Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

2e bachelor scheikunde — 2e zittijd 2007–2008

Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten! — Onleesbaar = fout! — Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen. — Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen. — VEEL SUCCES!

---

1. Bepaal de dubbelintegraal $\iint\limits_G x^{12} dS$ met G het gebied ingesloten door de kubische parabolen $y = x^3$ en $y = 4x^3$ en de hyperbolen $xy = 2$ en $xy = 5$.

2. Gegeven het parallellogram met als hoekpunten $a\,(1, 2, -1)\,,\ b\,(3, 6, 2)\,,\ c\,(-2, 1, 0)$ en $d\,(0, 5, 3)$

   (a) Bepaal het vlak waar deze allevier doorgaan, en zoek de normaal hierop.

   (b) Zij a', b', c' en d' de projecties van deze vier punten op het XY–vlak, bereken dan de vergelijkingen van de rechten $a'b'$, $a'c'$, $c'd'$ en $b'd'$

   (c) Zij α de rand van dit parallellogram zodanig georiënteerd dat de normaal naar boven wijst. Bereken voor die georiënteerde kromme en voor $\mathbf{F}\,(x, y, z) = (y, z, x)$ de kringintegraal $\oint\limits_\alpha \mathbf{F} \cdot d\alpha$ door gebruik van de stelling van Stokes en door een goeie coördinaattransformatie. Gebruik hierbij de gegevens die je in (a) en (b) hebt gevonden

3. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'\,(t) = 5x\,(t) - 2y\,(t) + 2z\,(t) + t \\ y'\,(t) = 2x\,(t) + y\,(t) + 2z\,(t) + t \\ z'\,(t) = -10x\,(t) + 6y\,(t) - 3z\,(t) + 1 \end{cases}$$

4. Zij $y'' + (t-2)\,y' - 3y = (t-2)\,H\,(t-2)$ met als beginvoorwaarden $y\,(0) = 0$ en $y'\,(0) = 0$.

   (a) Bewijs eerst dat de Laplace–getransformeerde van het rechterlid gelijk is aan $\dfrac{e^{-2z}}{z^2}$

   (b) Zoek hiervan de oplossing door op beide leden een Laplace–transformatie los te laten.

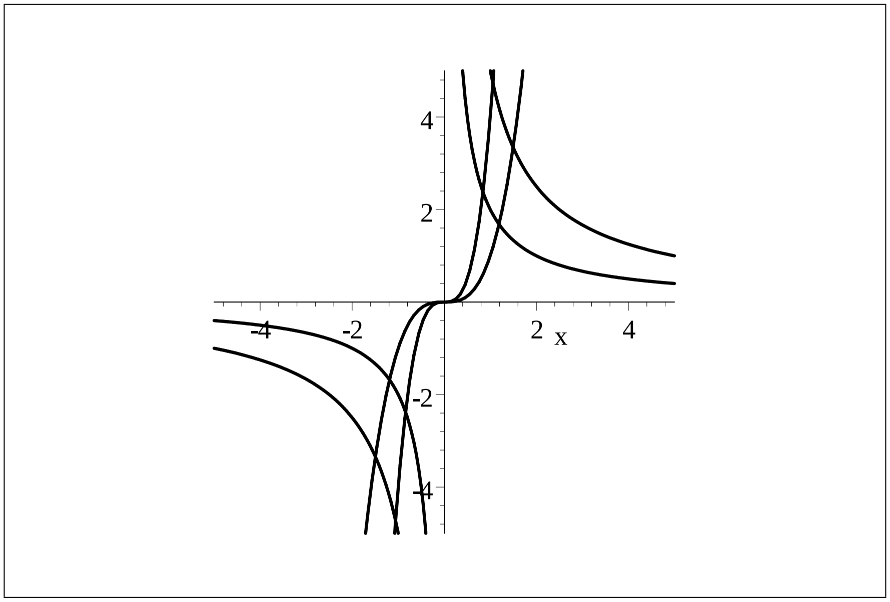
5. Herinner je dat de fouriergetransformeerde van e^{-x^2} gelijk is aan $\dfrac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

   (a) Zij $f\,(x) = x^2 e^{-x^2}$. Bewijs dat $f\,(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) + \dfrac{1}{2}e^{-x^2}$

   (b) Bewijs aan de hand van deze formule dat zijn fouriergetransformeerde $\mathcal{F}\,[f]\,(\omega)$ gelijk is aan $\dfrac{\sqrt{2}\left(2-\omega^2\right)}{8}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

Oplossingen

1. Bepaal de dubbelintegraal $\iint_G x^{12} dS$ met G het gebied ingesloten door de kubische parabolen $y = x^3$ en $y = 4x^3$ en de hyperbolen $xy = 2$ en $xy = 5$.



