Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 2e zittijd 2017–2018

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Het *inertiemoment* rond de Z–as van een volume wordt gegeven door de driedubbelintegraal $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dV$.

   Zoek dit inertiemoment voor het ijshoorntje, zijnde de doorsnede van de bovenste helft van de eenheidsbol met de kegel met vergelijking $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (φ zijnde de nutatie).

/10

2. Verifieer de stelling van Stokes voor het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \left(x^2 y, 2y^3 z, 3z\right)$ waarbij α de rand is van de doorsnede van de kegel $z = r$ en de cylinder $x^2 + y^2 = 1$, met de normaal naar boven wijzend.

/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$2y'' + xy' + 3y = 0$$

Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)$ of iets gelijkaardigs).

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + t^2 \end{cases}$$

/10

5. Beschouw de snaar met lengte L, aan beide eindpunten vastgekneld. Deze voldoet aan

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

met als rand–en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\forall t &\geq 0 : \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0 \\
\forall x &\in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}\left(x,0\right) = 0 \\
\forall x &\in [0,L] : \psi\left(x,0\right) = f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{4x}{L} & \text{als} \quad x \in \left[0, \dfrac{L}{4}\right] \\ 1 & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{L}{4}, \dfrac{3L}{4}\right] \\ \dfrac{4\left(L-x\right)}{L} & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{3L}{4}, 1\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

Bepaal een algemene formule voor $\psi\left(x,t\right)$. /10

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$2y'' + 5y' + 2y = 2t - 1 \text{ met } y(1) = -2 \text{ en } y'(1) = 3$$

/10

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$x\left(n+1\right)=\frac{-x\left(n\right)+3}{3x\left(n\right)-1}$$

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

$\Rightarrow$ /60

Oplossingen:

1. Het *inertiemonent* rond de Z–as van een volume wordt gegeven door de driedubbelintegraal $\iiint\limits_{\Omega} \left(x^2+y^2\right) dV$.

   Zoek dit inertiemoment voor het ijshoorntje, zijnde de doorsnede van de bovenste helft van de eenheidsbol met de kegel met vergelijking $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (φ zijnde de nutatie).

   In bolcoördinaten is $I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\rho^2 \sin^2 \varphi\right) \left(\rho^2 \sin \varphi\right) d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \int\limits_0^1 \rho^4 \sin^3 \varphi d\rho d\varphi d\theta$

   $= \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 \varphi d\varphi \cdot \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 \varphi - 1\right) d\left(\cos \varphi\right) \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1$

   $= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{12}$

2. Verifieer de stelling van Stokes voor het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \left(x^2 y, 2y^3 z, 3z\right)$ waarbij α de rand is van de doorsnede van de kegel $z = r$ en de cylinder $x^2 + y^2 = 1$, met de normaal naar boven wijzend.

   - Rechtstreeks: $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\cos t, \sin t, 1)$
     $\Rightarrow \mathbf{F}\left(\alpha\left(t\right)\right) = \left(\cos^2 \alpha \sin \alpha, 2 \sin^3 \alpha, 3\right)$ en $\alpha'\left(t\right) = \left(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\right)$
     $\Rightarrow \oint \mathbf{F} d\alpha = \int\limits_0^{\pi} \left(\cos^2 \alpha \sin \alpha, 2 \sin^3 \alpha, 3\right) \cdot \left(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\right) = \int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin^3 \alpha\right) d\alpha$
     $= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)^2 d\alpha - \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) d\alpha + 2 \int\limits_0^{2\pi} \cos \alpha \sin^3 \alpha d\alpha$
     $= \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right) d\alpha - \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2\alpha\right) d\alpha + 2 \int\limits_0^{2\pi} \cos \alpha \sin^3 \alpha d\alpha$
     $= \frac{1}{8} \int\limits_0^{2\pi} \left(2 + 4 \cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha\right) d\alpha - \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2\alpha\right) d\alpha + 2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 \alpha d\left(\sin \alpha\right)$
     $= \left[\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{8} + \frac{1}{32} \sin 4\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{4}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\pi$
   - Via Stokes: $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 2y^3 z & 3z \end{vmatrix} = \left(-2y^3, 0, -x^2\right)$
     De sectie van de kegel wordt gegeven door

