2021 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2021 年 12 月 29 日 14 : 30-16 : 30

本试卷分两页, 共七道试题, 其中前六题每题 15 分, 第七题 10 分.

1 (1) 叙述带拉格朗日 (Lagrange) 余项的泰勒公式.

(2) 叙述任意一个版本的牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式, 并给出证明.

证明: (1) 设 I 是开区间, $f : I \to \mathbf{R}$ 在 I 上处处有 n 阶导数, 则对 I 中任何两点 a, b, 存在 ξ 介于 a, b 之间, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

(2) 牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式为如下的定理: 设 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ 是可积函数, $F \in C([a, b])$ 且 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

牛顿-莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式的证明: 设 $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 的任何剖分. 对每个 $1 \le i \le n$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot \Delta x_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

由此可得

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

当 $\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时, 对上式两端取极限, 可得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

注意到 f 在 $[a,b]$ 上可积, 上式右边的极限值为 $\int_a^b f(x)dx$, 这就证明了

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

或者有如下稍微弱一点的版本: 设 $f\in C([a,b])$, $F\in C([a,b])$ 且 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

弱版本牛顿莱布尼兹公式的证明: 令 $S(x)=\int_a^x f(s)ds$. 由变上限积分定理有 $S\in C([a,b])$ 且 $S'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$. 定义函数 $H(x)=F(x)-S(x)$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$H(b)-H(a)=(b-a)\cdot H'(\xi)=(b-a)\cdot(F'(\xi)-S'(\xi))=0,$$

化简即得

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

□

2 (1) 设 α,β 是给定的实数, 请判断广义积分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$$

何时收敛.

(2) 利用分部积分公式证明: 当广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

(3) 利用换元公式证明: 当广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 收敛时, 有如下等式成立:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

解. (1) 广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 可分解成两部分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy+\int_1^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy,$$

前者有潜在的瑕点 $x=0$, 后者是无穷积分.

先考虑瑕积分. 注意到

$$\lim_{y\to 0+} \frac{y^{\alpha-1}/(1+y)^{\alpha+\beta}}{y^{\alpha-1}}=1,$$

由比较定理的极限形式可知, $\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$ 与 $\int_0^1 y^{\alpha-1}dy$ 有相同的收敛发散性, 它们收敛当且仅当 $\alpha-1>-1$, 即 $\alpha>0$.

再考虑无穷积分. 注意到

$$\lim_{y\to +\infty} \frac{y^{\alpha-1}/(1+y)^{\alpha+\beta}}{1/y^{\beta+1}}=1,$$

由比较定理的极限形式可知, $\int_1^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{\beta+1}}dy$ 有相同的收敛发散性, 它们收敛当且仅当 $\beta+1>-1$, 即 $\beta>0$.

结合这两点可得, 广义积分 $B(\alpha,\beta)$ 收敛当且仅当 $\alpha>0,\beta>0$.

(2) 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时, 利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}
B(\alpha+1,\beta)&=\int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha}}{(1+y)^{\alpha+\beta+1}}dy\\
&=\int_0^{+\infty} y^{\alpha}\left(\frac{(1+y)^{-\alpha-\beta}}{-\alpha-\beta}\right)' dy\\
&=y^{\alpha}\left(\frac{(1+y)^{-\alpha-\beta}}{-\alpha-\beta}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} \alpha y^{\alpha-1}\frac{(1+y)^{-\alpha-\beta}}{\alpha+\beta}dy\\
&=\lim_{y\to 0+} \frac{y^{\alpha}}{(\alpha+\beta)(1+y)^{\alpha+\beta}}-\lim_{y\to +\infty} \frac{y^{\alpha}}{(\alpha+\beta)(1+y)^{\alpha+\beta}}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)\\
&=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

(3) 设 $\alpha>0,\beta>0$. 令 $\frac{y}{1+y}=x, y=\frac{x}{1-x}$ 进行换元, 由 Riemann 积分的换元公式可

得

$$
\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\beta+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) \\
&= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+1} \frac{dx}{(1-x)^2} \\
&= \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.
\end{aligned}
$$

□

3 (1) 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{1+n^2\pi^2})$ 的收敛发散性.

(2) 设 α, β 是给定的实数, 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ 的收敛发散性.

证明: (1) 题述级数是收敛的.

先将该级数改写成:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{1+n^2\pi^2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\sqrt{1+n^2\pi^2} - n\pi\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi}\right).
\end{aligned}
$$

注意到 $0 < \frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi} < \frac{1}{2n\pi} \le \frac{1}{2\pi} < \frac{\pi}{2}$, 且 $\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi}$ 关于 n 递减, 可知 $\{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi}\right)\}$ 是递减且趋于零的正数数列. 利用 Leibniz 判别法, 可得交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\pi^2}+n\pi}\right)$ 是收敛的.

