

SAA - návrh projektu

Juraj Hledík

NBS

28. januára 2022

Témy

Cieľ, aktuálny stav

- Strategická alokácia aktív
- Preferencie a obmedzenia
- Projekt doteraz

Témy

Cieľ, aktuálny stav

- Strategická alokácia aktív
- Preferencie a obmedzenia
- Projekt doteraz

Predstava do budúcnosti

- Odhad viacrozmerného rozdelenia výnosov pomocou vine kopúl
- Parametrizovateľná optimalizácia portfólia
- Výstup pre konečného používateľa

Cieľ, preferencie, obmedzenia

- Skonsolidovať jednotlivé portfóliá / pozície NBS do jedného frameworku.
- Lepší prehľad o očakávanom výnose, koreláciach a vzájomných rizikách jednotlivých pozícií.
- Preferencie investora: optimalizácia vzhľadom na expected shortfall na rôznych hladinách a maturitách.
- Obmedzenia / reštrikcie:
 - zafixované množstvo zlata
 - zafixované intervenčné portfólio
 - dynamicky sa meniace ASW portfólio (asset swap spreads)
 - reputačné otázky pri strate resp. strate dva roky po sebe
 - nekombinovať s MPO

Aktuálny stav projektu

- Vybraných 8 reprezentatívnych indexov
 - **Zlato** Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.
 - **US Treasuries** 1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.
 - **ASW** 1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS
 - **Akcie** World Equity (MSCI) FX Unhdg.
 - **Čínske vládne dlhopisy** 1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.
 - **TIPS, infl. dlhopisy** US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.
 - **Mortgage - backed securities** US MBS (ICE) FX Hdg.
 - **Emerging market, dlhopisy** EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.

Aktuálny stav projektu

■ Vybraných 8 reprezentatívnych indexov

- **Zlato** Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.
- **US Treasuries** 1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.
- **ASW** 1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS
- **Akcie** World Equity (MSCI) FX Unhdg.
- **Čínske vládne dlhopisy** 1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.
- **TIPS, infl. dlhopisy** US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.
- **Mortgage - backed securities** US MBS (ICE) FX Hdg.
- **Emerging market, dlhopisy** EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.

■ Testy:

- Historické výnosy nie sú normálne rozdelené.
- Ne-normalita nie je spôsobená asymetriou, ale špicatosťou (kurtosis).

Aktuálny stav projektu

- Vybraných 8 reprezentatívnych indexov
 - **Zlato** Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.
 - **US Treasuries** 1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.
 - **ASW** 1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS
 - **Akcie** World Equity (MSCI) FX Unhdg.
 - **Čínske vládne dlhopisy** 1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.
 - **TIPS, infl. dlhopisy** US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.
 - **Mortgage - backed securities** US MBS (ICE) FX Hdg.
 - **Emerging market, dlhopisy** EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.
- Testy:
 - Historické výnosy nie sú normálne rozdelené.
 - Ne-normalita nie je spôsobená asymetriou, ale špicatosťou (kurtosis).
- Optimalizácia portfólia:
 - Mean-Variance optimalizácia, Markowitz, predpokladaná normalita výnosov.
 - Ex post výpočet pre expected shortfall.
 - Zahrnutá nenormalita výnosov pomocou bootstrappingu.
 - Vyčíslenie expected shortfall pre dané mean-variance optimálne portfólio.

Čo vieme zlepšiť?

Odhad budúcich výnosov

- Finančné výnosy sú málokedy normálne rozdelené.
- Keďže investor má preferencie ohľadom expected shortfall, je kľúčové čo najpresnejšie modelovať "dolný chvost" výnosov.
- Ponúknuť alternatívu k bootstrappingu.

Čo vieme zlepšiť?

Odhad budúcich výnosov

- Finančné výnosy sú málokedy normálne rozdelené.
- Keďže investor má preferencie ohľadom expected shortfall, je kľúčové čo najpresnejšie modelovať "dolný chvost" výnosov.
- Ponúknuť alternatívu k bootstrappingu.

