

# Übung 04: Das Torkeln des Marsmondes Phobos

Tobias Blesgen und Leonardo Thome

23.06.2021

Im Folgenden wollen wir das Torkeln des Marsmondes Phobos untersuchen, welches durch die Ellipsoideform des Mondes und der elliptischen Umlaufbahn um den Mars entsteht. Dazu beschreiben wir die Situation wie folgt:

Wir nehmen an, dass der Mond Phobos den Mars auf einer festen elliptischen Bahn mit Radius  $r(t)$ , Polarkwinkel  $\phi(t)$ , großen Halbachse  $a$  und Exzentrizität  $\epsilon$  in der Umlaufzeit  $T$  umkreist. Die Eigenbewegung von Phobos wird durch den Winkel  $\theta(t)$  beschrieben. Mit den drei Trägheitsmomenten  $I_1 < I_2 < I_3$  von Phobos, kann die Bewegungsgleichung für die Eigenbewegung wie folgt geschrieben werden:

$$I_3 \ddot{\theta}(t) = -\frac{3}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 (I_2 - I_1) \left( \frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin 2(\theta(t) - \phi(t)) \quad (1)$$

Mit der Größe  $\alpha = \sqrt{3 \frac{I_2 - I_1}{I_3}}$  vereinfachen wir die Gleichung zu:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left( \frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin 2(\theta(t) - \phi(t)) \quad (2)$$

Dabei lässt sich die Differentialgleichung 2.Ordnung auch als 2 Differentialgleichungen 1.Ordnung schreiben:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta} \quad (3)$$

$$\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \left( \frac{a}{r(t)} \right)^3 \sin 2(\theta(t) - \phi(t)) \quad (4)$$

Da  $r(t)$  und  $\phi(t)$  selbst zeitabhängig sind, müssen wir erst diese lösen, um die Lösung zu  $\theta(t)$  finden zu können.

Nach den Keplerschen Gesetzen erhalten wir die Beziehung [1]:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (5)$$

und für die Ableitung nach dem Winkel:

$$\frac{\partial r(\phi)}{\partial \phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)\epsilon \sin \phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \quad (6)$$

Aus der Drehimpulserhaltung können wir folgern:

$$L = Mr^2 \dot{\phi} = \text{const} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{L}{M} \frac{1}{r^2} \quad (8)$$

Für die zeitliche Ableitung von  $r$  ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (6) & (8):

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{a(1 - \epsilon^2)\epsilon \sin \phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \frac{L}{M} \frac{1}{r^2} \quad (9)$$

Mit den 4 Differentialgleichungen können wir nun  $\theta(t)$  und  $\dot{\theta}(t)$  bestimmen ( $r$  ist dabei in Einheiten von  $a$ ).

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{M} \frac{1}{r^2} \quad (10)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1 - \epsilon^2)\epsilon \sin \phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \frac{L}{M} \frac{1}{r^2} \quad (11)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta} \quad (12)$$

$$\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{1}{r(t)}\right)^3 \sin 2(\theta(t) - \phi(t)) \quad (13)$$

Für die Implementierung werden wir  $\tilde{r}$  in Einheiten von  $a$  und  $\tilde{t}$  in Einheiten von  $T/2\pi$  verwenden. Es ergibt sich mit dem der Abschätzung des mittleren Radius von  $a$  und einer annähernd runden Kreisbahn für das Drehimpuls-Masse-Verhältnis die Näherung:

$$\frac{L}{M} \approx \frac{Ma^2\omega}{M} = \frac{2\pi a^2}{T} \quad (14)$$

In den neu eingeführten Einheiten schreibt sich der Drehimpuls also als 1.

## Runge-Kutta 2 Verfahren

Um das Differentialgleichungssysteme auszuwerten, verwenden wir das Runge-Kutta Verfahren nach

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))]. \quad (15)$$

Wobei sich unser  $f$  aus den vier Anteilen von  $\phi$ ,  $r$ ,  $\theta$  und  $\dot{\theta}$  zusammensetzt.

