Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

2e bachelor scheikunde & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2008–2009

Naam:	....
Richting:	SCH / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1.

(a) (enkel voor tweede bachelor chemie) Bereken het volume ingesloten door de cylinder $x^2 + y^2 = 4$, de paraboloïde $z = x^2 + 3y^2$ en het vlak $z = 16 - x - 2y$.

(b) (enkel voor tweede bachelor bio–ingenieur) Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' + y' - 2y = 9x^2 e^{-2x}$$

/10

2. Gebruik de stelling van Green om de lijnintegraal $\oint\limits_{\alpha} F d\alpha$ te berekenen waarbij $F(x,y) = \left(y^2, x\right)$ en α de ruit met hoekpunten $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ en $(0,-2)$, doorlopen in tegenwijzerzin.

/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -6x(t) + 3y(t) + 9t \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) + 9t - 18 \end{cases}$$

/10

5. Los op door gebruik te maken van Laplace–transformaties:

$$y'' + ty' - 2y = 1 \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = 0$$

/10

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y(n+3) - y(n+2) - y(n+1) + y(n) = (-1)^n n$$

/10

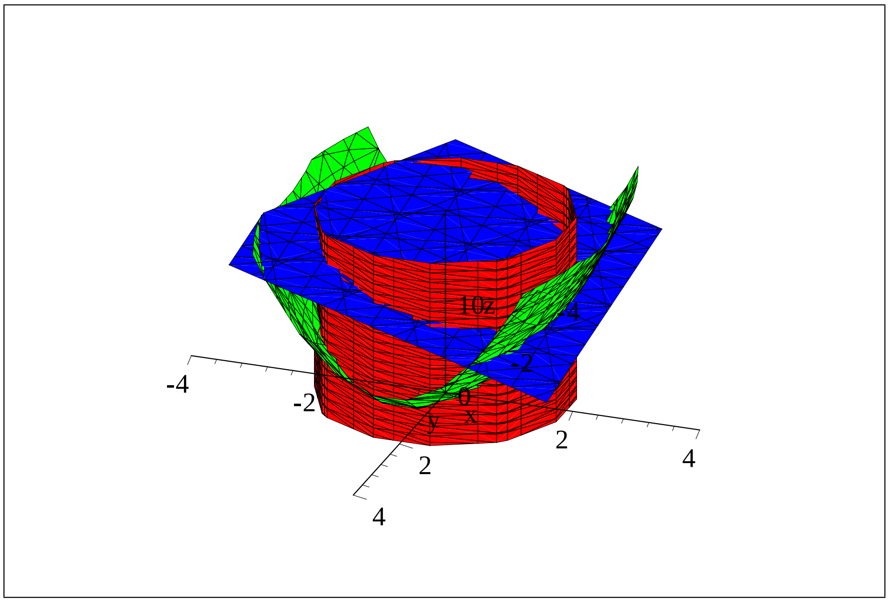
En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1.

(a) (enkel voor tweede bachelor chemie) Bereken het volume ingesloten door de cylinder $x^2+y^2=4$, de paraboloïde $z=x^2+3y^2$ en het vlak $z=16-x-2y$.



$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\int\limits_{x^2+3y^2}^{16-x-2y} dzdS=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4}\left(16-x-2y-x^2-3y^2\right)dS$$
$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(16-r\cos\theta-2r\sin\theta-r^2\cos^2\theta-3r^2\sin^2\theta\right)rd\theta dr$$
$$=\int_0^2\left[16\theta-r\sin\theta+2r\cos\theta-r^2\left(\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\right)-3r^2\left(-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\theta\right)\right]_0^{2\pi}rdr$$
$$=\int_0^2\left(32r\pi-4r^3\pi\right)dr=\left[16r^2\pi-r^4\pi\right]_0^2=48\pi$$

(b) (enkel voor tweede bachelor bio–ingenieur) Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''+y'-2y=9x^2e^{-2x}$$

