2023 年秋 线性代数（书院） 期中考试——解答

时间：2023 年 11 月 11 日 上午

院系&班级：____________，姓名：____________，学号：______________

一、客观题（选择与填空，每空 4 分，共 40 分）

1\. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 203 & 1/3 \\ 3 & 298 & 1/2 \\ 5 & 399 & 2/3 \end{vmatrix}=$_____$\frac{14}{3}$_____。

【解】：先在第三列中提出公因数 $\frac{1}{6}$，再利用第三列把第二列化简，再利用行变换化为三角行列式，可求出

$$D=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 203 & 2 \\ 3 & 298 & 3 \\ 5 & 399 & 4 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 14 & 14 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}.$$

2\. 设有四阶行列式：$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$，记 $a=A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}$，则 $a=$____~~12~~ 7____。

【解】：$$A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & \cancel{2}\,1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\cancel{12}\ 7。$$

3\. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充要条件为____D______。

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ (B) $a\in\Omega, d\notin\Omega$ (C) $a\notin\Omega, d\in\Omega$ (D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

【解】对增广矩阵做初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&3&a^2-1&d^2-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&a^2-3a+2&d^2-3d+2\end{pmatrix},$$

故，方程组有无穷多解当且仅当$\begin{cases}a^2-3a+2=0,\\d^2-3d+2=0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\Omega,d\in\Omega,$

故选(D).

4. 已知方程组$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$无解，则 $a=$______-1______。

【解】对增广矩阵作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a+1)(a-3)&a-3\end{pmatrix}$$

可知，若$a=-1$，则$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$. 从而方程组无解，应填$a=-1$.

5. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^3$，则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=$____$-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$____。

【解】: $2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{I}\quad\Rightarrow\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(2\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{I}$

$$\Rightarrow\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=-\boldsymbol{I}\quad\Rightarrow\quad(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$$

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{2024}-2\boldsymbol{A}^{2023}=$_____$\boldsymbol{O}$______。

【解】: 因为 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$，则两边同乘 $\boldsymbol{A}^{n-2}$，得 $\boldsymbol{A}^n=2\boldsymbol{A}^{n-1}$，故上式结果为零矩阵 $\boldsymbol{O}$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵，且满足 $\boldsymbol{ABCD}=\boldsymbol{I}_n$，则必有=_____(D)______。

(A) $\boldsymbol{CBDA}=\boldsymbol{I}_n$ (B) $\boldsymbol{BADC}=\boldsymbol{I}_n$ (C) $\boldsymbol{CDBA}=\boldsymbol{I}_n$ (D) $\boldsymbol{DABC}=\boldsymbol{I}_n$

【解】: 利用结论“方阵 A,B 若满足 AB=In，则 A,B 互为逆，且 BA=In”，由题设有：$(\boldsymbol{ABC})\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{ABC})$，故选项(D)正确.

8. 计算 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&2^2&2^3&2^4&2^5\\3&3^2&3^3&3^4&3^5\\4&4^2&4^3&4^4&4^5\\5&5^2&5^3&5^4&5^5\end{vmatrix}$ = $5!\times4!\times3!\times2!\times1!\ =34560$ 。

【解】: 第 i 行分别提出 i，用范德蒙行列式公式计算得结果。

9. 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$线性无关，k 为任意实数，则______(C)______。

(A) $k\boldsymbol{\alpha}$线性无关 (B) $k\boldsymbol{\alpha}$线性相关 (C) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$线性无关 (D) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$线性相关

【解】: $k\boldsymbol{\alpha}$可能为 $\mathbf{0}$，也可能不为 $\mathbf{0}$；而$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$一定非零，故(C)正确。

10. 设$\boldsymbol{A}$为 $m\times n$ 矩阵，$S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$为 n 维列向量组，$T=\{\boldsymbol{A\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A\alpha}_s\}$。则下列结论正确的是______(A)______。

(A) 当 S 线性相关时，T 必线性相关； (B) 当 S 线性相关时，T 必线性无关；

(C) 当 S 线性无关时，T 必线性相关； (D) 当 S 线性无关时，T 必线性无关.

【解】: 由$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 可知，$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s=\boldsymbol{A}\mathbf{0}=\mathbf{0}$，故(A)正确，而特别取 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{O}$，可知(C)，(D)并不一定正确。

二、解答与证明题（须写出必要的解答过程，共 60 分）

11.（10 分）当参数 a 为何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=-1\\x_1+7x_2+x_3+3x_4=3\\3x_1+17x_2-x_3+x_4=a\\x_1+3x_2-3x_3-5x_4=-5\end{cases}$ 有解？并求出通解。

【解】用初等行变换把增广矩阵化为行阶梯矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\1&7&1&3&3\\3&17&-1&1&a\\1&3&-3&-5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&2&2&4&4\\0&2&2&4&a+3\\0&-2&-2&-4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&1&1&2&2\\0&0&0&0&a-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故当 $a\neq1$时,方程组无解.