Zij $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^3} \\ v = xy \end{cases}$ dan is $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} -3\dfrac{y}{x^4} & \dfrac{1}{x^3} \\ y & x \end{vmatrix} = -4\dfrac{y}{x^3} = -4u \Rightarrow \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = -\dfrac{1}{4u}$

$\Rightarrow x^{12} = \dfrac{(xy)^3}{\left(\dfrac{y}{x^3}\right)^3}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_1^4 \int_2^5 \frac{v^3}{u^3}\left(-\frac{1}{4u}\right) dv du = -\frac{1}{4}\int_2^5 v^3 dv \int_1^4 \frac{1}{u^4} du = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}v^4\right]_2^5 \left[-\frac{1}{3u^3}\right]_1^4 = -\frac{12\,789}{1024}$

2. Gegeven het parallellogram met als hoekpunten $a(1,2,-1)$, $b(3,6,2)$, $c(-2,1,0)$ en $d(0,5,3)$

   (a) Bepaal het vlak waar deze allevier doorgaan, en zoek de normaal hierop.

   Gaan allen door het vlak $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7x - 11y + 10z + 25 = 0$

   $\Rightarrow z = -\dfrac{7}{10}x + \dfrac{11}{10}y - \dfrac{5}{2}$

   $\varphi(x,y) = \left(x, y, -\dfrac{7}{10}x + \dfrac{11}{10}y - \dfrac{5}{2}\right)$

   $\eta(7,-11,10)$

   (b) Zij a', b', c' en d' de projecties van deze vier punten op het XY−vlak, bereken dan de vergelijkingen van de rechten $a'b'$, $a'c'$, $c'd'$ en $b'd'$

   $a'b' : 2x - y = 0$
   $a'c' : x - 3y = -5$
   $c'd' : 2x - y = -5$
   $b'd' : x - 3y = -15$

(c) Zij α de rand van dit parallellogram zodanig georiënteerd dat de normaal naar boven wijst. Bereken voor die georiënteerde kromme en voor $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ de kringintegraal $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\alpha$ door gebruik van de stelling van Stokes en door een goeie coördinaattransformatie. Gebruik hierbij de gegevens die je in (a) en (b) hebt gevonden

$\oint\limits_{\alpha} \mathbf{F} \cdot d\alpha = \iint\limits_{S} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \eta dydx$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x) \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

$$= \iint\limits_{S} (-1,-1,-1) \cdot (7,-11,10)\, dydx = -6 \iint\limits_{S} dydx$$

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 3y \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = -\frac{1}{8}$$

$$= -6 \int\limits_{-5}^{0} \int\limits_{-15}^{-5} -\frac{1}{8} dvdu = \frac{75}{2}$$

3. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t) + 2z(t) + t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + 2z(t) + t \\ z'(t) = -10x(t) + 6y(t) - 3z(t) + 1 \end{cases}$$

$T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$\det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -10 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{Spec} T = \{-1,1,3\}$

* Als $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

* Als $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -10 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

* Als $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -10 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{3} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De homogene oplossing is dus

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ is dus een fundamentele matrix. Hiervoor geldt dat

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{t} & e^{t} & -e^{t} \\ 3e^{-t} & -e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}$$

Gebruik makend van de standaard notaties is dan

$$W'(t) = \Phi^{-1}(t)\,F(t) = \begin{pmatrix} -2e^{t} & e^{t} & -e^{t} \\ 3e^{-t} & -e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-3t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t}t - e^{t} \\ 2e^{-t}t + e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

en dus volgt door integratie dat

$$W(t) = \int \begin{pmatrix} -e^{t}t - e^{t} \\ 2e^{-t}t + e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -e^{t}t \\ -2e^{-t}t - 3e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

waardoor een oplossing van het niet-homogeen probleem dan gegeven wordt door

$$\Phi(t)\,W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & e^{t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{t}t \\ -2e^{-t}t - 3e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t-3 \\ -3t-3 \\ 4t+3 \end{pmatrix}$$

De algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking is dus

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t-3 \\ -3t-3 \\ 4t+3 \end{pmatrix}$$

4. Zij $y'' + (t-2)\,y' - 3y = (t-2)\,H(t-2)$ met als beginvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$.

   (a) Bewijs eerst dat de Laplace–getransformeerde van het rechterlid gelijk is aan $\dfrac{e^{-2z}}{z^2}$

   $\mathcal{L}[(t-2)\,\text{Heaviside}(t-2)] = e^{-2z}\mathcal{L}[t] = \dfrac{e^{-2z}}{z^2}$

   (b) Zoek hiervan de oplossing door op beide leden een Laplace–transformatie los te laten.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[(t-2)\,y'] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[(t-2)\,H(t-2)] \\
&\Rightarrow \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[ty'] - 2\mathcal{L}[y'] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[(t-2)\,H(t-2)] \\
&\Rightarrow \left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + \left(-\frac{d}{dz}\mathcal{L}[y'](z)\right) - 2\left(zY(z) - y(0)\right) - 3Y(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2} \\
&\Rightarrow \left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + \left(-\frac{d}{dz}\left(zY(z)\right) - y(0)\right) - 2\left(zY(z) - y(0)\right) - 3Y(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2} \\
&\Rightarrow z^2Y(z) - \frac{d}{dz}\left(zY(z)\right) - 2zY(z) - 3Y(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2} \\
&\Rightarrow z^2Y(z) - zY'(z) - Y(z) - 2zY(z) - 3Y(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2} \\
&\Rightarrow -zY'(z) + \left(z^2 - 2z - 4\right)Y(z) = \frac{e^{-2z}}{z^2} \\
&\Rightarrow Y'(z) + \left(-z + 2 + \frac{4}{z}\right)Y(z) = -\frac{e^{-2z}}{z^3}
\end{aligned}$$

Dit is een eerstegraadsvergelijking met integrerende factor

$$\mu(z) = e^{\int\left(-z+2+\frac{4}{z}\right)dz} = e^{\left(-\frac{z^2}{2}+2z+4\ln z\right)} = z^4 e^{-\frac{z^2}{2}+2z}$$

Na vermenigvuldiging wordt de differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}
&(\mu(z)\,Y(z))' = -\frac{e^{-2z}}{z^3} z^4 e^{-\frac{z^2}{2}+2z} = -ze^{-\frac{z^2}{2}} \\
&\Rightarrow \mu(z)\,Y(z) = \int -ze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = e^{-\frac{z^2}{2}} + c \\
&\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z^4}e^{-2z} + \frac{ce^{\frac{z^2}{2}-2z}}{z^4}
\end{aligned}$$

Als nu $Y(z)$ werkelijk een Laplace–transformatie van de één of andere stuksgewijs continue functie van exponentiële orde moet zijn, dan volgt hier noodzakelijk uit dat $\lim\limits_{z\to+\infty} Y(z) = 0$. Bijgevolg kan het niet anders zijn dat $c = 0$, en dus is $Y(z) = \frac{1}{z^4}e^{-2z}$. Door de inverse Laplace–transformatie krijgen we bijgevolg dat $y(t) = \frac{1}{6}(t-2)^3 H(t-2)$

5. Herinner je dat de fouriergetransformeerde van e^{-x^2} gelijk is aan $\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}}$.

   (a) Zij $f(x) = x^2e^{-x^2}$. Bewijs dat $f(x) = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) + \frac{1}{2}e^{-x^2}$

   $\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}\left(4x^2-2\right) = 4f(x) - 2e^{-x^2}$

   $4f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) + 2e^{-x^2}$

   $f(x) = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right) + \frac{1}{2}e^{-x^2}$

   (b) Bewijs aan de hand van deze formule dat zijn fouriergetransformeerde $\mathcal{F}[f](\omega)$ gelijk is aan $\frac{\sqrt{2}\left(2-\omega^2\right)}{8}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

   $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{4}\mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]$

   $= \frac{1}{4}i^2\omega^2\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(2-\omega^2\right)}{8}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$