清华大学本科生考试试题专用纸

2020年12月29日

考试课程 微积分A（1） B卷

系名__________ 班级__________ 姓名__________ 学号__________

一．填空题（每个空3分，共10题）（**请将答案写在横线上，严禁写在答卷纸上！**）

1. 常微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 的通解为____________________。

2. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，及 $x=0$， $y=0$ 围成的平面区域的面积为____________________。

3. $\int_{-1}^{1}(x^3+\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=$____________________。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{\sin t}-\cos t)\mathrm{d}t}{x\sin x}=$____________________。

5. 曲线段 $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ $(0\le x\le 3)$ 的弧长为____________________。

6. $\int\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x=$____________________。

7. $\int\dfrac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=$____________________。

8. $\int_0^2\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=$____________________。

9. 常微分方程 $xy'+y=2x^3y^2$ 的通解为____________________。

10. 设广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则参数 p 的范围为____________________。

二. 解答题（共 8 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. （8 分）设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$。

12. （8 分）求抛物线的一段 $y=\sqrt{2x}$, $0\le x\le 1$，绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积，以及所得旋转面的侧面积。

13. （10 分）求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1-\sin x}dx$。

14. （10 分）设 $x>0$，求常微分方程 $x^2y''+xy'-y=\ln x$ 的通解。

15. （8 分）设 $f\in C^{(2)}[0,\pi]$，且 $f(\pi)=2$，$\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\sin x dx=5$，求 $f(0)$。

16. （10 分）讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\arcsin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ 的收敛性，若收敛，求广义积分值；若发散，说明理由。

17. （6 分）设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)dt$，证明：当 $x>0$ 时，$|f(x)|\le\frac{1}{x}$。

18. （10 分）设 $f\in C(-\infty,+\infty)$，且为有界函数，即 $\exists M>0$，使得 $|f(x)|\le M, x\in(-\infty,+\infty)$。

（I）证明：常微分方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y=y(x)$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 都是有界函数，即 $\exists M_1>0$，使得 $|y(x)|\le M_1, x\in[0,+\infty)$；

（II）当 $x\in(-\infty,0]$ 时，常微分方程 $y'+y=f(x)$ 是否存在有界解？若存在，有几个？（请证明你的结论）

三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

是否存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，满足 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$，但是 $\int_1^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 发散？若存在，给出满足条件的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的例子；若不存在，请证明你的结论。