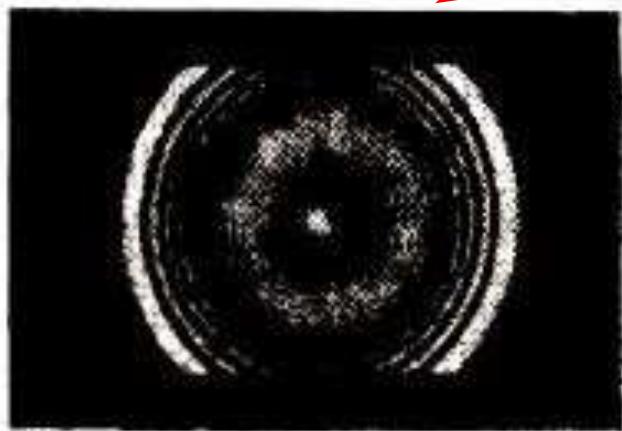
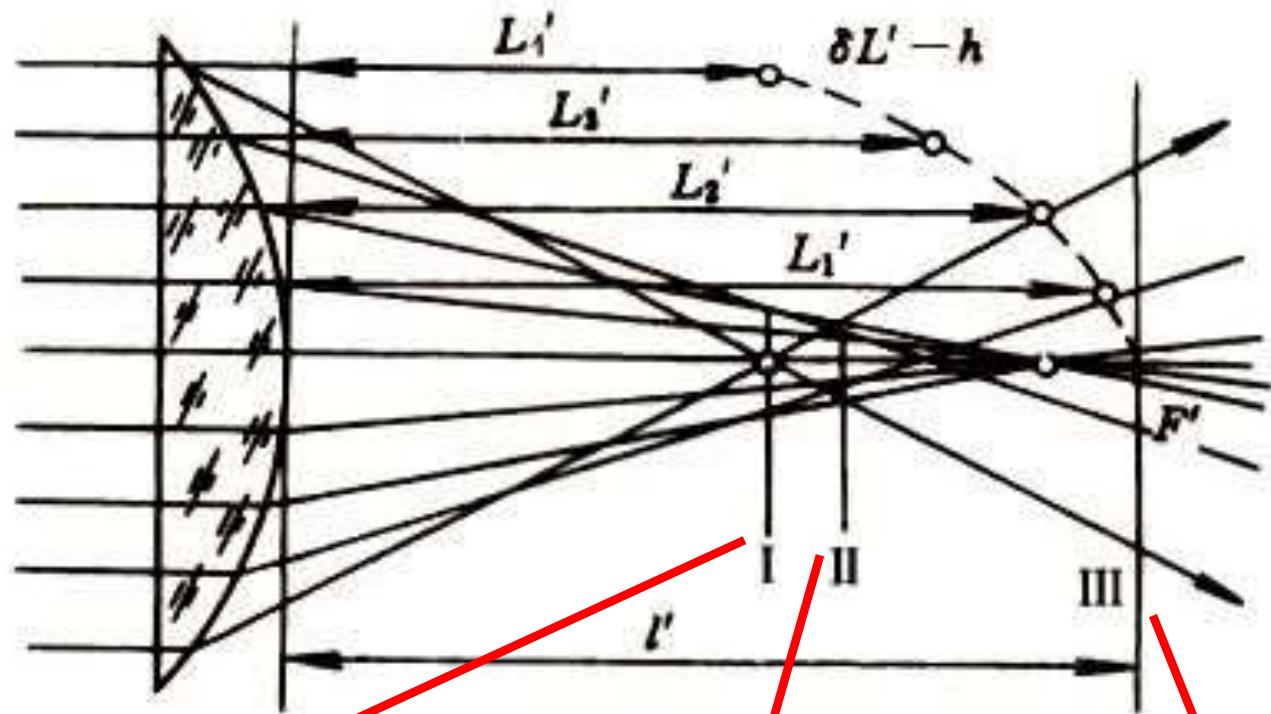
5.3.1 球差 带球差

5.3.1.1 球差的定义和表示方法

由上节子午面内光线的光路计算可知：对于轴上物点，近轴光线的计算结果 l' 和 u' 与光线的入射高度 h_1 或 u_1 ($l \neq \infty$)无关，而远轴光线的光路计算结果 L' 和 U' 随入射高度 h_1 或孔径角 U_1 的不同而异，如下图所示。



轴上点球差



I

II

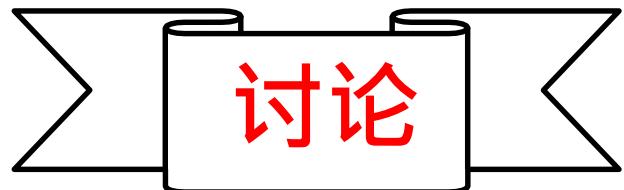
III

球差：轴上点发出的同心光束经光学系统后，不再同心，不同入射高度 $h(U)$ 的光线与光轴交于不同位置，相对于近轴像点（理想像点）有不同程度的偏离，该偏离称为**轴向球差**，简称~。

垂轴球差：因球差的存在，在**高斯像面上**的像点不再是一点，而是一圆形的**弥散斑**，其半径用 $\delta T'$ 表示，称作~。

垂轴球差与轴向球差的关系是：

$$\delta T' = \delta L' \tan U' = (L' - l') \tan U'$$



- ① 球差是入射高度 h_1 或孔径角 U_1 的函数，球差随两者变化的规律，可由其幂级数表示。
- ② 因球差具有轴对称性，当 h_1 或 U_1 变号时，球差 $\delta L'$ 不变，故在级数展开时，没有奇次项。

③ 当 h_1 或 U_1 为零时，像方截距 L' 等于 l' ，即球差 $\delta L'$ 为零，故展开式中没有常数项。

④ 球差是轴上点像差，与视场无关，故展开式中没有 y 或 ω 项。

⑤ 球差可表示如下：

$$\delta L' = \underset{1}{A} \underset{1}{h^2} + \underset{2}{A} \underset{1}{h^4} + \underset{3}{A} \underset{1}{h^6} + \dots$$

或 $\delta L' = \underset{1}{a} \underset{1}{U^2} + \underset{2}{a} \underset{1}{U^4} + \underset{3}{a} \underset{1}{U^6} + \dots$

展开式中，第一项为初级球差，第二项为二级球差，第三项为三级球差。二级以上球差称为高级球差。 A_1 、 A_2 、 A_3 分别为初级、二级、三级球差系数。大部分光学系统二级以上的球差很小，可以忽略，故其球差可表示为：

$$\delta L' = A_{11} h^2 + A_{21} h^4$$
$$\delta L' = a_{11} U^2 + a_{21} U^4$$

⑥ 显然，初级球差与孔径的平方成正比，二级球差与孔径的4次方成正比。当孔径较小时，主要存在初级球差；孔径较大时，高级球差增大。

⑦ 球差分布式：光学系统的球差是由系统各折射面产生的球差传递到系统的像空间后相加而得，故系统的球差可表示为各面对球差的贡献之和，即~。

当对实际物体成像时，对于 k 个面组成的光学系统，其球差的分布式可表示为：

$$\delta L' = -\frac{1}{2n'_k u'_k \sin U'_k} \sum_{-1}^k S_-$$

光学系统
球差系数

式中 S_- 为每个面上的球差分布系数，可表示为：

$$S_- = \frac{n i L \sin U (\sin I - \sin I') (\sin I' - \sin U)}{\cos \frac{1}{2}(I-U) \cos \frac{1}{2}(I'+U) \cos \frac{1}{2}(I+I')}$$

因初级球差在近轴区有意义，此时角度的正弦值可由其弧度值代替，则初级球差可表示为：

$$\delta L'(\text{初}) = -\frac{1}{2n'_k u'^2} \sum_1^k S_I$$

式中每个面上的球差分布系数 S_I 可表示为：

$$S_I = luni(i - i')(i' - u)$$



小结

根据近轴光线的光路计算，由 S_I 计算出每个面的球差分布系数，进而求出系统的初级球差 $\delta L'$ (初)。知道了系统的初级球差和实际球差，则可根据球差的幂级数展开式算出高级球差分量。



$$\delta L' = A_1 h^2 + A_2 h^4$$

$$\delta L' = a_1 U^2 + a_2 U^4$$

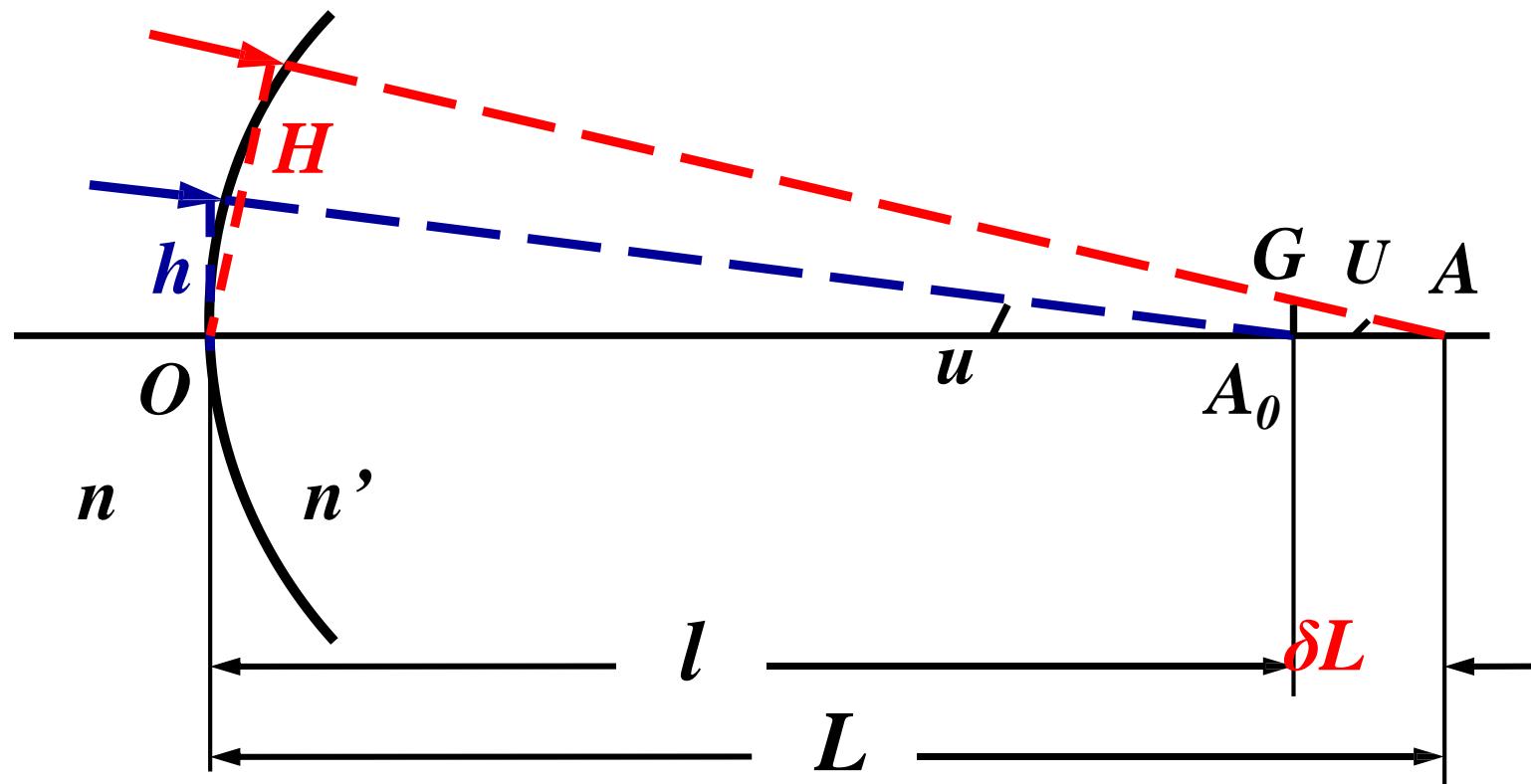


补充讨论

★ 单个折射球面的球差与球差分布公式的导出

通过对整个光学系统近轴光路和实际光路的计算，可求得该系统各孔径带上的球差值。但在此计算中，不能获知系统中各个折射面对球差的贡献大小、正负及其它性质，而这些性质正是光学设计中为控制和校正球差所必须了解的。因此，有必要讨论各个面产生球差的情况及其分布。

★ 单个折射球面的球差与球差分布公式的导出



如上图，为得出一般表达式，假设某一面的物方已有**球差**。分别从球面的顶点 O 和近轴物点 A_0 作子午光线的垂线，其长度分别为：

$$H = L \cdot \sin U$$

$$G = \delta L \cdot \sin U$$

根据**球差定义式**代入上式可得：

$$G = H - l \cdot \sin U$$

上式两边皆乘以 nu ，以 h 代 lu ，并根据轴上物点经单折射球面成像公式，有

$$u = h/r - i, \quad \sin U = H/r - \sin I$$

代入前式可得：

$$Gnu = hnsin I - Hni$$

同样对于像方，可得相应的公式

$$G'n'u' = hn'sin I' - H'n'i'$$

上两式相减，并将 G 、 H 及 G' 、 H' 代入得，

$$G'n'u' - Gnu = h(n'\sin I' - n\sin I) - (H'n'i' - Hni)$$

$$n'u'\sin U'\delta L' - nu \sin U \delta L = -(L'\sin U' - L\sin U)ni$$

令

$$S_- = 2(L'\sin U' - L\sin U)ni$$

则

$$\delta L' = \frac{n u \sin U}{n'u'\sin U'} \delta L - \frac{1}{2n'u'\sin U'} S_-$$

$$\delta L' = \frac{n u \sin U}{n' u' \sin U'} \delta L - \frac{1}{2 n' u' \sin U'} S$$

显然，某表面像空间的球差由物方球差在像空间的贡献和表面本身所产生的球差两部分构成。前者由轴向放大率的因子反映到像空间，后者由球差分布系数 S 决定。

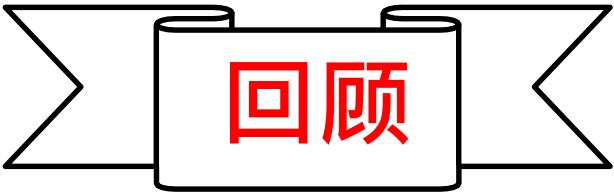


根据PA校对公式， S_- 可写为

$$\frac{L' \sin U'}{\cos \frac{1}{2}(I' - U')} = PA = \frac{L \sin U}{\cos \frac{1}{2}(I - U)}$$

$$S_- = \frac{n i L \sin U (\sin I' - \sin U) (\sin I - \sin I')}{\cos \frac{(I - U)}{2} \cos \frac{(I' + U)}{2} \cos \frac{(I + I')}{2}}$$

这是一个表征球面产生球差的重要表示式。



回顾

为确保结果的可靠性，须在计算中逐面校对，通常用 PA 校对法，即

$$\frac{L' \sin U'}{\cos \frac{1}{2}(I' - U')} = PA = \frac{L \sin U}{\cos \frac{1}{2}(I - U)}$$

式中， PA 是光线入射点到球面顶点的距离。

因初级球差在近轴区域内有意义，故角度的正弦值可用弧度值取代，余弦可用1代替，初级球差可表示为：

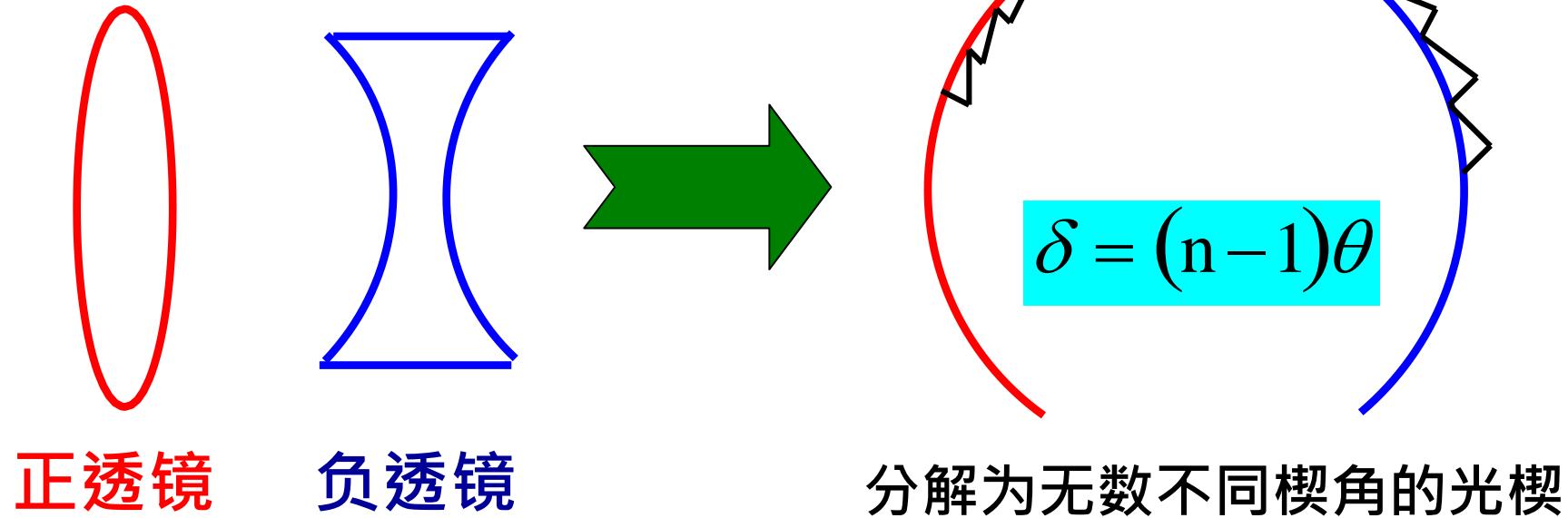
$$\delta L'(\text{初}) = -\frac{1}{2n'_k u'^2_k} \sum_1^k S_I$$

$$S_I = luni(i - i')(i' - u)$$

由此，可作近轴光路计算，求出系统的初级球差。并根据系统的初级球差和实际球差，求出高级球差分量。

5.3.1.2 球差的校正

对于**共轴球面系统**，单透镜本身不能校正球差，单正透镜产生**负球差**，单负透镜产生**正球差**，正、负透镜组合则有可能**校正球差**。



由前述球差公式知，球差是孔径的偶次方函数，故校正球差只能使某带的球差为零。

校正方法

通过改变系统结构参数，使球差公式中初级球差系数 A_1 和高级球差系数 A_2 符号相反，使初级球差和高级球差大小相等、符号相反，则该带的球差为零。



应用

在实际设计光学系统时，通常使初级球差与高级球差相补偿，将边缘带的球差校正为零。首先以光线的相对高度表示展开式：

$$\delta L' = A_1 \left(\frac{h}{h_m} \right)^2 + A_2 \left(\frac{h}{h_m} \right)^4$$

