Mechanica : kinematica, dynamica en statica

De studie van de mechanica wordt traditioneel ingedeeld in 3 gebieden : de kinematica, de dynamica en de statica.
Binnen de **kinematica** onderzoeken we de beweging van voorwerpen (snelheid, versnelling, ...) zonder ons af te vragen wat die beweging veroorzaakt. Dit laatste wordt dan onderzocht binnen de **dynamica**. We zullen zien dat de beweging wordt veroorzaakt door de **krachten** die inwerken op een voorwerp. De studie van voorwerpen in evenwicht wordt de **statica** genoemd.

I Kinematica in één dimensie

In hoofdstukken 2 - 7 wordt voornamelijk de beweging van een **massapunt** bestudeerd. Dit is een wiskundig concept : het is een deeltje dat geen afmetingen heeft (een 'punt') maar wel een massa. In vele gevallen kunnen we , althans wat de translatiebeweging betreft, reële voorwerpen benaderen door een massapunt. We zullen later zien dat bij de beweging van reële voorwerpen er een speciaal punt is, het "massamiddelpunt", dat zich gedraagt als een massapunt. We kunnen een reëel voorwerp ook beschouwen als zijnde samengesteld uit een "groot" aantal massapunten.
De eenvoudigste beweging is deze die in één dimensie plaatsvindt. Om de beweging te beschrijven voeren we meestal een X-as in. De positie van een massapunt wordt dan weergegeven door een coordinaat x. Wanneer een deeltje beweegt dan is x een functie van de tijd : x = x(t).
Wanneer een massapunt vertrekt op $t = t_i$ in x_i en aankomt in x_f op $t = t_f$ dan definiëren we de gemiddelde snelheid als :

$$v_{av} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Dit geeft slechts een gemiddeld beeld van de beweging : deeltje beweegt soms traag, soms snel. In feite willen we de snelheid op elk moment kennen. Die kunnen we terugvinden door het tijdsinterval $\Delta t = t_f - t_i$ waarbinnen we de snelheid willen kennen steeds korter maken : de snelheid kan dan niet veel veranderen. Deze procedure wordt exact in de limiet $\Delta t \to 0$, dan ook : $\Delta x = x_f - x_i \to 0$. De ogenblikkelijke snelheid in een punt van de baan wordt dan gedefinieerd als :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

i.e. de afgeleide van de functie x (t) naar t.
Die snelheid kan natuurlijk veranderen tijdens de beweging van het massapunt m.a.w. ze is in het algemeen terug een functie van de tijd : v = v(t). De mate waarin de snelheid verandert, wordt gegeven door de ogenblikkelijke versnelling a, gedefinieerd als :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

De gemiddelde versnelling over een tijdsinterval Δt wordt gedefinieerd als :

$$a_{av} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

De eenheid van snelheid is meter/seconde (m/s) en van versnelling is m/s^2.

Uit de wiskunde weten we dat de afgeleide van een functie in een punt de richtingscoëfficiënt ("helling") van de raaklijn in dit punt geeft. De snelheid geeft dus ook de helling van de raaklijn in een (x,t) grafiek voor een één-dimensionale beweging.

Belangrijk voor het volgende hoofdstuk is het begrip gemiddelde vaart (Eng. "**speed**") . In het engels maakt men een onderscheid tussen "velocity" en "speed" . In het nederlands kent met dit verschil niet. Wij zullen (soms) spreken over "vaart" in de cursus.

Om de gemiddelde vaart te berekenen kijkt men naar de **totale** afgelegde weg Δs (niet noodzakelijk gelijk aan $\Delta x = x_f - x_i$). vaart = Δs/Δt. De gemiddelde vaart is steeds positief, daar waar de gem. of ogenblikkelijke snelheid < 0 of > 0 kan zijn, immers Δs is altijd positief ! Wanneer $\Delta t \to 0$ dan gaat de afgelegde weg Δs ook naar nul. Maar in tegenstelling tot Δx blijft die steeds positief (Δs is maatgetal van de afgelegde weg). De snelheid heeft een teken : +/- al naargelang het massapunt zich in de positieve of negatieve richting beweegt langs de X-as maw. of x_f groter/kleiner is dan x_i. De ogenblikkelijke vaart : $v_{speed} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$

De ogenblikkelijke vaart is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid maw. de absolute waarde van de ogenblikkelijke snelheid. Dit volgt uit het feit dat voor $\Delta t \to 0$: $\Delta s = |\Delta x|$ maw. $ds = |dx|$ en dus $v_{speed} = |v|$.

