

微积分 (2)

一. 填空题 (每个空 3 分, 共 9 题 10 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. 函数 $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2+y)}$ 沿任意射线 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha (0 \leq t < +\infty)$ 的极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \underline{\hspace{2cm}};$$

当 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时, $f(x, y)$ 是否为无穷小? (填“是”或“否”).

答案: 0, 不是 ($f(n, n^2) = n^2 e^{-(n^2+n^2)} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$)

2. 设函数 $f(u, v)$ 连续可微, $z = f(xy, x - y)$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: $dz = (y \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}) dx + (x \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}) dy$

3. 设 $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则 Jacobi 矩阵的行列式 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y^2}{r^3} & \frac{-xy}{r^3} \\ \frac{-xy}{r^3} & \frac{x^2}{r^3} \end{vmatrix} = 0。$

4. 已知映射 $\begin{cases} x = e^v + u^3 \\ y = e^u - v^3 \end{cases}$, 有逆映射 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, 当 $(u, v) = (0, 1)$ 时, $(x, y) = (e, 0)$,

则偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}(e, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: $\frac{3}{e}$ 。

5. 记函数 $u = x^2 + y^2 - xyz$ 在 $(1, 0, 1)$ 处的梯度方向为 \mathbf{v} , 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(1, 0, 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案: $\sqrt{5}$ 。

6. 设可微函数 $u(x, y)$ 满足 $u(x, x^2) = 1$ 且 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, x^2) = x$, 则 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, x^2) =$ _____。

答案: $-\frac{1}{2}$ 。

7. 曲线 $x = t, y = 2 \cos t, z = 3 \sin t$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为_____。

答案: $\frac{x - \frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 3}{0}$ 。

8. 曲面 $z + \ln z = y + \ln x$ 在 $(1, 1, 1)$ 点的切平面方程为_____。

答案: $x + y - 2z = 0$ 。

9. 设 $F(x, y) = \int_0^1 \sin(xt) e^{-4yt^2} dt$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) =$ _____。

答案: -1 。

二. 解答题 (共 8 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

10. (8 分) 设 $z = f(x, \frac{x}{y})$, 其中 $f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 2)$ 。

解: $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2(x, \frac{x}{y}) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$,3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[f''_{12}(x, \frac{x}{y}) + f''_{22}(x, \frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y} \right] \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'_2(x, \frac{x}{y}) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right), \quad \text{.....3 分}$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 2) = -\frac{f'_2(0, 0)}{4}$2 分

11. (10 分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 回答以下问题, 并说明理由。

(I) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

(II) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否存在偏导数? 若存在, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$;

(III) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 若可微, 求在点 $(0, 0)$ 处的全微分;

(IV) 函数 $f(x, y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

解: (I) 因为 $|f(x, y)| \leq |xy|$, 所以 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 因此 f 在点 $(0, 0)$ 处连续。.....2 分

$$(II) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0,$$

所以函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点存在偏导数。.....2 分

$$(III) \quad \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \right]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{而 } \left| \frac{xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

所以函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微。.....3 分

$$(IV) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

沿 $y = x$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y=x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}x} \right)$ 不存在, 所以函数 $f(x, y)$ 的偏

导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续; 同理函数 $f(x, y)$ 的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ 在点

$(0, 0)$ 处不连续。.....3 分

12. (13 分) 求 $f(x, y) = xy^3 - x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值。

解: 连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭集 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上存在最大值和最小值。

.....2 分

(1) 在 $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 = 0, \end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0, 1)$ 。.....2 分

但它不在 $\overset{\circ}{D} = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 内。.....1 分

(2) 在边界上, 构造 $L = xy^3 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,2 分

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y^3 - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

解得条件极值的驻点 $P_2(1, 0), P_3(-1, 0), P_4(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}), P_5(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$,4 分

f 相应的值为 $-1, 1, -\frac{9\sqrt{3}}{16}, \frac{9\sqrt{3}}{16}$ 。

所以求 $f(x, y) = xy^3 - x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值分别为

$f(-1, 0) = 1, f(1, 0) = -1$ 。.....2 分

13. (20 分) 设 $f(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$ 。

(I) 求 $f(x, y)$ 的所有驻点, 并找出其中所有的极值点, 并说明极值点的类型;

(II) 求 $f(x, y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式;

(III) 求隐函数形式曲线 $f(x, y) = 3$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线和法线方程;

(IV) 证明方程 $f(x, y) = 3$ 在 $(0, -1)$ 点附近确定了一个隐函数 $x = x(y)$, 并求 $x = x(y)$

在 $y = -1$ 处的二阶 Taylor 多项式。

解: (I) 由
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3e^{3x} - 3ye^x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3e^x = 0, \end{cases}$$
 得到 $x = 0, y = 1$, 这是 $f(x, y)$ 的唯一驻点。

.....2 分

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = 9e^{3x} - 3ye^x \right|_{(0, 1)} = 6, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1) = -3e^x \right|_{(0, 1)} = -3, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1) = 6y \right|_{(0, 1)} = 6, \end{cases}$$

