2024 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2024.11.10

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)=$ ________________。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=$ ________________。

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=$ ________________。

4. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，$g(x)=f(e^x)e^{f(x+1)}$，则 $g'(0)=$ ________________。

5. 函数 $y=4x+\sin^2 x$ 的反函数的微分 $dx=$ ________________。

6. 设 $f(x)=x\sin x$，则 $f^{(2024)}(\pi)=$ ________________。

7. 设$f(x)$在$x=0$ 点可导, 且$f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{1}{4}$, 则$f'(0)=$ ________________。

8. 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t+t^3 \\ y=t+\cos t \end{cases}$ 所确定的可微函数，则在参数 $t=0$ 对应的点处 $\frac{dy}{dx}=$ ________________。

9. 设$f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geq 0; \\ ax^2+x, & x<0 \end{cases}$ 二阶可导, 则$a=$ ________________。

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e+e^{\frac{1}{2}}+\cdots+e^{\frac{1}{n}}-n}=$ ________________。

二、解答题

1.（12 分）设 $a \in \mathbb{R}$，

$$f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln x + (x-e)\, e^{(x-e)t+x}}{1 + (x-e)\, e^{(x-e)t+a}} \, (x > 0)$$

(I) 求 $f(x)$；

(II) 讨论 $f(x)$ 的连续性（当 a 为何值时，$f(x)$ 为连续函数；当 a 为何值时，$f(x)$ 存在间断点，求间断点并判断间断点类型）。

2.（12 分）设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n}(n \geq 1)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限。

3.（10 分）设 $f(u)$ 在 $u = 1$ 点可导，且满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x) = o(x), x \to 0$。求 $f(1)$ 和 $f'(1)$。

4.（11 分）已知 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$.
(I) 计算 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$；
(II) 设 $a = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$，求当 $x \to 0$ 时，$f(x) - a$ 的阶。

5.（10 分）设 $f(x)$ 在 $x = a$ 点二阶可导，且 $f'(a) \neq 0$，求

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)\, f'(a)} \right)$$

6.（10 分）已知 $f \in C^2[0,1]$.
(I) 设 $x_0 \in [0,1]$，写出 $f(x)$ 在 x_0 点带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式；
(II) 设 $f(0) = f(1) = 0$，证明：$\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{8} \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$。

7.（5 分）设 $K = \big\{ f | f\text{在有界闭区间}[a,b]\text{上可导，在开区间}(a,b)\text{内二阶可导} \big\}$.
命题 P: $\forall f \in K, \exists \xi \in (a,b), s.t. f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a)$。
(I) 是否可以在闭区间 $[a,b]$ 上对 f' 直接用拉格朗日中值定理得到命题 P？为什么？
(II) 请判断命题 P 是否成立，若成立请证明，否则请举反例。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)=0$。
   解析：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}x^2\sin\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{2}{x}=0$。
   注 1：等价无穷小 $\sin x\sim x, x\to 0$ 中的 x，可以换成任意极限为 0 的函数，即 $\sin g(x)\sim g(x), g(x)\to 0$，相当于对复合函数进行了化简。等价无穷小对于这种多层复合函数的化简，是有很良好的效果的。
   注 2：但 $\frac{1}{x}$ 不是一个极限为 0 的式子，所以最后一步不能认为 $\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$。这里最后一步用的是无穷小乘有界量还是无穷小，这个结论可以用夹逼证明。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=4$。
   解析：使用泰勒展开得到：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+\sin x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+x+o(x))}{\frac{x^2}{2!}+o(x^2)}=4$。

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=3$。
   解析：$\lim\limits_{x\to +\infty}(3^x-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}3\left(1-\frac{1}{3^x}\right)^{\frac{1}{x}}=3$。
   注：一定要注意 x 到底是趋于几。这种底数和指数都含有变量的极限，更常用的做法是先取个对数，将式子化为分式，然后使用洛必达/泰勒求解，这题也可以这么干。

4. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=2$，$g(x)=f(e^x)e^{f(x+1)}$，则 $g'(0)=2$。
   解析：$g'(x)=f'(e^x)e^xe^{f(x+1)}+f(e^x)e^{f(x+1)}f'(x+1)$，所以 $g'(0)=f'(1)e^{f(1)}+f(1)f'(1)=2$。

5. 函数 $y=4x+\sin^2 x$ 的反函数的微分 $dx=\frac{dy}{4+2\sin x\cos x}$。
   解析：$dy=(4+2\sin x\cos x)dx$，所以 $dx=\frac{dy}{4+2\sin x\cos x}$。

6. 设 $f(x)=x\sin x$，则 $f^{(2024)}(\pi)=2024$。
   解析：使用莱布尼茨求导法则，注意到 x 的二阶导及以后为 0：
   $$f^{(n)}(x)=x(\sin x)^{(n)}+n(\sin x)^{(n-1)}=x\sin(x+n\frac{\pi}{2})+n\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2})$$
   所以 $f^{(2024)}(\pi)=2024$。
   注：此题也可以先平移函数，转化为求 $(x+\pi)\sin(x+\pi)$ 在 $x=0$ 处的 2024 阶导数，而后利用泰勒展开的方法，比较 2024 次项系数得到。

7. 设$f(x)$在$x=0$ 点可导, 且$f(0)=1,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{1}{4}$,则$f'(0)=$。
   解析：利用泰勒展开，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$，所以
   $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+o(x)-f(0)-f'(0)\frac{x}{2}-o(x)}{x}=\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{4}$$
   。所以 $f'(0)=\frac{1}{2}$。
   注：此题绝对不可以使用洛必达，原因有 2：1. 题目只说了 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，而洛必达要求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近都是可导的；2. 洛必达只保证了求导后如果极限存在，则原极限等于求导后的极限。反过来，原极限存在，不一定能保证求导后的极限存在。

8. 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t+t^3 \\ y=t+\cos t \end{cases}$ 所确定的可微函数，则在参数 $t=0$ 对应的点处 $\frac{dy}{dx}=$。
解析：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\sin t}{\cos t+3t^2}$$

。所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=1$。

9. 设$f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geq 0; \\ ax^2+x, & x<0 \end{cases}$二阶可导, 则$a=-\frac{1}{2}$。
解析：这题只需要考虑在 $x=0$ 处可导性。直接求导得 $f''_+(0)=-1$，$f''_-(0)=2a$，所以 $a=-\frac{1}{2}$。

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e+e^{\frac{1}{2}}+\cdots+e^{\frac{1}{n}}-n}=1$。
解析：使用 stolz 公式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1)+2\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e+e^{\frac{1}{2}}+\cdots+e^{\frac{1}{n}}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}=1$$

。

二、解答题解析

1.（12 分）设 $a\in\mathbb{R}$，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln x+(x-e)\,e^{(x-e)t+x}}{1+(x-e)\,e^{(x-e)t+a}}\,(x>0)$$

(I) 求 $f(x)$；

(II) 讨论 $f(x)$ 的连续性（当 a 为何值时，$f(x)$ 为连续函数；当 a 为何值时，$f(x)$ 存在间断点，求间断点并判断间断点类型）。

解析：(I)
当 $x=e$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln e+0}{1+0}=1$$

当 $x>e$ 时，

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{e^{(x-e)t}}+(x-e)\,e^{x}}{\frac{1}{e^{(x-e)t}}+(x-e)\,e^{a}}=e^{x-a}$$

当 $x<e$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{(x-e)t}=0$，

$$f(x)=\ln x$$

(II)
只需考虑 $x=e$ 处的连续性。$\lim\limits_{x\to e-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to e+}f(x)=e^{e-a}$，所以当 $a\neq e$ 时，$f(x)$ 在 $x=e$ 处间断，为跳跃间断点。当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 $x=e$ 处连续。

2.（12 分）设 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{1+a_n}(n\geq 1)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限。
解析：
这种递推数列的题，一般是先通过证明数列单调有界，从而得到数列有极限，再令递推式两边

