Examen Wiskunde Oefeningen REEKS B

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2010–2011

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Bereken quotiënt en rest bij de volgende deling: $\dfrac{iz^3 + z - i}{-iz^2 + 3z - 2}$ door gebruik te maken van een staartdeling.

/6

2. Geef alle oplossingen van de vergelijking $(z+i)^6 = -64$

/5

3. Toon aan dat $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ voortbrengend is voor $\mathbb{R}^{2\times 2}$

/5

4. Bepaal de inverse van de volgende matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

/6

5. Zoek a zodanig dat de volgende twee rechten in $\mathbb{R}^3$ coplanair zijn, bepaal het vlak waar ze in liggen en hun snijpunt.

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } B : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

/5

6. Bereken van de volgende lineaire transformatie beeld, kern, rang en nulgetal: $T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

/6

7. Bereken de volgende limieten zonder de regel van de l'Hôpital

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

(b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos^2 x - \cos x - 2}{\cos 2x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt{x}}{x^{-1/2}}$

/6

8. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3 \cdot 9^{x} - 11 \cdot 3^{x+1} + 72 = 0$$

/6

9. Bereken de afgeleide van $f\left(x\right) = 3^{x} \cdot \left(\sin x\right)^{x^{2}}$

/6

10. Geef een volledig functieonderzoek tot en met een tekening van de poolkromme $r(\theta) = 1 + \cos 2\theta + 2\cos\theta$

/7

11. Bereken $\int e^{2x} \cos \frac{3x}{2} dx$

/6

12. Bereken $\int \frac{x-3}{1+\sqrt{x+2}} dx$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Bereken quotiënt en rest bij de volgende deling: $\dfrac{iz^3+z-i}{-iz^2+3z-2}$ door gebruik te maken van een staartdeling.

$$\begin{array}{llll|lll}
iz^3 & & z & -i & -iz^2 & +3z & -2 \\ \cline{5-7}
-(iz^3 & -3z^2 & +2z) & & -z & +3i & \\ \cline{1-3}
 & 3z^2 & -z & -i & & & \\
 & -(3z^2 & +9iz & -6i) & & & \\ \cline{2-4}
 & & -(1+9i)\,z & +5i & & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q(z) = -z+3i \\ R(z) = -(1+9i)\,z+5i \end{cases}$$

2. Geef alle oplossingen van de vergelijking $(z+i)^6 = -64$

Stel $z+i = w \Rightarrow w^6 = -64 = 64\,\text{cis}\,(\pi + k2\pi)$

$$\Rightarrow w_k = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i \\ w_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\ w_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i \\ w_3 = 2\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i \\ w_4 = 2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \\ w_5 = 2\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i \end{cases}$$

$$z = w - i \Rightarrow \begin{cases} w_0 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \\ w_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \\ w_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \\ w_3 = 2\,\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-2i \\ w_4 = 2\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3i \\ w_5 = 2\,\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-2i \end{cases}$$

3. Toon aan dat $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&3\\3&0\end{pmatrix}\right\}$ voortbrengend is voor $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2\gamma\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+3\delta\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta+3\delta & \alpha+2\beta+2\gamma+3\delta \\ \alpha+3\beta+2\gamma+3\delta & \alpha+4\beta+2\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+3\delta = a \\ \alpha+2\beta+2\gamma+3\delta = b \\ \alpha+3\beta+2\gamma+3\delta = c \\ \alpha+4\beta+2\gamma = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+3\delta = a \\ \beta+2\gamma = b-a \\ 2\beta+2\gamma = c-a \\ 3\beta+2\gamma-3\delta = d-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+3\delta = a \\ \beta+2\gamma = b-a \\ \beta = c-b \\ \beta-3\delta = d-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = c-b \\ 3\delta = \beta+c-d = -b+2c-d \\ \alpha = a-\beta-3\delta = a+2b-3c+d \\ 2\gamma = b-a-\beta = -a+2b-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = a+2b-3c+d \\ \beta = -b+c \\ \gamma = \dfrac{-a+2b-c}{2} \\ \delta = \dfrac{-b+2c-d}{3} \end{cases}$$

De oplossing kan echter veel korter door in te zien dat de vier ook lineair onafhankelijk zijn. Hiervoor volstaat het te bewijzen dat $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

4. Bepaal de inverse van de volgende matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

$\det T = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}^{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -5 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}^{ad} = \begin{pmatrix} -16 & 28 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & 17 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 14 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & \frac{17}{2} & 3 \end{pmatrix}$

5. Zoek a zodanig dat de volgende twee rechten in $\mathbb{R}^3$ coplanair zijn, bepaal het vlak waar ze in liggen en hun snijpunt.

