Examen Toegepaste Wiskunde II Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 2e zittijd 2008–2009

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Ga de convergentie of divergentie na van de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(2x^3 - 6x\right) e^{-x^2} dx$

/8

2. Beschouw de parameterkromme $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2} \right)$

   (a) Bewijs dat die overal regulier is.

   (b) Bereken de booglengte hiervan met als domein geheel $\mathbb{R}$ (je hebt hiervoor een oneigenlijke integraal nodig!)

/8

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(x^3 + y^3\right) + 2xy^2y' = 0$$

met als randvoorwaarde $y\left(1\right) = 2$.

/9

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$$

/9

5. Ga na of de volgende reeks (a) convergent, (b) absoluut convergent is:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n \ln n}$$

/9

6. Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{1 + x}$

   (a) Schrijf hier voor de n–de MacLaurinpolynoombenadering rond 0

(b) Bewijs dat de restterm van de MacLaurinreeks gelijk is aan

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} (1+c)^{(-1-2n)/2} x^{n+1}$$

met $c \in \,]0, x[$

(c) Bewijs dat als $c > 0$ dat dan $(1+c)^{(-1-2n)/2} < 1$

(d) Bereken $\sqrt{1.3}$ met een nauwkeurigheid van 6 cijfers na de komma (dus $|\text{WW–afschatting}| < 10^{-6}$)
De werkelijke waarde is ongeveer $\sqrt{1.3} \simeq 1.140\,175\,425$

/10

7. Gegeven de functie $f(x, y) = e^x \sin y$ in het punt $a\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.

   (a) Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(a, f(a))$ in de richting $h(1, 2)$, en geef een parametervergelijking van de raaklijn in kwestie.

   (b) Bereken het raakvlak in $(a, f(a))$.

   (c) Bewijs dat de raaklijn in het raakvlak ligt (hint: zoek een algemeen punt van (a) en vul dat in de vergelijking (b) in).

/8

8. Bepaal met de multiplicatoren van Lagrange de kritische punten van de functie $f(x, y, z) = xyz$ op het oppervlak $x + y + z = 5$ en onderzoek hun aard. (hint voor dit laatste: beschouw de functie $f(x, y, 5 - x - y)$)

/9

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

| /70 |

Oplossingen:

1. Ga de convergentie of divergentie na van de oneigenlijke integraal $\int\limits_0^{+\infty} \left(2x^3 - 6x\right) e^{-x^2} dx$

$\int\limits_0^{+\infty} \left(2x^3 - 6x\right) e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{+\infty} -2x\left(-x^2 + 3\right) e^{-x^2} dx$

Stel $t = -x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$ en $-x^2 + 3 = t + 3$. $\begin{cases} x = 0 & \rightarrow & t = 0 \\ x = +\infty & \rightarrow & t = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int\limits_0^{-\infty} (t+3)\, e^t dt = -\int\limits_{-\infty}^{0} (t+3)\, e^t dt$

Stel $\begin{cases} u = t + 3 \\ dv = e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = e^t \end{cases}$

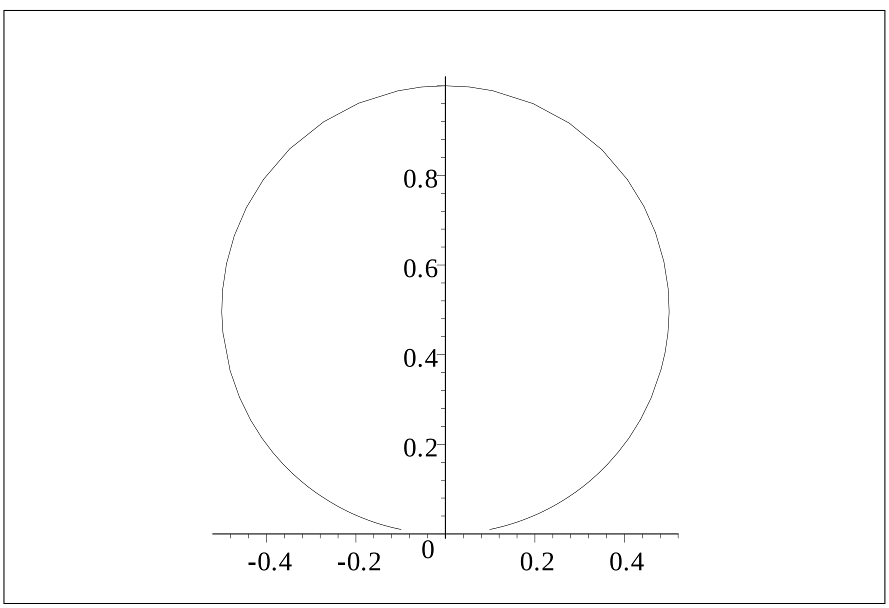
$\Rightarrow I = -\left[(t+3)\, e^t\right]_{-\infty}^{0} + \int\limits_{-\infty}^{0} e^t dt$

$= \left[(-t-2)\, e^t\right]_{-\infty}^{0} = -2$

2. Beschouw de parameterkromme $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)$

   (a) Bewijs dat die overal regulier is.
   $X'(t) = \left(\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}, -\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)$ waarvan de tellers onmogelijk allebei tegelijk nul kunnen worden.

