清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　随机数学与统计期中考试　（A 卷）　2023 年 4 月 22 日

学号：__________　姓名：__________　班级：__________

一.（20 分）设事件 A,B 满足 $P(B)=\frac{1}{6}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A^c|B)=\frac{1}{2}$，

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$.

（1）试求 (X,Y) 的联合分布律，并问 X,Y 是否独立？为什么？

（2）试求 $Cov(X,Y)$；

（3）记 $Z=X^2+Y^2$，试求 Z 的矩母函数 $M_Z(u)$，并求出 Z 的期望与方差。

二.（20 分）抛 N 个骰子，其点数之和记为 S，这里 N 是随机变量，它的分布为 $P(N=k)=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$，

（1）试求 $P(S=3)$；

（2）试求 $P(N=2|S=3)$；

（3）试求 $P(N=2|S=3\text{，且第1个骰子出现1点})$。

三.（20 分）设随机变量 X 和 Y 独立同分布，满足 $P(X=i)=\frac{1}{2^i}, i=1,2,\cdots$，

（1）试求概率 $P(X=Y)$；

（2）试证 $\min(X,Y)\sim Ge(\frac{3}{4})$（参数为 $\frac{3}{4}$ 的几何分布）；

（3）记 $\xi=\begin{cases}1, & \min(X,Y)\le 1,\\ -1, & \min(X,Y)>1.\end{cases}$ 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ 相互独立，且均与 ξ 同分布，令

$U_n=U_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k$，$U_0=0$，求 $P(U_4=3,U_6=4)$ 及 $P(U_4=2,U_6=4)$。

四.（20 分） 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且

$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p, (0<p<1)$，记 $Z=\begin{cases}1, & X+Y=1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（1） 求 Z 的概率分布律；

（2） 求 X,Z 的相关系数 $r_{X,Z}$；

（3） 问 p 取何值时，X 与 Z 相互独立，说明你的理由。

（4） 求 $E(X|Z)$ 的概率分布律。

五.（20 分） 设 $\{N_t: t\geq 0\}$ 是强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，

（1） 试求 $Cov(N_3, N_5)$；

（2） 试求 $P(N_5=5 | N_1=1, N_2=2, N_3=3)$；

（3） 试求 $E(N_1N_5 | N_5-N_1=4)$。

附加题.（5 分） $X_i \sim Ge(p_i), i=1,2$，且相互独立，试证明：$\forall t>0$ ，有 $P(X_1<X_2 | \min(X_1,X_2)>t)=P(X_1<X_2)$。