Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 2e zittijd 2009–2010

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Bereken door zoveel mogelijk de formules van De Moivre te gebruiken

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i\right)^9}{3i}-\left(2i\sqrt{3}+2\right)^6$$

/6

2. Een complexe veelterm $A(z)$ van graad 3 is deelbaar door $z - -i, z-1-i,\ z-1+i$ en de rest bij deling door $z-1$ is 2. Wat is de veelterm?

/5

3. Gegeven de verzameling

$$\mathcal{V} = \left\{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : \exists \lambda \in \mathbb{R} : (y,z) = \lambda\,(w,x)\right\}$$

Bijvoorbeeld $(1,2,2,4) \in \mathcal{V}$, maar $(1,2,2,3) \notin \mathcal{V}$. Is $(\mathbb{R}, \mathcal{V}, +)$ een deelvectorruimte van $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +\right)$? Indien ja, bewijs het, indien niet, geef een tegenvoorbeeld.

/5

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} -2a + b + c = 1 \\ a - 2b - c = -2 \\ 3b + c = 3 \\ 5a - 4b - 3c = -4 \end{cases}$$

/6

5. Gegeven in $\mathbb{R}^3$ de cirkel $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 8z - 2 = 0 \\ \alpha : x - 2y + z = 1 \end{array} \right.$ die gegeven wordt als doorsnede van een bol en een vlak. Wat is zijn middelpunt en wat is zijn straal?

/5

6. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ en bepaal een equispectrale Jordanmatrix

.

/6

7. Bereken zonder gebruik te maken van afgeleiden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$$

/6

8. Los op: $3^{1-x} \cdot \left(3^{3x+1} - 1\right) = 37 \cdot 3^x - 31$

/6

9. Het aandeel FOERT-is kostte op 1 januari 2002 1000 euro. x jaar na uitgifte heeft het aandeel een koers bereikt van $f(x) = 200\left(6 - e^{-x} + \frac{1}{3}x^2e^{-x}\right)$.

   (a) Wanneer had je het moeten verkopen om maximale winst gehad te hebben?

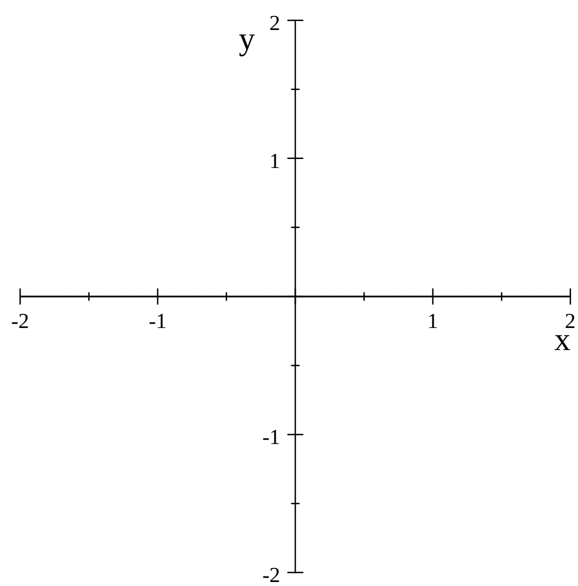
   (b) Bewijs ook dat op dat tijdstip de winst maximaal was.

   (c) Bereken tot op de cent hoeveel dit zou zijn geweest.

   (d) Wat is de bodemkoers van het aandeel (= laagste koers die het volgens dit voorspellingsmodel nog ooit zal halen?)

/6

10. Het *vlinderdasje van Siegfried Bracke* heeft als poolvergelijking $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta + 1}$. Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een tekening.



/7

11. Bereken $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(\sqrt{t}+1\right)\left(\sqrt{t}+4\right)}$

/6

12. Bereken $\displaystyle\int \cos^2 x \sin 3x dx$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Bereken door zoveel mogelijk de formules van De Moivre te gebruiken

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i\right)^9}{3i}-\left(2i\sqrt{3}+2\right)^6$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{\left(3\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)^9}{3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}-\left(4\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)^6\\
&=\frac{3^9\operatorname{cis}\left(\frac{63\pi}{6}\right)}{3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}}-4^6\operatorname{cis}\left(-\frac{30\pi}{3}\right)\\
&=3^8\operatorname{cis}\left(\frac{21\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-4^6\operatorname{cis}\left(-10\pi\right)\\
&=3^8\operatorname{cis}\left(\frac{20\pi}{2}\right)-4^6\operatorname{cis}\left(-10\pi\right)\\
&=3^8\operatorname{cis}\left(10\pi\right)-4^6\operatorname{cis}\left(-10\pi\right)\\
&=3^8-4^6=2465
\end{aligned}$$

