Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2017–2018

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Gegeven het parallellogram R in $\mathbb{R}^2$ ingesloten door de rechten $x - 3y = 1$, $x - 3y = -2$, $-2x + 5y = 0$ en $-2x + 5y = 2$. Bereken het volume van de figuur met R als grondvlak, gelegen tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 12 + xy$. Gebruik hiervoor een gepaste coördinaattransformatie

/10

2. Bepaal $\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \eta dS$ voor het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \left(x^2 - z, y^2 - x, 2z^2 - y\right)$ met Ω het gesloten lichaam, ingesloten door de cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ en de vlakken $z = 0$ en $z = b$.

/10

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)\,y = 0$$

Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)$ of iets gelijkaardigs). /10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{5}{4}x(t) + \dfrac{3}{4}y(t) + 4t \\ y'(t) = \dfrac{3}{4}x(t) - \dfrac{5}{4}y(t) + e^t \end{cases}$$

/10

5. Zij $\psi(x,y) : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ met als randvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\forall y &\in [0,1] : \psi(0,y) = \psi(1,y) = 0, \\
\forall x &\in [0,1] : \psi(x,0) = 0, \text{ en} \\
\forall x &\in [0,1] : \psi(x,1) = f(x) = \begin{cases} x & \text{als} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 1 - x & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

Bereken $\psi(x,y)$.

/10

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 4y = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t \in [0,5] \\ \dfrac{t-5}{5} & \text{als} \quad t \in [5,10] \\ 1 & \text{als} \quad t \geq 10 \end{cases} \quad \text{met } y(0) = y'(0) = 0$$

Opgelet! Je krijgt *geen punten* als je deze differentiaalvergelijking zonder Laplacetransformatie oplost!

/10

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 2^{n+2} \text{ met } y(0) = 9 \text{ en } y(1) = 2$$

en bepaal $y(10)$.

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\quad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\quad /60}$

Oplossingen:

1. Gegeven het parallellogram R in $\mathbb{R}^2$ ingesloten door de rechten $x-3y=1$, $x-3y=-2$, $-2x+5y=0$ en $-2x+5y=2$. Bereken het volume van de figuur met R als grondvlak, gelegen tussen de vlakken $z=0$ en $z=12+xy$. Gebruik hiervoor een gepaste coördinaattransformatie

   Stel $\begin{cases} u = x-3y \\ v = -2x+5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5u-3v \\ y = -2u-v \end{cases}$; $u \in [-2,1]\,, v \in [0,2]$

   $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = -1$$

   $$\Rightarrow I = \iint_R (12+xy)\,dxdy = \int_{-2}^{1}\int_0^2 (12+(-5u-3v)(-2u-v))(-1)\,dvdu = -\int_{-2}^{1}\int_0^2 \left(10u^2+11uv+3v^2+12\right) dvdu$$

   $$= -\int_{-2}^{1}\left[10u^2v+\frac{11}{2}uv^2+v^3+12v\right]_0^2 du = -\int_{-2}^{1}\left(20u^2+22u+32\right) du$$

   $$= -\left[\frac{20}{3}u^3+11u^2+32u\right]_{-2}^{1} = -123$$

   Het volume is dus 123

2. Bepaal $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\eta dS$ voor het vectorveld $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \left(x^2-z, y^2-x, 2z^2-y\right)$ met Ω het gesloten lichaam, ingesloten door de cylinder $x^2+y^2=a^2$ en de vlakken $z=0$ en $z=b$

   $$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\eta dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} dV = \iiint_\Omega (2x+2y+4z)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^b (2r\cos\theta+2r\sin\theta+4z)\,rdzdrd\theta$$

   $$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[2rz^2+2r^2z\cos\theta+2r^2z\sin\theta\right]_0^b drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(2b^2r+2br^2\cos\theta+2br^2\sin\theta\right) drd\theta$$

   $$= \int_0^{2\pi}\left[b^2r^2+\frac{2}{3}br^3\cos\theta+\frac{2}{3}br^3\sin\theta\right]_0^a d\theta = \int_0^{2\pi}\left(a^2b^2+\frac{2}{3}a^3b\cos\theta+\frac{2}{3}a^3b\sin\theta\right) d\theta$$

   $$= \left[a^2b^2\theta-\frac{2}{3}a^3b\cos\theta+\frac{2}{3}a^3b\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2b^2$$

   Feedback: Nogal wat mensen zijn bij de omzetting naar cylindercoördinaten de r vergeten, wat de foutieve uitkomst $4\pi ab^2$ oplevert.

