Hfdst 4: Bernoulli- en energievergelijking

1. Mechanische energie en efficiëntie
2. De Bernoullivergelijking
3. Toepassingen van de Bernoullivergelijking
4. De algemene energievergelijking
5. Energieanalayse van stationaire stromingssystemen

1. Mechanische energie en efficiëntie

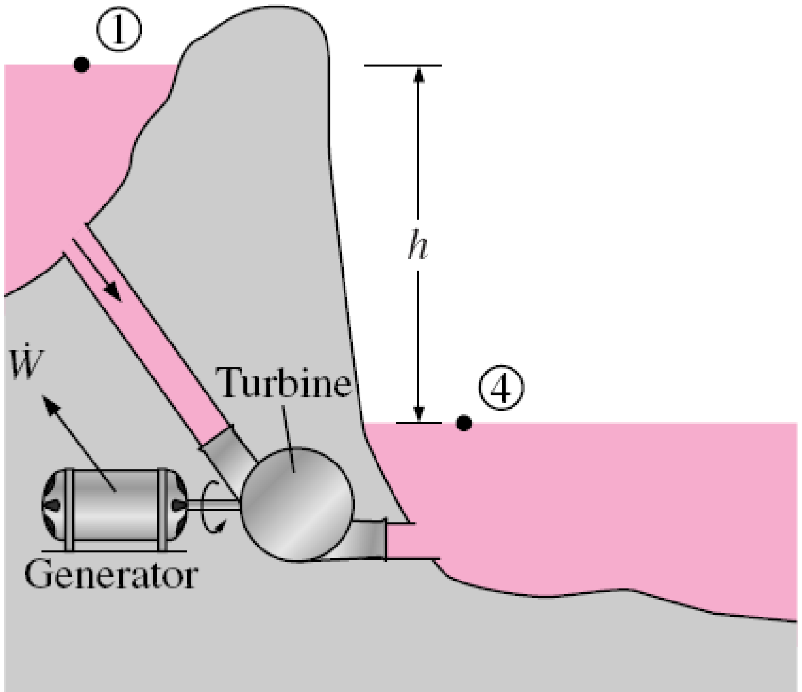
- **Mechanische energie**: *de energievorm die volledig en rechtstreeks kan omgezet worden in mechanische arbeid door een ideaal mechanisch toestel zoals een ideale turbine*

$$e_{\text{mech}} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Stromingsenergie + kinetische energie + potentiële energie

$$\boxed{\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \qquad \text{(kJ/kg)}}$$

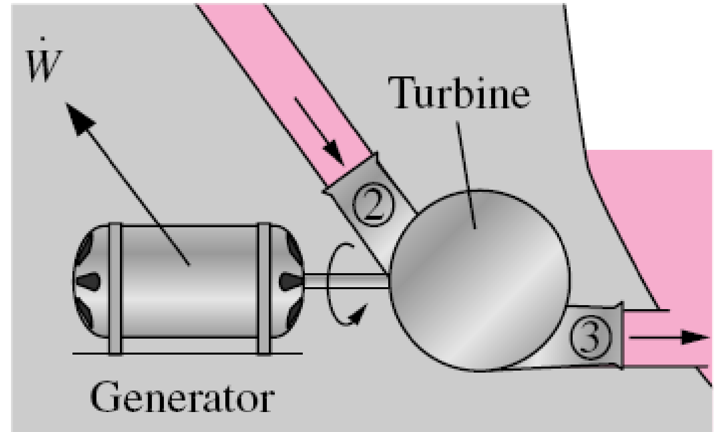
- In de afwezigheid van verliezen, stelt Δe_{mech} de arbeid voor die aan het fluïdum **geleverd** wordt ($\Delta e_{mech} > 0$) of **geëxtraheerd** wordt ($\Delta e_{mech} < 0$)



$$\dot{W}_{max} = \dot{m}\Delta e_{mech} = \dot{m}g(z_1 - z_4) = \dot{m}gh$$

since $P_1 \approx P_4 = P_{atm}$ and $V_1 = V_4 \approx 0$

(*a*)