KV: $t^2+t-2=0\Rightarrow t\in\{1,-2\}$
$\Rightarrow y_h(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$
Onbepaalde coëfficiënten: $\mathrm{gr}\left(Q\left(x\right)\right)=2$, $\mathrm{mult}_\phi\left(-2\right)=1$

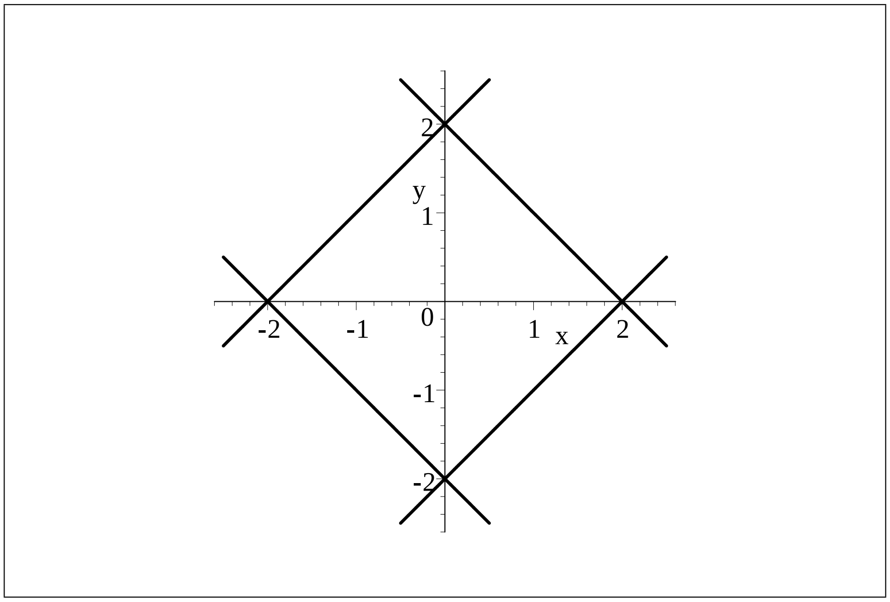
$$\Rightarrow \text{Stel}\begin{cases} y_p=e^{-2x}\left(b_1x+b_2x^2+b_3x^3\right)\\ y_p'=e^{-2x}\left(-2b_3x^3+\left(3b_3-2b_2\right)x^2+\left(2b_2-2b_1\right)x+b_1\right)\\ y_p'=e^{-2x}\left(4b_3x^3+\left(4b_2-12b_3\right)x^2+\left(4b_1-8b_2+6b_3\right)x-4b_1+2b_2\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow\left(4b_3x^3+\left(4b_2-12b_3\right)x^2+\left(4b_1-8b_2+6b_3\right)x-4b_1+2b_2\right)$
$+\left(-2b_3x^3+\left(3b_3-2b_2\right)x^2+\left(2b_2-2b_1\right)x+b_1\right)-2\left(b_1x+b_2x^2+b_3x^3\right)=9x^2$
$\Rightarrow -9b_3x^2+\left(6b_3-6b_2\right)x+2b_2-3b_1=9x^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}-9b_3=9\\ 6b_3-6b_2=0\\ 2b_2-3b_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=-2/3\\ b_2=-1\\ b_3=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{-2x}\left(-x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x\right)$$
$$\Rightarrow y(x) = \left(C_1 - x^3 - x^2 - \frac{2}{3}x\right)e^{-2x} + C_2 e^x$$

