# 2022 年秋季《高等微积分 1》期末试卷

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第一题 10 分, 其余每题 15 分.

1 (1) 叙述任意一个版本的牛顿-莱布尼兹 *(Newton-Leibniz)* 公式, 并给出证明.

(2) 给定 $C^1$ 光滑的函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足 $g$ 的值处处非零. 设 $C^1$ 光滑函数 $y(x)$ 满足对任何 $x$ 都有 $y'(x)=f(x)g(y(x))$. 证明:

$$\int_{y(a)}^{y(b)}\frac{dt}{g(t)}=\int_a^b f(x)dx.$$

*解.* (1) 牛顿-莱布尼兹 *(Newton-Leibniz)* 公式为如下的定理: 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可积函数, $F\in C([a,b])$ 且 $F'(x)=f(x),\forall x\in(a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

牛顿-莱布尼兹 *(Newton-Leibniz)* 公式的证明: 设 $x_0=a<x_1<...<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 的任何剖分. 对每个 $1\le i\le n$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

由此可得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

当 $\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时, 对上式两端取极限, 可得

$$F(b)-F(a)=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

注意到 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 上式右边的极限值为 $\int_a^b f(x)dx$, 这就证明了

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

或者有如下稍微弱一点的版本: 设 $f \in C([a,b])$, $F \in C([a,b])$ 且 $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$, 则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

弱版本牛顿莱布尼兹公式的证明: 令 $S(x) = \int_a^x f(s)ds$. 由变上限积分定理有 $S \in C([a,b])$ 且 $S'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$. 定义函数 $H(x) = F(x) - S(x)$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$H(b) - H(a) = (b-a) \cdot H'(\xi) = (b-a) \cdot (F'(\xi) - S'(\xi)) = 0,$$

化简即得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(2) 令 $t = y(x)$, 利用 Riemann 积分的换元公式可得

$$\int_{y(a)}^{y(b)} \frac{dt}{g(t)} = \int_a^b \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = \int_a^b f(x)dx.$$

□

2 (1) 叙述带拉格朗日 *(Lagrange)* 余项的泰勒公式.

(2) 证明: 对任意实数 $x$, 有如下不等式成立

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

(3) 令 $f(x) = \ln(x^2+1)$, 求出使得 $f(x)$ 在其上是下凸函数的最大区间 $I$.

解. (1) 设 $I$ 是开区间, $f : I \to \mathbf{R}$ 在 $I$ 上处处有 $n$ 阶导数, 则对 $I$ 中任何两点 $a, b$, 存在 $\xi$ 介于 $a, b$ 之间, 使得

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

(2) 我们证明了: 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^k}{k!} = e^{\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

(3) 直接计算 $f$ 的二阶导数, 有

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

对二阶可导函数 $f$, $f$ 在区间 $I$ 上是下凸的当且仅当 $f''$ 在 $I$ 上非负, 由此可知 $f$ 的最大下凸区间为满足 $f''(x) \ge 0$ 的区间, 也即是 $I = [-1, 1]$.

$\square$

3 (1) 给定正数 $p$ 与正整数 $k$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^k}{n^p}$ 的收敛发散性, 需要对断言给出证明. 这里 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 表示组合数.

(2) 给定正数 $p$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 是否绝对收敛.

解. (1) 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k/n^p}{n^{k-p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!},$$

利用比较定理的极限形式可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^k}{n^p}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-p}$ 有相同的收敛发散性. 熟知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-p}$ 收敛当且仅当 $p-k>1$, 所以当且仅当 $p>k+1$ 时题述级数收敛.

(2) 对正数 $p$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 绝对收敛当且仅当 $p>1$.

一方面, 当 $p>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛. 由于 $\frac{|\sin n|}{n^p}\le\frac{1}{n^p}$, 利用比较定理可得此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$ 收敛, 因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 绝对收敛.

另一方面, 我们来证明当 $0<p\le 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$ 发散. 用反证法, 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^p}$ 收敛. 注意到 $\frac{|\sin n|}{n^p}\ge\frac{\sin^2 n}{n^p}$, 由比较定理可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n^p}$ 收敛. 结合当 $0<p\le 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散, 可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{2n^p}$ 也发散 (否则的话, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{2n^p}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n^p}$ 都收敛可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(2n)}{2n^p}+\frac{1-\cos(2n)}{2n^p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{2n^p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n)}{2n^p}$$

收敛, 矛盾!)

