线性代数1

第十七讲：期中试题讲解

基础题部分：第一题

1. (10 分) 找出方程组 $Ax = x$ 的所有解，其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

考点：求解齐次线性方程组。

解：需要求解方程组 $(A - I_3)X = \underline{0}$ 。计算得系数矩阵 $A - I_3 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$，化成行简化阶梯形 $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

所以解集为 $\lambda \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

基础题部分：第二题

2. (15 分) 设 $T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 20 & 12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -4 & 20 & 13 \end{bmatrix}$.

(1) (5 分) 证明 T 可逆，并求 T^{-1}.

(2) (5 分) 计算 $T^{-1}AT$.

(3) (5 分) 计算 A^5.

- 考点：矩阵乘法、求逆。

基础题部分：第二题解答

解：（1）用高斯-若尔当方法直接求出 $T^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 6 & 4\\ 1 & -5 & -3\\ 1 & -4 & -3\end{bmatrix}$。

（2）直接计算得 $T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

（3）方法一：直接计算可知 $A^2=I_3$，所以 $A^5=A$ 。

方法二：$A^5=T(T^{-1}AT)^5T^{-1}$ ，再根据（2）中结论得出

$$A^5=T\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^5 T^{-1}=T\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}T^{-1}=A.$$

基础题部分：第三题

3. (15 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda+2)x_3 = 3, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

λ 取何值时，该方程组无解？λ 取何值时，该方程组有唯一解？λ 取何值时，该方程组有无穷多解？并证明你的论断.

- 考点：线性方程组解理论。

基础题部分：第三题解答

解：写出原方程增广矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & \lambda+2 & 3\\1 & \lambda & -2 & 0\end{bmatrix}$ 。做初等行变换如下：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & \lambda+2 & 3\\1 & \lambda & -2 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & \lambda & 1\\0 & \lambda-2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & \lambda+1 & 1\\0 & 0 & (\lambda-2)\lambda-3 & \lambda-3\end{bmatrix}.$$

而 $(\lambda-2)\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$ 。因此有 $\begin{cases}\lambda=-1\text{ 时无解}\\\lambda=3\text{ 时有无穷解}\\\lambda\neq 3,-1\text{ 时有唯一解}\end{cases}$ 。

基础题部分：第五题 1

5. (21 分) 考察 4×6 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -200 & -180 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(1) (3 分) 求 A 的行简化阶梯形.

(2) (3 分) 求 A 的列空间的维数，并取 A 的一些列组成它的一组基.

(3) (3 分) 求 A 的行空间的维数，并取 A 的一些行组成它的一组基.

基础题部分：第五题 2

(4) (5 分) 求 A 的零空间的维数，和它的一组基.

(5) (4 分) 在 A 的第二列和第三列之间加入一列零得到矩阵 B. 写出 B 的行空间的维数和一组基，以及 B 的零空间的维数和一组基.

(6) (3 分) 在 A 的第二行和第三行之间加入一行零得到矩阵 C. 写出 C 的列空间的维数和一组基，以及 C 的零空间的维数和一组基.

- 考点：行简化阶梯形、矩阵四种空间。

基础题部分：第五题解答

解：（1）直接计算 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2020 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$。

（2）由简化阶梯形可以看到 $r(A) = 4$，所以 $C(A) = \mathbb{R}^4$，而 $\mathbb{R}^4$ 中的任一组基都是 $C(A)$ 的一组基。可以取 A 中1(3), 4 以及 2,5,6 中任两列即可。

（3）A 是行满秩，所以选择 A 的所有行向量作为 $C(A^T)$ 的一组基。（而上面的行简化阶梯形的所有行向量也构成 $C(A^T)$ 的一组基）

（4）A 的零空间的维数为 2，利用它的行简化阶梯形可以求得 $N(A)$ 的一组基为 $[-8\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T, [0\ \ -2020\ \ 0\ \ 0\ \ -11\ \ 1]^T$。

基础题部分：第五题解答继续

解：（5）可以看出 B 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$。

所以 $r(B) = 4$，且 B 是行满秩，所以可以选择 B 的行向量作为 $C(B^T)$ 的一组基，或者选择上面的行简化阶梯形的行向量作为 $C(B^T)$ 的一组基。

B 的零空间的维数为 $7 - 4 = 3$，利用它的行简化阶梯形可以求得 $N(B)$ 的一组基为 $[-8 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad -2020 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -11 \quad 1]^T$，$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$。

