主要分为两个步骤：

1) 利用 RANSAC 方法求解初始直线，求解直线使用 SVD 分解；

2) 基于初始的直线方程，利用高斯牛顿方法优化求解。

➢ RANSAC 求解初始直线

设直线方程为：

$$ax + by + c = 0$$

基于一簇点$PC = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$，获取初始直线$l_0$。虽然该种直线表示法有 3 个参数，但是只有 2 个自由度，故使用 SVD 分解的额外约束条件为：$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$。

当有两个点p_1、p_2时，有矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

有线性方程：

$$AX = 0$$

对矩阵A进行 SVD 分解：

$$A = U\Sigma V^T$$

则矩阵V的最后一列元素即为待求解的参数a、b、c，且有：

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

基于此，利用 RANSAC 方法进行直线的初始值优化求解。在指定迭代次数j下，每一次不放回抽样两个点，并用 SVD 方法求解直线方程l_j，并计算该直线l_j对所有点的误差总合：

$$e_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left\|a_jx_i+b_jy_i+c_j\right\|_1}{\sqrt{a_j^2+b_j^2}}$$

最后选取所有求得的直线中，误差e_j最小所对应的直线方程作为初始直线方程，而后进行高斯牛顿法优化。

- 高斯牛顿法

设直线方程为：

$$y=\theta_1x+\theta_2$$

则对于点$p_i(x_i,y_i)$，其到直线的带符号距离为：

$$d_i(\theta_1,\theta_2)=\frac{\theta_1x_i-y_i+\theta_2}{\sqrt{{\theta_1}^2+1}}$$

定义距离函数为损失函数：

$$e_i(\theta_1,\theta_2)=d_i(\theta_1,\theta_2)$$

则目标函数为：

$$f(\theta_1,\theta_2)=\min\sum\|e_i(\theta_1,\theta_2)\|^2$$

求解待求参数的雅可比矩阵：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e_i}{\partial\theta_1}=\dfrac{x_i({\theta_1}^2+1)-\theta_1(\theta_1x_i-y_i+\theta_2)}{({\theta_1}^2+1)^{\frac{3}{2}}}\\ \dfrac{\partial e_i}{\partial\theta_2}=\dfrac{1}{\sqrt{{\theta_1}^2+1}}\end{cases}\rightarrow j_i=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial e}{\partial\theta_1}\\ \dfrac{\partial e}{\partial\theta_2}\end{pmatrix}$$

每次迭代更新量求解：

$$\begin{cases}H=\sum j_ij_i^T\\ g=-\sum j_ie_i\\ H\Delta X=g\end{cases}$$

其中：$X = (\theta_1 \quad \theta_2)^T$