清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（10421324） A 卷 2022 年 1 月 2 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}4&0&-1\\0&0&4\\3&5&3\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\-3\\5\\4\end{bmatrix}$.

（1）（6 分）求 4×3 列正交矩阵 Q（即 Q 为实矩阵且 $Q^{\mathrm{T}}Q=I_3$，其中 I_3 为 3 阶单位阵）和对角元非负的 3 阶上三角矩阵 R，使得 $A=QR$.

（2）（3 分）求 A 的列空间上的正交投影矩阵.

（3）（6 分）求 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^3$，使得 $\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}_0\|=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3}\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}\|$.

（1）**解** 对 A 的列向量进行正交化：

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_1=\begin{bmatrix}4\\0\\3\\0\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{q}}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\5\\0\end{bmatrix}-\frac{3}{5}\begin{bmatrix}4\\0\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{5}\\0\\\frac{16}{5}\\0\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{q}}_3=\begin{bmatrix}-1\\4\\3\\3\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\0\\3\\0\end{bmatrix}-\frac{3}{4}\begin{bmatrix}-\frac{12}{5}\\0\\\frac{16}{5}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\\3\end{bmatrix}.$$

归一化得 $\boldsymbol{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q}_3=\begin{bmatrix}0\\\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

所以 $Q=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&0\\0&0&\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\0&0&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}5&&\\&4&\\&&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\\&1&\frac{3}{4}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&1\\&4&3\\&&5\end{bmatrix}$.

（2）解 由（1）知，$P_A = QQ^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} & 0 & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$.

（3）解 $\boldsymbol{b}$ 在 $R(A)$ 上的投影 $P_A\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{25} & 0 & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{25} & 0 & \frac{9}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

令 $A\boldsymbol{x}_0 = P_A\boldsymbol{b}$，解得 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2.（10 分）求分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ -A & O \end{bmatrix}$ 的行列式的值，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

解

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) \times (-6) \times (-30) = 900$$

所以

$$\det\left(\begin{bmatrix} O & A \\ -A & O \end{bmatrix}\right) = (-1)^4 \det\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & -A \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(-A) = (-1)^4(\det(A))^2 = 810000$$

3.（15 分）设 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，已知 $\det(A) = -1$，而 A^{-1} 有特征值 λ，且 $\boldsymbol{x}$ 是 A^{-1} 属于 λ 的特征向量.

（1）（5 分）证明：$\lambda \neq 0$，$\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 A 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量.

（2）（5 分）求 a,b,c 和 λ 的值.

（3）（5 分）判断 A 是否可对角化并给出理由.

（1）**证明** 因为 A 可逆，所以 A^{-1} 可逆，故 A^{-1} 的特征值 $\lambda \neq 0$.

由题可知，$A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. 两边左乘 A，得 $\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x}$，即 $A\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$.

故 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 A 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量.

（2）**解** 由题可知，$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-a+c \\ -2-b \\ -1-a+c \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

故 $1-a+c = -2-b = 1+a-c$. 解得 $b=-3$，$a=c$.

所以 $-2-b = 1 = -\frac{1}{\lambda}$，解得 $\lambda = -1$.

所以 $A = \begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{bmatrix}$. $\det(A) = (1-a)(-3+3a) - a(-3a+5) = -1$.

解得 $a=2$. 所以 $a=c=2$，$b=-3$，$\lambda=-1$.

（3）**解** 由（2）知，$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

A 的特征多项式 $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$，

故 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

$N(-I-A) = N\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$，一组基为 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

因此 A 只有 1 个线性无关的特征向量，不可对角化.

4.（10 分）已知 $A = X\Lambda X^{-1}$，其中 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$，$M = A^4 - 2A^2 - 8I$，给出 M 的零空间的一组基并说明理由.

解 设 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$，则 $M = f(A)$.

由题可知，A 有四个特征值 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = -2$，$\lambda_4 = -1$. 故 M 的特征值 $\lambda_1' = f(\lambda_1) = -9$，$\lambda_2' = f(\lambda_2) = 0$，$\lambda_3' = f(\lambda_3) = 0$，$\lambda_4' = f(\lambda_4) = -9$.

其中，特征值 0 对应的特征向量为$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$. 即$M$的零空间的的一组基为$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$.