取极限，解方程得到极限值。
首先尝试证明数列单调有界，试算得到 $a_3 > a_2 > a_1$，可以尝试证明 a_n 单调递增：

法一暴力作差：

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1+2a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{1+a_n-a_n^2}{1+a_n}$$

如果我们希望 $a_{n+1} - a_n > 0$，那么就要求 $1 + a_n - a_n^2 > 0$，即 $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，可以使用数学归纳法证明：
假设现在已经有了 $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，那么

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+a_n} < 2 - \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

所以 $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 成立，由此得到 a_n 单调递增，同时我们还说明了 a_n 有上界，所以 a_n 有极限。

法二利用单调性：显然函数 $f(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ 是单调递增的，所以如果 $a_n > a_{n-1}$，那么 $a_{n+1} = f(a_n) > f(a_{n-1}) = a_n$，所以 a_n 单调递增。
研究 $f(x)$，得到其的值显然小于 2，所以 a_n 有上界，所以 a_n 有极限。

设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，那么 $a = \frac{1+2a}{1+a}$，解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

3.（10 分）设 $f(u)$ 在 $u = 1$ 点可导，且满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x) = o(x), x \to 0$。求 $f(1)$ 和 $f'(1)$。

解析：
和前面填空题第 7 题几乎一模一样，准备泰勒展开：

$$f(1+\sin x) = f(1) + f'(1)\sin x + o(x)$$
$$f(1-\sin x) = f(1) - f'(1)\sin x + o(x)$$
$$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = -2f(1) + 4f'(1)\sin x + o(x) = -2f(1) + 4f'(1)x + o(x)$$

比对题目条件，得到 $f(1) = 0, f'(1) = 2$。

4.（11 分）已知 $f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$.
(I) 计算 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$；
(II) 设 $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$，求当 $x \to 0$ 时，$f(x) - a$ 的阶。

解析：
(I)
先通分，通分后想洛想泰看你意愿：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x) - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 - x + o(x^2)}{x^2} = 1\end{aligned}$$

(II)
求一个分式的阶，只需要利用泰勒展开求出其分子和分母的阶，然后相除即可。

$$\begin{aligned}
f(x)-1 &= \frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1 \\
&= \frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x} \\
&= \frac{x^3/6+o(x^3)}{x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{x}{6}+o(x)
\end{aligned}$$

所以 $f(x)-1$ 的阶为 1。

5.（10 分）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 点二阶可导，且 $f'(a)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right)$$

解析：

和前面的填空题第 7 题与解答题第 3 题如出一辙，给的都是在单点处可导的条件，继续泰勒展开，和解答题 4 一样先通分：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right) \\
=&\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f'(a)-f(x)+f(a)}{f'(a)(f(x)-f(a))(x-a)} \\
=&\lim_{x\to a}\frac{-\frac{f''(a)(x-a)^2}{2}+o(x-a)^2}{f'(a)(f'(a)(x-a)+o(x-a))(x-a)} \\
=&\lim_{x\to a}\frac{-\frac{f''(a)(x-a)^2}{2}+o(x-a)^2}{f'(a)^2(x-a)^2+o(x-a)^2} \\
=&-\frac{f''(a)}{2f'(a)^2}
\end{aligned}$$

6.（10 分）已知 $f\in C^2[0,1]$.

