Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2016–2017

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Zoek het volume van het gebied binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 9$ dat boven het vlak $z = 0$ en onder de onderste helft van de bol $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 9$ ligt.

/10

2. Zij α de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$, in tegenwijzerzin georiënteerd, en zij $\mathbf{f}(x,y) = \left(\ln\left(1+y^2\right), \dfrac{xy}{1+y^2}\right)$. Bereken $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{f}\, d\alpha$. $\boxed{\quad /10}$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' - xy' + 4y = 0$$

Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)$ of iets gelijkaardigs).

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

/10

5. Zij $\psi(x,y) : [0,\pi]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$ met als randvoorwaarden $\forall y \in [0,1] : \psi(0,y) = \psi(\pi,y) = 0$ en $\forall x \in [0,\pi] : \psi(x,0) = x$. Bereken $\psi(x,1)$. /10

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' - 6y' + 8y = -16t - 28 \text{ met } y(-2) = 3 \text{ en } y'(-2) = 20$$

/10

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y\left(n+2\right)+3y\left(n+1\right)-4y\left(n\right)=1 \text{ met } y\left(0\right)=2 \text{ en } y\left(1\right)=3$$

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\quad\quad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\quad\quad /60}$

Oplossingen:

1. Zoek het volume van het gebied binnen de cylinder $x^2+y^2=9$ dat boven het vlak $z=0$ en onder de onderste helft van de bol $x^2+y^2+(z-5)^2=9$ ligt.

   $V = \iiint\limits_{\Omega} dV = \iint\limits_{R} \left(5-\sqrt{9-x^2-y^2}\right) dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3} \left(5-\sqrt{9-r^2}\right) r dr d\theta = \int\limits_0^{3} \left(5r - r\sqrt{9-r^2}\right) dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{5}{2}r^2 + \frac{1}{3}\sqrt{\left(9-r^2\right)^3}\right]_0^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} = 27\pi$

   Feedback: Het is $5-\sqrt{9-x^2-y^2}$ en dus niet $5+\sqrt{9-x^2-y^2}$; dat is de bovenste helft van de bol!

   En het is zeker niet $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3}\int\limits_0^{5} r dr d\theta$ want dat is de cylinder!

2. Zij α de driehoek met hoekpunten $(0,0), (1,0)$ en $(0,1)$, in tegenwijzerzin georiënteerd, en zij $\mathbf{f}(x,y) = \left(\ln\left(1+y^2\right), \frac{xy}{1+y^2}\right)$. Bereken $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{f} d\alpha$.

   $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{1+y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(1+y)\right) = \frac{y}{1+y^2} - \frac{2y}{1+y^2} = \frac{-y}{1+y^2}$

   $\Rightarrow \oint\limits_{\alpha} \mathbf{f} d\alpha = \iint\limits_{R} \frac{-y}{1+y^2} dS = \int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1-x} \frac{-y}{1+y^2} dy dx$

   - ofwel $\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1-x} \frac{-y}{1+y^2} dy dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \left[\ln\left|1+y^2\right|\right]_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} \ln\left|x^2-2x+2\right| dx$

     Stel $\begin{cases} u = \ln\left(x^2-2x+2\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} \\ v = x \end{cases}$

     $= -\frac{1}{2}\left(\left[x\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2} dx\right)$

     $= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(2 + \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\right) dx = \int\limits_0^1 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2} - \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+1}$

     $= \left[x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| - \operatorname{Bgtan}(x-1)\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

   - ofwel $\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1-y} \frac{-y}{1+y^2} dx dy = \int\limits_0^1 \frac{y^2-y}{y^2+1} dy = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{y+1}{y^2+1}\right) dy$

     $= [y]_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(y^2+1\right)}{y^2+1} - \int\limits_0^1 \frac{dy}{y^2+1} = \left[y - \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right| - \operatorname{Bgtan} y\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi$

     Feedback: Uiteraard is de tweede voorgestelde volgorde een stuk makkelijker. Evenwel zijn de integratiegrenzen *niet* $\int\limits_0^1\int\limits_0^1$, want dat is een vierkant en geen rechthoek!

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' - xy' + 4y = 0$$

Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot ... \cdot (3n-2)$ of iets gelijkaardigs).

$$\text{Stel} \left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Stel $m = n-2 \Rightarrow n = m+2$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) c_{n+2} + (-n+4) c_n\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow c_{n+2} = \frac{n-4}{(n+1)(n+2)} c_n$$

Kies $c_0 \Rightarrow c_2 = -2c_0$

$\Rightarrow c_4 = -\frac{1}{6} c_2 = \frac{1}{3} c_0$

$\Rightarrow c_6 = c_8 = c_{10} = ... = c_{2n} = 0$

Kies $c_1 \Rightarrow c_3 = \frac{(-3)}{2 \cdot 3} c_1 = -\frac{1}{2} c_1$

$\Rightarrow c_5 = \frac{(-1)}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{(-3) \cdot (-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1$

$\Rightarrow c_7 = \frac{1}{6 \cdot 7} c_5 = \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} c_1$

$\Rightarrow ...$

$\Rightarrow c_{2n+1} = \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-5)}{(2n+1)!} c_1$

$$\Rightarrow y(x) = c_0 \left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + c_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-5)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right]$$

$$= c_0 \left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + c_1 \left[x + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-5) \cdot 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n-4)}{(2n+1)! \cdot 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n-4)} x^{2n+1}\right]$$

$$= c_0 \left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + c_1 \left[x + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-4)!}{2^{n-2} (2n+1)! (n-2)!} x^{2n+1}\right]$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Karakteristieke vergelijking: } \det(A - \lambda E) = \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 =$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