II Kinematica in 2 en 3 dimensies

Meestal beweegt een voorwerp niet langs een rechte lijn, maar in de 3-dim. ruimte of in een plat vlak (i.e. 2 dim.) . De wiskundige beschrijving van de beweging in 2 of 3 dimensies is niet essentieel verschillend van deze in 1 dim.

De positie v/e massapunt wordt nu gespecifieerd door een vector : de plaatsvector $\vec{r}$, die uiteraard een functie van de tijd kan zijn. In een carthesisch assenkruis wordt de plaatsvector weergegeven door 3 componenten x, y, z : de coördinaten van het massapunt. In het algemeen : x = x (t), y = y (t) , z = z (t).

We kunnen weer een gemiddelde en een ogenblikkelijke snelheid en versnelling definiëren. Allen zijn nu vectoren. Voor de (ogenblikkelijke) snelheids- en versnellingsvector krijgen we :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Deze definities zijn elk equivalent met 3 scalaire definities. Men heeft bv. voor de snelheid :

$$v_x = dx/dt \,;\, v_y = dy/dt \,;\, v_z = dz/dt$$

De (ogenblikkelijke) snelheidsvector is steeds **rakend** ("**tangentiëel**") aan de baan die het deeltje volgt.

Voor de versnelling is de situatie lichtjes anders. Deze ligt niet noodzakelijk langs de raaklijn aan de baan. Maar welke richting ze ook heeft, men kan altijd "lokaal" i.e. in het punt waar men de versnelling berekent altijd een cirkel tekenen (de "best passende" cirkel) die raakt aan de baan. In het vlak van de cirkel kan men dan de versnellingsvector ontbinden in 2 vectoren waarvan er één langs de raaklijn aan de baan ligt en één in een richting **loodrecht** op deze tangentiële richting en gericht naar het middelpunt van die cirkel : de **centripetale** richting, m.a.w.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \,; a_t = |\vec{a}_t| = dv/dt \,;\, a_c = |\vec{a}_c| = v^2/r\,.$$

Zoals voor elke vector wordt de grootte van de versnelling en de snelheid gegeven door :

$$v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Het feit dat de versnelling een vector is, geeft aan dat we zowel een versnelling hebben als de grootte van de snelheid verandert (bv. van 3 m/s naar 4 m/s) , als wanneer de richting van de snelheid verandert. In het geval van een rechtlijnige beweging kan enkel de grootte veranderen. Bij een kromlijnige beweging kunnen beide veranderen, hoewel de grootte niet hoeft te veranderen (nl. als de auto steeds tegen dezelfde "speed" rijdt bv. 50 km/h).

Naast de gemiddelde en ogenblikkelijke snelheid heeft men ook de gemiddelde en ogenblikkelijke vaart ("speed"). De gemiddelde vaart wordt nog steeds gedef. als de verhouding van de totale weg die wordt afgelegd tot de tijd die hiervoor nodig is : $v_{av,speed} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

De ogenblikkelijke vaart : $v_{speed} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. Zowel de gemiddelde als de ogenblikkelijke vaart zijn steeds positief vermits Δs steeds positief is. Merk op dat i.h.a. $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}|$. Δs is de totale weg afgelegd langs een (gekromde) baan en $|\Delta\vec{r}|$ is de grootte van de vector $\Delta\vec{r}$ wat niet noodzakelijk hetzelfde is. Beide worden wel gelijk in de limiet $\Delta t \to 0$: het verschil wordt dan verwaarloosbaar klein, $ds = |d\vec{r}|$. De *speed* geeft dus de **grootte** van de *velocity* :

$$v_{speed} = \frac{ds}{dt} = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = |\vec{v}| = v$$