     $$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

     $\eta_\varphi\left(r, \theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cos \theta, r \sin \theta, r\right) \times \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \cos \theta, r \sin \theta, r\right) = \left(\cos \theta, \sin \theta, 1\right) \times \left(-r \sin \theta, r \cos \theta, 0\right) = \left(-r \cos \theta, -r \sin \theta, r\right)$ en deze wijst wel degelijk naar boven

$$\Rightarrow \iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\eta_{\boldsymbol{\varphi}}dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(-2\left(r\sin\theta\right)^3, 0, -\left(r\cos\theta\right)^2\right)\cdot\left(-r\cos\theta, -r\sin\theta, r\right)drd\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left(2r^4\cos\theta\sin^3\theta - r^3\cos^2\theta\right)drd\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{2}{5}r^5\cos\theta\sin^3\theta - \frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5}\cos\theta\sin^3\theta - \frac{1}{4}\cos^2\theta\right)d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5}\cos\theta\sin^3\theta - \frac{1}{8}\left(1+\cos 2\theta\right)\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin^4\theta}{10} - \frac{\theta}{8} - \frac{\sin 2\theta}{16}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\pi$$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$2y'' + xy' + 3y = 0$$

Vijf bonuspunten extra als je de oplossing kan neerschrijven zonder gebruik van doorlooppuntjes (dus geen $1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)$ of iets gelijkaardigs).

$$\text{Stel}\begin{cases} y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \\ y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)c_n x^{n-2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 2n\left(n-1\right)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Stel $m = n-2 \Rightarrow n = m+2$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} 2\left(m+2\right)\left(m+1\right)c_{m+2}x^m + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(n+2\right)\left(n+1\right)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(n+2\right)\left(n+1\right)c_{n+2} + \left(n+3\right)c_n\right]x^n = 0$$

$$\Rightarrow c_{n+2} = -\frac{n+3}{2\left(n+1\right)\left(n+2\right)}c_n$$

- Kies $c_0 \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2\cdot 1\cdot 2}c_0$

  $\Rightarrow c_4 = -\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}c_2 = \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}c_0$

  $\Rightarrow c_6 = -\frac{7}{2\cdot 5\cdot 6}c_4 = -\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}c_0$

  ...

  $\Rightarrow c_{2n} = \frac{\left(-1\right)^n 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot\left(2n+1\right)}{2^n\left(2n\right)!}c_0 = \frac{\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)!}{2^{2n}\left(2n\right)!n!}c_0 = \frac{\left(-1\right)^n\left(2n+1\right)}{2^{2n}n!}c_0$

- Kies $c_1 \Rightarrow c_3 = -\dfrac{4}{2\cdot 2\cdot 3}c_1$
  $\Rightarrow c_5 = -\dfrac{6}{2\cdot 4\cdot 5}c_3 = \dfrac{4\cdot 6}{2^2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}c_1$
  $\Rightarrow c_7 = -\dfrac{8}{2\cdot 6\cdot 7}c_3 = -\dfrac{4\cdot 6\cdot 8}{2^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}c_1$
  ...
  $\Rightarrow c_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot(2n+2)}{2^n(2n+1)!}c_1 = \dfrac{(-1)^n\cdot 2^n(n+1)!}{2^n(2n+1)!}c_1 = \dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}c_1$
  $\Rightarrow y = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}n!}x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) + t \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + t^2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0$

$\Rightarrow E_{-2} : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Voor de tweede oplossing, stel $X_2(t) = (U + tW)e^{3t}$

$\Rightarrow 3Ue^{3t} + We^{3t} + 3tWe^{3t} = A(U+tW)e^{3t}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3U + W = AU \\ 3W = AW \end{cases}$

Kies bijv. $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en zij $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+b \\ 2b-a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -b - a = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Stel bijv. $(a,b) = (1,0)$

