Hypothesetoetsen voor twee populaties

Sandra Van Aert

24 november 2011

Inleiding

- doel: gelijkenissen/verschillen tussen 2 populaties ontdekken en meten
- meest algemeen: cumulatieve verdelingsfuncties vergelijken

$$H_0 : F_1 = F_2 \text{ versus } H_a : F_1 \neq F_2$$

- meestal beperkt men zich tot het vergelijken van gemiddeldes, varianties, medianen, proporties,...

Voorbeelden

- populatiegemiddeldes

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ versus } H_a &: \mu_1 > \mu_2 \\ H_a &: \mu_1 < \mu_2 \\ H_a &: \mu_1 \neq \mu_2 \end{aligned}$$

- populatievarianties

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ versus } H_a : \sigma_1^2 \begin{smallmatrix} < \\ > \\ \neq \end{smallmatrix} \sigma_2^2$$

- populatieproporties

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \text{ versus } H_a : \pi_1 \begin{smallmatrix} < \\ > \\ \neq \end{smallmatrix} \pi_2$$

- ...

Belangrijk

gepaarde waarnemingen

of afhankelijke steekproeven

$\updownarrow$

niet-gepaarde waarnemingen

of onafhankelijke steekproeven

Twee populatiegemiddeldes-niet-gepaarde waarnemingen

- onderscheid
  - kleine steekproeven
    - normaal verdeeld
      - gelijke varianties 15.1.1
      - ongelijke varianties 15.1.2
    - niet-normaal verdeeld 15.5.1
  - grote steekproeven

Twee populatiegemiddeldes-gepaarde waarnemingen

- algemeen

$$
\begin{array}{lll}
H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ versus } & H_a : \mu_1 > \mu_2 & \text{rechtseenzijdig} \\
& H_a : \mu_1 < \mu_2 & \text{linkseenzijdig} \\
& H_a : \mu_1 \neq \mu_2 & \text{tweezijdig}
\end{array}
$$

- herschrijven als

$$
\begin{array}{lll}
H_0 : \underbrace{\mu_1 - \mu_2}_{\delta} = 0 \text{ versus } & H_a : \underbrace{\mu_1 - \mu_2}_{\delta} > 0 & \text{rechts} \\
& H_a : \delta < 0 & \text{links} \\
& H_a : \delta \neq 0 & \text{tweezijdig}
\end{array}
$$

Steekproeven

$$\begin{array}{ccccc}
\text{steekproef 1} & & \text{steekproef 2} & & \text{verschilvariabele} \\
X_{11} & - & X_{21} & = & D_1 \\
X_{12} & - & X_{22} & = & D_2 \\
X_{13} & - & X_{23} & = & D_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
X_{1n} & - & X_{2n} & = & D_n
\end{array}$$

Gelijkenis met één variabele

- we belanden dus in situatie met één variabele!
- toen:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_a : \mu \begin{array}{c} < \\ > \\ \neq \end{array} \mu_0 \end{cases}$$

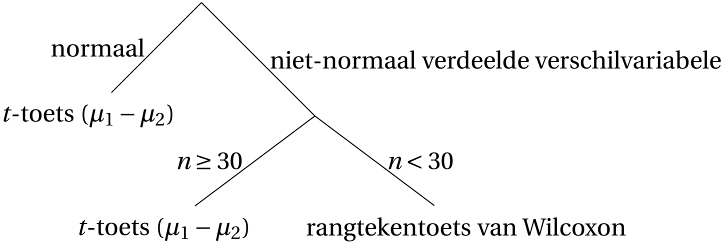
- nu:

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_a : \delta \begin{array}{c} < \\ > \\ \neq \end{array} 0 \end{cases}$$

Toetsingsgrootheid

- vereist
  → normaal verdeelde verschilvariabele D
  → of grote steekproeven
- $T = \dfrac{\overline{D} - 0}{s_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ bij ongekende σ_D
- $Z = \dfrac{\overline{D} - 0}{\sigma_D / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ bij gekende σ_D
- wat bij kleine steekproeven en niet-normaal verdeelde verschilvariabele?
  → rangtekentoets van Wilcoxon (zie verder)

Beslissingsboom gepaarde waarnemingen



Voorbeeld

- aantal bacteriën

	vóór	na	verschil
1)	6.98	6.95	0.03
2)	7.08	6.94	0.14
⋮	⋮	⋮	⋮
12)	7.69	6.99	0.70

- vóór en na dezelfde stalen
  $\Rightarrow$ gepaarde waarnemingen
- $\overline{d} = 0.2583$
  $s_D = 0.3565$

