清华大学 2017 级本科生线性代数期中考试试题

（说明：本试题中凡涉及坐标计算、坐标变换的问题，如果没有特别指出，均在**右手直角坐标系**下进行）

一、填空题（共 9 小题，36 分）

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha} = (4, -1, 5)$，$\boldsymbol{\beta} = (1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\gamma} = (3, 1, 1)$，试求由 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 组成的平行六面体的体积为______.

2. 已知矩阵$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_3$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列的 a 倍加到第二列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} =$ ______.

3. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots\cdots 0, \frac{1}{2})$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 则 $\boldsymbol{AB} =$ ______.

4. 非齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 有解的充分必要条件是______.

5. 已知可逆矩阵$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{M}^* =$ ______.

6. 已知矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_3$，$|\boldsymbol{A}| = 3$，$|\boldsymbol{B}| = -2$，则$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} =$ ______.

7. 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{BA} - \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{I} = 0$，则 $\boldsymbol{B} =$ ______.

8. 已知点 $A(0, 1, 0)$，平面 π：$2x - y + z = 0$，则点 A 关于平面 π 的对称点 P 的坐标为______.

9. 已知点 $A(0, 1, -1)$，平面 π_1：$-x + 4y + 2 = 0$，π_2：$x + 2y + 3z = 0$，则过 A 且平行于平面 π_1、π_2 的直线的标准方程为______.

二、计算题与解答题（共 5 小题，64 分）

10. 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，方程 $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解且解不唯一.

(1) 试确定 a 的值；

(2) 试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型.

11. 计算：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

12. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

(1) 试求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵；

(2) 试求 $\boldsymbol{A}^n$.

13. 在仿射坐标系｛$\boldsymbol{O}$；$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$｝中度量矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1\cdot e_2 & e_1\cdot e_3 \\ e_2\cdot e_1 & e_2\cdot e_2 & e_2\cdot e_3 \\ e_3\cdot e_1 & e_3\cdot e_2 & e_3\cdot e_3 \end{bmatrix}$,

向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{x}_1，\boldsymbol{x}_2，\boldsymbol{x}_3)^{\mathrm{T}}$，已知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\varepsilon\boldsymbol{\alpha}$，证明 $\varepsilon>0$.

14. 已知 n 阶可逆矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{D}$ 为 k 阶可逆矩阵，$k<m$.

(1) 求证：$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{D}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$；

(2) 求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

参考答案及解析

1. [答案]　37

[解析] 本题考查混合积的几何意义。由"混合积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$表示的是以为棱的平行六面体的**有向**体积[1]"，可知求一个平行六面体的体积，即求该平行六面体互不平行的一组棱所在向量的混合积的**绝对值**，故$V=\left\|\begin{matrix}4 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$ = | -37 | = 37.

[1]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P103

2. [答案] $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

[解析] 本题考查矩阵的初等变换。将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块：$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，则 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1, a\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等列变换，即对 $\boldsymbol{A}$ 右乘初等矩阵：$(\boldsymbol{\beta}_1, a\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. [答案]　$-\boldsymbol{I}$

[解析] 本题考查矩阵的乘法运算法则。注意矩阵乘法有结合律但没有交换律，且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{AB}=(-\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{I}$.

4. [答案]　$a\neq 0$

[解析]　本题考查非齐次线性方程组解存在的判据。有以下两种思路：

思路一：增广矩阵用高斯消元法得到的阶梯形矩阵判断：

$\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，可见，若 $a=0$，则第一行出现 $d_{r+1}\neq 0$ 的情况，这时非齐次线性方程组无解[2]，故 $a\neq 0$.

[2]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P43-44

思路二：增广矩阵与系数矩阵秩的比较：

若 $a=0$，则$r\left(\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2$，$r\left(\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)=3$，这时非齐次线性方程组无解[3]，故 $a\neq 0$.

