清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A(2)** (A) 答案 2022 年 4 月 16 日

院系名称____________ 班级____________姓名____________学号_____________.

一．填空题（每空 3 分，共 30 分）

1. 设 $z=\mathrm{e}^{x-y}\ln(x+y)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)=$_________。e.

2. 设 $z=x\sin(xy)$, 则 $\mathrm{d}z(1,\dfrac{\pi}{2})=$_______________。$\mathrm{d}x$

3. $(x+1)^{2y}$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为_______________________。

   $1+2xy+o(x^2+y^2)$

4. 设 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t$, 则 $f'(0)=$_______________。$\dfrac{\mathrm{e}-3}{2}$

5. 曲面 $\mathrm{e}^z=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为_______________。$x+y+z=2$.

6. 写出曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$ 处的一个单位法向量：_______________。 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,-1,2\sqrt{2})$ 或 $\dfrac{-1}{\sqrt{10}}(1,-1,2\sqrt{2})$

7. 可微函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿 $\vec{\mathbf{u}}=(-1,2)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial\vec{\mathbf{u}}}(0,0)=0$, 沿 $\vec{\mathbf{v}}=(3,4)$ 的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial\vec{\mathbf{v}}}(0,0)=2$, 则 $\mathrm{grad} f\big|_{(0,0)}=$_______。(2,1)

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=$_________。1

9. 已知 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^v+u^3\\ y=\mathrm{e}^u-v^3\end{cases}$ 将点 $(u_0,v_0)=(1,0)$ 映为 $(x_0,y_0)=(2,\mathrm{e})$, 则其逆映射 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0)=(2,\mathrm{e})$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式 $\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\bigg|_{(x,y)=(2,\mathrm{e})}=$_______________。$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

10. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1, \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2, \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$. 设 $g(x)=f(x,f(x,x))$, 则 $g'(1)=$____________。17

二、解答题 （请写出详细的解答过程和必要的根据！）

11. （**10** 分）证明方程 $1+xy=\arctan(x+y)$ 在点 $(x_0,y_0)=(-1,1)$ 的邻域中确定了一个任意次连续可微的隐函数 $y=y(x)$, 并求 $y'(-1)$ 和 $y''(-1)$.

解答：令 $F(x,y)=1+xy-\arctan(x+y)$, 则 $F(x,y)$ 在点 $(-1,1)$ 的邻域中无穷次连续可微。

$$F_y'(x,y)=x-\frac{1}{1+(x+y)^2},\quad F_y'(-1,1)=-2\neq 0,\quad F(-1,1)=0,$$

由隐函数定理，$F(x,y)=1+xy-\arctan(x+y)=0$ 在 $(-1,1)$ 的邻域确定了隐函数 $y=y(x)$，且

$$y'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

而 $F(x,y)$ 在点 $(-1,1)$ 的邻域中任意次连续可微，因此隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=-1$ 的邻域中任意次连续可微。

视方程 $1+xy=\arctan(x+y)$ 中 $y=y(x)$ 方程两边分别对 x 求偏导，得

$$y+xy'(x)=\frac{1}{1+(x+y)^2}(1+y'(x)),$$

$$2y'(x)+xy''(x)=\frac{y''(x)(1+(x+y)^2)-2(x+y)(1+y'(x))^2}{\left[1+(x+y)^2\right]^2}.$$

将 $(x,y)=(-1,1)$ 代入，得

$$y'(-1)=0,\quad y''(-1)=0.$$

12. （**12** 分）已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 试回答以下问题，并说明理由。

（1） 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处是否连续？

（2） 偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 是否存在? 如果存在，求出它们。

（3） 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处是否可微？如果可微，求出这个微分。

解:（1）由于

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\leq|x|+|y|,$$

故函数 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$处连续.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x}=1$, 故 $f_x'(0,0)$ 存在且 $f_x'(0,0)=1$.

同理 $f_y'(0,0)=-1$.

（3）假设 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$处可微，则 $(x,y)\to(0,0)$ 时，

$f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0x)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$.

