# Examen Wiskunde Oefeningen REEKS A

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2009–2010

| | |
|---|---|
| Naam: | ...................................................... |
| Richting: | SCH / BIC / BIR |
| Studentenkaartnr.: | ...................................................... |

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Bereken alle oplossingen van de vergelijking $z^8 = 4096$.

/6

2. Bij deling van $A(z)$ door $z - i$ is de rest $2i$. Bij deling door $z - 2i$ is de rest $1 - 3i$. Wat is de rest bij delling door $z^2 - 3iz - 2 = (z - i)(z - 2i)$?

/5

3. Voor welke waarde(n) van $\lambda$ is/zijn de vectoren $\overrightarrow{v_1}\,(2\lambda, -1, 3)$, $\overrightarrow{v_2}\,(2, 1, \lambda)$ en $\overrightarrow{v_3}\,(0, \lambda+1, 1)$ lineair afhankelijk? Schrijf in al die gevallen ook een afhankelijke betrekking op.

/5

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} 3w - 2x + 4y + 6z = 11 \\ -2w + x - 3y - 5z = -8 \\ w + 2x + 4y + 8z = 11 \end{cases}$$

/6

5. Zoek het unieke vlak dat door de rechte $A : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z + 3 = 0 \\ x + y - 3z - 5 = 0 \end{array} \right.$ en het punt $p\,(2, 3, -4)$ gaat.

/5

6. De transformatie $t$ heeft als transformatieformules $\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{array} \right.$. Zoek de eigenwaarden en eigenvectoren, en bereken een equispectrale Jordanmatrix.

/6

7. Bereken de limieten van $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-6x+5}{x^{3}-2x^{2}-x+2}$ voor

(a) $x=5$

(b) $x=-1$

(c) $x=1$

(d) $x=+\infty$

/6

8. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\log_4 (x+7) - \log_2 \left(x^2 - 6x - 11\right) = -\log_2 (x-5)$$

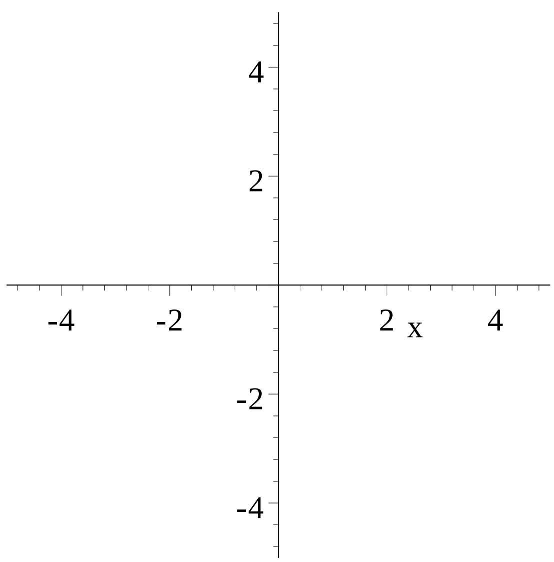
Kijk goed na of de gekomen oplossingen wel oplossingen van de vergelijking zijn!

/6

9. Voor elke $x \in \,]0,1[$ beschouw je de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met als hoekpunten $(0,0)$, $\left(x^2,0\right)$ en $\left(0,4-x^3\right)$.
Voor welke waarde van $x$ heeft deze driehoek de grootste oppervlakte?

/6

10. Het *ontbijtbeschuitje* heeft als poolvergelijking $r(\theta) = 3 + \sin^2 2\theta$. Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een tekening.




/7

11. Bereken $\int x^4 \cos 2x dx$

/6

12. Bereken $\int \frac{\tan^3 x}{\tan^2 x + 1} dx$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

| /70 |

Oplossingen:

1. Bereken alle oplossingen van de vergelijking $z^8 = 4096$.
   $z^8 = 2^{12}\operatorname{cis}(k2\pi)$
   $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_0 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis} 0 = 2\sqrt{2} \\ z_1 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{4} = 2+2i \\ z_2 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2} = 2i\sqrt{2} \\ z_3 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4} = -2+2i \\ z_4 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\pi = -2\sqrt{2} \\ z_5 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{4} = -2-2i \\ z_6 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{2} = -2i\sqrt{2} \\ z_7 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{4} = 2-2i \end{array}\right.$$

2. Bij deling van $A(z)$ door $z-i$ is de rest $2i$. Bij deling door $z-2i$ is de rest $1-3i$. Wat is de rest bij delling door $z^2-3iz-2=(z-i)(z-2i)$?
   $A(z) = \left(z^2-3iz-2\right)Q(z)+az+b$
   $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(i) = ai+b = 2i \\ A(2i) = 2ai+b = 1-3i \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ai+b = 2i \\ 2ai+b = 1-3i \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -5-i \\ b = -1+7i \end{array}\right.$$
   Antwoord: $(-5-i)\,z+(-1+7i)$