2. Gebruik de stelling van Green om de lijnintegraal $\oint\limits_{\alpha} F d\alpha$ te berekenen waarbij $F(x,y) = \left(y^2, x\right)$ en α de ruit met hoekpunten $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$ en $(0,-2)$, doorlopen in tegenwijzerzin.
   rot $F = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y$ gaan we integreren over de rechthoek R met als zijden $x + y = 2, x - y = 2, -x + y = 2$ en $-x - y = 2$



$$\oint\limits_{\alpha} F d\alpha = \iint\limits_{R} (1-2y)\, dS = \int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{-x-2}^{x+2} (1-2y)\, dydx + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x-2}^{-x+2} (1-2y)\, dydx$$
$$= \int\limits_{-2}^{0} \left[y - y^2\right]_{x-2}^{-x+2} dx + \int\limits_{0}^{2} \left[y - y^2\right]_{x-2}^{-x+2} dx = \int\limits_{-2}^{0} (2x+4)\, dx + \int\limits_{0}^{2} (-2x+4)\, dx$$
$$= \left[x^2 + 4x\right]_{-2}^{0} + \left[-x^2 + 4x\right]_{0}^{2} = 8$$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

   Stellen we

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned}
y'' - 2xy' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{m=n-2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2)c_{m+2}x^m - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n-1)c_n\right]x^n
\end{aligned}$$

De recursiebetrekking is

$$\forall n \geq 0 : c_{n+2} = \frac{(2n-1)c_n}{(n+1)(n+2)}$$

Stellen we enerzijds $c_0 \neq 0$ en $c_1 = 0$ dan vinden we

$$c_1 = c_3 = c_5 = ... = c_{2n+1} = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2} \\
c_4 &= \frac{3c_2}{3 \cdot 4} = \frac{-3c_0}{4!} \\
c_6 &= \frac{7c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{3 \cdot 7c_0}{6!} \\
c_8 &= \frac{11c_4}{7 \cdot 8} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11c_0}{8!} \\
&\cdots \\
c_{2n} &= -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot (4n-5)c_0}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_0 = 0$ en $c_1 \neq 0$ dan vinden we

$$c_0 = c_2 = c_4 = ... = c_{2n} = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_3 &= \frac{c_1}{2 \cdot 3} \\
c_5 &= \frac{5c_3}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 5c_1}{5!} \\
c_7 &= \frac{9c_5}{6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9c_1}{7!} \\
c_9 &= \frac{13c_5}{8 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13c_1}{9!} \\
&\cdots \\
c_{2n+1} &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n-3)c_1}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$y(x) = c_0\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot (4k-5)}{(2k)!}x^{2k}\right) + c_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4k-3)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -6x(t) + 3y(t) + 9t \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) + 9t - 18 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}-6&3\\-4&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}-6-\lambda&3\\-4&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+5\lambda+6=\left(\lambda+3\right)\left(\lambda+2\right)=0$$

$$*\ \lambda=-2\Rightarrow E_{-2}:\begin{pmatrix}-4&3\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow 4x-3y=0\Rightarrow V_1:\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$*\ \lambda=-3\Rightarrow E_{-3}:\begin{pmatrix}-3&3\\-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x-y=0\Rightarrow V_2:\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X\left(t\right)=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi\left(t\right)=\begin{pmatrix}3e^{-2t}&e^{-3t}\\4e^{-2t}&e^{-3t}\end{pmatrix}$ is dus een fundamentele matrix

$$\Rightarrow \Phi^{-1}\left(t\right)=\begin{pmatrix}3e^{-2t}&e^{-3t}\\4e^{-2t}&e^{-3t}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-e^{2t}&e^{2t}\\4e^{3t}&-3e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W'\left(t\right)=\Phi^{-1}\left(t\right)F\left(t\right)=\begin{pmatrix}-e^{2t}&e^{2t}\\4e^{3t}&-3e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9t\\9t-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18e^{2t}\\9e^{3t}t+54e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W\left(t\right)=\int\begin{pmatrix}-18e^{2t}\\9e^{3t}t+54e^{3t}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}-9e^{2t}\\3e^{3t}t+17e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(t\right)W\left(t\right)=\begin{pmatrix}3e^{-2t}&e^{-3t}\\4e^{-2t}&e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9e^{2t}\\3e^{3t}t+17e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3t-10\\3t-19\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X\left(t\right)=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+C_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3t-10\\3t-19\end{pmatrix}$$