Indien de versnelling constant of nul is dan kunnen we de baan van het deeltje gemakkelijk terugvinden. Als we ons beperken tot de situatie in 1 dimensie :

$$a = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = v_0 \; (= cte) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx' = \int_{0}^{t} v_0 dt' \Rightarrow x = x_0 + v_0 t$$

$$a = cte \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\, t^2$$

Een belangrijk voorbeeld waarbij de versnelling constant is, is de valbeweging van alle voorwerpen op aarde. Wanneer men voorwerpen laat vallen, dan blijken zij dezelfde versnelling te ondergaan: de valversnelling $\vec{g}$. Welke kracht is verantwoordelijk voor deze versnelling ? De aantrekkingskracht van de aarde ! Deze kracht wordt gegeven door: $\vec{F} = -G \frac{m_E m}{r^2} \hat{r}$ waarbij m, m_E, r respectievelijk de massa van het voorwerp, de massa van de aarde en de afstand tussen (de centra van) aarde en voorwerp zijn. $\hat{r}$ is de eenheidsvector langs de verbindingslijn tussen enerzijds het centrum van aarde en anderzijds het centrum van het voorwerp in de richting van de aarde naar het voorwerp (zie ook verder).

Projectielbeweging

Indien men de versnelling kent als functie van de tijd dan kan men in principe de baan $\vec{r} = \vec{r}(t)$ terugvinden door integratie. In het geval van een *constante* versnelling wordt dit eenvoudig. Een belangrijk voorbeeld van een constante versnelling vindt men voor voorwerpen die onder invloed van de zwaartekracht (aantrekkingskracht van de aarde) naar beneden vallen. Dicht bij het aardoppervlak is de aantrekkingskracht van de aarde bij benadering constant. Alle voorwerpen ondergaan dezelfde constante versnelling die we als g noteren.

Onderstel dat massapunt een beginsnelheid heeft $\vec{v}_0$ en vertrekt vanuit een punt P (x_0, y_0) dan vinden we :

$$a_x = 0\,;\, a_y = -g \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0,x} t \\ y = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Hierbij hebben we het assenkruis zo gekozen dat Y-as naar boven wijst. $a_x = 0$ omdat er geen kracht in de x-richting werkt op het deeltje ! (zwaartekracht is immers gericht volgens de Y-richting).

III Dynamica

Indien we de versnelling kennen op elk moment i.e. $\vec{a}$ als functie van de tijd dan kunnen we de baan terugvinden. De vraag is nu : wat veroorzaakt een versnelling van een voorwerp ?
Het antwoord is : de krachten die inwerken op dit voorwerp.

1ste wet van Newton : een voorwerp dat in rust is blijft in rust als er geen externe kracht op inwerkt. Een voorwerp dat beweegt volgens een rechte lijn en waar geen rechte externe kracht op inwerkt, blijft bewegen met die snelheid volgens een rechte lijn. In feite is er geen onderscheid tussen “in rust” en “bewegen met cte snelheid volgens een rechte baan”.

2de wet van Newton :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

waarbij $\vec{F}$ de totale kracht (of netto kracht) is die inwerkt op het deeltje dat een versnelling $\vec{a}$ ondergaat. Niet alle deeltjes krijgen onder invloed van eenzelfde kracht dezelfde versnelling. De grootheid die uitdrukt hoe moeilijk het is om met een gegeven kracht een deeltje te versnellen, wordt de **massa** genoemd, symbool : m. Deze vergelijking is in feite een differentiaalvergelijking voor de baan v/e deeltje. Indien we op ieder tijdstip de kracht op het deeltje kennen, dan kunnen we in principe deze vergelijking oplossen (eventueel numeriek) en de baan bekomen : $\vec{r} = \vec{r}(t)$
Om de wet van Newton te gebruiken projecteert men die beter langs de X, Y en Z as :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \quad ; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad ; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

Indien een deeltje een gekromde baan wil beschrijven dan moeten de inwerkende krachten op het deeltje voor een componente zorgen in de centripetale richting. Men spreekt dan over de **centripetale** kracht F_{cp}. Dit is geen nieuwe kracht, maar de componente van de totale kracht in de centripetale richting. Voor deze componente geldt :

$m\frac{v^2}{r} = F_{cp}$ waarbij r de straal is van de cirkel die op die plaats beschreven wordt.

3de wet van Newton : Indien een deeltje “1” een kracht $\vec{F}_{21}$ uitoefend op een deeltje “2” , dan oefent dit tweede deeltje een even grote maar tegengestelde kracht $\vec{F}_{12}$ uit op het eerste deeltje :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

De eerste en de derde wet van Newton kunnen worden afgeleid uit de tweede wet.