令 $a_n=\frac{1}{2n^p}$, $b_n=\cos(2n)$, 则 $\{a_n\}$ 递减且趋于零, 而 $\{b_n\}$ 的部分和序列满足

$$|b_1+\cdots+b_n|=\frac{|\sin(2n+1)-\sin 1|}{2\sin 1}\le\frac{1}{\sin 1},$$

是有界的. 这样, 利用 *Dirichlet* 判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{2n^p}$ 收敛, 矛盾! □

4 (1) 求函数 $f(x)=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式, 要求展开至二阶, 即余项形如 $o((x-\frac{\pi}{4})^2)$.

(2) 判断瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\tan x}dx$ 的收敛发散性.

(3) 计算如下无穷积分的值:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2020}}{(1+x)^{2023}}dx.$$

解. (1) 直接求导可得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2}x,\quad f''(x)=-2\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

由此可得 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式为

$$\begin{aligned}f(x)&=f(\frac{\pi}{4})+f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}f''(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^2+o((x-\frac{\pi}{4})^2)\\&=1+2(x-\frac{\pi}{4})+2(x-\frac{\pi}{4})^2+o((x-\frac{\pi}{4})^2).\end{aligned}$$

(2) 题述瑕积分是发散的.

利用 (1) 的结果, 有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1/(\frac{\pi}{4}-x)}{1/(1-\tan x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1-\tan x}{\frac{\pi}{4}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\frac{2(\frac{\pi}{4}-x)-2(\frac{\pi}{4}-x)^2+o((x-\frac{\pi}{4})^2}{\frac{\pi}{4}-x}=2,$$

利用极限形式的比较定理可得瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\tan x}dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{\pi}{4}-x}dx$ 有相同的收敛和发散性. 熟知后者是发散的, 因而可知题述瑕积分也是发散的.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2023}}dx$ 是无穷积分. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k/(1+x)^{2023}}{x^{k-2023}}=1,$$

利用比较定理的极限形式可得 $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2023}}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}x^{k-2023}dx$ 有相同的收敛发散性, 它们收敛当且仅当 $2023-k>1$, 即 $k<2022$.

对于 $1\leq k\leq 2020$, 利用换元公式可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2023}}dx\\
=&\lim_{a\to 0+}\int_a^1\frac{x^k}{(1+x)^{2023}}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{x^k}{(1+x)^{2023}}dx\\
=&\lim_{a\to 0+}\int_{\frac{1}{a}}^1\frac{(\frac{1}{t})^k}{(1+\frac{1}{t})^{2023}}d(\frac{1}{t})+\lim_{b\to+\infty}\int_1^{\frac{1}{b}}\frac{\frac{1}{t}^k}{(1+\frac{1}{t})^{2023}}d(\frac{1}{t})\\
=&\lim_{a\to 0+}\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{t^{2021-k}}{(1+t)^{2023}}dt+\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{1}{b}}^1\frac{t^{2021-k}}{(1+t)^{2023}}dt\\
=&\int_1^{+\infty}\frac{t^{2021-k}}{(1+t)^{2023}}dt+\int_0^1\frac{t^{2021-k}}{(1+t)^{2023}}dt\\
=&\int_0^{+\infty}\frac{x^{2021-k}}{(1+x)^{2023}}dx.
\end{aligned}$$

由此可得题述积分的值为 0. □

5 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的可导, 满足 $f'(a)=L>0$. 对每个 $a<x\leq b$, 由积分中值定理可知存在 $\xi(x)\in[a,x]$ 使得

$$\int_a^x f(t)dt=f(\xi(x))\cdot(x-a).$$

(1) 证明: 对每个 $\epsilon \in (0, L)$, 存在 $\delta > 0$, 使得对 $a < x < a + \delta$ 都有

$$\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)} < \frac{\xi(x)-a}{x-a} < \frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)}.$$

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x \to a+} \frac{\xi(x)-a}{x-a}$ 的值.