E_2 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

We zoeken een tweede oplossing: Stel $X_3 = (U + tV)\, e^{2t}$

$X_3' = AX_3 \Rightarrow e^{2t}(2U + V + 2Vt) = AUe^{2t} + AVte^{2t} \Rightarrow \begin{cases} AU = 2U + V \\ AV = 2V \end{cases}$

Kies $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 2E)\, U = V \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ -2a-2b-c=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a = -b \\ c = -1 \end{cases}$

Stel bijvoorbeeld $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (U + tV)\, e^{2t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t-1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Feedback: $C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ of zoiets is *niet juist*!

5. Zij $\psi(x, y) : [0, \pi] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven die voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ met als randvoorwaarden $\forall y \in [0, 1] : \psi(0, y) = \psi(\pi, y) = 0$ en $\forall x \in [0, \pi] : \psi(x, 0) = x$. Bereken $\psi(x, 1)$.

$X''Y = 2XY' \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = 2\dfrac{Y'}{Y} = -\lambda^2$

$\Rightarrow X'' = -\lambda^2 X$ met $X(0) = X(1) = 1$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$

$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = C_2 \sin \lambda x$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \lambda \pi = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{N}_0$

$Y' = -\dfrac{n^2}{2} Y \Rightarrow Y = c_3 e^{-\frac{n^2}{2} y}$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \cdot e^{-\frac{n^2}{2} y}$$

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = x \Rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{n} \cos nx \end{cases}$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{n} \cos \pi n = -\frac{2}{n} \cos \pi n =$$

$\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

$\Rightarrow \psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \cdot e^{-\frac{n^2}{2}y}$

$\Rightarrow \psi(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \cdot e^{-\frac{n^2}{2}}$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' - 6y' + 8y = -16t - 28 \text{ met } y(-2) = 3 \text{ en } y'(-2) = 20$$

Stel $t = s - 2 \Rightarrow s = t + 2$

$\Rightarrow w'' - 6w' + 8w = -16s + 4$ met $w(0) = 3$ en $w'(0) = 20$

$\Rightarrow \mathcal{L}[w''] - 6\mathcal{L}[w'] + 8\mathcal{L}[w] = \mathcal{L}[-16s + 4]$

$\left(k^2W(k) - 3k - 20 - 6(kW(k) - 3) + 8W(k)\right) = \frac{-16}{k^2} + \frac{4}{k}$

$\Rightarrow \left(k^2 - 6k + 8\right) W(k) = 3k + 2 + \frac{-16}{k^2} + \frac{4}{k}$

$\Rightarrow W(k) = \frac{3k + 2 + \frac{-16}{k^2} + \frac{4}{k}}{(k^2 - 6k + 8)} = \frac{3k^3 + 2k^2 - 16 + 4k}{(k-2)(k-4)k^2} = \frac{A}{k-4} + \frac{B}{k-2} + \frac{C}{k^2} + \frac{D}{k}$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{3k^3 + 2k^2 - 16 + 4k}{(k-2)k^2}\right|_{k=4} = 7 \\
B &= \left.\frac{3k^3 + 2k^2 - 16 + 4k}{(k-4)k^2}\right|_{k=2} = -3 \\
C &= \left.\frac{3k^3 + 2k^2 - 16 + 4k}{(k-4)(k-2)}\right|_{k=0} = -2 \\
\frac{3k^3 + 2k^2 - 16 + 4k}{(k-2)(k-4)k^2} + \frac{2}{k^2} &= \frac{4k + 3k^2 - 8}{k(k-2)(k-4)} \\
D &= \left.\frac{4k + 3k^2 - 8}{(k-2)(k-4)}\right|_{k=0} = -1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W(k) = \frac{7}{k-4} - \frac{3}{k-2} - \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k}$

$\Rightarrow w(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{k-4} - \frac{3}{k-2} - \frac{2}{k^2} - \frac{1}{k}\right] = 7e^{4s} - 3e^{2s} - 2s - 1$

$\Rightarrow y(t) = 7e^{4(t+2)} - 3e^{2(t+2)} - 2(t+2) - 1 = 7e^{4t+8} - 3e^{2t+4} - 2t - 5$

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y(n+2) + 3y(n+1) - 4y(n) = 1 \text{ met } y(0) = 2 \text{ en } y(1) = 3$$

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, -4\}$

$\Rightarrow y_c(n) = c_1 + c_2(-4)^n$

Annihilator $N(E) = E - 1$

Hyperannihilator: $p(E)N(E) = (E-1)^2(E+4)$

$\Rightarrow y_p(n) = a_1 + a_2 n + a_3(-4)^n$

$\Rightarrow y_p(n) = a_2 n$

Eis: $a_2(n+2) + 3a_2(n+1) - 4a_2 n \equiv 1$

$\Rightarrow 5a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{5}$

$y(n) = c_1 + c_2(-4)^n + \frac{1}{5}n$

|Eis: $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 2 \\ y(1) = c_1 - 4c_2 + \dfrac{1}{5} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{54}{25} \\ c_2 = -\dfrac{4}{25} \end{cases}$

$\Rightarrow y(n) = \dfrac{54}{25} - \dfrac{4}{25}(-4)^n + \dfrac{1}{5}n$