Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

2e bachelor scheikunde — 1e zittijd 2007–2008

Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten! — Onleesbaar = fout! — Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen. — Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen. — VEEL SUCCES!

---

1. Bepaal de driedubbelintegraal $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+6z\right) dV$ met Ω het gebied binnen de paraboloïde $z = 25-x^2-y^2$, de cylinder $x^2+y^2=4$ en boven het XY–vlak.

2. Zij S het gedeelte van het vlak $z = 4-x-2y$ begrensd door de drie coördinaatvlakken, met uitwendige normaal naar boven. De driehoek die gevormd wordt door de drie randen van de driehoek, doorlopen in tegenwijzerzin van boven uit bekeken, noemen we α. Bereken over deze driehoek $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{F}\cdot d\alpha$ met $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,-xy)$

3. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:
$$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) - z(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases}$$

4. Bereken de Laplace–getransformeerde van $\sin^3 t$

5. Beschouw een fysische staaf die van de omgeving geïsoleerd is met lengte l. We veronderstellen dat op een begintijdstip $t=0$ tegen de *gehele* staaf een warmtebron met hoge temperatuur ψ_0 wordt aangedrukt. Het proces waarmee de temperatuur zich voortplant in de staaf in functie van de tijd noemen we een *diffusievergelijking.* Deze wordt gegeven door
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$
waarbij $\psi = \psi(x,t)$ de warmte op de staaf is op plaats $x \in [0,l]$ en tijdstip $t \geq 0$ heeft. De randvoorwaarden zijn dan de zogenaamde *Dirichelet–voorwaarden*
$$\forall t \geq 0 : \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$$
wat erop neerkomt dat de staaf perfect geïsoleerd is, d.w.z. de eindpunten van de staaf zitten in een absoluut perfect gekoelde houder waarin de temperatuur nul blijft. De beginvoorwaarde is gegeven door de constante functie
$$\psi(x,0) = f(x) = \psi_0$$
Gebruik de methode voor scheiding van veranderlijken om ψ te berekenen.

Oplossingen

1. Bepaal de driedubbelintegraal $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+6z\right) dV$ met Ω het gebied binnen de paraboloïde $z = 25 - x^2 - y^2$, de cylinder $x^2+y^2=4$ en boven het $XY-$vlak.

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2+6z\right) dV = \iint\limits_{S} \int\limits_{0}^{25-x^2-y^2} \left(x^2+y^2+6z\right) dzdS$$

met S de cirkel met straal 2

$$\begin{aligned} &= \iint\limits_{S} \int\limits_{0}^{25-x^2-y^2} \left(x^2+y^2+6z\right) dzdS = \iint\limits_{S} \left[x^2z+y^2z+3z^2\right]_0^{25-x^2-y^2} dS \\ &= \iint\limits_{S} \left(-125x^2+2x^4+4x^2y^2-125y^2+2y^4+1875\right) dS \end{aligned}$$

In poolcoördinaten:

$$\begin{aligned} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \left(-125r^2+2r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)+4r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+1875\right) rdrd\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \left(2r^4-125r^2+1875\right) rdrd\theta = \int\limits_0^{2} \left(2r^5-125r^3+1875r\right) dr \int\limits_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{3}r^6 - \frac{125}{4}r^4 + \frac{1875}{2}r^2\right]_0^2 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{9814}{3}\cdot 2\pi = \frac{19\,628}{3}\pi \end{aligned}$$

2. Zij S het gedeelte van het vlak $z = 4-x-2y$ begrensd door de drie coördinaatvlakken, met uitwendige normaal naar boven. De driehoek die gevormd wordt door de drie randen van de driehoek, doorlopen in tegenwijzerzin van boven uit bekeken, noemen we α. Bereken over deze driehoek $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{F}\cdot d\alpha$ met

$\mathbf{F}(x,y,z) = (y, z, -xy)$
Zij $\varphi(x,y) = (x, y, 4-x-2y)$. Dan is

$$\eta = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en dus is wegens de stelling van Stokes