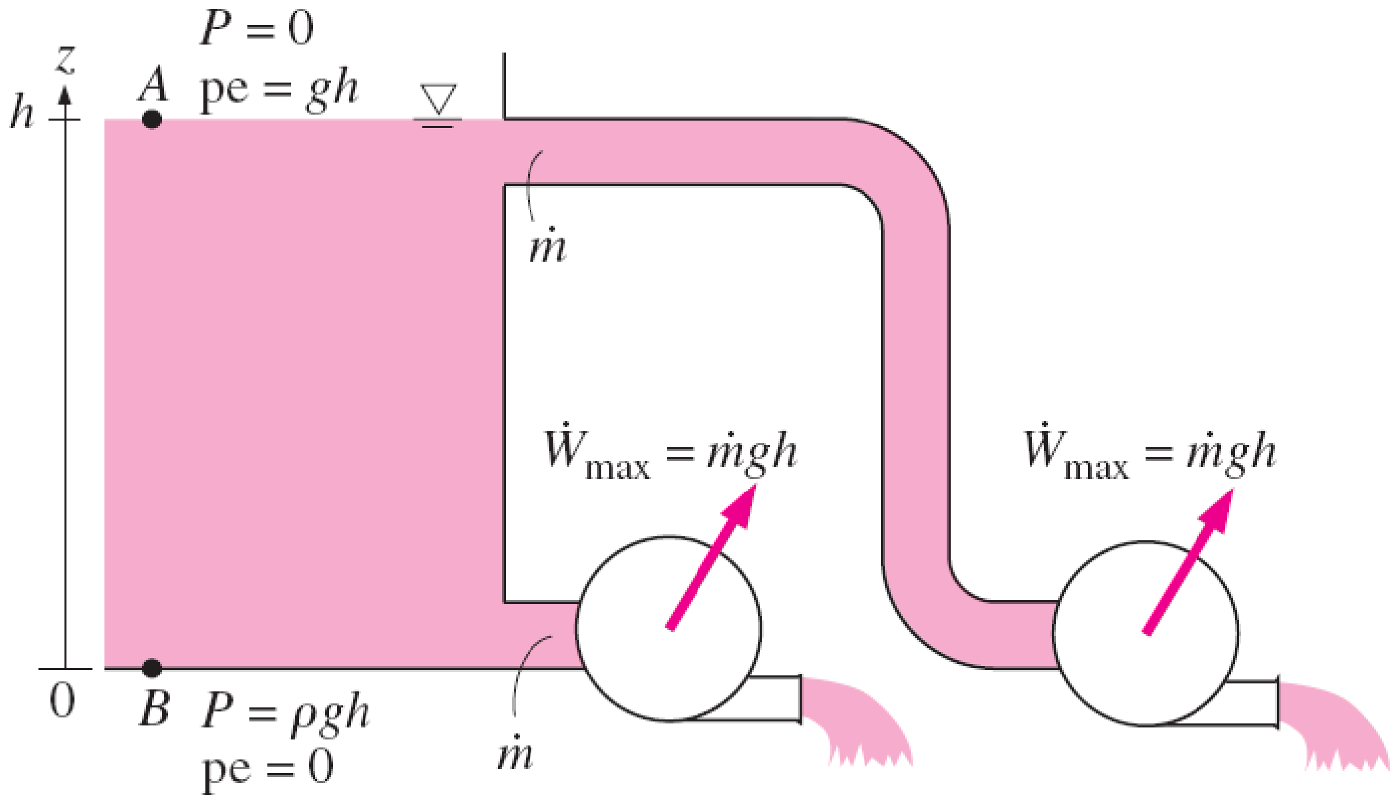


$$\dot{W}_{max} = \dot{m}\Delta e_{mech} = \dot{m}\frac{(P_2 - P_3)}{\rho} = \dot{m}\frac{\Delta P}{\rho}$$

since $V_2 \approx V_3$ and $z_2 \approx z_3$

(*b*)

Het **maximale geproduceerde vermogen** is evenredig met (a) de hoogteverandering tussen de waterniveaus van de 2 reservoirs of (b) de drukverlaging tussen in- en uitlaat van de turbine



De mechanische energie van water op de bodem v/e container = de mechanische energie op elke diepte met inbegrip van de vrije oppervlakte

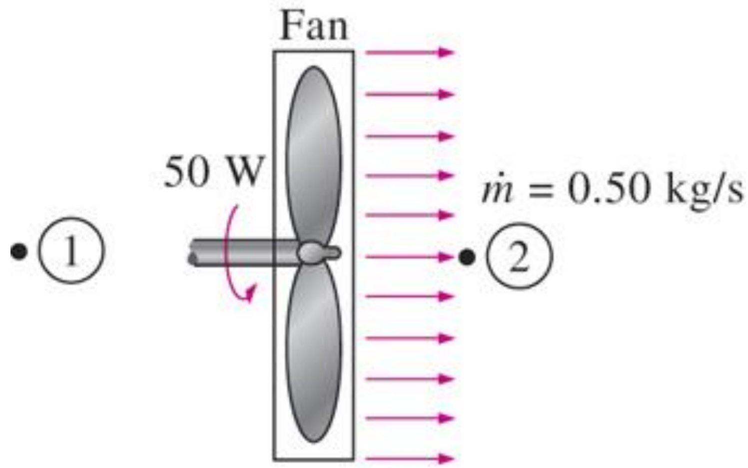
- Overdracht van mechanische energie via roterende drijfas: asarbeid
- Mechanische efficiëntie

$$\eta_{\text{mech}} = \frac{E_{\text{mech,out}}}{E_{\text{mech,in}}} = 1 - \frac{E_{\text{mech,loss}}}{E_{\text{mech,in}}}$$