$\Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix}e^{3t}$

Stel $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & (1+t)e^{3t} \\ -e^{3t} & -te^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi(t) = e^{6t} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & (1+t)e^{3t} \\ -e^{3t} & -te^{3t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -te^{-3t} & -e^{-3t}(t+1) \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t)F(t) = \begin{pmatrix} -te^{-3t} & -e^{-3t}(t+1) \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 - 2t^2 \\ t^2 + t \end{pmatrix}e^{-3t} = \begin{pmatrix} (-t^3-2t^2)e^{-3t} \\ (t^2+t)e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \int \begin{pmatrix} (-t^3-2t^2)e^{-3t} \\ (t^2+t)e^{-3t} \end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t - \frac{5}{27} \end{pmatrix}e^{-3t} == \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{-3t} \\ \left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t - \frac{5}{27}\right)e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_{nh}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & (1+t)e^{3t} \\ -e^{3t} & -te^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{-3t} \\ \left(-\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t - \frac{5}{27}\right)e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{27}t + \frac{1}{27} \\ -\frac{4}{9}t^2 - \frac{13}{27}t - \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 1+t \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{27}t + \frac{1}{27} \\ -\frac{4}{9}t^2 - \frac{13}{27}t - \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

5. Beschouw de snaar met lengte L, aan beide eindpunten vastgekneld. Deze voldoet aan

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

met als rand–en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned}
\forall t &\geq 0 : \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \\
\forall x &\in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0 \\
\forall x &\in [0,L] : \psi(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{L} & \text{als} \quad x \in \left[0, \dfrac{L}{4}\right] \\ 1 & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{L}{4}, \dfrac{3L}{4}\right] \\ \dfrac{4(L-x)}{L} & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{3L}{4}, 1\right] \end{cases}
\end{aligned}$$

Bepaal een algemene formule voor $\psi(x,t)$.
Laten we als Ansatz aannemen dat in de functie ψ de veranderlijken kunnen worden gescheiden; met andere woorden dat $\psi(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. In dat geval kunnen we deze invullen in de vergelijking, en krijgen we na deling door XT — hetgeen niet nul kan zijn, want dat zou betekenen dat de snaar in rust is en in rust blijft, quid non —

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{c^2}\frac{T^{\cdot\cdot}}{T} = 0$$

Hieruit volgt dat $\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k^2 \\ \dfrac{T^{\cdot\cdot}}{T} = -c^2k^2 = -\omega^2 \end{cases}$ met $\omega = ck$. De randvoorwaarden worden op een analoge manier gescheiden. Zo krijgen we dat $X(0) = X(L) = 0$ voor de eerste vergelijking en $T^{\cdot}(0) = 0$ voor de tweede vergelijking. Hiermee is het oorspronkelijke probleem dus opgesplitst in twee deelproblemen. Het X–probleem is dus als volgt gesteld:

$$\begin{cases} X'' = -k^2X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

met als oplossing

$$X(x) = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx)$$

De randvoorwaarden geven aanleiding tot de betrekkingen $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\sin(kL) = 0 \end{cases}$; indien we aannemen dat de oplossing niet–triviaal is, dan is $k = k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ met $n \in \mathbb{N}$. We vinden dus als eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ en } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Het T–probleem wordt

$$T^{\cdot\cdot}(t) = -\omega_n^2 T(t)$$

met $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$. Deze vergelijking heeft als oplossing

$$T(t) = c_3\cos(\omega t) + c_4\sin(\omega t)$$

Uit de randvoorwaarde $T^{\cdot}(0) = 0$ volgt dan dat $c_4 = 0$, waardoor op een veelvoud na de functies

$$T_n(t) = c_3 \cos(\omega t)$$

overblijven. Bijgevolg is

$$\psi_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

en dus

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

De laatste randvoorwaarde wordt

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Uit de fourier sinusregel volgt dan dat

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/4} \frac{4x}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{L/4}^{3L/4} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{3L/4}^{L} \frac{4(L-x)}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right) \end{aligned}$$

Nu is:

- $\frac{2}{L}\int_0^{L/4} \frac{4x}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{8}{L^2}\int_0^{L/4} x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

  $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array}\right. = \frac{8}{L^2}\left(\left[-\frac{Lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^{L/4} + \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/4}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)$

  $= \frac{8}{L^2}\left[-\frac{Lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^{L/4} = \frac{8}{L^2}\left(-\frac{L^2}{4n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$

  $= \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
- $\frac{2}{L}\int_{L/4}^{3L/4} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = -\frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{L/4}^{3L/4} = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$
- $\frac{2}{L}\int_{3L/4}^{L} \frac{4(L-x)}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{8}{L^2}\int_{3L/4}^{L} (L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

