1.填空题 (3分) 答案保存成功

曲线 $L:|x|+|y|=\sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x,y)=3+x^2-y^2$，则曲线 L 的质量为

[redacted]

2.填空题 (3分)

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 Σ：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=\theta, \end{cases} \quad (0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi).$$

取 Σ 朝上一侧为正向，则

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Sigma^+} 2y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$$

输入答案

3.填空题 (3分)

已知曲线积分 $\int_{L^+}\left(2x^2+axy\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+3y^2\right)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关（只与曲线的起点和终点有关），则实数 $a=$

输入答案

4.填空题 (3分)

设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛，记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为 R，则 R 的最小值是

输入答案

5.填空题 (3分)

设幂级数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数是微分方程初值问题

$$\begin{cases} xy''=y, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

的解，则 $\frac{1}{a_3}=$

输入答案

6.填空题 (3分)

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 Σ：$x^2+y^2-2z=0\,(0\le z\le 8)$．则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}S=$$

输入答案

7.填空题 (3分)

设 $\lambda>0$，记 L_λ^+ 为单位圆周 $x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，则

$$\frac{1}{\pi\lambda^2}\left(\oint_{L_\lambda^+}(\sin x+y+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(3x+x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y\right)=$$

输入答案

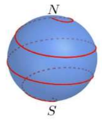
8.填空题 (3分)

三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}\sqrt{|x|+y^2-\cos z+1}\sin\left(xy^2z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$

输入答案

9.填空题 (3分)

如图，L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的一条 C^1 曲线.



以 $S(0,0,-1)$ 为起点，以 $N(0,0,1)$ 为终点. 则

$$\int_{L^+}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+2(z^2+x^2)\mathrm{d}y+3(x^2+y^2)\mathrm{d}z=$$

输入答案

10.填空题 (3分)

函数 $f(x)=x^2$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\le 5^2\}$ 中的积分平均值

$$\frac{\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=$$

输入答案

11.填空题 (3分)

答案保存成功

设 $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(yz,zx,x^2)$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}}(x,y,z))=$

12.填空题 (3分)

设有向曲线 $L^+: x=t, y=t^2, z=t^4, 0\le t\le 1$, 参数 t 增加方向与曲线正向一致，则 $\int_{L^+}9y\mathrm{d}x-3x\mathrm{d}y+4z\mathrm{d}z=$

输入答案

13.填空题 (3分)

设 $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $x^2+y^2\neq 0$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)\ (1,1)=$

输入答案

14.填空题 (3分)

积分 $\int_0^\pi \mathrm{d}y\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$

输入答案

15.填空题 (3分)

设 $L: x=2t,\ y=t,\ z=2-2t,\ 0\le t\le 1$，则 $\int_L(xy+2y+z)\mathrm{d}l=$

输入答案

二、选择题(共10题，满分30分)

1.单选题 (3分)

设 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，记

$$I_1=\iint_D\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}+100(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint_D\left(\cos(x^2+y^2)+10(x+y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_3=\iint_D\left(\cos\left((x^2+y^2)^2\right)+x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下结论正确的是________.

(A) $I_3<I_1<I_2$

(B) $I_1<I_2<I_3$

(C) $I_3<I_2<I_1$

(D) $I_2<I_1<I_3$

2.单选题 (3分)

积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(A) π

(B) 2π

(C) $\frac{3\pi}{2}$

3.单选题 (3分)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上________.

(A) 条件收敛，且一致收敛

(B) 条件收敛，但不一致收敛

(C) 绝对收敛，且一致收敛

(D) 绝对收敛，但不一致收敛

4.单选题 (3分)

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}$ 的收敛域为________.

(A) $\{0\}$

(B) $(-1,1)$

(C) $(-\infty,+\infty)$

(D) $(-1,1]$

5.单选题 (3分)

记 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S'(\frac{1}{2}) =$ ______.

A $\ln 2 - \ln 3$

B $\ln 2$

C $\ln 3 - \ln 2$

D $-\ln 2$

6.单选题 (3分)

设 Ω 为单位球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. 则流速场

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = (x + yz, y + zx, z + xy)$$

在单位时间中流出 Ω 的流量 $\iint_{\partial\Omega^+} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S =$ __________.

A 4π

B π

C 2π

D 0

7.单选题 (3分)

设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(na)}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ ________.

A 收敛性与 a 的取值有关

B 绝对收敛

C 发散

D 条件收敛

8.单选题 (3分)

已知 2π 周期函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi]$ 上满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pi, \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

利用 $f(x)$ 的Fourier级数，可得级数 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$ 的和为________.

A $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

B $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

C $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

D $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

9.单选题 (3分)

积分 $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x =$ ________.

A 6π

B 2π

C 4π

D 8π

10.单选题 (3分)

空间曲线 L^+ 为柱面 $|x|+|y|=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，它围绕 z 轴的正方向逆时针旋转. 则 $\oint_{L^+}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z =$ ____________.

A 12

B $12\sqrt{3}$

C 6

D $4\sqrt{3}$

三、计算(共2题，满分20分)

1.主观题 (10分)

设 $D=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, 0\leq x+y\leq 2\}$，计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

B I U 代码语言

字数统计

2.主观题 (10分)

计算曲面积分:

$$I=\iint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

B I U 代码语言

字数统计

四、证明(共1题，满分5分)

1.主观题 (5分)

已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 由以下等式确定

$$b_n = \ln\left(\mathrm{e}^{a_n} - a_n\right), \quad \forall n \geq 1.$$

证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。

B I U 代码语言