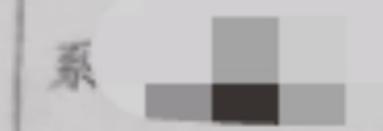
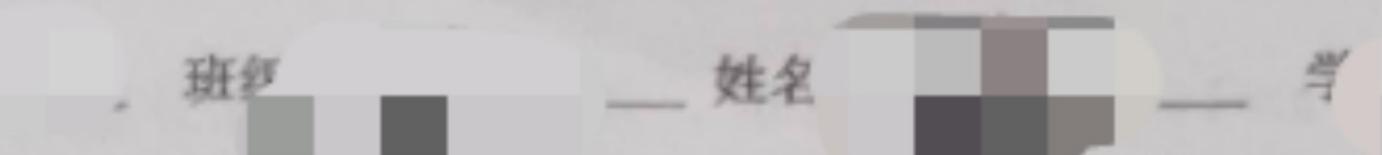
## 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A(2) B &

2021年6月15日

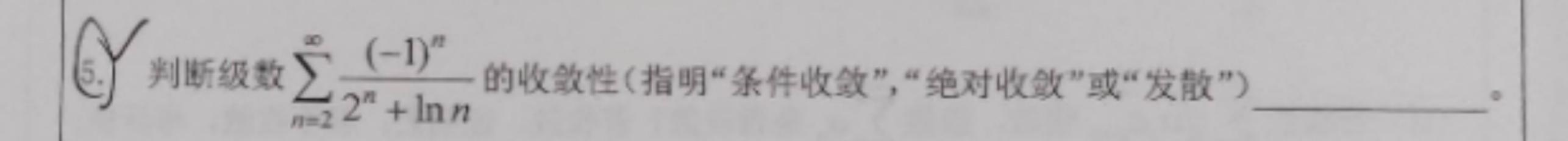






一. 填空题 (每空3分, 共10题)

- 设 $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, 1, 1), P_0 = (0, 0, 0), 则 rot \mathbf{F}(P_0) =$
- 设 $\mathbf{F}(x,y,z) = (x \ln(y+z), y \ln(z+x), z \ln(x+y)), P_0 = (1,1,1), 则 div \mathbf{F}(P_0) = 1$
- 3. 设 a 为常数,且  $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$ ,积分  $\int_{L(A)}^{(B)} (x^2 + ayz) dx + (y^2 + 2zx) dy + (z^2 + 2xy) dz$  与路 径无关,则a=
- 4. 设  $2\pi$  周期函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi]; \\ 0, & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$  的形式 Fourier 级数的和函数为 S(x) ,则  $S(\pi) = 0$



- 微分方程( $y\cos x + \cos y$ ) $dx + (\sin x x\sin y)dy = 0$ 的通解为
- 7. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$  在 (-1,1) 的和函数为\_\_
- 设 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ ,  $f \in C[0,1]$ , 将二重积分 $I = \iint (f(x) + f(y)) dxdy$

化成一重定积分的表达式,则I=

- 9. 设 L为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的上半周, A = (-a, 0), B = (a, 0),则  $\int_{L(A)}^{(B)} (x+y) dx + (x-y) dy =$
- 10.  $2\pi$ 周期函数在区间 $[-\pi,\pi)$ 的定义为 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0,\pi]; \\ 1, & x \in (-\pi,0] \end{cases}$ ,设f(x)的形式 Fourier

- 二. 解答题 (共6题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)
- 11. (12分) 设 $D = \{(x,y) | x^2 + 4y^2 \le 1\}$ , 求 $\iint_D (x^2 + y^2) dxdy$ 。
- 12. (16 分)设  $S^+$ :  $z=1-x^2-y^2$  ( $z \ge 0$ ), 其正法向量的z 分量大于等于0, 求  $\iint_{S^+} x^3 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x^2+y^2) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ .
- (12 分) 设 S 为 上 半 球 面  $z = \sqrt{R^2 x^2 y^2}$  (R > 0) 包 含 在 圆 柱 面  $\left(x \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \text{ 内的部分, } 求 \iint_S z^3 dS.$
- 14. (10分)设 L 为曲线  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t t \cos t \end{cases}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , 求  $\int_{L} (x^{2} + y^{2}) dl$ .
- 15. (12分)设 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \cdots$ 。
- (I) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  是否收敛? 若收敛, 证明之; 若不收敛, 举反例;
- (II) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  收敛,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是否收敛?若收敛,证明之;若不收敛,举反例;
- (III) 若 $\{a_n\}$ 单调,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 收敛,此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?若收敛,证明之;若不收敛,举反例。
- 16. (8分)设 $\Omega$  ⊂  $\mathbf{R}^3$  为有界闭区域,其边界面  $\partial\Omega$  为光滑正则曲面。
- (1) 设  $f, g \in C^{(2)}$ , 求证:  $\iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz$ , 其中  $\mathbf{n} \to \partial\Omega$
- 的外法向量,算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;
- (II) 函数  $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z) \in C^{(2)}(\Omega)$ 。 若 u 为 调 和 函 数 (  $\Delta u=0$  ),且 当  $(x,y,z) \in \partial \Omega$  时, u(x,y,z)-v(x,y,z)=0, 求证:

$$\iiint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) dxdydz \le \iiint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) dxdydz.$$

三. 附加题: 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , 求证:  $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (1-x)}{n(1-x^{2n})} = \frac{\pi^2}{12}$ .