微积分 A-1 期中考试试题（2022）

一、填空题（共15题，满分45分）

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1+\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(x,y)=(0,1)$ 附近确定的可导函数，则导数 $y'(0)=$________.

2. 设 $f'(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[f(x)-f\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]=\dfrac{3}{2}$，则 $f'(0)=$________.

3. 方程 $x^4+2x^3+6x^2-4x-5=0$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上有且仅有________个根.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=$________.

5. 设 $f(x)=x^2\sin(3x)$，则 $f^{(100)}(0)=$________.

6. 记 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则极限 $\lim\limits_{y\to 0}y\left[\dfrac{1}{y}\right]=$________.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

n 为任意正整数，则 $f^{(n)}(0)=$________.

8. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{|x|\left(x^2-1\right)}, & x\neq 0, x^2\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0, x^2=1,\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 的间断点个数总共有________个.

9. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=1$，则极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1}=$________.

10. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}=$________.

11. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\sqrt[3]{9n^2-n^3}\right)=$________.

12. 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 上定义，满足 $|f(x)|\leq(\sin x)^2, \forall x\in(-1,1)$，则 $f'(0)=$________.

13. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 2x-\sin 4x}{x^3}=$________.

14. 设 $f(x)=5(\sqrt{1+x}-1), g(x)=\dfrac{k\ln(1+x)}{x+2}(x\neq -2)$，$k$ 为常数. 若当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小，则 $k=$________.

15. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{8}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}\right)=$________.

二、选择题（共10题，满分30分）

1. 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上可导，则下列说法哪一个是错误的.

   A. 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f'(x)$ 也是周期函数；

   B. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数；

   C. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，则 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上也有界；

   D. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$ 等于

   A. 24;

   B. $+\infty$;

   C. 2;

   D. 4.

3. 记 (x_0, y_0) 为旋轮线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t\,(0\le t\le 2\pi)$ 上对应参数 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 的点，则旋轮线在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

   A. $y=\dfrac{\pi}{2}x$;

   B. $y=2$;

   C. $y=x+\dfrac{\pi}{2}$;

   D. $y=x-\dfrac{\pi}{2}+2$.

4. 当 $n\to+\infty$ 时，将无穷大量 n^{100}, e^n, $\ln\left(1+n^{1000}\right)$, $n!$，按它们趋于正无穷的速度由低到高排列，正确的顺序为

   A. $\ln\left(1+n^{1000}\right)$, n^{100}, $n!$, e^n;

   B. $\ln\left(1+n^{1000}\right)$, n^{100}, e^n, $n!$;

   C. n^{100}, $\ln\left(1+n^{1000}\right)$, $n!$, e^n;

   D. n^{100}, $\ln\left(1+n^{1000}\right)$, e^n, $n!$.

5. 函数 $\dfrac{1}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处带 Peano 余项的四阶 Taylor 展式为

   A. $\dfrac{1}{\cos x}=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right)$;

   B. $\dfrac{1}{\cos x}=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o\left(x^4\right)$;

   C. $\dfrac{1}{\cos x}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right)$;

   D. $\dfrac{1}{\cos x}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right)$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调有界，$\{x_n\}$ 为一数列，则下述命题正确的是

   A. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛；

   B. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；

   C. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；

   D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$$

假设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则

A. $(a,b)=(-2,-1)$;

B. $(a,b)=(2,1)$;

C. $(a,b)=(-2,1)$;

D. $(a,b)=(2,-1)$.

8. 函数 $x^{\frac{1}{x}}\ (x>0)$ 的导函数为

A. $x^{\frac{1}{x}-1}$;

B. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

C. $x^{\frac{1}{x}}$;

D. $x^{\frac{1}{x}-2}$.

9. 函数 $x^2\cos x$ 的 100 阶导函数 $(x^2\cos x)^{(100)}$ 为

A. $x^2\cos x+200x\sin x+9900\cos x$;

B. $x^2\cos x-200x\sin x+9900\cos x$;

C. $x^2\cos x+200x\sin x-9900\cos x$;

D. $x^2\cos x-200x\sin x-9900\cos x$.

10. 函数 $x\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒（Taylor）多项式为

A. $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k x^k}{k-1}$;

B. $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k-1}$;

C. $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$;

D. $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k x^k}{k}$.

三、解答题（共3题，满分25分）

1. **(a)** 证明函数 $f(x)=x+\arctan x$ 在整个实轴上 $\mathbb{R}$ 上存在反函数，记作 $x=g(y)$, $y\in\mathbb{R}$，并且反函数 $g(y)$ 为二次连续可微;

   (b) 计算 $g''(y)$.

2. 设 $n\geq 2$ 为正整数.

   (a) 证明方程 $x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n=1$ 在开区间 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根，记作 x_n;

   (b) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导.

   (a) 若 $f(0)=f(1)$，且 $\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f''(x)|\leq 2$，证明 $\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|\leq 1$;

(b) 构造一个 $[0,1]$ 上的二阶连续可微函数 $f(x)$，使得 $f(0)=f(1)$，$\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|=1$，以及 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|=2$.

答案

填空题： 1，2，2，0，0，1，0，2，2，1，3，0，12，5，4

选择题： CADBD CDBCA

解答题：

1. (a) 略；

   (b) $g''(y)=\dfrac{2x(x^2+1)}{(x^2+2)^3}$.

2. (a) 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$，$f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2^n}<0$，$f_n(1)=n-1>0$，$f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递增且连续。由介值定理，有一个实根，由单调性，这个实根是唯一的.

   (b) $\forall a,b\in\left(\dfrac{1}{2},1\right), |f_n(a)-f_n(b)|=|a-b+a^2-b^2+\cdots+a^n-b^n|>|a-b|$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,\left|f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$,

   故 $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|<\left|f_n(x_n)-f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|=\left|f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

3. (a) $\forall x\in[0,1],\exists\xi_1\in(0,x),s.t.\,f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2$,

   $\exists\xi_2\in(x,1),s.t.\,f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$.

   两式相减，得 $f'(x)=\dfrac{x^2f''(\xi_1)-(1-x)^2f''(\xi_2)}{2}\le\dfrac{2x^2-2(1-x)^2}{2}\le 1$.

   (b) $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

整理人：yqr