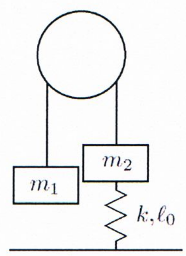
1. Machine van Atwood en een veer

In een machine van Atwood wordt één van de massa's door middel van een veer verbonden met de grond. Deze veer heeft een veerconstante $k = 75N/m$ en een evenwichtslengte $\ell_0 = 10cm$. Zowel katrol als touw zijn massaloos.

1. Als $m_1 = 2kg$, $m_2 = 0,5kg$, wat moet dan de de totale lengte van de veer zijn opdat het geheel in evenwicht zou zijn?
2. Stel dat de massa's zodanig worden vastgehouden dat de lengte van de veer tweemaal haar evenwichtslengte is, wat zal dan de versnelling van de massa's zijn wanneer zij worden losgelaten?
3. Welke nieuwe veerconstante k' zou nodig zijn om m_1 in evenwicht te laten hangen op de grond (maar dus zonder dat m_1 op de grond steunt) als deze massa zich in deel 1 van deze vraag $20cm$ boven de grond bevond? De evenwichtslengte van de nieuwe veer is nog steeds $10cm$.



Figuur 1: Illustratie van de machine van Atwood met veer.

Oplossing

1. De tweede wet van Newton kan worden toegepast op de beide blokken. De vectorvergelijking projecterend op een as naar boven gericht geeft aanleiding tot de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g - k(\ell - \ell_0), \end{cases}$$

met ℓ_0 de evenwichtslengte van de veer en ℓ de totale lengte. In evenwicht zal $a_1 = a_2 = 0$ en aangezien zowel touw als katrol massaloos zijn, zal de spankracht inderdaad in beide delen van het touw gelijk zijn zodat

$$T - m_1 g = 0 = T - m_2 g - k(\ell - \ell_0) \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \frac{(m_1 - m_2)g}{k} + \ell_0 = 0,296m.$$

2. In het tweede geval zal de veer een kracht

$$F_v = k(2\ell_0 - \ell_0) = k\ell_0$$

naar beneden uitoefenen op m_2, zodat

$$\begin{cases} m_1 a_1 &= T - m_1 g \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g - k\ell_0. \end{cases}$$

De spankrachten zijn nog steeds gelijk want anders zou de massaloze katrol een oneindige hoekversnelling ondervinden en ook geldt $a_2 = -a_1$. Dit levert uit het stelsel

$$m_1 a_1 + m_1 g = T = m_2 a_2 + m_2 g + k\ell_0 = -m_2 a_1 + m_2 g + k\ell_0.$$

Na herschrijven vind je

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)g + k\ell_0}{m_1 + m_2} = -a_2 = -2,89\frac{m}{s^2}.$$

Het minteken wijst er op dat de vernselling van massa 1 naar beneden is gericht.

3. Opdat het systeem in evenwicht dient te zijn in de nieuwe positie (met de massa's 20cm verplaatst) dient de nieuwe veer dezelfde kracht uit te oefenen als de oude veer. Dit betekent

$$k(\ell - \ell_0) = F_{\text{veer}} = k'(\ell' - \ell_0) = k'(\ell + 0,2m - \ell_0).$$

Herschrijven levert

$$k' = \frac{\ell - \ell_0}{\ell + 0,2m - \ell_0}k = \frac{0,2962m - 0,1m}{0,2962m + 0,2m - 0,1m}75\frac{N}{m} = 37,14\frac{N}{m}.$$

Je kon dit ook uit een stelsel vinden zoals in deel 1 is gebeurd. Het spreekt voor zich dat een dergelijke methode ook juist werd gerekend.

