清华大学本科生考试试题专用纸

考试科目　微积分A(1)　　　　A卷　　　　2023年11月18日

系名 ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

一. 填空题 (每题3分, 共10题)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$ ________.

2. 函数 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 在点 $x=0$ 处的 2023 阶导数值为 $f^{(2023)}(0)=$ ________.

3. 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$, $\forall n\geq 1$, 则数列 $\{a_n\}$ ________ (填"收敛"或"发散").

4. 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{\sin(x^2)}\right)=$ ________.

5. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)= \text{________}.$$

6. 假设当 $x\to0$ 时, 函数 $\sqrt{1+x}-1$ 与函数 $\frac{k\ln(1+x)}{1+x}$ 是等价无穷小, 则 $k=$ ________.

7. 假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{4})}{x}=\frac{3}{4}$, 则 $f'(0)=$ ________.

8. 设 $x=g(y)$ 是函数 $y=x\tan(x-2)$ 在点 $x=2$ 附近的反函数, 则 $g(y)$ 在点 $y=0$ 处的微分为 $dg\big|_{y=0}=$ ________.

9. 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $x=t+t^3$, $y=t+t^2$ 所确定的可微函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,y)=(2,2)$ 处切线的斜率为 ________.

10. 函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+2}$ 在点 $x=1$ 处带 Peano 余项 $o((x-1)^3)$ 的 Taylor 展式为 $f(x)=$ ________.

二. 解答题 (每题10分, 共7题)

11. 假设当 $x \to 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + A + B\sin x$ 是二阶无穷小量, 求常数 A 和 B, 并计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

12. 试确定常数 a 和 b, 使得函数

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ \frac{x^2+ax+b}{1+x}, & x < 0, \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处可导.

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

问函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续, 并说明理由.

14. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{4n} \right).$$

15. 设 $0 < x_1 < 1$, 定义 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $\forall n \geq 1$. (i) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $x_n \to 0$. (ii) 讨论数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性, 并说明理由; 当 $\{nx_n\}$ 收敛时, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导. 如果存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $[f(c) - f(a)]\,[f(b) - f(c)] < 0$, 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 假设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在(有限), 证明 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.