- Pompefficiëntie

$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\text{Mechanical energy increase of the fluid}}{\text{Mechanical energy input}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump},u}}{\dot{W}_{\text{pump}}}$$

De mechanische efficiëntie van een ventilator is gelijk aan de verhouding van de kinetische energie aan de inlaat en de mechanische vermogensinput



$$V_1 = 0,\ V_2 = 12\ \text{m/s}$$
$$z_1 = z_2$$
$$P_1 = P_2$$

$$\eta_{\text{mech, fan}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}} = \frac{\dot{m} V_2^2/2}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}}$$
$$= \frac{(0.50\ \text{kg/s})(12\ \text{m/s})^2/2}{50\ \text{W}}$$
$$= 0.72$$

- **Turbine-efficiëntie**

$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\text{Mechanical energy output}}{\text{Mechanical energy decrease of the fluid}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\dot{W}_{\text{turbine}, e}}$$

- **Motorefficiëntie**

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Electric power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft,out}}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}}$$

- **Generatorefficiëntie**

$$\eta_{\text{generator}} = \frac{\text{Electric power output}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}}$$

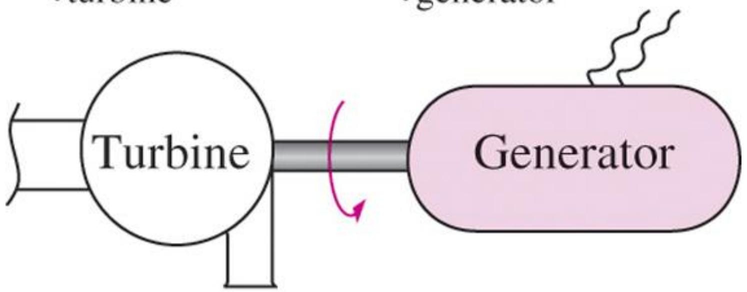
- **Pomp-motor efficiëntie**

$$\eta_{\text{pump-motor}} = \eta_{\text{pump}}\eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump},u}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}}{\dot{W}_{\text{elect,in}}}$$

- **Turbine-generator efficiëntie** (Ex. 12-1)

$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}}\eta_{\text{generator}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{\dot{W}_{\text{turbine},e}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect,out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}|}$$

$\eta_{\text{turbine}} = 0.75$ $\eta_{\text{generator}} = 0.97$



$$\begin{aligned}\eta_{\text{turbine-gen}} &= \eta_{\text{turbine}}\eta_{\text{generator}} \\ &= 0.75 \times 0.97 \\ &= 0.73\end{aligned}$$

Voor systemen met enkel mechanische energievormen en overdracht als asarbeid:

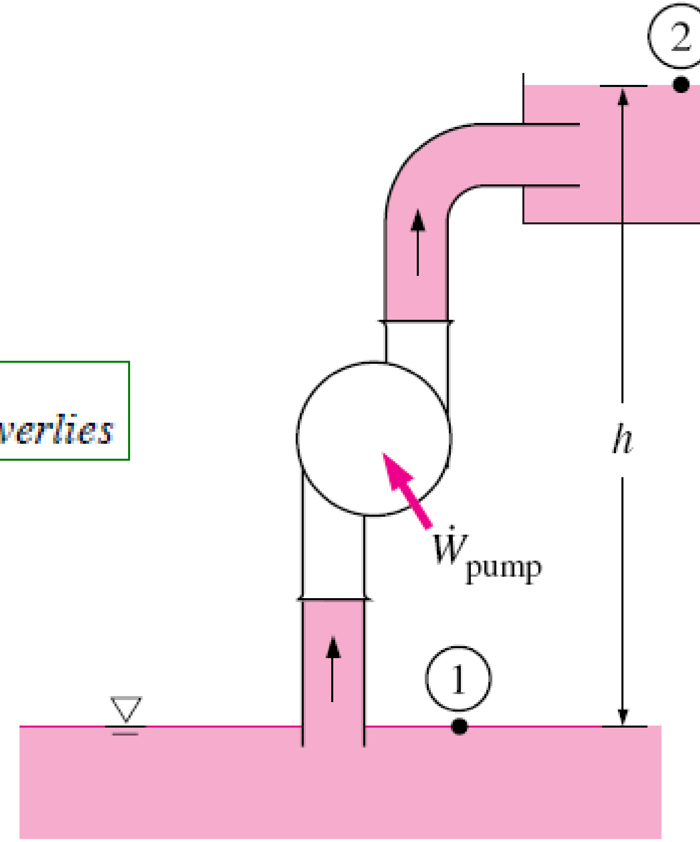
$$\boxed{\Delta E_{mech,systeem} = E_{mech,in} - E_{mech,out} - E_{mech,verlies}}$$

