# 2022-12-30-《微积分 A1》期末考试

## 一、填空题（共 10 题，满分 30.0 分）

1.设$y(x)$是一阶线性方程$y'-\frac{1}{x}y=x(x>0)$满足初值条件$y(1)=1$的解,则$y(2)=$________.

2.设$y(x)$是常微分方程$yy''+(y')^2=1$满足初值条件$y(0)=1,y'(0)=0$的解,则$\left(y(1)\right)^2=$

________.

3.积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$________.

4.曲线段$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt\ (0\le x\le\pi)$的弧长为________.

5.设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\int_0^{x^2}f(t)dt=2x^5,\forall x\in(0,+\infty)$,则$f(1)=$________.

6.曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线共有________条.

7.设连续可微函数$y=y(x)$由方程$x=\int_1^y\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)dt$确定,则$y'(0)=$________.

8.积分$\int_{-1}^{1}\frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}}=$________.

9.已知曲线$y=y(x)$经过点$(-1,1)$,且该曲线上任意点$P$处切线的斜率是直线$OP$斜率的三倍,其中$O$是原点,则$y(-2)=$________.

10.已知$y=xe^{-2x}$是常系数二阶线性方程$y''+ay'+by=0$的解.则$a+b=$________.

## 二、选择题（共 10 题，满分 30.0 分）

1.积分$\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=$________.

$A.\dfrac{1}{2}$

$B.\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6}-2\right)$

$C.\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$D.\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

2.广义积分$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-6}=$________.

$A.\frac{\ln 6}{5}$

$B.\frac{\ln 5}{5}$

$C.\frac{\ln 3}{5}$

$D.\frac{\ln 2}{5}$

3.设$f(x)$为定义在闭区间$[a,b]$上的函数.以下命题中的 错误命题 是________.
$A.$若$f(x)$在$[a,b]$上有界,则$f(x)$在$[a,b]$上的(达布)上下积分均存在
$B.$若$f(x)$在$[a,b]$上单调,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

$C.$若$f(x)$在$[a,b]$上非负可积且.$\int_a^b f(x)dx=0$,则$f(x)$在其连续点处为零

$D.$若$f(x)$在$[a,b]$上有界,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

4.定义

$$J_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\,,\quad k=1,2,3$$

则这三个积分值从小到大排列依次是________.
$A.J_1,J_2,J_3$
$B.J_2,J_3,J_1$
$C.J_3,J_2,J_1$
$D.J_2,J_1,J_3$

5.曲线段$y=\sqrt{x}(0\le x\le 2)$绕$x$轴旋转一周所得旋转面面积为________.
$A.\frac{13\pi}{3}$
$B.2\pi$
$C.\frac{4\left(3\sqrt{3}-1\right)\pi}{3}$
$D.\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

6.设$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x^2+x+1},x\ge 0,\\2x+1,x<0.\end{cases}$若$F(x)$为$f(x)$的一个原函数,且$F(-1)=1$,则________.

$A.F(x)=\begin{cases}\ln(x^2+x+1),x\geq 0,\\ x^2+x-1,x<0\end{cases}$

$B.F(x)=\begin{cases}\ln(x^2+x+1)-1,x\geq 0,\\ x^2+x-1,x<0\end{cases}$

$C.F(x)=\begin{cases}\ln(x^2-x+1)+1,x\geq 0,\\ x^2+x+1,x<0\end{cases}$

$D.F(x)=\begin{cases}\ln(x^2+x+1)+1,x\geq 0,\\ x^2+x+1,x<0\end{cases}$

7.关于广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x^p+\ln x}$的收敛性,以下结论中 错误 的是________.

$A.$当$0\leq p<1$时,积分条件收敛

$B.$当$-1<p<0$时,积分条件收敛

$C.$当$p>1$时,积分绝对收敛

$D.$当$p\leq -1$时,积分发散

8.极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$ = ________.

$A.\frac{2}{3}$

$B.\frac{1}{3}$

$C.\frac{5}{6}$

$D.\frac{1}{2}$

9.设二阶线性常系数常微分方程的通解为$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x$,其中$C_1$和$C_2$为任意常数,则这个微分方程是________.

$A.y''+2y'+2y=2x+2$

$B.y''+2y'+2y=2x-2$

$C.y''-2y'+2y=2x-2$

$D.y''-2y'+2y=2x+2$

10.积分$\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2)dx=$ ________.

$A.\sqrt{e}$

$B.e$

$C.\frac{1}{e}$

$D.\frac{1}{\sqrt{e}}$

## 三、主观题（共 4 题，满分 40 分）

1.（15 分）设$\lambda$是实数,使得函数$f(x)=e^{x}(x^2-x+\lambda)$的图像的渐近线同时也是曲线$y=f(x)$在某点处的一条切线.

$(i)$求$\lambda$的值;

$(ii)$求$f(x)$的单调区间,极值和最值;

$(iii)$求$f(x)$的凹凸性区间,以及拐点(写出拐点横坐标即可).

2.（10 分）已知在平面直角坐标系中,区域$D$由$x$轴和参数曲线$x(t)=t+\arctan t\,, y(t)=4t(1-t), (0\le t\le 1)$共同围成.

$(i)$求$D$的面积;

$(ii)$求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体体积.

3.（10 分）求二阶线性$Euler$方程$x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3 \ln x \, (x > 0)$的通解.

4.（5 分）设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续可微,满足$0 < f'(x) \le 1, \forall x \in [0,1]$且$f(0) = 0$.证明

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^3 dx \le \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$