3. Voor welke waarde(n) van $\lambda$ is/zijn de vectoren $\overrightarrow{v_1}(2\lambda,-1,3)$, $\overrightarrow{v_2}(2,1,\lambda)$ en $\overrightarrow{v_3}(0,\lambda+1,1)$ lineair afhankelijk? Schrijf in al die gevallen ook een afhankelijke betrekking op.
   $$\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^3-2\lambda^2+8\lambda+8 = -2(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+1)$$
   - $\lambda=-1 \Rightarrow \overrightarrow{v_1}(-2,-1,3)\,,\ \overrightarrow{v_2}(2,1,-1)\,,\ \overrightarrow{v_3}(0,0,1) \Rightarrow \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{v_3}$
   - $\lambda=2 \Rightarrow \overrightarrow{v_1}(4,-1,3)\,,\ \overrightarrow{v_2}(2,1,2)\,,\ \overrightarrow{v_1}(0,3,1) \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_3}$
   - $\lambda=-2 \Rightarrow \overrightarrow{v_1}(-4,-1,3)\,,\ \overrightarrow{v_2}(2,1,-2)\,,\ \overrightarrow{v_1}(0,-1,1) \Rightarrow \overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_3}$

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:
   $$\left\{ \begin{array}{l} 3w-2x+4y+6z=11 \\ -2w+x-3y-5z=-8 \\ w+2x+4y+8z=11 \end{array}\right.$$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 4 & 6 & 11 \\ -2 & 1 & -3 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1-3R_3 \\ R_2+2R_3}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & -8 & -18 & -22 \\ 0 & 5 & 5 & 11 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{array}\right) \overset{R_1:(-2)}{=}$$
$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 4 & 9 & 11 \\ 0 & 5 & 5 & 11 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{array}\right) \overset{5R_1-4R_5}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 11 & 14 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 11 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 11 & -5 & 14 \\ 1 & 2 & 8 & -4 & 11 \end{array}\right)$$
$$\overset{\substack{R_2-11R_1 \\ R_3-8R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 25 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 19 \end{array}\right) \overset{R_2:5}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 19 \end{array}\right)$$
$$\overset{R_3-2R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right)$$
$\Rightarrow (w,x,y,z) = (9,5,0,-1)+\lambda(-2,-1,1,0)$

5. Zoek het unieke vlak dat door de rechte $A : \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$ en het punt $p\,(2, 3, -4)$ gaat.

Vlakkenbundel: $x - 3y + z + 3 + \lambda\,(x + y - 3z - 5) = 0$

Eis: $2 - 3 \cdot 3 - 4 + 3 + \lambda\,(2 + 3 - 3 \cdot (-4) - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{3}x - \dfrac{7}{3}y - z - \dfrac{1}{3} = 0$

$\Rightarrow 5x - 7y - 3z - 1 = 0$

6. De transformatie $t$ heeft als transformatieformules $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$. Zoek de eigenwaarden en eigenvectoren, en bereken een equispectrale Jordanmatrix.

$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda \in \left\{2^{(2)}\right\}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0$, bijvoorbeeld $\overrightarrow{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Kies $\overrightarrow{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Bereken de limieten van $f\,(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ voor

(a) $x = 5$

$f\,(x) = \dfrac{(x-5)\,(x-1)}{(x-2)\,(x+1)\,(x-1)} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} f\,(x) = 0$

(b) $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} f\,(x) = \dfrac{12}{0} = \infty$

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f\,(x) = \dfrac{12}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} f\,(x) = \dfrac{12}{0^+} = -\infty$

(c) $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f\,(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-5}{(x+1)\,(x-2)} = 2$

(d) $x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0$

8. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\log_4 (x+7) - \log_2 \left(x^2 - 6x - 11\right) = -\log_2 (x-5)$$

Kijk goed na of de gekomen oplossingen wel oplossingen van de vergelijking zijn!