$E_{mech,verlies}$: de omzetting van mechanische energie in thermische energie wegens onomkeerbaarheden zoals wrijving.

Stationaire werking:

$$\boxed{\dot{E}_{mech,\,in} = \dot{E}_{mech,\,out} + \dot{E}_{mech,\,verlies}}$$

In vele stromingsproblemen heeft men enkel te maken met mechanische energievormen. Zulke problemen kunnen opgelost worden door gebruik te maken van de mechanische energiebalans



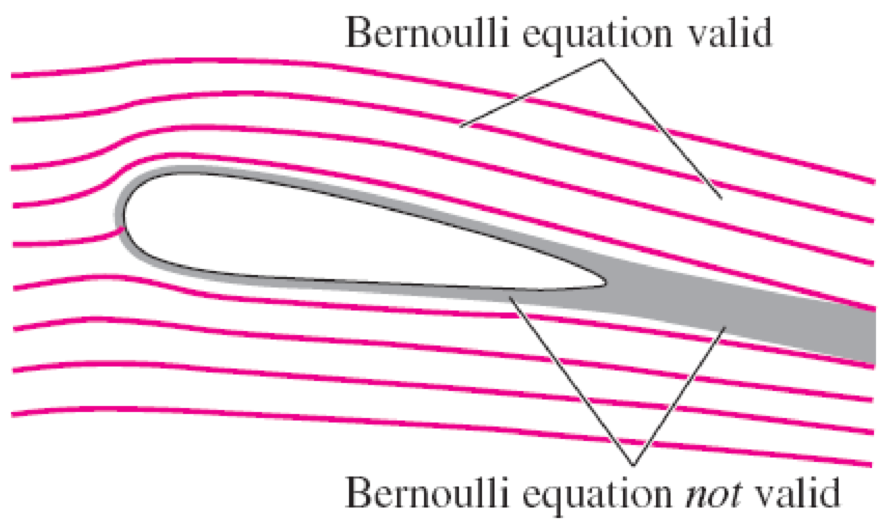
Steady flow

$$V_1 = V_2 \approx 0$$
$$z_2 = z_1 + h$$
$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$\dot{E}_{mech,\,in} = \dot{E}_{mech,\,out} + \dot{E}_{mech,\,loss}$$
$$\dot{W}_{pump} + \dot{m}gz_1 = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{mech,\,loss}$$
$$\dot{W}_{pump} = \dot{m}gh + \dot{E}_{mech,\,loss}$$

2. De Bernoullivergelijking

- De Bernoullivergelijking is een benaderend verband tussen druk, snelheid en verhoging
- Deze vergelijking is geldig in gebieden waar de stroming **stationair** en **onsamendrukbaar** is én waar de netto **wrijvingskrachten te verwaarlozen** zijn



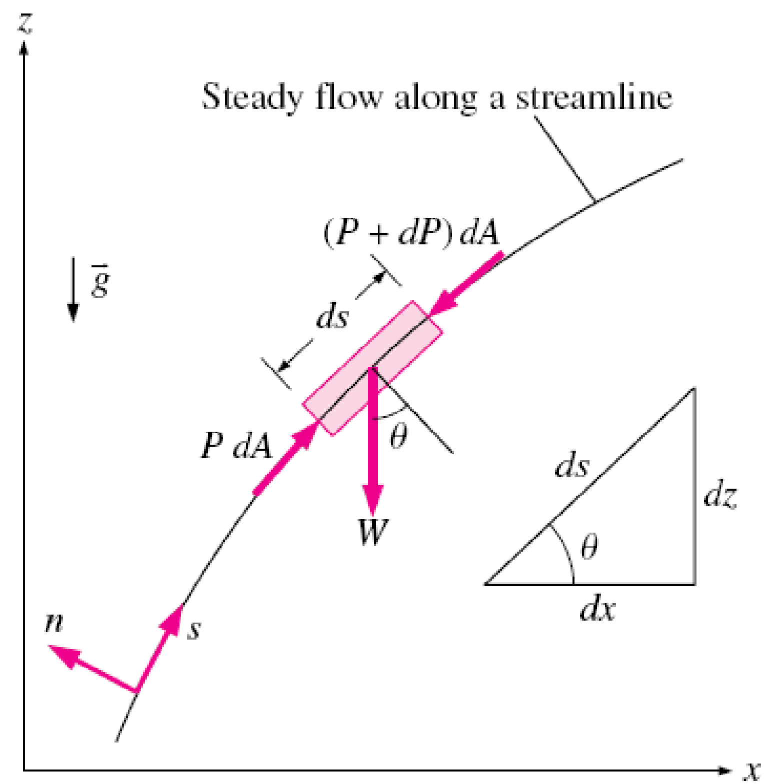
- Versnelling van een fluïdumdeeltje: V=V(s,t)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \text{en} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Stationair: $\partial V/\partial t = 0$ en $V = V(s)$

