清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A1 A 卷 2021 年 11 月 07 日 8:00-10:00

系名________________ 班级________________ 姓名________________学号________________

一、填空题（每个空 3 分，共 10 题）（请将答案直接填写在答题卡相应横线上！）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})=$_______________。

答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：本题考查数列的极限。

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+n)}{n+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{2}\text{。}$$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=$_______________。

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：本题考查函数极限、洛必达法则。

当 $x\to\dfrac{\pi}{3}$ 时，分子、分母的极限均为 0。故 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{3})}{2\sin x}=\dfrac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

3. $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=$_______________。

答案：e^2

解析：本题考查常用极限、洛必达法则。

$$\lim_{x\to0}(\mathrm{e}^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(1+\mathrm{e}^x+\sin x-1)^{\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sin x-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x+\sin x-1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x-1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{1}}=\mathrm{e}^2\text{。}$$

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{tx}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{tx}+\mathrm{e}^{x}}$，则 $f(x)$ 的间断点为_______________。

答案：$x=0$

解析：本题考查函数的极限、函数的连续和间断。

设 $e^x=u$。则 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u^t-u^{-1}}{u^t+u}$。

①当 $x>0$ 时，$u>1$，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u^t-u^{-1}}{u^t+u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-u^{-1-t}}{1+u^{1-t}}=1$。

②当 $x=0$ 时，$u=1$，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u^t-u^{-1}}{u^t+u}=0$。

③当 $x<0$ 时，$u<1$，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{u^t-u^{-1}}{u^t+u}=\dfrac{-u^{-1}}{u}=-u^{-2}=-e^{-2x}$。

因此，$f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ e^{-2x}, x<0\end{cases}$。有可去间断点 $x=0$。

5. 已知 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}=$________________。

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：本题考查函数的极限，导数的定义。

设 $\cos x=t$，则 $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(1-t)-1}{1-t^2}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(1-t)-1}{(1+t)(1-t)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to1}\dfrac{f(1-t)-f(0)}{1-t}=\dfrac{1}{2}f'(0)=\dfrac{1}{2}$。

错解：由于 $f(0)=1$，当 $x\to0$ 时，分子、分母的极限均为 0。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(1-\cos x)\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(1-\cos x)}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}f'(0)=\dfrac{1}{2}$。

错误原因：$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不一定连续。

6. 设 $y=x\ln(1+x^2)$，则 $dy\big|_{x=1}=$________________。

答案：$(1+\ln 2)dx$

解析：本题考查微分的计算。

由 $y=x\ln(1+x^2)$ 得 $\dfrac{dy}{dx}=\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}$

故 $\mathrm{d}y=\left(\ln(1+x^2)+\dfrac{2x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$，代入 $x=1$ 即可。

7. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(1,0)$ 点的切线方程为______________。

答案： $y=x-1$

解析：本题考查导数的几何意义。

由 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 得 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， $x=1$ 时 $y'=1$，故过 $(1,0)$ 点的切线方程为 $y=x-1$。

8. 设 $f(x)$ 二阶可导，记 $f''(0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}=$______________。

答案：3

解析：本题考查函数的极限，导数的定义。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(2h)+2f(-h)-3f(0)}{h^2}&=\lim_{h\to0}\frac{2f'(2h)-2f'(-h)}{2h}\\&=3\lim_{h\to0}\frac{f'(2h)-f'(-h)}{3h}=3f''(0)=3\end{aligned}$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=$______________。

答案： $\sqrt{\mathrm{e}}$

解析：本题考查函数的极限、泰勒公式。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))=\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}))=\frac{1}{2}$，故原极限等于 $\sqrt{\mathrm{e}}$。

10. 设 $n\ge2$ 为正整数， $f(x)=x\ln x$，则 $f^{(n)}(1)=$______________。

答案： $(-1)^n(n-2)!$

解析：本题考查高阶导数。

$f'(x)=\ln x+1$，$f''(x)=\dfrac{1}{x}$，$f^{(3)}(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f^{(4)}(x)=\dfrac{2}{x^3}$，……，归纳可知

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$（$n\ge 2$）。故 $f^{(n)}(1)=(-1)^n(n-2)!$。

二、解答题（每题 10 分，共 7 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. 设 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, x\ge 0 \\ \sqrt{1+ax}, x<0 \end{cases}$。

（I）求 a 值，使得 $f(x)$ 为可导函数；

（II）此时 $f(x)$ 是否为二阶可导函数？写出理由。

（I）**解** 由题可知，$f_+'(0)=(-\mathrm{e}^{-x})\big|_{x=0}=-1$，$f_-'(0)=(\dfrac{a}{2\sqrt{1+ax}})\big|_{x=0}=\dfrac{a}{2}$。

要使 $f(x)$ 为可导函数，只需 $f_+'(0)=f_-'(0)$，即 $a=-2$。

（II）**解** 当 $a=-2$ 时，$f_+''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}-(-1)}{x}=1$，

$$f_-''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}(1-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}。$$

因为 $f_+''(0)\ne f_-''(0)$，所以此时 $f(x)$ 不是二阶可导函数。

12. 求 $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\dfrac{(x^x-\mathrm{e}^{\mathrm{e}})^2}{\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}}$。

解 当 $x\to 0$ 时，分子、分母的极限均为 0。且 $(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{(x^x-\mathrm{e}^{\mathrm{e}})^2}{\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}}&=\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{2x^x(x^x-\mathrm{e}^{\mathrm{e}})(\ln x+1)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}}\\&=4\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{x^x-\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}}\\&=4\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{x^x(\ln x+1)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)x^{\mathrm{e}-2}}\\&=4\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}}=8\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}\end{aligned}$$