Dabei bietet uns das Runge-Kutta Verfahren numerische Stabilität (soweit das System selbst stabil ist) und weist mit einem Verfahrensfehler von  $\mathcal{O}(h^2)$  einen kleineren Fehler als das Eulerverfahren auf für kleine Schrittweiten  $h$ .

## Implementation des DGS nach dem Runge-Kutta 2 Verfahren

```
#include <Rcpp.h>
#include <stdlib.h>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace Rcpp;

// Wir verwenden Strukturen, um Funktionsargumente uebersichtlicher zu halten
typedef struct
{
```

```

    double phi, r, theta, thetadot;
} Status;

typedef struct
{
    double epsilon, LM, ktheta;
} Parameter;

// Template zum Zerschneiden der verwendeten Vektoren
template<typename T>
std::vector<T> slice(std::vector<T> const &v, int m, int n)
{
    auto erste = v.cbegin() + m;
    auto letzte = v.cbegin() + n + 1;

    std::vector<T> vektor(erste, letzte);
    return vektor;
}

// Berechnungsschritt der Ableitungen nach dem DGS
void f(Status alterStatus, Parameter parameter, Status& neuerStatus){

    neuerStatus.r = parameter.LM*(1-parameter.epsilon*parameter.epsilon)
        *parameter.epsilon*sin(alterStatus.phi)/(alterStatus.r*alterStatus.r
        *(1+parameter.epsilon*cos(alterStatus.phi))*(1+parameter.epsilon
        *cos(alterStatus.phi)));

    neuerStatus.phi = parameter.LM/(alterStatus.r*alterStatus.r);

    neuerStatus.theta = alterStatus.thetadot;

    neuerStatus.thetadot = parameter.ktheta*sin(2*(alterStatus.theta
        -alterStatus.phi))/(alterStatus.r*alterStatus.r*alterStatus.r);
}

// Ein Intergrationsschritt nach Runge-Kutta
void rkSchritt(Status& status, Parameter parameter, double h){
    Status fStatus;                // Standard Ableitung
    f(status, parameter, fStatus);

    Status f2Status;                // Mischterm Ableitung
    Status gemischt = {.phi=status.phi+h*fStatus.phi, .r = status.r+h*fStatus.r,
        .theta = status.theta + h*fStatus.theta,
        .thetadot = status.thetadot + h*fStatus.thetadot};

    f(gemischt, parameter, f2Status);
    status.phi = status.phi + h/2*(fStatus.phi + f2Status.phi);
    status.r = status.r+ h/2*(fStatus.r + f2Status.r);
    status.theta = status.theta + h/2*(fStatus.theta + f2Status.theta);
    status.thetadot = status.thetadot+h/2*(fStatus.thetadot+f2Status.thetadot);
}

```

```

//[[Rcpp::export]]
Rcpp::List durchlauf(const int maxSchritte, const double h,
                    const double phi, const double r, const double theta,
                    const double thetadot, const double epsilon,
                    const double LM, const double ktheta){
    // Arrays der Werte zur späteren Ausgabe
    std::vector<double> phiWerte(maxSchritte);
    std::vector<double> rWerte(maxSchritte);
    std::vector<double> thetaWerte(maxSchritte);
    std::vector<double> thetadotWerte(maxSchritte);
    int k = 0;
    // Quelltext
    Status status = {.phi = phi, .r = r, .theta = theta, .thetadot = thetadot};
    Parameter parameter = {.epsilon = epsilon, .LM = LM, .ktheta = ktheta};
    // Schleife bis zur Abbruchsbedingung
    for (int i = 0; i < maxSchritte; i++){
        phiWerte[i] = status.phi;
        rWerte[i] = status.r;
        rkSchritt(status, parameter, h);

        // theta und thetadot Aufnahme nach jeder Umrundung
        if(status.phi >= 2*3.14159*k){
            k++;
            thetaWerte[k] = status.theta;
            thetadotWerte[k] = status.thetadot;
        }
    }

    // Rückgabe für eine grafische Wiedergabe
    return List::create(Named("phi") = phiWerte, Named("r") = rWerte,
                      Named("theta") = slice(thetaWerte,1,k-1),
                      Named("thetadot") = slice(thetadotWerte,1,k-1));
}

```

## Kreisbahn

Für eine Exzentrizität von 0 erwarten wir eine gleichmäßige Eigenrotation, da der Marsmond durchgehend unter dem selben Einfluss des Planeten ist.

