2023 秋季线性代数 (理科类) 期末试题

说明: 考试时间: 2024 年 1 月 13 日上午 9:00am—11:00am. 满分 100 分. 所有答案需有详细过程. 对易括号定义为 $[A,B]=AB-BA$. 0_n 为 n 阶零矩阵, I_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 这道题所有的数都是在域 F_5 里的. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

(a) (2 分) 求 A 的秩.

(b) (3 分) 求 A 的 LU 分解.

(c) (5 分) 求方程 $Ax=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$ 的所有解. 请给出解的数目.

(2) (10 分) 给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. 求矩阵 U, Σ, V 来得到 A 的奇异值分解 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.

(3) (a) (5 分) 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 7 & 11 & 12\\ 4 & 8 & 12 & 16\end{bmatrix}$ 的合同标准型和对应的合同变换矩阵 P.

(b) (5 分) A 为 n 阶实正定矩阵, x 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个列向量. 证明: $(A+xx^{\mathrm{T}})^{-1}$ 为一个正定矩阵.

(4) V_n 为 n 阶复系数多项式构成的集合 $V_n=\{f|f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\}$. 定义线性映射 $x:V_n\to V_{n+1}$ (作用为 $f\to xf$) 以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:V_{n+1}\to V_n$ (作用为 $f\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$).

(a) (3 分) 取 V_n 的基为 $1,x,\ldots,x_n$, 计算 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的表示矩阵.

(b) (3 分) 计算 V_n 下的 $\ker(x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ 和 $\mathrm{Im}(x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$.

(c) (4 分) 证明: $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x$ 是 V_n 上的可逆线性变换.

(5) 给定一个二维复线性空间 V, 考虑三个线性变换 $\sigma_i, i=1,2,3$, 选定一组基 (e_1,e_2) 之后的表示矩阵为 $\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix}$, $\sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. 定义张量空间 $V\otimes V$ 上的线性变换 $g_i:V\otimes V\to V\otimes V$, $g_i(e_k\otimes e_l)=\sigma_i(e_k)\otimes e_l+e_k\otimes\sigma_i(e_l)$.

(a) (5 分) 求线性变换 g_1, g_2, g_3 在基 $\alpha_1=e_1\otimes e_1$, $\alpha_2=e_1\otimes e_2$, $\alpha_3=e_2\otimes e_1$, $\alpha_4=e_2\otimes e_2$ 下的表示矩阵.

(b) (5 分) 我们构造另外一组基, $\beta_1=e_1\otimes e_1$, $\beta_2=\frac{1}{2}(e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1)$, $\beta_3=e_2\oplus e_2$, $\beta_4=\frac{1}{2}(e_1\otimes e_2-e_2\otimes e_1)$. 计算从 α 到 β 基的换基矩阵 P, 并计算 g_1, g_2, g_3 在 β 这组基下的表示矩阵.

(6) 考虑一个对称矩阵 $s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}$, 考虑 $(2l+1)$ 阶复矩阵的集合 $V = \{x | sx = -x^{\mathrm{T}} s\}$.

(a) (2 分) 证明: V 是复数域上的一个线性空间.

(b) (3 分) 证明: $\mathrm{Tr}(x) = 0$.

(c) (5 分) 求 V 的一组基并计算维数.

(7) g 为实线性空间 $\mathbb{R}^4$ 上的正定内积 $(g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R})$, 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 下的表示矩阵为 $g(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (5 分) 求另外一组基 (w_1, w_2, w_3, w_4) 满足 $g(w_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$.

(b) 定义线性变换 $S(v) = v - g(v, \alpha_2)\alpha_2$.

(i) (2 分) 写下 S 在基 α_i 下的表示矩阵.

(ii) (3 分) 计算 S 关于特征值 1 的特征向量子空间.

(8) V 为一复数域上带有正定厄米内积 h 的线性空间.

(a) (5 分) 证明: 对于任意的一个线性变换 a, 存在唯一的线性变换 $a^\dagger$ 满足 $h(a^\dagger v, w) = h(v, aw)$, 这里 v, w 为任意向量.

(b) (5 分) 假设 $[a, a^\dagger] = 1$, e 是 a 关于特征值 0 的特征向量. 如果 e 的长度为 1 $(h(e, e) = 1)$, 计算向量 $(a^\dagger)^n e$ 的长度.

(9) A 是一个行列式为 1 的 n 阶实矩阵.

(a) (5 分) 证明: A 可以分解为 $A = QP$, 这里 Q 为一个行列式为 1 的正交矩阵, P 为一个行列式为 1 的正定矩阵.

(b) (5 分) 证明: 上述分解是唯一的.

(10) 两个 n 阶厄米矩阵 T, Q 满足 $TQ + QT = 0_n$, $T^2 = I_n$. 令 $H = Q^2$.

(a) (2 分) 证明: $[T, H] = 0$.

(b) (4 分) 证明: H 的非零特征值对应的线性子空间的维数为偶数.

(c) (4 分) 定义 $V_+^0 = \{v | Tv = v, Qv = 0\}$, $V_-^0 = \{v | Tv = -v, Qv = 0\}$. 已知 $\dim V_+^0 = 2$, $\dim V_-^0 = 6$. 计算 $\mathrm{Tr}(T)$.