2023 年秋季学期清华大学微积分 A（1）期末考试试题

一、填空题.（共 10 小题，每题 3 分）

1、记作$[x]$为不超过x的最大整数（例如$[4.5]=4$），则积分

$$\int_0^{2024}\left(x-[x]\right)\mathrm{d}x=\_\_\_\_\_\_.$$

2、二阶线性常系数微分方程$y''-y=x$的通解为______.

3、广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=______$.

4、由平面区域$\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{\sin x},0\le x\le\pi\right\}$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积等于______.

5、曲线$y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$在区间$(1,+\infty)$上的斜渐近线方程为______.

6、已知心脏线的极坐标方程为$r=1+\cos\theta,\left(0\le\theta\le2\pi\right)$，则心脏线所围平面有界区域的面积为______.

7、极限$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{3x}\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^3}=______$.

8、极限$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=____$.

9、一阶常微分方程$y'+2y=y^2e^x$满足$y(1)=\dfrac{1}{e}$的解为____.

10、记常微分方程初值问题$\begin{cases}\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0,\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$的唯一解为$y(x)$，则$y(3)=$____.

二、解答题.（共 7 题，每题 10 分）

11、考虑函数曲线$y=(x+1)(x-2)^2,x\in\boldsymbol{R}$.

(a) 求函数的单调区间，以及极值点和极值.

(b) 求函数的凹凸区间，并指出曲线的拐点.

12、求一阶常微分方程初值问题$y'=\dfrac{y}{x}+\tan\left(\dfrac{y}{x}\right),y(1)=\dfrac{\pi}{6}$的解.

13、**(a)** 求旋轮线一拱$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},t\in[0,2\pi]$与$x$轴所围平面有界区域的面积.

(b) 求旋轮线一拱的弧长.

14、计算广义积分$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\mathrm{d}x$.

15、求参数p的取值范围，使得广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$收敛.

16、考虑一阶线性常微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a(x)y=b(x)$，其中$a(x)$和$b(x)$为实轴$R$上的连续函数，假设：

(i) 对任意的$x\in\mathbb{R}$，恒有$|b(x)|\le M,|a(x)|\ge c$，其中c为任一固定常实数，且$c>0,M>0$.

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)=0$.

证明方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a(x)y=b(x)$的每个解$y(x)$均满足$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

17、设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且满足如下积分不等式：

$$|f(x)|\le 1+\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t,\forall x\in[0,1].$$

证明：$|f(x)|\le e^x,\forall x\in[0,1]$.

三、附加题.（仅供于评判总评成绩 A⁺）

18、设$y_1(x),y_2(x)$为二阶线性齐次常微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的两个线性无关解，其中$p(x),q(x)$为开区间J上的连续函数. 证明：$y_1(x),y_2(x)$的零点相互分离，即在$y_1(x)$的任意两个零点之间，必然存在$y_2(x)$的一个零点，反之亦然.