Examen Toegepaste Wiskunde II Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde en biochemie
— 1e zittijd 2014–2015

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC (schrappen wat niet past)
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y' - 4xy = x^3 y^{3/2}$$

/15

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' + 4y = 4x \sin x$$

Je krijgt cadeau dat

$$\begin{aligned} \int x \cos ax dx &= \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax + c \\ \int x \sin ax dx &= \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax + c \end{aligned}$$

/15

3. Zoek 4 rekenkundige rijen van 4 termen a, b, c en d, waarvoor $ad = -20$ en $bc = 12$. Bewijs dat voor elk van deze vier oplossingen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dezelfde waarde geeft.

/15

4. Bereken de 4de Taylorpolynoom van de functie $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ in 0

/15

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y' - 4xy = x^3 y^{3/2}$$

Stel $\mu(y) = \dfrac{1-m}{y^m} = -\dfrac{1}{2y^{3/2}}$ Merk op dat $y=0$ een singuliere oplossing is.

$\Rightarrow -\dfrac{y^{-3/2}}{2}y' + 2xy^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}x^3$

Stel $u = y^{-1/2} \Rightarrow u' = -\dfrac{1}{2}y^{-3/2}y'$

$\Rightarrow u' + 2xu = -\dfrac{1}{2}x^3$

$\nu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$\Rightarrow \left(e^{x^2}u\right)' = -\dfrac{1}{2}x^3 e^{x^2}$

$\Rightarrow e^{x^2}u = -\dfrac{1}{2}\int x^3 e^{x^2} dx$

Stel $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$\Rightarrow e^{x^2}u = -\dfrac{1}{4}\int te^t dt$

Stel $\begin{cases} f = t \\ dg = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} df = dt \\ g = e^t \end{cases}$

$\Rightarrow e^{x^2}u = -\dfrac{1}{4}\left(te^t - \int e^t dt\right)$

$\Rightarrow e^{x^2}u = -\dfrac{1}{4}te^t + \dfrac{1}{4}e^{x^2} + c$

$\Rightarrow e^{x^2}u = -\dfrac{1}{4}x^2 e^{x^2} + \dfrac{1}{4}e^{x^2} + c$

$\Rightarrow u = -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4} + ce^{-x^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{u^2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4} + ce^{-x^2}\right)^2} \\ y = 0 \text{ S.O.} \end{cases}$

Opmerking: nogal wat mensen meenden $-\dfrac{1}{2}\int x^3 e^{x^2} dx$ te kunnen oplossen met partiële integratie. Dit kan evenwel niet! Immers, stel

$$\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^{x^2} dx \end{cases}$$

dan schreven nogal wat mensen dat $v = \dfrac{e^{x^2}}{2x}$. Dit is evenwel compleet fout. e^{x^2} is niet primitiveerbaar!

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' + 4y = 4x \sin x$$

Je krijgt cadeau dat

$$\begin{aligned} \int x \cos ax dx &= \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x \sin ax + c \\ \int x \sin ax dx &= \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x \cos ax + c \end{aligned}$$

- Homogene vergelijking: $y'' + 4y = 0$
  Karakteristieke vergelijking: $\Phi(t) = t^2 + 4 = 0 \Rightarrow t \in \{2i, -2i\}$
  $\Rightarrow y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$
- Methode van de variatie van de parameters:
  $W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
  Stel $z_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 4x\sin x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -2x\sin x \sin 2x = x(\cos 3x - \cos x)$
  $\Rightarrow z_1 = \int x\cos 3x dx - \int x \cos x dx = \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{3}x\sin 3x - \cos x - x\sin x$
  Stel $z_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & 4x\sin x \end{vmatrix} = 2x\sin x\cos 2x = x(\sin 3x - \sin x)$
  $\Rightarrow z_2 = \int x\sin 3x dx - \int x\sin x dx = \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x - \sin x + x\cos x$
  $\Rightarrow y_{nh} = \left(\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{3}x\sin 3x - \cos x - x\sin x\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x - \sin x + x\cos x\right)\sin 2x$
  $= \frac{1}{9}\cos 3x\cos 2x + \frac{1}{3}x\sin 3x\cos 2x - \cos x\cos 2x - x\sin x\cos 2x + \frac{1}{9}\sin 3x\sin 2x - \frac{1}{3}x\cos 3x\sin 2x -$
  $\sin x\sin 2x + x\cos x\sin 2x$
  $= \frac{1}{9}(\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x) + \frac{1}{3}x(\sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x) - (\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x) +$
  $x(\cos x\sin 2x - \sin x\cos 2x)$
  $= -\frac{8}{9}\cos x + \frac{4}{3}x\sin x$
  $\Rightarrow y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{8}{9}\cos x + \frac{4}{3}x\sin x$

3. Zoek 4 rekenkundige rijen van 4 termen a, b, c en d, waarvoor $ad = -20$ en $bc = 12$. Bewijs dat voor elk van deze vier oplossingen $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ dezelfde waarde geeft.
   Gegeven: $(a, b, c, d) = (b - v, b, b + v, b + 2v)$
   $\begin{cases} (b - v)\cdot(b + 2v) = -20 \\ b\cdot(b + v) = 12 \end{cases}$
   Oplossing: $\Rightarrow \begin{cases} b^2 + bv - 2v^2 = -20 \\ b^2 + bv = 12 \end{cases}$
   $\Rightarrow \begin{cases} -2v^2 = -32 \\ b^2 + bv = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 = 16 \\ b^2 + bv = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \in \{-4, 4\} \\ b^2 + bv = 12 \end{cases}$

   - Als $v = 4 \Rightarrow b^2 + 4b - 12 = 0 \Rightarrow b \in \{2, -6\}$
     - Als $b = 2 \Rightarrow a = b - v = 2 - 4 = -2$
       $\Rightarrow \boxed{(a, b, c, d) = (-2, 2, 6, 10)}$
     - Als $b = -6 \Rightarrow a = b - v = -6 - 4 = -10$
       $\Rightarrow \boxed{(a, b, c, d) = (-10, -6, -2, 2)}$
   - Als $v = -4 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Rightarrow b \in \{-2, 6\}$
     - Als $b = -2 \Rightarrow a = b - v = -2 + 4 = 2$
       $\Rightarrow \boxed{(a, b, c, d) = (2, -2, -6, -10)}$
     - Als $b = 6 \Rightarrow a = b - v = 6 + 4 = 10$
       $\Rightarrow \boxed{(a, b, c, d) = (10, 6, 2, -2)}$
   - Voor elk van de waarden is $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10^2 + 6^2 + 4 + 4 = 144$

4. Bereken de 4de Taylorpolynoom van de functie $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ in 0
   $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right) \Rightarrow f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} \Rightarrow f''(0) = 1$$
$$f'''(x) = \frac{4x^3+6x^2-6x-4}{\left(x^2+x+1\right)^3} \Rightarrow f'''(0) = -4$$
$$f''''(x) = \frac{\left(-12x^4-24x^3+36x^2+48x+6\right)}{\left(x^2+x+1\right)^4} \Rightarrow f''''(0) = 6$$
$$\Rightarrow T_4(f,0)(x) = x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + \frac{6}{4!}x^4 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$$

Opmerking: dit is een erg leuke Taylorreeks!

$$\ln\left(x^2+x+1\right) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + ... + \frac{1}{3n-2}x^{3n-2} + \frac{1}{3n-1}x^{3n-1} - \frac{2}{3n}x^{3n} + ...$$