Wir finden in Abb. 1 ohne Moduloauftragung ein sinusförmiges, regelmäßiges Verhalten der Eigenrotation. Tragen wir es hingegen modulo  $2\pi$  auf, so bilden sich die roten Bögen an den Rändern des Moduloplots. Für kleinere Startwerte von der Thetaänderung werden die Radien der Bögen größer, bis sie anschließend im unteren Rand der Grafik Sinuskurven bilden. Das sichtbar periodische Verhalten in der Poincaré Abbildung entspricht der Erwartung. Dieser Test zeigt, dass das verwendete Runge-Kutta 2 Verfahren zur numerischen Integration stabile ist. Da nun gezeigt ist, dass das Verfahren hinreichen gut für das Problem ist, werden wir es im Folgenden mit den Bedingungen für Phobos benutzen.

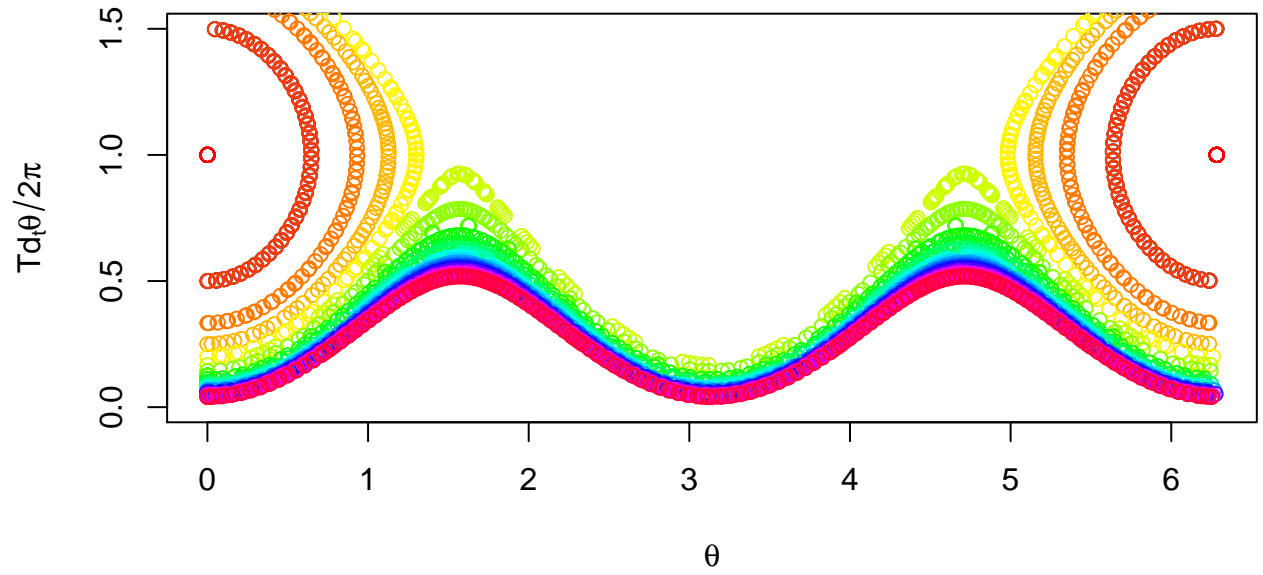


Abbildung 1: Kreisrotation

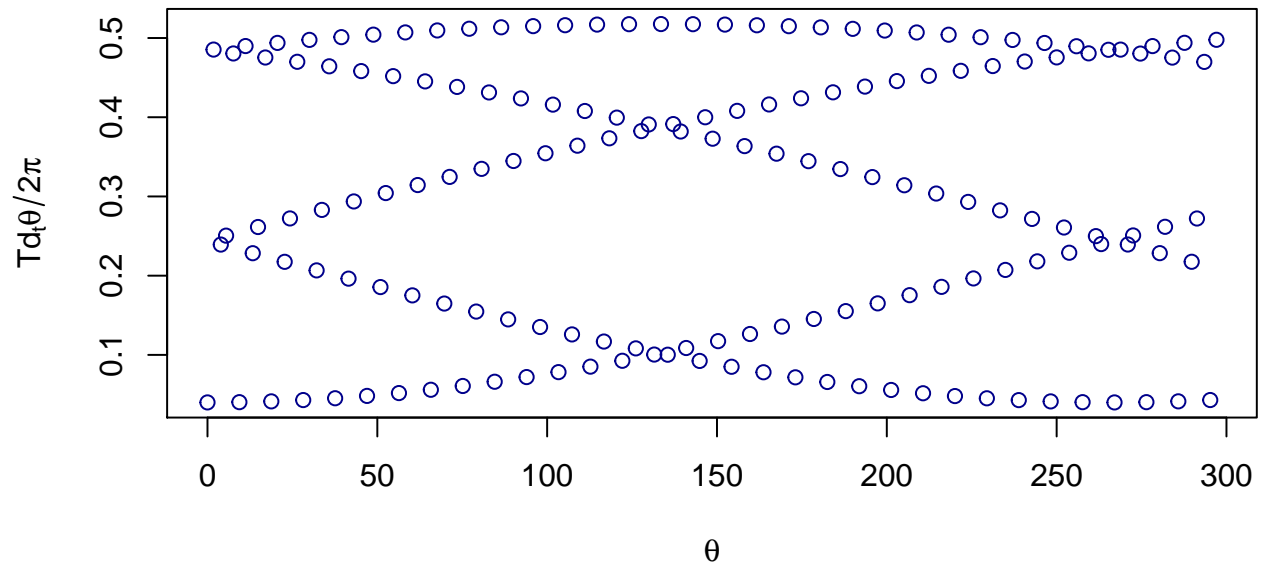


Abbildung 2: Kreisrotation für verschiedenste Startrotationsgeschwindigkeiten von 1 (rot) bis  $1/25$  (pink)

## Phobos

Wir verwenden nun die Werte von Phobos, also  $\epsilon = 0,015$  und  $\alpha = 0,83$ . Wir erwarten, dass der variierende Abstand die Eigenrotation im allgemeinen Fall stören wird und wir somit recht chaotische Plots erhalten können. Wir werden sehen, dass unterschiedliche Anfangsbedingungen von  $\dot{\theta}$  zu chaotischen Verhalten führen können.

