一、填空题（每个空 3 分，共 10 题）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=$ ___2___。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=$ ___0___。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}=$ ___$\frac{3}{2}$___。

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=$ ___$-\frac{1}{2}$___。

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x\le 0;\\ a\sin x+2x, & x>0\end{cases}$ 可微，则 $a=$ ___-1___。

6. 设 $y=e^x\ln x$，则 $dy=$ ___$e^x\cdot(\frac{1}{x}+\ln x)\,dx$___。

7. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则函数 $f(x)$ 的间断点为 ___$x=1$___。

8. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$，则 $f^{(4)}(0)=$ ___0___。

9. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t_0=0$ 对应的点处的切线方程为 ___$y=\frac{1}{2}x+1$___。

10. 设 $f(x)=\left(\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$，则 $f'(0)=$ ___2___。

二、解答题（共 8 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11.（5 分）设函数 $f:(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 点连续，而函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 在区间 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 有界，求 $f(1)$。

12. （7 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=\sin t \end{cases}$ 确定，求函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处的带有 Peano 余项 $o((x-1)^2)$ $(x\to 1)$ 的 Taylor 公式。

13. （8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$。

$\frac{1}{\sqrt{x}}=t$

14. （9 分）求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$，$x\in[-1,3]$ 的最大值和最小值。

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $t^2-\frac{t}{2}$ $t\cdot(t-\frac{1}{2})$

15. （7 分）设参数 $a>0$，讨论曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 的交点个数。

$\frac{2+\ln x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

16. （20 分）设 $f(x)=4\arctan x-2x+1$，讨论

(1) 函数 $f(x)$ 的单调性，极值点与极值，

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x-1$

$b_{n+1}-b_n=-\ln(b_n)$

(2) 曲线 $y=f(x)$ 的凸性，拐点，渐近线，并画出曲线 $y=f(x)$ 的草图。

$b_2-b_1=-\ln(b_1)$

$-b_{n+1}=-b_n+\ln(b_n)$

$\sqrt{x}\cdot\ln x>x-1$

17. （8 分）当 $0<x<1$ 时，证明不等式 $\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x-1}<1$。

$\sqrt{x}\ln x-x+1>0$

$b_n=2-x_n>0$ <2

$x_{n+1}^{-2}=x_n^{-2}+\ln(2-x_n)$

18. （6 分）设 $x_1<2$，$x_{n+1}=x_n+\ln(2-x_n)$，$n\ge 1$，讨论 $\{x_n\}$ 的收敛性。若数列 $\{x_n\}$ 收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

$x_{n+1}-x_n=\ln(2-x_n)$ $b_{n+1}=b_n-\ln b_n$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=1-\frac{\ln b_n}{b_n}$

$1-x_n=\ln(1+1-x_n)+1-x_{n+1}$ $b_n=\ln(1+b_n)$

三．附加题（5 分）

设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\in\mathbb{R}$，我们称 $\{a_n\}$ 比 $\{b_n\}$ 更快收敛，如果当 $n\to+\infty$ 时，$a_n-A=o(b_n-A)$。 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-A}{b_n-A}=0$

(1) 不同的参数 $\lambda\in\mathbb{R}$，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 e 的速度是否相同？当 λ 取什么数是收敛速度最快？

(2) 记 $a_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$。比较两个数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_n\}$ 收敛到 e 的速度。

$e^{(1+\frac{\lambda}{n})}-e$ $e^{\cdot(1+\frac{\lambda}{n})}$ $n\to\infty$