Vervolg voorbeeld

- toets of aantal bacteriën gedaald is

$$H_0 : \mu_{\text{voor}} = \mu_{\text{na}} \qquad H_a : \mu_{\text{voor}} > \mu_{\text{na}}$$
$$H_0 : \mu_{\text{voor}} - \mu_{\text{na}} = 0 \qquad H_a : \mu_{\text{voor}} - \mu_{\text{na}} > 0$$
$$H_0 : \delta = 0 \qquad H_a : \delta > 0$$

- $t = \dfrac{0.2583}{0.3565/\sqrt{12}} = 2.5101$
- kritieke waarde: $t_{\alpha;11} = t_{0.05;11} = 1.7959$
  $t > t_{\alpha;11} \Rightarrow$ verwerp H_0
- p-waarde: $p = P(t_{11} > 2.5101) < 0.025$
  R: `"1-pt(t,11)"` = 0.014491
  Matlab: `"1-tcdf(t,11)"`
  $p < \alpha \Rightarrow$ verwerp H_0

Vervolg voorbeeld

- aantal bacteriën

	vóór	na
1)	6.98	6.95
2)	7.08	6.94
⋮	⋮	⋮
12)	7.69	6.99
	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\overline{x}_1 = 6.7208$	$\overline{x}_2 = 6.4625$
	$s_1^2 = 0.7363$	$s_2^2 = 0.4341$

- stel dat u niet herkent dat het gaat om gepaarde waarnemingen, en doet alsof de steekproeven onafhankelijk zijn

Vervolg voorbeeld

- toets of aantal bacteriën gedaald is

$$H_0 : \mu_{\text{voor}} = \mu_{\text{na}} \qquad H_a : \mu_{\text{voor}} > \mu_{\text{na}}$$
$$H_0 : \mu_{\text{voor}} - \mu_{\text{na}} = 0 \qquad H_a : \mu_{\text{voor}} - \mu_{\text{na}} > 0$$

- $t = \dfrac{6.7208 - 6.4625}{\sqrt{\frac{0.7363}{12} + \frac{0.4341}{12}}} = 0.8272$
- kritieke waarde: $t_{\alpha;\nu} = t_{0.05;21} = 1.7207$
  $t < t_{\alpha;21} \Rightarrow$ aanvaard H_0
- p-waarde:
  $p = P(t_\nu > 0.8272) = P(t_{21} > 0.8272) = 0.2088$
  $p > \alpha \Rightarrow$ aanvaard H_0

Twee populatievarianties

- noodzakelijke tussenstap bij kleine steekproeven wanneer je twee populatiegemiddeldes wil vergelijken
- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ versus $H_a : \sigma_1^2 \underset{\neq}{\overset{<}{>}} \sigma_2^2$
- anders geschreven:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \qquad H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \underset{\neq}{\overset{<}{>}} 1$$

Kansdichtheid

- aanpak?

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$$

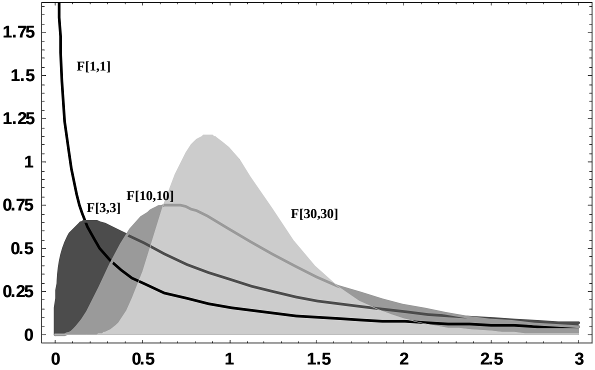
$$\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$$

  indien populaties normaal verdeeld zijn
- nieuwe kansdichtheid:
  → quotiënt van twee χ^2-verdeelde variabelen
  → beide variabelen delen door aantal vrijheidsgraden
  → F-verdeelde kansvariabele

Fisher's F-verdeling

- 2 parameters:
  $\nu_1 \rightarrow$ aantal vrijheidsgraden teller
  $\nu_2 \rightarrow$ aantal vrijheidsgraden noemer
- $F_{\nu_1,\nu_2} = \dfrac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$
- R:
  $\rightarrow P(F_{\nu_1,\nu_2} > f)$ "`1-pf(f,`ν_1`,`ν_2`)`"
  $\rightarrow$ kritieke waarden met "`qf(1-`α`,`ν_1`,`ν_2`)`"
- Matlab:
  $\rightarrow P(F_{\nu_1,\nu_2} > f)$ "`1-fcdf(f,`ν_1`,`ν_2`)`"
  $\rightarrow$ kritieke waarden met "`finv(1-`α`,`ν_1`,`ν_2`)`"