   (b) Bereken de booglengte hiervan met als domein geheel $\mathbb{R}$ (je hebt hiervoor een oneigenlijke integraal nodig!)



$L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)^2 + \left(-\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)^2} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{\left(1-t^2\right)^2 + 4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\right)} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\operatorname{Bgtg} t\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(x^3+y^3\right)+2xy^2y'=0$$

met als randvoorwaarde $y\left(1\right)=2$.
Stel $y=ux$
$\Rightarrow \left(x^3+u^3x^3\right)+2u^2x^3\left(xu'+u\right)=0$
$\Rightarrow \left(1+u^3\right)+2u^2\left(xu'+u\right)=0$
$\Rightarrow \left(1+u^3\right)+2u^2xu'+2u^3=0$
$\Rightarrow \left(1+3u^3\right)+2u^2xu'=0$
$\Rightarrow \left(1+3u^3\right)=-2u^2x\dfrac{du}{dx}$
$\Rightarrow \dfrac{dx}{x}=\dfrac{-2u^2}{1+3u^3}du$
$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{-2u^2}{1+3u^3}du$ met $1+3u^3 \Leftrightarrow y=\dfrac{-x}{\sqrt[3]{3}}$ S.O.
$\Rightarrow \ln|x|+c=-\dfrac{2}{9}\ln\left|1+3u^3\right|$
$\Rightarrow \ln|x|+\dfrac{2}{9}\ln\left|1+3u^3\right|=c$
$\Rightarrow 9\ln|x|+2\ln\left|1+3u^3\right|=c$
$\Rightarrow \ln|x|^9+\ln\left|1+3u^3\right|^2=c$
$\Rightarrow |x|^9\left(1+3u^3\right)^2=k>0$
$\Rightarrow x^9\left(1+3u^3\right)^2=k\neq 0$
$\Rightarrow x^9\left(1+3\dfrac{y^3}{x^3}\right)^2=k\neq 0$
$\Rightarrow x^3\left(x^3+3y^3\right)^2=c$ als we de S.O. er weer bijnemen.
Stel $(x,y)=(1,2)\Rightarrow x^3\left(x^3+3y^3\right)^2=625$
$\Rightarrow x^3\left(x^3+3y^3\right)^2=625$

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x^2y''-2xy'+2y=x^2$$

Homogene vergelijking: $x^2y''-2xy'+2y=0$
Stel $x=e^z\Rightarrow\left(\ddot{y}-\dot{y}\right)-2\dot{y}+2y=0$
$\Rightarrow \ddot{y}-3\dot{y}+2y=0$
Karakteristieke vergelijking: $t^2-3t+2=0\Rightarrow t\in\{1,2\}$
$\Rightarrow y\left(z\right)=c_1e^z+c_2e^{2z}$
$\Rightarrow y\left(z\right)=c_1x+c_2x^2$
Niet-homogene vergelijking: Stel $W\left(x\right)=\begin{vmatrix} x & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}=x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1'=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x^2\\ 1 & 2x\end{vmatrix}}{x^2}=-1\Rightarrow z_1=\displaystyle\int -1dx=-x\\ z_2'=\dfrac{\begin{vmatrix} x & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{x^2}=\dfrac{1}{x}\Rightarrow z_2=\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\ln x\end{cases}$$

$\Rightarrow y_p=-x\cdot x+x^2\ln x=-x^2+x^2\ln x$
$\Rightarrow y=x^2\left(\ln x\right)+C_1x+C_2x^2$

5. Ga na of de volgende reeks (a) convergent, (b) absoluut convergent is:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n\ln n}$$

(a) De reeks is convergent want ze is alternerend en $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+n\ln n} = 0$

(b) De reeks is niet absoluut convergent want $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+n\ln n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$, immers

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1+n\ln n}}{\dfrac{1}{n\ln n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{1+n\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\dfrac{1}{n}+\ln n} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\overset{(H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

En $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ is divergent want $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln 2}$ is divergent

6. Gegeven de functie $f(x) = \sqrt{1+x}$

(a) Schrijf hier voor de n–de MacLaurinpolynoombenadering rond 0

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}(1+x)^{(1-2n)/2} \\
f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}}(1+x)^{(-1-2n)/2}
\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= \frac{1}{2} \\
f''(0) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
f'''(0) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \\
&\dots \\
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} \\
f^{(n+1)}(c) &= (-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}}(1+c)^{(-1-2n)/2}
\end{aligned}$$

(b) Bewijs dat de restterm van de MacLaurinreeks gelijk is aan

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}(1+c)^{(-1-2n)/2}x^{n+1}$$

met $c \in \left]0, x\right[$
De Maclaurinreeks wordt dus

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^4 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)}{2^n n!} + R_n(x)$$

met $R_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}(1+c)^{(-1-2n)/2}x^{n+1}$