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$ 即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0.$

另一方面，当动点 (x,y) 沿着直线 $y=kx$ 趋向原点时，极限 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\dfrac{k(1-k)}{(1+k^2)^{3/2}}$，与 k 有关。矛盾。故 $f(x,y)$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$处不可微。

13. （10 分）请用 Lagrange 乘子法求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

解：连续函数在有界闭集上有最大值和最小值，因此条件极值问题

$\min/\max f(x,y)$

$s.t.\quad x^2+y^2=1$

存在最大值和最小值。

令

$$L(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)+\lambda(x^2+y^2-1).$$

求解方程组

$$\begin{cases} L_x'(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\left(y\sin(x+y)+\cos(x+y)\right)+2\lambda x=0 & (1)\\ L_y'(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\left(x\sin(x+y)+\cos(x+y)\right)+2\lambda y=0 & (2)\\ L_\lambda'(x,y)=x^2+y^2-1=0 & (3)\end{cases}$$

$(2)x-(1)y$: $\qquad (x-y)\big((x+y)\sin(x+y)+\cos(x+y)\big)=0.$

由（3）式知 $|x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=\sqrt{2}<\dfrac{\pi}{2}$, 此时 $(x+y)\sin(x+y)\ge0,\cos(x+y)\ge0$, 且

$(x+y)\sin(x+y)$ 与 $\cos(x+y)$ 不能同时为 0. 因此

$$(x+y)\sin(x+y)+\cos(x+y)\neq0,\quad x-y=0.$$

将 $x=y$ 代入（3）式得 $(x,y)=(\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2})$, 或 $(x,y)=(-\dfrac{\sqrt2}{2},-\dfrac{\sqrt2}{2})$,

因此 f 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上的最大值、最小值分别为

$$f_{\max}=f(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})=\mathrm{e}^{\frac12}\sin\sqrt2,\quad f_{\min}=f(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})=-\mathrm{e}^{\frac12}\sin\sqrt2.$$

14. （**8 分**）已知$(axy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$为某一函数$f(x,y)$的全微分，求 a,b 的值及$f(x,y)$。

解：由于函数 $z = f(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$，

又当$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$存在且连续时，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = by\cos x + 6xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 3axy^2 - 2y\cos x$，

所以$a = 2, b = -2.$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}z = (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\mathrm{d}y \\
&= y^3\mathrm{d}x^2 - y^2\mathrm{d}\sin x + \mathrm{d}y - \sin x\mathrm{d}y^2 + x^2\mathrm{d}y^3 \\
&= \mathrm{d}(x^2y^3) - \mathrm{d}(y^2\sin x) + \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}(x^2y^3 - y^2\sin x + y)
\end{aligned}
$$

$f(x,y) = x^2y^3 - y^2\sin x + y + c, c \in \mathbb{R}.$

解法 2：

$f(x,y) = \int (2xy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x = x^2y^3 - y^2\sin x + A(y)$，

对 y 求导得到$3x^2y^3 - 2y\sin x + A'(y) = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$，所以$A(y) = y + c$。

所以$f(x,y) = c + y - y^2\sin x + x^2y^3$。

解法 3：

$f(x,y) = \int (axy^3 - y^2\cos x)\mathrm{d}x = \dfrac{a}{2}x^2y^3 - y^2\sin x + A(y)$，

对 y 求导得到$\dfrac{3a}{2}x^2y^2 - 2y\sin x + A'(y) = 1 + by\sin x + 3x^2y^2$，

取$x = 0$，得到$A(y) = y + c$。上式再对 y 求导后令 $y = 0$，得到$b = -2$。再由上式得到 $a = 2$。所以$f(x,y) = c + y - y^2\sin x + x^2y^3$。

解法 4：

$f(x,y) = f(0,0) + (f(x,0) - f(0,0)) + (f(x,y) - f(x,0))$

应用牛顿莱布尼兹公式有

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \int_0^x f_x'(t,0)\mathrm{d}t + \int_0^y f_y'(x,s)\mathrm{d}s \\
&= f(0,0) + \int_0^x 0\mathrm{d}t + \int_0^y (1 - 2s\sin x + 3x^2s^2)\mathrm{d}s \\
&= c + y - y^2\sin x + x^2y^3
\end{aligned}
$$