.....3 分

而 $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵,

2 分

所以 $(0, 1)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点。

2 分

$$(II) \quad f(x, y) = f(0, 1) + \frac{1}{2}(x, y-1)H(0, 1)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + o(x^2 + (y-1)^2), \quad (x, y) \rightarrow (0, 1)$$

$$= -1 + 3x^2 - 3x(y-1) + 3(y-1)^2 + o(x^2 + (y-1)^2), \quad (x, y) \rightarrow (0, 1)$$

所以 $f(x, y)$ 在这些驻点处的二阶 Taylor 多项式为 $-1 + 3x^2 - 3x(y-1) + 3(y-1)^2$ 。

.....2 分

$$(III) \text{ 因为 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = 6, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = 0, \end{cases} \text{ 所以切线方程为 } 6(x-0) + 0(y-2) = 0, \text{ 即 } x = 0。$$

法线方程为 $y = -1$ 。4 分

(IV) 记 $F(x, y) = f(x, y) - 3$, 则 $\frac{\partial F}{\partial x}(0, -1) = 6 \neq 0$, 所以 $F(x, y) = 0$ 在 $(0, -1)$ 点附近

确定了一个隐函数 $x = x(y)$ 。

$$e^{3x(y)} + y^3 - 3ye^{x(y)} - 3 \equiv 0, \forall y,$$

$$\text{所以 } \frac{dx}{dy}(-1) = 0, \quad \frac{d^2x}{dy^2}(-1) = 1, \quad \text{.....4 分}$$

$x = x(y)$ 在 $y = -1$ 处的二阶 Taylor 多项式为 $\frac{1}{2}(y+1)^2$ 。1 分

14. (8 分) 设 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2xy) dx$, 证明: $I(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{t^2} dt$ 。

解: 因为

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [e^{-x^2} \sin(2xy)] \right\} dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \cos(2xy) dx$$

关于 y 一致收敛,2 分

所以

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \cos(2xy) dx \quad \text{.....2 分}$$

$$= -e^{-x^2} \cos(2xy) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2ye^{-x^2} \sin(2xy) dx = 1 - 2yI(y) \quad \text{.....2 分}$$

所以 $I(y) = \left(C + \int_0^y e^{t^2} dt \right) e^{-y^2}$ 。而 $I(0) = 0$, 故 $I(y) = \int_0^y e^{t^2 - y^2} dt$ 。2 分

15. (6 分) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是非空有界闭区域, f 是 D 上的连续函数。证明: 至多只有

一个函数 $u(x, y)$ 在 D 上连续, 在 D 的内部 $\overset{\circ}{D}$ 为 $C^{(2)}$ 类, 且满足

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = e^u, & (x, y) \in \overset{\circ}{D} \\ u = f, & (x, y) \in \partial D \end{cases}$$

证明：假设上述边值问题存在两个不同的 $C^{(2)}$ 解 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 。则在 ∂D 上

$u(x, y) = v(x, y)$ ，并且函数 $u(x, y) - v(x, y)$ 在有界闭集 D 上有不为零的最值。不妨假

设该最值为正，则该最值为最大值，且最大值点 $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$ ，于是它是

$u(x, y) - v(x, y)$ 的极大值点。……3 分

在 (x_0, y_0) 处 $u(x, y) - v(x, y)$ 的 Hesse 矩阵半负定，而其对角线上元素的和为

$u''_{xx} - v''_{xx} + u''_{yy} - v''_{yy} = e^u - e^v > 0$ ，但这与 Hesse 矩阵半负定矛盾。

所以上述边值问题至多只有一个 $C^{(2)}$ 解。……3 分

16. (5 分) 设 K 是 \mathbf{R}^k 的有界闭子集，函数 $f: \mathbf{R}^m \times K \rightarrow \mathbf{R}$ 连续，记

$g(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in K} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 。证明 $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 连续。

证明：证法一：

假设 g 在 x_0 处不连续，则存在 $x_n \in \mathbf{R}^m$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ ，但 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(x_0)$ 不成立。

存在 $y_n \in K$ 使得 $g(x_n) = f(x_n, y_n)$ 。通过取子列，不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0$ 。

于是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$ ，从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n)$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = f(x_0, y_0) \geq g(x_0)$ 。

设 $g(x_0) = f(x_0, y^*)$ 。则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $|y - y^*| < \delta$ 时，

$f(x, y) < f(x_0, y^*) + \varepsilon = g(x_0) + \varepsilon$ ，从而当 n 足够大时， $|x_n - x_0| < \delta$ ，

于是 $g(x_n) \leq f(x_n, y^*) < g(x_0) + \varepsilon$ ，因此 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) \leq g(x_0) + \varepsilon$ 。从而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(x_0)$ 。

这与假设矛盾。所以 g 是连续函数。……5 分

证法二：固定 $x_0 \in \mathbf{R}^m$ ，令 $E = \overline{B(x_0, 1)} \times K$ ，则 E 为有界闭集。

由于 f 连续，因此 f 在 E 上一致连续。从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1)$ 使得

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$ ，当 $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$ 时，均有 $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ 。特别地，

$\forall x \in B(x_0, \delta), \forall y \in K$ ，均有 $|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$ ，即

$$f(x_0, y) - \varepsilon < f(x, y) < f(x_0, y) + \varepsilon .$$

对 y 取下确界, 可得 $g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon$, 即 g 在 x_0 点连续。所以 $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ 连续。

注：本题做的学生不会多，请各位老师酌情给小分。