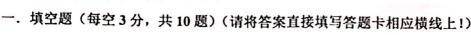
<u>清华大学本科生考试试题专用纸</u>

考试课程

微积分 A(1) (B)

2021年12月29日





2.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)=\underline{\hspace{1cm}}$$

3. 记
$$F(x) = \int_0^{x^2} \cos(\pi t^2) dt$$
,则 $F'(1) =$ ______

$$6. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \underline{\hspace{1cm}}$$

7. 常微分方程
$$x^2y'' + xy' - 4y = 0$$
 $(x > 0)$ 的通解为______。

8. 设
$$p>0$$
,广义积分 $\int_1^{+\infty} x^2 \ln(1+\sin\frac{1}{x^p}) dx$ 收敛,则实数 p 的取值范围为______。

9. 由曲线段
$$y = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$$
, $x \in [1, 4]$ 绕 x 轴旋转一周所成旋转面的面积为______。

- 二. 解答题 (请写出详细的解答过程和必要的根据!)
- 11. (10 分) 求积分 $\int_0^c \cos(\ln x) dx$ 的值。
- 12. (10 分) 求常微分方程 $y'' 3y' + 2y = e^x$ 的通解。
- 13. (15 分) 求函数 $y = 4e^{-x}(2x^2 + x + 1) 5$ 的单调区间,极值,上凸区间与下凸区间,以及 拐点的横坐标。
- 14. (10 分) 设D为 $y = \sqrt{x(1-x)}$ 与x轴围成的有界区域。
- (I) 求 D的面积:
- (II) 求D绕x轴一周所成旋转体体积。
- 15. $(10 \, f)$ 设平面曲线 y = y(x) 满足 y(0) = 1, y'(0) = 0, 且对曲线上任意点 P(x,y) (x>0), 沿曲线从点 (0,1) 到点 P(x,y) 的弧长等于该曲线在点 P(x,y) 的切线斜率, 求 y(x) (x>0).
- 16. (8分)设f(x)是R上以T为周期的周期函数,且连续,证明:
- (I) 函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt \frac{x}{T} \int_0^T f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数;
- (II) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$
- 17. (7分)设可导函数 f(x) 满足 f(1)=1,且对 $x \ge 1$ 时,有 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$ 。
- (I)证明: $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ 存在且有限;
- (II) 证明: $\lim_{x\to+\infty} f(x) \le 1 + \frac{\pi}{4}$ 。

附加题(本题为附加题,全对才给分,其分数不计入总评,仅用于评判 A+)

设 $f \in C[0,1]$, g 为非负的周期函数, 周期为1, 且 $g \in R[0,1]$, 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$