2. Een bal aan een touw

Een bal met een massa van $m_0 = 144g$ hangt aan een massaloos touw met een lengte van $\ell = 60cm$ en wordt met een constante hoeksnelheid rondgedraaid in een verticale cirkel waarvan het middelpunt zich $2m$ boven de grond bevindt. De spanning in het touw wanneer de bal zich op het laagste punt bevindt, is $2,8N$. Plots wordt een scherp mes onder het ophangpunt geplaatst zodanig dat het touw wordt doorgesneden op het ogenblik dat de bal zich op zijn laagste punt bevindt. Een tijdstip $\Delta t = 0,25s$ later ontploft de bal in drie stukken door een proces dat volledig intern werkt. De eerste twee stukken met massa's $m_1 = 36g$ en $m_2 = 48g$ hebben vlak na de ontploffing snelheden

$$\vec{v}_1 = 3\frac{m}{s}\hat{\imath} \quad \text{en} \quad \vec{v}_2 = -1\frac{m}{s}\hat{\imath} + 2\frac{m}{s}\hat{\jmath}$$

met x-as in de richting dat de intacte bal beweegt op het ogenblik dat het touw wordt doorgesneden en de y-as positief naar boven gericht.

1. Wat is de snelheid van de intacte bal op het ogenblik dat het touw wordt doorgesneden?
2. Wat is de snelheid van het derde stuk van de bal vlak na het uiteenvallen?
3. Welke arbeid werd (in totaal) uitgeoefend door de ontploffing?

Oplossing

- De snelheid van de bal kan worden afgeleid uit de spankracht in het touw. Er geldt immers

$$m\frac{v^2}{\ell} = T - mg \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\left(\frac{T}{m} - g\right)\ell} = 2,4\frac{m}{s}.$$

- De snelheid van het derde stuk van de bal kan worden berekend uit het behoud van impuls. Er werken immers geen externe krachten op de bal of op de drie stukken. Hiervoor dient de impuls van de volledige bal net voor de ontploffing gekend te zijn. De beweging van de bal voldoet aan

$$m_0\vec{a} = m_0\vec{g} = -m_0 g\hat{k} \quad \text{of componentsgewijs} \quad \begin{cases} a_x &= 0 \\ a_y &= -g. \end{cases}$$

Hieruit kunnen de snelheden en dus ook de impulsen worden berekend na een tijd $\Delta t = 0,25s$, namelijk

$$\begin{cases} m_0 v_x(\Delta t) &= m_0 v_x(0) &= m_0\sqrt{\left(\frac{T}{m} - g\right)\ell} \\ m_0 v_y(\Delta t) &= m_0 v_y(0) - m_0 g\Delta t &= -m_0 g\Delta t. \end{cases}$$

Noteer deze snelheid even met $\vec{v}_0$. De impulsen van de twee kleine brokstukken kunnen worden berekend door hun snelheden te vermenigvuldigen met hun massa's. De snelheid van het laatste brokstuk is dus gegeven door

$$\vec{v}_3 = \frac{m_0\vec{v}_0 - m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2}{m_0 - m_1 - m_2} = 4,77\frac{m}{s}\hat{\imath} - 7,49\frac{m}{s}\hat{\jmath}.$$

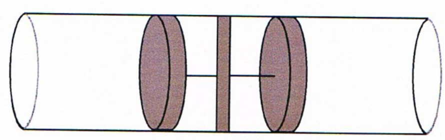
- De arbeid uitgeoefend op de bal is gelijk aan het verschil in kinetische energie vlak na en vlak voor de ontploffing, dus

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\vec{v}_3^2 - \frac{1}{2}m_0\vec{v}_0^2 \\ &= 1,80 J. \end{aligned}$$

3. Een roterende cilinder

Een holle cilinder draait om zijn korte as met een traagheidsoment $Mh^2/10$ met M de totale massa van de holle cilinder en h de hoogte van de cilinder. Binnenin de cilinder bevinden zich twee identieke massa's m dewelke wrijvingsloos doorheen de cilinder kunnen bewegen en met touwen zijn verbonden met de rotatie-as. Deze touwen hebben elk een lengte van $h/6$. Wanneer de hoeksnelheid een kritische waarde aanneemt, wordt de spanning in de touwen $120N$ en breken de touwen. Je mag aannemen dat $M = 0,080kg$, $h = 24cm$ en $m = 0,01kg$. De kleine massa's mag je beschrijven als puntdeeltjes. Aangezien de kleine massa's en de cilinder dezelfde rotatie beschrijven, mag je hen samen beschrijven als één voorwerp met als traagheidsmoment de som van de traagheidsmomenten van de onderdelen.