15. （**10 分**）求函数$f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)$的极值和值域。

解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2x^2-2xy+1)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2xy-2y^2+1)\end{cases}$$

由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 解得临界点 $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 或 $(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2x^3+2x^2y-3x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(2y^3+2xy^2-x-3y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)(2xy-1)$$

$H_f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$，$H_f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

所以 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是极大值，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是极小值。

因为 $\left|\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)\right|\le \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\left(|x|+|y|\right)\le \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}2\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ ，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)=0$ ，

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ ，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 。

所以 f 有（正的）最大值和（负的）最小值，

从而 $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是最大值，$f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\mathrm{e}^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 是最小值，定义域道路连通，

所以 f 的值域为 $\left[\dfrac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$.

16. （**15** 分）已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}\mathrm{d}x, t\in[0,+\infty).$

(1) 证明：$f(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}, & x\neq 0, t\in\mathbb{R}\\ t, & x=0, t\in\mathbb{R}\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(2) 证明 $I(t)$在$[0,+\infty)$上连续 。

(3) 证明 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4) 求 $I(t), t\in[0,+\infty)$.

解答：(1) $\varphi(u)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}, & u\neq 0\\ 1 & u=0\end{cases}$ 在 $u\in\mathbb{R}$ 上连续，因此 $f(t,x)=t\varphi(tx^2)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(或按定义证明)

（2）$I(t)=\int_0^1 f(t,x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x \triangleq I_1(t)+I_2(t), \forall t\in[0,+\infty).$

由 $f(t,x)$ 的连续性可得 $I_1(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

又因为 $|f(t,x)|\le\dfrac{1}{x^2}, \forall t\ge 0, x\ge 1,$ 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，

$I_2(t)=\int_1^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛，因此 $I_2(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

综上， $I(t)=I_1(t)+I_2(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

（3）任取 $a>0,$ 有 $f_t'(t,x)=\mathrm{e}^{-tx^2}\le \mathrm{e}^{-ax^2}, \forall t\in[a,+\infty),$

而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法， $\int_0^{+\infty} f_t'(t,x)\mathrm{d}x$ 在 $t\in[a,+\infty)$ 上一致收敛，因此 $I(t)$ 在 $t\in[a,+\infty)$ 可导,由 a 的任意性可知 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导且

$$I'(t)=\int_0^{+\infty} f_t'(t,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \forall t\in(0,+\infty).$$

(4) 由 $I'(t)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$，得 $I(t)=\sqrt{\pi t}+c, \quad \forall t\in(0,+\infty)$.

而(2)中已证明 $I(t)$在$[0,+\infty)$上连续, 注意到 $I(0)=0,$ 可得 $c=0.$ 于是

$$I(t)=\sqrt{\pi t}, \forall t\in[0,+\infty).$$

17. （**5 分**）已知函数 $f(x,y)$ 对每个变量 x,y 分别连续；且对每个固定的 $x,$ 函数 $f(x,y)$ 对变量 y 单调。求证： $f(x,y)$ 作为二元函数是连续函数。

证明：任意给定 (x_0,y_0)，任意给定 $\varepsilon>0$ 。

因为 $f(x_0,y)$ 对 y 在 $y=y_0$ 处连续，所以存在 $y_1<y_0<y_2$ 使得

$$|f(x_0,y_i)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad i=1,2 \text{ 。}$$

又因为 $f(x,y_i)$ 对 x 在 $x=x_0$ 处连续，所以存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall x:|x-x_0|<\delta, |f(x,y_i)-f(x_0,y_i)|<\frac{\varepsilon}{2}, i=1,2 \text{ 。}$$

于是 $\forall x:|x-x_0|<\delta, |f(x,y_i)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon, i=1,2$ 。

当 $|x-x_0|<\delta_2, y\in[y_1,y_2]$ 时，由单调性和前面的不等式

$f(x_0,y_0)-\varepsilon<\min\{f(x,y_1),f(x,y_2)\}\le f(x,y)\le\max\{f(x,y_1),f(x,y_2)\}<f(x_0,y_0)+\varepsilon$ 。

所以 $f(x,y)$ 作为二元函数在 (x_0,y_0) 点连续。