2019 秋季《高等微积分 1》期中考试参考解答

2019 年 11 月 2 日 $14:00-16:00$

本试卷分两页, 共七道试题, 其中第 1, 2 题各 20 分, 第 3, 4, 5 题每题 15 分, 第 6 题 10 分, 第 7 题 5 分. 可以使用洛必达法则.

1 设 a, c 是实数, $c>0$, 定义函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}|x|^a \sin \frac{1}{|x|^c}, & \text{当} x \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

(1) f 在 0 处连续的充分必要条件是什么?

(2) f 在 0 处可导的充分必要条件是什么?

(3) f' 在 0 处连续的充分必要条件是什么?

(4) f 在 0 处有二阶导数的充分必要条件是什么?

并请证明你的断言.

证明: 先证明如下结论: 设 $c>0$, 则极限 $\lim\limits_{x \to 0}|x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c}$ 存在当且仅当 $\alpha>0$, 进一步当 $\alpha>0$ 时, 极限为 0.

断言的证明如下. 当 $\alpha>0$ 时, 有

$$-|x|^\alpha \leq|x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c} \leq|x|^\alpha,$$

利用夹逼定理可得此时 $\lim\limits_{x \to 0}|x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^c}=0$. 当 $\alpha<0$ 时, 当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{\alpha/c}}$ 不存在; 当 $\alpha=0$ 时, 当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{\alpha/c}}$ 为 1, 而当 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi)^{1/c}}$ 的方式趋

于零时, 相应的数列极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{\alpha/c}}\sin(2n\pi)$ 为 0. 利用 Heinie 定理可知 $\alpha\le 0$ 时前述函数极限不存在.

类似的, 极限 $\lim_{x\to 0}|x|^\alpha\cos\frac{1}{|x|^c}$ 存在当且仅当 $\alpha>0$, 进一步当 $\alpha>0$ 时, 极限为 0.

(1) f 在 0 处连续当且仅当 $\lim_{x\to 0}|x|^a\sin\frac{1}{|x|^c}=f(0)=0$, 由前述断言可知其充分必要条件是 $a>0$.

(2) f 在 0 处可导当且仅当极限

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\pm\lim_{x\to 0\pm}|x|^{a-1}\sin\frac{1}{|x|^c}$$

存在且相等. 由前述断言可知其充分必要条件是 $a>1$, 且当 $a>1$ 时有 $f'(0)=0$.

(3) 由 (2) 的结论, 假设 $a>1$, 则 $f'(0)=0$. 利用求导的链式法则, 在 $x\neq 0$ 处有

$$\begin{aligned}f'(x)&=a|x|^{a-1}\frac{x}{|x|}\sin\frac{1}{|x|^c}+|x|^a(\cos\frac{1}{|x|^c})(-c)|x|^{-c-1}\frac{x}{|x|}\\&=\pm\left(a|x|^{a-1}\sin\frac{1}{|x|^c}+|x|^{a-c-1}(\cos\frac{1}{|x|^c})(-c)\right).\end{aligned}$$

这样, f' 在 0 处连续当且仅当

$$0=f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x),$$

利用前述断言可知其充分必要条件条件为 $a>c+1$.

(4) f 在 0 处有二阶导当且仅当极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a|x|^{a-2}\sin\frac{1}{|x|^c}+|x|^{a-c-2}(\cos\frac{1}{|x|^c})(-c)\right)$$

存在. 利用前述断言可知当 $a-c-2>0$ 时极限存在. 另一方面, 若此极限存在 (设为 L), 令 $|x|$ 以 $\frac{1}{(2n\pi)^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-c}{(2n\pi)^{(a-c-2)/c}}=L;$$

令 $|x|$ 以 $\frac{1}{((2n+1)\pi)^{1/c}}$ 的方式趋于零时, 相应的数列极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{((2n+1)\pi)^{(a-c-2)/c}}=L;$$

结合起来可得 $a-c-2>0$.

所以, f 在 0 处有二阶导的充分必要条件为 $a>c+2$.

$\square$

2 计算极限.

(1) 给定实数 a,b, 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{a}{n})^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2}$.

(2) 给定实数 a,b, 求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\arctan\frac{b}{x+a}\right)$.

(3) 求函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\cdot\left(x^{1/x}-1\right)\right)$.