式中 h_m 表示边缘光线的入射高度。下表 m 表示边缘光线。

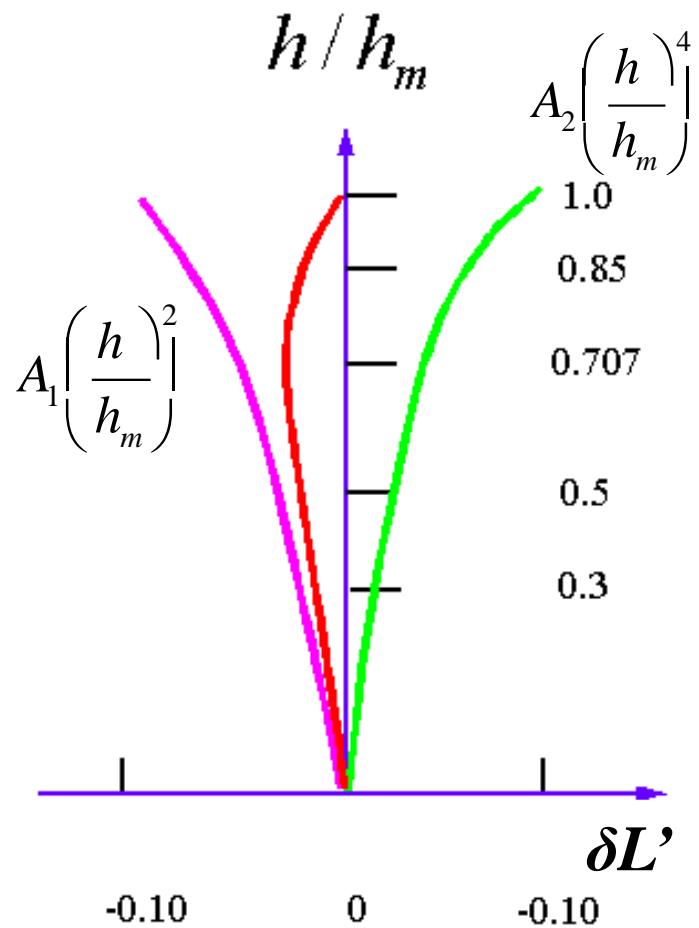
当对 $h=h_m$ 的边光消球差时，有 $A_1 = -A_2$ 。

将上式对 h 微分，并令 $\frac{d}{dh}(\delta L') = 0$ ，可求得球差的极值：

$$h = 0.707h_m$$

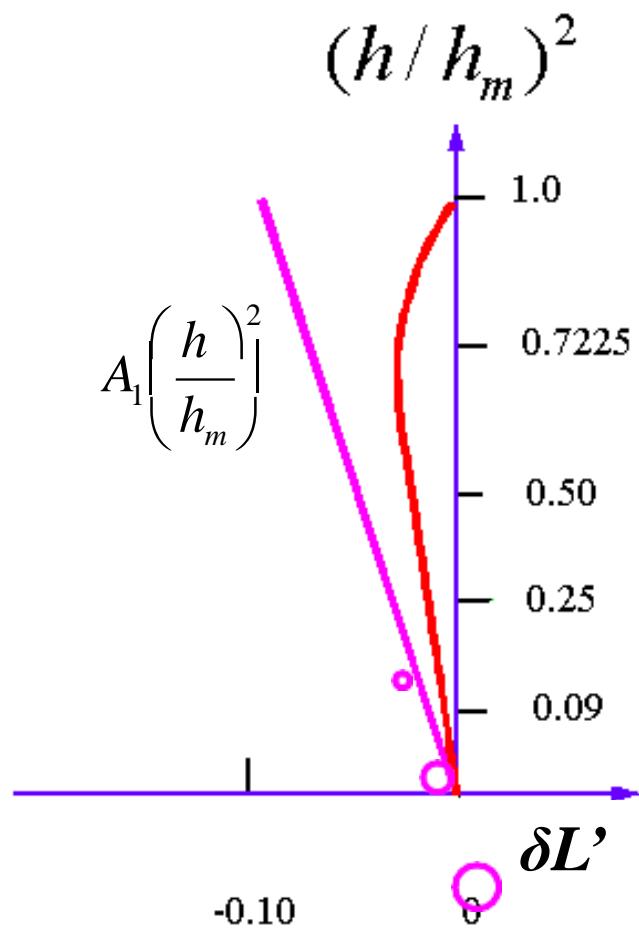
当边光球差为零时， $h=0.707h_m$ 这一带光线通常称带光，具有最大的剩余球差，其值为

$$\delta L'_{\max} = 0.25A_1$$



a)

球差曲线



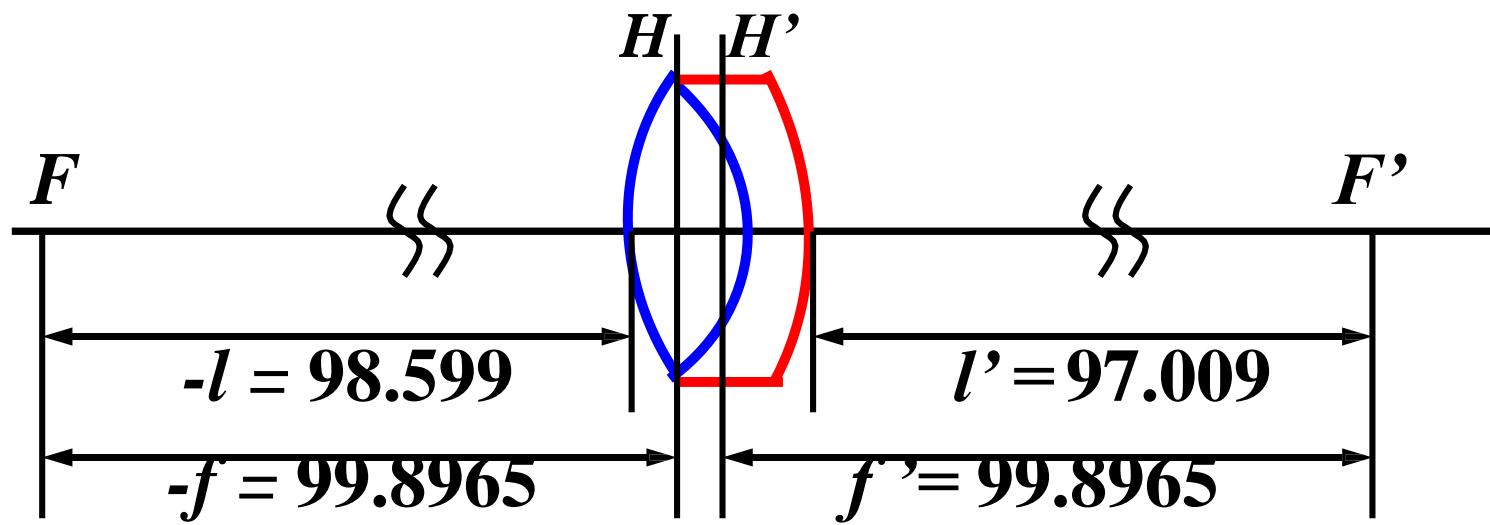
为直线时，仅
存在初级球差

[例题1] 以双胶合望远物镜为例，计算其球差。
胶合透镜的结构参数如下：(单位： mm)

$$r_1 = 62.5, r_2 = -43.65, r_3 = -124.35$$

$$d_1 = 4.0, d_2 = 2.5$$

$$n_1 = 1, n_1' = n_2 = 1.51633, n_2' = n_3 = 1.6727, n_3' = 1$$



假设轴上点边缘光线高 $h_I = 10mm$ ，则该物镜的近轴光和边缘光的像方截距分别为：

$$l' = 97.009, L_m' = 97.005$$

对0.707的带光作光路计算得： $L_z' = 96.983$

则该物镜的边光球差和带光球差分别为：

$$\delta L_m' = -0.004, \delta L_z' = -0.026$$

当边光球差为零时，带光具有最大剩余球差：

$$\delta L_z' = 0.25A_I$$

可得， $A_1 = -0.100$ ， $A_2 = 0.096$ ，该物镜的球差展开式可写为：

$$\delta L' = -0.1 \left(\frac{h}{h_m} \right)^2 + 0.096 \left(\frac{h}{h_m} \right)^4$$

按此式求出的球差和光线光路计算所得的球差均列于下表：

光线的高度 h/h_m	0.3	0.5	0.707	0.85	1
按公式求得 $\delta L'$	-0.0082	-0.0190	-0.0260	-0.0222	-0.0040
由光路计算 $\delta L'$	-0.008	-0.020	-0.026	-0.022	-0.004



显然，用两种方法计算所得的球差在数值上甚为一致，表明该物镜主要存在初级像差和二级像差，该系统只能对一个孔径带采用初级球差和二级球差相抵消的办法校正球差。



特征点

根据球差分布式可知，对于单个折射球面，存在几个特殊的物点位置，不管球面的曲率半径如何，均不产生球差。

① $L = 0$ ，此时亦有 $L' = 0$ ， $\beta=1$ 。即物点和像点均位于球面顶点时，不产生球差。

② $\sin I - \sin I' = 0$ ，即 $I = I' = 0$ 。表示物点和像点均位于球面曲率中心，或 $L = L' = r, \beta = n/n'$ 。

③ $\sin I' - \sin U = 0$ ，即 $I' = U$ 。因为

Snell定理

$$\sin I' = n \sin I / n' = n (L - r) \sin U / n' r$$

故可得出， $L = (n + n') r / n$

正弦定理

同理，由 $\sin I = \sin U'$ 可得出： $L' = (n + n') r / n'$

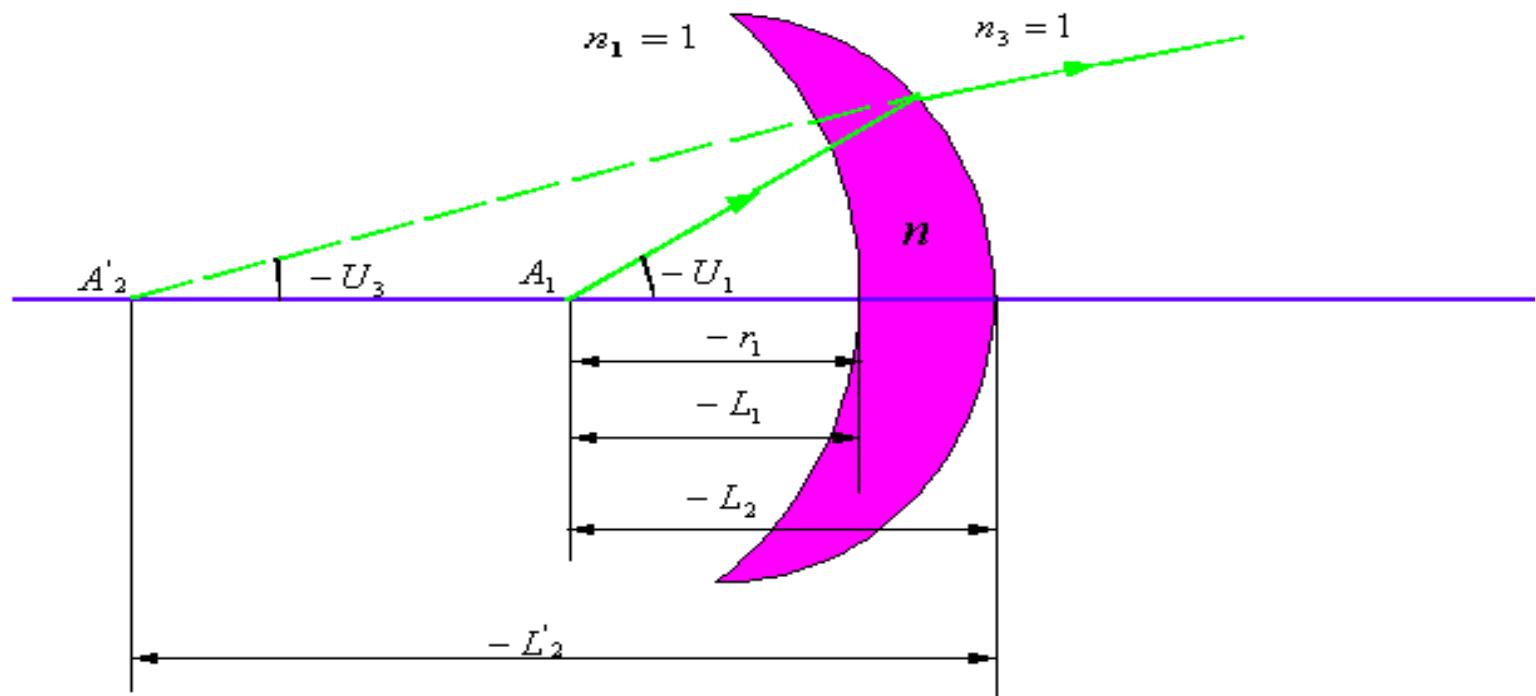
由上述两公式所确定的共轭点，不管孔径角 U 有多大，均不产生球差。由上式可得出， $nL = n'L'$ ，则该面的垂轴放大率为：

$$\beta = nL' / n'L = (n/n')^2$$



上述三对不产生像差的共轭点称作不晕点或齐明点，常利用齐明点的特性来制作齐明透镜，以增大物镜的孔径角，用于显微镜或照明系统中。

实例



齐明透镜

[实例1] 物点位于透镜的第一个折射面的曲率中心，对于该表面，有

$$L_1 = L_1' = r_1 \quad , \quad \beta_1 = n_1/n_2 = 1/n$$

第二个折射面满足公式

$$\left\{ \begin{array}{l} L = (n + n') r / n \\ L' = (n + n') r / n' \end{array} \right.$$

若透镜的厚度为 d ，且置于空气中，则有

$$L_2 = L_1 - d = r_1 - d$$

$$L_2' = n_2 L_2 / n_3 = n L_2$$

$$r_2 = n_2 L_2 / (n_2 + n_3) = n L_2 / (n + 1)$$

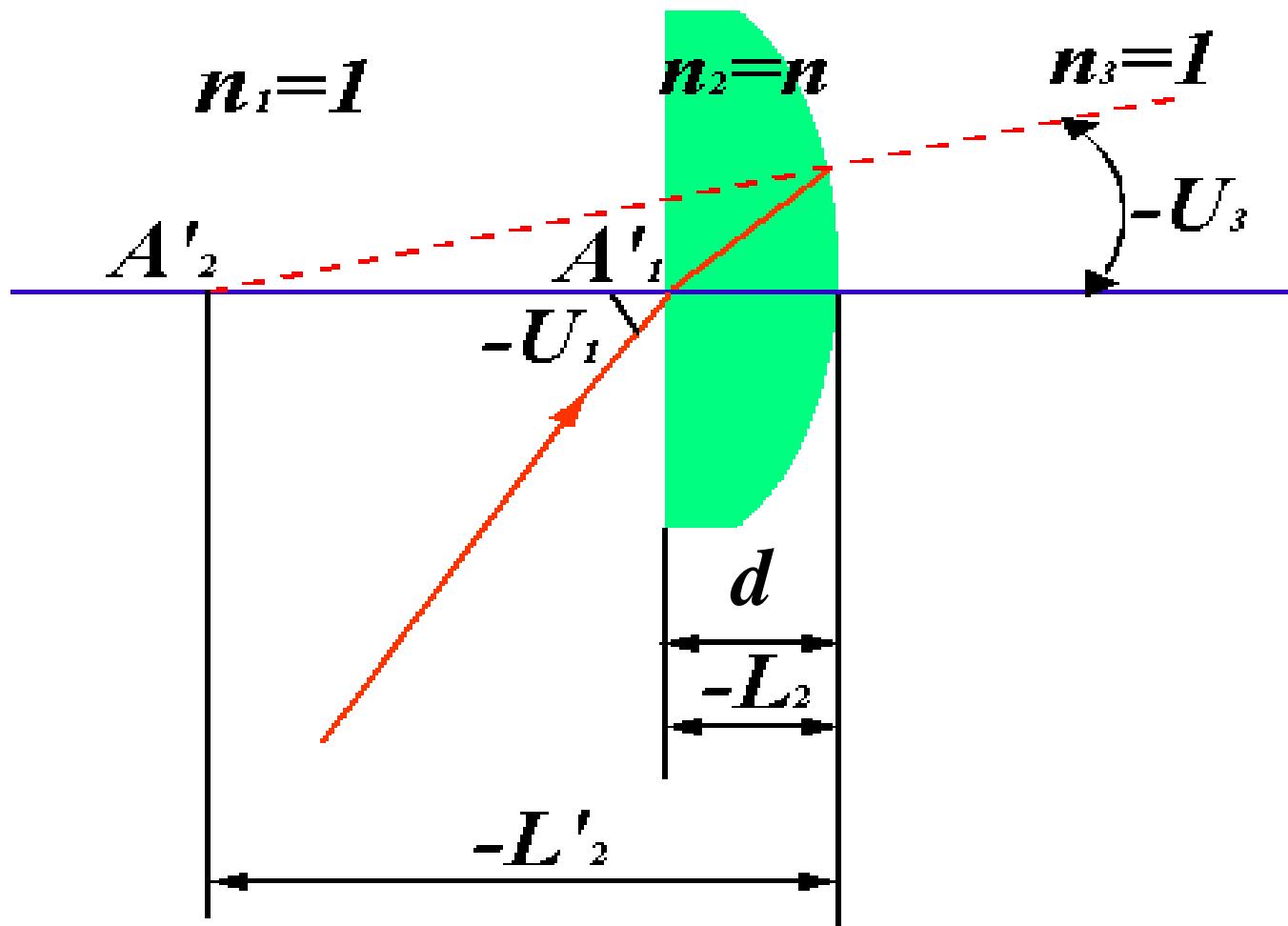
$$\beta_2 = (n_2/n_3)^2 = n^2$$

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = n$$

由这样两个齐明面组成的透镜称**齐明透镜**，
经该透镜后有， $\sin U_3 = \sin U_1 / \beta = \sin U_1 / n$

若透镜的折射率为1.5，则可使系统入射光
束的**孔径角增大1.5倍**。若此镜后还有二个
如 此设计的齐明镜，则有 $\sin U_5 = \sin U_1 / n^3$

[实例2]



带齐明面的透镜

物点与第一个折射面的顶点重合，即
 $L=L'=0$ ， $\beta_1=+1$ 。第一个表面的曲率半径可以是任意的，通常为平面，如上图。第二个折射面满足齐明条件，当透镜厚度为 d 时，有

$$L_2 = -d$$

$$L_2' = n_2 L_2 / n_3 = -nd$$

$$r_2 = n_2 L_2 / (n_2 + n_3) = -nd / (n + 1)$$

$$\beta_2 = (n_2 / n_3)^2 = n^2$$

$$\beta = \beta_1 \beta_2 = n^2$$

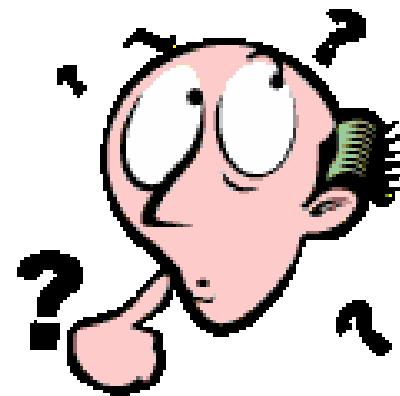
$$\sin U_3 = \sin U_1 / \beta = \sin U_1 / n^2$$



若光学系统有较大的孔径角，则在系统像差校正时困难较大，但若**在系统的前面放一齐明透镜**，则对于轴上点（对于小面元）不引进像差，从而大大减少后面系统的孔径角负担，系统的残余像差不大。