Optimalizácia portfólia

- Pri dobre odhadnutej distribúcii budúcich výnosov dáva zmysel porovnať rôzne investičné ciele a kritéria.
- Optimalizácia expected shortfallu je linearizovateľný problém.

Čo vieme zlepšiť?

Odhad budúcich výnosov

- Finančné výnosy sú málokedy normálne rozdelené.
- Keďže investor má preferencie ohľadom expected shortfall, je kľúčové čo najpresnejšie modelovať "dolný chvost" výnosov.
- Ponúknuť alternatívu k bootstrappingu.

Optimalizácia portfólia

- Pri dobre odhadnutej distribúcii budúcich výnosov dáva zmysel porovnať rôzne investičné ciele a kritéria.
- Optimalizácia expected shortfallu je linearizovateľný problém.

Sumarizácia medzi modelmi a preferenciami

- Prehľadné dynamické zobrazenie výstupu, možnosť porovnania prístupov.
- Vzájomné porovnanie takto optimálnych portfólií je dobrým mechanizmom aj na feedback od investora ohľadom výberu konkrétneho spôsobu optimalizácie portfólia.

Ako vyriešiť nenormalitu výnosov

- Najčastejšie sa používajú metódy založené na kopulách.
- Kopula = modelovanie závislosti medzi viacerými náhodnými premennými.
- Pre náhodné premenné X_1, \dots, X_n s distribučnými funkciami $F(x_1), \dots, F(x_n)$ majme vektor:

$$(U_1, U_2, \dots, U_n) = (F_1(X_1), F_2(X_2), \dots, F_n(X_n)) \quad (1)$$

Z definície distribučnej funkcie má každá zložka tohto vektora rovnomerné rozdelenie na intervale $[0, 1]$.

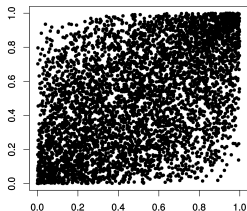
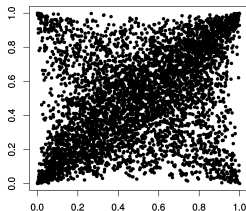
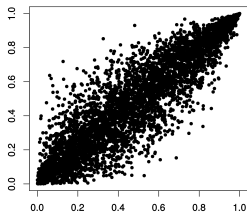
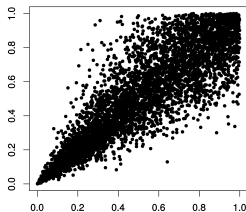
- Kopulou nad premennými X_1, \dots, X_n rozumieme distribučnú funkciu vektora (U_1, U_2, \dots, U_n) :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Pr[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_n \leq u_n]. \quad (2)$$

- Celá informácia o rozdelení X_1, \dots, X_n je teda daná:
 - Marginálnymi rozdeleniami $F(X_1), \dots, F(X_n)$.
 - Kopulou $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
- Sklarova veta: Pre viacrozmerné rozdelenie s hustotou $h(\cdot)$, marginálnymi rozdeleniami $f_i(\cdot)$ a kopulou $c(\cdot)$ platí:

$$h(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \quad (3)$$

Bežné kopuly

Bivariate Gaussian copula with $\rho = 0.5$ Bivariate Student-t copula with $\rho = 0.5$ and dof = 1Bivariate Gumbel copula with $\alpha = 4$ Bivariate Clayton copula with $\alpha = 5$

Vine Copula

- Problém pri vyšších dimenziách - len jeden / dva parametre.
- Možné riešenie - Vine Kopuly.
- Miesto jednej kopuly pre celé viacrozmerné rozdelenie použijeme kombináciu dvojrozmerných kopúl a správne definovaných podmienených rozdelení.
- Napríklad v troch rozmeroch vieme podmienenú hustotu x_1 vyjadriť ako:

$$f(x_1|x_2, x_3) = c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3)) \cdot f(x_1|x_3). \quad (4)$$