$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = V\frac{dV}{ds}$$

- Krachtenbalans langs de stroomlijn: $\sum F_s = ma_s$



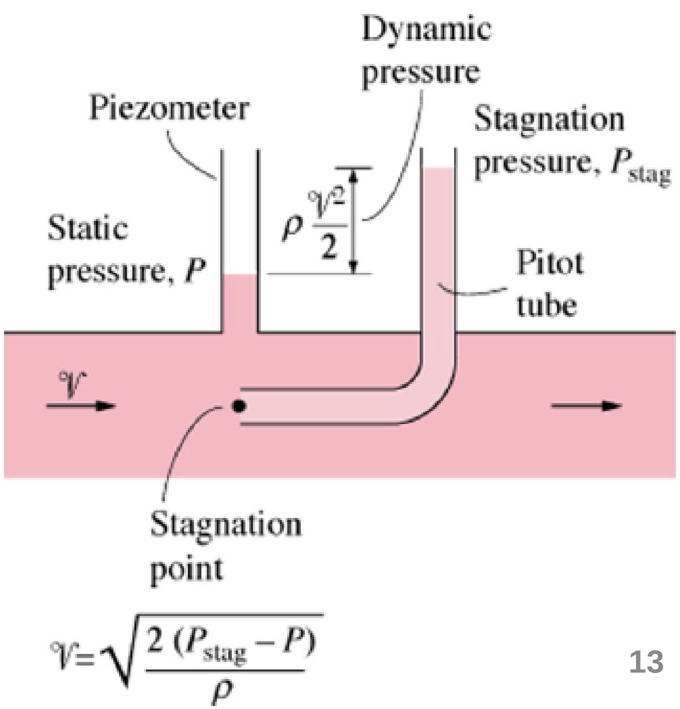
- **Bernoullivergelijking**

$$\overbrace{\frac{P}{\rho}}^{\text{Flow energy}} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{Kinetic energy}} + \overbrace{gz}^{\text{Potential energy}} = \text{constant}$$

De som van de kinetische, potentiële en stromingsenergie v/e vloeistofdeeltje is constant langs een stroomlijn gedurende stationaire stroming als samendrukbaarheids- en wrijvingseffecten verwaarloosbaar zijn

- **Statische druk**: actuele druk
- **Dynamische druk**: drukverhoging als bewegend fluïdum tot stilstand gebracht wordt
- **Hydrostatische druk**: is geen druk in de werkelijke betekenis want zijn waarde hangt af van het gekozen referentieniveau; stelt fluïdumgewicht op de druk voor

$$\overbrace{\underbrace{\underbrace{p}_{statische\_druk} + \overbrace{\rho\frac{V^2}{2}}^{dynamische\_druk}}_{stagnatie\_druk} + \rho g z}^{totale\_druk} = cte$$



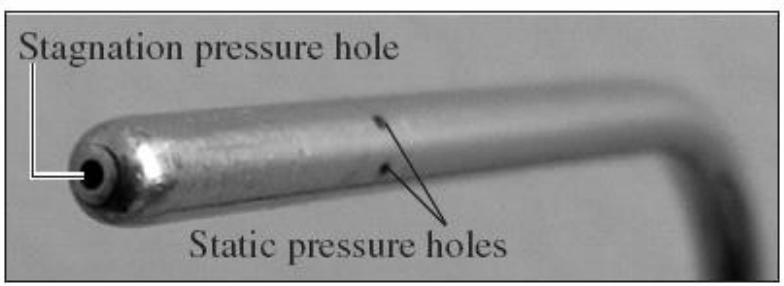
- Som van statische en dynamische druk is **stagnatie druk**