2. Een complexe veelterm $A(z)$ van graad 3 is deelbaar door $z - -i, z-1-i,\ z-1+i$ en de rest bij deling door $z-1$ is 2. Wat is de veelterm?
$A(z)=az^3+bz^2+cz+d$

$$\begin{cases} A(1)=a+b+c+d=2\\ A(i)=-ia-b+ic+d=0\\ A(1+i)=-(2-2i)\,a+2ib+(1+i)\,c+d=0\\ A(1-i)=-(2+2i)\,a-2ib+(1-i)\,c+d=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+b+c+d=2\\ -ia-b+ic+d=0\\ -(2-2i)\,a+2ib+(1+i)\,c+d=0\\ -(2+2i)\,a-2ib+(1-i)\,c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1+i\\ b=-1-3i\\ c=4i\\ d=2-2i\end{cases}$$

$\Rightarrow A(z)=(1+i)\,z^3+(-1-3i)\,z^2+4iz+(2-2i)$

3. Gegeven de verzameling

$$\mathcal{V}=\left\{(w,x,y,z)\in\mathbb{R}^4:\exists\lambda\in\mathbb{R}:(y,z)=\lambda\,(w,x)\right\}$$

Bijvoorbeeld $(1,2,2,4)\in\mathcal{V}$, maar $(1,2,2,3)\notin\mathcal{V}$. Is $(\mathbb{R},\mathcal{V},+)$ een deelvectorruimte van $\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^4,+\right)$? Indien ja, bewijs het, indien niet, geef een tegenvoorbeeld.
$(1,2,2,4)$ en $(1,3,3,9)\in\mathcal{V}$ maar $(1,2,2,4)+(1,3,3,9)=(2,5,5,13)\notin\mathcal{V}$. Het is dus geen deelvectorruimte.

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} -2a+b+c=1\\ a-2b-c=-2\\ 3b+c=3\\ 5a-4b-3c=-4\end{cases}$$

$$\operatorname{rg}A^{+}=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 5 & -4 & -3 & -4\end{array}\right)\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 5 & -4 & -3 & -4\end{array}\right)\overset{\substack{R_2+2R_1\\ R_5-5R_1}}{=}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -3 & -1 & -3\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 6 & 2 & 6\end{array}\right.$$

$$=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -3 & -1 & -3\end{array}\right)=2$$

Stel $b=\lambda \Rightarrow ... = \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{R_2(-1)}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right) \overset{R_1+R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right)$
$\Rightarrow (a,b,c) = (-\lambda+1, \lambda, -3\lambda+3) = (1,0,3) + \lambda(-1,1,-3)$

5. Gegeven in $\mathbb{R}^3$ de cirkel $\left\{\begin{array}{l} \Gamma : x^2+y^2+z^2-6x+6y-8z-2=0 \\ \alpha : x-2y+z=1 \end{array}\right.$ die gegeven wordt als doorsnede van een bol en een vlak. Wat is zijn middelpunt en wat is zijn straal?
Normaalvergelijking van de bol: $\Gamma : (x-3)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=36$, dus voor de bol is het middelpunt $n(3,-3,4)$ en de straal $=6$.
Het middelpunt van de cirkel ligt dus op de rechte $L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$L \cap \alpha : (\lambda+3) - 2(-2\lambda-3) + (\lambda+4) = 1$
$\Rightarrow \lambda = -2$
$\Rightarrow m(1,1,2)$
De normaalvergelijking van het vlak is $\alpha_N : \dfrac{x-2y+z-1}{\sqrt{6}} = 0$. De afstand van n tot het vlak is dus $\left|\dfrac{3-2(-3)+4-1}{\sqrt{6}}\right| = 2\sqrt{6}$. Dit is tevens de lengte van $\|mn\|$. De straal van de cirkel vinden we dus uit Pythagoras: $\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{3}$

6. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ en bepaal een equispectrale Jordanmatrix.
$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 1 \\ 6 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda - 4 = -(\lambda+1)(\lambda+2)^2 = 0$
$\lambda = -1 \Rightarrow E_{-1} : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda = -2 \Rightarrow E_{-2} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
Veralgemeende eigenwaarde: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Stel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan is $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

