2022 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2023 年 1 月 2 日 9 : 00-11 : 00

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第一题 10 分, 其余每题 15 分.

1 (1) 叙述任意一个版本的牛顿-莱布尼兹 (*Newton-Leibniz*) 公式, 并给出证明.

(2) 给定 C^1 光滑的函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足 g 的值处处非零. 设 C^1 光滑函数 $y(x)$ 满足对任何 x 都有 $y'(x) = f(x)g(y(x))$. 证明:

$$\int_{y(a)}^{y(b)} \frac{dt}{g(t)} = \int_a^b f(x)dx.$$

2 (1) 叙述带拉格朗日 (*Lagrange*) 余项的泰勒公式.

(2) 证明: 对任意实数 x, 有如下不等式成立

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

(3) 令 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, 求出使得 $f(x)$ 在其上是下凸函数的最大区间 I.

3 (1) 给定正数 p 与正整数 k, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^k}{n^p}$ 的收敛发散性, 需要对断言给出证明. 这里 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 表示组合数.

(2) 给定正数 p, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 是否绝对收敛.

4 (1) 求函数 $f(x) = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二阶, 即余项形如 $o((x - \frac{\pi}{4})^2)$.

(2) 判断瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\tan x}dx$ 的收敛发散性.

(3) 计算如下无穷积分的值:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots - x^{2020}}{(1 + x)^{2023}}dx.$$

5 设 f 是 $[a,b]$ 上的可导, 满足 $f'(a)=L>0$. 对每个 $a<x\le b$, 由积分中值定理可知存在 $\xi(x)\in[a,x]$ 使得

$$\int_a^x f(t)dt = f(\xi(x))\cdot(x-a).$$

(1) 证明: 对每个 $\epsilon\in(0,L)$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $a<x<a+\delta$ 都有

$$\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)} < \frac{\xi(x)-a}{x-a} < \frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)}.$$

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{\xi(x)-a}{x-a}$ 的值.

6 (1) 对非负整数 n, 计算 $I_n=\int_{-1}^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$ 的值.

(2) 计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ 的值.

7 (1) 对连续函数 f,g, 证明 *Cauchy-Schwartz* 不等式

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

(2) 计算积分 $\frac{1}{36}\int_0^1(1-3x^2)^2dx$ 的值.

(3) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 C^1 光滑函数, 满足 $f(0)=f(1)=0$. 利用 (1), (2) 的结论证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{45}\int_0^1 f'(x)^2dx,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.