  $\left\{\begin{array}{l} u = L-x \\ dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = -dx \\ v = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{array}\right. = \frac{8}{L^2}\left(\left[-\frac{L(L-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{3L/4}^{L} - \frac{L}{n\pi}\int_{3L/4}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)$

$$= \frac{8}{L^2}\left[-\frac{L(L-x)}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_{3L/4}^{L} = \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$2y'' + 5y' + 2y = 2t - 1 \text{ met } y(1) = -2 \text{ en } y'(1) = 3$$

Stel $t = s + 1 \Rightarrow s = t - 1$ en $w(s) = y(t)$

$\Rightarrow 2w'' + 5w' + 2w = 2s + 1$ met $w(0) = -2$ en $w'(0) = 3$

$\Rightarrow 2\left(k^2 W(k) - kw(0) - w'(0)\right) + 5\left(kW(k) - w(0)\right) + 2W(k) = \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow 2\left(k^2 W(k) + 2k - 3\right) + 5\left(kW(k) + 2\right) + 2W(k) = \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow 2k^2 W(k) + 4k - 6 + 5kW(k) + 10 + 2W(k) = \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{1}{k}$

$\Rightarrow \left(2k^2 + 5k + 2\right)W(k) = -4k - 4 + \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{k^2}$

$\Rightarrow W(k) = \dfrac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{k^2(k+2)(2k+1)} = \dfrac{A}{k^2} + \dfrac{B}{k} + \dfrac{C}{k+2} + \dfrac{D}{2k+1}$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{(k+2)(2k+1)}\right|_{k=0} = 1 \\
\frac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{k^2(k+2)(2k+1)} - \frac{1}{k^2} &= \frac{-4k^2 - 6k - 4}{k(k+2)(2k+1)} \\
&\Rightarrow B = \left.\frac{-4k^2 - 6k - 4}{(k+2)(2k+1)}\right|_{k=0} = -2 \\
C &= \left.\frac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{k^2(2k+1)}\right|_{k=-2} = -\frac{4}{3} \\
D &= \left.\frac{-4k^3 - 4k^2 + k + 2}{k^2(k+2)}\right|_{k=-\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W(k) = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{2}{k} - \dfrac{4}{3(k+2)} + \dfrac{4}{3\left(k + \frac{1}{2}\right)}$

$\Rightarrow w(s) = s - 2 - \dfrac{4}{3}e^{-2s} + \dfrac{4}{3}e^{-\frac{s}{2}}$

$\Rightarrow y(t) = t - 3 - \dfrac{4}{3}e^{2-2t} + \dfrac{4}{3}e^{\frac{1-t}{2}}$

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$x(n+1) = \frac{-x(n)+3}{3x(n)-1}$$

Stel $x(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{y(n+1)}{y(n)} + 1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{y(n+2)}{y(n+1)} + 1\right) = \frac{-\frac{1}{3}\left(\frac{y(n+1)}{y(n)} + 1\right) + 3}{3\frac{1}{3}\left(\frac{y(n+1)}{y(n)} + 1\right) - 1} = \frac{-\frac{1}{3}\frac{y(n+1)}{y(n)} - \frac{1}{3} + 3}{\frac{y(n+1)}{y(n)}} = \frac{-y(n+1) + 8y(n)}{3y(n+1)}$

$\Rightarrow \frac{y(n+2)}{y(n+1)} + 1 = \frac{-y(n+1) + 8y(n)}{y(n+1)}$

$\Rightarrow y(n+2) + y(n+1) = -y(n+1) + 8y(n)$

$\Rightarrow y(n+2) + 2y(n+1) - 8y(n) = 0$

$t^2 + 2t - 8 = (t+4)(t-2) = 0$

$\Rightarrow y(n) = c_1 2^n + c_2(-4)^n$

$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{c_1 2^{n+1} + c_2(-4)^{n+1}}{c_1 2^n + c_2(-4)^n} + 1\right) = \frac{1}{3}\frac{c_1 2^{n+1} + c_2(-4)^{n+1} + c_1 2^n + c_2(-4)^n}{c_1 2^n + c_2(-4)^n}$

$= \frac{1}{3}\frac{3c_1 2^n - 3c_2(-4)^n}{c_1 2^n + c_2(-4)^n}$

$= \frac{c_1 2^n - c_2(-4)^n}{c_1 2^n + c_2(-4)^n}$