2023 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

2024 年 1 月 14 日 $9:00-11:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 4 题 10 分, 其余每题各 15 分.

1 (1) 叙述任何版本的牛顿莱布尼茨 *(Newton-Leibniz)* 公式, 并给出证明.

(2) 叙述定积分的换元公式, 并给出证明.

2 (1) 计算极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)-x}{\sin x-x}.$$

(2) 求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\sin x$ 在 $x=0$ 处带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求余项是 $o(x^3)$, 可引用熟知的结论, 不要求证明.

(3) 确定广义积分

$$\int_1^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x})-\sin\frac{1}{x}\right)dx$$

的收敛发散性, 并说明理由.

3 对正整数 n 定义 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

(1) 证明: 对 $n\geq 2$ 有 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$.

(2) 利用斯特林公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}=1,$$

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的值.(允许不使用斯特林公式直接计算极限)

4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上处处可导, 且 $f(b)>f(a)$. 记 $c=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 证明: 如下两个断言中必有一个断言成立:

(1) 对任何 $x\in[a,b]$, 都有 $f(x)-f(a)=c(x-a)$;

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)>c$.

5 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有连续的二阶导数. 证明:

(1) 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得

$$f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}.$$

(2) 若 f 在 $(-a,a)$ 中有极值点, 则存在 $\eta\in(-a,a)$ 使得

$$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}\big|f(a)-f(-a)\big|.$$

(提示: 找合适点 x_0, 分别对 $-a,a$ 用 x_0 处的二阶泰勒公式)

6 (1) 求不定积分

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$$

(2) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$. 计算

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx,$$

需要给出计算过程.(提示: 视 $\frac{1}{x^2}=(-\frac{1}{x})'$, 再用分部积分公式)

7 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的二阶导数. 证明: $f''(x)$ 处处非负的充分必要条件是: 对任何 $a<b$ 有

$$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$