(4) 给定实数 t, 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{t}{\sqrt{n}})^n\cdot e^{-\sqrt{n}t}\right)$.

解. (1) 当 $a=b=0$ 时, 所求的极限显然为 1. 以下假设 a,b 不全为零, 注意到

$$\left((1+\frac{a}{n})^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2}=\left((1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})}$$

其中指数的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})=a.$$

下面来计算底数的极限. 考虑数列 $\{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$, 它们趋近于零, 且其中至多一项为零, 利用 Heine 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e.$$

结合这两方面可得

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})^{\frac{1}{\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2})}=e^a.$$

总结起来, 任何情况下都有

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{a}{n})^2+\frac{b^2}{n^2}\right)^{n/2}=e^a.$$

(2) 当 $b=0$ 时, 所求的极限显然为 0. 当 $b\neq 0$ 时, 令 $y=\arctan\frac{b}{x+a}$, 则当 $x\to+\infty$ 时, $y\to 0$, 且 $y\neq 0$. 这样, 可以用换元法则计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\arctan\frac{b}{x+a}\right)&=\lim_{y\to 0}\left((\frac{b}{\tan y}-a)\cdot y\right)\\&=\lim_{y\to 0}\left(\frac{by}{\tan y}-ay\right)\\&=b.\end{aligned}$$

结合起来, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\arctan\frac{b}{x+a}\right)=b.$

(3) 令 $t=\frac{\ln x}{x}$, 则当 $x\to+\infty$ 时, $t\to 0$, 且当 $x>1$ 时, $t\neq 0$. 这样, 可以用换元法则计算极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\cdot\left(x^{1/x}-1\right)\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x/x}-1}{\ln x/x}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\\&=\frac{de^t}{dt}|_{t=0}\\&=1.\end{aligned}$$

(4) 先计算原式子取对数之后的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln(1+\frac{t}{\sqrt{n}})-\sqrt{n}t\right).$$

考虑数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$, 它们收敛到零且每项非零. 利用 Heine 定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln(1+\frac{t}{\sqrt{n}})-\sqrt{n}t\right)&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\ln(1+tx)-\frac{t}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+tx)-tx}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{t}{1+tx}-t}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-t^2}{2(1+tx)}\\&=-\frac{t^2}{2},\end{aligned}$$

其中第三个等式使用了洛必达法则. 这样, 所要求的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{t}{\sqrt{n}})^n\cdot e^{-\sqrt{n}t}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$\square$

3 设函数 $x=x(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有二阶导数, K,L,M,N 是非零实数. 定义

$$\widetilde{t}=K\cdot t+L\cdot x(t),\quad \widetilde{x}=M\cdot t+N\cdot x(t).$$

(1) 证明: 如果 $x'(t)$ 处处不等于 $-\frac{K}{L}$, 则可以将 t 表示为 $\widetilde{t}$ 的函数, 从而将 $\widetilde{x}$ 表示成 $\widetilde{t}$ 的函数.

(2) 用 $x(t)$ 的一阶与二阶导函数表示 $\widetilde{x}$ 对 $\widetilde{t}$ 的二阶导 $\frac{d^2\widetilde{x}}{d\widetilde{t}^2}$.

解. (1) 记 $f(t)=K\cdot t+L\cdot x(t)$, $g(t)=M\cdot t+N\cdot x(t)$. 由条件对任何 t, 有

$$f'(t)=K+L\cdot x'(t)\neq 0.$$

由 Lagrange 中值定理, 对任何 $t_1<t_2$, 存在 $\xi\in(t_1,t_2)$, 使得 $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=f'(\xi)$, 特别的 $f(t_1)\neq f(t_2)$. 这样, f 是连续的单射. 由反函数定理可知 f 有反函数 f^{-1}, 从而可把 t 表示成 $\widetilde{t}$ 的函数 $t=f^{-1}(\widetilde{t})$, 可把 $\widetilde{x}$ 表示成 $\widetilde{t}$ 的函数 $\widetilde{x}=g(f^{-1}(\widetilde{t}))$.

