2021 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2021 年 12 月 29 日 14 : 30-16 : 30

本试卷分两页, 共七道试题, 其中前六题每题 15 分, 第七题 10 分.

1 (1) 叙述带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒 (Taylor) 公式.

(2) 叙述任意一个版本的牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式, 并给出证明.

2 (1) 设 α, β 是给定的实数, 请判断广义积分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$$

何时收敛.

(2) 利用分部积分公式证明: 当广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

(3) 利用换元公式证明: 当广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

3 (1) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{1+n^2\pi^2})$ 的收敛发散性.

(2) 设 α, β 是给定的正数, 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ 的收敛发散性.

4 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的下凸函数.

(1) 利用下凸函数的斜率不等式 $k_{12} \le k_{13} \le k_{23}$ 证明: 如果 x_0 是 f 的极小值点, 则 x_0 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

(2) 假设 f 处处可导, 且 a 满足 $f'(a) = 0$. 证明: a 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

(3) 假设 f 处处二阶可导, 且存在正数 m 使得对任何 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f''(x) \ge m$. 证明: f 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有一个最小值点.

5 (1) 给定实数 $a > b > 0$. 计算如下 Riemann 积分的值:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a - b\cos\theta}.$$

(2) 给定正数 $p < q$, 计算如下 Riemann 积分的值:

$$\int_p^q \frac{1}{x}\sqrt{(x-p)(q-x)}dx.$$

6 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 定义 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 为 f 的变上限积分.

(1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{F(x)}{x}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{F(x)^2}{x}$ 的值.

(2) 证明 Cauchy-Schwartz 不等式

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

(3) 利用分部积分公式, 结合 (1), (2) 的结论, 证明如下不等式成立:

$$\int_0^1 \frac{F^2(x)}{x^2}dx \le 4\int_0^1 f^2(x)dx.$$

7 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的 C^2 光滑函数, 且对任何 x 有 $f(x) \ge 0$.

(1) 在哪些点 $x = x_0$ 处, 函数 $\sqrt{f(x)}$ 是可导的?(提示: $f(x_0) = 0$ 处的讨论可能要用到 Peano 余项的 Taylor 公式)

(2) 假设前述 f 还满足 $f(0) = f'(0) = 0$. 设 h 是给定的正数, 令

$$M = \max_{x\in[-2h,2h]} |f''(x)|.$$

利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式证明: 对 $x \in [-h, h]$, 都有 $f'(x)^2 \le 2Mf(x)$.