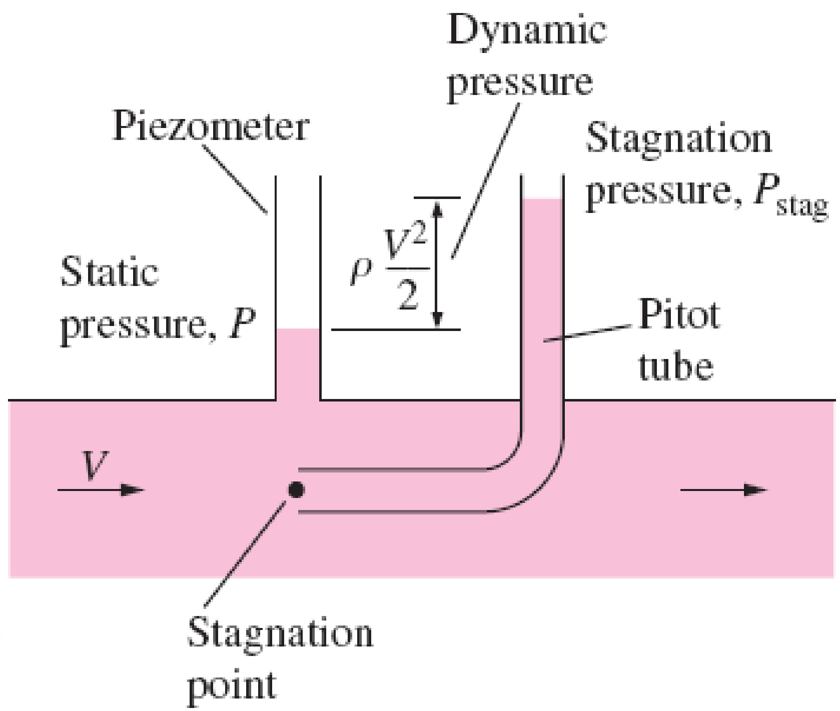
$$P_{stag} = P + \rho \frac{V^2}{2} \qquad \text{(kPa)}$$

