您的问题触及了Ridit检验的理论核心。我将结合您上传的两张图片，详细解答关于Ridit值分布性质及其检验统计量的推导。

---

① R值服从什么分布？它的期望和方差如何计算？

1. R值的定义与分布性质

Ridit值（R值）是通过一个**确认的分布**（标准组）计算得到的。对于一个有序分类变量有 k 个等级（如1-5星），标准组在各等级的频率分布为 $n_{s1}, n_{s2}, ..., n_{sk}$，总人数 $N_s = \sum_{j=1}^{k} n_{sj}$。

第 j 个等级的Ridit值定义为：

$$R_j = \frac{F_{j-1} + 0.5n_{sj}}{N_s}$$

其中 $F_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-1} n_{st}$ 是前 $j-1$ 等级的累积频数。

在标准组内部，**R值本身是一个离散型随机变量**，其概率分布为：

- 取值：$R_1, R_2, ..., R_k$
- 对应概率：$p_j = n_{sj}/N_s, \quad j = 1, ..., k$

2. 期望 $E(R)$ 的推导

我们计算 R 在标准组分布下的期望：

$$E(R) = \sum_{j=1}^{k} p_j R_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_{sj}}{N_s} \cdot \frac{F_{j-1} + 0.5n_{sj}}{N_s}$$

化简：

$$E(R) = \frac{1}{N_s^2} \left[\sum_{j=1}^{k} n_{sj} F_{j-1} + 0.5 \sum_{j=1}^{k} n_{sj}^2 \right]$$

注意到：

$$\sum_{j=1}^{k} n_{sj} F_{j-1} = \sum_{j=1}^{k} n_{sj} \sum_{t=1}^{j-1} n_{st} = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{k} n_{sj}\right)^2 - \sum_{j=1}^{k} n_{sj}^2\right] = \frac{N_s^2 - \sum n_{sj}^2}{2}$$

代入：

$$E(R) = \frac{1}{N_s^2}\left[\frac{N_s^2 - \sum n_{sj}^2}{2} + 0.5\sum n_{sj}^2\right] = \frac{1}{N_s^2} \cdot \frac{N_s^2}{2} = 0.5$$

结论：在标准组中，R值的期望严格等于0.5。

3. 方差 $Var(R)$ 的推导

根据方差定义：

$$Var(R) = E(R^2) - [E(R)]^2 = E(R^2) - 0.25$$

其中：

$$E(R^2) = \sum_{j=1}^{k} p_j R_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_{sj}}{N_s}\left(\frac{F_{j-1} + 0.5n_{sj}}{N_s}\right)^2$$

展开得：

$$E(R^2) = \frac{1}{N_s^3}\sum_{j=1}^{k} n_{sj}\left(F_{j-1}^2 + F_{j-1}n_{sj} + 0.25n_{sj}^2\right)$$

这个表达式比较复杂。在实践中，我们通常用样本方差来估计：

$$S_R^2 = \frac{1}{N_s - 1}\left[\sum_{j=1}^{k} n_{sj}R_j^2 - N_s(0.5)^2\right] = \frac{1}{N_s - 1}\left(\sum_{j=1}^{k} n_{sj}R_j^2 - 0.25N_s\right)$$

这就是您第二张图片中标准差计算公式的来源：

$$S_R = \sqrt{\frac{\sum n_{sj} R_j^2}{N_s - 1} - \frac{N_s}{N_s - 1}(0.5)^2} \approx \sqrt{\frac{\sum n_{sj} R_j^2}{N_s} - 0.25}$$

（大样本时 $N_s - 1 \approx N_s$）

重要性质：当标准组的分布是连续均匀分布时（即每个等级的观测数大致相等），可以证明 $Var(R) \approx 1/12 \approx 0.08333$。这就是第一张图片中检验统计量 W 公式里出现系数12的原因。

---

② 对R值做卡方检验时，构造的统计量为什么服从卡方分布？

1. 检验统计量 W 的构造

当比较多组（r 组）时，我们构造如下检验统计量（来自第一张图片）：

$$W = \frac{12}{N_s + 1} \cdot \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{r} O_{i.} (\bar{R}_i - 0.5)^2$$

其中：

- $O_{i.}$ 是第 i 组的样本量
- $\bar{R}_i$ 是第 i 组的平均Ridit值
- T 是打结校正因子（当无结或大样本时 $T \approx 1$）

在大样本下，简化为：

$$W = 12 \sum_{i=1}^{r} O_{i.} (\bar{R}_i - 0.5)^2$$

2. 为什么 W 近似服从 $\chi^2(r-1)$?