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } B : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eis dat ze coplanair zijn: $\begin{vmatrix} -7-a & -9 & a+9 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 48 - 12a = 0 \Rightarrow a = 4$

Vlak: $\begin{vmatrix} x+7 & y+9 & z-4 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow .15x - 14y + 3z - 33 = 0$

Snijpunt: $\begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -7 + 3\lambda = 4 - \mu \\ -9 + 3\lambda = 0 \\ 4 - \lambda = -9 + 5\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow (2, 0, 1)$

6. Bereken van de volgende lineaire transformatie beeld, kern, rang en nulgetal: $T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

- $\det T = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$ en de rijen zijn niet alledrie lineair afhankelijk $\Rightarrow \operatorname{rg} T = 2$ en $\operatorname{ng} T = 1$

- $\operatorname{Im} T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + y - z = 0$
- $\operatorname{Ker} T : \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - z = 0 \\ -3x + 5y + 2z = 0 \\ x + 7y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (-24, -4, -26) \sim (12, 2, 13) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

7. Bereken de volgende limieten zonder de regel van de l'Hôpital

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)^2}{(x-2)^2 (x+3)}$

		-3		2		3	
T	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$0^{(2)}$	$+$
N	$-$	0	$+$	$0^{(2)}$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert^{(3)}$	$+$	0	$+$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^2 x - \cos x - 2}{\cos 2x - 1} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(\cos x + 1)(\cos x - 2)}{-2 \sin^2 x} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(\cos x + 1)(\cos x - 2)}{2(\cos^2 x - 1)}$

$= \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{(\cos x + 1)(\cos x - 2)}{2(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x - 2}{2(\cos x - 1)} = \dfrac{3}{4}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt{x}}{x^{-1/2}}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt{x}}{x^{-1/2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[4]{x^2 - x} + \sqrt{x}\right)}{x^{-1/2}\left(\sqrt[4]{x^2 - x} + \sqrt{x}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x(x-1)} - x}{x^{-1/2}\left(\sqrt[4]{x^2 - x} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x(x-1)} - x\right)\left(\sqrt{x(x-1)} + x\right)}{x^{-1/2}\left(\sqrt[4]{x^2 - x} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x(x-1)} + x\right)}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^{3/2}}{\left(\sqrt[4]{x^2 - x} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x(x-1)} + x\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^{3/2}}{\left(\sqrt[4]{x^2} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x^2} + x\right)} = -\dfrac{1}{4}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - x} - \sqrt{x}}{x^{-1/2}}$ bestaat niet

8. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x+1} + 72 = 0$$

$\Leftrightarrow 3^{2x+1} - 11 \cdot 3^{x+1} + 72 = 0$
Stel $y = 3^x \Leftrightarrow 3y^2 - 33y + 72 = 0$
$\Leftrightarrow y^2 - 11y + 24 = 0$
$\Rightarrow y \in \{3, 8\}$
$\Rightarrow x \in \left\{1, \dfrac{\ln 8}{\ln 3}\right\}$

9. Bereken de afgeleide van $f\left(x\right)=3^{x}\cdot\left(\sin x\right)^{x^{2}}$

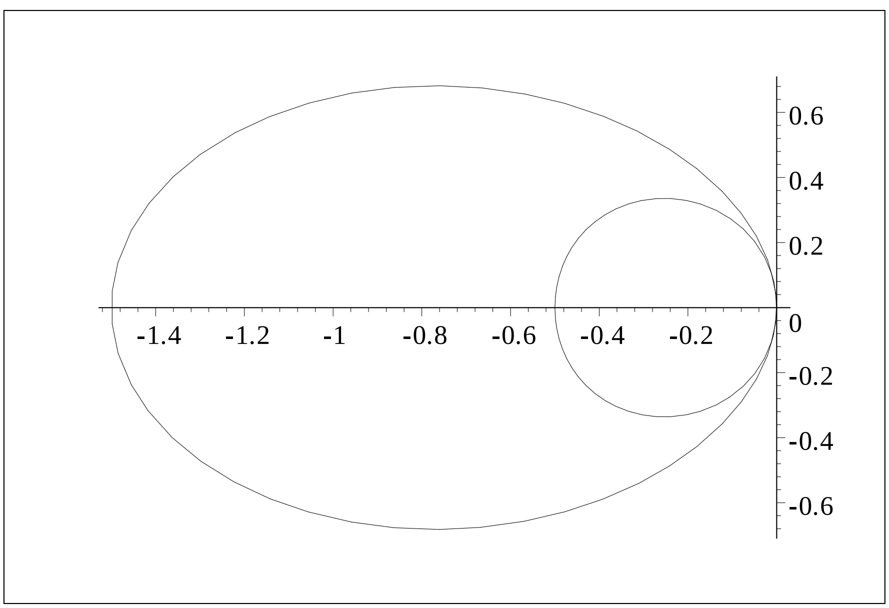
$$\frac{d}{dx}\left(3^{x}\cdot\left(\sin x\right)^{x^{2}}\right)=3^{x}\cdot\ln 3\cdot\left(\sin x\right)^{x^{2}}+3^{x}\cdot x^{2}\left(\sin x\right)^{x^{2}-1}\cos x+3^{x}\cdot\left(\sin x\right)^{x^{2}}\cdot 2x\cdot\ln\left|\sin x\right|$$