7. Bereken zonder gebruik te maken van afgeleiden:
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2+x+2-x-3\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x+3}} = \frac{3}{4}$$

8. Los op: $3^{1-x}\cdot\left(3^{3x+1}-1\right) = 37\cdot 3^x - 31$
$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x} - 3^{1-x} = 37\cdot 3^x - 31$
Stel $y = 3^x$
$\Leftrightarrow 9\cdot y^2 - \dfrac{3}{y} = 37\cdot y - 31$
$\Leftrightarrow 9\cdot y^3 - 37\cdot y^2 + 31y - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(9y-1) = 0$
$\Leftrightarrow y \in \left\{1, 3, \dfrac{1}{9}\right\}$
$\Leftrightarrow x \in \{0, 1, -2\}$

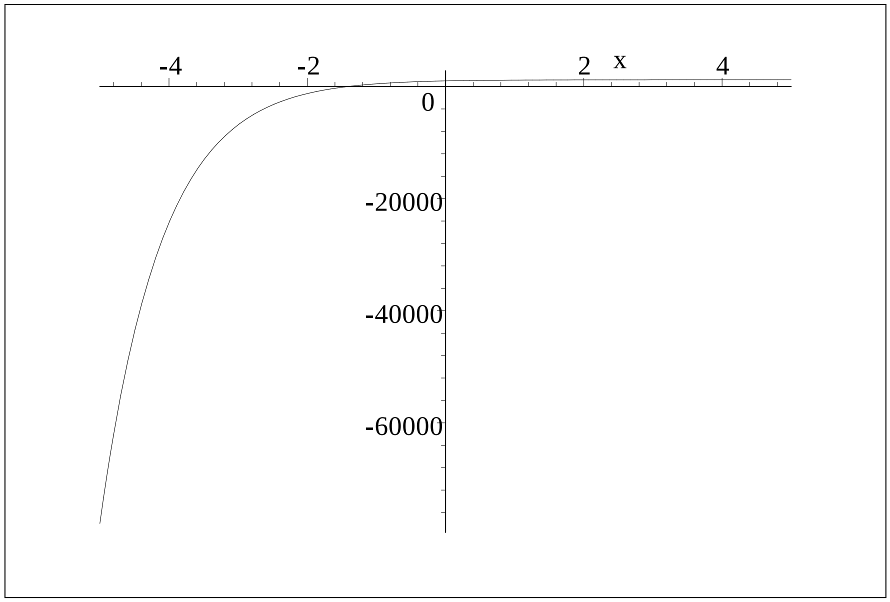
9. Het aandeel FOERT-is kostte op 1 januari 2002 1000 euro. x jaar na uitgifte heeft het aandeel een koers bereikt van $f(x) = 200\left(6 - e^{-x} + \dfrac{1}{3}x^2e^{-x}\right)$.

   (a) Wanneer had je het moeten verkopen om maximale winst gehad te hebben?
   $f(x) = 200\left(6 - e^{-x} + \dfrac{1}{3}x^2e^{-x}\right)$
   $f'(x) = 200e^{-x} + \dfrac{400}{3}xe^{-x} - \dfrac{200}{3}x^2e^{-x} = -\dfrac{200}{3}e^{-x}(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$
   $\Rightarrow$ 3 jaar na uitgifte

   (b) Bewijs ook dat op dat tijdstip de winst maximaal was.
   $f''(x) = -\dfrac{200}{3}e^{-x} - \dfrac{800}{3}xe^{-x} + \dfrac{200}{3}x^2e^{-x} = \dfrac{200}{3}e^{-x}\left(-1-4x+x^2\right)$
   $f''(3) = \dfrac{200}{3}e^{-3}\left(-1-4\cdot 3+3^2\right) = -\dfrac{800}{3}e^{-3} < 0 \Rightarrow$ het was een maximum

   (c) Bereken tot op de cent hoeveel dit zou zijn geweest.
   $f(3) = 200\left(6 - e^{-3} + \dfrac{1}{3}\cdot 3^2e^{-3}\right) = 1219.91$ euro
   $\Rightarrow 219.91$ euro winst

   (d) Wat is de bodemkoers van het aandeel (= laagste koers die het volgens dit voorspellingsmodel nog ooit zal halen?)
   $\lim\limits_{x\to\infty} 200\left(6 - e^{-x} + \dfrac{1}{3}x^2e^{-x}\right) = 1200$ euro