- Alebo ekvivalentne aj takto:

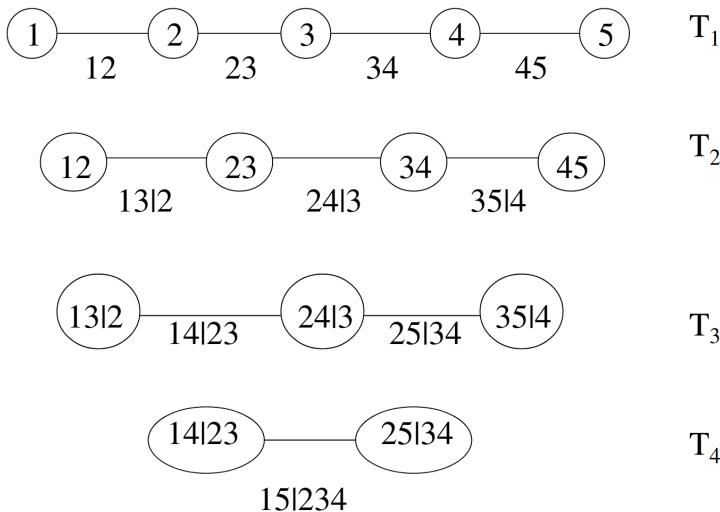
$$f(x_1|x_2, x_3) = c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \cdot f(x_1|x_2). \quad (5)$$

- Ak zapíšeme pomocou kopuly aj $f(x_1|x_2)$, dostávame:

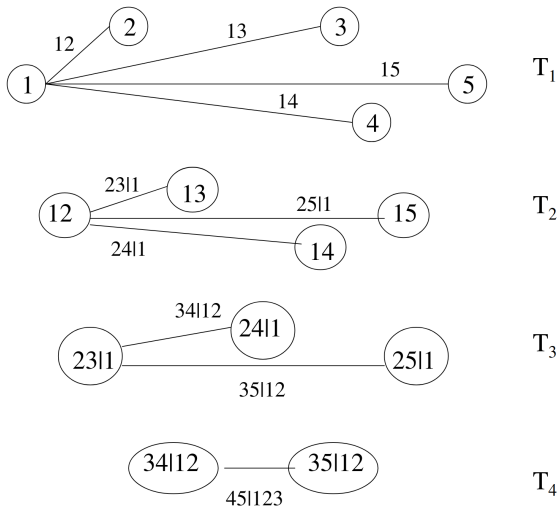
$$f(x_1|x_2, x_3) = c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \cdot c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot f_1(x_1). \quad (6)$$

- Pri ďalších rozmeroch funguje postup analogicky - iteratívne.

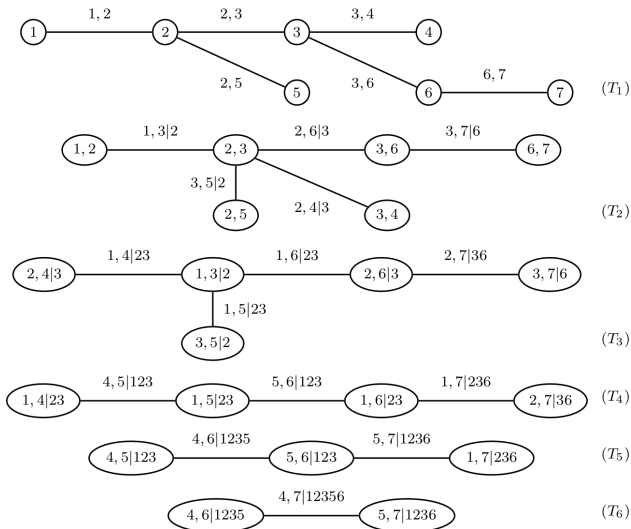
D-vine kopula



C-vine kopula



R-vine kopula



2 prístupy k SAA

- Za **fixné zložky** portfólia označme čokoľvek, čo nechceme nakupovať ani predávať - napr. zlato. V tomto zmysle slova je pre nás fixnou zložkou aj ASW portfólio, keďže jeho veľkosť nevieme dobre predpovedať ani nastaviť na základe výstupu nášho modelu. Berieme ho teda ako určitú formu ohraničenia optimalizácie.