(I) 设 $x_0\in[0,1]$，写出 $f(x)$ 在 x_0 点带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式；

(II) 设 $f(0)=f(1)=0$，证明：$\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\le\frac{1}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$。

解析：

连续四题泰勒展开，不知道是出卷老师喜欢出泰勒还是我习惯啥都先泰勒再说

(I)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

(II)

设 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$。

法一

$$\begin{aligned}
f(0)&=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2=0 \\
f(1)&=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2=0
\end{aligned}$$

两式联立，消去 $f'(x_0)$，得到

$$f(x_0)=-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2(1-x_0)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2x_0$$

两边取绝对值，得到

$$\begin{aligned}|f(x_0)| =&\frac{1}{2}|f''(\xi_1)x_0^2(1-x_0)+f''(\xi_2)(1-x_0)^2x_0|\\ \le&\frac{M}{2}(|x_0^2(1-x_0)+(1-x_0)^2x_0|)\\ \le&\frac{M}{2}\times\frac{1}{4}\\ =&\frac{1}{8}M\end{aligned}$$

由于 x_0 是任意的，所以 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\le\frac{1}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$。

法二

上面的过程运算起来有一些麻烦，主要是泰勒展开后产生的 $f'(x_0)$ 是我们不需要的，需要先联立消去。所以，一种想法是，如果 x_0 为导数为 0 的点就好了。这其实是合理的，因为我们需要研究的是 $|f(x)|$ 的最大值，其最大值如果不在端点处取，那其必然是一个极值点，因此其导数必然为 0。所以我们可以直接取 x_0 为使得 $|f(x)|$ 最大的点。

若 $x_0=0$ 或 1，结论显然成立。否则，必然有 x_0 为 f(x) 的极值点，所以 $f'(x_0)=0$。

$$f(0)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2=0$$
$$f(1)=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2=0$$
$$f(x_0)=-\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2=-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

如果 $x_0\le\frac{1}{2}$，则得到 $|f(x_0)|=|\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2|\le\frac{M}{8}$。

如果 $x_0>\frac{1}{2}$，则得到 $|f(x_0)|=|\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2|\le\frac{M}{8}$。

所以 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\le\frac{1}{8}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$。

7.（5 分）设 $K=\big\{f|f\text{在有界闭区间}[a,b]\text{上可导，在开区间}(a,b)\text{内二阶可导}\big\}$.

命题 P: $\forall f\in K,\exists\xi\in(a,b),s.t.f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$。

(I) 是否可以在闭区间 $[a,b]$ 上对 f' 直接用拉格朗日中值定理得到命题 P？为什么？

(II) 请判断命题 P 是否成立，若成立请证明，否则请举反例。

解析：

(I) 对定理的使用条件要熟悉。拉格朗日中值定理中，要求函数在 $[a,b]$ 上连续，但在这题中，我们无法得到 f' 在 $[a,b]$ 上是否连续。所以不可以。

(II)

导函数虽然不连续，但我们知道，导函数在很多性质上与连续函数是相同的，比如其仍然满足零点存在性定理和介值原理（达布定理）（《高等微积分教程（上）》例 4.1.6），所以我们可以先猜测这个命题是成立的，看看能不能证明。

设 $k=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$。如果在 (a,b) 上存在两点 x_1,x_2，使得 $f''(x_1)\le k\le f''(x_2)=k$，那么由达布定理，必然存在 ξ，使得 $f''(\xi)=k$。

如果不存在的话，意味着 $f''(x)>k$ 恒成立或 $f''(x)<k$ 恒成立，我们来说明这是不可能的，只讨论第一种情况，另一种情况同理。

如果 $f''(x)>k$ 在 (a,b) 上恒成立，我们 $g(x)=f'(x)-k(x-a)$，则 $g(a)=g(b)=f'(a)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 (a,b) 上严格单调递增。所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $g(c)\ne g(a)$。

如果 $g(c) > g(a)$, 由达布定理，存在 $d \in (c,b)$，使得 $g(b) < g(d) < g(c)$，这与 $g(x)$ 在 (a,b) 上严格单调递增矛盾。

如果 $g(c) < g(a)$，同理也可推得矛盾。所以 $f''(x) > k$ 在 (a,b) 上恒成立是不可能的，同理得到 $f''(x) < k$ 在 (a,b) 上恒成立也是不可能的。所以结论成立。

注：中间得到 $g'(x) > 0$ 在 (a,b) 上成立，$g(x)$ 在 (a,b) 上单调递增后，不能由此直接得到 $g(b) > g(a)$，然后认为矛盾。