思考题

平行平板系统是否会产生球差？若有，其初级像差公式如何？若无，其条件如何？



5.3.2 平行平板的球差

光学系统中常用于转像或转折光轴的反射棱镜，相当于具有一定厚度的平行平板。另外，分划板、滤光片、载玻片和盖玻片等都属于此类光学元件。

什么是平行平板的球差？

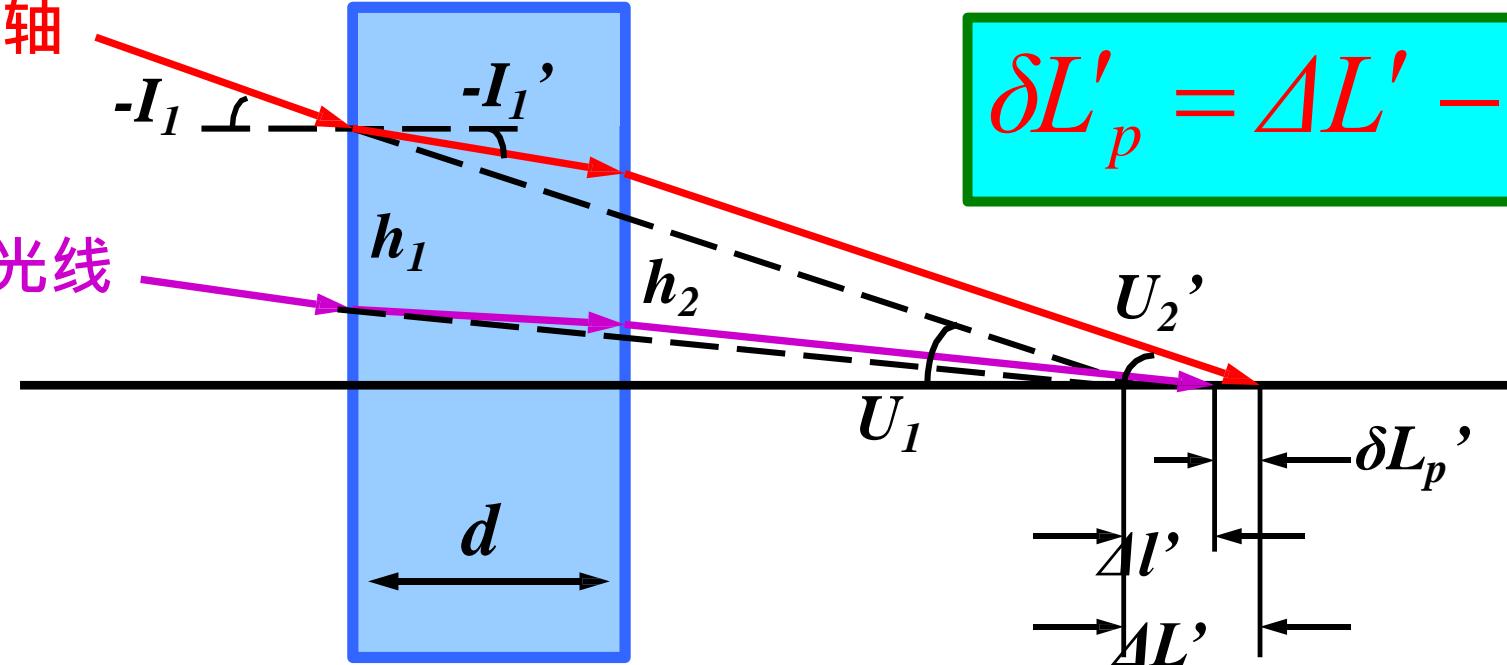


非近轴
光线

$-I_1$

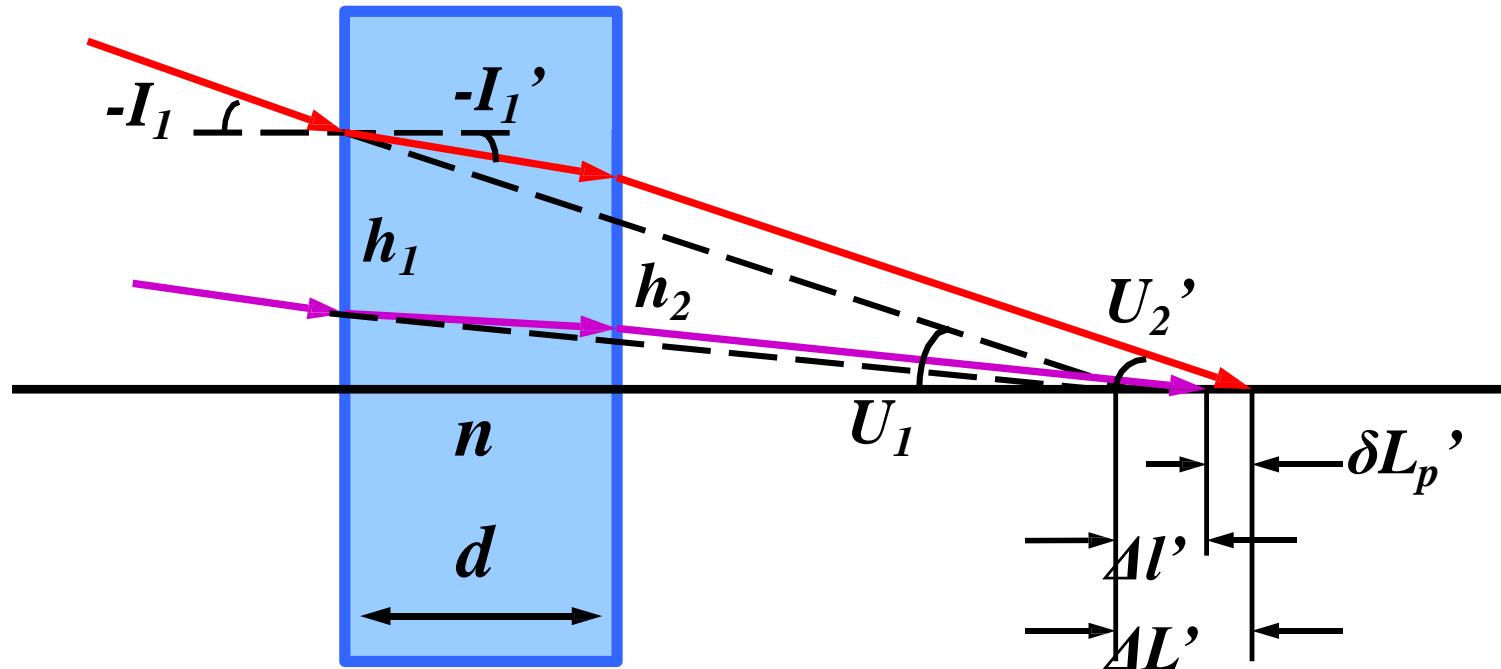
$-I_1'$

近轴光线



$$\delta L'_p = \Delta L' - \Delta l'$$

平行平板的球差：中心在光轴上的同心光束入射到与光轴垂直的平行平板时，与光轴成不同角度的光线经其折射后，具有不同的轴向位移。这就是~。



对于近轴光线，像相对于物的距离为

$$\Delta l' = d \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

对于非近轴光线，像相对于物的位移量为

$$\Delta L' = d \left(1 - \frac{\tan I'_1}{\tan I_1} \right)$$

则平行平板的实际球差为

$$\delta L'_p = \Delta L' - \Delta l' = \frac{d}{n} \left(1 - \frac{\cos I_1}{\cos I'_1} \right)$$

式中 I_1 即为该光线的孔径角 U_1 。

平行平板的初级球差公式可从前述一般公式中推出，

$$\sum S_1 = -\frac{n^2 - 1}{n^3} du_1^4$$

$$\delta L'_{pi} = -\frac{1}{2n'_2 u'^2_2} \sum S_1 = \frac{n^2 - 1}{2n^3} du_1^2$$



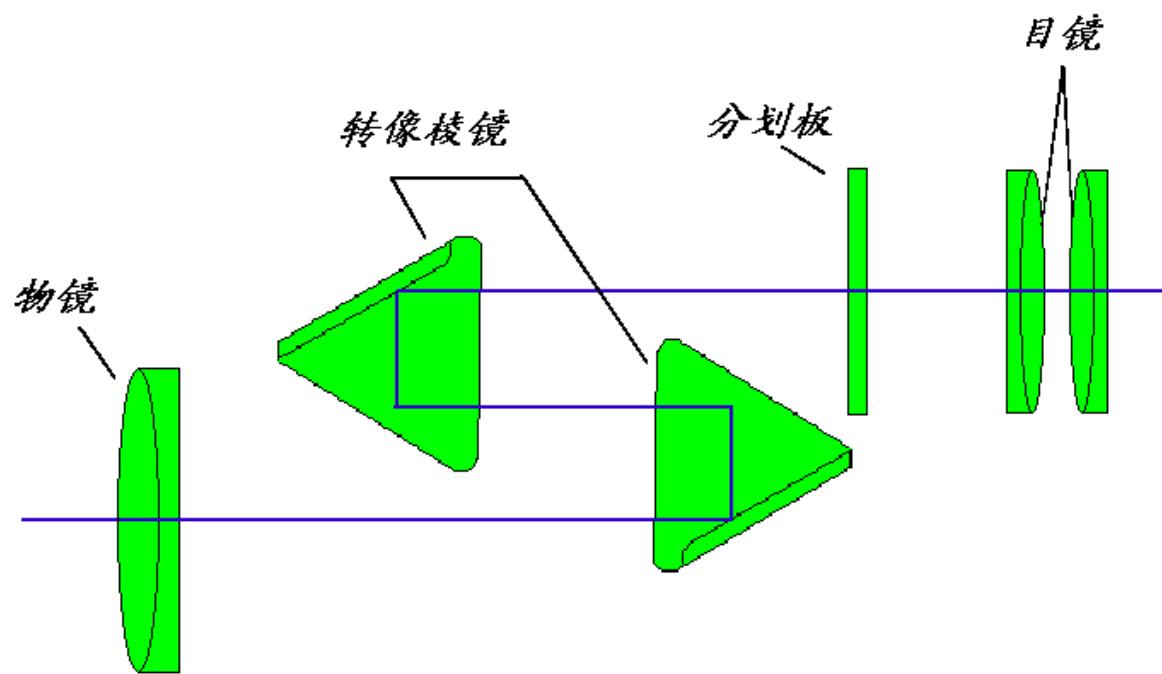
结论

- ① 平行平板恒产生正球差，其大小随平板厚度 d 和入射光束孔径角 U_I 的增大而增大。
- ② 平行平板只有当处于 $U_I=0$ 的平行光束中才不会产生球差。

举例

[实例1] 如图所示的双目望远镜系统中，若物镜的相对孔径为 $1/3.5$ ，两块转像棱镜相当于厚度为 $86mm$

的平行平板，
其折射率为
 1.5696 。分
析 两块转像
棱镜 产生的
球差。



根据上述平行平板的球差公式，可求出此转像棱镜产生的初级球差和实际球差分别为：

$$\delta L'_{pi} = \frac{n^2 - 1}{2n^3} du_1^2 = 0.3277$$

$$\delta L'_p = \frac{d}{n} \left(1 - \frac{\cos I_1}{\cos I'_1} \right) = 0.3292$$

此时高级球差（0.0015）很小，该物镜系统的球差容限为0.0292，故物镜须保留-0.3的球差与之补偿。

$$\tan u_1 = \frac{D/f}{2} = \frac{1/3.5}{2} = \frac{1}{7}$$

$$u_1 = \tan^{-1} \frac{1}{7} \approx 8.1301^\circ$$

$$u_1^2 = \tan^{-1} \frac{1}{7} \times \frac{\pi}{180} \approx 2.0135 \times 10^{-2}$$

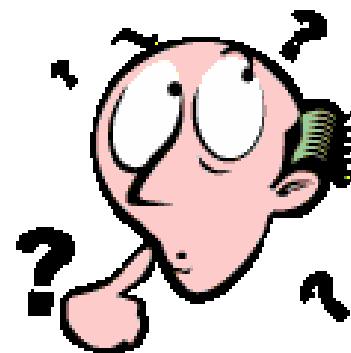
$$I_1 = u_1 = 8.1301^\circ$$

$$I'_1 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \sin I_1 \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\sin 8.1301^\circ}{1.5696} \right) \approx 5.1694^\circ$$

[实例2] 在数值孔径为0.65的显微物镜的发散光束中，由*0.17mm*厚的盖玻片所产生的初级球差和实际球差分别为*0.0134mm*和*0.0178mm*，均已超过物镜的球差容限，且高级球差也大。因此，在大孔径高倍显微物镜中，盖玻片应作为物镜的一个光学元件来一起校正球差。

思考题

薄透镜和薄透镜系统的初级球差如何计算？在实际光学设计中，常常需要根据初级像差要求来求解初始结构参数，故将初级球差公式表示成结构参数的函数是必要的。



下次课讨论...

由前面的讨论可知，初级球差表示式为：

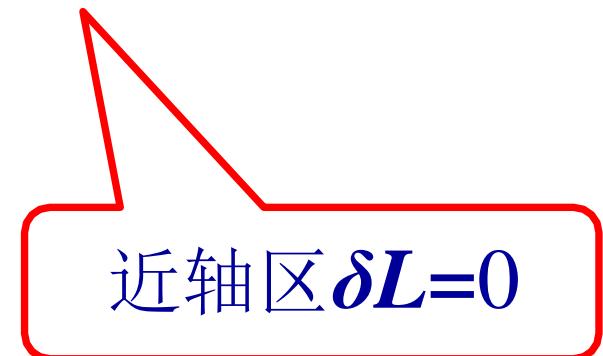
$$\delta L'_0 = -\frac{n_1 u_1^2 \sin U}{n'_k u'^2_k \sin U'} \delta L_0 - \frac{1}{2n'_k u'^2_k} S_I$$

$$S_I = luni(i - i')(i' - u)$$

当入射光束发自实物点时， $\delta L_0=0$ ，上式右边仅有一项。

$$\delta L' = \frac{n u \sin U}{n' u' \sin U'} \delta L - \frac{1}{2 n' u' \sin U'} S$$

显然，某表面像空间的球差由物方球差在像空间的贡献和表面本身所产生的球差两部分构成。前者由轴向放大率的因子反映到像空间，后者由球差分布系数S-决定。



对于单个薄透镜，初级球差可表示为：

$$\delta L'_0 = \frac{1}{2n'_2 u'^2_2} [l_1 u_1 i_1 (i_1 - i'_1)(i'_1 - u_1) + l_2 u_2 n_2 i_2 (i_2 - i'_2)(i'_2 - u_2)]$$

其中， lu 即光线在折射面上的高度 h ，而

$$ni = n\left(\frac{h}{r} - u\right) = hn\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) = hQ$$

$$(i - i')(i' - u) = h^2 Q \Delta \frac{1}{nl}$$

式中， Q 为阿贝不变量。

因此，初级球差分布系数 S_I 可表示为：

$$S_I = h^4 Q^2 A \frac{1}{nl}$$

对于单薄透镜，当光焦度 ϕ 一定时，两个面的曲率中仅一个为自由变数，若以 ρ_1 、 ρ_2 、 σ_1 、 σ_2' 分别表示 r_1 、 r_2 、 l_1 、 l_2' 的倒数。则单个薄透镜的初级球差可表示成结构参数的函数，即

$$\delta L'_0 = -\frac{1}{2n'u'^2} h^4 A$$

其中，

$$A = \frac{n+2}{n} \varphi \rho_1^2 - \left(\frac{2n+1}{n-1} \varphi^2 + \frac{4n+4}{n} \varphi \sigma_1 \right) \rho_1 + \frac{3n+1}{n-1} \varphi^2 \sigma_1 + \frac{3n+2}{n} \varphi \sigma_1^2 + \frac{n^2}{(n-1)^2} \varphi^3$$

或

$$A = \frac{n+2}{n} \varphi \rho_2^2 - \left(\frac{2n+1}{n-1} \varphi^2 + \frac{4n+4}{n} \varphi \sigma'_2 \right) \rho_2 + \frac{3n+1}{n-1} \varphi^2 \sigma'_2 + \frac{3n+2}{n} \varphi \sigma'^2_2 + \frac{n^2}{(n-1)^2} \varphi^3$$

由此可见，薄透镜的初级球差与物体位置、透镜折射率、透镜形状有关。对给定折射率与物体位置的透镜，若使光焦度不变而改变其形状，其初级球差按抛物线变化；这种保持光焦度不变而改变透镜形状的做法称为整体弯曲。

将A代入 δL_0 ，并求其对 ρ_1 的一阶和二阶导数可知，当下式成立时，球差为极值。

$$\rho_{10} = \frac{(2n+1)n}{2(n+2)(n-1)} \varphi + \frac{2(n+1)}{n+2} \sigma_1$$

球差为极值时的透镜称为最佳形状透镜。

当物体位于无穷远时，有

$$\rho_{10} = \frac{(2n+1)n}{2(n+2)(n-1)} \varphi$$

当物体位于无穷远时，有

$$\delta L'_0 = -\frac{h^2}{8f'} \cdot \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2(n+2)}$$

此式对于正透镜为极大值，对于负透镜为极小值。故正透镜恒产生负球差，负透镜恒产生正球差。



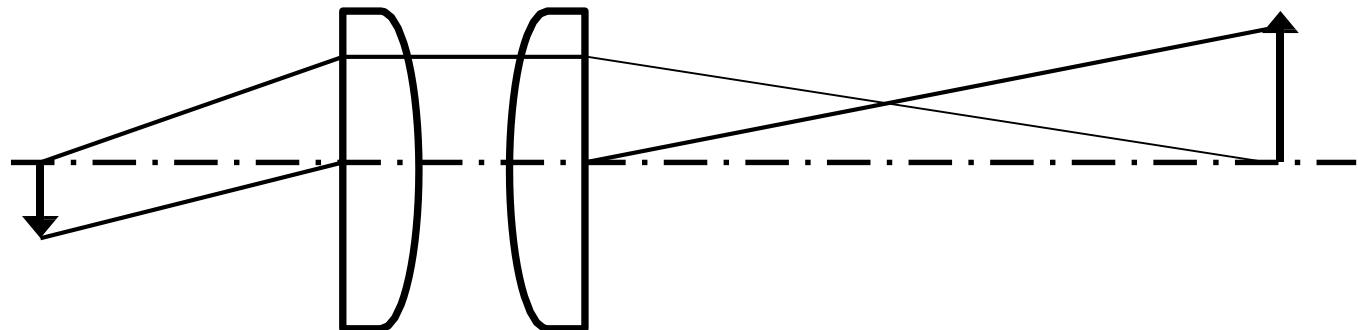
① 根据上式可计算出，只有 $n=1.68614$ 的光学玻璃，其**最佳形状**是严格的**凸面朝向物体的平凸透镜**。对于一般应用于可见光波段的玻璃，当 $l=\infty$ 时，凸面朝向物体的平凸透镜并非严格的最佳形状，但**球差接近最小值**。因此，当仅需用单透镜对无穷远物体成像时，取**平凸透镜为最佳**。



② 判断透镜的形状是否最佳还有一个简单的方法——即当透镜的形状恰使入射和出射光线关于透镜对称时，所产生的球差最小。此时，光线正处于最小偏向角处；两个面的球差贡献相同。

应用

③ 据②中判断可知，当以**负1倍率成像时**，**以等半径的双凸透镜为最佳**；物体位置接近**焦平面时**，**以平面朝向物体的平凸透镜最优**。例如，照明用聚光镜系统，通常采用如下结构形式。



以上讨论了单薄透镜，对于**薄透镜系统**，可将其**初级球差**表示式写为：

$$\delta L'_0 = -\frac{1}{2n'u'^2} \sum S_I = -\frac{1}{2n'u'^2} \sum h^4 A$$

其中， A 是每个透镜的结构参数的函数，同前述表达式；对于相接触的薄透镜系统，光线在各透镜上的高度相等。因此，此式可用于求解**薄透镜系统的初始结构**。



举例

参考书P101 ...