(2) 题述级数收敛的充分必要条件是: $\alpha > 1$, 或者 $\alpha = 1$ 且 $\beta > 1$.

分如下三种情形讨论.

(i) 当 $\alpha > 1$ 时, 对 $n \ge 3$ 有 $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \le \frac{1}{n^\alpha}$. 熟知当 $\alpha > 1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 利用比较定理可得 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ 收敛.

(ii) 当 $0<\alpha<1$ 时, 取正数 ϵ 使得 $\alpha+\epsilon<1$. 注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^\alpha\ln^\beta n}{1/n^{\alpha+\epsilon}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\epsilon}{\ln^\beta n}=+\infty,$$

由 $\alpha+\epsilon<1$ 知级数 $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n^{\alpha+\epsilon}}$ 发散, 利用比较定理可得 $\sum\limits_{n=2}^\infty\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ 发散.

(iii) 当 $\alpha=1$ 时, 由于 $f(x)=\frac{1}{x\ln^\beta x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上是非负的递减函数, 可知级数 $\sum\limits_{n=2}^\infty\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ 收敛当且仅当无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^\beta x}dx$ 收敛. 可直接计算此无穷积分

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^\beta x}dx&=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x\ln^\beta x}dx\\&=\begin{cases}\lim_{A\to+\infty}\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\Big|_2^A, & \text{当}\beta\neq1\text{ 时}\\ \lim_{A\to+\infty}\ln\ln x\Big|_2^A, & \text{当}\beta=1\text{ 时}\end{cases}\end{aligned}$$

由此可得无穷积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^\beta x}dx$ 收敛当且仅当 $-\beta+1<0$, 即 $\beta>1$. 这也是级数 $\sum\limits_{n=2}^\infty\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ 收敛的充分必要条件.

综上所述, 题述级数收敛的充分必要条件是: $\alpha>1$, 或者 $\alpha=1$ 且 $\beta>1$. □

4 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的下凸函数.

(1) 利用下凸函数的斜率不等式 $k_{12}\le k_{13}\le k_{23}$ 证明: 如果 x_0 是 f 的极小值点, 则 x_0 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

(2) 假设 f 处处可导, 且 a 满足 $f'(a)=0$. 证明: a 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

(3) 假设 f 处处二阶可导, 且存在正数 m 使得对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f''(x)\ge m$. 证明: f 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有一个最小值点.

证明: (1) 我们来证明对每个 x 均有 $f(x)\ge f(x_0)$. 由极值点的定义, 存在 x_0 的开邻域 U, 使得对任何 $y\in U$ 都有 $f(x_0)\le f(y)$.

当 $x>x_0$ 时, 取 $x_+\in U\cap(x_0,x)$. 对三个点 $x_0<x_+<x$ 用下凸函数的斜率不等式 $k_{12}\le k_{13}$, 有

$$\frac{f(x_+)-f(x_0)}{x_+-x_0}\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

结合 $f(x_+)-f(x_0)\ge0$ 即得到 $f(x)\ge f(x_0)$.

当 $x < x_0$ 时, 取 $x_- \in U \cap (x, x_0)$, 对三个点 $x < x_- < x_0$ 用下凸函数的斜率不等式 $k_{13} \le k_{23}$, 有

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \le \frac{f(x_0) - f(x_-)}{x_0 - x_-},$$

结合 $f(x_0) - f(x_-) \le 0$ 可得到 $f(x_0) - f(x) \le 0$.

(2) 下凸函数的图像在切线上方, 可得

$$f(x) \ge f(a) + f'(a)(x - a) = f(a), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

即 a 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点.

(3) 对 $x > 0$, 由微分中值定理知存在 ξ 使得 $\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(\xi)$, 由此可得

$$f'(x) \ge f'(0) + mx, \quad \forall x > 0.$$

特别的, 对充分大的正数 x 有 $f'(x) > 0$. 类似的, 对 $y < 0$, 有

$$\frac{f'(0) - f'(y)}{0 - y} = f''(\eta) \ge m,$$

即有 $f'(y) \le f'(0) + my$ 对 $y < 0$ 成立. 特别的, 对绝对值充分大的负数 y 有 $f'(y) < 0$. 对连续函数 f' 用介值定理, 可知存在 a 使得 $f'(a) = 0$. 这样, 对每个 $x \ne a$ 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2 \ge f(a) + \frac{m}{2}(x - a)^2 > f(a),$$