基础题部分：第五题解答再继续

解：（6）可以看出 C 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2020 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

所以 $r(C) = 4$，且 $N(C) = N(A)$ 所以可以取 $N(C)$ 的一组基为

$[-8 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad -2020 \quad 0 \quad 0 \quad -11 \quad 1]^T$。

C 的主元列是第 1,2,4,5列，所以可以选取它们作为 $C(C)$ 的一组基，或者将上面已经选好的 $C(A)$ 的一组基中每个向量第二分量和第三分量之间添加一个零。

C 的零空间的维数为 2，列空间维数为 4。

中档题部分：第四题

4. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$，已知 $Ax = b$ 的三个特解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，讨论 A 的秩并写出 $Ax = b$ 的解集.

- 考点：矩阵的秩、零空间以及线性方程的通解。

中档题部分：第四题解答

解：首先由三个特解两两相减，会得到两个线性无关的 $N(A)$ 中的向量：$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$。于是可知 $\dim N(A)\geq 2\Rightarrow r(A)\leq 2$。

并且还能知道$\begin{cases}a_{11}=a_{12}\\a_{13}=-a_{14}\\a_{33}=-a_{34}\end{cases}$。由于 A 不是零矩阵，所以 $r(A)\geq 1$ 。

当 $r(A)=2$ 时，$a_{13}\neq 0$ 或者 $a_{33}\neq 0$，此时的通解为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 。

中档题部分：第四题解答继续

当 $r(A)=1$ 时，$a_{13}=a_{14}=a_{33}=a_{34}=0$，此时 $N(A)$ 的基可以选为

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

原方程组的通解为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$，$\lambda,\mu,c\in\mathbb{R}$ 。

中档题部分：第六题

6. (9 分) 判断下列陈述正误 (每个 1 分)，并简要说明理由 (每个 2 分).

(1) 可以找到一个 7×7 实矩阵，它的零空间和列空间相同.

(2) 存在一个 2×5 实矩阵 A 使得 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$ 构成零空间的一组基.

(3) 设 A 为 3×3 实方阵，如果 A 与 A^T 具有相同的零空间和相同的列空间，那么 A 一定是对称矩阵.

- 考点：矩阵四种空间，维数，特殊矩阵。

中档题部分：第六题解答

解：（1）错误。

理由：根据四种空间的维数性质可知 $\dim N(A) + \dim C(A) = 7$。若同时还有$N(A) = C(A)$，则有 $2\dim N(A) = 7$，与维数都是整数矛盾。

（2）错误。

理由：由于 A 的行数为 2，所以 $r(A) \leq 2$，因此 $\dim N(A) = 5 - r(A) \geq 3$，因而它的基不可能只含有两个向量。

（3）错误。

理由：反例有很多，比如：反对称矩阵，以及所有可逆但不对称的矩阵。

中档题部分：第七题

7. (10 分) 令 A_1, A_2 为 2 阶方阵，且

$$A_i\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_i+a_i\\4b_i-a_i\end{bmatrix},\qquad A_i\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b_i-a_i\\2b_i+a_i\end{bmatrix},\qquad i=1,2,$$

其中 a_i, b_i 为固定实数. 求证：

(1) $A_1A_2=A_2A_1$;

(2) $A_i^2-(a_i+b_i)A_i+a_ib_iI_2=O,\ i=1,2.$

- 考点：矩阵运算

中档题部分：第七题解答

解：方法一：（1）直接计算得 $A_i=\begin{bmatrix}\frac{b_i+a_i}{2} & \frac{b_i-a_i}{2}\\ \frac{b_i-a_i}{2} & \frac{b_i+a_i}{2}\end{bmatrix}, i=1,2$。

于是有 $A_1A_2=A_2A_1=\begin{bmatrix}\frac{b_1b_2+a_1a_2}{2} & \frac{b_1b_2-a_1a_2}{2}\\ \frac{b_1b_2-a_1a_2}{2} & \frac{b_1b_2+a_1a_2}{2}\end{bmatrix}$。

这里可以使用对称性 $A_i^T=A_i, i=1,2$，但必须先说明 A_1A_2 是对称矩阵才能推出 $A_1A_2=(A_1A_2)^T=A_2^TA_1^T=A_2A_1$。通常两个对称矩阵之积不一定仍是对称的。