§ 5.4 正弦差和彗差

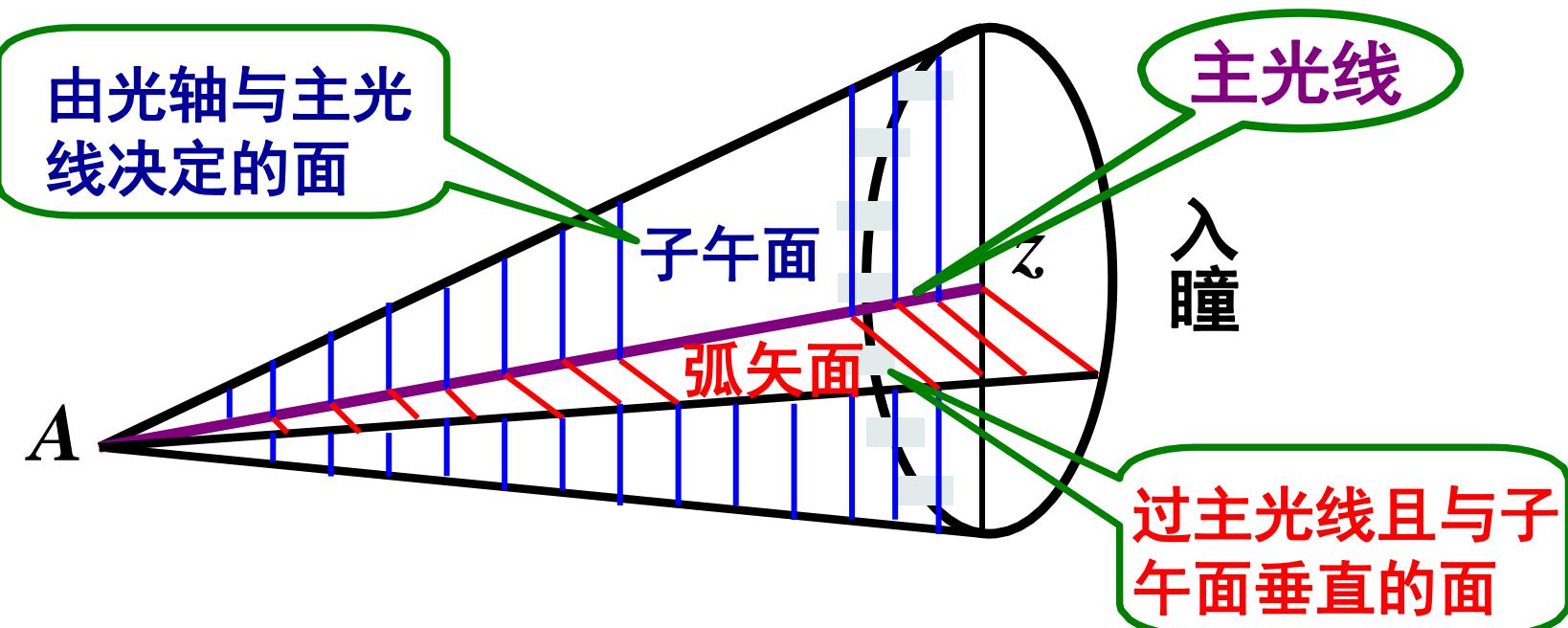
5.4.1 正弦差

上节讨论的球差只能表征光学系统对轴上物点以单色光成像时的像质，而实际光学系统往往需要对有限大小物面成像。

对于轴外物点，主光线不是系统的对称轴，对称轴是通过物点和球心的辅助轴。对于主光线的同心光束，经系统后失去对称性。

正弦差: 近轴条件下，在小视场、大孔径（即宽光束）成像的不对称性产生的像差，称~。

为清晰地讨论此类像差的形成，我们定义两个相互垂直的平面——**子午面**和**弧矢面**。



5.4.1.1 正弦条件、等晕条件

在子午面内，轴上点及与其相邻的近轴点，其理想成像的条件——**正弦条件**如下：

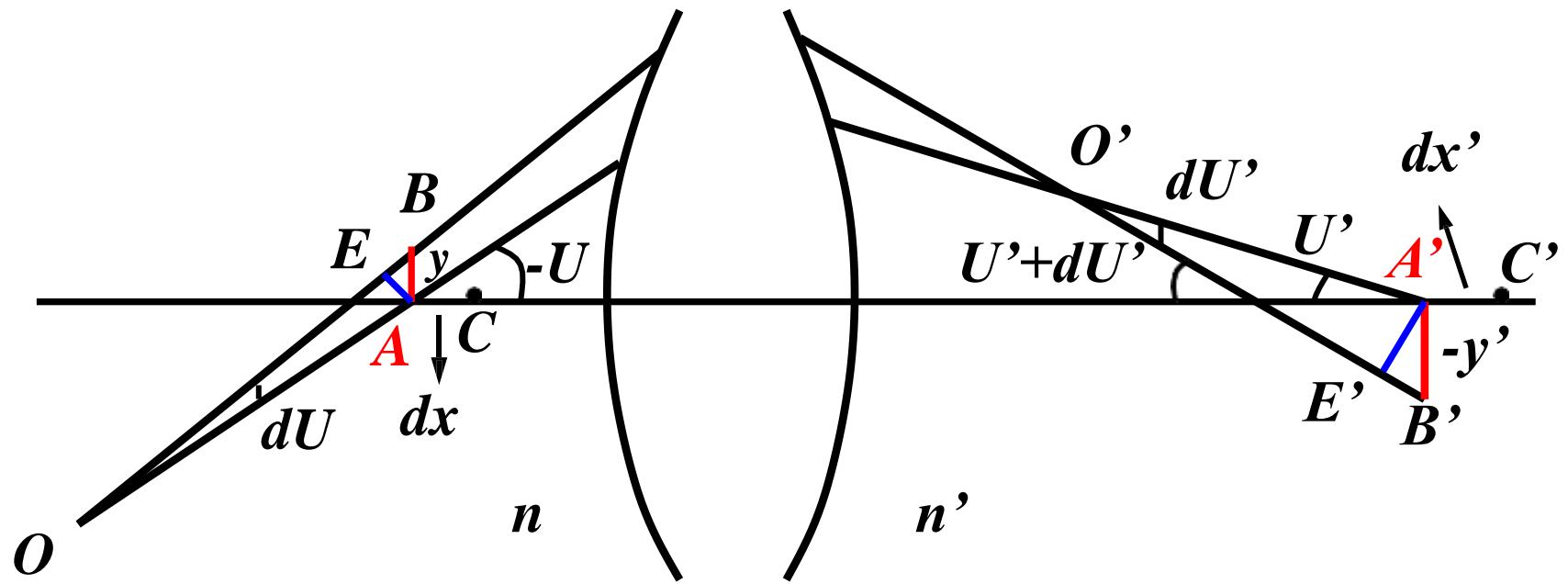
$$ny \sin U = n'y' \sin U'$$

当光学系统满足正弦条件时，**若轴上点理想成像，则近轴点也理想成像**，即此系统既无球差也无正弦差。此即所谓**不晕成像**。

思考题

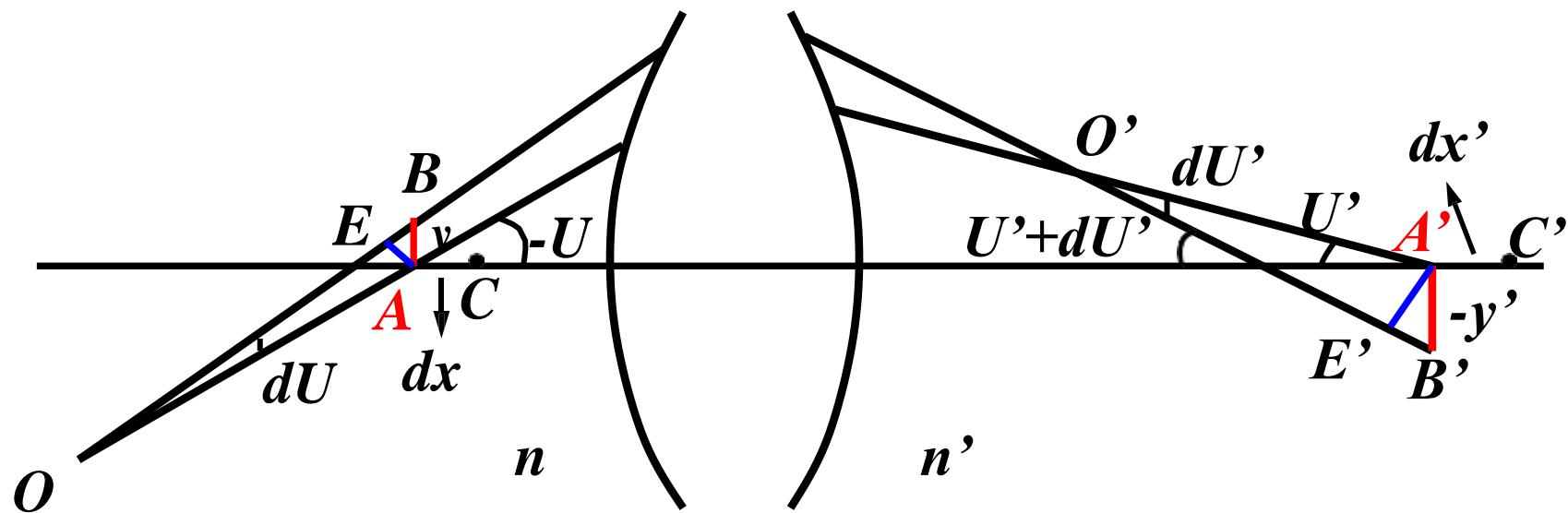
试从费马原理出发导出正弦条件。





光轴上的点 A 成完善像于 A'

如图，光轴上的点A成完善像于 A' ；B是在过A的垂轴方向上无限靠近A的一点，设它也被系统成完善像于 B' 。分别以y、 y' 表示AB和 $A'B'$ 。过A点的光线 OA 与光轴成 U 角，其共轭光线 $O'A'$ 与光轴成 U' 角。过B点的光线 OB 与光轴成 $U+dU$ 角，其共轭光线 $O'B'$ 与光轴成 $U'+dU'$ 角。

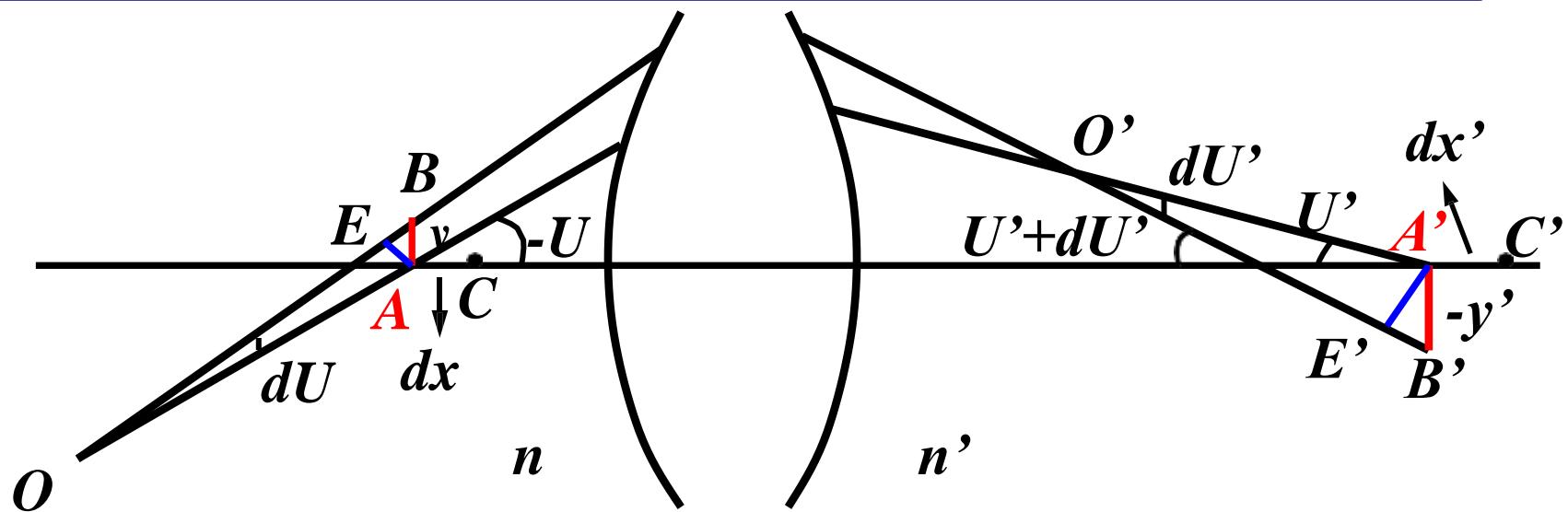


根据**费马原理**，光程($OAA' O'$)应与($OBB' O'$)相等，即

$$n \cdot OA + (AA') - n' \cdot O'A' = n \cdot OB + (BB') - n' \cdot O'B'$$

故有

$$n(OA - OB) - n'(O'A' - O'B') = (BB') - (AA') \quad (\text{a})$$

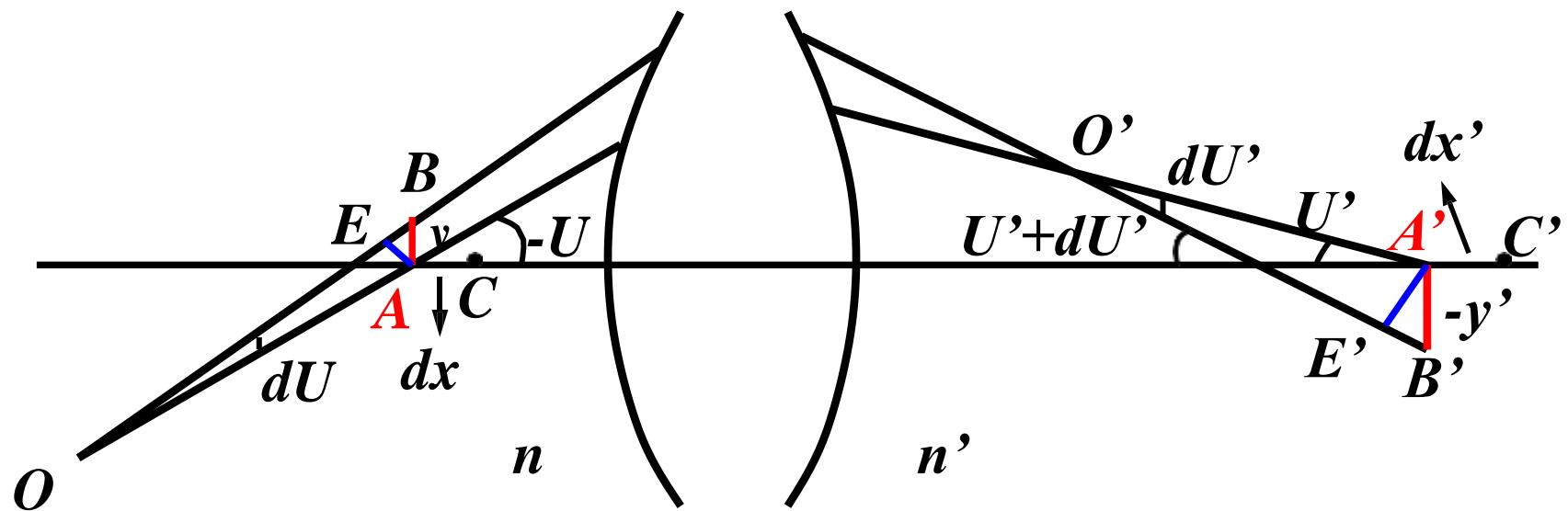


以 O 点为中心， OA 为半径作圆弧，交光线 OB 于 E 。因 dU 角极小，从 ΔABE 可得

$$OA - OB = BE = AB \cdot \sin(-U) = -y \sin U \quad (\text{b})$$

同理，在像方可得

$$O'A' - O'B' = -y' \sin U' \quad (\text{c})$$

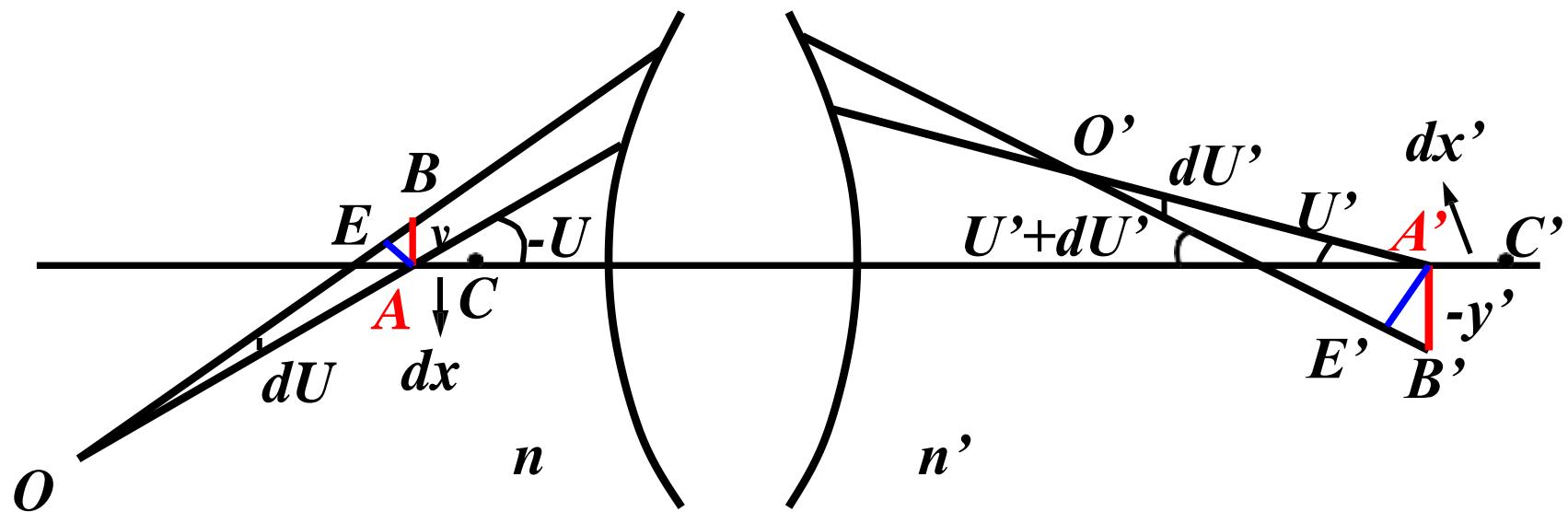


将 (b) 和 (c) 式代入 (a) 式，得

$$n'y' \sin U' - ny \sin U = (BB') - (AA')$$

因 A' 和 B' 分别是 A 和 B 的完善像，根据费马原理，其间的光程各为极值，即

$$\delta(AA') = \delta(BB') = 0$$

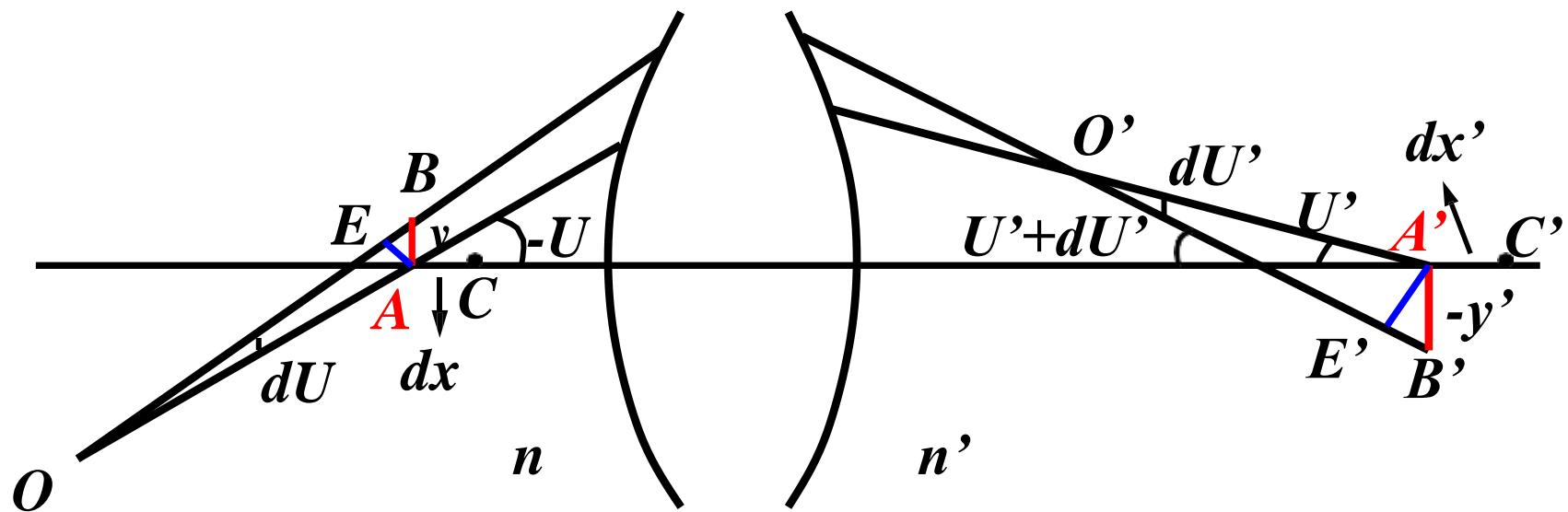


因此光程(AA')和(BB')各为常数，二者之差也为常数，该常数可由一条沿光轴的光线来确定。对于此光线 $U=U'=0$ ，故该常数为0。

因此得

$$n'y'\sin U' = ny \sin U$$

证毕。



讨论

① 当物体在无穷远时， $\sin U_I=0$ ，正弦条件可以表示为：

$$f' = h/\sin U'$$

② 等晕成像：近轴点与轴上点具有相同的成像缺陷，称为~。此时，系统须满足等晕条件：

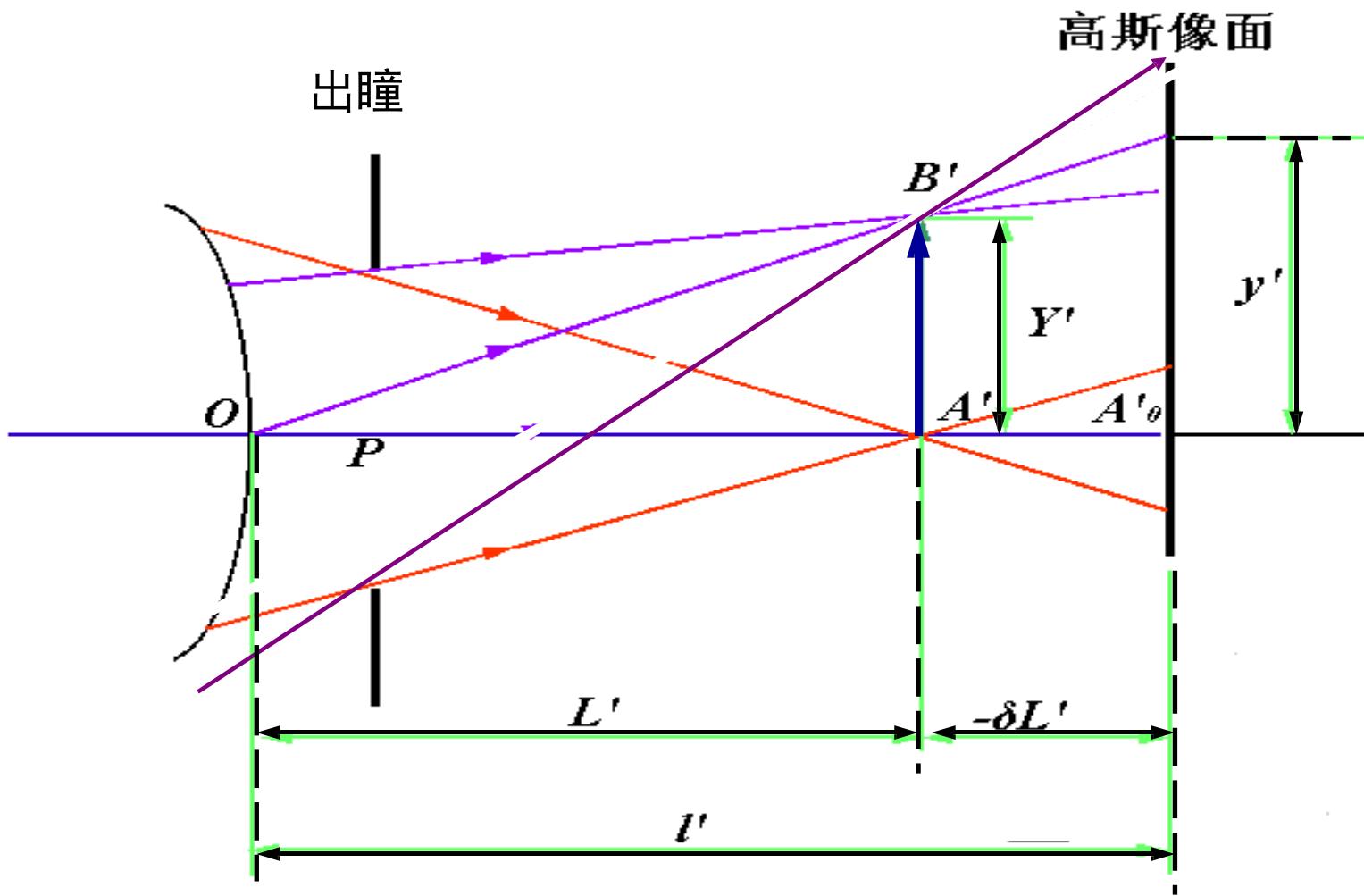
$$\frac{1}{\beta} \frac{n}{n'} \frac{\sin U}{\sin U'} - 1 = \frac{\delta L'}{L' - l_z}$$

