Лабораторная 1. Теорвер

Юрий Баринов

April 2023

Задача 1. Вариант 1

1.1

Рассмотрим первый шаг: первый человек передает слух кому-то другому.
Вероятность, что он передаст ее не себе равна 1.
Рассмотрим второй шаг: второй человек передает слуху кому-угодно другому.
Других всего $n+1-1=n$. Из них только один человек является тем самым.
Тогда вероятность, что мы передадим слух обратно $\frac{1}{n}$
Рассмотрим третий шаг: он фактически будет таким же как предыдущий.
Ответ: n^{-r+1}

1.2

Эта задача похожа на предущую только подходящие варианты уменьшаются.
Без лишних слов $\frac{n!}{(n-r)!n^r}$

2.1

Тут логика такая. Нам нужно на каждом шаге найти подходящие выборки и поделить на все выборки. Так подходящие выборки это $\binom{n}{N}$ то есть выбираем из всех кроме одного. Кол-во всех выбороко это $\binom{n+1}{N}$. Так кажется, что эта задача не является общим случаем первой так как у нас выборки могут пересекаться, а в случае с первой задачей человек не передает ее сам себе. Если же множества пересекаться не должны то числитель у нас будет: $\binom{n+1-N-1}{N}$ а знаминатель $\binom{n+1-N}{N}$
Ответ: $(\frac{\binom{n}{N}}{\binom{n+1}{N}})^{r-1}$ или $(\frac{\binom{n+1-N-1}{N}}{\binom{n+1-N}{N}})^{r-1}$

2.2

Ну как 2.1 только подходящая выборка уменьшается $\prod_{i=0}^{r-1} \frac{\binom{n-N*i}{N}}{\binom{n+1-N}{N}}$

Задача 2. Вариант 2

Будем решать через интеграл. Обозначим область интегрирования.

- $0 \leq x \leq 60$
- $0 \leq y \leq 60$
- $0 \leq z \leq 60$
- $x-10 \leq y \leq x+10$
- $max(x,y)-10 \leq z \leq min(x,y)+10$

Начинаем лютое интегрирование:
Первое слогаемое

$$\int_{10}^{50} dx \int_{x}^{x+10} dy \int_{y-10}^{x+10} dz + \int_{10}^{50} dx \int_{x-10}^{x} dy \int_{x-10}^{y+10} dz = 12000$$

Второе

$$\int_{0}^{10} dx \int_{0}^{x} dy \int_{0}^{x+10} + \int_{0}^{10} dx \int_{x}^{x+10} dy \int_{y-10}^{x+10} = 2333\frac{1}{3}$$

И третье

$$\int_{50}^{60} dx \int_{x-10}^{50} dy \int_{x-10}^{y+10} + \int_{50}^{60} dx \int_{x}^{60} dy \int_{x-10}^{60} = 2333\frac{1}{3}$$

Итого $16666\frac{1}{3}$ площадь, которая нам удовлетворяет.
Все же вероятностное прсотранство имеет объем $60 * 60 * 60 = 216000$
Таким образом вероятность что они все втроем встретятся: $16666\frac{2}{3} * \frac{1}{216000} = \frac{25}{324} \approx 0.077$

Задача 3. Вариант 3

По формуле условной вероятности $p(X = i|X + Y = j) = \frac{p(X=i \cap X+Y=j)}{p(X+Y=j)}$
Распишем знаменатель $p(X + Y = j) = \sum_{i=0}^{j} p(X = i \cap Y = j - i)$
Распишим использую независимость событий A и B
$\sum_{i=0}^{j} p(X = i \cap Y = j - i) = \sum_{i=0}^{j} p(X = i)p(Y = j - i) = \sum_{i=0}^{j} q^i p * q^{j-i} p = \sum_{i=0}^{j} q^j p^2 = jq^j p^2$
Приступим к числителю $p(X = i \cap X + Y = j) = p(X = i \cap Y = j - i) = p(X = i)p(Y = j - i) = q^j p^2$
Выходит $p(X = i|X + Y = j) = \frac{p(X=i \cap X+Y=j)}{p(X+Y=j)} = \frac{q^j p^2}{jq^j p^2} = \frac{1}{j}$

Задача 4

Будем использовать интегральную теорему Муавра-Лапласа для нахождения приближенных значений.