（2）也可以直接计算获得。如果不写计算过程，会扣分。

中档题部分：第七题解答继续

方法二：根据题目条件得 $A_i\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_i\\b_i\end{bmatrix},A_i\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_i\\-a_i\end{bmatrix},i=1,2$。令 $T=$

$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$，则 T 是可逆矩阵，且 $T^{-1}A_iT=\begin{bmatrix}b_i & 0\\0 & a_i\end{bmatrix}$。

于是有 $T^{-1}A_1A_2T=T^{-1}A_2A_1T=\begin{bmatrix}b_1b_2 & 0\\0 & a_1a_2\end{bmatrix}$。

且 $T^{-1}\left(A_i^2-(a_i+b_i)A_i+a_ib_iI_2\right)T=$

$\begin{bmatrix}b_i^2-(a_i+b_i)b_i+a_ib_i & 0\\0 & a_i^2-(a_i+b_i)a_i+a_ib_i\end{bmatrix}=O$ 。

提高题部分：第八题

8. (10 分) 令 $X_\epsilon = \begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$，其中 $\epsilon \in \mathbb{R}$，而 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，$C$ 为 n 阶对角占优方阵，B_1 为任意给定的 $3 \times n$ 矩阵，B_2 为任意给定的 $n \times 3$ 矩阵.

(1) (5 分) 求 A 的 LU 分解.

(2) (5 分) 先说明 A 可逆，再试找一个常数 $\epsilon_0 > 0$ (依赖于 C, B_1, B_2)，使得对任意满足条件 $|\epsilon| \le \epsilon_0$ 的 ϵ，X_ϵ 均可逆.

提示：若 $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ 满足 $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, |c_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$，则称 C 为对角占优方阵，这类矩阵可逆.

提高题部分：第八题解答

- 考点：矩阵四种空间、特殊矩阵、分块消元法

解：（1）这一问是基础题，按部就班就可以得出

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

（2）首先通过 A 的LU分解即可说明 A 是行满秩的。（计算出 A 的行列式为 $-9\neq 0$ 来说明它可逆也是可以的）

C 是对角占优矩阵，所以也可逆。对分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&\epsilon B_1\\B_2&C\end{bmatrix}$使用分块消元法。

提高题部分：第八题解答继续

（2）由于 A, C 都可逆，所以对分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$ 使用分块消元法如下：

$$\begin{bmatrix} I_3 & O \\ -B_2A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ O & C - \epsilon B_2A^{-1}B_1 \end{bmatrix}.$$

于是有 $\begin{bmatrix} A & \epsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow C - \epsilon B_2A^{-1}B_1$ 可逆。

我们希望选取 ϵ_0 使得 $\forall\, \epsilon \le \epsilon_0$，矩阵 $C - \epsilon B_2A^{-1}B_1$ 都是对角占优的。

记 $B_2A^{-1}B_1$ 第 i 行第 j 列的元素为 m_{ij}，记 C 第 i 行第 j 列的元素为 c_{ij}。则我们需要

$$|c_{ii} - \epsilon m_{ii}| > \sum_{j \ne i} \left|c_{ij} - \epsilon m_{ij}\right|, \forall\, i = 1, \cdots, n\,.$$

提高题部分：第八题解答再继续

（2）我们需要 $|c_{ii}-\epsilon m_{ii}|>\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}-\epsilon m_{ij}\right|,\forall\, i=1,\cdots,n$.

由于 $\epsilon>0$，且有 $|c_{ii}-\epsilon m_{ii}|\geq|c_{ii}|-\epsilon|m_{ii}|$，$\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|+\epsilon\left|m_{ij}\right|\geq\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}-\epsilon m_{ij}\right|$，因而只需 ϵ 满足

$$|c_{ii}|-\epsilon|m_{ii}|>\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|+\epsilon\left|m_{ij}\right|\Rightarrow\left(\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right|\right)\epsilon<|c_{ii}|-\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|,\forall\, i=1,\cdots,n\,.$$

不妨选取 $\epsilon_0=\frac{\min_{i=1,\cdots,n}\left(|c_{ii}|-\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|\right)}{1+\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}\right|}>0$，则 $\forall\,\epsilon\leq\epsilon_0$， $C-\epsilon B_2A^{-1}B_1$ 都是可逆的。证毕。