圆形的拟合

已知圆在直角坐标系下的方程为：

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$$

待求解参数为：圆心$p_c(x_c,y_c)$和半径$r$。对于点$p_i(x_i,y_i)$，损失函数为：

$$e_i(p_c,r)=\sqrt{(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2}-r$$

目标函数为：

$$f(p_c,r)=\min\sum e_i^2\,(p_c,r)$$

求雅可比矩阵：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e_i}{\partial x_c}=-\dfrac{x_i-x_c}{\sqrt{(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2}}\\ \dfrac{\partial e_i}{\partial y_c}=-\dfrac{y_i-y_c}{\sqrt{(x_i-x_c)^2+(y_i-y_c)^2}}\\ \qquad\dfrac{\partial e_i}{\partial r}=-1\end{cases}\rightarrow j_i(p_c,r)=-\begin{pmatrix}\dfrac{x_i-x_c}{r_0}\\ \dfrac{y_i-y_c}{r_0}\\ 1\end{pmatrix}$$

令$X=(p_c\quad r)^T$，则由高斯牛顿法，有：

$$\begin{cases}H(X)=\sum j_i(X)j^T(X)\\ g(X)=-\sum j_i(X)e_i(X)\\ H(X)\Delta X=g(X)\end{cases}$$

$\Delta X$为每次迭代求解得到的参数增量。

求解得到圆的方程后，对于给定的圆边界上的点$p'(x',y')$，通过切线求解其在圆上对应点$p(x,y)$。具体来说，射线$p_cp$与圆的交点即为待求点。方程为：

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{y' - y}{x' - x} \\ x = r\cos\theta + x_c \\ y = r\sin\theta + y_c \end{cases}$$

初值的选定：通过$RANSAC$方法获得。即进行 10 次迭代，每一次随机选取 3 个点进行圆的拟合，同时计算所有点对于该圆的误差（可以通过上述求圆上点的方法求得最近点，将二者的距离转为误差）。将 10 次拟合中总误差最小的一个模型作为迭代初值。

三点求圆公式：点为$p_1(x_1, y_1)$、$p_2(x_2, y_2)$、$p_3(x_3, y_3)$。

1) 将坐标原点平移到点$p_1$处，则新的坐标为：$p_1'(0,0)$、$p_2'(x_2', y_2')$、$p_3(x_3', y_3')$；
2) 求解圆心坐标：

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{y_3'\left({x_2'}^2 + {y_2'}^2\right) - y_2'({x_3'}^2 + {y_3'}^2)}{2(x_2'y_3' - y_2'x_3')} + x_1 \\ y_c = \dfrac{x_2'\left({x_3'}^2 + {y_3'}^2\right) - x_3'({x_2'}^2 + {y_2'}^2)}{2(x_2'y_3' - y_2'x_3')} + y_1 \end{cases}$$

3) 求解圆的半径：

$$r^2 = R = (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2$$