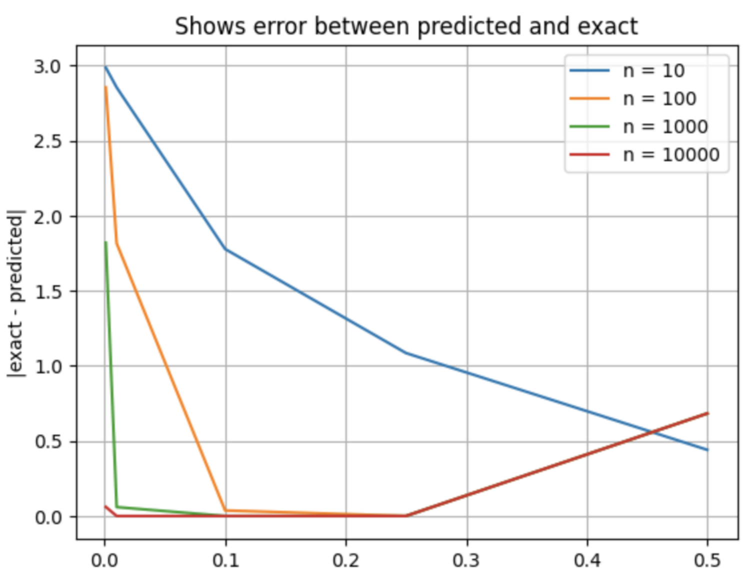
$p(k_1 \leq x \leq k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$
$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Для расчета точных значений будем использовать:
$P(k) = \binom{k}{n} p^k q^{n-k}$

Входные данные:
$n = \{10, 100, 1000, 10000\}$

$p = \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$

Выходные данные:
$n = 10, p = 0.001 : 0.0(exact : 2.985030966020993)$
$n = 10, p = 0.01 : 0.0(exact : 2.8530662093009997)$
$n = 10, p = 0.1 : 0.0006490249663507752(exact : 1.778031)$
$n = 10, p = 0.25 : 0.20211670793013647(exact : 1.28704833984375)$
$n = 10, p = 0.5 : 0.6826894921370859(exact : 0.2421875)$
$n = 100, p = 0.001 : 0.0(exact : 2.85361783674888)$
$n = 100, p = 0.01 : 0.0(exact : 1.8150793131365623)$
$n = 100, p = 0.1 : 0.0(exact : 0.036882585766283255)$
$n = 100, p = 0.25 : 9.052393559749738e-07(exact : 9.142726845289463e-06)$
$n = 100, p = 0.5 : 0.6826894921370859(exact : 5.6815663285192386e-14)$
$n = 1000, p = 0.001 : 0.0(exact : 1.819137441569485)$
$n = 1000, p = 0.01 : 0.0(exact : 0.05915425974651679)$
$n = 1000, p = 0.1 : 0.0(exact : 3.3767822481805374e-22)$
$n = 1000, p = 0.25 : 0.0(exact : 7.616063874867531e-61)$
$n = 1000, p = 0.5 : 0.6826894921370859(exact : 4.0041661899000556e-146)$
$n = 10000, p = 0.001 : 0.0(exact : 0.06049020947416612)$
$n = 10000, p = 0.01 : 0.0(exact : 3.1549772048026658e-21)$
$n = 10000, p = 0.1 : 0.0(exact : 3.842102584202799e-227)$
$n = 10000, p = 0.25 : 0.0(exact : 0.0)$
$n = 10000, p = 0.5 : 0.6826894921370859(exact : 0.0)$



Можно наглядно видет что интегральная формула Муавра-Лапласа выдает очень большую ошибку на маленьких n и, кажется, может ухудшаться с ростом p.