

2022-2023 学年秋季学期微积分 B (1) 期末试题

填空:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{4}{x^2}} = e^m, m = ?$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x-9)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = ?$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^{\sin x} - e^x} = ?$

4. $f(x) = \sin(2 \sin x), f'(0) = ?$

5. $f(x) = x^{\ln x}, f'(e) = ?$

6. $y = f(x)$ 在 0 点和 $y = 2 \sin x$ 相切。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{3}{n}\right) = ?$

7. 二阶可导函数 $y = f(x)$ 满足 $y^3 + 3y = 3x^2 + 1$ 。 $f'(1) = ? f''(1) = ?$

8. 数列 $\{a_n\}$ 非负有界。 $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + a_k}$ 。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = ?$

9. $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = t|t| \end{cases}$ 确定。 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = ? \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-1} = ?$

10. $x \rightarrow 0$ 时, $ax^2 + bx^2 + \ln(1+x) \sim e^{x^2} - \cos x, a = ? b = ?$

11. $f(x) = \int_0^{\tan 2x} \cos t^2 dt, f'(0) = ?$

12. $\int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = ?$

13. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln^3 x}} dx = ?$

14. 曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的长度是?

15. $y = x^2$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 处的曲率半径是?

16. D 是由 $y = \sqrt{x}, x = 2, x$ 轴围成的有界区域, 其绕 x 轴旋转形成的旋转体体积为 $m\pi, m = ?$

17. 曲线 $r = a \sin 3\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$), 若这条曲线围成区域的面积为 3π , $a = ?$

18. $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n+1}$, $s(1) = me$. $m = ?$

19. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+n}} x^n$ 的收敛半径是? $s(0) = ?$

20. $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, $f(x) = 4 - \frac{2}{\pi}x$, $x \in (0, 2\pi]$. $s(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数, $s(0) = ?$
 $s(\pi) = ?$

选择: (有单选, 有多选)

21. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = p$ ($p > 0, p \neq 3$), $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 ()

- A. 这个数列单调递减有下界
- B. 这个数列单调递增有上界
- C. 数列的极限值和 p 有关
- D. 数列的极限值和 p 无关

22. $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-b)}$, $x = 1$ 是其可去间断点, 则 ()

- A. $a = 1, b = 1$
- B. $a = 1, b = e$
- C. $a = e, b = 1$
- D. $a = b = e$

23. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x+1}\right)$ 的斜渐近线方程为 ()

- A. $y = x + e$
- B. $y = x + \frac{1}{e}$
- C. $y = x - \frac{1}{e}$
- D. $y = x$

24. $f(x) = (x^2 + a)e^x$ 没有极值点但是有拐点. a 的取值范围是?

- A. $[2, +\infty)$
- B. $[1, 2)$
- C. $[0, 1)$
- D. $[1, +\infty)$

25. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-3-x^2}} dx =$

- A. $\frac{\pi}{2}$
B. π
C. 4π
D. 2π

26. $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x} dx$, $I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x(2\pi - x)} dx$, 则

A. $I_3 < I_1 < I_2$
B. $I_3 < I_2 < I_1$
C. $I_2 < I_3 < I_1$
D. $I_1 < I_2 < I_3$

27. $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x+2) - f(x) = 2(x+1)$, 若 $\int_0^2 f(x) dx = a$, 则 $\int_1^3 f(x) dx = ?$

A. $a+8$
B. $a+5$
C. $a+3$
D. a

28. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 且 $a_n < b_n$ 。则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛是 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛的 ()

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件