F-verdeling grafisch



Toetsingsgrootheid

- $$\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$
- vereenvoudigen levert
$$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$
- als nulhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ waar is, dan
$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

Rechtseenzijdige toets

- $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ of $H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$
- H_a aannemelijk indien

$$s_1^2 \gg s_2^2 \text{ of } \frac{s_1^2}{s_2^2} \gg 1$$

- H_a aanvaarden als $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ groot is

  $\rightarrow$ groter dan kritieke waarde F_{α,n_1-1,n_2-1}
- p-waarde

  $\rightarrow p = P(F_{n_1-1,n_2-1} > \dfrac{s_1^2}{s_2^2}) = P(F_{n_1-1,n_2-1} > f)$

Linkseenzijdige toets

- $H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \qquad$ of $\qquad H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$
- H_a aanvaarden indien

$$s_1^2 \ll s_2^2 \text{ of } \frac{s_1^2}{s_2^2} \ll 1$$

- H_a aanvaarden als $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ klein is

  $\rightarrow$ kleiner dan kritieke waarde $F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$
- p-waarde

  $\rightarrow p = P(F_{n_1-1,n_2-1} < \dfrac{s_1^2}{s_2^2}) = P(F_{n_1-1,n_2-1} < f)$

Tweezijdige toets

- $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ of $H_a: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$
- H_a aanvaarden indien $s_1^2 \ll s_2^2$ of $s_1^2 \gg s_2^2$
- H_a aanvaarden indien $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$ te klein of te groot is

  $\rightarrow$ kleiner dan linkerkritieke waarde $F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$

  of groter dan rechterkritieke waarde $F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$
- $s_1^2 < s_2^2$: $p = 2P(F_{n_1-1,n_2-1} < \dfrac{s_1^2}{s_2^2})$
- $s_1^2 > s_2^2$: $p = 2P(F_{n_1-1,n_2-1} > \dfrac{s_1^2}{s_2^2})$

Voorbeeld

- $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ en $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- steekproef 1: $s_1^2 = 0.1848,\ n_1 = 20$
  steekproef 2: $s_2^2 = 0.2837,\ n_2 = 20$
- $f = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{0.1848}{0.2837} = 0.6514$
- kritieke waarde:
  $F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = F_{0.975,19,19} \approx 0.3958$
- $f < F_{0.975,19,19} \Rightarrow$ aanvaard H_0
- p-waarde $= 2p(F_{19,19} < f) = 0.3583$

Twee populatieproporties

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ versus $H_a : \pi_1 \;\begin{smallmatrix} < \\ > \\ \neq \end{smallmatrix}\; \pi_2$
- $\hat{P}_1 \sim N(\pi_1, \dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1})$ (indien $n_1\pi_1 \geq 5$, $n_1(1-\pi_1) \geq 5$)

  $\hat{P}_2 \sim N(\pi_2, \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2})$ (indien $n_2\pi_2 \geq 5$, $n_2(1-\pi_2) \geq 5$)
- $\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim N(\pi_1 - \pi_2, \dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2})$

$\downarrow$ als H_0 waar: $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

$$N(0, \frac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_2})$$

Toetsingsgrootheid

- $Z = \dfrac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n_1} + \frac{\pi(1-\pi)}{n_2}}} \sim N(0,1)$
- π schatten m.b.v. $\overline{P} = \dfrac{n_1\hat{P}_1 + n_2\hat{P}_2}{n_1 + n_2}$
- beslissingsregel 1 (rechtseenzijdig):
  $z > z_\alpha$: verwerp H_0
  $z \leq z_\alpha$: aanvaard H_0
- beslissingsregel 2 (rechtseenzijdig):
  $p = P(Z > z)$
  $p < \alpha$: verwerp H_0
  $p \geq \alpha$: aanvaard H_0

Twee populatielocaties - onafhankelijke steekproeven

- Wilcoxon rangsomtoets
- ordinale gegevens
- H_0: locatie 1 = locatie 2

  H_a: locatie 1 $\begin{matrix} < \\ > \\ \neq \end{matrix}$ locatie 2
- vaak ook voor niet-normaal verdeelde kwantitatieve gegevens

Voorbeeld

- het pesticide DDT veroorzaakt stuiptrekkingen bij mensen en zoogdieren
- hoe worden deze stuiptrekkingen veroorzaakt?
- proefdieren: 6 met DDT vergiftigde ratten en 6 niet-vergiftigde ratten
- stimulatie van een zenuw in de poot van de rat
- elektrische reactie vertoont een scherpe piek gevolgd door een tweede veel kleinere piek
- amplitude van de tweede piek wordt gemeten als percentage van de eerste piek