(c) Bewijs dat als $c > 0$ dat dan $(1+c)^{(-1-2n)/2} < 1$
$1 < 1 + c$ en $\dfrac{(-1-2n)}{2} < 0 \Rightarrow 1 = 1^{(-1-2n)/2} > (1+c)^{(-1-2n)/2}$

(d) Bereken $\sqrt{1.3}$ met een nauwkeurigheid van 6 cijfers na de komma (dus |WW–afschatting| $< 10^{-6}$)
De werkelijke waarde is ongeveer $\sqrt{1.3} \simeq 1.140\,175\,425$
Als de fout $< 10^{-6}$ dan moet

$$|R_n(x)| \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}$$

n	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}0.3^{n+1}$
4	6.645×10^{-5}
5	1.495×10^{-5}
6	3.524×10^{-6}
7	8.590×10^{-7}
8	2.147×10^{-7}

$\Rightarrow n = 7$
$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2^2 2!}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^3 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^4 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^5 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^6 6!}x^6 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^7 7!}x^7$
$\Rightarrow \sqrt{1.3} \simeq 1.\,140\,176\,113$

7. Gegeven de functie $f(x,y) = e^x \sin y$ in het punt $a\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(a) Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(a, f(a))$ in de richting $h(1,2)$, en geef een parametervergelijking van de raaklijn in kwestie.

$$Df(a,h) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(a+\lambda h) - f(a)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\left(1,\frac{\pi}{4}\right) + \lambda(1,2)\right) - f\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(1+\lambda, \frac{\pi}{4}+2\lambda\right) - f\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{1+\lambda}\sin\left(\frac{1}{4}\pi + 2\lambda\right) - e\frac{\sqrt{2}}{2}}{\lambda}$$
$$= e\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{\lambda}\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos(2\lambda) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin(2\lambda)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\lambda}$$
$$= e\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\lambda) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\lambda)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\lambda}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e\lim_{\lambda\to 0}\frac{e^{\lambda}(\cos(2\lambda) + \sin(2\lambda)) - 1}{\lambda} = \frac{0}{0}$$
$$\overset{(H)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}e\lim_{\lambda\to 0}\frac{3e^{\lambda}\cos 2\lambda - e^{\lambda}\sin 2\lambda}{1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}e$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{4} \\ e\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}e \end{pmatrix}$$

(b) Bereken het raakvlak in $(a, f(a))$.

$f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e\sqrt{2}$

$g(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = (1, 0, e^x \sin y)$

$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = (0, 1, e^x \cos y)$

$\eta(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \times \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = (-e^x \sin y, -e^x \cos y, 1)$

$\eta\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}e\sqrt{2}, -\frac{1}{2}e\sqrt{2}, 1\right)$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2}e\sqrt{2} + \frac{1}{2}e\sqrt{2}(x-1) + \frac{1}{2}e\sqrt{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$

(c) Bewijs dat de raaklijn in het raakvlak ligt (hint: zoek een algemeen punt van (a) en vul dat in de vergelijking (b) in).

Een algemene vergelijking van een punt van de raaklijn is

$$\left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}e\sqrt{2}\right) + \lambda\left(1, 2, \frac{3}{2}e\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} (\lambda+1) & \left(\frac{1}{4}\pi + 2\lambda\right) & \frac{1}{2}\sqrt{2}e + \frac{3}{2}\sqrt{2}\lambda e \end{pmatrix}$$

Vullen we die in in de vergelijking van het raakvlak dan krijgen we

$$\frac{1}{2}e\sqrt{2} + \frac{1}{2}e\sqrt{2}((\lambda+1)-1) + \frac{1}{2}e\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{4}\pi + 2\lambda\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e + \frac{3}{2}\sqrt{2}\lambda e$$

8. Bepaal met de multiplicatoren van Lagrange de kritische punten van de functie $f(x, y, z) = xyz$ op het oppervlak $x + y + z = 5$ en onderzoek hun aard. (hint voor dit laatste: beschouw de functie $f(x, y, 5 - x - y)$)

$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 5)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -yz \\ \lambda = -xz \\ \lambda = -xy \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -yz \\ -yz = -xz \\ -yz = -xy \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

- Als $z = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ en $(x = 0$ of $y = 0) \Rightarrow (5, 0, 0)$ of $(0, 0, 5)$
- Als $z \neq 0 \Rightarrow x = y$ en $\begin{cases} \lambda = -xz \\ -xz = -x^2 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$
  - Als $x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ en $z = 5 \Rightarrow (0, 0, 5)$
  - Als $x \neq 0 \Rightarrow z = x = y \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = y = z = \frac{5}{3}$
- Aard: Stel $f(x, y) = xy(5 - x - y)$

  $\Rightarrow D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 5 - 2y - 2x \\ 5 - 2y - 2x & -2x \end{pmatrix}$

  $H(x, y) = -4x^2 - 4xy + 20x - 4y^2 + 20y - 25$

  $H(0, 0) = -25 \Rightarrow$ zadelpunt

  $H(0, 5) = -25 \Rightarrow$ zadelpunt

  $H(5, 0) = -25 \Rightarrow$ zadelpunt

  $H\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{25}{3}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{10}{3} < 0 \Rightarrow$ maximum