式中， l_z' 为第二近轴光线计算的出瞳距， β 为近轴区垂轴放大率。

若物体在无穷远，**等晕条件**为：

$$\frac{h_1}{f' \sin U'} - 1 = \frac{\delta L'}{L' - l_z'}$$

因研究**近轴点成像**，其视场较小，故其它视场像差不考虑。如下图，轴上点与轴外点具有相同球差，轴外光束无彗差，**系统满足等晕条件**。



等晕成像

③ 若系统不满足等晕条件，则上述等晕条件公式不等，其偏差即**正弦差**，用 OSC' 表示。

物体在**有限远**时，其正弦差为

$$osc' = \frac{n}{\beta n'} \frac{\sin U}{\sin U'} - \frac{\delta L'}{L' - l_z'} - 1$$

物体在**无限远**时，其正弦差为

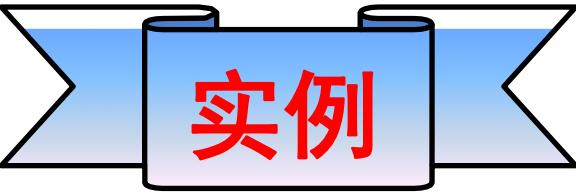
$$osc' = \frac{h_1}{f' \sin U'} - \frac{\delta L'}{L' - l_z'} - 1$$

④ 正弦差 $OSC' = 0$, 球差 $\delta L' \neq 0$, 则满足等晕条件; 若正弦差 $OSC' = 0$, 球差 $\delta L' = 0$, 由物体在**有限远时**的正弦差公式可求得

$$ny \sin U = n'y' \sin U'$$

这正是正弦条件, 显然, **正弦条件是等晕条件的特殊情况。**

⑤ 由正弦差公式知, 除出瞳距 l_z' 外, 其余各参量在计算球差时已求出。对于**近轴点**, 只需计算**一条第二近轴光线**即可确定**正弦差**。



实例

参见P116双胶合望远物镜的正弦差

⑥ 由正弦差表示式知，与视场无关，只是孔径的函数，其随孔径的变化规律与球差相同，故其级数展开式可写为

$$C' = \underset{1}{A} h^2 + \underset{2}{A} h^4 + \underset{3}{A} h^6 + \dots$$

第一项为初级正弦差，第二项为二级正弦差，以此类推。初级正弦差的分布式可写为

$$OSC' = -\frac{1}{2J} \sum_1^k S_{II}$$

$$S_{II} = l u n i_z (i - i') (i' - u) = S_I i_z / i$$

S_{II} 称为初级彗差分布系数。由此可知，当 l 一定时，初级正弦差与孔径的平方成正比，而与视场无关，此与上述展开式一致。但分布式中含有与光阑位置有关的 i_z 项，故正弦差与孔径光阑的位置有关，改变光阑的位置可使正弦差发生变化。因此，可将光阑位置作为校正正弦差的一个参数。

⑦ 由初级彗差分布系数公式可知，以下各处
均 不产生正弦差： a) $i_z=0$ ，即光阑
在球面的曲率中心

b) $l=0$ ，即物点在球面的顶点 c)
 $i=i'$ ，即物点在球面的曲率中心

d) $i'=u$ ，即物点在 $L=(n'+n)r/n$ 处
显然，前述三对无球差的物、像点的位置，也
无正弦差，均满足正弦条件。校正了球差，并
满足正弦条件的一对共轭点即不晕点或齐明点。

5.4.1.2 赫歇尔条件*

——当光学系统对于轴上点成完善像时，在沿轴方向上与之很靠近的另一点也成完善像时所满足的条件称~。

假设轴上点 A 成完善像于 A' ，轴上与之相距 dx 的另一点 B 成完善像于 B' ，且 $A'B'=dx'$ 。用与正弦条件相同的方法可得：

$$n'dx'\left(1-\cos U'\right)=ndx\left(1-\cos U\right)$$

引入轴向放大率 α 与 β 的关系，即可得到**赫歇尔条件**的数学表达式为：

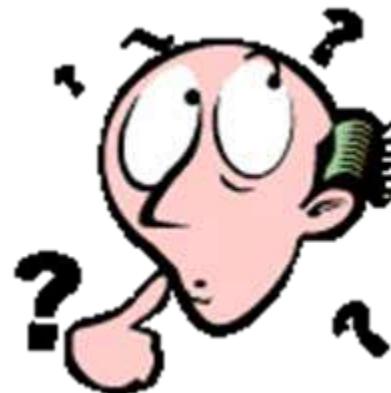
$$n'y'\sin \frac{U'}{2} = ny \sin \frac{U}{2}$$

比较赫歇尔条件与正弦条件可知：一般情况下，两者不能同时被满足。表明，光学系统对某一垂轴物平面完善成像后，不能再对邻近的物平面成完善像。因此，对整个空间完善成像的光学系统是不存在的。

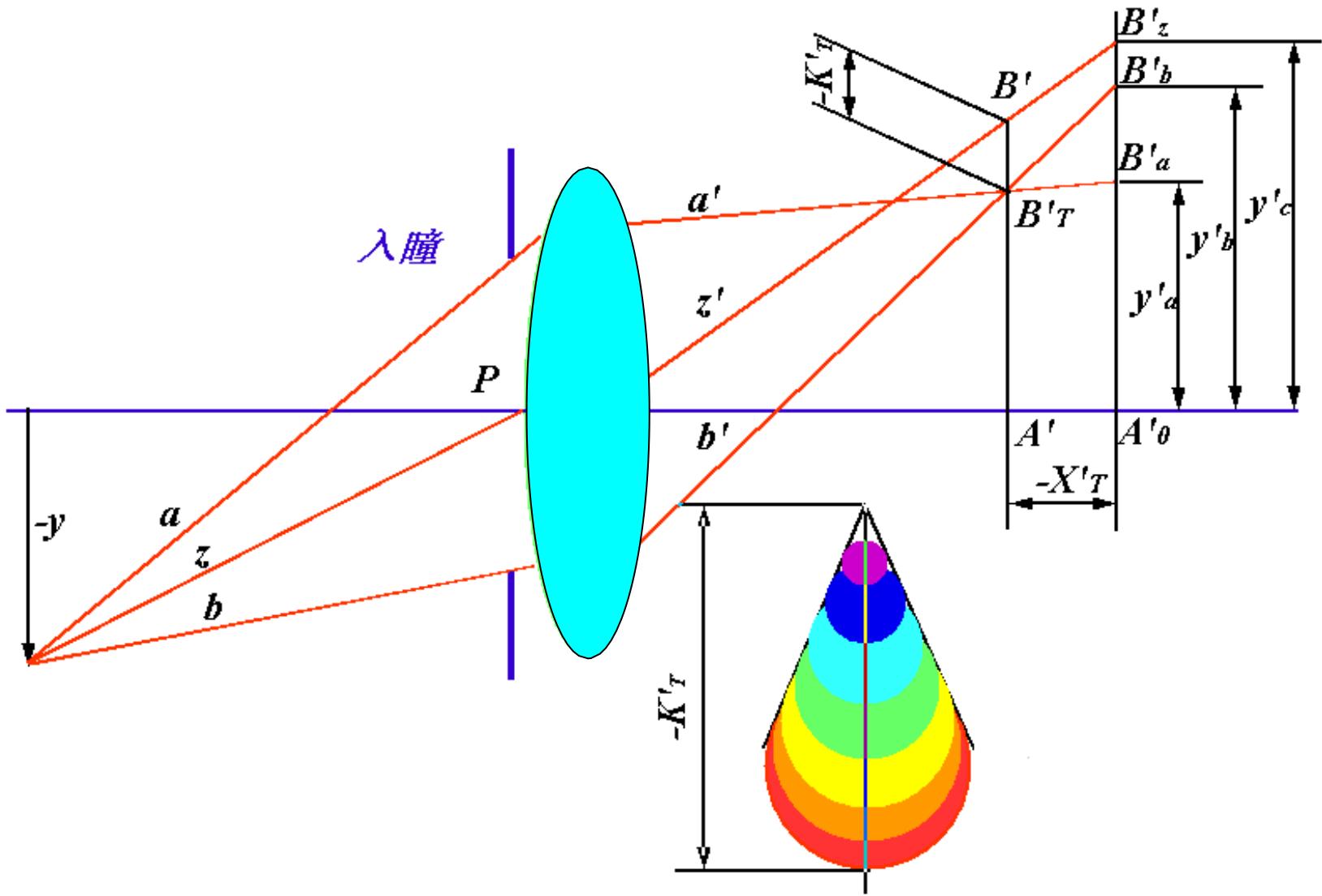
5.4.2 彗差

彗差与正弦差无本质区别，二者均表示轴外物点宽光束经光学系统成像后失对称的情况，正弦差仅适用于小视场的光学系统，而彗差可用于任何视场的光学系统。

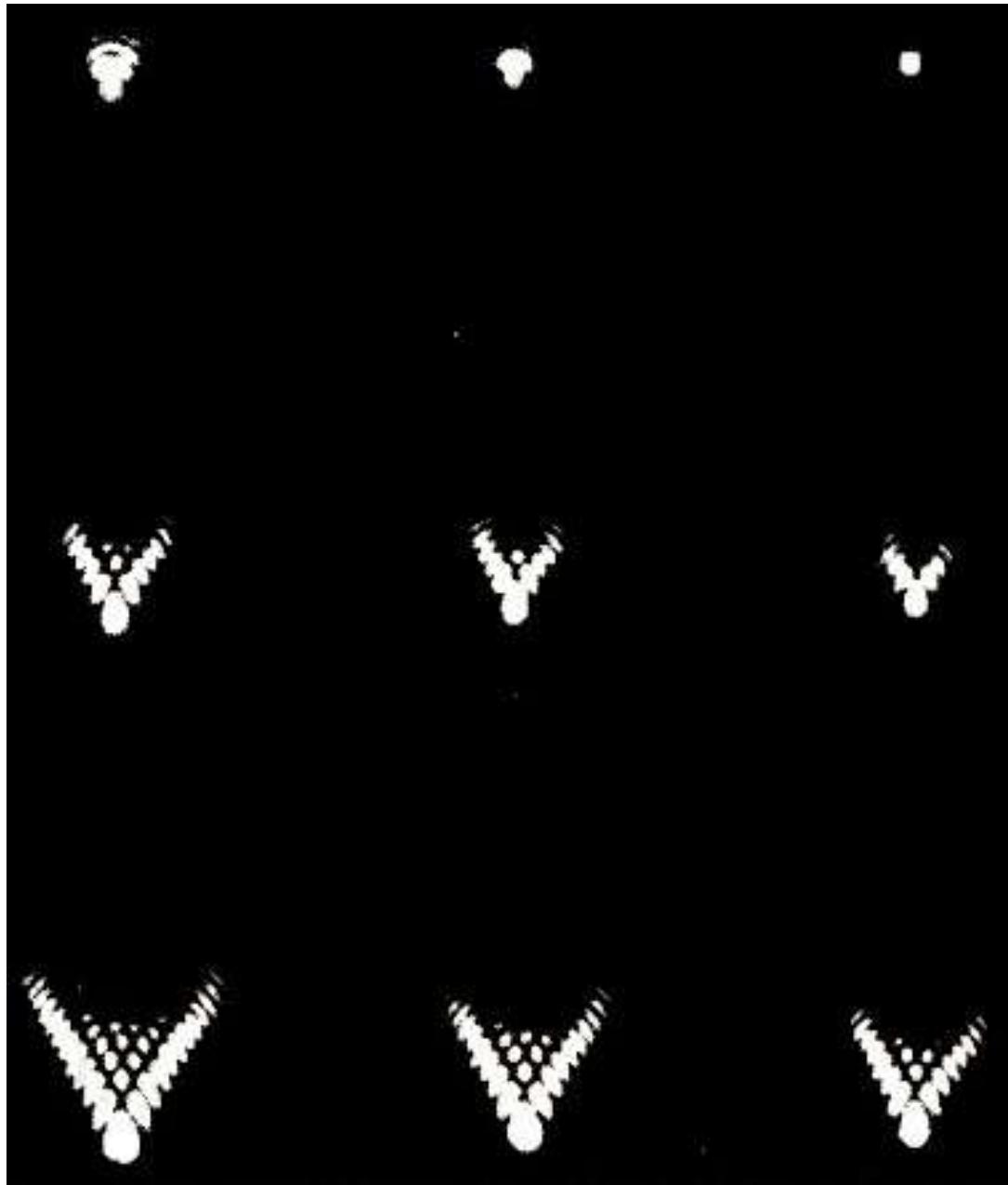
何谓彗差？



彗差: 具有彗差的光学系统，轴外物点在理想像面上成像形同彗星状的光斑，靠近主光线的细光束成一**亮点**，远离主光线的不同孔径光束成**不同孔径的弥散圆斑**，此类像缺陷称**彗差**。

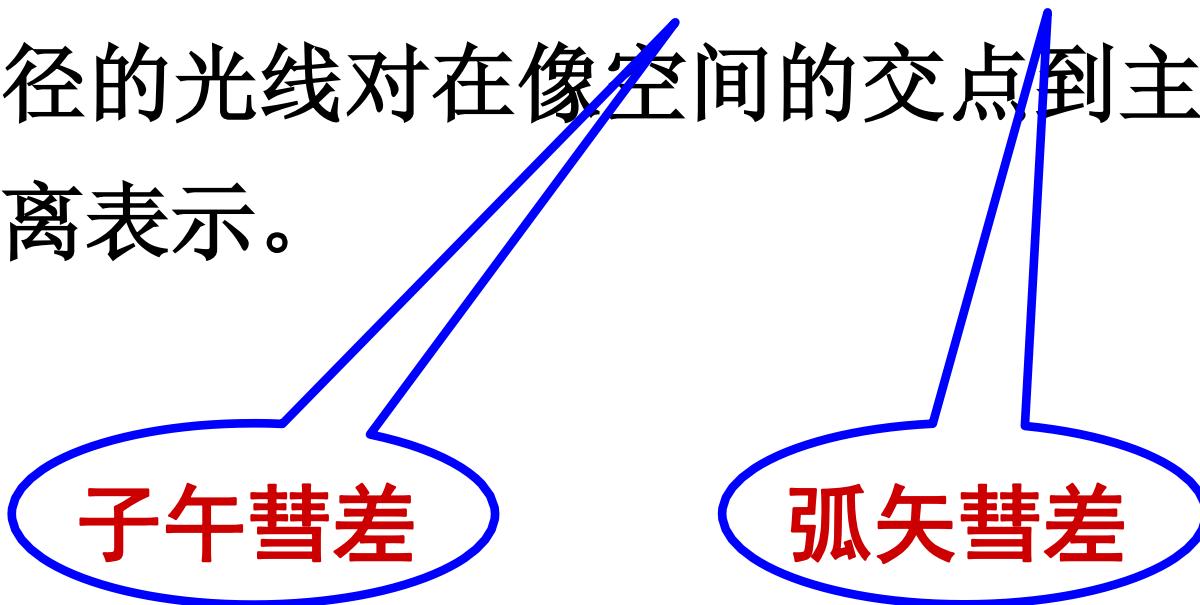


彗差



讨论

① 落差的大小通常在子午面和弧矢面内，用不同孔径的光线对在像空间的交点到主光线的垂轴距离表示。



② 子午彗差：是以轴外点子午光束的上、下光线在高斯相面的交点高度的平均值与主光线在高斯像面上交点高度之差来表示。

$$K'_T = (y'_a + y'_b)/2 - y'_z$$

③ 弧矢彗差：因弧矢光线对相对于子午面对称，两光线在高斯像面的交点高度相等，则

$$K'_S = y'_S - y'_z$$

④ 萍差是与孔径 $U(h)$ 和视场 y （或 w ）都有关的像差。当孔径变号时，萍差不变，故展开式中只有 **$U(h)$ 的偶次项**；当视场变号时，萍差反号，故展开式中只有 **y 的奇次项**；当孔径与视场均为零时，无萍差，故展开式中**无常数项**。因此，萍差的级数展开式表示为

$$K'_s = A_1 y h^2 + A_2 y h^4 + A_3 y^3 h^2 + \dots$$

上式中第一项为初级彗差，第二项为孔径二级彗差，第三项为视场二级彗差。

- a) 对于**大孔径小视场**的光学系统，彗差主要由**第一、二项**决定；
- b) 对于**大视场、相对孔径较小**的光学系统，彗差主要由**第一、三项**决定。