这就证明了 a 是 f 在 $\mathbf{R}$ 上唯一的最小值点. $\square$

5 (1) 给定实数 $a > b > 0$. 计算如下 Riemann 积分的值:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a - b\cos\theta}.$$

(2) 给定正数 $p < q$, 计算如下 Riemann 积分的值:

$$\int_p^q \frac{1}{x}\sqrt{(x - p)(q - x)}dx.$$

解. (1) 先用万能代换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 计算不定积分:

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{a-b\cos\theta} &= \int \frac{1}{a-b\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}\\ &= \frac{2}{a+b}\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}})^2}\\ &= \frac{2}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

记 $F(\theta)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right)$, 它在 $\theta=\pi$ 处无定义, 但

$$\lim_{\theta\to\pi-}F(\theta)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

这样, 可将 F 扩充为 $[0,\pi]$ 上的连续函数

$$\widetilde{F}(\theta)=\begin{cases}F(\theta), & \text{如果} 0\le\theta<\pi\\ \lim_{\theta\to\pi-}F(\theta)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, & \text{如果} \theta=\pi\end{cases}$$

它是 $\frac{1}{a-b\cos\theta}$ 在 $(0,\pi)$ 上的原函数. 利用 Newton-Leibniz 公式可得

$$\int_0^\pi\frac{d\theta}{a-b\cos\theta}=\widetilde{F}(\pi)-F(0)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

(2) 将所求的积分记为 I. 记 $A=\frac{p+q}{2}$, $B=\frac{q-p}{2}$, 令 $x-A=u, u=-B\cos\theta$ 进行换

元可得

$$
\begin{aligned}
I &= \int_p^q \frac{1}{x}\sqrt{-(x-A)^2+B^2}dx \\
&= \int_{-B}^{B} \frac{1}{A+u}\sqrt{B^2-u^2}du \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{A-B\cos\theta} B\sin\theta \cdot B\sin\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{B^2-B^2\cos^2\theta}{A-B\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(B\cos\theta + A + \frac{B^2-A^2}{A-B\cos\theta}\right) d\theta \\
&= B\sin\theta\Big|_0^{\pi} + A\pi + (B^2-A^2)\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{A-B\cos\theta} \\
&= A\pi + (B^2-A^2)\cdot \frac{\pi}{\sqrt{A^2-B^2}} \\
&= \pi(\frac{p+1}{2} - \sqrt{pq}),
\end{aligned}
$$

其中倒数第二步用到了 (1) 的计算结果. □

6 设 f, g 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 定义 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 为 f 的变上限积分.

(1) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{F(x)}{x}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{F(x)^2}{x}$ 的值.

(2) 证明 Cauchy-Schwartz 不等式

$$
\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2}.
$$

(3) 利用分部积分公式, 结合 (1), (2) 的结论, 证明如下不等式成立:

$$
\int_0^1 \frac{F^2(x)}{x^2}dx \le 4\int_0^1 f^2(x)dx.
$$

证明: (1) 利用 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则, 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0), \\
&\lim_{x\to 0+} \frac{F(x)^2}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2F(x)F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0+} 2F(x)f(x) = 2F(0)f(0) = 0.
\end{aligned}
$$

后者也可由极限的四则运算得到:

$$\lim_{x\to0+}\frac{F(x)^2}{x}=\left(\lim_{x\to0+}\frac{F(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0+}F(x)\right)=f(0)\cdot F(0)=0.$$

(2) 当 f 恒等于零, Cauchy-Schwartz 不等式显然成立. 以下假设 f 不恒等于零. 考虑关于 t 的二次函数

$$\begin{aligned}h(t)&=\int_0^1(f(x)t+g(x))^2\,dx\\&=\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)t^2+2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)t+\int_0^1 g^2(x)dx,\end{aligned}$$

则其二次项系数 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 为正. 注意到, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $h(t)$ 是是非负函数 $(f(x)t+g(x))^2$ 的积分, 因而有 $h(t)\geq0$. 由此可得 $h(t)$ 的判别式非正, 即有

$$\Delta=\left(2\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2-4\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)\leq0,$$

此即为 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$|\int_0^1 f(x)g(x)dx|\leq\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

(3) 注意到

$$\lim_{x\to0+}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0),$$

可知 $\frac{F^2(x)}{x^2}$ 可扩充为 $[0,1]$ 上的连续函数, 从而有

$$\int_0^1\frac{F^2(x)}{x^2}dx=\lim_{\epsilon\to0+}\int_\epsilon^1\frac{F^2(x)}{x^2}dx.$$

