一、填空题 (共10题，每题3分)

1. 设 $f(x,y)=e^{x+y^2\sin x}+(x^3-1)\tan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=$ $\underline{\quad e \quad}$.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2+y^4}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

3. 设曲面 S 由参数方程给出 $(u,v)\mapsto r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$，则曲面 S 上对应参数 $(u,v)=(0,0)$ 的点处之切平面方程为 $\underline{\quad y=0 \quad}$.

4. 曲面 $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的法线记作 ℓ. 若点 $(2,0,a)\in\ell$，则 $a=$ $\underline{\quad 2+\frac{\pi}{4} \quad}$.

5. 函数 $z=\frac{1}{x}+4x+\frac{x}{y}$ 在点 $(1,1)$ 处的微分为 $dz\Big|_{(1,1)}=$ $\underline{\quad 4\,dx - dy \quad}$ $\frac{1}{x}+5x$

6. 函数 x^2+y^2 在点 $(1,1)$ 处，沿各方向之方向导数的最大值为 $\underline{\quad 2\sqrt{2} \quad}$. $\frac{1}{x}+5x$

7. 记 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z^x=y^z$ 在点 $(x,y,z)=(2,2,2)$ 附近所确定的隐函数，则偏导数 $z'_x(2,2)=$ $\underline{\quad \frac{-\ln 2}{1-\ln 2} \quad}$ $2x$ $2y$ $\sin x\Big|_0^1$

8. 设

$$f(y)=\int_0^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}dx,$$

$\int_0^y \cos(xy)\,dx$ $\cos x\,dx$ 5

则 $f'(1)=$ $\underline{\quad 3\sin 1 \quad}$.

$\int_0^1 dx\int_1^2 x^n\,dy$ $+2y\sin y^3$

9. 积分 $\int_0^1\frac{x^2-x}{\ln x}dx=$ $\underline{\qquad}$.

10. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=3$. 定义 $g(x)=f(f(x,x),f(x,x))$，则 $g'(1)=$ $\underline{\quad 25 \quad}$. $2\sin$

二. 解答题 (共7题)

11. (10分) 讨论函数 $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性, 以及可微性.

12. (10分) 设 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的邻域内二阶连续可微, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,2h)-2f(h,h)+f(0,0)}{h^2}.$$

13. (12分) 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微. 对 $\forall\theta\in\mathbb{R}$, 令 $g_\theta(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta)$. 假设

$$\left.\frac{dg_\theta(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \quad 且 \quad \left.\frac{d^2g_\theta(t)}{dt^2}\right|_{t=0}>0,\quad \forall\theta\in\mathbb{R}.$$

证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.

14. (10分) 已知椭球面 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ 与平面 $x+2y+2z=0$ 的交线是椭圆, 其在 Oxy 平面上的投影曲线 Γ 也是椭圆. 求 Γ 的四个顶点坐标.

15. (10分) 根据隐函数定理, 证明方程组 $\begin{cases} x^3+y^3=2z^3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ 在点 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 附近确定了两个 C^∞ 类隐函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 并证明隐函数 $z(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

16. (10分) 计算如下含参变量的广义积分, 并说明必要的依据

$$J(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}e^{-x}dx,\quad y\in\mathbb{R}.$$

17. (i) (3分) 记 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, 则平面曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ 是熟知的双纽线, 具有无穷大符号 ∞ 的形状. 求函数 $F(x,y)$ 之驻点(即临界点)的个数;
(ii) (5分) 对一般在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微的函数 $G(x,y)$, 假设曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,G(x,y)=0\}$ 具有无穷大符号 ∞ 的形状. 问函数 $G(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有多少个驻点? 并证明你的结论.