⑤ 与球差推导相同，若边缘孔径光线的彗差校正为零时，在0.707带可得**最大剩余彗差**，其值为孔径二级彗差的-1/4倍，即

$$K'_{S0.707} = -A_2 y h_m^4 / 4$$

⑥ 初级子午彗差分布式为

$$K'_T = -\frac{3}{2n'_k u'_{k-1}} \sum_{II}^k S_{II}$$

⑦ 初级弧矢彗差分布式为

$$K'_S = -\frac{1}{2n'_k u'_k} \sum_1^k S_{II}$$

显然，初级子午彗差是弧矢彗差的3倍。

⑧ 初级彗差与初级正弦差的关系为

$$OSC' = K'_S / y'$$

⑨ 彗差是轴外像差之一，它破坏了轴外视场成像的清晰度。故对**大视场光学系统必须校正彗差**。

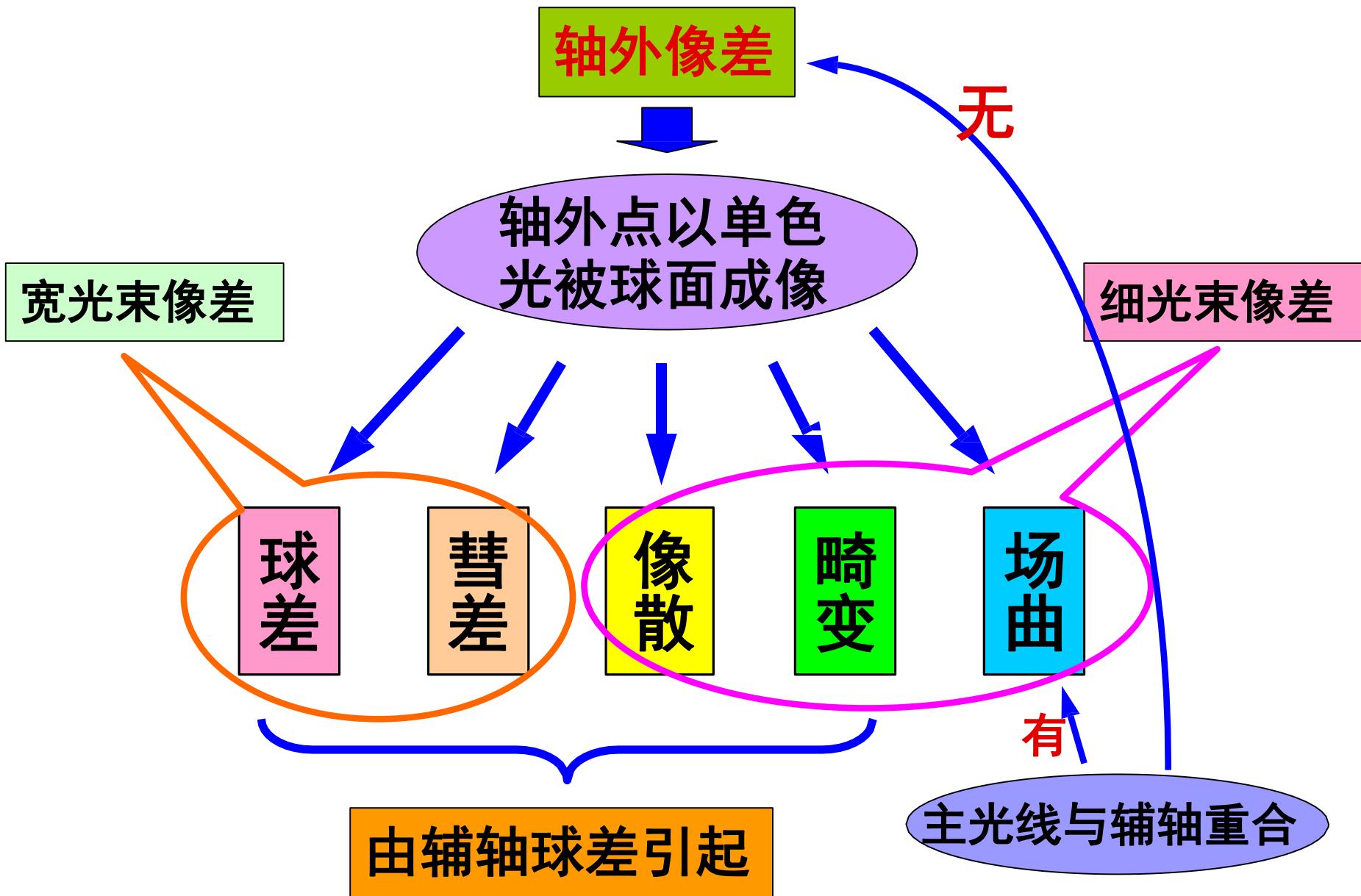


实际设计中，采用**对称式**光学系统设计，使得物像垂轴放大率 $\beta = -1$ ，垂轴像差得以校正。此时，对称于孔径光阑前后的光学系统产生的垂轴像差大小相等、符号相反。

§ 5.5 场曲和像散

5.5.0a 轴外像差*

因组成光学系统的**折射球面**对光束会聚时的**球差**性质和对**平面物体成像**时发生**弯曲**的性质，使得系统对**轴外点成像**时衍生出一系列像差，其性质要比轴上点**复杂**得多。



5.5.0b 初级轴外像差的一般表示式*

5.5.1 场曲与轴外球差

宽光束的子午场曲：子午宽光束的交点沿光轴方向到高斯像面的距离 X_T' 称为~。

细光束的子午场曲：子午细光束的交点沿光轴方向到高斯像面的距离 x_t' 称为~。

轴外子午球差：轴外点宽光束的交点与细光束的交点沿光轴方向的偏离称为~，用 $\delta L_T'$ 表示。

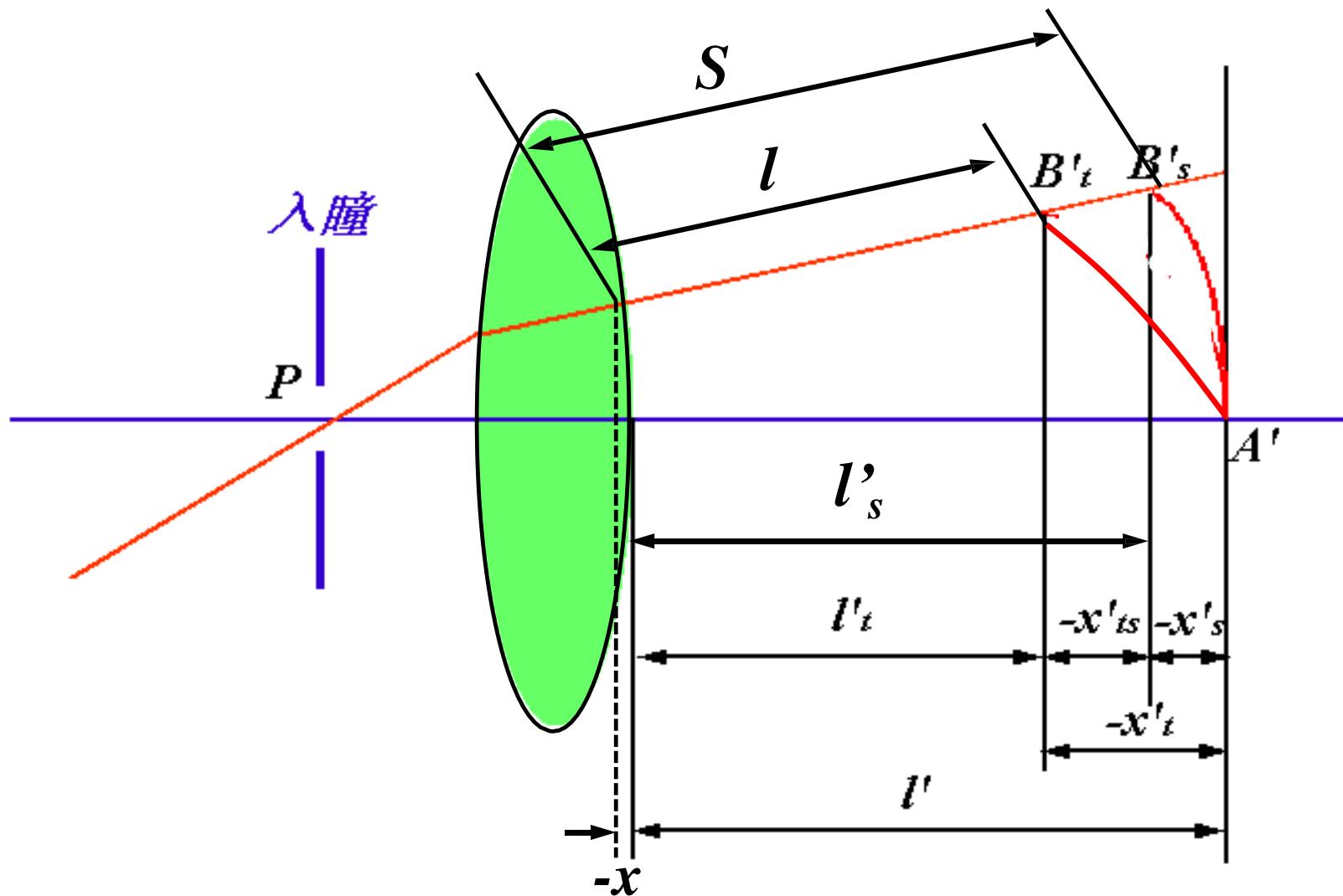
$$\delta L_T' = X_T' - x_t'$$

宽光束的弧矢场曲：在弧矢面内，弧矢宽光束的交点沿光轴方向到高斯像面的距离 X_s' 称为~。

细光束的弧矢场曲：弧矢细光束的交点沿光轴方向到高斯像面的距离 x_s' 称为~。

轴外弧矢球差：上述两者间沿光轴方向的偏离称为~，用 $\delta L_s'$ 表示。

$$\delta L_s' = X_s' - x_s'$$



场曲

子午像面: 各视场的子午像点构成的像面被称为~。

弧矢像面: 由弧矢像点构成的像面被称为~。

两者均为对称于光轴的旋转曲面。显然，当存在场曲时，在高斯像平面上超出近轴区的像点都会变模糊。**一平面物体的像变为一旋转的曲面**，即在任何像平面处都不会得到一个完善的物平面的像。

细光束的子午场曲和弧矢场曲的计算公式为：

$$x'_t = l'_t - l' = t' \cos U_z' + x - l'$$

$$x'_s = l'_s - l' = s' \cos U_z' + x - l'$$



只需计算各视场的轴外点细光束的光路和轴上点近轴光路，即可得各视场的场曲。

细光束的场曲与孔径无关，只是视场的函数。

当视角为零时，不存在场曲，故场曲的级数展开式与球差形式类似，只要把孔径坐标用视场坐标代替，即

$$x'_{t(s)} = A_1 y^2 + A_2 y^4 + A_3 y^6 + \dots$$

式中第一项为初级场曲，第二项为二级场曲，依次类推。一般取前两项即可。



- ① 与球差分析相同，当边缘视场 y_m （或 ω_m ）校正到零时， $0.707y_m$ 带有最大场曲，其值为高级场曲的 $-1/4$ 倍。
- ② 初级子午场曲和弧矢场曲的分布式分别为：

$$x'_t = -\frac{1}{2n'_k u'^2_k} \sum_1^k (3S_{III} + S_{IV})$$

$$x'_s = -\frac{1}{2n'_k u'^2_k} \sum_1^k (S_{III} + S_{IV})$$

$$S_{III} = luni(i - i')(i' - u)(i_z/i)^2 = S_I (i_z/i)^2$$

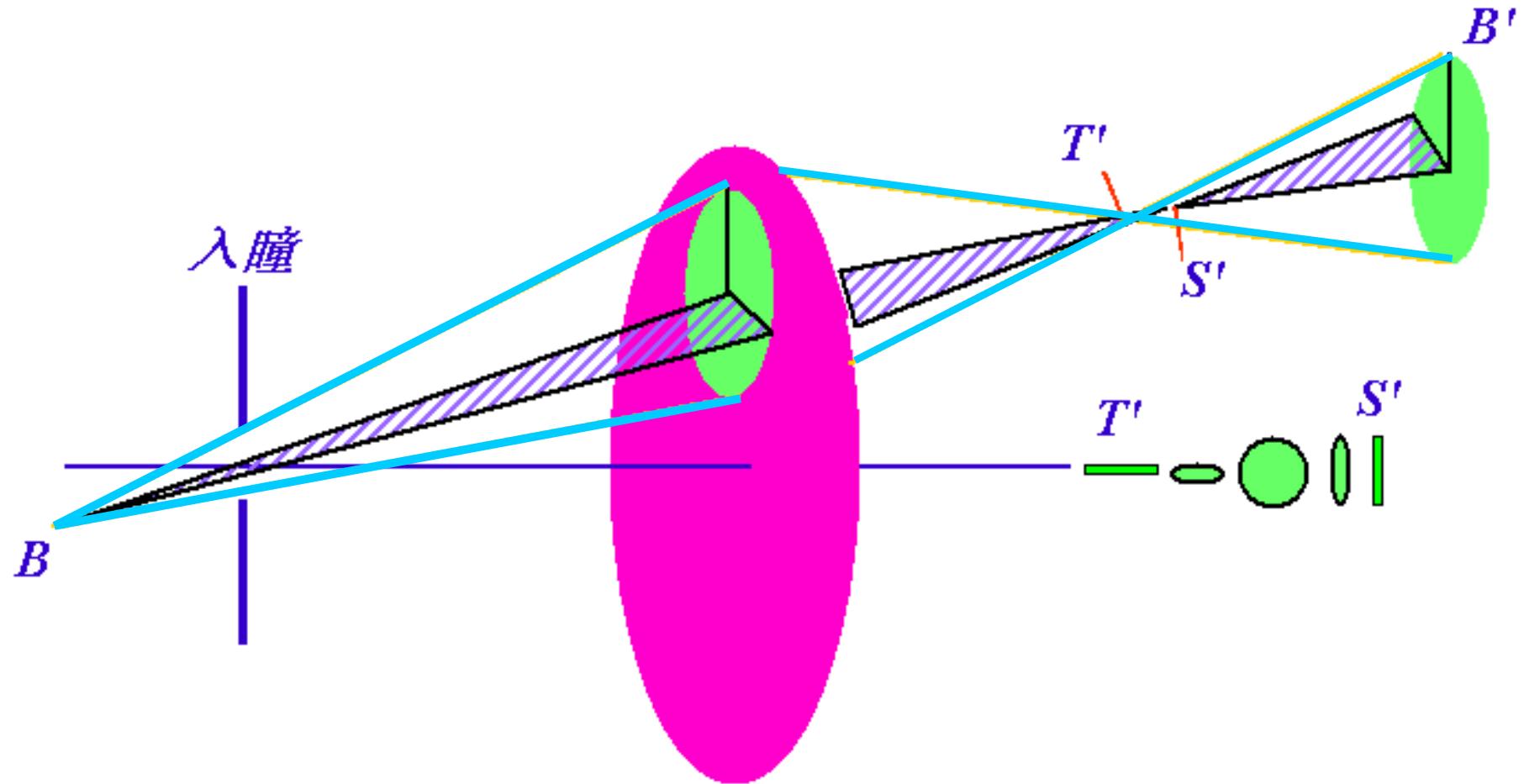
$$S_{IV} = J^2 (n' - n) nn' r$$

式中， S_{III} 是系统的初级**像散**分布系数， S_{IV} 是系统的初级**场曲**分布系数， J 是拉赫不变量。

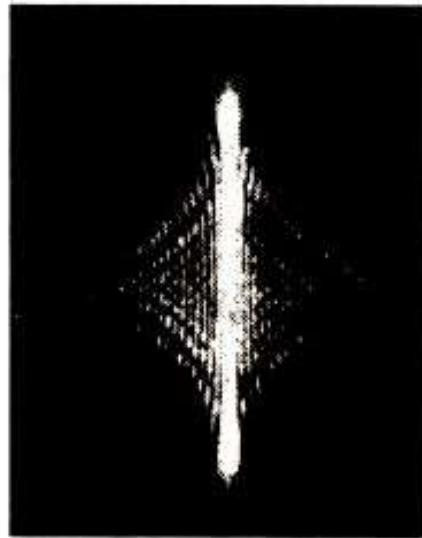
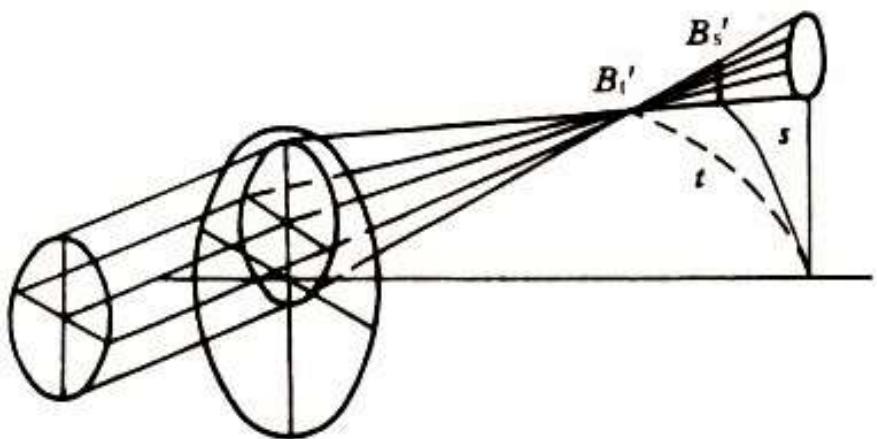
5.5.2 像散

根据细光束的子午和弧矢场曲公式计算表明，**细光束**的子午像点和弧矢像点并不重合，两者分开的**轴向**距离称为**像散**，用 x_{ts}' 表示。

$$x'_{ts} = x'_t - x'_s = (t' - s') \cos U_z'$$



存在像散时的光束结构



(a)



(b)

上图中，在子午像点 T' 处得到垂直于子午面的短线，称为**子午焦线**；在弧矢像点 S' 处得到一垂直于弧矢平面的短线，称为**弧矢焦线**；两焦线相互垂直。

两焦线**中间**，物点的像是一**圆斑**，**其他位置**是**椭圆形弥散斑**。

若存在**像散**的光学系统对直线成像，其**成像质量**与直线的**方向**有关。

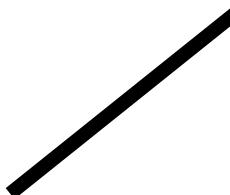
物



子午像



弧矢像



像差校正

细光束的场曲与 S_{III} 和 S_{IV} 有关，而 S_{IV} 为系统结构参数的函数，不可能为零。故要想校正场曲和像散，需使 S_{III} 和 S_{IV} 异号，但平面像场是永远不能达到的。

宽光束的像散：宽光束的子午像点和弧矢像点也不重合，两者之间的轴向距离称为~。

$$X'_{TS} = X'_T - X'_S$$

初级像散的分布式为

$$x'_{ts} = -\frac{1}{n'_k u_k'^2} \sum_1^k S_{III}$$



- ① 由像散分布式知，对单个折射球面，无正弦差的物点位置（齐明点）和光阑位置（光阑在球心）也**不存在像散**。
- ② 像散为零时 ($S_{III} = 0$)，虽然子午焦点和弧矢焦点重合，但**场曲仍存在**，**中心视场**调焦清晰了，**边缘视场**仍然模糊。

- ③ 由 S_{IV} 可知，球面光学系统存在场曲是球面本身所决定的。
- ④ 当像散为零时的像面弯曲以 x_p' 表示，称为匹兹伐尔场曲。

$$x_p' = -\frac{1}{2n'_k u_k'^2} \sum_1^k S_{IV} = -\frac{1}{2n'_k u_k'^2} J^2 \sum_1^k \frac{n' - n}{nn'r}$$



综上所述，像散和场曲两者既有联系，又有区别。像散的存在，必引起像面弯曲；但反之，即使像散为零，子午像面与弧矢像面重合，像面也非平面，而是相切于高斯像面中心的二次抛物面。

