清华大学 2017-2018 秋季学期期末考试

科目：微积分 B(1)　　时间：120 分钟

一、填空题（共 10 小题，每题 4 分）

1. 已知函数 $y=f(x)$与 $y=e^{2x}-1$在原点处相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{4}{n})=$ ______.

【答案】8

【解析】本题考查导数的定义、洛必达法则。

在原点处相切，故 $f(0)=e^0-1=0, f'(0)=2e^0=2$

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{4}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{4}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x}=\lim_{x\to 0}4f'(4x)=4f'(0)=8$$

2. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)^p$条件收敛，则 p 的取值范围为 ______.

【答案】$0<p\leqslant 1$

【解析】本题考查级数收敛的定义及判别方法、幂级数展开。

原级数条件收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)^p$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)^p$发散

将$e^{\frac{1}{n}}-1$展开为$\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$考虑到次数足够高时一定收敛，只需判断一般项为$(\frac{1}{n})^p$的敛散性。由$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n})^p$收敛知：$p>0$，由$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^p$发散知：$0<p\leqslant 1$，综上可知：$0<p\leqslant 1$。

3. 求曲线$\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2+\cos t \end{cases}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$的弧长为 ______.

【答案】4

【解析】本题考查定积分的应用——求参数曲线的弧长。

由参数曲线的弧长公式：$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

$x'(t)=1+\cos t$，$y'(t)=-\sin t$，$\alpha=0$，$\beta=2\pi$；

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos t+\cos t^2+\sin t^2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos t+1}\,dt=2\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos\frac{t}{2})^2}\,dt$$

易错点！去根号时，注意$\cos\frac{t}{2}$在$(0,\pi)$和$(\pi,2\pi)$符号不同，需要分开积分：

上式$=2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt-2\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=4$

4. 在 $x\to0$ 时，x^{α}是$\int_0^{x^2}sint^2dt$的高阶无穷小，则 α 的取值范围为 ______.

【答案】α＞6

【解析】本题考查无穷小的比较、变上限定积分函数的求导、洛必达法则。

x^{α}是$\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt$的高阶无穷小，即$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\alpha}}{\int_0^{x^2}\sin t^2dt}=0$。由洛必达法则，

原极限$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{2x\sin x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{2x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha}{2}x^{\alpha-6}=0$，故 α－6＞0，α＞6。

5. 无穷积分$\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{x^p})dx$收敛，则 p 的取值范围为 ______.

【答案】$p>\frac{1}{2}$

【解析】本题考查无穷积分收敛的定义及判断方法、泰勒公式。

由泰勒展开：$\cos\frac{1}{x}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{x^4}-\cdots$考虑到次数足够高时一定收敛，只需

判断$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^{2p}}dx$的敛散性，由 2p＞1 得 $p>\frac{1}{2}$。

6. 函数 f(x)=arctan x 在$x\to\infty$时的渐近线方程为 ______.

【答案】$y=\frac{\pi}{2}$与 $y=-\frac{\pi}{2}$

【解析】本题考查渐近线的定义及求法。

设渐近线方程为 y=ax+b，则

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to\infty}\arctan x=\begin{cases}\frac{\pi}{2},x\to+\infty\\-\frac{\pi}{2},x\to-\infty\end{cases}$$

即原函数有两条渐近线 $y=\frac{\pi}{2}$与 $y=-\frac{\pi}{2}$。

注：本题渐近线比较简单甚至可以由积累一眼看出，但是求比较复杂函数的原函数时，一定要注意考虑无定义的点（这样的点一般求极限时易漏掉）。

7. 函数$\begin{cases}x=3t-\sin t\\y=e^t-\cos t\end{cases}$，则$\frac{dy}{dx}|_{t=0}=$ ______，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=$ ______.

