清华大学本科生考试试题专用纸

考试科目　微积分A(1)　　　　A卷　　　　2024年1月12日

试题纸、答题卡、答题本上都要写清学号姓名，考后全部交回.

除附加题外，所有答案请写在答题卡相应题号处. 附加题答在答题本上.

一. 填空题 (共10题, 每题3分)

1. 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数 (例如 $[4.5]=4$), 则积分 $\int_0^{2024}(x-[x])\mathrm{d}x=$ ________.

2. 二阶线性常系数微分方程 $y''-y=x$ 的通解为 ________.

3. 广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=$ ________.

4. 由平面区域 $\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{\sin x},0\le x\le\pi\}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积等于 ________.

5. 曲线 $y=x\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的斜渐近线方程为 ________.

6. 已知心脏线的极坐标方程为 $r=1+\cos\theta,\ 0\le\theta\le2\pi$, 则心脏线所围平面有界区域的面积为 ________.

7. 极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{3x}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^3}=$ ________.

8. 极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ ________.

9. 一阶常微分方程 $y'+2y=y^2\mathrm{e}^x$ 满足 $y(1)=\mathrm{e}^{-1}$ 的解为 ________.

10. 记常微分方程初值问题
$$\begin{cases}(1+x^2)y''-2xy'=0\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases}$$
的唯一解为 $y(x)$, 则 $y(3)=$ ________.

二. 解答题 (共7题, 每题10分)

11. 考虑函数曲线 $y=(x+1)(x-2)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

    (a) 求函数的单调区间, 以及极值点和极值;

    (b) 求函数的凹凸区间，并指出曲线的拐点.

12. 求一阶常微分方程初值问题 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$, $y(1)=\frac{\pi}{6}$ 的解.

13. (a) 求旋轮线一拱 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围平面有界区域的面积;

    (b) 求旋轮线一拱的弧长.

14. 计算广义积分 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

15. 求参数 p 的取值范围，使得广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

16. 考虑一阶线性常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a(x)y=b(x)$, 其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为实轴 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 假设

    (i) 存在正数 $c>0$, 使得 $a(x)\ge c$, $\forall x\ge 0$;　　(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}b(x)=0$.

    证明方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a(x)y=b(x)$ 的每个解 $y(x)$ 均满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

17. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 并且满足如下积分不等式

$$|f(x)|\le 1+\int_0^x|f(t)|\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[0,1],$$

    证明 $|f(x)|\le \mathrm{e}^x$, $\forall x\in[0,1]$.

三. 附加题 (仅用于评判总评成绩 A^+，在答题本作答，并在答题本首页左上角标明 ★)

18. 设 $y_1(x),y_2(x)$ 为二阶线性齐次常微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关解，其中 $p(x),q(x)$ 为开区间 J 上的连续函数. 证明 $y_1(x),y_2(x)$ 的零点相互分离，即在 $y_1(x)$ 的任意两个零点之间，必存在 $y_2(x)$ 的一个零点，反之亦然.