Voorbeeld

DDT-groep	controlegroep
12.207	11.074
16.869	9.686
25.050	12.064
22.429	9.351
8.456	8.182
20.589	6.642

$$\begin{cases} H_0: \text{ geen verschil} \\ H_a: \text{ amplitude groter bij DDT vergiftigde ratten} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \text{ locatie 1 } = \text{ locatie 2} \\ H_a: \text{ locatie 1 } > \text{ locatie 2} \end{cases}$$

Werkwijze

1. kleinste steekproef → nummer 1
2. rangschik alle data van klein naar groot
3. geef rangnummers
4. T_1 = som rangnummers steekproef 1
5. T_2 = som rangnummers steekproef 2
6. Als H_a waar zou zijn, dan zou T_1 te groot zijn: verwerp H_0 en aanvaard H_a indien

$$T_1 > \text{ rechterkritieke waarde } T_U$$

(cursus: appendix B)

Vervolg voorbeeld

DDT-groep		controlegroep	
Meting	Rangnummer	Meting	Rangnummer
12.207	8	11.074	6
16.869	9	9.686	5
25.050	12	12.064	7
22.429	11	9.351	4
8.456	3	8.182	2
20.589	10	6.642	1

- $t_1 = 8 + 9 + 12 + 11 + 3 + 10 = 53$
- $n_1 = 6$, $n_2 = 6 \Rightarrow T_U = 50$

a. $\alpha = 0{,}025$ eenzijdig; $\alpha = 0{,}05$ tweezijdig

n_1 / n_2	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	5	16	6	18	6	21	7	23	7	26	8	28	8	31	9	33
4	6	18	11	25	12	28	12	32	13	35	14	38	15	41	16	44
5	6	21	12	28	18	37	19	41	20	45	21	49	22	53	24	56
6	7	23	12	32	19	41	26	52	28	56	29	61	31	65	32	70
7	7	26	13	35	20	45	28	56	37	68	39	73	41	78	43	83
8	8	28	14	38	21	49	29	61	39	73	49	87	51	93	54	98
9	8	31	15	41	22	53	31	65	41	78	51	93	63	108	66	114
10	9	33	16	44	24	56	32	70	43	83	54	98	66	114	79	131

b. $\alpha = 0{,}05$ eenzijdig; $\alpha = 0{,}10$ tweezijdig

n_1 / n_2	3		4		5		6		7		8		9		10	
	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U	T_L	T_U
3	6	15	7	17	7	20	8	22	9	24	9	27	10	29	11	31
4	7	17	12	24	13	27	14	30	15	33	16	36	17	39	18	42
5	7	20	13	27	19	36	20	40	22	43	24	46	25	50	26	54
6	8	22	14	30	20	40	28	50	30	54	32	58	33	63	35	67
7	9	24	15	33	22	43	30	54	39	66	41	71	43	76	46	80
8	9	27	16	36	24	46	32	58	41	71	52	84	54	90	57	95
9	10	29	17	39	25	50	33	63	43	76	54	90	66	105	69	111
10	11	31	18	42	26	54	35	67	46	80	57	95	69	111	83	127

Vervolg voorbeeld

DDT-groep		controlegroep	
Meting	Rangnummer	Meting	Rangnummer
12.207	8	11.074	6
16.869	9	9.686	5
25.050	12	12.064	7
22.429	11	9.351	4
8.456	3	8.182	2
20.589	10	6.642	1

- $t_1 = 8 + 9 + 12 + 11 + 3 + 10 = 53$
- $n_1 = 6$, $n_2 = 6 \Rightarrow T_U = 50$
- $t_1 > T_U$: verwerp nulhypothese
- conclusie: amplitude tweede piek groter bij DDT vergiftigde ratten

Twee populatielocaties - gepaarde waarnemingen

- tussen punten op de huid bestaat een natuurlijk elektrisch potentiaalverschil
- bevordert deze natuurlijke elektrische veldsterkte de genezing van wonden het beste?
- indien ja, dan vertraagt de genezing bij het wijzigen van de veldsterkte
- proefdieren : verdoofde watersalamanders

Twee populatielocaties - gepaarde waarnemingen

- sneetjes in beide achterpoten
- 1 achterpoot = experimenteel lidmaat (met elektrode om elektrisch veld te reduceren)
- 1 achterpoot = controlelidmaat (natuurlijke genezing)
- meet de snelheid waarmee de wonden genezen (in micrometers per uur)