【答案】$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2}$

【解析】本题考查参数方程确定的函数导数的计算。

分别求出两个变量对参数的导数：$\frac{dy}{dt}=e^t+\sin t$，$\frac{dx}{dt}=3-\cos t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+\sin t}{3-\cos t},\quad \frac{dy}{dx}|_{t=0}=\frac{1+0}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(3-\sin t-\cos t)+3\cos t-1}{(3-\cos t)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=\frac{1\times 2+3-1}{2^3}=\frac{1}{2}$$

8. 已知 $S(x)$ 是将 $f(x)=x^2(0\le x\le 2\pi)$ 以 2π 为周期展开的傅立叶级数，则 $S(\pi)=$ ______，$S(2\pi)=$ ______.

【答案】π^2；$2\pi^2$

【解析】本题考查傅立叶展开的定义及简单计算。

$f(x)=x^2$ 以 2π 为周期展开，$x=\pi$ 这一点在周期内，故 $S(\pi)=f(\pi)=\pi^2$；

$x=2\pi$ 在端点处，故 $S(2\pi)=\frac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)]=2\pi^2$。

9. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}=$ ______.

【答案】e

【解析】本题考查级数求和的定义及简单应用。

构造级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=2\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}-e^x$

$$=(2\mathrm{x}-1)e^x$$

当 x=1 时，原式=e。

10. 求级数$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k(k-1)}=$ ______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】本题考查定积分的定义及简单计算，夹逼定理。

已知$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k(k-1)}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+(k-1)^2}=\frac{\pi}{4}$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k(k-1)}=\frac{\pi}{4}$。

二、解答题（共 6 小题，每题 10 分，附加题 5 分）

11. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}-sinx}{x-sinx}$

【解析】本题考查泰勒公式在求极限中的应用。

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}-sinx}{x-sinx}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2-\frac{1}{2}+o(x^5)}{x}-sinx}{x-sinx}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^3+o(x^4)-x+\frac{1}{6}x^3}{x-x+\frac{1}{6}x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=-2$$

12. 求不定积分$\int\frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx$

【解析】本题考查有理函数的不定积分运算。

设:

$$\frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

通分，列方程求解，得：A=1，B=2，C=1

$$\int\frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\ln(x-1)+\int\frac{2(x+1)-1}{1+(x+1)^2}dx+C$$

$$=\ln(x-1)+\int\frac{d[(x+1)^2+1]}{(x+1)^2+1}-\int\frac{d(x+1)}{1+(x+1)^2}+C$$

$$=\ln(x-1)+\ln(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)+\mathrm{C}$$

13. 已知正整数 n 不等于 7，比较$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$与$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$的大小

【解析】本题考查函数导数的应用。

构造函数 y=$\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，x＞0，则

$$\mathrm{y}'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}}{x}=\frac{1-\ln\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

令 y’=0，得 x=e²，即：

0＜x＜e² 时，y’＞0，原函数在(0, e²)上单调递增；

x＞e^2时，y'＜0，原函数在$(e^2,+\infty)$上单调递减；

将 x 取为正整数 n，考虑到 6＜e^2＜8，当 n 是不为 7 的正整数时，

$n\le 6$，$\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}<\frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$，$\sqrt{n+1}\ln\sqrt{n}<\sqrt{n}\ln\sqrt{n+1}$，$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}<(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

$n\ge 8$，$\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}>\frac{\ln\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$，$\sqrt{n+1}\ln\sqrt{n}>\sqrt{n}\ln\sqrt{n+1}$，$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}>(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

14. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n}$的收敛域及和函数

【解析】本题考查级数收敛的定义及求和。

由比值判敛法，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{4n+1}{4n-3}x^4\right|<1$，得$|x|$＜1；

当 x=±1时，原级数发散，故级数的收敛域为(-1,1)。

记$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n}=S(x)$，则 $S(x)=x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n-3}$

$$\left[\frac{S(x)}{x^3}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n-4}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1-x^{4n}}{1-x^4}=\frac{1}{1-x^4}$$

$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{x^3}&=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt+\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+\int_0^x\frac{1}{1+t}dt\right]+\arctan t\Big|_0^x\right\}\\&=\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t}\right)\Big|_0^x+\left(\frac{1}{2}\arctan t\right)\Big|_0^x=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$

$$S(x)=\frac{x^3}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{x^3}{2}\arctan x$$