5.（10 分）设$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$B=(A+kI_3)^2$，$k\in\mathbb{R}$，$I_3$为 3 阶单位阵.

（1）（5 分）求与A相似的对角矩阵Λ.

（2）（5 分）求使B正定的k的取值范围.

（1）**解** A的特征多项式

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)-(\lambda-2)=\lambda(\lambda-2)^2$$

故A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$. 由于几何重数不超过代数重数，特征值 0 的几何重数为 1. 容易验证特征值 2 的几何重数为 2.

所以$\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix}$.

（2）**解** 因为$B=(A+kI_3)^2$，由（1）知B的特征值为$(k+2)^2$，$(k+2)^2$，k^2.

B正定当且仅当$(k+2)^2>0$且$k^2>0$. 解得$k\neq-2$且$k\neq 0$.

所以k的取值范围是$\{k\,|\,k\neq-2\text{且}k\neq 0\}$

6.（15 分）给定$\mathbb{R}$上的线性空间（vector space）$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\,\middle|\,a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$，定义$V$上的变换$\sigma: f(x)\mapsto(x+1)f'(x)$.

（1）（4 分）证明σ是线性变换.

（2）（4 分）求σ在基$1,x,x^2$下的矩阵.

（3）（4 分）求从基$1,x,x^2$到基$1,2x,4x^2-1$的过渡矩阵，即求 3 阶可逆矩阵P满足$(1,2x,4x^2-1)=(1,x,x^2)P$.

（4）（3 分）求σ在基$1,2x,4x^2-1$下的矩阵.

（1）**证明** 因为$\sigma(kf(x))=(x+1)(kf(x))'=k(x+1)f'(x)=k\sigma(f(x))$，

$$\sigma(f_1(x)+f_2(x))=(x+1)(f_1(x)+f_2(x))'=(x+1)f_1'(x)+(x+1)f_2'(x)=\sigma(f_1(x))+\sigma(f_2(x))$$

所以σ是线性变换.

（2）**解** 因为$\sigma(1)=0$，$\sigma(x)=1+x$，$\sigma(x^2)=2x+2x^2$

所以σ在基$1,x,x^2$下的矩阵为$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$.

（3）**解** 因为$(1,2x,4x^2-1)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，所以过渡矩阵$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

（4）**解** $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，所以$\sigma$在基$1,2x,4x^2-1$下的矩阵为

$$P^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}0&2&2\\0&1&4\\0&0&2\end{bmatrix}$$

7.（15 分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

（1）（10 分）求A的奇异值分解$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中U和V都是正交矩阵.

（2）（5 分）记$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解集为$S\subseteq\mathbb{R}^3$，求$\boldsymbol{x}_0$，使得$\boldsymbol{x}_0\in S$且$\|\boldsymbol{x}_0\|=\min_{x\in S}\|\boldsymbol{x}\|$.

（1）**解** $AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$. 对$AA^{\mathrm{T}}$谱分解，得$AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

所以$U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$.

所以$\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$.

将$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$扩充为$\mathbb{R}^3$的一组标准正交基，得$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$.

所以$A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

（2）**解** 设$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$，由$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$得$\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_2+x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$.

所以$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的通解为$x_1=1-x_2$，$x_3=-x_2$.

所以$\|\boldsymbol{x}\|^2=(1-x_2)^2+x_2^2+(-x_2)^2=3x_2^2-2x_2+1=3(x_2-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}$

所以$x_2=\frac{1}{3}$时，$\|\boldsymbol{x}\|$取最小值$\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

8.（10 分）证明：实反对称矩阵的特征值只能是纯虚数或零.

证明 设$A^{\mathrm{T}}=-A$，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$.

则A为反对称矩阵，λ是A的任意一个特征值，$\boldsymbol{x}$是属于特征值λ的特征向量.

因为A为实矩阵，所以$\overline{A}=A$.

对$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$两边取共轭转置，得$-\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}A=\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}$

两边右乘 $\boldsymbol{x}$，得 $-\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

因为 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，所以 $-\lambda\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

设 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = x_1^{\mathrm{T}} x_1 + \cdots + x_n^{\mathrm{T}} x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$.

所以 $\overline{\lambda} = -\lambda$. 即特征值 λ 只能是纯虚数或零.