2 prístupy k SAA

- Za **fixné zložky** portfólia označme čokoľvek, čo nechceme nakupovať ani predávať - napr. zlato. V tomto zmysle slova je pre nás fixnou zložkou aj ASW portfólio, keďže jeho veľkosť nevieme dobre predpovedať ani nastaviť na základe výstupu nášho modelu. Berieme ho teda ako určitú formu ohraničenia optimalizácie.
- Za **variabilné zložky** považujeme čokoľvek, čo vieme nakúpiť alebo prediť na základe výstupu z modelu.

2 prístupy k SAA

- Za **fixné zložky** portfólia označme čokoľvek, čo nechceme nakupovať ani predávať - napr. zlato. V tomto zmysle slova je pre nás fixnou zložkou aj ASW portfólio, keďže jeho veľkosť nevieme dobre predpovedať ani nastaviť na základe výstupu nášho modelu. Berieme ho teda ako určitú formu ohraničenia optimalizácie.
- Za **variabilné zložky** považujeme čokoľvek, čo vieme nakúpiť alebo predat' na základe výstupu z modelu.
- Pri optimalizácii portfólia by som chcel analyzovať dva rôzne praktické prístupy.
- **Scenár č.1 (viac menej stabilne veľké portfólio)** - Investor určí objem investície, ktorú chce vložiť do variabilných zložiek (napr. akcií). Model vyráta optimálne váhy vzhľadom na ohraničenia (fixné zložky).

2 prístupy k SAA

- Za **fixné zložky** portfólia označme čokoľvek, čo nechceme nakupovať ani predávať - napr. zlato. V tomto zmysle slova je pre nás fixnou zložkou aj ASW portfólio, keďže jeho veľkosť nevieme dobre predpovedať ani nastaviť na základe výstupu nášho modelu. Berieme ho teda ako určitú formu ohraničenia optimalizácie.
- Za **variabilné zložky** považujeme čokoľvek, čo vieme nakúpiť alebo prediť na základe výstupu z modelu.
- Pri optimalizácii portfólia by som chcel analyzovať dva rôzne praktické prístupy.
- **Scenár č.1 (viac menej stabilne veľké portfólio)** - Investor určí objem investície, ktorú chce vložiť do variabilných zložiek (napr. akcií). Model vyráta optimálne váhy vzhľadom na ohraničenia (fixné zložky).
- **Scenár č.2 (dynamicky sa meniaca veľkosť portfólia)** - Investor zadá maximálne množstvo kapitálu a sadzbu za ktorú si vie požičať / za ktorú vie požičať. Model vyráta optimálne portfólio. Investor následne nakúpi / predá také množstvo variabilných zložiek, aby váhy jeho portfólia zodpovedali váham v modeli. Kapitál cez money market, prípadne ak narastú úrokové miery tak cez TARGET2.