IV Arbeid

De arbeid geleverd door een kracht om een deeltje van punt P_1 naar punt P_2 te verplaatsen via een bepaalde weg, wordt gegeven door :

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

waarbij deze integraal staat voor de lijnintegraal (in 3-dimensies). Je moet in feite het scalair produkt van $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ berekenen in elk punt v/h gevolgde pad en dat sommeren (integraal is in feite een “speciaal soort” som).

In 1-dim. wordt dit natuurlijk eenvoudiger : lijnintegraal wordt dan een “gewone” 1-dim. integraal. We krijgen dan (we nemen de beweging langs de X-as) :

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x\, dx \Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx$$

Indien de kracht constant is dan vereenvoudigt zich de uitdrukking voor arbeid ook : de kracht kan dan voor het integraalteken gebracht worden. In 3-dim. :

$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$ waarbij $\vec{\ell}$ staat voor de verplaatsing (i.e. $\vec{\ell} \equiv \Delta\vec{r}$) en in 1-dim. wordt dit : $W = F_x \Delta x$.

Arbeid-Kinetische energie theorema

Wanneer er een **netto** kracht inwerkt op een deeltje dan hebben we steeds :

$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{net} \cdot d\vec{\ell} = K_2 - K_1 = \Delta K \quad ; \quad K \equiv \frac{1}{2} m v^2$ waarbij K de **kinetische energie** van het deeltje wordt genoemd.

Conservatieve krachten

In principe hangt de arbeid die geleverd wordt door een kracht niet enkel af van begin- en eindpunt maar ook van de gevolgde weg. De krachten waar de geleverde arbeid enkel van begin- en eindpunt afhangt en niet van de gevolgde weg noemt men **conservatieve** krachten. Dit is equivalent met te zeggen dat wanneer men een gesloten pad beschouwt deze integraal nul moet zijn immers hij hangt enkel af van begin- en eindpunt, maar deze vallen samen voor een gesloten pad. Voor een conservatieve kracht heeft men dus :

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$ waar C staan voor het gesloten pad dat gevolgd wordt. Het feit dat de lijnintegraal moet berekend worden over een gesloten pad wordt weergegeven door het cirkeltje in het integraalteken.

Potentiële energie

Vermits de arbeid geleverd door een conservatieve kracht enkel van begin- en eindpunt afhangt kunnen we deze schrijven in termen van een nieuwe functie, berekend in dit begin- en eindpunt. We noemen deze functie de **potentiële energie** en ze wordt gedefinieerd als :

$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = U_1 - U_2 = -\Delta U \quad ; \quad U_1 = U(\vec{r}_1) = U(x_1, y_1, z_1)$ en analoog voor U_2. U is een functie van de positie v/h deeltje.

Dit kan ook geschreven worden als (in differentiaalvorm) :

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

in 1-dim. wordt dit : $dU = -F_x\, dx \Rightarrow F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

In 3-dim. vindt men analoog :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Indien men de potentiële energie kent, dan kan men dus de kracht berekenen.

Systeem van deeltjes. Interne en externe krachten

Meestal beschouwen we in de fysica deeltjes die deel uitmaken van een ‘systeem’ van deeltjes. Zo kunnen we de gasatomen die opgesloten zitten in een vat beschouwen als een systeem. Het vat dat dan geen deel uitmaakt van het systeem, wordt als ‘extern’ beschouwd.

Op een bepaald (maar verder willekeurig gekozen) deeltje werken dan krachten in tgv. de andere atomen, deze noemen we **interne** krachten. Maar ook het vat (en de aarde, ...) oefenen een kracht uit op het deeltje. Deze noemen we **externe** krachten.

Theorema van arbeid en energie

$$W_{tot} = W_{ext} + W_{\text{int}} \quad ; \quad W_{\text{int}} = W_{\text{int},cons} + W_{\text{int},noncons}$$
$$W_{tot} = \Delta K \quad ; \quad W_{\text{int},cons} = -\Delta U$$
$$\Rightarrow W_{ext} + W_{\text{int},noncons} = \Delta K + \Delta U = \Delta(K + U)$$

W_{tot} is de totale arbeid geleverd door alle optredende krachten.