15. 平面区域 D 由曲线 y = arctan x，直线 x=1 和 x 轴围成

(1)求 D 的面积

(2)求 D 绕 y 轴一周所成旋转体的体积

【解析】本题考查定积分在求旋转体相关参数上的应用，定积分的分部积分法。

(1) 由定积分求平面图形面积公式可得：

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\arctan x\,dx=(x\arctan x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

(2) 由定积分求旋转体体积公式可得：

$$V=\int_0^1 2\pi x\arctan x\,dx=\pi\left[(x^2\arctan x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx\right]$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-\pi\int_0^1 dx+\pi\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi^3}{4}-\pi+\frac{\pi^2}{4}$$

16. 已知函数 f(x)在[0,1]上二阶可导，$f''(x)>0$，f(0)=0，$\int_0^1 f(x)dx=0$

证明：(1) f(x)在(0,1)上有且仅有一个零点x_0

(2)当$x\in(0,x_0)$时，f(x)＜0

(3)(附加题) $\int_0^1 xf(x)dx>0$

【解析】本题考察中值定理及其应用、变上限定积分函数的性质、反证法。

(1) 构造函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 F(0)=0，F(1)=0

由罗尔定理，$\exists\ x_0\in(0,1)$，使得 $F'(x_0)=f(x_0)=0$

即 f(x)在(0,1)上有一个零点x_0，下面证明x_0的唯一性：

假设 f(x)在(0,1)上另有一个零点x_1，且$x_1>x_0>0$，则 f(0)=0，$f(x_0)=0$，$f(x_1)=0$

由罗尔定理，$\exists\ \varepsilon_1\in(0,x_0)$，$f'(\varepsilon_1)=0$；$\exists\ \varepsilon_2\in(x_0,x_1)$，$f'(\varepsilon_2)=0$

再由罗尔定理，$\exists\ \mu\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，使得 $f''(x)=0$，与题目中条件 $f''(x)>0$ 不符

故假设错误，故 f(x)在(0,1)上有且仅有一个零点x_0。

(2) 由 f(x)在[0,1]上二阶可导知：函数 f(x)在[0,1]上连续。

假设当$x\in(0,x_0)$时，f(x)＞0，则 $f(x_0)=0$，f(0)=0

由罗尔定理，$\exists\ \varepsilon\in(0,x_0)$，$f'(\varepsilon)=0$，且$f(\varepsilon)$是 f($x$)在$(0,x_0)$上的极大值，$f(\varepsilon)>0$

由拉格朗日中值定理，$\exists\ \mu_1\in(0,\varepsilon)$，$f'(\mu_1)>0$；$\exists\ \mu_2\in(\varepsilon,x_0)$，$f'(\mu_2)<0$

再由拉格朗日中值定理，$\exists\ \rho\in(\mu_1,\mu_2)$，$f''(\rho)=\frac{f'(\mu_2)-f'(\mu_1)}{\mu_2-\mu_1}<0$

与题目中条件 $f''(x)>0$ 不符，又 $f''(x)\neq 0$，故 f(x)＜0，$x\in(0,x_0)$

(3) 由(1)及(2)可知，f(x)＞0，$x\in(x_0,1)$。由积分第一中值定理：

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^{x_0} xf(x)dx + \int_{x_0}^1 xf(x)dx = \varepsilon_1 \int_0^{x_0} f(x)dx + \varepsilon_2 \int_{x_0}^1 f(x)dx$$

$$= \varepsilon_1 \int_0^1 f(x)dx + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \int_{x_0}^1 f(x)dx = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \int_{x_0}^1 f(x)dx$$

由 f(x)＞0，$x \in (x_0, 1)$可知$\int_{x_0}^1 f(x)dx > 0$

由$\varepsilon_1 \in (0, x_0)$，$\varepsilon_2 \in (x_0, 1)$可知$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) > 0$

故$\int_0^1 xf(x)dx > 0$。