

随机数学与统计

一. (15 分) 设 X_1, \dots, X_n 相互独立, 均服从均匀分布 $U[0,1]$,

(1) 试求 $P(X_1 + X_2 = 1)$ 及 $P(X_1 + X_2 \leq 1)$;

(2) 试求 $Cov(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^{n+2022} X_i)$;

(3) 试求 $E(X_1 | X_1 + X_2 \leq 1)$ 。

二. (20 分) 设总体 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, X_1, \dots, X_n 为总体 X 的一个

样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$,

(1) 试求 $P(X_1 < X_2)$;

(2) 试求 \bar{X} 与 $X_1 - \bar{X}$ 的相关系数;

(3) 试问 $X_{(1)}$ 是否服从指数分布, 为什么? 并证明 $X_{(1)} \xrightarrow{P} 0$;

(4) 设 $Z = (1 - e^{-\lambda X_{(n)}})^n$, 试证明 $Z \sim U(0,1)$ 。

三. (20 分) 已知随机向量 (X, Y) 在三角形区域 $D: 0 < y < x < 1$ 内服从均匀分布,

(1) 试问 X 与 Y 是否独立? 说明你的理由;

(2) 分别求出 $E(Y | X)$ 和 $D(Y | X)$;

(3) 设 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, 试求 U 与 V 的联合分布密度;

(4) 试问当常数 a, b 取何值时, $E[Y - (aX + b)]^2$ 取到最小, 其最小值为多少?

四. (15 分) 若 $\{B_t; t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动, $B_0 = 0$,

- (1) 记 $Y = 3B_1 + B_2 - 2B_3$, 试求 Y 的特征函数 $\varphi_Y(\theta)$;
- (2) 记 $Z = B_{\frac{1}{2}} - cB_1$, 试问 c 为何值时, Z 与 B_1 相互独立, 为什么?
- (3) 试求 $P(B_1 + B_2 \leq 1 | B_3 = 4)$ 。

五. (15 分) 设总体 X 服从两点分布 $B(1, p)$, $p \in (0, 1)$, X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本,

- (1) 试问参数 p 的矩估计是否为其有效估计, 为什么?
- (2) 若参数 p 的先验分布为均匀分布 $U(0, 1)$, 试求出 p 的 Bayes 后验期望估计 \hat{p}_B ;
- (3) 设样本容量 $n = 3$, 考虑假设检验问题 $H_0: p = \frac{1}{2}$, $H_1: p = \frac{3}{4}$, 若取拒绝域为 $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 \geq 2\}$, 试求该检验法的势函数、犯第一类错误和犯第二类错误的概率。

六. (15 分) 设 X_1, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本, X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\theta} e^{-\frac{x^2}{\pi\theta^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \theta > 0 \text{ 为未知参数}.$$

$$\text{已知 } EX_1 = \theta, EX_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)\theta^2, EX_1^4 = \left(\frac{3\pi^2}{4}\right)\theta^4.$$

- (1) 试确定未知参数 θ 的充分完备统计量;
- (2) 试求参数 θ^2 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}^2$, 并求 θ^2 的 UMVUE;
- (3) 基于 $\hat{\theta}_{MLE}^2$ 构造枢轴量, 并求出参数 θ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的等尾置信区间。