10. Geef een volledig functieonderzoek tot en met een tekening van de poolkromme $r\left(\theta\right)=1+\cos 2\theta+2\cos\theta$

- Domein $=\mathbb{R}$, periode $=2\pi\Rightarrow$ Beperkt domein $\left[0,2\pi\right]$
- Nulpunten: $1+\cos 2\theta+2\cos\theta=0$
  $\Leftrightarrow 1+2\cos^{2}\theta-1+2\cos\theta=0$
  $\Leftrightarrow 2\cos^{2}\theta+4\cos\theta=0$
  $\Leftrightarrow 2\left(\cos\theta\right)\left(\cos\theta+1\right)=0$
  $\Rightarrow\theta\in\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\right\}$
- $r'\left(\theta\right)=\frac{d}{d\theta}\left(1+\cos 2\theta+2\cos\theta\right)=-4\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta=-2\left(\sin\theta\right)\left(2\cos\theta+1\right)=0$
  $\Rightarrow\theta\in\left\{0,\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4}{3}\pi,2\pi\right\}$
- Tekenverloop:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$r\left(\theta\right)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'\left(\theta\right)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$r\left(\theta\right)$	$M\left(4\right)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m\left(\frac{-1}{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$m\left(\frac{-1}{2}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$M\left(4\right)$

- Grafiek:



11. Bereken $\int e^{2x}\cos\frac{3x}{2}dx$

$$\left\{\begin{array}{l}u=\cos\frac{3x}{2}\\dv=e^{2x}dx\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}du=-\frac{3}{2}\sin\frac{3x}{2}dx\\v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos\frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\int e^{2x}\sin\frac{3x}{2}dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \sin\frac{3x}{2} \\ dv = e^{2x}dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = \frac{3}{2}\cos\frac{3x}{2}dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}e^{2x}\cos\frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin\frac{3x}{2} - \frac{3}{4}\int e^{2x}\cos\frac{3x}{2}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\cos\frac{3x}{2} + \frac{3}{8}e^{2x}\sin\frac{3x}{2} - \frac{9}{16}\int e^{2x}\cos\frac{3x}{2}dx \\
&\Rightarrow \frac{25}{16}I = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos\frac{3x}{2} + \frac{3}{8}e^{2x}\sin\frac{3x}{2}\right) + c \\
&\Rightarrow I = \frac{8}{25}e^{2x}\cos\frac{3x}{2} + \frac{6}{25}e^{2x}\sin\frac{3x}{2} + c
\end{aligned}$$

12. Bereken $\int \frac{x-3}{1+\sqrt{x+2}}dx$
    Stel

$$\begin{aligned}
1+\sqrt{x+2} &= t \\
&\Rightarrow \sqrt{x+2} = t-1 \\
&\Rightarrow x+2 = (t-1)^2 \\
&\Rightarrow x = (t-1)^2 - 2 = t^2 - 2t - 1 \\
&\Rightarrow dx = (2t-2)\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\left(t^2-2t-1\right)-3}{t}(2t-2)\,dt = \int \left(2t^2 - 6t - 4 + \frac{8}{t}\right)dt = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 - 4t + 8\ln|t| + c \\
&= \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x+2}\right)^3 - 3\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2 - 4\left(1+\sqrt{x+2}\right) + 8\ln\left|1+\sqrt{x+2}\right| + c
\end{aligned}$$