Verifica di limiti: caso di limite finito per x che tende a un valore finito

85 ESERCIZIO GUIDATO

Verifica che $\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3$.

Devi risolvere la disequazione $|(2x-1)-3| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, e verificare che le soluzioni contengono un intorno di 2.

Se svolgi i calcoli correttamente troverai che la disequazione è soddisfatta nell'intervallo $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$, che è un intorno di 2 di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$.

86 ESERCIZIO GUIDATO

Verifica che $\lim_{x \to 3}(2x^2-1) = 17$.

- Devi inizialmente risolvere la disequazione $|(2x^2-1)-17| < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, cioè il sistema $\begin{cases} 2x^2 - 18 < \varepsilon \\ 2x^2 - 18 > -\varepsilon \end{cases}$, e verificare che le soluzioni contengono un intorno di 3.
- Se svolgi correttamente i calcoli, troverai che l'insieme delle soluzioni contiene l'intervallo aperto $\sqrt{9 - \frac{\varepsilon}{2}} < x < \sqrt{9 + \frac{\varepsilon}{2}}$ che **non** è un intorno (circolare) di 3, ma contiene il numero 3 (perché?) e dunque contiene certamente anche un intorno di 3.

Verifica i seguenti limiti per x che tende a x_0 finito. Nelle soluzioni è riportato un intervallo aperto contenente x_0 che soddisfa la definizione.

87 $\lim_{x \to 0}(2x-1) = -1$ $\left[-\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2}\right]$

88 Videolezione $\lim_{x \to -1}(3x+1) = -2$ $\left[-1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < -1 + \frac{\varepsilon}{3}\right]$

89 $\lim_{x \to 4}\sqrt{x} = 2$ $[4 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon < x < 4 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon]$

90 $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$ $[\sqrt[3]{1-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{1+\varepsilon}]$

91 $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ $[\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}]$

92 $\lim_{x \to 2}(x^2-1) = 3$ $[\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}]$

93 $\lim_{x \to -1}\sqrt{x+5} = 2$ $[-1 + \varepsilon^2 - 4\varepsilon < x < -1 + \varepsilon^2 + 4\varepsilon]$

Ai fini della verifica del limite non è limitativo supporre ε arbitrariamente piccolo; possiamo quindi supporre $\varepsilon < 1$, cosicché $1 - \varepsilon > 0$. Ciò ci consente di concludere la risoluzione del sistema, dividendo i due membri della prima disequazione per $1 - \varepsilon$ senza dover cambiare il verso della disequazione, grazie all'ipotesi $1 - \varepsilon > 0$. Si trova così che il sistema è soddisfatto per:

$$\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

- Osserviamo infine che:

$$\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2(1+\varepsilon)-\varepsilon}{1+\varepsilon} = 2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{e} \quad \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{2(1-\varepsilon)+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

quindi l'intervallo delle soluzioni si può scrivere nella forma equivalente:

$$2 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

da cui appare chiaramente che contiene un intorno di 2 $\left(\text{precisamente l'intorno che ha centro in 2 e raggio uguale al minimo tra } \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \text{ e } \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$. Quindi il limite è verificato.

Nota Rifletti sulle ipotesi che abbiamo potuto introdurre per *semplificare* i calcoli nella verifica del limite. In generale, per verificare che la funzione $f(x)$ ha un certo limite $l \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0$, è lecito:

a. restringere il dominio della funzione a un insieme conveniente (nell'esempio precedente $x > 1$), con la sola accortezza che tale insieme deve contenere un intorno di x_0;

b. supporre ε arbitrariamente piccolo (nell'esempio precedente $\varepsilon < 1$).

Verifica i seguenti limiti. Nelle soluzioni è riportato un intervallo aperto contenente x_0 che soddisfa la definizione.

95 $\lim_{x \to 2}\frac{6}{x} = 3$ $\left[\frac{6}{3+\varepsilon} < x < \frac{6}{3-\varepsilon}\right]$

96 $\lim_{x \to 3}\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{3}{1+3\varepsilon} < x < \frac{3}{1-3\varepsilon}\right]$

97 $\lim_{x \to 1}\frac{x+1}{x} = 2$ $\left[\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}\right]$

98 $\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x+1} = 0$ $\left[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < x < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$

397 $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{8-x}-2}{2x-8}$ $\left[-\frac{1}{8}\right]$

398 $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x-3}}$ $[0]$

399 $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x}-\sqrt{4-x}}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

400 $\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ $[12]$

401 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{1-\sqrt[3]{x}}$ $[-6]$

402 $\lim_{x\to -27} \frac{x+27}{3+\sqrt[3]{x}}$ $[27]$

403 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{2-\sqrt[3]{4x}}$ $[-15]$

546 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 5x}{\sin x^2}$ $[10]$

547 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

548 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x\,(1-\cos x)}{x^3}$ $[2]$

549 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^3}$ $[\infty]$

550 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+3\cos x)\sin x}{x}$ $[4]$

551 $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x-4\cos x)\sin x}{3x}$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

552 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\sin 2x}{x}$ $[3]$

553 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$ $[18]$

554 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$ $[8]$

555 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos^2 x}$ $[0]$

556 $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x-\sin 2x}{4x^3}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

557 $\lim_{x\to 0} \frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{x^4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

558 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos 2x-\cos x}$ $[\infty]$

559 $\lim_{x\to 0} \frac{x^4 \sin x}{1-2\cos x+\cos^2 x}$ $[0]$