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & -xy \end{vmatrix} = (-x-1, y, -1)$$

en dus

$$
\begin{aligned}
\oint_{\alpha} \mathbf{F}\cdot d\alpha &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\eta dydx = \int_0^4\int_0^{2-\frac{1}{2}x}(-x-1,y,-1)\cdot(1,2,1)\,dydx \\
&= \int_0^4\int_0^{2-\frac{1}{2}x}(-x+2y-2)\,dydx \\
&= \int_0^4\left[-2y-xy+y^2\right]_0^{2-\frac{1}{2}x}dx = \int_0^4\left(-3x+\frac{3}{4}x^2\right)dx \\
&= \left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3\right]_0^4 = -8
\end{aligned}
$$

3. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$
\begin{cases}
x'(t) = -2y(t) + z(t) \\
y'(t) = x(t) + 3y(t) - z(t) \\
z'(t) = z(t)
\end{cases}
$$

De karakteristieke vergelijking is

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0
\end{aligned}
$$

De bijhorende eigenruimten zijn

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+2y-z=0, \text{ bvb. } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
E_2 &: \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ bvb.} V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

De oplossing is dus

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

4. Bereken de Laplace–getransformeerde van $\sin^3 t$
$\mathcal{L}\left[\sin^3 t\right] = \frac{1}{z}\left(\mathcal{L}\left[3\sin^2 t\cos tdt\right]\right)$

$$
\text{want } \int_0^z 3\sin^2 t\cos tdt = \sin^3 z
$$

$$= \frac{1}{z^2}\mathcal{L}\left[9\sin t\cos^2 t - 3\sin t\right]$$

$$\text{want} \int_0^z \left(9\sin t\cos^2 t - 3\sin t\right) dt = 3\cos z\sin^2 z$$

$$= \frac{1}{z^2}\mathcal{L}\left[9\sin t\left(1-\sin^2 t\right) - 3\sin t\right] = \frac{1}{z^2}\mathcal{L}\left[6\sin t - 9\sin^3 t\right]$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{9}{z^2}\right)\mathcal{L}\left[\sin^3 t\right] = \frac{1}{z^2}\mathcal{L}\left[6\sin t\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z^2+9}{z^2}\right)\mathcal{L}\left[\sin^3 t\right] = \frac{6}{z^2\left(z^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\sin^3 t\right] = \frac{6}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+9\right)} \text{ met } \Re(z) > 0$$

5. Beschouw een fysische staaf die van de omgeving geïsoleerd is met lengte l. We veronderstellen dat op een begintijdstip $t = 0$ tegen de *gehele* staaf een warmtebron met hoge temperatuur ψ_0 wordt aangedrukt. Het proces waarmee de temperatuur zich voortplant in de staaf in functie van de tijd noemen we een *diffusievergelijking*. Deze wordt gegeven door

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

waarbij $\psi = \psi(x,t)$ de warmte op de staaf is op plaats $x \in [0,l]$ en tijdstip $t \geq 0$ heeft. De randvoorwaarden zijn dan de zogenaamde *Dirichelet–voorwaarden*

$$\forall t \geq 0 : \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$$

wat erop neerkomt dat de staaf perfect geïsoleerd is, d.w.z. de eindpunten van de staaf zitten in een absoluut perfect gekoelde houder waarin de temperatuur nul blijft. De beginvoorwaarde is gegeven door de constante functie

$$\psi(x,0) = f(x) = \psi_0$$

Gebruik de methode voor scheiding van veranderlijken om ψ te berekenen.
Oplossing: Laten we als Ansatz aannemen dat in de functie ψ de veranderlijken kunnen worden gescheiden; met andere woorden dat

$$\psi(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

In dat geval kunnen we deze invullen in de vergelijking, en krijgen we na deling door XT