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{stag} - P)}{\rho}}$$

- **Toepassing:**

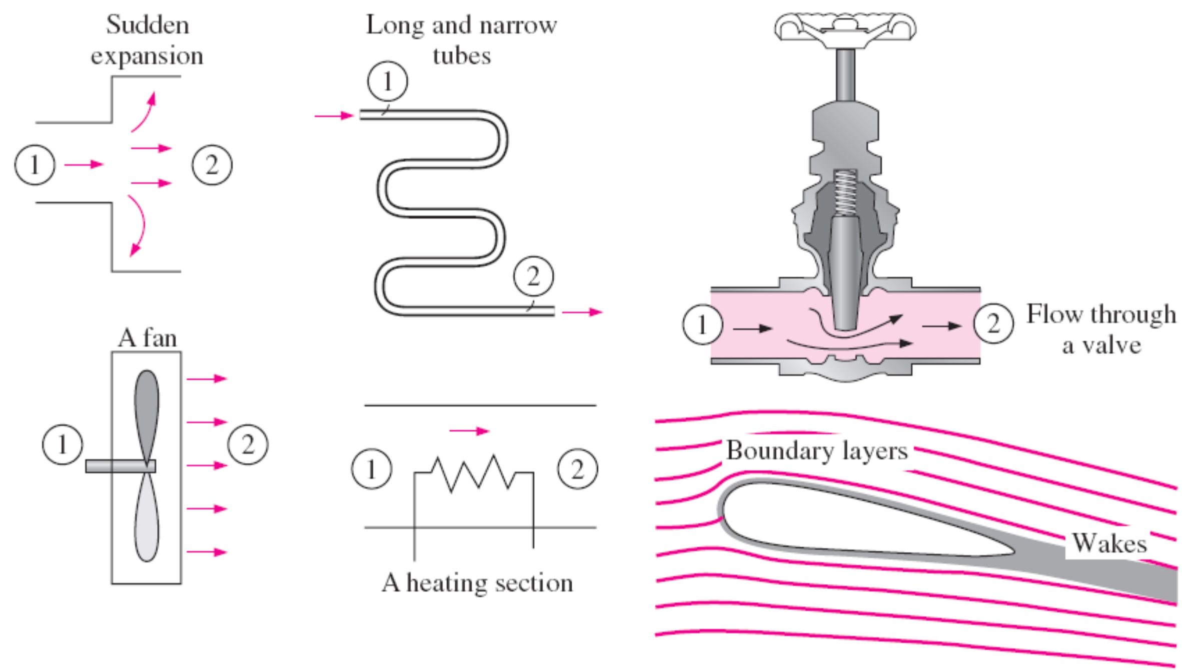
Pitot-buis





$$V = \sqrt{\frac{2(P_{stag} - P)}{\rho}}$$

- **Gebruikslimitaties**
  1. Stationaire stroming: $dV/dt = 0$
  2. Wrijvingsloze stroming
  3. Geen asarbeid: $w_{pomp} = w_{turbine} = 0$
  4. Onsamendrukbare stroming: ρ = constant
  5. Geen warmteoverdracht: $q_{net,in} = 0$; $\rho = \rho(T)$
  6. Toegepast langs een stroomlijn (uitz. irrotationele stroming)



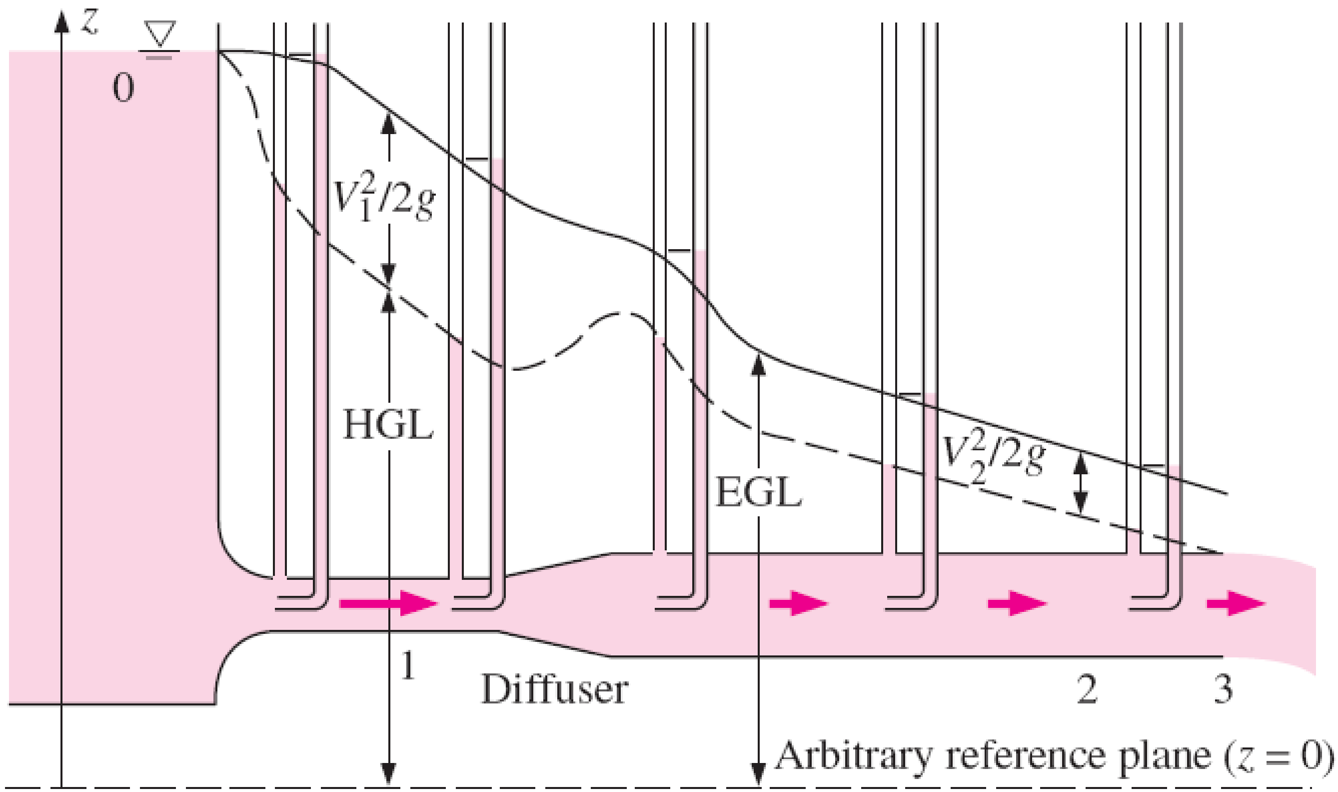
$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constant}$$

- **Drukhoogte**: hoogte van een vloeistofkolom die statische druk P levert
- **Snelheidshoogte**: verhoging nodig voor een vloeistof om een snelheid te bereiken in een wrijvingsloze vrije val
- **Elevatiehoogte**: potentiële energie van de vloeistof

