期中考试课程　线性代数（1）　　2018年11月10日　　（**A 卷**）

系、班____________________ 姓名_______________ 学号_______________

1. （8分）设A,B为n阶可逆矩阵，求下面分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} I+A^{-1} & A^{-1}B+I+A \\ B^{-1} & B^{-1}A+I \end{vmatrix} = 1$$

解：因为将分块方阵的某一行（某一列）左乘（右乘）一个矩阵加到另一行（另一列），不改变行列式的值，................................. **2 分**
所以

$$\begin{vmatrix} I+A^{-1} & A^{-1}B+I+A \\ B^{-1} & B^{-1}A+I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I+A^{-1} & A^{-1}B \\ B^{-1} & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 \\ B^{-1} & I \end{vmatrix} = 1$$

.... **6 分。若结果不对，但上面行和列变换对一步，3分**

2. （8分）设A,B为n $(n \geq 2)$ 阶方阵，且$|A|=2$, $|B|=-3$，求$|2A^*B^{-1}|$.

解：$|A^*| = |A|^{n-1} = 2^{n-1}$，... **3 分**
$|2A^*B^{-1}| = 2^n|A^*||B^{-1}| = 2^n 2^{n-1}(-3)^{-1} = -2^{2n-1}/3$.
.... **5 分。若结果不对，但第一个等式对，2分。**

3. （10分）设A为3阶矩阵，A的伴随矩阵为

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求A.

解：因为$1 = |A^*| = |A|^2$，所以$|A| = \pm 1$. .... **2 分**
又由于$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，所以$A = |A|(A^*)^{-1}$.

$$(A^* \vdots I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以$(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. .... **5 分. 结果不对，但有初等行变换过程2分**

于是$A = |A|(A^*)^{-1} = \pm \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ...... **3 分. 若只是第一个等式对2分**

4.（14分）给定三元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 5 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases},$$

讨论当λ取什么值时方程组有唯一解，有无穷多解，无解.

解：对方程组的增广矩阵高斯消元，

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & 0 & (\lambda+5)(\lambda-3) & 3(\lambda-3) \end{bmatrix}.$$

.... **8 分. 结果错，但有合理的过程，4分**

因此

当$\lambda \neq 3, -5$时，方程组有唯一解。........................ **2 分**

当$\lambda = 3$时，方程组有无穷解。........................... **2 分**

当$\lambda = -5$时，方程组无解。.. **2 分**

5. (18分) 计算

(1) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

解：（1）（9分）令$D=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

当$n=1$时，$D=1+x_1y_1$，........................ **2 分**

当$n=2$时，$D=x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1$, ... **2 分**

当$n\geq 3$时，分别按照第1列，第2 列，...，第n列拆开成两个行列式之和，共得到2^n个行列式求和，其中每一个行列式都有两列成比例，从而等于零，故$D=0$.
.... **5 分**

(2) （9分）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{9}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{2} & -3 \end{bmatrix}$.

.... **9 分. 若结果不对且步骤是先求逆再乘积的，逆对5分；若结果不对且步骤是直接初等列变换的，过程分4分.**

6. (14 分) 设

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad f(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\,(m\geq 1),$$

记多项式$f(x)$ 的一阶、二阶导数分别为$f'(x), f''(x)$。证明

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2}f''(a) \\ 0 & f(a) & f'(a) \\ 0 & 0 & f(a) \end{bmatrix}.$$

证明：当$m=1$时，$f(A)=\begin{bmatrix} a+a_0 & 1 & 0 \\ 0 & a+a_0 & 1 \\ 0 & 0 & a+a_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2}f''(a) \\ 0 & f(a) & f'(a) \\ 0 & 0 & f(a) \end{bmatrix}$.
.... **4 分**

当$m\geq 2$时, 利用$A^m=\begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} & \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2} \\ 0 & a^m & ma^{m-1} \\ 0 & 0 & a^m \end{bmatrix}$，可以得到
$f(A)=\begin{bmatrix} f(a) & f'(a) & \frac{1}{2}f''(a) \\ 0 & f(a) & f'(a) \\ 0 & 0 & f(a) \end{bmatrix}$.. .... **10 分**

7. (14分) 已知右手直角坐标系中异面直线$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$和$l_2 : x-1 = y+1 = z-2$，求$l_1$和$l_2$的公垂线标准方程.

解：直线l_1和直线l_2的方向向量分别为$v_1 = (1, 2, 3)$和$v_2 = (1, 1, 1)$. 因此$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j - k$，或$v_1 \times v_2 = (-1, 2, -1)$.

公垂线方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

标准方程为$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$. .... **14 分. 分步给分：方向向量对6分，过的定点对6分，标准方程的形式对2分。**

8. （14分）设A, P为3阶方阵，其中

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对P做一系列的初等列变换化成矩阵$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，对$A$做相同的初等列变换化为矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，判断$A$是否可逆，若可逆求其逆。

解：A经过初等列变换后的矩阵的行列式不等于0，变换前后的行列式只差一个非零的数倍，所以A的行列式也不等于0，于是A 可逆。........................ **4 分**

$$\begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ PA^{-1} \end{pmatrix}.$$

经过一系列的初等列变换将A变成I 时，P经过同样的列变换变成PA^{-1}.

所以$PA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

或者$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix}$. 经过一系列的初等列变换，

将$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$变回$P$ 时，同样的初等列变换将$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$变回$A$。

所以$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

.... **5 分. PA^{-1} 或者A不对，但有列变换的过程2分**

因此$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. .... **5 分. 结论不对，但有合理的计算过程2分.**