13. 设 $y=x+x^2+x^5$，其反函数 $x=x(y)$ 满足在 $x(0)=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(0)$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(0)$。

解 由 $y=x+x^2+x^5$ 得 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+2x+5x^4$， $y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2+20x^3$

又 $x(0)=0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(0)=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)}=1$。

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y''}{y'^2}\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}=-\frac{2+20x^3}{(1+2x+5x^4)^3}$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(0)=-2$。

14. 已知曳物线的参数方程为$\begin{cases}x=a\left(\ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right)+\cos t\right)\\ y=a\sin t\end{cases}$，其中 $a>0$，$t\in[0,\pi]$。P 为曳物线上一点，L 为曳物线在 P 的切线，设 L 与 x 轴的交点为 Q，求证线段 PQ 长度为常数。

证明 由题可知，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\left(\dfrac{1}{2\tan\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}-\sin t\right)=a\left(\dfrac{1}{\sin t}-\sin t\right)=a\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\cos t$。

设点 P 对应的参数为 t，则切线 L 斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\tan t$，故切线倾斜角 $\theta=t$。

所以 $|PQ|=\dfrac{|y|}{\sin t}=a$，为常数。

15. 求 a，b 的值，使得函数 $f(x)=\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 当 $x\to 0$ 时达到可能的最高阶无穷小量，并求此无穷小量的阶。

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 6 阶泰勒展开式为

$$\begin{aligned}f(x)&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+o(x^6)-(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6))\\&=\left(-\frac{1}{2}+b-a\right)x^2+\left(\frac{1}{24}+b(a-b)\right)x^4+\left(-\frac{1}{720}+b^2(b-a)\right)x^6+o(x^6)\end{aligned}$$

令$-\frac{1}{2}+b-a=0$，$\frac{1}{24}+b(a-b)=0$。解得$a=-\frac{5}{12}$，$b=\frac{1}{12}$。

此时在$x=0$处，$f(x)=\frac{1}{480}x^6+o(x^6)$。

故$a=-\frac{5}{12}$，$b=\frac{1}{12}$时，函数在$x\to 0$时达到最高阶无穷小量，阶数为 6。

16.（I）设$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明数列$\{x_n\}$收敛；

（II）设$y_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

（I）**证明** 首先证明不等式$\frac{1}{n+1}\le\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}$。

由$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le \mathrm{e}$两边取对数得，$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le 1$，即$\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}$。

由均值不等式，$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=1\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\le\left(\frac{1+(n+1)\frac{n}{n+1}}{n+2}\right)^{n+2}=(\frac{n+1}{n+2})^{n+2}$

两边取倒数得$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$。即数列$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调递减。又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}$，故$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\mathrm{e}$。

两边取对数得$\frac{1}{n+1}\le\ln\frac{n+1}{n}$。因此原不等式成立。

因为$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}\le 0$，所以$\{x_n\}$单调递减。

因为$\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{1}{n}$，所以$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\ge\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)>\ln n$，

即$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$，$\{x_n\}$有下界 0。

所以数列$\{x_n\}$收敛。

（II）**解** 由（I）知，数列$\{x_n\}$收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\gamma$。则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\gamma$。故$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-x_n)=0$。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_{2n}-x_n)&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)-\ln 2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\ln 2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(y_n-\ln 2\right)\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\ln 2$

（注：不能利用$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)$代入$x=1$得到答案，因为没有证明该泰勒级数的和函数仍是$\ln(x+1)$）

17.（I）设$f(x)$在x_0点可导，令$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x_0+\frac{k}{n^2}\right)-nf(x_0)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}f'(x_0)$；

（II）求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$。

（I）**证明** 由题可知，

$$\begin{aligned}x_n&=f\left(x_0+\frac{1}{n^2}\right)-f(x_0)+f\left(x_0+\frac{2}{n^2}\right)-f(x_0)+\cdots+f\left(x_0+\frac{n}{n^2}\right)-f(x_0)\\&=\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n^2}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{f\left(x_0+\frac{n}{n^2}\right)-f(x_0)}{\frac{n}{n^2}}\cdot\frac{n}{n^2}\end{aligned}$$

（注：不能在此处直接取极限得到答案）

因为$f(x)$在x_0点可导，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$|\Delta x|<\delta$时，有

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<f'(x_0)+\varepsilon$$

取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$，则当$n>N$时，有$0<\frac{1}{n^2}<\frac{2}{n^2}<\cdots<\frac{n}{n^2}<\delta$。

故 $f'(x_0)-\varepsilon<\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{k}{n^2}\right)-f(x_0)}{\dfrac{k}{n^2}}<f'(x_0)+\varepsilon$， $k=1,\cdots,n$

因此当 $n>N$ 时，$(f'(x_0)-\varepsilon)\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)<x_n<(f'(x_0)+\varepsilon)\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)$，

即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得 $n>N$ 时，

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}(f'(x_0)-\varepsilon)<x_n<(f'(x_0)+\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$，所以取极限可知当 n 充分大时，

$$\frac{1}{2}(f'(x_0)-\varepsilon)\le x_n\le\frac{1}{2}(f'(x_0)+\varepsilon)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}f'(x_0)$。

（II）解 设 $f(x)=\ln x$， $x_0=1$。 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$。由（I）知，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)-0\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$。