清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数 10421324　　　2021 年 11 月 6 日

本试题共 7 道大题，满分 100 分.

1. (10 分) 计算 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 5 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

$C=\begin{bmatrix}A & C\\ D & B\end{bmatrix}$

2. (9 分) 判断下列矩阵是否可逆并给出理由.

$$A=\begin{bmatrix}10\\ 3\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 0\\ -1 & 5 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\\ 4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 5 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

3. (9 分) 给定

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(1) (3 分) 矩阵 A 是否存在 LU 分解？若是，求出它的 LU 分解；若否，说明理由.

(2) (6 分) 矩阵 B 是否可逆？若是，求出逆；若否，说明理由.

4. (8 分) 给定线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 v_1,v_2,v_3. 当且仅当 a 为何值时，向量组 $v_1+av_2+2av_3,\ v_1+2av_2+v_3,\ v_2+av_3$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基？

5. (18 分) 给定两个线性方程组

$$\text{(I)}\begin{cases}x_1+x_2-2x_4=-3,\\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3=3,\\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=11.\end{cases}\qquad \text{(II)}\begin{cases}x_1+mx_2-x_3-x_4=m^2,\\ n^2x_2-x_3+x_4=n+8,\\ 2x_1-tx_2-x_3-3x_4=2m-n.\end{cases}$$

$2x_4-x_3-5=3$　　8

$4x_4-2x_3-5=11$　　16

(1) (8 分) 求方程组 (I) 的解集.

(2) (10 分) 是否存在 m,n,t，使得方程组 (II) 与方程组 (I) 的解集相同？若是，给出具体值；若否，说明理由.

$2x_4=x_3+8$

6. (25 分) 设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}-1\\0\\3\\5\\1\end{bmatrix}$ 2

2 -3 5

2 -3 -5

-3 8 -5

(1) (10 分) 求 A 的秩，并分别计算 A 的零空间、列空间、行空间的一组基.

(2) (5 分) 令 B 为 A 去掉第二行得到的矩阵，即 $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -8\end{bmatrix}$. 为上一小题中解出的 A 的零空间的基添加向量，而得到 B 的零空间的一组基.

(3) (5 分) 求一个行简化阶梯形矩阵 R，使得 R 的零空间为 $\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_5)$. 注意，请自行给

(4) (5 分) 是否存在 4 阶方阵 B，其四个列向量中有两个分别为 α_3,α_4，且 B 的零空间为 $\operatorname{span}(\alpha_1,\alpha_5)$? 若是，举一例并验证满足条件；若否，说明理由.

7. (21 分) 对 n 阶方阵 A，若存在正整数 k，使得 $A^k=O$，则称 A 幂零.

(1) (3 分) 证明：若 A 幂零，则对任意数 t，tA 幂零.

(2) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 A^T 幂零. 即证明幂零矩阵的转置也是幂零矩阵.

(3) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 I_n+A 可逆.

(4) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 $\begin{bmatrix}I_n & -A\\ I_n & 2021I_n\end{bmatrix}$ 可逆.

(5) (3 分) 证明：若 A 幂零，则 $\operatorname{rank}(A)<n$.

(6) (3 分) 证明：若 2 阶方阵 A 满足 $A^{2021}=O$，则 $(I_2-A)^{-1}=I_2+A$.

(7) (3 分) 求一个所有元素都非零但幂零的 2 阶方阵.

注：I_n 是 n 阶单位矩阵.

0 0 0 0

1 -1 -4

1 1 2 -4

1 1 2 -4

1 2

1 4

1 -6

0 -8

2 1

4 1

-6 1

-8 0