3. Los op met de methode van Fuchs:

   $$2x^2y''-xy'+(1+x)\,y=0$$

   Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)$ of iets gelijkaardigs).

   $$\text{Stel}\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,c_n x^{n+r-1} \\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\,c_n x^{n+r-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}+(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow x^r\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}\right]=0$$

Stel $m=n+1\Rightarrow n=m-1$

$$\Rightarrow x^r\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+\sum_{m=1}^{\infty}c_{m-1}x^m\right]=0$$

$$\Rightarrow x^r\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n\right]=0$$

$$\Rightarrow x^r\left[(2r(r-1)-r+1)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2(n+r)(n+r-1)+1)c_n-(n+r)c_n+c_{n-1}\right]x^n\right]=0$$

$$\Rightarrow x^r\left[\left(2r^2-3r+1\right)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(2n^2+4nr-3n+2r^2-3r+1\right)c_n+c_{n-1}\right]x^n\right]=0$$

$$\Rightarrow x^r\left[(2r-1)(r-1)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r-1)(2n+2r-1)c_n+c_{n-1}\right]x^n\right]=0$$

Indexwortels zijn $r=\frac{1}{2}$ en $r=1$, en $\forall n\geq 1: c_n=-\frac{c_{n-1}}{(n+r-1)(2n+2r-1)}$

- Als $r=1\Rightarrow\forall n\geq 1: c_n=-\frac{c_{n-1}}{n(2n+1)}$

  Kies $c_0\Rightarrow c_1=-\frac{c_0}{1\cdot 3}$

  $\Rightarrow c_2=-\frac{c_1}{2\cdot 5}=\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$

  $\Rightarrow c_3=-\frac{c_2}{3\cdot 7}=-\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$

  $\Rightarrow ...$

  $\Rightarrow c_n=\frac{(-1)^n c_0}{n!\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)}=\frac{(-1)^n 2^n\cdot n!c_0}{n!(2n+1)!}=\frac{(-1)^n 2^n\cdot c_0}{(2n+1)!}$

  $y_1(x)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n\cdot x^{n+1}}{(2n+1)!}=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^{n+1}}{(2n+1)!}$

- Als $r=\frac{1}{2}\Rightarrow\forall n\geq 1: d_n=-\frac{d_{n-1}}{n(2n-1)}$

  Kies $d_0\Rightarrow d_1=-\frac{d_0}{1\cdot 1}$

  $\Rightarrow d_2=-\frac{d_1}{2\cdot 3}=\frac{d_0}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3}$

  $\Rightarrow d_3=-\frac{d_2}{3\cdot 5}=-\frac{d_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5}$

  $\Rightarrow ...$

  $\Rightarrow d_n=\frac{(-1)^n d_0}{n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}=\frac{(-1)^n 2^n\cdot n!d_0}{n!(2n)!}=\frac{(-2)^n\cdot d_0}{(2n)!}$

  $\Rightarrow y_2=d_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n\cdot x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}$

  $\Rightarrow y(x)=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^{n+1}}{(2n+1)!}+d_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{5}{4}x(t) + \frac{3}{4}y(t) + 4t \\ y'(t) = \frac{3}{4}x(t) - \frac{5}{4}y(t) + e^t \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\frac{5}{4} - \lambda & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 = \frac{1}{2}(\lambda + 2)(2\lambda + 1) = 0$

$E_{-2} : \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{-\frac{1}{2}} : \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stel $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-\frac{t}{2}} \\ -e^{-2t} & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi(t) = 2e^{-\frac{5t}{2}} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} & \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t)F(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} & \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \\ 2te^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \\ 2te^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{3t} \\ 4te^{\frac{t}{2}} - 8e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{3}e^{\frac{3t}{2}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_{nh}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-\frac{t}{2}} \\ -e^{-2t} & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{3t} \\ 4te^{\frac{t}{2}} - 8e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{3}e^{\frac{3t}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t + \frac{1}{6}e^t - \frac{17}{2} \\ 3t + \frac{1}{2}e^t - \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t - \frac{17}{2} \\ 3t - \frac{15}{2} \end{pmatrix}$

5. Zij $\psi(x, y) : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$ met als randvoorwaarden

$$\begin{aligned} \forall y &\in [0,1] : \psi(0, y) = \psi(1, y) = 0, \\ \forall x &\in [0,1] : \psi(x, 0) = 0, \text{ en} \\ \forall x &\in [0,1] : \psi(x, 1) = f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x & \text{als } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Bereken $\psi(x, y)$.

$X''Y = -XY'' \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = -\lambda^2$
$\Rightarrow X'' = -\lambda^2 X$ met $X(0) = X(1) = 0$
$\Rightarrow X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$
$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = C_2 \sin\lambda x$
$X(1) = 0 \Rightarrow C_2 \sin\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi$ met $n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow X(x) = \sin n\pi x$
$Y'' = n^2\pi^2 Y \Rightarrow Y(y) = C_3 \cosh n\pi y + C_4 \sinh n\pi y$
$Y(0) = C_3 = 0 \Rightarrow Y(y) = C_4 \sinh n\pi y$
$\Rightarrow \psi(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sinh n\pi y$
$\psi(x,1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sinh n\pi y = f(x) \Rightarrow$ Uit de Fourier sinusregel volgt dat

$$c_n = \frac{2}{\sinh n\pi}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx = \frac{2}{\sinh n\pi}\left(\int_0^{1/2} x\sin n\pi x dx + \int_{1/2}^1 (1-x)\sin n\pi x dx\right)$$