W_{ext} is de bijdrage van de externe krachten en W_{int} deze van de interne krachten. Deze laatste bijdrage splitsen we nog op in twee delen : deze van de conservatieve krachten $W_{int,cons}$ en deze van de niet-conservatieve krachten $W_{int,noncons}$.

Indien er geen interne niet-conservatieve krachten zijn dan : $W_{ext} = \Delta K + \Delta U$

en indien er geen externe krachten zijn :

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0$$

maw. de mechanische (=kinetische + potentiële) verandert niet : **de mechanische energie is een behouden grootheid**.

Dit principe blijkt algemener te zijn : de totale energie (inclusief warmte energie, chemische energie, ...) v/e systeem blijft behouden indien er geen arbeid op verricht wordt. Indien er wel een **externe** arbeid op verricht wordt dan krijgen we :

$$W_{ext} = \Delta E_{sys}$$

waarbij E_{sys} de totale energie v/h systeem is.

<u>Systeem in evenwicht</u>

(zie ook verder)

Een deeltje of een systeem van deeltjes is in evenwicht indien de nettokracht die inwerkt nul is :

$$\vec{F}_{net} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = 0$$

voor een 1-dim. systeem :

$F_{net} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$ maw de potentiële energie moet een extremum zijn (minimum, maximum of buigpunt).

We hebben een **stabiel** evenwicht in x = x_0 indien U een minimum is voor dat punt i.e.

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} > 0$$

Een labiel evenwicht indien U een maximum is in x_0 : $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} < 0$

Een onverschillig evenwicht indien U buigpunt heeft in x_0 : $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = 0$

<u>V De impuls van een deeltje</u>

De impuls v/e deeltje wordt gedefinieerd als $\vec{p} = m\vec{v}$

De tweede wet van Newton wordt dan :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{net}$$

Het is in deze vorm dat Newton zijn wet neerschreef. Op deze wijze geschreven blijft de 2de wet van Newton zelfs geldig binnen het kader van de speciale relativiteitstheorie. De uitdrukking voor de impuls wordt dan wel anders.

Massamiddelpunt van een systeem van deeltjes

De positie van het massamiddelpunt (cm) van een systeem van deeltjes wordt gedefinieerd als :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i$$ zijnde de totale massa.

Voor de snelheid en versnelling van het cm krijgen we dan :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i \quad ; \quad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$$

We kunnen dan schrijven :

$$M\,\vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,\mathrm{int}}) \quad ; \quad \sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{int}} = 0$$

$$\Rightarrow M\,\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = \vec{F}_{net,ext}$$

De som van alle interne krachten is nul, immers als deeltje 1 een kracht uitoefent op deeltje 2 dan oefent deeltje 2 een even grote maar tegengestelde kracht uit op deeltje 1.

Voor de totale impuls v/h systeem kunnen we dan schrijven :

$$\vec{P}_{sys} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i\,\vec{v}_i = M\,\vec{v}_{cm} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{sys}}{dt} = M\,\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{net,ext}$$

en dus indien er geen externe krachten inwerken op het systeem dan :

$$\frac{d\vec{P}_{sys}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{sys} = cte \Leftrightarrow \Delta\vec{P}_{sys} = 0$$ maw. de totale impuls blijft behouden.

d.w.z. dat de drie componenten van de impulsvector behouden blijven :

$$P_{sys,x} = cte \quad ; \quad P_{sys,y} = cte \quad ; \quad P_{sys,z} = cte \quad ;$$

Bij botsingen tussen deeltjes zijn de interne krachten zo groot dat we de externe krachten dikwijls in goede benadering kunnen verwaarlozen. We kunnen dan het behoud van impuls gebruiken bij het oplossen van botsingsproblemen.

Botsingen

In het algemeen onderscheid men twee types van botsingen : elastische en niet-elastische. Bij de elastische botsingen heeft men behoud van kinetische energie en bij de niet-elastische niet.
De kinetische energie van een systeem van deeltjes kan geschreven worden als :

$$K = K_{cm} + K_{rel} \quad ; \quad K_{cm} = \frac{1}{2} M \, v_{cm}^2 \quad ; \quad K_{rel} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, u_i^2$$

waarbij u_i de *relatieve* snelheid van het i-de deeltje tov. het massamiddelpunt voorstelt.
De eerste term is de kinetische energie van een deeltje met een massa gelijk aan de totale massa M v/h systeem : het is de kinetische energie v/h massamiddelpunt.