当$a=1$时,可继续化简得(略去两个零方程)

$$\begin{pmatrix}1&0&-6&-11&-11\\0&1&1&2&2\end{pmatrix}$$

此时，有无穷多解，且通解为：

$$\begin{cases} x_1 = 6x_3 + 11x_4 - 11 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 + 2 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \in \mathbb{R}) \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = 6k + 11l - 11 \\ x_2 = -k - 2l + 2 \\ x_3 = k \\ x_4 = l \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{R})$$

12.（9 分）解矩阵方程 $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$。

【解】: $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

对 $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & -6 \end{array}\right]$ 做初等行变换，解得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

13.（10 分）设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足：$\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$。

【解】: $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{I} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^* = \boldsymbol{I}$,

$$\Rightarrow \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}^*)^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})$$

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2/3} & \mathbf{-1/3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1/3} & \mathbf{2/3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{3}$$

$$AA^* = |A|I \quad \Rightarrow \quad A^* = |A|A^{-1} = 3\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = A^*(A-2I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

14.（10 分）某投资者把 10 万元投给三个企业甲乙丙，所得的利润率分别是 10 %, 12%, 15%。若他投给丙的钱等于投给甲和乙的钱之和，并获得了 a 万元的总利润。

(1) 求他分别给甲、乙、丙投资了多少钱？

(2) 求总利润 a 的最大值和最小值，并说明分别投给甲、乙、丙多少万元时，总利润达到最大值？

【解】：(1) 设投给甲乙丙的钱分别为x_1, x_2, x_3（万元）。由题意,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_3 = x_1 + x_2 \\ 10\%x_1 + 12\%x_2 + 15\%x_3 = a. \end{cases} \quad \text{整理，得} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 100a \end{cases}$$

对增广矩阵做初等行变换，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & 12 & 15 & 100a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 2 & 5 & 100a-100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2.5 & 50a-50 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 50a-62.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -50a+67.5 \\ 0 & 1 & 0 & 50a-62.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

因此原线性方程组有唯一解:

$$\begin{cases} x_1 = -50a + 67.5, \\ x_2 = 50a - 62.5, \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

(2) 由于$x_1, x_2 \geq 0$，因此总利润l应满足:$\begin{cases} -50a + 67.5 \geqslant 0, \\ 50a - 62.5 \geqslant 0. \end{cases}$ 解得：$1.25 \leqslant a \leqslant 1.35$。即总利润的最大值为 1.35 万元，最小值为 1.25 万元。

当$a = 1.35$时，$-50 \times 1.35 + 67.5 = 0$，$50 \times 1.35 - 62.5 = 5$。因此投给甲乙丙的钱分别为 0, 5, 5 (万元) 时，总利润a达到最大值。

15.（9 分）设 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&b\\0&b&0\\b&0&0\end{pmatrix}$，求分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件。.

【解】 对其做分块矩阵的初等变换，化成分块的三角阵，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}.$$

故有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{K}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1-ab&1&1\\1&1-ab&1\\1&1&1-ab\end{vmatrix}$.

上述是行和为定值的行列式，第 2、3 列加到第 1 列，可化简

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{vmatrix}=(3-ab)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-ab&1\\1&1&1-ab\end{vmatrix}=(3-ab)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-ab&0\\0&0&-ab\end{vmatrix}=a^2b^2(3-ab).$$

因此，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件是 $a\neq 0,b\neq 0,ab\neq 3$.

16.（12 分）设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$ 是线性无关的向量组. 证明以下结论:

(1) 对于任意实数 k 和任意一对下标 $1\leqslant i\neq j\leqslant t$，以下向量组 T_1 必线性无关：

$$T_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$，其中, $k_1,k_2,\dots,k_t$ 全不为零，则以下向量组 T_2 必线性无关：$T_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$.

(3) 若 $\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t\neq\boldsymbol{0}$ ，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 中必有某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可用 $T_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$ 线性表出.

【证明】(1) 设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j)+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$,
则有 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+(\lambda_j+k\lambda_i)\boldsymbol{\alpha}_j+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$.
因为 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$ 是线性无关组，必有

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_i=\lambda_{i+1}=\cdots=(\lambda_j+k\lambda_i)=\cdots=\lambda_t=0.$$

也即，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_i=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_j=\cdots=\lambda_t=0$，所以 T_1 必是线性无关组.
(2) 设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_i\boldsymbol{\beta}+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$，则有

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_i(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t)+\lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\lambda_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0},$$

整理得

$$(\lambda_1+\lambda_i k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\lambda_{i-1}+\lambda_i k_{i-1})\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\lambda_i k_i\boldsymbol{\alpha}_i$$
$$+(\lambda_{i+1}+\lambda_i k_{i+1})\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+(\lambda_t+\lambda_i k_t)\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}.$$

因为$S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$是线性无关组，必有

$$(\lambda_1+\lambda_i k_1)=\cdots=(\lambda_{i-1}+\lambda_i k_{i-1})=\lambda_i k_i=(\lambda_{i+1}+\lambda_i k_{i+1})=\cdots=(\lambda_t+\lambda_i k_t)=0.$$

再由$\lambda_i k_i=0, k_i\neq 0$ 知$\lambda_i=0$，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_t=0$，所以 T_2 必是线性无关组.

(3) 因$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t\neq\mathbf{0}$，所以$l_1,l_2,\cdots,l_t$不全为零. 不妨设$l_i\neq 0$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{1}{l_i}(l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\boldsymbol{\beta}+l_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+l_t\boldsymbol{\alpha}_t),$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_i$可用$T_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$线性表出.