Nu is $\displaystyle\int x \sin n\pi x dx$
Stel $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin n\pi x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{n\pi}\cos n\pi x \end{cases}$
$... = -\dfrac{x}{n\pi}\cos n\pi x + \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int \cos n\pi x dx = -\dfrac{x}{n\pi}\cos \pi n x + \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin \pi n x$
en $\displaystyle\int (1-x)\sin n\pi x dx = \int \sin n\pi x dx - \int x \sin n\pi x dx = -\dfrac{1}{n\pi}\cos\pi n x + \dfrac{x}{n\pi}\cos\pi n x - \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin\pi n x$
$\Rightarrow c_n = \dfrac{2}{\sinh n\pi}\left(\left[-\dfrac{x}{n\pi}\cos\pi n x + \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin\pi n x\right]_0^{1/2} + \left[-\dfrac{1}{n\pi}\cos\pi n x + \dfrac{x}{n\pi}\cos\pi n x - \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin\pi n x\right]_{1/2}^{1}\right)$
$= \dfrac{2}{\sinh n\pi}\left(-\dfrac{1}{2n\pi}\cos\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{1}{n\pi}\cos\pi n + \dfrac{1}{n\pi}\cos\pi n + \dfrac{1}{n\pi}\cos\dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{1}{2n\pi}\cos\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{1}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)$
$= \dfrac{2}{\sinh n\pi}\left(-\dfrac{1}{n\pi}\cos\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{2}{n^2\pi^2}\sin\dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)$
$= \dfrac{4}{n^2\pi^2\sinh n\pi}\sin\dfrac{\pi n}{2}$
$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2\sinh n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \\ 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \end{cases}$
$\Rightarrow \psi(x,y) = \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n^2\sinh n\pi}$
of met $n = 2k+1$
$\Rightarrow \psi(x,y) = \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k \sin((2k+1)\pi x)\sinh((2k+1)\pi y)}{(2k+1)^2\sinh((2k+1)\pi)}$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 4y = g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad t \in [0,5] \\ \dfrac{t-5}{5} & \text{als} \quad t \in [5,10] \\ 1 & \text{als} \quad t \geq 10 \end{cases} \quad \text{met } y(0) = y'(0) = 0$$

Opgelet! Je krijgt *geen punten* als je deze differentiaalvergelijking zonder Laplacetransformatie oplost!

Merk op dat $g(t) = \dfrac{t-5}{5} H(t-5) + \left(1 - \dfrac{t-5}{5}\right) H(t-10) = \dfrac{1}{5}\left((t-5)H(t-5) - (t-10)H(t-10)\right)$

$\Rightarrow z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0) + 4Y(z) = \dfrac{e^{-5z} - e^{-10z}}{5z^2}$

$\Rightarrow \left(z^2+4\right) = \dfrac{e^{-5z} - e^{-10z}}{5z^2}$

$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{e^{-5z} - e^{-10z}}{5z^2\left(z^2+4\right)}$

Nu is

$$\frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{Cz+D}{z^2+4}$$

waardoor

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{1}{z^2+4}\right|_{z=0} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} - \frac{1}{4z^2} &= -\frac{z}{4z\left(z^2+4\right)} \\ &\Rightarrow B = -\left.\frac{z}{4\left(z^2+4\right)}\right|_{z=0} = 0 \\ C(2i) + D &= \left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=2i} = -\frac{1}{4} \\ &\Rightarrow (C,D) = \left(0, -\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{z^2\left(z^2+4\right)} = \dfrac{1}{4z^2} - \dfrac{1}{4\left(z^2+4\right)}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{z^2\left(z^2+4\right)}\right](t) = \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{8}\sin 2t$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{5}H(t-5)\left(\dfrac{t-5}{4} - \dfrac{\sin(2t-10)}{8}\right) - \dfrac{1}{5}H(t-10)\left(\dfrac{t-10}{4} - \dfrac{\sin(2t-20)}{8}\right)$

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 2^{n+2} \text{ met } y(0) = 9 \text{ en } y(1) = 2$$

en bepaal $y(10)$.

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{2, -3\}$

$\Rightarrow y_c(n) = c_1 2^n + c_2(-3)^n$

Annihilator $N(E) = E - 2$

Hyperannihilator: $p(E)N(E) = (E-2)^2(E+3)$

$\Rightarrow y_{nh}(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n + a_3(-3)^n$

$\Rightarrow y_{nh}(n) = a_2 n 2^n$

Eis: $a_2(n+2)2^{n+2} + a_2(n+1)2^{n+1} - 6a_2 n 2^n \equiv 5 \cdot 2^{n+2} = 20 \cdot 2^n$
$\Rightarrow 4a_2(n+2) + 2a_2(n+1) - 6a_2 n \equiv 20$
$\Rightarrow 10a_2 = 20 \Rightarrow a_2 = 2$
$\Rightarrow y(n) = c_1 2^n + c_2(-3)^n + 2n2^n = c_1 2^n + c_2(-3)^n + n2^{n+1}$
Eis: $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 9 \\ y(1) = 2c_1 - 3c_2 + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 4 \end{cases}$
$\Rightarrow y(n) = 5 \cdot 2^n + 4 \cdot (-3)^n + n2^{n+1}$
$\Rightarrow y(10) = 261\,796$