清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　时间：2023 年 1 月 3 日　A 卷

姓名 ________ 学号 ________ 班级________

一、　填空（36 分，每空 3 分，将答案顺次写在答题纸上）

1. 设随机事件A、B 相互独立，$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3},\mathbf{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$，则 $\mathbf{P}(B)=$________．

2. 随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}ax, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$，则$P(1<X<2)=$ ________．

3. 随机变量X的分布列为$\mathbf{P}(X=k)=2a\cdot 0.8^{k-1},k=1,2,\cdots$，则常数 $a=$________．

4. 设$X\sim N(1,3^2),Y\sim N(-1,2^2)$，若$\mathbf{P}(X>3)=\mathbf{P}\left(Y\le\frac{a}{3}\right)$，则常数 $a=$________．

5. 已知随机变量$X\sim U(0,2)$，则数学期望 $E[\min\{X,1\}]=$ ________．

6. 随机向量(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其中$\mu_1=-3$，$\mu_2=0$，$\sigma_1^2=9$，$\sigma_2^2=4$，$\rho=0.5$. 令$\mathrm{Z}=X+\frac{Y}{2}$，则Z 的方差 $\mathrm{Var(Z)}=$ ________．

7. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自二项分布总体X的样本，$X\sim B(100,\frac{1}{5})$，$\bar{X}$为样本均值。若样本容量 $\mathrm{n}=8$, 则 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=$ ________．

8. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$X\sim N(\mu,2^2)$的样本，$\bar{X}$为样本均值。为使$P\left(|\bar{X}-\mu|<\frac{1}{2}\right)\ge 0.96$成立，则样本容量$n$至少要达到 ________．

9. 抛掷均匀骰子 3 次，设随机变量X表示 3 次抛掷中出现的最大点数，则概率$\mathrm{P}(X=5)=$________；X的数学期望 $\mathrm{E}(X)=$________．

10. 设随机变量X服从参数为 1 的指数分布Exp(1)；给定$X=x>0$，Y服从均匀分布$\mathrm{U}[0,x]$，则Y的数学期望 $\mathrm{E}(Y)=$________．

11. 根据以下等式

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}x^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^x e^{-x}\,dx=E\left[\left(\frac{e}{X}\right)^X\right],\ X\sim\mathrm{Exp}(1)\ ,$$

一个基于大数律的近似计算积分 $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}x^{-x}\,dx$的无偏估计量为 $\mathrm{I}\approx$ ________．

二.（8 分）某厂有甲、乙、丙三车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 60%，30%和 10%。各车间的次品率分别是 3%，5%，7%。试求

（1）在该厂产品中任取一件，恰为次品的概率；

（2）若发现一件产品为次品，该次品来自甲车间的概率。

三、(24 分) 设随机向量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=2e^{-(x+y)},0\le x\le y,y\ge 0.$$

(1) 分别求X, Y的边际概率密度函数$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(2) 求概率$P(Y<1|X<1)$；

(3) 求概率$P(Y<1|X=1)$；

(4) 求概率$P(Y<3X)$；

(5) 求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；

(6) 求条件数学期望 $E(Y|X=x)$；

四、(10 分, 计算结果精确至小数点后 3 位)

抛掷均匀硬币 40 次，分别用以下方法计算恰好出现 20 次正面的概率。

（1）用精确方法；

（2）用正态近似（中心极限定理）；

（3）用 Poisson 近似。

五、(12 分) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自均匀分布总体$U[\theta,4]$的样本。

（1）求参数θ的矩估计量和最大似然估计量；

（2）上述两估计量是否为θ的无偏估计？为什么？

（3）当 $n=5$时，一组观测值为 1, 4, 3, 1, 1, 求样本均值与样本方差。此时，矩估计值和最大似然估计值分别是多少？

六、(10 分) 设总体X的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\ \ (x\ge 0).$$

考虑假设检验问题：$H_0:\theta=1$ vs $H_1:\theta>1$. 现从该总体中抽取一个样本 x，若 $x\ge 3.2$，则拒绝原假设H_0.

（1）求该检验犯第 I 类错误的概率；

（2）当 $\theta=4/3$时, 求犯第 II 类错误的概率；

（3）设从该总体抽取的一个样本观测值为 $x=4$，求该检验的 P 值。

附：标准正态分布分布函数值

$\Phi(0.16)=0.5636$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.98$.