$\dfrac{\log_2 (x+7)}{2} - \log_2 \left(x^2 - 6x - 11\right) = -\log_2 (x-5)$

$\log_2 (x+7) - 2\log_2 \left(x^2 - 6x - 11\right) + 2\log_2 (x-5) = 0$

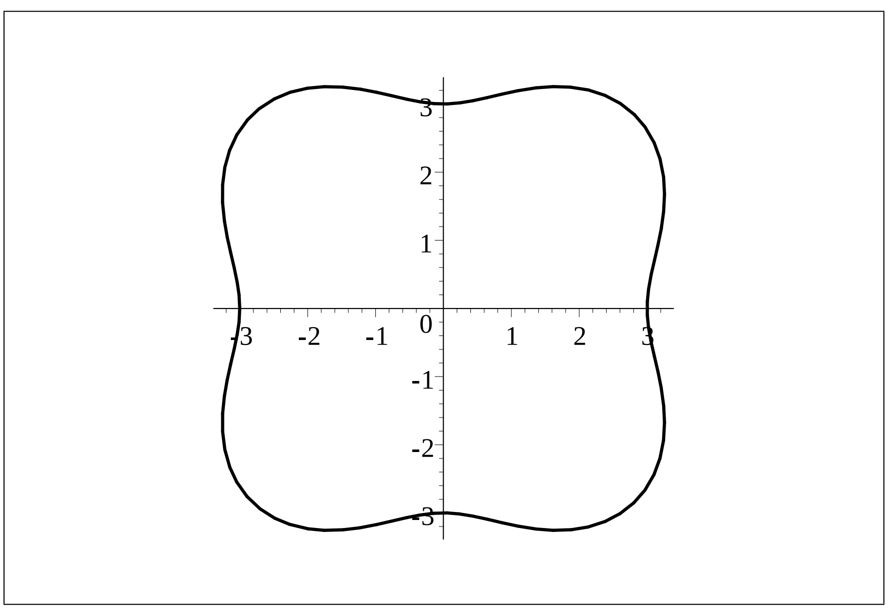
$\log_2 (x+7) - \log_2 \left(x^2 - 6x - 11\right)^2 + \log_2 (x-5)^2 = 0$

$$\frac{(x+7)(x-5)^2}{\left(x^2-6x-11\right)^2}=1$$
$$(x+7)(x-5)^2-\left(x^2-6x-11\right)^2=0$$
$$-x^4+13x^3-17x^2-177x+54=0$$
$$(x-9)(x+3)\left(-7x+x^2+2\right)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-3 \text{ maar dat kan niet door de opgave} \\ x=\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{41} \text{ maar dat kan ook niet door de opgave} \end{cases}$$

9. Voor elke $x \in \,]0,1[$ beschouw je de driehoek in $\mathbb{R}^2$ met als hoekpunten $(0,0)$, $\left(x^2,0\right)$ en $\left(0,4-x^3\right)$. Voor welke waarde van $x$ heeft deze driehoek de grootste oppervlakte?
   Oppervlakte $f(x)=\dfrac{x^2\left(4-x^3\right)}{2}=2x^2-\dfrac{1}{2}x^5$
   $\Rightarrow f'(x)=4x-\dfrac{5}{2}x^4=0 \Rightarrow x\in\left\{0,\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}\right\}$
   Deze punten liggen niet in het interval $]0,1[$, dus de functie heeft geen maximum. Op een open interval hoeft dit ook niet.

10. Het *ontbijtbeschuitje* heeft als poolvergelijking $r(\theta)=3+\sin^2 2\theta$. Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een tekening.
   domein $=\mathbb{R}$
   periode $=\pi$
   Beperkt domein $=[0,\pi]$
   $r'(\theta)=4\sin 2\theta\cos 2\theta=0 \Rightarrow \theta=k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $r'$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $r$ | $3$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $3$ |



11. Bereken $\int x^4 \cos 2x dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^4 \\ dv = \cos 2x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = 4x^3 dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right.$$

$$= \frac{x^4 \sin 2x}{2} - 2\int x^3 \sin 2x dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^3 \\ dv = \sin 2x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = 3x^2 dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} - 2\left(-\frac{x^3}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\int x^2 \cos 2x dx\right) \\ &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - 3\int x^2 \cos 2x dx \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - 3\left(\frac{x^2}{2}\sin 2x - \int x \sin 2x dx\right) \\ &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - \frac{3x^2}{2}\sin 2x + 3\int x \sin 2x dx \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - \frac{3x^2}{2}\sin 2x + 3\left(-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right) \\ &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - \frac{3x^2}{2}\sin 2x - \frac{3x\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx \\ &= \frac{x^4 \sin 2x}{2} + x^3 \cos 2x - \frac{3x^2}{2}\sin 2x - \frac{3x\cos 2x}{2} + \frac{3}{4}\sin 2x + c \end{aligned}$$

12. Bereken $\int \frac{\tan^3 x}{\tan^2 x + 1} dx$

$$t = \tan x$$

$$= \int \frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^2} dt$$

$$\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{At+B}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned} Ai + B &= \lim_{t \to i} t^3 = -i \Rightarrow (A,B) = (-1,0) \\ \frac{Ct+D}{t^2+1} &= \frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^2} + \frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{t}{t^2+1} \Rightarrow (C,D) = (1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left(-\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{t}{t^2+1}\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} = \frac{1}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + c \end{aligned}$$