2023～2024 学年秋 线性代数（书院） 期末考试

A 卷

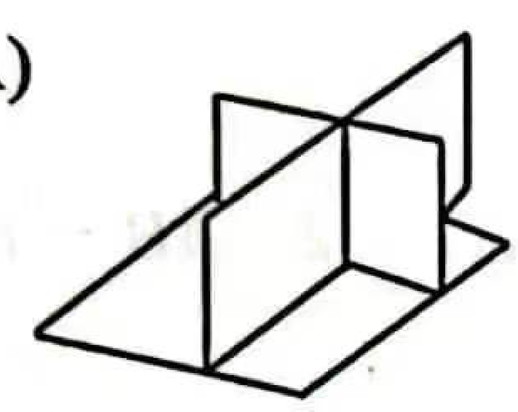
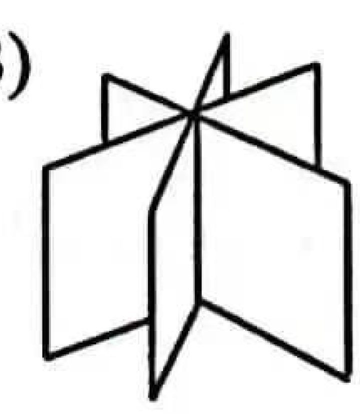
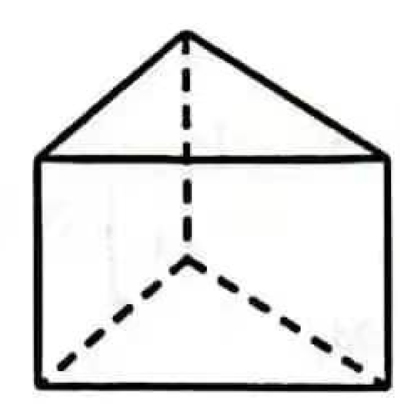
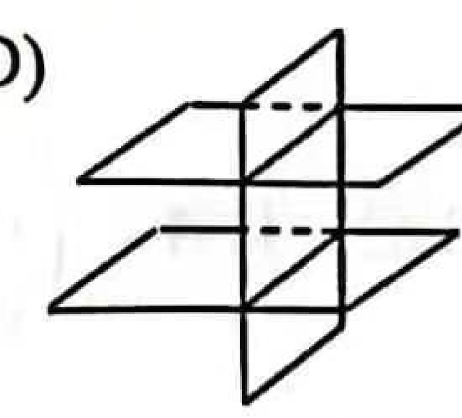
时间：2024 年 1 月 10 日 上午 9:00～11:00

院系&班级：______________，姓名：______________，学号：______________

一、客观题（选择与填空，每空 4 分，共 40 分）

1. 点$P(1,0,2)$在平面$x+2y+z-4=0$上的（正交）投影点坐标是______________。

2. 三个平面$\pi_1: 2x-y+3z-1=0$，$\pi_2: x+2y-z+1=0$，$\pi_3: x+7y-6z+10=0$的位置关系属于以下哪种情形__________（选择题）。

(A)  (B)  (C)  (D) 

3. 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{2024}=$________________。

4. 设 3 阶非零方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=6$，且$\det\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=0$，则$\boldsymbol{A}$的全体特征值为______________。

5. 设$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$为可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$是 3 阶矩阵满足$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}a_{11}&-a_{13}&-4a_{12}\\a_{21}&-a_{23}&-4a_{22}\\a_{31}&-a_{33}&-4a_{32}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}$的全部特征值是______________。

6. 若秩为 4 的实对称阵$\boldsymbol{A}$满足：$\boldsymbol{A}$与$-\boldsymbol{A}$相合，则其正惯性指数为____________。

7. 三元实二次型$f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围是____________________。

8. 设$V=\mathbb{R}^3$，σ为V上的线性变换，设σ在基$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，$\sigma$在另一组基下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则这组基是__________________。

9. 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T: M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$满足$T(A)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，则$T$在基$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵是__________________。

10. 设$\boldsymbol{A}$为n阶实方阵，则$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ ____________________ $\Leftrightarrow$ ____________________ $\Leftrightarrow$

____________________ $\Leftrightarrow$ ____________________

$\Leftrightarrow$ ____________________ （写出至少四个充要条件）。

二、解答题与证明题（须写出必要的解答过程，共60分）

11.（10分）Lucas 数列的定义为：$L_1 = 1$，$L_2 = 3$，$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$，$n \geq 1$.

(i) 令$x_n = \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$ $(n \geq 1)$，给出x_n与x_{n+1}满足的关系式.

(ii) 利用(i)的结果，求 Lucas 数列的通项公式.

12.（10分）设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的 QR 分解.

13.（12分）设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$是实对称阵，满足$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2$，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，令$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是相应实二次型.

(i) 用正交替换（主轴化）方法将$f(x_1, x_2, x_3)$化成标准形，并求相应可逆线性替换；

(ii) 求矩阵$\boldsymbol{A}$；

(iii) 方程$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示什么曲面?

14.（10分）设W_1, W_2是$\mathbb{R}^4$个的两个子空间，W_1的基为$(1,2,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$(0,-1,-3,2)^{\mathrm{T}}$，而W_2的基为$(2,-1,-6,1)^{\mathrm{T}}$，$(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$. 已知$W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(i) 求a的值；

(ii) 求$W_1 \cap W_2$与$W_1 + W_2$的维数和一组基.

15.（8分）对向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$，证明：其中任意 s 个向量均线性无关的充要条件是方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}$$

的任一解均至少有 $s+1$ 个非零分量.

16.（10分）设A是一个 n 阶可逆实矩阵.

(i) 证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$均为正定矩阵.

(ii) 求矩阵$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$的正负惯性指数.