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$\Omega = 11.52$$

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$\Omega = 11.52$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{0.65 + 0.3}{\Omega}$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$\Omega = 11.52$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{0.65 + 0.3}{\Omega}$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$\Omega = 11.52$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{0.65 + 0.3}{\Omega}$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

$$w_6 = 0.739, w_7 = 0.05, w_8 = 0.13$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Predpokladajme, hodnoty jednotlivých aktív X_1, \dots, X_n so spoločnou hustotou $f^{5yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 5 rokov a hustotou $f^{1yr}(x_1, \dots, x_n)$ v horizonte 1 rok. Obe odhadnuté pomocou vine kopúl.
- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.1 kde investor vyčlení konkrétnu sumu na investovanie do variabilných zložiek portfólia, napr. 300 miliónov EUR. Nech celková veľkosť portfólia Ω je teda:
 $\Omega = 10.57$ mld. eur (zlato, intervenčné portfólio, ASW) + 0.65 mld. eur (Čína, akcie) + 0.3 mld. eur = 11.52 mld. eur.
- Takýto optimalizačný problém by mohol vyzerat' napríklad nasledovne (čísla v mld.):

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$s.t. w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$\Omega = 11.52$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = \frac{0.65 + 0.3}{\Omega}$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

$$w_6 = 0.739, w_7 = 0.05, w_8 = 0.13$$

$$ES_{1\%}^{1yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega) \leq 0.4$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$\text{s.t. } w_1 + \dots + w_n = 1$$

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$\text{s.t. } w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$\text{s.t. } w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

$$w_6 = 0.739, w_7 = 0.05, w_8 = 0.13$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$\text{s.t. } w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

$$w_6 = 0.739, w_7 = 0.05, w_8 = 0.13$$

$$w_8 = \frac{1.5}{\Omega}$$

Príklad optimalizácie č. 1

- Nech w_1, \dots, w_n sú váhy portfólia, $w_1 + w_2 + \dots, w_n = 1$. Majme scenár č.2 kde investor prispôsobí veľkosť portfólia Ω optimálnym váham.
- Optimalizačný problém by vyzeral napríklad nasledovne:

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

$$\min_{w_1, \dots, w_n, \Omega} ES_{5\%}^{5yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega)$$

$$\text{s.t. } w_1 + \dots + w_n = 1$$

$$w_4 > 0.026, w_5 > 0.03$$

$$w_6 = 0.739, w_7 = 0.05, w_8 = 0.13$$

$$w_8 = \frac{1.5}{\Omega}$$

$$ES_{1\%}^{1yr}(w_1, \dots, w_n, \Omega) \leq 0.4$$

Účelová funkcia vs. ohraničenia

- Okrem rôznych prístupov k veľkosti portfólia je možné optimalizovať rôzne ciele za rôznych ohraničení.
- Možné ciele:
 - Mean - Variance optimalizácia
 - Expected shortfall
 - dá sa linearizovať, viď Rockafellar and Uryasev (2000)
 - rôzne časové horizonty (1 rok, 5-7 rokov)
 - rôzne pravdepodobnostné hladiny (95%, 99%)
 - minimalizovať $P(\text{výnos} < X)$

Účelová funkcia vs. ohraničenia

- Okrem rôznych prístupov k veľkosti portfólia je možné optimalizovať rôzne ciele za rôznych ohraničení.
- Možné ciele:
 - Mean - Variance optimalizácia
 - Expected shortfall
 - dá sa linearizovať, viď Rockafellar and Uryasev (2000)
 - rôzne časové horizonty (1 rok, 5-7 rokov)
 - rôzne pravdepodobnostné hladiny (95%, 99%)
 - minimalizovať $P(\text{výnos} < X)$
- Možné ohraničenia:
 - Expected shortfall $< X$ (opäť rôzne varianty)
 - $P(\text{výnos} < X) < Y$
 - Minimálny očakávaný výnos.
 - Maximálna akceptovaná variancia portfólia.
 - Fixné zložky portfólia.

