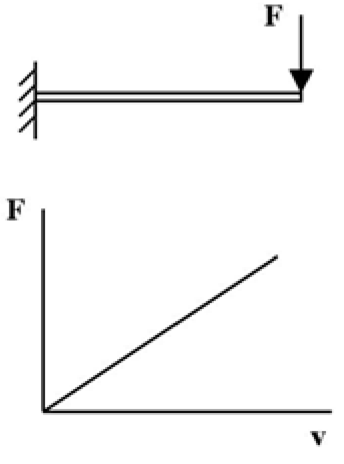
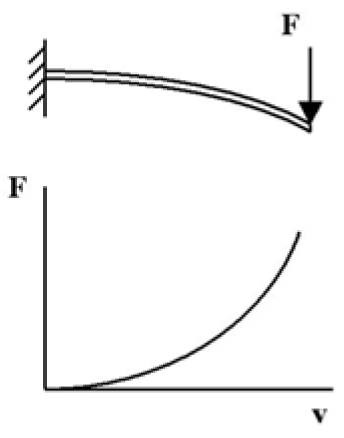
幾何非線性(geometric nonlinearity)

- 圖(a)之線性問題為極小位移(infinitesimal displacement)與極小應變(infinitesimal strain)狀態；而如圖(b)之幾何非線性分析一般是指大位移(large displacement)或大轉角(large rotation)問題，這類問題因為位移量或轉角量大，並非如圖(a)之極小位移狀態，使得結構之應變不再是極小應變，而是非線性的有限應變(finite strain)。



(a)



(b)

極小應變 (infinitesimal strain)

- 在極小位移的假設下，即線性應力分析，其應變與位移關係式可寫成極小應變公式：

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

有限應變 (finite strain)

- 大位移問題之非線性**Green's** 應變張量則為：

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]$$

- 其中下標 ***i*, *j*, *k* =1,2,3**。上式中的卡式座標系與位移分別可改寫為

$$x_1=x \qquad x_2=y \qquad x_3=z$$

$$u_1=u \qquad u_2=v \qquad u_3=w$$

- 上式之**Green’s**應變張量也稱為**Lagrangian**應變張量，亦稱**Green-Lagrange**應變張量，屬於非線性的有限應變，以正向應變為例，將**Green’s** 應變張量化簡為一般式：

$$E_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

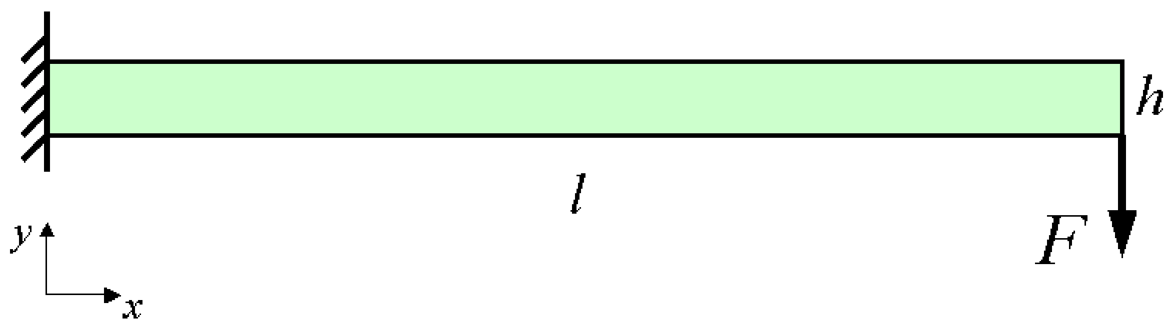
$$E_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$E_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

- 上式之**Green’s**正向應變若處於極小位移的條件，其中二次方的項會趨近於零，剪應變則依此類推。

幾何非線性變形分析

- 如下圖的鋼材懸臂樑，長 l =1m，高 h =0.08m，厚度0.005m ，右端施力 F 為1×10^7N，楊氏模數為210GPa，普松比為0.3。



- 以上分析之單位為**SI**制(**N**、**m**、**Pa**)，以**PLANE42**元素之平面應力模式求解
- 使用指令「**NLGEOM,ON**」啟動幾何非線性分析

結果與討論

- 由結果可看出右端之施力很大，足以讓右端之向下位移量達到**0.3277m**，此值已達到**4h**，因此本案例為大位移問題，必須使用幾何非線性來求解。
- 將指令「**NLGEOM,ON**」改為「**NLGEOM,OFF**」，即改為幾何線性分析，其**UY**位移量分析結果得知右端之向下位移量為**0.3732m**。

幾何非線性分析之UY位移量(單位：m)

❖ 若比較圖**(a)**和圖**(b)**之右端向下位移量**UY**，可發現兩者差了**14%**。此外若觀察圖**(b)**的**x**方向位移**u** **(UX)**，將發現位移量**UX**很小，這是不合理的，所以使用幾何線性分析的答案**(**如圖**b)**是不對的。相對的，圖**(a)**的**x**方向位移十分合理，因此大位移的問題必須以幾何非線性分析的模式來計算。