[3]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P141

5. [答案] $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

[解析] 本题考查用伴随矩阵求可逆矩阵及其应用。由 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{I}$ 可以推出 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$[4]，故 $\boldsymbol{M}^*=|\boldsymbol{M}|\boldsymbol{M}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

[4]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P60-61

6. [答案] -48

[解析] 本题考查行列式的性质及计算。一种类似三角行列式的计算公式为：$\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{nn}$ [5]，故 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}=$ $(-1)^{3\times3}|2\boldsymbol{A}||-\boldsymbol{B}|=(-1)^9\times2^3\times3\times(-1)^3\times(-2)=-48$.

[5]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P11

7. [答案] $\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

[解析] 本题考察矩阵四则运算的应用。注意二阶方阵由伴随矩阵求逆矩阵的公式：$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$[6]。由 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}=0$ 可得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=-2\boldsymbol{I}$，故 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=2\times\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -4 & -2\end{bmatrix}$.

[6]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P62

8. [答案] $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

[解析]　本题考查点到平面距离计算及直线方程。A 关于平面 π 的对称点 P 到平面 π 的距离与 A 到平面 π 的距离相等，且与 A 在同一条直线上。直线 AP 的方向向量应与平面的法向量共线，不妨取直线的方向向量为 $\boldsymbol{n}$ = (2, -1, 1)，则直线方程为：$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$，设 $P(2t, 1\text{-}t, t)$，则有 $\frac{|1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|4t-(1-t)+t|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$，解得 t_1=0(点 A)，$t_2 = \frac{1}{3}$ (点 P)，故 P 坐标为$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

9. [答案]　$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$

[解析]　本题考查向量的外积及直线方程。过 A 且平行于平面 π_1、π_2 的直线的方向向量即平面 π_1、π_2 的法向量的外积，故方向向量 $\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$=12$\boldsymbol{i}$+3$\boldsymbol{j}$–6$\boldsymbol{k}$，则直线的标准方程（对称方程）[7]为$\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

[7]《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P107

10. 本题考查非齐次线性方程组解存在的判据及相抵标准型。

(1) 对增广矩阵用高斯消元法：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -2-a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & -2-a \end{bmatrix}$$

则当 a = 1 时，方程无解

当 a = -2 时，方程有无穷多解

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，方程组有唯一解

由题意得：a = -2.

(2) 当 a = -2 时，$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. 本题考查矩阵和行列式的性质及综合计算。

(1) 将两个矩阵的乘积写成 3×5 的矩阵的形式，对该矩阵进行初等行变换，左边变成单位阵之后右边 2×3 的矩阵即为答案：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

故原式 $= \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

(2)《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P35，10(1)

[注：原题中没有注明 $a_i \neq 0$ 的条件，故为了避免分母中可能出现为 0 的情况，或许可以将答案展开书写：$a_1a_2a_3\cdots a_n + a_2a_3a_4\cdots a_n + a_1a_3a_4\cdots a_n + a_1a_2a_4\cdots a_n + \cdots + a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}$].

12. 本题考查矩阵的性质及综合计算。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表为：$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，记 $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换等价于 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，设所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ r & s & t \end{bmatrix}$，

则由 $\boldsymbol{BJ} = \boldsymbol{JB}$，可得 $l = s = r = 0$，$a = m = t$，$b = n$。即所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

(2)《线性代数与几何（第 2 版）（上）》，俞正光等，清华大学出版社，P77，6(6)

13. 本题考查向量内积的正定性及仿射坐标系中的坐标计算。

由向量内积的正定性，$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)A(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3)\cdot\varepsilon\cdot(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geqslant 0$，且 $\varepsilon \neq 0$，故 $\varepsilon > 0$.

14. 本题考查分块矩阵的性质和综合计算。

(1) 对 M 进行如下的初等变换：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}$$

则有$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}^{-1}\right)\det\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}\right)=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|$

(2) 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆、$\boldsymbol{D}$ 可逆可知$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$|\boldsymbol{D}|\neq 0$，故$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|\neq 0$，即 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$ 可逆。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}^{-1} & -\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}^{-1} & -\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}^{-1} & -\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k & -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} & -\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}+\boldsymbol{D}^{-1} \end{bmatrix}$.