(2) 由反函数的求导法则可得

$$(f^{-1})'(\widetilde{t})=\frac{1}{f'(f^{-1}(\widetilde{t}))}.$$

记 $h=g\circ f^{-1}$, 利用链式法则可得

$$h'(\widetilde{t})=g'(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot(f^{-1})'(\widetilde{t})=\frac{g'(f^{-1}(\widetilde{t}))}{f'(f^{-1}(\widetilde{t}))}.$$

在此基础上, 利用 Leibniz 法则与链式法则可以进一步求导

$$\begin{aligned}
h''(\widetilde{t})&=\frac{\frac{d}{d\widetilde{t}}g'(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot f'(f^{-1}(\widetilde{t}))-g'(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot\frac{d}{d\widetilde{t}}f'(f^{-1}(\widetilde{t}))}{\left(f'(f^{-1}(\widetilde{t}))\right)^2}\\
&=\frac{\frac{g''(f^{-1}(\widetilde{t}))}{f'(f^{-1}(\widetilde{t}))}\cdot f'(f^{-1}(x))-g'(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot\frac{f''(f^{-1}(\widetilde{t}))}{f'(f^{-1}(\widetilde{t}))}}{\left(f'(f^{-1}(\widetilde{t}))\right)^2}\\
&=\frac{g''(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot f'(f^{-1}(\widetilde{t}))-g'(f^{-1}(\widetilde{t}))\cdot f''(f^{-1}(\widetilde{t}))}{\left(f'(f^{-1}(\widetilde{t}))\right)^3}.
\end{aligned}$$

注意到

$$f'(t) = K + Lx'(t), \quad f''(t) = Lx''(t), \quad g'(t) = M + Nx'(t), \quad g''(t) = Nx''(t),$$

代入前述计算结果可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2\widetilde{x}}{d\widetilde{t}^2} &= \frac{Nx''(t)(K + Lx'(t)) - (M + Nx'(t))Lx''(t)}{(K + Lx'(t))^3} \\ &= \frac{(KN - LM)x''(t)}{(K + Lx'(t))^3},\end{aligned}$$

其中 $t = f^{-1}(\widetilde{t})$.

□

4 (1) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处非零. 证明: f 在 $[a,b]$ 上严格单调.

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, 且 $f'(a) < 0 < f'(b)$. 利用 (1) 的结论证明: 存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f'(c) = 0$.(这是所谓的 Darboux 定理).

证明: (1) 由条件 f 在 $[a,b]$ 上可导可知 f 在 $[a,b]$ 上连续. 对 $[a,b]$ 中任何两点 $x_1 < x_2$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$, 特别的 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 这样, f 是 $[a,b]$ 上的连续单射. 利用反函数定理, 可知 f 在 $[a,b]$ 上严格单调.

(2) 用反证法, 假设不存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f'(c) = 0$, 则利用 (1) 的结论可得 f 在 $[a,b]$ 上严格单调. 如果 f 严格递增, 则有

$$f'(a) = f'(a+) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0;$$

如果 f 严格递减, 则有

$$f'(b) = f'(b-) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0;$$

两种情形下都与条件矛盾! □

5 给定实数 α, 设 $f(x) = x^\alpha$. 试确定 f 在区间 $(0,1]$ 上是否一致连续, 并请证明你的断言.

解. (1) 当 $\alpha \geq 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ 存在, 可把 f 扩充为 $[0,1]$ 上的连续函数 $\widetilde{f}$. 由于有界闭区间上的连续函数都一致连续, 故 $\widetilde{f}$ 在 $[0,1]$ 上一致连续, 由此可得此时 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

(2) 当 $\alpha < 0$ 时, 对任何 $0 < x < y \leq 1$, 利用 Lagrange 中值定理, 存在 $x < \xi < y$ 使得

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) = \alpha\xi^{\alpha-1}.$$

由于 $\alpha - 1 < 0$, $\xi^{\alpha-1}$ 关于 ξ 递减, 可得

$$|x^\alpha - y^\alpha| \geq |\alpha| \cdot |x-y| \cdot y^{\alpha-1}.$$

这样, 对 $\epsilon = 1$, 对任何 $\delta > 0$, 取 $x = \frac{y}{2}$, 则

$$|x^\alpha - y^\alpha| \geq |\alpha| \cdot |x-y| \cdot y^{\alpha-1} = \frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha.$$

由于 $\alpha < 0$, 有

$$\lim_{y\to 0+} \frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha = +\infty,$$

故存在 y 使得 $y < 2\delta$ 且 $\frac{|\alpha|}{2} \cdot y^\alpha > 1$, 这样就有 $|x-y| = \frac{y}{2} < \delta$ 但 $|f(x)-f(y)| > 1$. 由于 δ 的任意性, 这表明 $\alpha < 0$ 时 f 在 $(0,1]$ 上不一致连续.