§ 5.6 畸 变

畸变：是主光线的像差。因球差，不同视场的主光线通过光学系统后与高斯像面的交点高度 y_z' 不等于理想像高 y' ，其差就是系统的畸变，用 $\delta y_z'$ 表示。

$$\delta y_z' = y_z' - y'$$

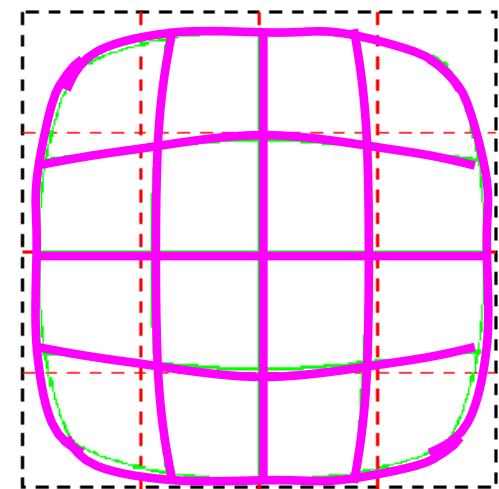
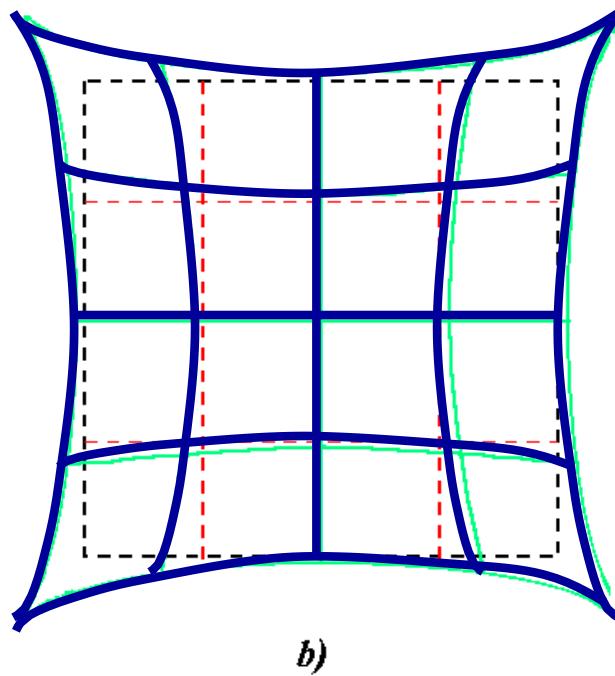
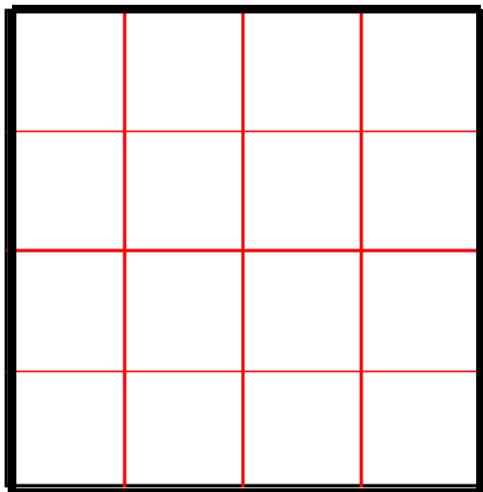
在光学设计中，通常用**相对畸变** q' 来表示

$$q' = \frac{\delta y'_z}{y'} \times 100\% = \frac{\bar{\beta} - \beta}{\beta} \times 100\%$$

式中， β 是某视场的**实际**垂轴放大率； $\bar{\beta}$ 为光学系统的**理想**垂轴放大率。



- ① 畸变仅为视场的函数，不同视场的**实际垂轴放大率不同**，畸变也不同。
- ② 如下图，一垂直于光轴的正方形物体，当系统具有**正畸变**（枕形畸变）时如b）所示；当系统具有**负畸变**（桶形畸变）时如c）所示。



正方形
平面物体

正畸变—
枕形畸变

负畸变—
桶形畸变

③ 由畸变的定义知，畸变是垂轴像差，它只改变轴外物点在理想像面上的成像位置，使像的形状失真，但不影响像的清晰度。

④ 畸变仅与物高 y （或 ω ）有关，随 y 的符号改变而变号，故在其展开式中只有 y 的奇次项。

$$\delta y' = A_1 y^3 + A_2 y^5 + \dots$$

第一项为初级畸变，第二项为二级畸变。展开式中没有 y 的一次项，因一次项表示理想像高。

- ⑤ 与球差的分析方法相同，在边缘视场 y_m 处畸变校正为零时，在 $0.775y_m$ 视场有最大的畸变，其值是高级畸变的0.186倍。
- ⑥ 初级畸变的分布式为

$$\delta y'_z = -\frac{1}{2n'_k u'_k} \sum_{v=1}^k S_v$$

$$S_v = (S_{III} + S_{IV}) i_z / i$$

或写为

$$S_V = l_z u_z n i (i_z - i'_z) (i'_z - u_z) + J (u_z^2 - u_z'^2)$$

⑦ 由 S_V 公式可知，若孔径光阑与球面的球心重合，则该球面不产生畸变。

$$S_V = l_z u_z n i (i_z - i'_z) (i'_z - u_z) + J (u_z^2 - u_z'^2)$$

⑧ 产生畸变的原因有二：光阑位置的正弦差（式中前部）和角倍率（式中后部）引起。

故仅满足光阑位置的正弦条件：

$$ny_z \sin U_z = n'y'_z \sin U'_z$$

则不能消除畸变，角倍率还必须再满足正切条件：

$$ny \tan U_z = n'y' \tan U'_z$$

⑨ 消畸变的正切条件与消光阑彗差的正弦条件是不能同时满足的，故完全消除畸变很困难。

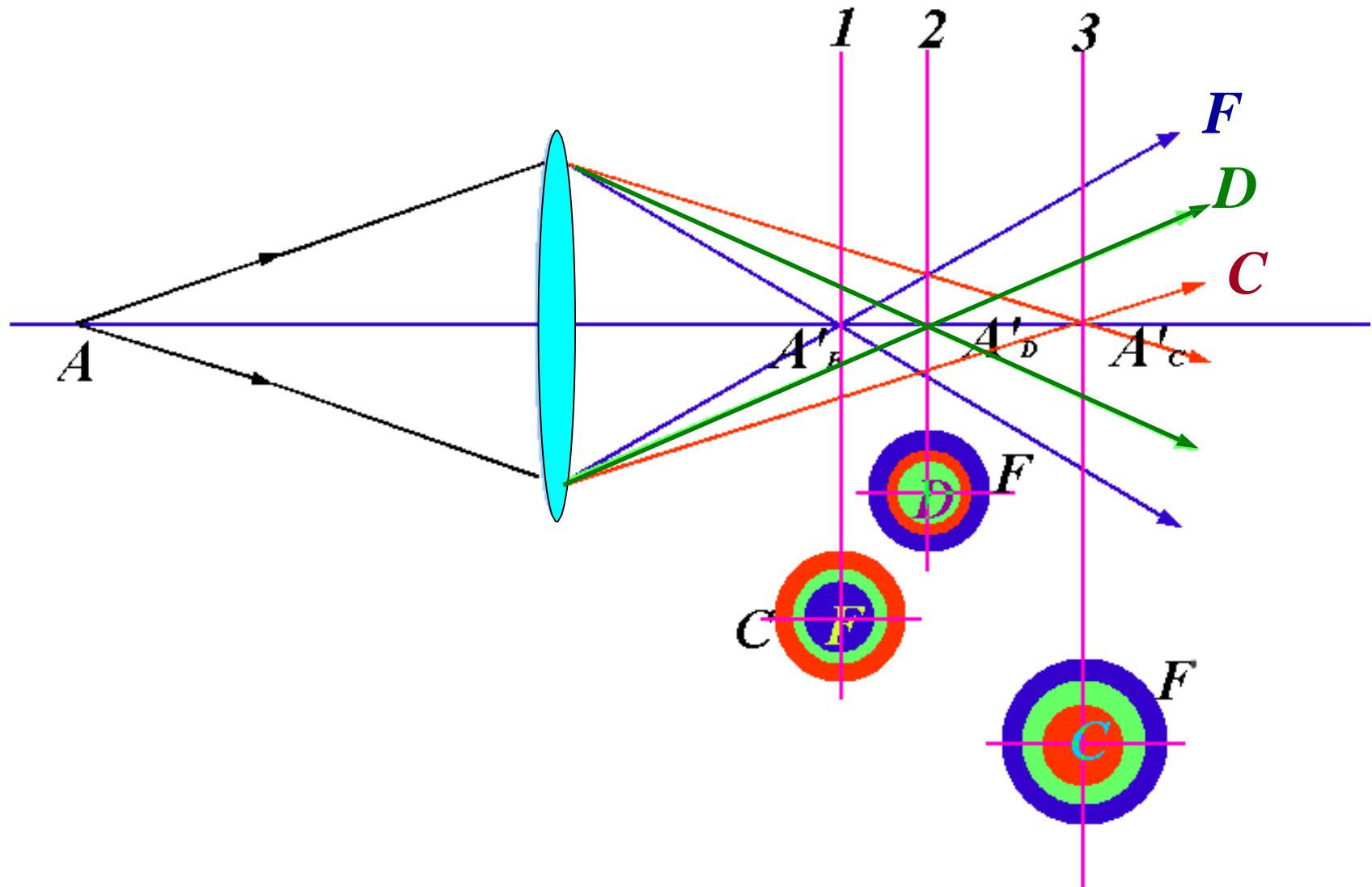


⑩ 对于 $\beta = -1$ 的对称光学系统，由于光阑位于系统的中间，其前部系统和后部系统的畸变大小相等，符号相反，畸变自动校正。

§ 5.7 色差

5.7.1 位置色差、色球差和二级光谱

光学材料的折射率是光波长的函数。同一孔径、不同频率的光线经光学系统后与光轴有不同交点；不同孔径、不同频率的光线与光轴的交点也不相同。故任何像面位置、物点的像是一彩色的弥散斑。



轴上点的色差

色差: 各种色光之间成像**位置**和成像**大小**的差异，称为~。

位置色差: 轴上点两种色光之间成像位置的差异，称为~，也称**轴向色差**。对目视光学系统，用 $\Delta L_{FC}'$ 表示，即系统对F光和C光消色差：

$$\Delta L'_{FC} = L'_F - L'_C$$

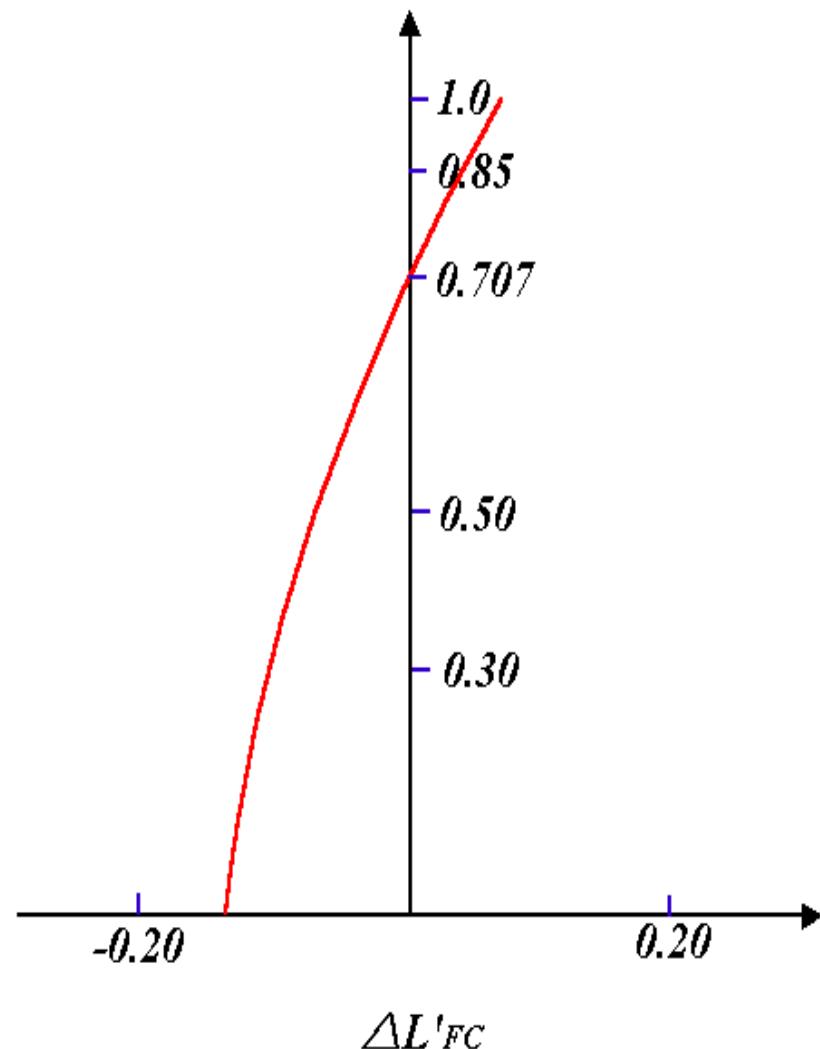
对近轴区，可表示为

$$\Delta l'_{FC} = l'_F - l'_C$$

根据定义，位置色差在近轴区就已产生。
故只需对F光和C光进行近轴光路计算，就可求出系统的近轴色差和远轴色差。



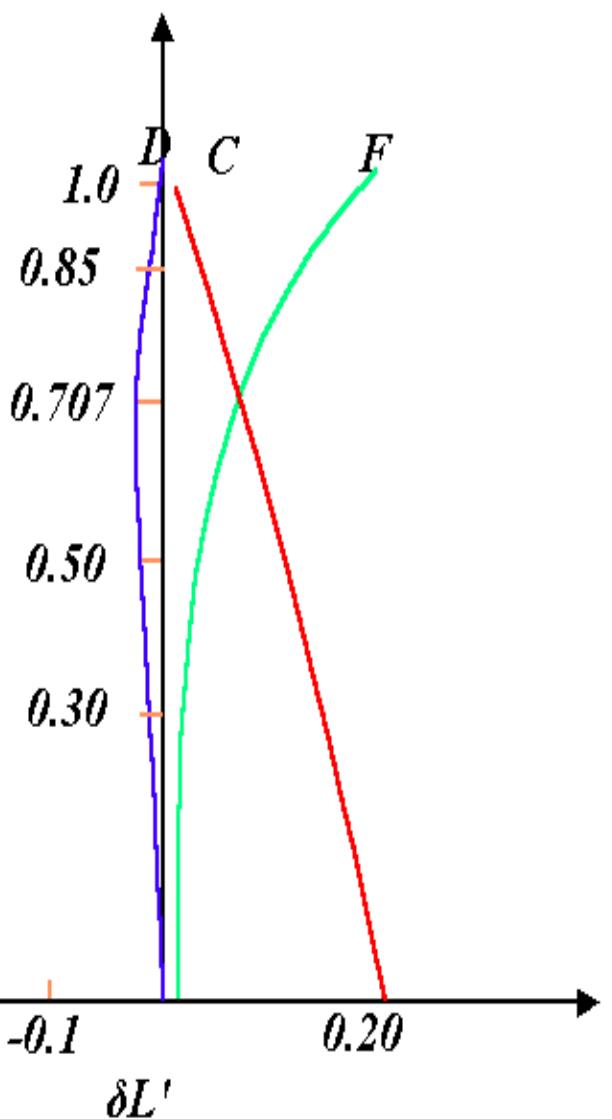
① 不同孔径的光线有不同的色差值，一般对
0.707带的光线校正色差后，其他带仍存在**剩余色差**。如右图所示。



② 色球差：在0.707带校正色差之后，边缘带色差 $\Delta L_{FC}'$ 和近轴色差 $\Delta l_{FC}'$ 并不相等，两者之差称为色球差 $\delta L_{FC}'$ ，也等于F和C光球差之差。

$$\delta L_{FC}' = \Delta L_{FC}' - \Delta l_{FC}' = \delta L_F' - \delta L_C'$$

③ 色球差属于高级像差。



④ 如左图所示，在0.707带对F光和C光校正了色差，但两色光的交点与D光球差并不相交，此点到D光球差的轴向距离称为**二级光谱**，用 $\Delta L_{FCD}'$ 来表示。

$$\Delta L_{FCD}' = L_{F0.707h}' - L_{D0.707h}'$$

⑤ 二级光谱与光学系统的结构参数几乎无关，可近似地表示为：

$$\Delta L'_{FC} = 0.00052f'$$

⑥ 位置色差仅与孔径有关，其符号**不随**入射高度的符号而改变，故其级数展开式仅与孔径的偶次方有关；当孔径为零，色差仍存在，故有常数项，展开式为：

$$\Delta L'_{FC} = A_0 + A_1 h^2 + A_2 h^4 + \dots$$

上式中， A_0 是初级位置色差，即近轴光的位置色差 $\Delta l_{FC}'$ ，而第二项是二级位置色差，不难证明，第二项实际上就是色球差。

$$A_1 h_1^2 = A_{F1} h_1^2 - A_{C1} h_1^2 = \delta L'_F - \delta L'_C = \delta L'_{FC}$$

⑦ 初级色差的分布式为：

$$\Delta l'_{FC} = -\frac{1}{n'_k u'^2_k} \sum_{I=1}^k C_I$$

$$C_I = luni \left(\Delta n' / n' - \Delta n / n \right)$$

式中， C_I 称为初级位置色差分布系数；

$$\Delta n' = n'_F - n'_C$$

$$\Delta n = n_F - n_C$$

⑧ 对于单透镜，初级位置色差分布系数为

$$\sum_1^N C_I = \sum_1^N h^2 \frac{\Phi}{v}$$

透镜数

透镜的半通光口径

光焦度

透镜玻璃的阿贝数

⑨ **单透镜不能校正色差**，单正透镜具有负色差，单负透镜具有正色差。色差的大小与光焦度成正比，与阿贝数成反比，与结构形状无关。故**消色差系统需由正负透镜组成**。对于双胶合薄透镜组，满足**消色差的条件为：**

$$h^2 \left(\Phi_1/v_1 + \Phi_2/v_2 \right) = 0$$
$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$$

由上条件，满足总光焦度为 Φ 时，正、负透镜的光焦度分配为：

$$\Phi_1 = v_1 \Phi / (v_1 - v_2)$$

$$\Phi_2 = -v_2 \Phi / (v_1 - v_2)$$

5.7.2 倍率色差

光学系统的垂轴放大率 $\beta=l'/l=-f/x$ 。因系统的焦距或像距是曲率半径、间距和**折射率**的函数，故对轴外点，不同色光的垂轴放大率也不等，此差异称**倍率色差**或**垂轴色差**。

倍率色差的定义：轴外物点发出两种色光的主光线在消单色光像差的高斯像面上的交点高度之差，对目视光学系统可表示如下：

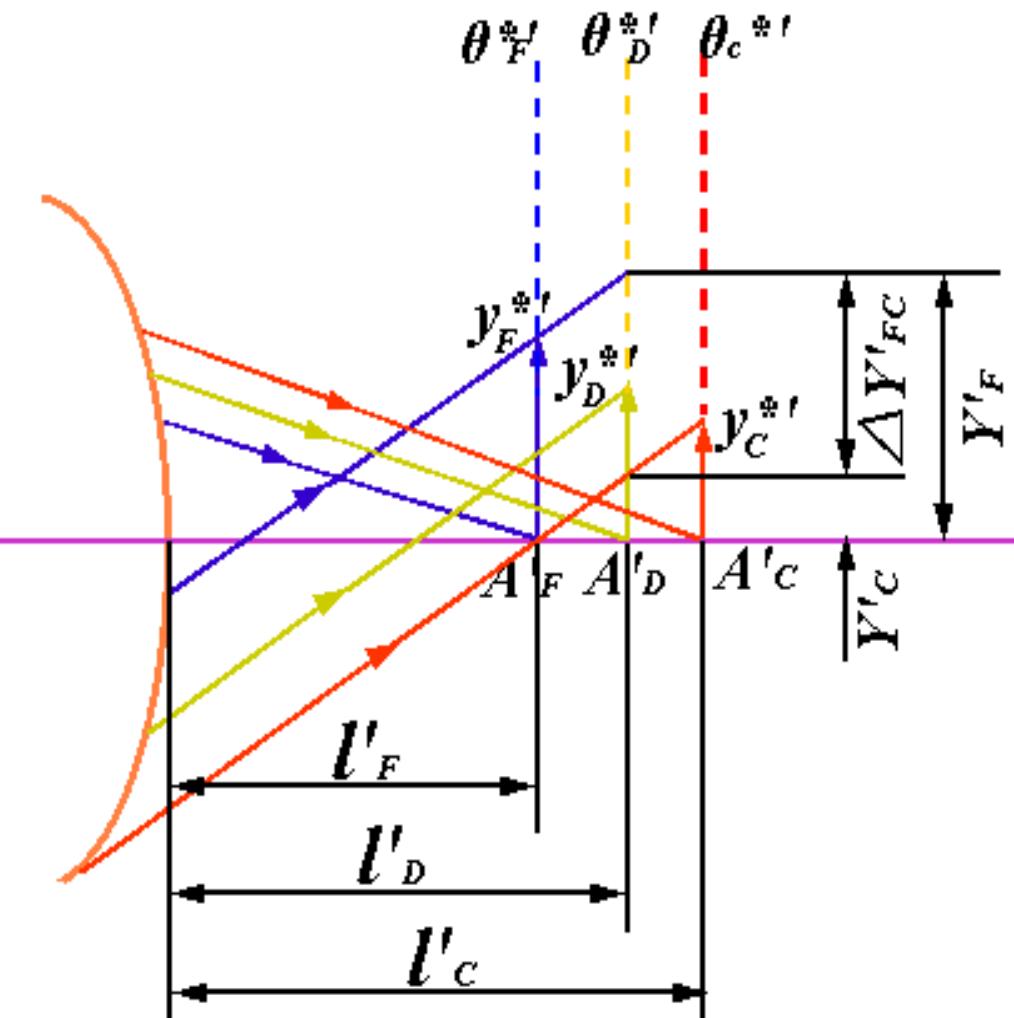
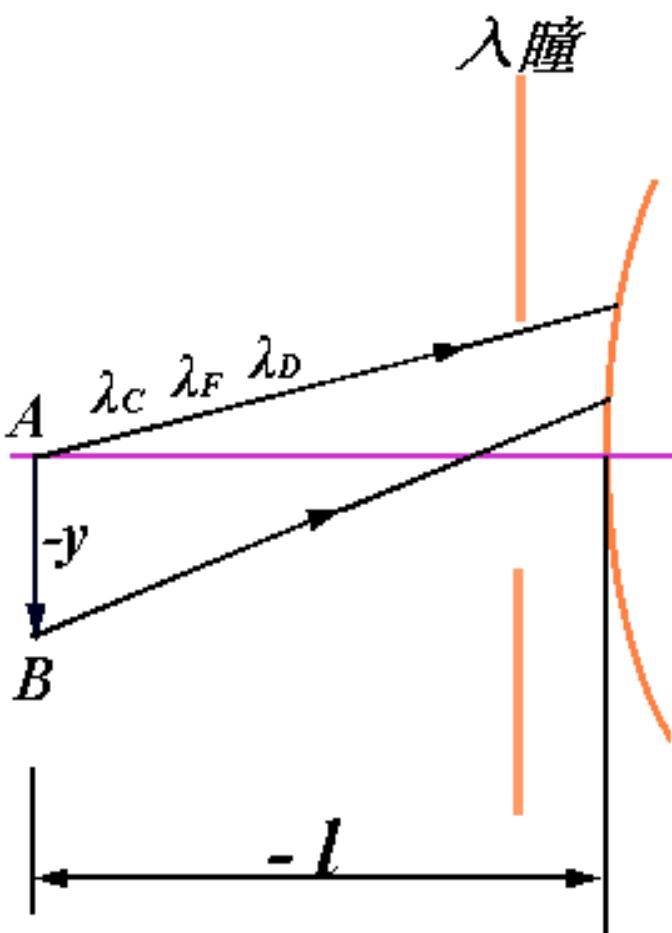
$$\Delta Y'_{FC} = Y'_F - Y'_C$$