5. Los op door gebruik te maken van Laplace–transformaties:

$$y''+ty'-2y=1 \text{ met } y\left(0\right)=1 \text{ en } y'\left(0\right)=0$$

$$\mathcal{L}\left[y''\right]+\mathcal{L}\left[ty'\right]-2\mathcal{L}\left[y\right]=\mathcal{L}\left[1\right]$$

$$\Rightarrow \left(z^2Y\left(z\right)-zy\left(0\right)-y'\left(0\right)\right)+\left(-\frac{d}{dz}\left(zY\left(z\right)-y\left(0\right)\right)\right)-2Y\left(z\right)=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \left(z^2Y\left(z\right)-z\right)-\left(zY'\left(z\right)+Y\left(z\right)\right)-2Y\left(z\right)=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow z^2Y\left(z\right)-z-zY'\left(z\right)-Y\left(z\right)-2Y\left(z\right)=\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow -zY'\left(z\right)+\left(z^2-3\right)Y\left(z\right)=z+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow Y'\left(z\right)+\left(-z+\frac{3}{z}\right)Y\left(z\right)=-1-\frac{1}{z^2}$$

Een integrerende factor hiervoor is $e^{\int\left(-z+\frac{3}{z}\right)dz}=e^{-\frac{z^2}{2}+3\ln z}=z^3e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$\Rightarrow \left(z^3e^{-\frac{z^2}{2}}Y\left(z\right)\right)'=\left(-1-\frac{1}{z^2}\right)\left(z^3e^{-\frac{z^2}{2}}\right)=\left(-z^3-z\right)e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\Rightarrow z^3e^{-\frac{z^2}{2}}Y\left(z\right)=\int\left(-z^3-z\right)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\left(z^2+3\right)e^{-\frac{z^2}{2}}+c$$

$$\Rightarrow Y\left(z\right)=\frac{\left(z^2+3\right)e^{-\frac{z^2}{2}}+c}{z^3e^{-\frac{z^2}{2}}}=\frac{3}{z^3}+\frac{1}{z}+\frac{ce^{\frac{z^2}{2}}}{z^3}$$

Omdat de functie van exponentiële orde moet zijn is $c=0$

$$\Rightarrow Y\left(z\right)=\frac{3}{z^3}+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow y\left(t\right)=\frac{3}{2}t^2+1$$

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y\left(n+3\right)-y\left(n+2\right)-y\left(n+1\right)+y\left(n\right)=\left(-1\right)^n n$$

KV: $t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)^2$
$\Rightarrow y_c(n) = c_1(-1)^n + c_2 + c_3 n$
$N(E) = (E+1)^2 \Rightarrow (E-1)^2(E+1)^3 y(n) = 0$
$\Rightarrow y_p(n) = \left(a_1 n + a_2 n^2\right)(-1)^n$
$\Rightarrow \left(a_1(n+3) + a_2(n+3)^2\right)(-1)^{n+3} - \left(a_1(n+2) + a_2(n+2)^2\right)(-1)^{n+2}$
$- \left(a_1(n+1) + a_2(n+1)^2\right)(-1)^{n+1} + \left(a_1 n + a_2 n^2\right)(-1)^n = (-1)^n n$
$\Rightarrow -\left(a_1(n+3) + a_2(n+3)^2\right) - \left(a_1(n+2) + a_2(n+2)^2\right) + \left(a_1(n+1) + a_2(n+1)^2\right) + \left(a_1 n + a_2 n^2\right) = n$
$\Rightarrow -4a_1 - 8a_2 n - 12a_2 = n$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4a_1 - 12a_2 = 0 \\ -8a_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{1}{8} \\ a_1 = \dfrac{3}{8} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \left(\frac{3n - n^2}{8}\right)(-1)^n$$

$$\Rightarrow y(n) = \left(c_1 + \frac{3n - n^2}{8}\right)(-1)^n + c_2 + c_3 n$$