2020 秋季学期微积分 A(1)期中考试（电子系）

试题及参考解答（A 卷，附评分建议）

一、填空题（13 题，每题 3 分，共 13 题，共 39 分）：

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1a_1)^2+(2a_2)^2+\cdots+(na_n)^2}{n^3} =$ _____。

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin x-\sin(\sin x)} =$ ____。

3．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=$ _____。

4．$\lim\limits_{x\to\infty}[e(1+\dfrac{1}{x})^{-x}]^x =$ ________ 。

5．设 $x\to 0$ 时 $e^x-(ax^2+bx+1)=o(x^2)$，则 $a+b=$ ________。

6．在 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 是_ 无穷小。

7．曲线 $y = x\ln(2+\dfrac{1}{x})$ 的斜渐近线方程为 ____________ 。

8．设 $f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha \sin\dfrac{1}{x^4}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续且可导，则 $\alpha\in$ ______。（取值区间）

9．已知函数 f 可导且 $f'\neq 0$，设 $y=f(\tan x)$ 定义了反函数 $x=x(y)$，

则 $\dfrac{dx}{dy} =$

10．已知 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$， $y=f(\dfrac{1+x}{1-x})$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} =$

11．由方程 $x^2+y^2+\ln x+\sin y=1$ 确定的曲线在 $(1,0)$ 点的切线方程为_________

12．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$ ，则 $f'(0)=$ ________ ______。

13．已知 $\varphi(x)$ 可导且 $\varphi'(1)=1$，又设方程 $y=\varphi(xy)$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，且 $y(\dfrac{1}{2})=2$

则 $dy(\dfrac{1}{2})=$ _____。

二、计算证明题（7 题，每题 8-9 分，共 61 分）

1. （9 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在[0, 2]区间上的连续性，

如有间断点指出其间断点类型。

2.（9 分）已知数列$\{a_n\}$收敛于A。设曲线$y=x^{2n}+a_n$在点$(1,1+a_n)$处的切线与x轴的交点为$(\lambda_n,0)$，求 $\lim \lambda_n^n$。

3.（9 分）设$y=f(x)$严格单调且有二阶导数，其反函数为$x=g(y)$

已知 $f(1)=a,\ f'(1)=b\neq 0,\ f''(1)=c$。求 $g''(a)$。

4.（9 分）设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b\ln x+c, & x\ge 1 \\ e^x, & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 点 2 阶可导，求 a,b,c 的值。

5.（8 分）设 $f(x)$ 于区间 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=1$，$f(1)=0$，且 $f(x)$ 不是线性函数。证明存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)<-1$。

6.（8 分）证明方程 $x^2-2\ln(1+x^2)-1=0$ 有且仅有一个正根。

7.（9 分）设 $x_0>0$， $x_n=\sin x_{n-1}$, $n=1,2,3,\cdots$ 。

（1）证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并求其值；

（2）求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n^2$ 。【提示：可以应用 Stolz 定理】