姓名____________班级____________学号__________成绩____________

一、填空题：（每空 3 分，共 30 分）

1．已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 6$， 则 $\begin{vmatrix} a_1-3b_1 & b_1+c_1 & c_1+2a_1 \\ a_2-3b_2 & b_2+c_2 & c_2+2a_2 \\ a_3-3b_3 & b_3+c_3 & c_3+2a_3 \end{vmatrix} =$ ____________。

2．若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in M_3$，$|\boldsymbol{A}| = -3$，$|\boldsymbol{B}| = 2$，则 $\begin{vmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{B} \end{vmatrix} =$ ________________。

3．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}| = \mathbf{0}$，则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}| =$ ____________________________。

4．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{21} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{20} =$ ______________________________________。

5．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程：$\boldsymbol{A}^4 = \mathbf{0}$，则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} =$ ___________________________。

6．若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程：$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$，则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1} =$ _____________________。

7．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的两倍加到第二行，之后互换第一列和第二列，得到的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} =$ ____。

8．已知 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 32 \\ 18 & 20 & 63 \\ 31 & 30 & 91 \end{bmatrix}$， 则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} =$ ________________。

9．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若向量组 $b\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1, c\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 b,c 应满足什么关系____。

10．若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关，则 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性____________（请选择）。

（1）相关 （2）无关 （3）关系不确定

二、计算与证明题：（70 分）

1.（12 分）确定a,b的值，使线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = b \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = a \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

（1）有唯一解；（2）有无穷多解；（3）无解。

并在有解时，求解方程组。

2.（12 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 。

3.（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2022}$ 。

4.（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$A_{ij}=a_{ij}$（A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式），$i=1,2,3$，$j=1,2,3$，求矩阵 $2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行列式。

5.（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*+\boldsymbol{BA}^*+16\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 。

6.（8 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵。证明：$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆。

7.（8 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。