

（问题 1-3 针对使用《线性代数入门》教材的同学）

问题 1：学线性代数不知道在干什么？

对于这部分教材的同学而言，整个前半学期（包括后半学期的前段知识），其实研究的就是一个问题：解线性方程组。这个问题我们在中学阶段已经多次学习过它的计算；而在大学的线性代数阶段，我们将这个问题真正抽象出来，转而去研究线性方程组的解的性质。在这个过程中，我们会用到一个叫矩阵的工具。

在实际工科运用中，很多情况下，我们并无法得到一个像高中那样标准的 2 个方程组成的只有唯一解的二元一次方程组，而得到的是一个由 m 个方程组成的 n 元方程组。这个方程如何求解呢？真的有解吗？到底有多少解呢？又该如何去描述所有的解呢？这就是我们线性代数前半学期需要研究的内容。

问题 2：矩阵是干什么用的，感觉矩阵的运算好复杂？

我们的目的是求解线性方程组，现在我们来简化这个问题，线性方程组中，实际重要的只有系数，要求解的变量的名字是完全不重要的。因此我们选择将系数提取出来，组成一个方阵，这就是矩阵的由来。

然后通过定义矩阵与向量的乘法，使用 $Ax=b$ 来简短描述一个线性方程组。这就是矩阵的基础含义，它可以理解为我们为了描述一个线性方程组而简化的表达形式。这样，我们就可以将方程的操作转化为对矩阵的操作，将我们最常用的消元法解方程用矩阵的形式描述——也就是高斯消元法。

矩阵的乘法则可以简单理解为矩阵与向量乘法的组合， $A[x_1 \ x_2 \dots] = [b_1 \ b_2 \dots]$ 。矩阵的逆则是为了统一求解一些中学阶段常见的方程数等于变量数且只有唯一解的线性方程组。初等变换矩阵则是对方程的各种操作的一种表示。在学习过程中，可以多去想矩阵和线性方程组之间的联系。

问题 3：感觉线性代数有些抽象，特别是一些概念？

线性代数中确实有许多难以理解的概念，但其实它们大都是从线性方程组而来。比如“秩”到底是个什么呢？“秩”对应的是消元后矩阵剩下的行数，其实反映的就是在原来的线性方程组中，有一些方程是可以由其他方程表示的，把这部分多余的方程消去后，剩下的就是实际有效的方程，这个的数量就是“秩”。由此也就可以推出秩的一些性质。比如秩的数量肯定不大于方程的数量或变量的数量，也就是矩阵的行数或列数。比如如果秩的数量等于变量的数量，那说明有效方程数和变量数相同，根据我们中学阶段的经验，这种情况就能解出唯一解。

还有线性空间，我们可以简单的理解为是一个集合，里面包含了一个齐次线性方程组的所有解。由于齐次线性方程组的特性，线性空间内的元素就会满足一些简单的特性，比如对加法和数乘的封闭性。我们希望描述这个解集的大小，就引入了线性相关和线性无关、维数的概念。为了用尽可能少的东西描述整个解集，我们引入了基。

（问题 4-5 针对使用《线性代数与几何》教材的同学）

问题 4：线性代数这门课的要求是什么？

对于这部分教材的同学而言，前半学期的目的是学习一些基础的知识和概念，主要是希望大家掌握一些线性代数的基础计算，包括行列式的基础计算、矩阵的相关运算。在此基础上，为了给后续线性空间理论（及其几何上的应用）打好基础，讲了一些有关向量的知识，需要大家掌握一些基础概念。

问题 5：感觉计算各种各样的行列式好困难，很多行列式的计算方法根本想不到？

在这部分，一个很大的误区是掌握各种各样的奇怪的行列式的计算是很重要的。行列式本身是线性代数中一个重要的概念，由它出发展开线性代数的教学也是行之有效的一种方法。但不适宜沉溺于计算各种有特殊规律的行列式，这对线性代数的学习是无利的，也不是线性代数教学所要求掌握的；我们只需要掌握计算行列式的方法和性质（主要是线性变换方面的性质），再掌握几种最重要的行列式（例如范德蒙行列式等）的计算，就足够了。等后续将其与矩阵的可逆性等建立联系后，就应该彻底脱离玩数字游戏了。同学们可以放心，考试对行列式的计算只有基础的要求。

问题 6：能否多讲讲证明的例题？

这不是问题，因为它不符合事实。一个合格的数学课，除了知识的传递，对于数学命题的严格证明是必须的；所以整个课程会在各个地方充斥着证明。之所以会有这个问题，大概同学们还是沉浸在高中的学习习惯中，将老师写下的所有东西都试图记下，预期老师是跟着同学们一起刷题讲题的。大学课程的知识密度极大，不可能给一个知识点设计很多例题从各个角度去重复。哪怕是对于重要的概念，我们也是从知识的联系性出发，从各个角度去解读，而不是采用做题这样低效的方式。

那怎么学习写数学证明呢？模仿，模仿老师上课的证明过程，模仿教材上的证明过程。写证明的要点是每一个推理过程都有依据：根据定义、根据某个定理或者某个已经证明的命题。证明的基本过程是三段论的：已知性质 P 推出性质 Q ；某对象 X 满足性质 P ，因此它满足性质 Q 。很多伪证都是忽略了前提条件，不涉及性质 P 和性质 Q 的关系，而直接从 X 满足性质 P 断言 X 满足性质 Q 。很多时候，写完一个证明的时候，往往要多问自己一句：这个推理是为什么呢，它真的是自己学过的知识点吗，还是纯粹是自己仅凭直觉就任何合理的。数学确实需要一点点直觉，但作为一门严谨的科学，不能轻易地将直觉付诸纸上。

具体练习的时候，当拿到一个证明题时，可以先想想条件能推出什么，要证明结论需要什么知识，逐渐从两端出发，一点点去将二者联系起来。证不出来不要紧，在初学阶段这是正常的，可以去求助或翻阅答案。但建议翻阅答案时，可以一点点看，看看答案的思路是怎样的，是不是自己想过的。如果发现思路是自己没考虑过的，可以合上答案，自己从这条新的思路再尝试一会，如此往复，逐渐就能锻炼出自己的写证明题能力。