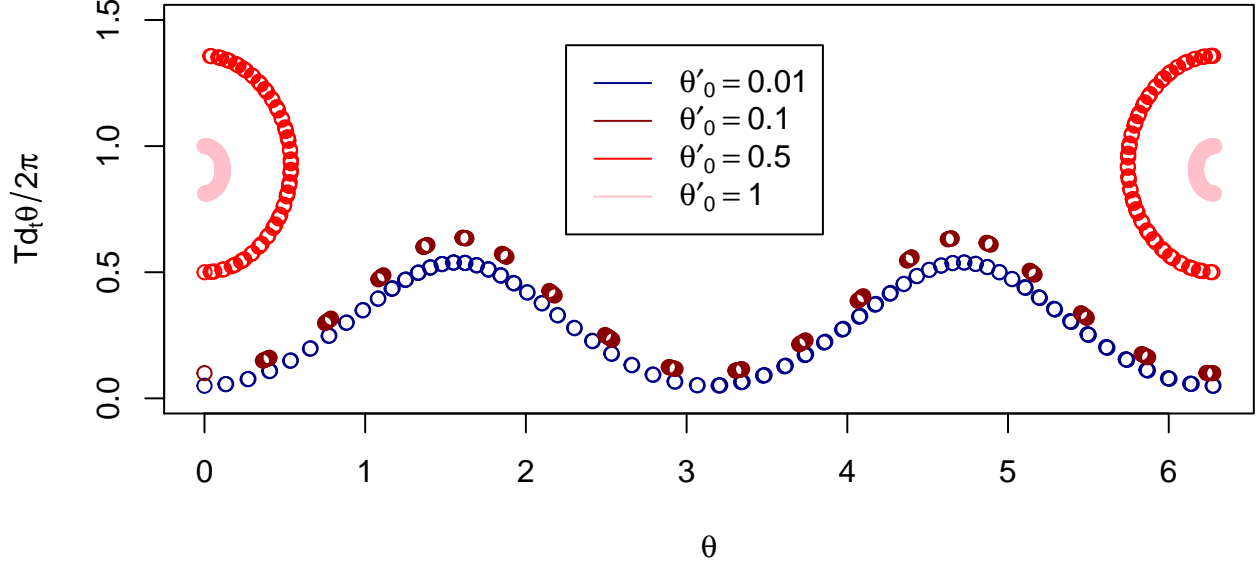


Abbildung 3: Phobosrotation in Moduloauftragung

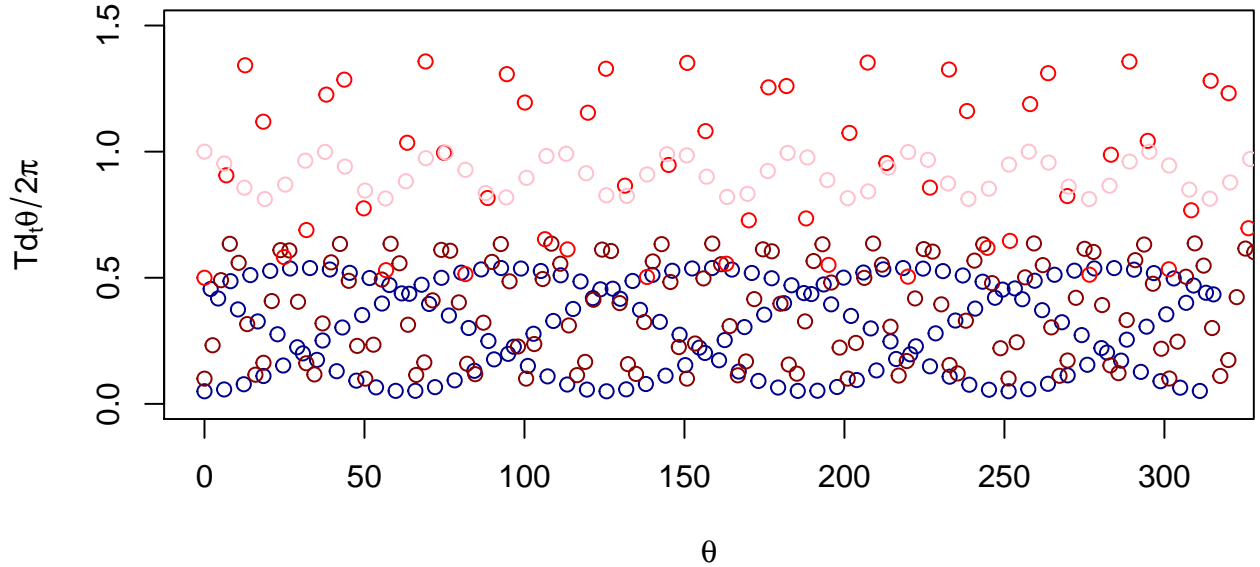


Abbildung 4: Phobosrotation

In Abb. 3 können wir zwei verschiedene periodische Verhalten sehen. Wie bereits im  $\epsilon = 0$ -Fall finden sich die kleineren  $\dot{\theta}$  im unteren Rand, während große Startänderungen an den Rändern Bögen bilden. Offenkundig haben die Startwerte einen deutlichen Einfluss auf das Verhalten des Mondes. Für die große Anfangsrotationengeschwindigkeiten erhalten wir im Plot ohne Modulo eine scheinbar strukturlose Verteilung. Die sehr kleinen Startrotationen sind hingegen in Sinusformen aufzufinden. Wir haben in Abb. 5 eine größere Reichweite an Anfangswerten dargestellt, um ein Gefühl für die Verteilung zu gewinnen. Das grün-gelbliche,