我们需要理解其渐近分布的理论基础。设第 i 组的平均Ridit值为 $\bar{R}_i$，在零假设 H_0（所有组来自同一分布）下：

步骤1：单组平均Ridit值的渐近分布
对于第 i 组，其包含 $O_{i\cdot}$ 个独立观测，每个观测的Ridit值（由标准组计算）的均值为0.5，方差记为 σ_R^2。由中心极限定理：

$$\sqrt{O_{i\cdot}}(\bar{R}_i - 0.5) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_R^2)$$

标准化后：

$$\frac{\sqrt{O_{i\cdot}}(\bar{R}_i - 0.5)}{\sigma_R} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

步骤2：卡方统计量的构造
如果各组独立，且我们知道真实方差 σ_R^2，那么可以构造：

$$\sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\sqrt{O_{i\cdot}}(\bar{R}_i - 0.5)}{\sigma_R} \right]^2 \xrightarrow{d} \chi^2(r)$$

但这需要满足一个约束条件：各组平均Ridit值实际上并不是完全独立的，因为它们都相对于同一个标准组计算。更重要的是，在零假设下，所有组的期望都是0.5，这引入了一个线性约束。

步骤3：自由度的确定
实际上，统计量 W 的构造是基于以下考虑：当样本量很大时，σ_R^2 可以用理论值 $1/12$ 来近似（即连续均匀分布下的R值方差）。那么：

$$12 \sum_{i=1}^{r} O_{i\cdot}(\bar{R}_i - 0.5)^2 \approx \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\sqrt{O_{i\cdot}}(\bar{R}_i - 0.5)}{1/\sqrt{12}} \right]^2$$

但由于 $\bar{R}_i$ 满足一定的线性约束（在标准组固定时，所有组的加权平均Ridit值会趋近于0.5），这个二次型只有 $r-1$ 个自由度。具体来说，可以证明在零假设下：

$$W = 12 \sum_{i=1}^{r} O_{i\cdot} (\bar{R}_i - 0.5)^2 \xrightarrow{d} \chi^2(r-1)$$

步骤4：直观理解
我们可以类比单因素方差分析（ANOVA）的F检验。在ANOVA中，组间平方和（SSB）除以总体方差后，在零假设下服从卡方分布。这里类似：

- $(\bar{R}_i - 0.5)^2$ 衡量了第 i 组与总体均值0.5的偏离
- 用样本量 $O_{i\cdot}$ 加权
- 乘以 12 相当于除以理论方差 $1/12$
- 由于估计了总体均值0.5，损失1个自由度

步骤5：打结校正因子 T
当数据中存在大量相同等级（打结）时，R值的实际方差小于 $1/12$。校正因子 T 定义为：

$$T = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{k} (t_j^3 - t_j)}{N_s^3 - N_s}$$

其中 t_j 是标准组中第 j 等级的频数。$T < 1$ 会增大 W 的值，以校正因打结导致的方差低估。

总结

1. **R值的分布**：在标准组中，R值是离散分布，期望严格为0.5，方差为 $E(R^2) - 0.25$，可用样本方差估计。
2. **检验统计量的分布**：
   - **Z检验**：用于单组或两组比较，基于 $\bar{R} \sim N(0.5, \sigma_R^2/N)$ 的渐近正态性。
   - **W检验**：用于多组比较，构造的 W 统计量在零假设下渐近服从 $\chi^2(r-1)$，其形式类似于组间离差平方和除以理论方差，并考虑了打结校正。

这两种检验都依赖于大样本下的渐近理论，当样本量较小时需谨慎使用。