① 近轴光倍率色差（称初级倍率色差）为

$$\Delta y'_{FC} = y'_F - y'_C$$

式中， y_F' 和 y_C' 为色光的第二近轴光像高。



倍率色差

② 由远轴光线的光路计算可得出**倍率色差**

$$Y'_F = (L'_{zF} - l') \tan U'_{zF}$$

$$Y'_{zC} = (L'_{zC} - l') \tan U'_{zC}$$

③ 由近轴光线的光路计算可得出**近轴倍率色差**

$$y'_{zF} = (l'_{zF} - l') \mu'_{zF}$$

$$y'_{zC} = (l'_{zC} - l') \mu'_{zC}$$

④ 倍率色差是像高的色差，故其展开式与畸变的形式相同，但不同色光的理想像高不同，故式中含有物高的一次项。

$$\Delta y'_{FC} = A_1 y + A_2 y^3 + A_3 y^5 + \dots$$

式中，第一项为初级倍率色差，第二项为二级倍率色差，以此类推。一般取前两项即可。

⑤ 高级倍率色差是不同色光的畸变差别所致，因此也称为色畸变。

$$A_2 y^3 = \delta Y'_{zF} - \delta Y'_{zC}$$

⑥ 令边缘带 y_m 的倍率色差为零，则在 $0.58y_m$ 带有最大剩余倍率色差，其值为

$$\Delta Y'_{FCD0.58} = -0.38 A_2 y_m^3$$

⑦ 初级倍率色差的分布式为

$$\Delta y'_{FC} = -\frac{1}{n'_k u'_k} \sum_{l=1}^k C_{II}$$

$$C_{II} = luni_z (\Delta n'/n' - \Delta n/n) = C_I (i_z/i)$$

⑧ 当光阑在球面的**球心** ($i_z=0$) 时，该球面不产生倍率色差；若物体在球面的**顶点** ($l=0$)，也不产生倍率色差；对于**全对称光学系统**，当 $\beta=-1$ 时，倍率色差自动校正。

⑨ 对于**薄透镜**系统，可得

$$\sum_1^N C_H = \sum_1^N h h_z \frac{\Phi}{v}$$

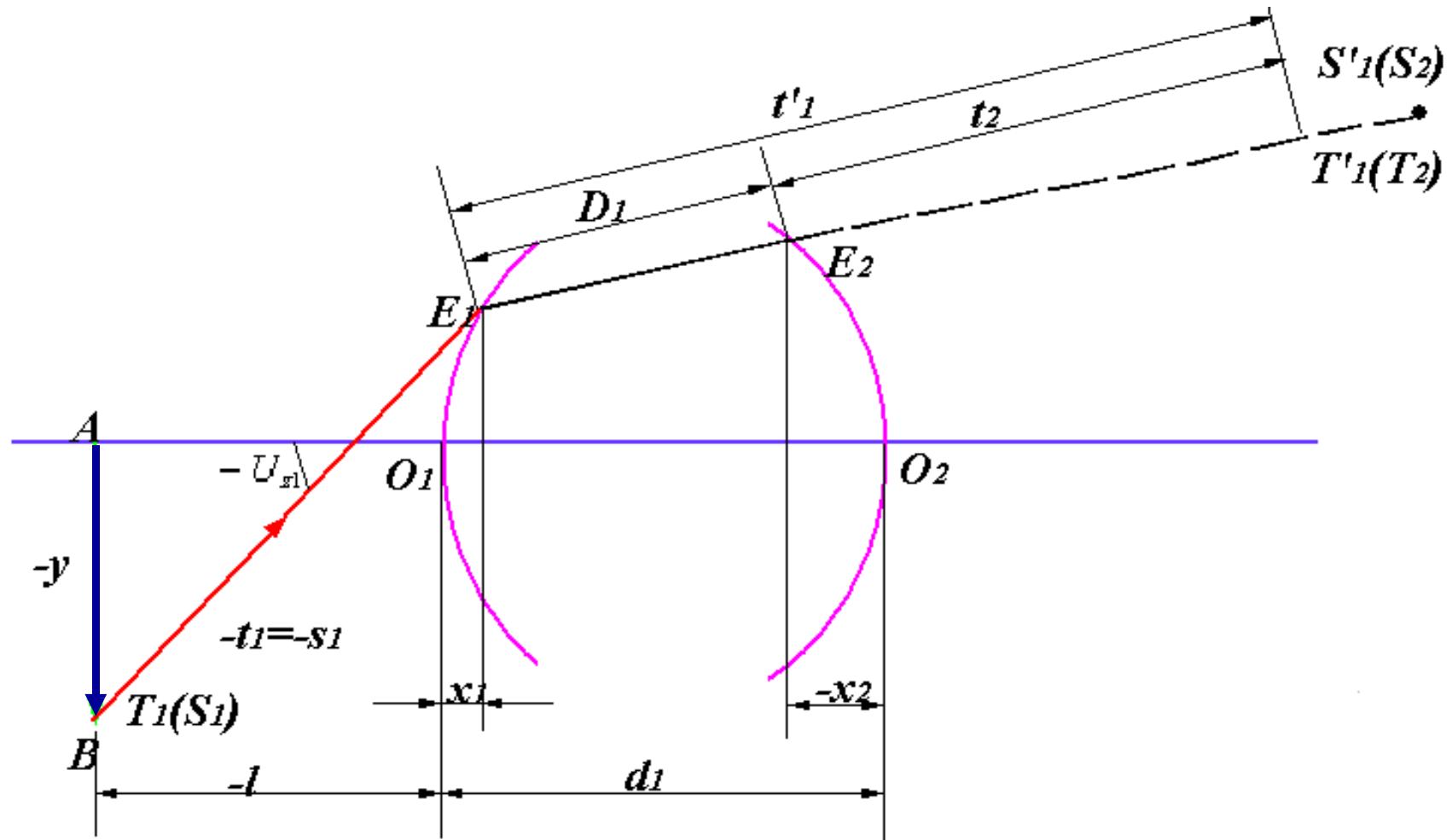
若**光阑**在透镜上 ($h_z=0$)，则不产生倍率色差。

⑩ 对于**密接**透镜，若系统已校正色差，则倍率色差同时被校正；但对于**有间隔**的透镜组，须对各个透镜分别校正。

§ 5.8 像差特征曲线与分析

5.8.1 像差特征曲线

对于**大孔径、大视场**的光学系统，除计算各种实际像差大小外，还必须考虑其**全孔径**和**全视场**的**像差合理平衡**。因此，绘出光学系统的**像差特征曲线**是必要的。



轴外成像光束

5.8.2 像差特征曲线分析

像差特征曲线不但可以判读像差大小，还可以分析像差特性，对像差的校正有指导意义。

本节介绍子午面内的像差特征曲线，弧矢面内的像差特征曲线可自行阅读参考文献[*]。

[*]张以謨，《应用光学》，机械工业出版社，北京，P348，1988。

5.8.2.1 光阑位置的选择

子午像差特征曲线可分析光学系统任何视场 上、下两半部光束的成像情况。若上、下两部分光束的像差曲线失对称严重，可以通过移动光阑的位置，即改变主光线的位置，使得子午像差曲线中的横向坐标向上或向下移动。最终达到纠正像差的目的。

请见课本P127 图6-19

5.8.2.2 离焦的选择

一般的**像差特征曲线**是在高斯像面上取值**绘制**的，但高斯像面不一定是实际成像系统的最佳像面，因此可以通过**离焦**的方法**选取最佳像面**。

请见课本P128 图6-20、6-21

5.8.2.3 拦光

若像差特征曲线中边缘光束的横向像差较大，在不改变光阑位置的情况下，也可以通过另外设置光阑把部分像差较大的边缘光束拦截掉，称为拦光。

这样做虽然会降低像面照度而产生的渐晕，但可提高成像质量。



应用

实际应用中，对于照相物镜，一般可允许边缘视场渐晕达50%，为达到此目的，可设置渐晕光阑或减小某些光学零件尺寸。

§ 5.9 波像差

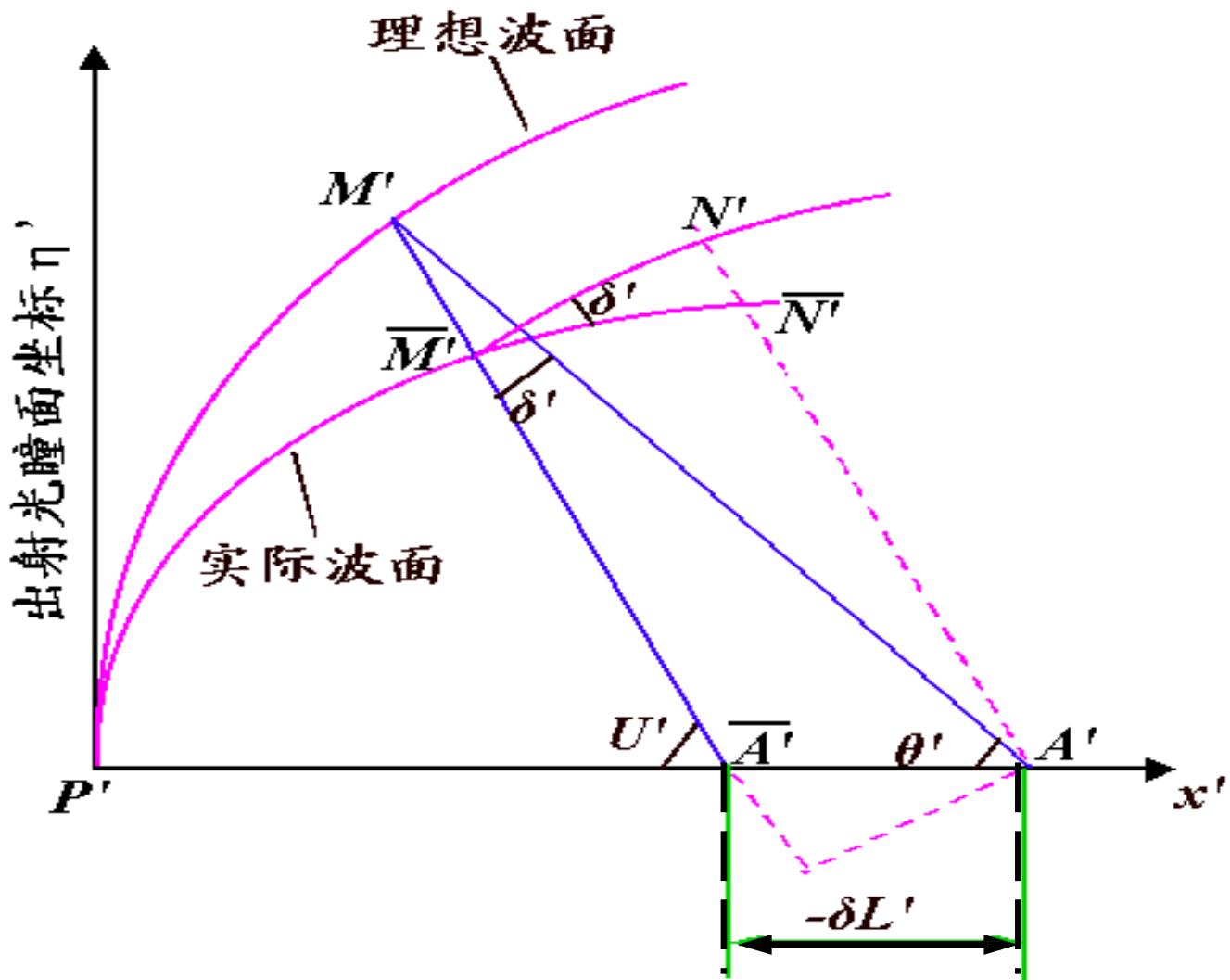
至此，只讨论了光学系统的几何像差。但对于**高质量要求**的光学系统，仅以几何像差来评价成像质量是不够的，还须进一步研究**光波波面**经光学系统后的**变化情况**来全面评价系统的成像质量，因此引入了**波像差**的概念。

5.9.1 波像差

波像差: 当实际波面与理想波面在**出瞳处**相切时，两波面间的**光程差**就是~，以W表示。

波像差是孔径的函数，几何像差越大，波像差也越大。对于**轴上点**，**单色光的波像差**仅由**球差**引起，其关系为：

$$W = \frac{n'}{2} \int_0^{U_m'} \delta L' du'^2$$



波像差

瑞利判断认为，当光学系统的最大波像差小于
1/4波长时，其成像是完善的。

5.9.2 波色差

色差也可用波色差的概念来描述。对于轴上点， λ_1 光和 λ_2 光在出瞳处两波面间的光程差称为~。用 $W_{\lambda_1\lambda_2}$ 来表示。

对于目视光学系统，若对F和C光校正色差，其波色差的计算，只需对D光进行球差光路计算即可，其计算公式为：

$$W_{FC} = W_F - W_C = \sum_1^N (D - d) \cdot dn$$

光线在透镜两折射面
间沿光路度量的**长度**

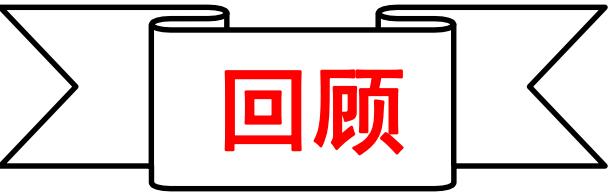
介质的**色散**
($n_F - n_C$)

光学元件沿
光轴的**厚度**

§ 5.10 像差容限

光学系统的像差不可能完全消除，光学系统的**像差容限**就成为一个**重要问题**。系统的像差容限不仅与**像质评价方法**有关，还随系统的**使用条件、要求及接收器性能**等因素而变化。

因**波像差**与**几何像差**之间有着**直接联系**，故以**瑞利判断**作为像质评价依据，即由**最大波像差**得出**几何像差的容限**。只适于**小像差系统**。



回顾

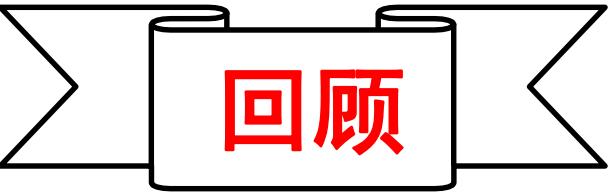
七种初级像差表达式如下：

① 球差： $\delta L'_0 = -\frac{1}{2n'u'^2} \sum S_I, \quad S_I = luni(i - i')(i' - u)$

② 弧矢彗差： $K_{S0} = -\frac{1}{2n'u'} \sum S_{II}, \quad S_{II} = S_I \frac{i_p}{i}$

③ 像散： $x'_{sp} = -\frac{1}{2n'u'^2} \sum S_{III}, \quad S_{III} = S_{II} \frac{i_p}{i}$

④ 场曲： $x'_p = -\frac{1}{2n'u'^2} \sum S_{IV}, \quad S_{IV} = J^2 \frac{n' - n}{n'n r}$



回顾

七种初级像差表达式如下：

⑤ 畸变：

$$\delta y'_p = -\frac{1}{2n'u'} \sum S_V, \quad S_V = (S_{III} + S_{IV}) \frac{i_p}{i}$$

⑥ 位置色差：

$$\delta l'_{ch} = -\frac{1}{n'u'^2} \sum C_I, \quad C_I = luni \left(\frac{dn'}{n'} - \frac{dn}{n} \right)$$

⑦ 倍率色差：

$$\delta y'_{ch} = -\frac{1}{n'u'} \sum C_{II}, \quad C_{II} = C_I \frac{i_p}{i}$$

5.10.1 对于**球差**，利用前述公式可得容限公式。有**两种情况**：

① 当系统仅有**初级球差**时，所产生的最大波像差小于或等于**1/4**波长，可得边光球差的容限公式为：

$$\delta L'_m \leq \frac{4\lambda}{n'u_m'^2} = 4\text{倍焦深}$$

严格表示应为：

$$\delta L'_m = \frac{4\lambda}{n' \sin^2 U_m'}$$

② 当系统同时具有**初级球差**和**二级球差**时，在对边光校正好球差后，0.707带的光线具有最大剩余球差，其最佳焦点位于离高斯像点 $(3/4)\delta L'_{0.707}$ 处。令产生的最大波像差小于或等于**1/4**波长，可得 $\delta L'_{m=0}$ 时**带光球差容限公式**为：

$$\delta L'_{0.707} \leq 6\text{倍焦深}$$

严格表示应为：

$$\delta L'_{0.707} = \frac{6\lambda}{n' \sin^2 U'_m}$$

实际上，边光的球差未必正好校正到零，只需控制在焦深范围内。故此时**边光球差的容限为1倍焦深**。

5.10.2 类似于球差，其它像差的容限分别为：

弧矢彗差：

$$K_s \leq \frac{\lambda}{2n' \sin U_m'}$$

正弦差：

$$OSC \leq \frac{\lambda}{2n' y_0' \sin U_m'}$$

波色差：

$$W_{FC} \leq \frac{\lambda}{4} \sim \frac{\lambda}{2}$$

有时，正弦差以0.00025~0.0025为容限。

5.10.3 对于**小孔径、大视场**系统，如显微镜或望远镜的目镜，应考虑轴外像差的校正。有关**其它像差的容限分别为：**

弧矢彗差：

$$K_S \leq \frac{\lambda}{2n' \sin U'_m}$$

像散：

$$\Delta x' \leq \frac{\lambda}{n' \sin^2 U'_m}$$

像面弯曲 x_t' 和 x_s' 在眼睛的调节范围内

畸变:

$$\frac{\delta y'}{y'_0} \leq 5\sim 10\%$$

倍率色差: 以角度计小于 $2' \sim 4'$

5.10.4 对于**大孔径、大视场**系统，如照相物镜，**应校正全部像差**。因其各种像差的剩余值，要超出瑞利极限的很多倍，**不能用瑞利判断来评价其像质**。

对于**大像差系统**，一般用像点的**弥散斑**来直接判定（**点列图法**）。通常，可以接受的**弥散斑直径**在**0.03~0.1mm**以内；**畸变**则以观察者感觉不出像有明显变形为限，一般允许**2%~4%**。

- 课后作业：
- P131-132

第6章 习题 第5, 10题