chaotische Verhalten stellt sich hier bei für  $\theta$ -Werte in der Größenordnung von  $1/7$  ein. Dies ist der Bereich, in dem die Schwingung sehr stark gestört wird und keine periodischen Bewegungen durchführt.

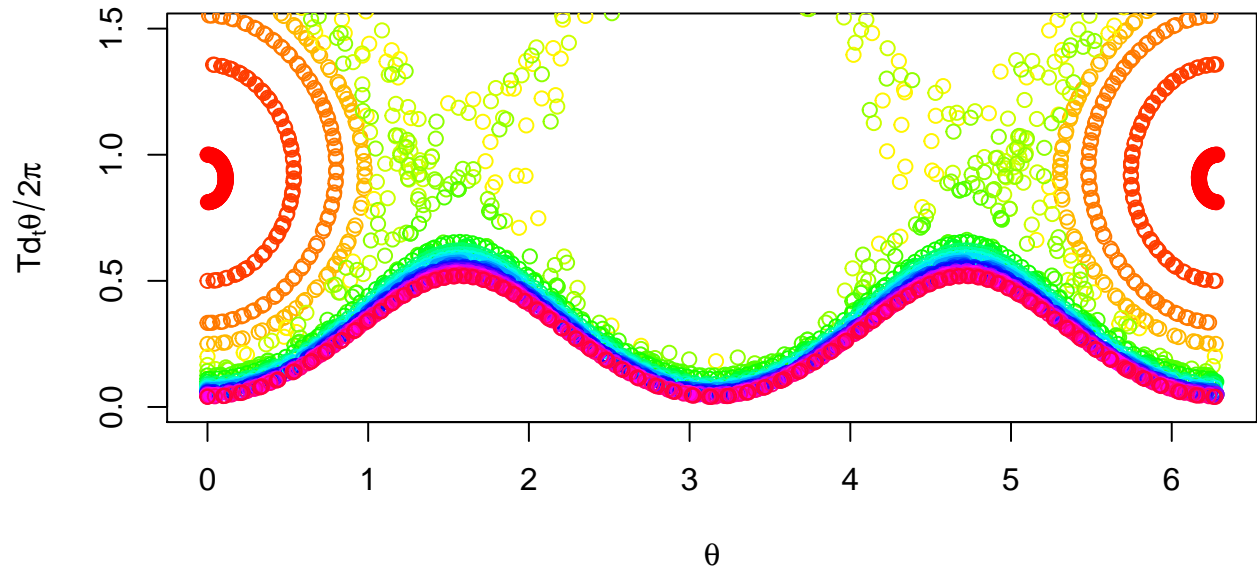


Abbildung 5: Phobosrotation für verschiedenste Startrotationsgeschwindigkeiten von 1 (rot) bis  $1/25$  (pink)

## Fazit

Wir erhalten bei den meisten Werten ein nicht chaotisches Verhalten zwischen  $\theta$  und  $\dot{\theta}$ , können jedoch auch chaotische Situationen konstruieren. Dies ist im physikalischen Sinne auch nachvollziehbar, da die Eigenrotation des Mondes durch geschickt gewählte Bahnen stark von der Radiusvariation beeinflusst werden kann.

Wir können aber sehen, dass dieses Verhalten nicht immer eintritt und wir im Allgemeinen ein strukturiertes Verhalten vorfinden.

## Literatur

- [1] Keplersche Gesetze [https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche\\_Gesetze](https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze), Stand 22.06.2021