VI Impulsmoment van een deeltje

Het impulsmoment van een deeltje met massa m dat zich op een plaats met positievector $\vec{r}$ bevindt en een snelheid $\vec{v}$ heeft, wordt gedefinieerd als

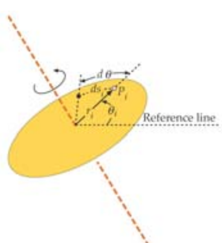
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Bij de berekening van het impulsmoment moet men steeds opgeven tov. welk punt dit gebeurt.

VII Rotatiebeweging van een deeltje

Naast een translatiebeweging kan een deeltje ook een rotatiebeweging uitvoeren. Hiervoor heeft het een centripetale versnelling nodig en dus een centriptale kracht. De rotatie rond een as wordt beschreven door de zogenaamde hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$. Deze vector heeft de richting van de as en de grootte wordt gegeven door de hoeksnelheid waarmee het deeltje rond de as draait :

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$. De zin van de vector wordt bepaald door de rechterhandregel.



De hoeksnelheid hoeft niet constant te zijn, de verandering wordt beschreven door de hoekversnelling $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

Starre lichamen

een voorwerp dat bestaat uit een verzameling van deeltjes waarvan de onderlinge posities tov. elkaar vast liggen noemen we een star lichaam. Het zal dan ook niet vervormen onder invloed van externe krachten.
Vele vaste voorwerpen zijn in goede benadering als star lichaam op te vatten. Dit geldt zeker voor macroscopische voorwerpen (een wiel, een tafel, gyroscoop, ...) maar op

microscopisch/atomair niveau zoals een molecule kan men meestal de **vibratiebeweging** (trillen rond een evenwichtspositie) niet verwaarlozen.
De beweging van een star lichaam kan op relatief eenvoudige wijze beschreven worden. Een belangrijke grootheid van een star lichaam is het zogenaamde **traagheidsmoment**, dat gedefinieerd wordt als :

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

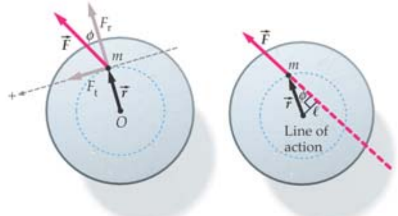
De relatieve kinetische energie van een star lichaam tov. het massamiddelpunt kan nu op eenvoudige manier geschreven worden :

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i\ u_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\ r_i^2\ \omega^2 = \frac{1}{2} I\ \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

<u>Opm</u>. De laatste uitdrukking blijft ook geldig in de kwantummechanica (dit is een theorie uit de fysica die het gedrag van de materie beschrijft op atomair niveau).

<u>Moment van een kracht</u> $\vec{\tau}$

Wat veroorzaakt de rotatie van een voorwerp (i.e. star lichaam) ?
Antwoord : Het moment v/e kracht (“torque”).
Om een star lichaam te laten roteren (of een deeltje) moet we een kracht hebben, hoewel dit **niet** voldoende is. Als we bv. een schijf (zie figuur) willen roteren dan moeten we een tangentiële kracht hebben of moet in ieder geval de kracht een tangentiële componente hebben. Krachten waarvan de drager/werklijn door het rotatiecentrum gaan veroorzaken geen rotatie. Daarom is het niet de kracht die bepalend is voor de rotatiebeweging maar wel het **moment** van de kracht $\tau = F_t\ r = F \sin\phi\ r = F\ \ell \quad met \quad F_t = F \sin\phi$ de tangentiële componente van de kracht en $\ell = r \sin\phi$ de loodrechte afstand tussen het rotatiecentrum en de werklijn van de kracht. ϕ is de hoek tussen de vector $\vec{r}$ *en de kracht* $\vec{F}$. $\vec{r}$ geeft de positie van het aangrijpingspunt van de kracht.



Net zoals een kracht verantwoordelijk is voor de versnelling v/e deeltje, zorgt het zg. moment voor een rotatie. In vectornotatie wordt het moment van de kracht gegeven door :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

waarbij $\vec{r}$ de positie aangeeft waar de kracht aangrijpt tov. het punt waarvoor men het moment berekent.