1. Wat is het traagheidsmoment van het volledige systeem voor de touwen breken?
2. Wat is de kritische hoeksnelheid?
3. Wat is de hoeksnelheid nadat de touwen breken? Hiervoor mag je veronderstellen dat er geen externe krachtmomenten inwerken op het systeem.



Figuur 2: Illustratie van de cilinder

Oplossing

- Traagheidsmomenten rond eenzelfde as mag je optellen en dus geldt

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{cil}} + 2I_m = \frac{1}{10}Mh^2 + 2m\left(\frac{h}{6}\right)^2 = 4,93 \cdot 10^{-4} kg \cdot m^2$$

- De kritische hoeksnelheid is diegene waarbij

$$T = ma_c = m\omega_c^2\frac{h}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_c = \sqrt{\frac{6T}{mh}} = 5,48 \cdot 10^2 s^{-1}.$$

- De aanname die je mag maken zegt dat er geen uitwendige torsie wordt uitgeoefend op het systeem en het impulsmoment dus behouden blijft. Dit betekent

$$L = I_{\text{cil}}\omega + 2I_{\text{m}}\omega = \text{cte}.$$

  Voor het breken van de touwen geldt

$$L = \left(\frac{1}{10}Mh^2 + 2m\left(\frac{h}{6}\right)^2\right)\omega_c$$

terwijl uiteindelijk

$$L = \left(\frac{1}{10}Mh^2 + 2m\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)\omega.$$

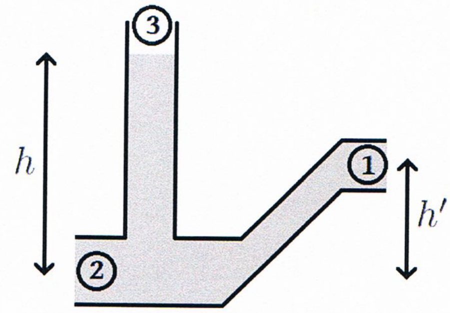
Dit betekent

$$\omega = \frac{\frac{1}{10}Mh^2 + 2m\left(\frac{h}{6}\right)^2}{\frac{1}{10}Mh^2 + 2m\left(\frac{h}{2}\right)^2}\omega_c = 3,60 \cdot 10^2 s^{-1}.$$

4. Water in een leiding

Water stroomt uit de leiding op plaats 1 zoals weergegeven in de figuur met een snelheid van $4m/s$. De effectief gemeten druk op plaats 2 is $1675hPa$. De luchtdruk is $1013hPa$. De hoogte h' is $4m$, de oppervlaktes van de leiding op plaatsen 1 en 2 zijn $5cm^2$ en $20cm^2$ resp.

1. Wat is de druk van het water als het uit de leiding komt? (Plaats 1)
2. Wat is de snelheid in het brede deel van de leiding? (Plaats 2)
3. Wat is de hoogte h van het water in de verticale kolom?



Figuur 3: Illustratie van het leidingensysteem.

Oplossing

- De wet van Bernouilli zegt dat

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cte}$$

overal in de vloeistof. Deze grootheid kan worden berekend op 3 verschillende punten, namelijk op de plaats waar het water uit de leiding stroomt, onderaan in de dikke buis en bovenaan de kolom met water. Noem deze punten respectievelijk punten 1, 2 en 3. Zo bekomt men 3 grootheden dewelke gelijk zijn aan elkaar, namelijk

$$p_1 + \rho g h' + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_3 + \rho g h.$$

Dit zijn 2 onafhankelijke vergelijkingen met 3 onbekenden. Er is nog een extra vergelijking nodig, namelijk de contintuïteitsvergelijking. Deze zegt ons

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

- De druk van het water in punt 1 is

$$p_1 \quad = \quad p_2 - \rho g h' - \frac{1}{2}\rho\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) v_1^2 = 1208hPa.$$