清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分A1　　　A卷　　　2025年1月9日 9:00-11:00

系名________ 班级________ 姓名________ 学号______

一、填空题（每个空3分，共10题）（请将答案直接填写在答题卡上！）

1. 曲线 $y=x+x^2\sin\dfrac{1}{x^2+1}$ 的渐近线为______

2. 曲线段 $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\ (0\le x\le 8)$ 的弧长为____

3. 函数 $f(x)=x(1-x)^3\ (0<x<1)$ 在 $x=$______处取得极大值

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\int_0^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=$________.

5. $\int_0^x |\mathrm{e}^t-1|\,\mathrm{d}t=$ ______

6. 广义积分 $\int_0^1 \dfrac{(-\ln x)^p}{\sqrt{x}(1-x)^2}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围为______

7. 微分方程初值问题 $\begin{cases}(1+\mathrm{e}^x)yy'=\mathrm{e}^x\\ y(0)=\sqrt{2\ln 2}\end{cases}$ 的解为 $y(x)=$________

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=$______

9. 微分方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 的通解为 ______

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=$________.

二、解答题（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

1.（12分）设 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\ (x>0)$

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸凹性区间、拐点和渐近线；

(II) 画出曲线 $y=f(x)$ 的草图.

12. （10 分）当参数 $p>0$ 满足什么条件时广义积分 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ 收敛？并求此时的广义积分值.

13. （10 分）通过变量代换 $x=\sin t, t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 化简以下微分方程并求其通解

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0\ (-1<x<1).$$

14. （10 分）记圆周 $\begin{cases}x=2+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面为 S.

(I) 求 S 的面积；　(II) 求由 S 所包围的旋转体的体积.

15. （10 分）设 $I=\int_0^2\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x$.

(I) 证明 $I=\int_0^2\frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2-t}}\mathrm{d}t$；　(II) 求积分 I 的值.

16. （10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足

$$(x^2+1)f'(x)+(x^2+1)f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=0.$$

(I) 求 $f'(x)$ 的表达式；(II) 证明当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1$.

17. （8 分）设 $x\in(0,1)$，证明：

(I) 对任意正整数 n, 都有 $\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}<1$;

(II) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$ 存在（有限）.

三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

18. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足如下条件：

(I) $f(x)>0$;　(II) $f(1)=1, f(x+1)=xf(x)$;　(III) $\varphi(x)=\ln f(x)$ 是下凸函数.

试证：$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\ (0<x<1)$.