Voor een systeem van deeltjes moeten we het impulsmoment van elke deeltje beschouwen. Het impulsmoment van het systeem wordt dan gegeven door :

$$\vec{L}_{sys} = \sum_i \vec{L}_i$$

We hebben volgend belangrijk resultaat :

$$\vec{\tau}_{net,ext} = \frac{d\vec{L}_{sys}}{dt} \quad ; \quad \vec{\tau}_{net,ext} = \sum_i \vec{\tau}_{i,ext} \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_{i,\text{int}} = 0$$

Wanneer een star lichaam een rotatiebeweging rond een as beschrijft dan kunnen we in het geval dat de rotatie-as ook een **symmetrie-as** is van het voorwerp een eenvoudig verband terugvinden tussen het impulsmoment en de hoeksnelheid :

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

In het geval van een rotatie rond een symmetrie-as kunnen we de analogie tussen rotatie en translatiebeweging nog verder doortrekken. We hebben dan ook :

$$\vec{\tau}_{net,ext} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\,\vec{\alpha}$$

Indien geen extern nettomoment op een deeltje of systeem van deeltjes inwerkt dan hebben we :

$$\frac{d\vec{L}_{sys}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{sys} = cte \Leftrightarrow L_{sys,x} = cte \;;\; L_{sys,y} = cte \;;\; L_{sys,z} = cte$$

maw. het impulsmoment is dan een behouden grootheid.

Voor een rotatie rond een symmetrie herleidt het behoud van impulsmoment zich tot :

$$I\,\omega = const \Leftrightarrow I_1\,\omega_1 = I_2\,\omega_2$$

Voor een afgesloten systeem i.e. een systeem waarop geen externe krachten of momenten inwerken hebben we dus 7 behouden grootheden : de totale energie, 3 componenten van de impuls en de drie componenten van het impulsmoment.

De beweging van een star lichaam kunnen we dus beschrijven als de som van :

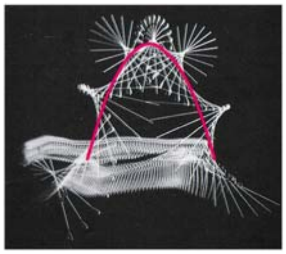
1. de translatie beweging van het massamiddelpunt met als kinetische energie :

$$K_{cm} = \frac{1}{2} M\, v_{cm}^2$$

2. de rotatiebeweging tov. het massamiddelpunt met als kinetische energie:

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$$

waarbij I_{cm} het traagheidsmoment is, *berekend in een assenstelsel dat meebeweegt met het massamiddelpunt*.



In bovenstaande figuur is duidelijk te zien dat het massamiddelpunt de beweging van een massapunt maakt dat beweegt onder invloed van de zwaartekracht ("parabolische projectielbeweging"). De stok voert bovendien een rotatie uit tov. dit massamiddelpunt.

VII Evenwicht van een star lichaam - Statica

Een star lichaam verkeerd in evenwicht indien aan volgende twee voorwaarden voldaan is :

1. $\sum_i \vec{F}_i = 0$
2. $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

De eerste voorwaarde drukt uit dat het massamiddelpunt in rust is i.e. $\vec{a}_{cm} = 0$ maw. de som van de externe krachten moet nul zijn. Deze voorwaarde werd reeds vroeger behandeld in termen van de potentiële energie.

De tweede voorwaarde drukt uit dat het lichaam geen rotatie ondergaat en dus dat de som van de momenten nul is en dit tov. elk punt waarvoor de momenten berekend worden.

VIII Gravitatiekracht

De gravitatiekracht is de aantrekkingskracht die heerst tussen 2 voorwerpen tgv. hun massa. Voor twee massapunten met resp. massa's m_1 en m_2 wordt de gravitatiekracht gegeven door de gravitatiewet van Newton :

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \quad ; \quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

waarbij r_{12} de afstand is tussen de deeltjes 1 en 2. G is de gravitatieconstante

G = 6,67 10^{-11} N m^2/ kg^2. De gravitatiekracht is gericht langs de verbindingslijn tussen de 2 massapunten.