□

6 设 $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ 在 (a,b) 上处处可导, 且导函数 f' 在 (a,b) 上递增. 证明: 对任何 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 有

$$(x_3 - x_1) \cdot f(x_2) \leq (x_3 - x_2) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_3).$$

证明: 可导函数是连续的, 则 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 与 $[x_2, x_3]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件, 由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2).$$

由 f' 在 (a,b) 上递增, 有 $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, 即有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

化简可得所要证明的不等式.

□

7 给定正整数 n, 把集合 $\{1,2,...,n\}$ 记为 $[n]$. 如果 $A_1,...,A_k$ 是 $[n]$ 的非空子集, 它们彼此不相交, 且它们的并集等于 $[n]$, 则称 $P=\{A_1,...,A_k\}$ 为 $[n]$ 的一个分组方案. 设函数 f,g 处处有 n 阶导数. 证明: 复合函数 $g\circ f$ 的 n 阶导数为

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,...,A_k\}}\left(g^{(k)}(f(x))\cdot\prod_{i=1}^{k}f^{(|A_i|)}(x)\right),$$

其中 $\sum\limits_{[n]\text{的分组方案}P}$ 表示对 $[n]$ 的所有分组方案求和, $|A_i|$ 表示集合 A_i 的元素个数, $\prod\limits_{i=1}^{k}$ 表示连乘

$$\prod_{i=1}^{k}f^{(|A_i|)}(x)=f^{(|A_1|)}(x)\cdot\cdots\cdot f^{(|A_k|)}(x).$$

例如, 集合 $[3]$ 共有 5 个不同的分组方案

$$P=\{\{3\},\{2\},\{1\}\}\text{或}\{\{2,3\},\{1\}\}\text{或}\{\{2\},\{1,3\}\}\text{或}\{\{3\},\{1,2\}\}\text{或}\{\{1,2,3\}\},$$

则前述要证明的复合函数 3 阶导法则为

$$(g\circ f)^{(3)}=g'''(f)f'f'f'+g''(f)f''f'+g''(f)f'f''+g''(f)f'f''+g'(f)f'''.$$

证明*:* 对 n 用归纳法, 假设 n 时命题成立, 来证明 $n+1$ 的情形.

注意到, 对 $[n]$ 的分组方案 $P=\{A_1,...,A_k\}$, 可构造出 $(k+1)$ 个 $[n+1]$ 的分组方案:

$$\{\{n+1\},A_1,...,A_k\},\quad\{A_1\cup\{n+1\},A_2,...,A_k\},\quad...,\{A_1,...,A_{k-1},A_k\cup\{n+1\}\},$$

当 P 取遍 $[n]$ 的分组方案时, 上述构造不重复的取遍了 $[n+1]$ 的所有分组方案. 由此

及归纳假设, 可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{[n+1]\text{的分组方案}Q=\{B_1,\dots,B_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^{k} f^{(|B_i|)}(x) \\
=&\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\dots,A_k\}} g^{(k+1)}(f(x)) \cdot f^{(1)}(x) \cdot \prod_{i=1}^{k} f^{(|A_i|)}(x) \\
&+ \sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\dots,A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot f^{(|A_1|+1)}(x) \cdot \prod_{i=2}^{k} f^{(|A_i|)}(x) + \dots \\
&+ \sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\dots,A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} f^{(|A_i|)}(x) \cdot f^{(|A_k|+1)}(x) \\
=&\left(\sum_{[n]\text{的分组方案}P=\{A_1,\dots,A_k\}} g^{(k)}(f(x)) \cdot \prod_{i=1}^{k} f^{(|A_i|)}(x) \right)' \\
=&\left((g \circ f)^{(n)} \right)'(x) \\
=&(g \circ f)^{(n+1)}(x),
\end{aligned}
$$

这就完成了归纳法. □