解. (1) 取 $0 < \epsilon' < \epsilon$. 由导数定义, 有 $\lim\limits_{t \to a+} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = L$, 可知对上述 $\epsilon'$, 存在 $\delta > 0$ 使得对 $a < t < a + \delta$ 都有

$$L - \epsilon' < \frac{f(t)-f(a)}{t-a} < L + \epsilon',$$

进而可得对 $t \in [a, a+\delta)$ 有

$$f(a) + (L-\epsilon')(t-a) \le f(t) \le f(a) + (L+\epsilon')(t-a). \tag{1}$$

这样, 对 $a < x < a + \delta$ 有

$$\int_a^x (f(a) + (L-\epsilon')(t-a))dt \le \int_a^x f(t)dt \le \int_a^x (f(a) + (L+\epsilon')(t-a))dt. \tag{2}$$

积分中值定理给出的 $\xi(x) \in [a, x] \subseteq [a, a+\delta)$, 由(1)式知

$$f(a) + (L-\epsilon')(\xi(x)-a) \le f(\xi(x)) \le f(a) + (L+\epsilon')(\xi(x)-a).$$

结合(2)式可得

$$f(a) + (L-\epsilon')(\xi(x)-a) \le f(\xi(x)) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \le \frac{1}{x-a}\int_a^x (f(a) + (L+\epsilon')(t-a))dt,$$

$$f(a) + (L+\epsilon')(\xi(x)-a \ge f(\xi(x)) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt \ge \frac{1}{x-a}\int_a^x (f(a) + (L-\epsilon')(t-a))dt,$$

化简就得到

$$\frac{L-\epsilon'}{2(L+\epsilon')} \le \frac{\xi(x)-a}{x-a} \le \frac{L+\epsilon'}{2(L-\epsilon')},$$

利用 $\epsilon > \epsilon'$ 可得题述结论成立:

$$\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)} < \frac{L-\epsilon'}{2(L+\epsilon')} \le \frac{\xi(x)-a}{x-a} \le \frac{L+\epsilon'}{2(L-\epsilon')} < \frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)}.$$

(2) 所求的极限值为 $\frac{1}{2}$.

注意到有如下极限式

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)}=\frac{1}{2}=\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)},$$

对任何正数 $\eta$, 存在正数 $\epsilon$ 使得

$$\frac{1}{2}-\eta<\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)}<\frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)}<\frac{1}{2}+\eta. \tag{3}$$

由第 (1) 问的结论, 存在 $\delta>0$ 使得对 $a<x<a+\delta$ 都有

$$\frac{L-\epsilon}{2(L+\epsilon)}<\frac{\xi(x)-a}{x-a}<\frac{L+\epsilon}{2(L-\epsilon)}.$$

结合(3)可得

$$\frac{1}{2}-\eta<\frac{\xi(x)-a}{x-a}<\frac{1}{2}+\eta,$$

即有 $|\frac{\xi(x)-a}{x-a}-\frac{1}{2}|<\eta$, 这就证明了 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{\xi(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$.

□

6 (1) 对非负整数 $n$, 计算 $I_n=\int_{-1}^{1}x^n\sqrt{1-x^2}dx$ 的值.

(2) 计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$ 的值.

解. (1) 所求积分的值为

$$I_n=\frac{2}{n+2}K_n=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{如果 } n=0\\ \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!}\cdot\pi, & \text{如果 } n \text{ 是正偶数,}\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时, 被积函数是奇函数, 可得此时 $I_n=0$.

当 $n$ 为偶数时, 令 $x=\sin\theta$, 利用换元公式可得

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta(1-\sin^2\theta)d\theta\\&=2(K_n-K_{n+2}),\end{aligned}$$

其中 $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$, 满足递推关系 $K_n = \frac{n-1}{n} K_{n-2}$, 且有

$$K_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{如果 } n \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

由此可得

$$I_n = \frac{2}{n+2} K_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n+2)!!} \cdot \pi, & \text{如果 } n \text{ 是偶数}, \\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数}, \end{cases}$$

其中 $I_0 = K_0 = \frac{\pi}{2}$.

(2) 所求级数的和为 $\pi$.