Bovenstaande uitdrukking voor de gravitatiekracht blijft ook geldig voor 2 voorwerpen (geen *massapunten*) op voorwaarde dat ze **sferisch** zijn. Voor de eenvoud kunnen we alle voorwerpen in een eerste benadering als bolvormig beschouwen. De gravitatiekracht uitgeoefend door de aarde op een voorwerp wordt dus gegeven door bovenstaande formule. De grootte van deze kracht is dus :

$$F = G\frac{M_E\,m}{r^2}$$

r is hierbij de afstand tussen het **centrum** van de aarde (massa M_E) en het **centrum** van het voorwerp (opgevat als bol) met massa m. Indien het voorwerp zich dicht bij het aardoppervlak bevindt dan is :

$r = R_E + h \approx R_E$ waarbij h de hoogte is tov. het aardoppervlak waarop het voorwerp zich bevindt en R_E de straal van de aarde.

Deze gravitatiekracht zorgt voor een versnelling van het voorwerp (zoals elke kracht). Deze versnelling noteren we als g :

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M_E}{r^2} \approx G\frac{M_E}{R_E^2}$$

Hydrostatica en hydrodynamica

vloeistoffen zullen we niet beschrijven door de positie, snelheid en versnelling van elke molecule of elk atoom afzonderljk weer te geven. We zullen ze beschrijven dmv. een aantal **macroscopische** grootheden zoals de dichtheid $\rho(\vec{r})$, druk $P(\vec{r})$ en snelheid $\vec{v}(\vec{r})$ van de vloeistof. Deze laatste is niet de snelheid van een atoom uit de vloeistof, maar de snelheid van een “blokje vloeistof” waarvan de afmetingen groot zijn tov. de atomaire dimensies maar klein tov. de afmetingen van de ganse vloeistof. In principe kunnen we deze beschrijving ook toepassen op gassen op voorwaarde dat de dichtheid hoog genoeg, want anders moeten we toch op een of andere manier de snelheid van ieder atoom in het gas in rekening brengen. Wanneer men wil verwijzen naar vloeistoffen en gassen tegelijk spreekt men dikwijls over een **fluïdum**. Zowel dichtheid, druk als snelheid hangen in principe af van de plaats in de vloeistof.

Hydrostatica

Wanneer het fluïdum in rust is dan is de snelheid nul. De studie van fluïda in rust noemt men de *Hydrostatica*. Wanneer men de positieve Y-as naar beneden kiest in de richting van de valversnelling dan kan men de druk op een gegeven plaats terugvinden door het oplossen van volgende differentiaalvergelijking :

$$\frac{dP}{dy} = \rho \; g$$

we zien dus dat de druk enkel van de y coördinaat afhangt i.e. de hoogte.
Indien de dichtheid niet verandert met de hoogte dan kan men deze vergelijking gemakkelijk integreren :

$$P = P_0 + \rho \; g \; (y - y_0)$$

Deze drukverandering met de hoogte leidt o.a. tot het principe van Archimedes en de wet van Pascal.

Hydrodynamica

De studie van fluïda in beweging noemt men de *Hydrodynamica*. Een kwantitatieve studie van de beweging van reële fluïda kan vrij complex worden. Maar enkele belangrijke principes kunnen reeds gevonden worden voor ideale fluïda.

De continuïteitsvergelijking

Het behoud van massa uitdrukken leidt tot de zogenaamde continuïteitsvergelijking :

$$\rho \; v \; A = cte$$

waarbij A de dwarse doorsnede is van de stroombuis waar het fluïdum doorheen stroomt.
Indien het fluïdum onsamendrukbaar ($\rho = cte$) is dan herleidt dit zich tot :

$$v\ A = cte \Leftrightarrow v_1\ A_1 = v_2\ A_2$$

<u>De vergelijking van Bernoulli</u>

Een verband tussen de druk en de snelheid van een vloeistof kan teruggevonden worden dmv. de vergelijking van Bernoulli :

$$P + \frac{1}{2}\rho\ v^2 + \rho\ g\ y = cte \Leftrightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho\ v_1^2 + \rho\ g\ y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\ v_2^2 + \rho\ g\ y_2$$

Deze vergelijking is in feite enkel geldig voor fluïda

(1) waarvoor viscositeit verwaarloosd wordt,

(2) die onsamendrukbaar zijn,

(3) waarvoor de stroming als laminair verondersteld wordt (dit impliceert geen turbulentie en geen wervelstromen).

(4) stroming stationair is : snelheidsprofiel is tijdsonafhankelijk.

Deze vergelijking is erg nuttig om een aantal praktische toepassingen kwalitatief te verklaren.