Twee populatielocaties - gepaarde waarnemingen

Salamander	Experimenteel lidmaat	Controle lidmaat
1	24	25
2	23	13
3	47	44
4	42	45
5	26	57
6	46	42
7	38	50
8	33	36
9	28	35
10	28	38
11	21	43
12	27	31
13	25	26
14	45	48

- Wilcoxon rangtekentoets

Twee populatielocaties - gepaarde waarnemingen

- $$\begin{cases} H_0: \text{ geen verschil in genezingstempo} \\ H_a: \text{ lager bij gewijzigde veldsterkte} \end{cases}$$
- $$\begin{cases} H_0: \text{ locatie 1 } = \text{ locatie 2} \\ H_a: \text{ locatie 1 } < \text{ locatie 2} \end{cases}$$

Werkwijze

1. verschilvariabele
2. rangschik absolute waardes
3. geef rangnummers + of – teken
4. tel $\begin{cases} \text{positieve} \\ |\text{negatieve}| \end{cases}$ rangnummers op: $\begin{cases} T_+ \\ T_- \end{cases}$
5. als H_0 waar: $T_+ \approx T_-$

   als H_a waar: $\begin{cases} \text{veel negatieve verschillen} \\ \text{weinig positieve verschillen} \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} T_+ \text{klein} \\ T_- \text{groot} \end{cases} \rightarrow T_+$ vgln. met linkerkritieke waarde

   (cursus: appendix C)

Salamander	Experimenteel lidmaat	Controle lidmaat	Verschil	|Verschil|	Rangnummers |Verschil|	Rangnummers met teken
1	24	25	-1	1	1.5	-1.5
2	23	13	10	10	10.5	10.5
3	47	44	3	3	4.5	4.5
4	42	45	-3	3	4.5	-4.5
5	26	57	-31	31	14	-14
6	46	42	4	4	7.5	7.5
7	38	50	-12	12	12	-12
8	33	36	-3	3	4.5	-4.5
9	28	35	-7	7	9	-9
10	28	38	-10	10	10.5	-10.5
11	21	43	-22	22	13	-13
12	27	31	-4	4	7.5	-7.5
13	25	26	-1	1	1.5	-1.5
14	45	48	-3	3	4.5	-4.5

Voorbeeld

- hypothesen
$$\begin{cases} H_0: \text{ geen verschil in genezingstempo} \\ H_a: \text{ lager bij gewijzigde veldsterkte} \end{cases}$$
$$\begin{cases} H_0: \text{ locatie 1 } = \text{ locatie 2} \\ H_a: \text{ locatie 1 } < \text{ locatie 2} \end{cases}$$
- $t_+ = 22.5$
- $n = 14 \Rightarrow T_0 = 26$

Eenzijdig	Tweezijdig	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}10$	1	2	4	6	8	11
$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$		1	2	4	6	8
$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$			0	2	3	5
$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$				0	2	3
		n = 11	**n = 12**	**n = 13**	**n = 14**	**n = 15**	**n = 16**
$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}10$	14	17	21	26	30	36
$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$	11	14	17	21	25	30
$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	7	10	13	16	20	24
$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	5	7	10	13	16	19
		n = 17	**n = 18**	**n = 19**	**n = 20**	**n = 21**	**n = 22**
$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}10$	41	47	54	60	68	75
$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$	35	40	46	52	59	66
$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	28	33	38	43	49	56
$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	23	28	32	37	43	49
		n = 23	**n = 24**	**n = 25**	**n = 26**	**n = 27**	**n = 28**
$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}10$	83	92	101	110	120	130
$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$	73	81	90	98	107	117
$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	62	69	77	85	93	102
$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	55	61	68	76	84	92
		n = 29	**n = 30**	**n = 31**	**n = 32**	**n = 33**	**n = 34**
$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}10$	141	152	163	175	188	201
$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$	127	137	148	159	171	183
$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	111	120	130	141	151	162
$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	100	109	118	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Voorbeeld

- hypothesen

$$\begin{cases} H_0: & \text{geen verschil in genezingstempo} \\ H_a: & \text{lager bij gewijzigde veldsterkte} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: & \text{locatie 1} = \text{locatie 2} \\ H_a: & \text{locatie 1} < \text{locatie 2} \end{cases}$$

- $t_+ = 22.5$
- $n = 14 \Rightarrow T_0 = 26$
- $t_+ < T_0$: verwerp H_0
- conclusie: gewijzigde veldsterkte vertraagt het genezingsproces