Ohraničenia	min	max	v mld.
EM global IG Govt (JPM) FX Hdg.	0.0%		
US MBS (ICE) FX Hdg.	0.0%		
US Inflation-Linked Govt (ICE) FX Hdg.	0.0%		
1-3 Year China Govt (ICE) FX Unhdg.	2.6%		0.300
World Equity (MSCI) FX Unhdg.	3.0%		0.350
1-5 Year Global Non-Sov (ICE) IR hdg. IRS	73.9%	73.9%	8.500
1-5 Year US Govt (ICE) FX Unhdg.	5.0%	5.0%	0.570
Gold XAU/EUR Rate FX Unhdg.	13.0%	13.0%	1.500

Výstup z projektu

- Optimalizácia rôznych kombinácií ohraničení a cieľov, konsolidácia výsledkov do jedného datasetu, vytvorenie GUI pre používateľa v PowerBI / RShiny.
 - Modulárny prístup k optimalizácii, používateľom zvoliteľné jednotlivé časti:
 - Prístup k optimalizácii - scenár 1 vs. scenár 2.
 - Cieľ optimalizácie - účelová funkcia (mean-var, ES, $\min P(\text{výnos} < X)$).
 - Ohraničenia (ES, $P(\text{výnos} < X) < Y$, $\min \text{exp. výnos}$, $\max \text{variance}$, ...).
- optional Spôsob odhadu budúcich výnosov.

Výstup z projektu

- Optimalizácia rôznych kombinácií ohraničení a cieľov, konsolidácia výsledkov do jedného datasetu, vytvorenie GUI pre používateľa v PowerBI / RShiny.
- Modulárny prístup k optimalizácii, používateľom zvoliteľné jednotlivé časti:
 - Prístup k optimalizácii - scenár 1 vs. scenár 2.
 - Cieľ optimalizácie - účelová funkcia (mean-var, ES, $\min P(\text{výnos} < X)$).
 - Ohraničenia (ES, $P(\text{výnos} < X) < Y$, $\min \text{exp. výnos}$, $\max \text{variance}$, ...).
- optional Spôsob odhadu budúcich výnosov.
- Výstupom grafické zobrazenie:
 - Hustota rozdelenia očakávanej hodnoty takéhoto portfólia vo viacerých časových horizontoch, napr. 1yr, 5yrs.
 - Optimálne váhy portfólia.
 - Zaujímavé parametre pre všetky horizonty: VaR, Expected shortfall (CVar), expected return + variance, $P(\text{výnos} < X) < 0$.

Cieľ + sumarizácia

- Vytvoriť ucelený framework pre SAA, ktorý by okrem nájdania optimálneho portfólia umožnil investorovi dynamicky meniť optimálne portfólio vzhľadom na zmenu v preferenciách.

Cieľ + sumarizácia

- Vytvoriť ucelený framework pre SAA, ktorý by okrem nájdania optimálneho portfólia umožnil investorovi dynamicky meniť optimálne portfólio vzhľadom na zmenu v preferenciách.
- Milestones:
 - Model na predpovedanie budúcich výnosov, robustná parametrizácia pomocou Vine kopúl.
 - Optimálne portfólio vzhľadom na expected shortfall, linearizácia, research možných ohraničení vzhľadom na numerickú náročnosť.
 - Konsolidovaný výstup s dynamickým GUI pre investora na porovnanie očakávaných výnosov pre rôzne prístupy k optimalizácii.

Cieľ + sumarizácia

- Vytvoriť ucelený framework pre SAA, ktorý by okrem nájdania optimálneho portfólia umožnil investorovi dynamicky meniť optimálne portfólio vzhľadom na zmenu v preferenciách.
- Milestones:
 - Model na predpovedanie budúcich výnosov, robustná parametrizácia pomocou Vine kopúl.
 - Optimálne portfólio vzhľadom na expected shortfall, linearizácia, research možných ohraničení vzhľadom na numerickú náročnosť.
 - Konsolidovaný výstup s dynamickým GUI pre investora na porovnanie očakávaných výnosov pre rôzne prístupy k optimalizácii.
- Pridaná hodnota:
 - Odhad budúcich výnosov robustným modelom.
 - Numericky priechodná optimalizácia expected shortfall.
 - Ujasnenie predstavy o preferenciách investora / feedback mechanizmus.