将上述积分的值记为 L, 利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}L&=\lim_{\epsilon\to0+}\int_\epsilon^1(-\frac{1}{x})'F^2(x)dx\\&=\lim_{\epsilon\to0+}\left(-\frac{F^2(x)}{x}\Big|_\epsilon^1+\int_\epsilon^1\frac{1}{x}\cdot2F(x)F'(x)dx\right)\\&=-F^2(1)+\lim_{\epsilon\to0+}\frac{F^2(\epsilon)}{\epsilon}+2\int_0^1\frac{F(x)}{x}\cdot f(x)dx\\&\leq2\int_0^1\frac{F(x)}{x}\cdot f(x)dx\\&\leq2\left(\int_0^1\frac{F^2(x)}{x^2}dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 Cauchy-Schwartz 不等式. 进一步化简即到所要证明的不等式

$$L \leq 4 \int_0^1 f^2(x) dx.$$

□

7 设 f 是 $\mathbf{R}$ 上的 C^2 光滑函数, 且对任何 x 有 $f(x) \geq 0$.

(1) 在哪些点 $x = x_0$ 处, 函数 $\sqrt{f(x)}$ 是可导的?

(2) 假设前述 f 满足 $f(0) = f'(0) = 0$. 设 h 是正数, 令

$$M = \max_{x \in [-2h, 2h]} |f''(x)|.$$

利用 Taylor 公式证明: 对 $x \in [-h, h]$, 都有 $f'(x)^2 \leq 2M f(x)$.

证明: (1) 记 $g(x) = \sqrt{f(x)}$. 当 $f(x_0) > 0$ 时, 由链式法则可得

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{2}(f(x_0))^{-1/2} f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}},$$

在该点处 g 可导.

以下考虑 $f(x_0) = 0$ 的情形. 此时, x_0 是非负函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点, 由 Fermat 定理知 $f'(x_0) = 0$. 利用带 Peano 余项的 Taylor 公式, 有

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + \alpha(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(h)}{h^2} = 0.$$

我们断言有 $f''(x_0) \geq 0$. 否则的话, 设 $f''(x_0) < 0$, 则有

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{\alpha(h)}{h^2} \right) = \frac{f''(x_0)}{2} < 0,$$

从而当 h 充分接近零时有 $f(x_0 + h) < 0$, 与条件矛盾!

当 $f''(x_0) = 0$ 时, 可直接计算 g 在 x_0 处的导数:

$$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{f(x_0 + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\operatorname{sgn}(h) \sqrt{\frac{\alpha(h)}{h^2}} \right) = 0.$$

当 $f''(x_0)>0$ 时, 有

$$g'(x_0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+\alpha(h)}}{h}=\lim_{h\to 0+}\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{\alpha(h)}{h^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)},$$
$$g'(x_0-)=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+\alpha(h)}}{h}=\lim_{h\to 0-}-\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{\alpha(h)}{h^2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}f''(x_0)},$$

左右导数不相同, 故 g 在 x_0 处不可导.

(2) 若 $f(x)=0$, 则 x 是非负函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值点, 由 Fermat 定理知 $f'(x)=0$, 此时要证明的不等式显然成立. 以下假设 $f(x)>0$.

由 Taylor 公式知存在 c 介于 0 与 x 之间, 使得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(c)x^2=\frac{1}{2}f''(c)x^2,$$

从而有 $f(x)\le\frac{M}{2}x^2$.

取正数 y 使得 $\frac{f(x)}{y}=\frac{My}{2}$, 即 $y=\sqrt{\frac{2f(x)}{M}}\le|x|\le h$. 这样有 $|x\pm y|\le 2h$, 利用 Taylor 公式知存在 $\xi_y,\eta_y\in[-2h,2h]$ 使得:

$$f(x+y)=f(x)+f'(x)y+\frac{f''(\xi_y)}{2}y^2\ge 0,\quad f(x-y)=f(x)-f'(x)y+\frac{f''(\eta_y)}{2}y^2\ge 0.$$

由此可得

$$-\frac{f(x)+\frac{f''(\xi_y)}{2}y^2}{y}\le f'(x)\le\frac{f(x)+\frac{f''(\eta_y)}{2}y^2}{y}$$

进而有

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\le\max\{\frac{f(x)+\frac{f''(\xi_y)}{2}y^2}{y},\frac{f(x)+\frac{f''(\eta_y)}{2}y^2}{y}\}\\&\le\frac{f(x)}{y}+\frac{My}{2}\\&=\sqrt{2Mf(x)}.\end{aligned}$$

□