清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（工科类） 2024 年 01 月 10 日

本试题共 10 道大题，满分 100 分.

1. (5 分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. (5 分) 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$，其中 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{2024}$. 若 $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$，计算 $\|a_1 + a_3\|^2 + \|a_1 + a_2\|^2 + \|a_2 + a_3\|^2$.

$4+5+6+1+2+3$

$12+9=21$

3. (15 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4×3

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基.

(2) 求 $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ 上的正交投影矩阵.

(3) 求 $Ax = b$ 的最小二乘解.

4. (10 分) 已知 3 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3I = O$，请给出 $\det(A + 2I)$ 的所有可能取值.

5. (15 分) 判断以下命题正误，并简要给出理由或者反例.

(1) 若矩阵 A 满足 $A^2 = O$, 则 A 一定可以对角化.

(2) 若矩阵 A 满足 $A^2 = 100A$, 则 A 一定可以对角化.

(3) 若 2 阶实矩阵 A 满足 $\det(A) < 0$, 则 A 一定可以在实数上对角化.

(4) 若 A 是下三角方阵但不是对角矩阵，则 A 一定不可以对角化.

(5) 若矩阵 A 的所有特征向量为 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$，则 A 一定不可以对角化.

6. (10 分) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

$A = 1600$

7. (10 分) 给定线性空间 $\mathbb{R}[x]_4 = \{a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ 上的线性变换：求导运算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

(1) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在基 $1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}$ 下的矩阵.

(2) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 在基 $\frac{x^3}{3!}, \frac{x^2}{2!}, x, 1$ 下的矩阵.

(3) 求证 $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 和 $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 相似.

8. (10 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵，求证：A 至少有 k 个正特征值（计重数，即未必是不同的特征值），当且仅当存在 k 维子空间 V, 使得对于任意非零向量 $\boldsymbol{v} \in V$, 有 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{v} > 0$.

9. (10 分) 设 A 是 n 阶正定实对称矩阵，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，求证：

$$0 \le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{x} < 1.$$

10. (10 分) 给定 n 阶可逆矩阵 A 及线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, A\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$. 求证：

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \frac{\|\boldsymbol{b} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

其中 σ_1, σ_n 分别为 A 的最大和最小奇异值.

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$