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{k}\frac{T^{\cdot}}{T} = 0$$

waarbij we ruimtelijke afgeleiden met $'$ noteren en tijdsafgeleiden met $\cdot$. Dan krijgen we dat beide termen afzonderlijk constant moeten zijn:

$$\begin{cases} X'' = -\alpha^2 X \\ T^{\cdot} = -\alpha^2 kT \end{cases}$$

De randvoorwaarden worden voor X dat $X(0) = X(l) = 0$. De beginvoorwaarde kunnen we pas in aanmerking nemen bij het beschouwen van het restprobleem. Het X–probleem is dus als volgt gesteld:

$$\begin{cases} X'' = -\alpha^2 X \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Als $\alpha \neq 0$ is dit een gewone differentiaalvergelijking van tweede orde met als oplossing

$$X = C_1\cos(\alpha x) + C_2\sin(\alpha x)$$

De randvoorwaarden geven aanleiding tot de betrekkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\alpha l) = 0 \end{array} \right.$$

Indien we aannemen dat de oplossing niet–triviaal is, t.t.z. dat $C_2 \neq 0$ (anders hebben we enkel de nulfunctie), dan kan deze alleen maar bestaan als $\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ met $n \in \mathbb{Z}$. We vinden dus als eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ en } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Aangezien we voor n en $-n$ tegengestelde oplossing krijgen, en het minteken eventueel; in de constante kan worden geïncorporeerd, mogen we zonder verlies van algemeenheid de index $n \in \mathbb{N}$ nemen. Als $\alpha = 0$ krijgen we de constante nulfunctie als oplossing, hetgeen uiteraard niet in overeenstemming is met de beginvoorwaarde (echter wel een evenwichtsvoorwaarde is — duh!) Laat ons nu het resterende T–probleem beschouwen. Met elke oplossing X_n van het eigenwaardeprobleem voor X komt er een vergelijking overeen van de vorm

$$T^{\cdot} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kT$$

Deze vergelijking heeft als oplossing

$$T = C_3 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}$$

Uitgaande van de Ansatz vinden we dus een parameterstel oplossingen

$$\psi_n(x,t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

die voldoen aan de homogene rand–en beginvoorwaarden, maar niet aan de inhomogene beginvoorwaarde. Uit de lineariteit van de differentiaaloperatoren weten we dat een superpositie van dergelijke oplossingen nog steeds aan de homogene randvoorwaarden zal voldoen. Stel dus

$$\psi = \sum_{n=01}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

dan moeten we op zoek naar de coëfficiënten $(c_n)_n$ zodanig dat ψ ook voldoet aan de inhomogene randvoorwaarde. We willen dus dat

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

Laten we aannemen dat deze reeks uniform convergent is, dan kunnen we de beide leden achtereenvolgens vermenigvuldigen met $\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ en integreren op het interval $[0,l]$. In dergelijk geval mogen we de som en de integraal verwisselen, en krijgen we

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx$$

Nu is

$$I = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\right) dx$$

Als $m \neq n$, dan is deze integraal gelijk aan

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(m-n)\,\pi}\sin\frac{(m-n)\,\pi x}{l} - \frac{l}{(m+n)\,\pi}\sin\frac{(m+n)\,\pi x}{l}\right]_0^l \\ &= \frac{l}{2\,(m-n)\,\pi}\sin\frac{(m-n)\,\pi l}{l} - \frac{l}{2\,(m+n)\,\pi}\sin\frac{(m+n)\,\pi l}{l} = 0 \end{aligned}$$

Als daarentegen $m = n$, dan is

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\cos 0 + \cos\frac{2m\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \sin\frac{2m\pi x}{l}\right]_0^l = \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Bijgevolg is dus $I = \delta_{mn}\dfrac{l}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{l}{2}\delta_{m,n} = c_m\frac{l}{2}$$

Dus is

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{2\psi_0}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ &= -\frac{2\psi_0}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_0^l \\ &= -\frac{2\psi_0}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right]_0^l = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \\ \dfrac{4\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

Samengevat is

$$c_{2n+1} = \frac{4\psi_0}{(2n+1)\,\pi}$$

De oplossing is dus

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}\psi_{2n+1} = \frac{4\psi_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\,\pi}{l}x\right)}{2n+1}$$