10. Het *vlinderdasje van Siegfried Bracke* heeft als poolvergelijking $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta + 1}$. Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een tekening.
domein $= \mathbb{R}$
periode $= 2\pi$
Beperkt domein $= [0, 2\pi]$
$r = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$r'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta + 1}\right) = \frac{-\left(\sin^2\theta + 1\right)(2\sin 2\theta) - (\cos 2\theta)(2\sin\theta\cos\theta)}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(\sin^2\theta + 1\right)(4\sin\theta\cos\theta) - \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)(2\sin\theta\cos\theta)}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2}$$

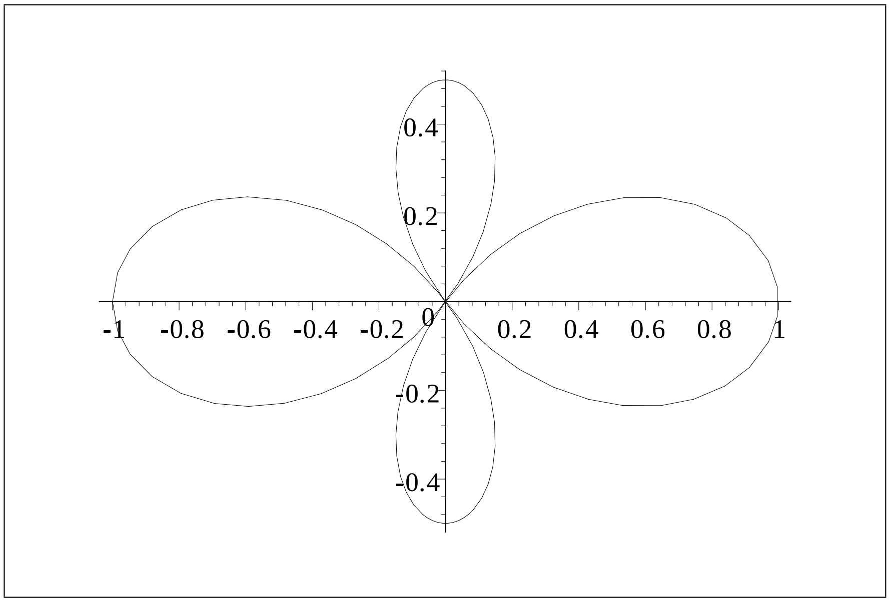
$$\frac{-4\sin^3\theta\cos\theta - 4\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos^3\theta + 2\sin^3\theta\cos\theta}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2}$$

$$\frac{-2\sin^3\theta\cos\theta - 4\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos^3\theta}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2} = \frac{-2(\sin\theta\cos\theta)\left(\sin^2\theta + 2 + \cos^2\theta\right)}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2}$$

$$= \frac{-6(\sin\theta\cos\theta)}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2} = \frac{-3\sin 2\theta}{\left(\sin^2\theta + 1\right)^2}$$

$r' = 0 \Leftrightarrow -3\sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = k\pi \Rightarrow \theta = k\dfrac{\pi}{2}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
r	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
r'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
r	1	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	



11. Bereken $\int \frac{dt}{\left(\sqrt{t}+1\right)\left(\sqrt{t}+4\right)}$

 Stel $x=\sqrt{t} \Rightarrow t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$

 $\Rightarrow \int \frac{2xdx}{(x+1)(x+4)}$

$$\frac{2x}{(x+1)(x+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+4}$$

 $\Rightarrow \begin{cases} A=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x}{x+4}=-\frac{2}{3} \\ B=\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x}{x+1}=\frac{8}{3} \end{cases}$

 $\Rightarrow I=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+4}=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{8}{3}\ln|x+4|+c$

 $=-\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{t}+1\right|+\frac{8}{3}\ln\left|\sqrt{t}+4\right|+c$

12. Bereken $\int \cos^2 x \sin 3x dx$

 $=\int \cos^2 x\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)dx$

 $=-\int \cos^2 x\left(3-4\sin^2 x\right)d(\cos x)$

 $=-\int \cos^2 x\left(3-4\left(1-\cos^2 x\right)\right)d(\cos x)$

 $=-\int \cos^2 x\left(4\cos^2 x-1\right)d(\cos x)$

 $=\int \cos^2 x\left(1-4\cos^2 x\right)d(\cos x)$

 $=\int t^2\left(1-4t^2\right)dt$

 $=\int \left(t^2-4t^4\right)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{4}{5}t^5+c=\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{4}{5}\cos^5 x+c$