清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（工科类）　　　　2022 年 11 月 12 日

本试题共 10 道大题，满分 100 分.

1. (8 分) 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 6 & 7 & 10 \end{bmatrix}$，求关于 $\boldsymbol{x}$ 的方程组 $A\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{x}$ 的所有解.

2. (8 分) 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，求一个 3 阶**非零**实方阵 B 满足 $AB = O$.

3. (10 分) 求如下线性方程组的通解：$\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_5 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - 6x_5 = -7, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 - 3x_5 = -6, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 16x_5 = 11. \end{cases}$

4. (7 分) 令 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (1) 分别求出 A 的列空间和行空间的一组基.

   (2) 求 $\mathbb{R}^3$ 中所有包含向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 但不包含向量 $\boldsymbol{a}_4$ 的子空间，并对每个满足条件的子空间求出对应的一组基和维数.

5. (12 分) 设 A 为 3 阶方阵，而 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (1) 设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集为 $\left\{ k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$，求 A 的行简化阶梯形.

   (2) 设 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解集为 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$，求 A.

(3) 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集为 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\middle| k_1\in\mathbb{R}\right\}$，求 A 的行简化阶梯形，并写出一个满足条件的 A.

6. (30 分) 设 $A=\begin{bmatrix}B & C\\O & D\end{bmatrix}$，而 $B=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\2&3&0&0\\0&0&3&0\\1&0&2&3\end{bmatrix}$.

(1) 计算 B 的 LU 分解，即找到单位下三角矩阵 L_B 和上三角矩阵 U_B，使得 $B=L_BU_B$，判断 B 是否可逆并在可逆时求逆.

(2) 计算 D 的 LU 分解，即找到单位下三角矩阵 L_D 和上三角矩阵 U_D，使得 $D=L_DU_D$，判断 D 是否可逆并在可逆时求逆.

(3) 计算 A 的 LU 分解，即找到单位下三角矩阵 L_A 和上三角矩阵 U_A，使得 $A=L_AU_A$，判断 A 是否可逆并在可逆时求逆.

7. (12 分) 判断下列陈述是否正确，**并给出理由**.

(1) 设 A,B,C 为 3 阶方阵，如果 $ABC=I_3$，则 $BCA=I_3$.

(2) 设 A,B,C,D 为 2 阶方阵，且 $AD-BC=I_2$，则 $\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}D & -B\\-C & A\end{bmatrix}$.

(3) 存在 2×5 矩阵 A，使得 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$ 构成 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基.

(4) 存在 2 阶方阵 A,B 满足 $AB-BA=I_2$.

8. (8 分) 设 A, B 分别为 $m\times n$, $n\times p$ 矩阵, 试证：方程组 $(AB)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集相同当且仅当 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$.

9. (5 分) 对方阵 A，试证：若 $|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}|<|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}|$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 成立，则 $I-A^2$ 可逆.

以下为附加题，所得分数可加至总成绩到至多 100 分.

A. (10 分) 设 A,B,C 分别为 $l\times m, n\times p, l\times p$ 矩阵. 试证：

(1) 关于 $p\times n$ 矩阵 W 的方程 $BWB=B$ 总有解.

(2) 利用 (1) 中结论证明关于 $m\times n$ 矩阵 X 的方程 $AXB=C$ 有解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix}\right)$，$\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}\right)$.