利用 (1) 的结果: 当 $n$ 是奇数时 $I_n = 0$, 当 $n$ 是偶数时 $I_n = 2K_n - 2K_{n+2}$, 可得

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 + \cdots + I_n &= I_0 + I_2 + \cdots + I_{2[\frac{n}{2}]} \\ &= (2K_0 - 2K_2) + (2K_2 - 2K_4) + \cdots + (2K_{2[\frac{n}{2}]} - 2K_{2[\frac{n}{2}]+2}) \\ &= 2K_0 - 2K_{2[\frac{n}{2}]+2}. \end{aligned}$$

我们断言: $\lim\limits_{m\to\infty} K_{2m} = 0$, 在此基础上可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} (I_0 + I_1 + \cdots + I_n) = \lim_{n\to\infty} \left(2K_0 - 2K_{2[\frac{n}{2}]+2}\right) \\ &= 2K_0 = \pi. \end{aligned}$$

断言的证明: 利用熟知的不等式 $1 + x \le e^x$, 可得对偶数 $n = 2m$ 有

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!!}{n!!} &= (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n-2}) \cdots (1 - \frac{1}{2}) \\ &\le \exp(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n-2} - \cdots - \frac{1}{2}) \\ &= \exp(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}), \end{aligned}$$

结合 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ 及夹逼定理可得

$$\lim_{n=2m\to\infty} \frac{(n-1)!!}{n!!} = 0,$$

从而完成了断言的证明. □

7 (1) 对连续函数 $f,g$, 证明 *Cauchy-Schwartz* 不等式

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

(2) 计算积分 $\frac{1}{36}\int_0^1(1-3x^2)^2dx$ 的值.

(3) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 $C^1$ 光滑函数, 满足 $f(0)=f(1)=0$. 利用 (1),(2) 的结论证明:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \frac{1}{45}\int_0^1 f'(x)^2dx,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 $A$ 是常数.

*解*. (1) 当 $f$ 恒等于零, Cauchy-Schwartz 不等式显然成立. 以下假设 $f$ 不恒等于零. 考虑关于 $t$ 的二次函数

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^1 \left(f(x)t+g(x)\right)^2 dx \\ &= \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)t^2 + 2\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)t + \int_0^1 g^2(x)dx, \end{aligned}$$

则其二次项系数 $\int_0^1 f^2(x)dx$ 为正. 注意到, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $h(t)$ 是是非负函数 $(f(x)t+g(x))^2$ 的积分, 因而有 $h(t)\geq 0$. 由此可得 $h(t)$ 的判别式非正, 即有

$$\Delta = \left(2\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right) \leq 0,$$

此即为 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right). \tag{4}$$

我们来确定 Cauchy-Schwartz 不等式(4)取等的条件. 假设 $f$ 不恒等为零, 且上述 Cauchy-Schwartz 不等式成立等号, 则 $h(t)$ 的判别式为 0. 这说明存在 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得 $h(t_0)=0$, 即有

$$\int_0^1 \left(f(x)t_0+g(x)\right)^2 dx = 0.$$

由于上式中被积函数 $(f(x)t_0+g(x))^2$ 是非负连续函数, 其积分为零当且仅当被积函数恒为零, 即有 $g=-t_0f$. 所以 Cauchy-Schwartz 不等式(4)取等当且仅当 $f$ 恒等于零或者 $g=\lambda f(\lambda\in\mathbb{R})$.

(2) 直接计算可得

$$\frac{1}{36}\int_0^1 (1-3x^2)^2 dx = \frac{1}{36}\int_0^1 (1-6x^2+9x^4)dx = \frac{1}{36}(1-\frac{6}{3}+\frac{9}{5}) = \frac{1}{45}.$$

(3) 利用 (1),(2) 的结论, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{45}\int_0^1 f'(x)^2 dx \\
=&\frac{1}{36}\int_0^1 (1-3x^2)^2 dx \int_0^1 f'(x)^2 dx \\
\geq&\frac{1}{36}\left(\int_0^1 (1-3x^2)f'(x)dx\right)^2 \\
=&\frac{1}{36}\left((1-3x^2)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (1-3x^2)'f(x)dx\right)^2 \\
=&\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2.
\end{aligned}$$

由 Cahchy-Schwartz 不等式的取等条件, 上述不等式成立等号当且仅当存在常数 $A$ 使得 $f'(x) = A(1-3x^2)$, 即

$$f(x) = f(0) + \int_0^x A(1-3t^2)dt = A(x-x^3).$$

□