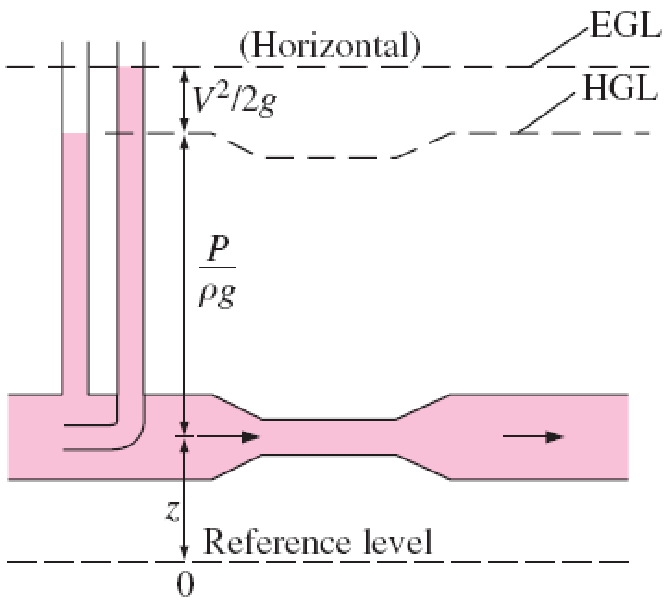
- Grafisch voorstellen v/d mechanische energie dmv **hoogten**
- **Hydraulische graadslijn** (HGL)
- **Energiegraadslijn** (EGL)

$$\boxed{HGL = \frac{P}{\rho g} + z}$$

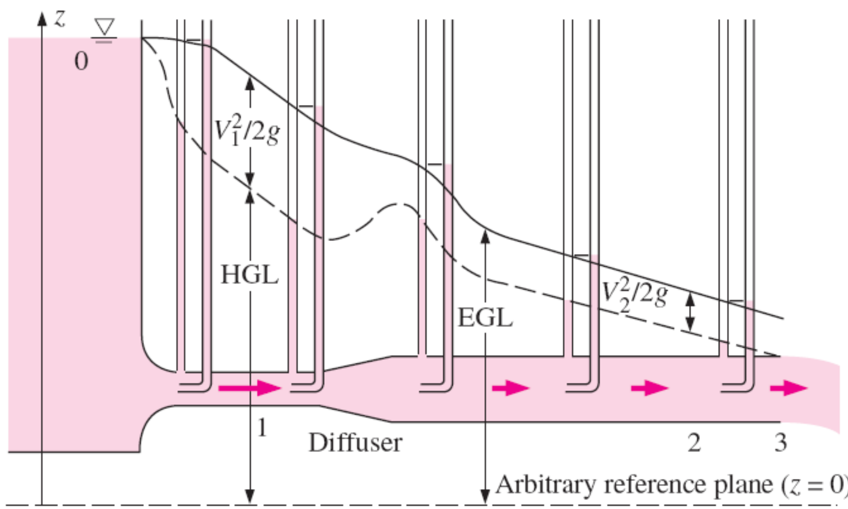
$$\boxed{EGL = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z}$$



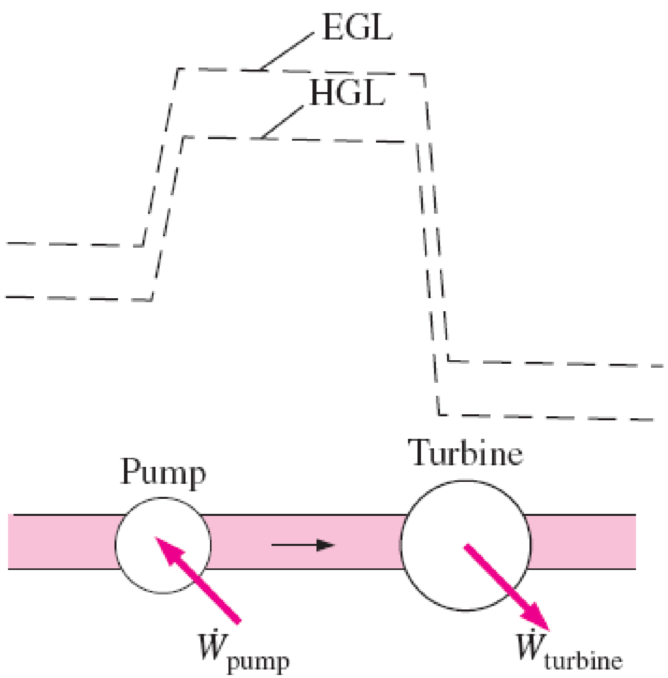
- De EGL is steeds een afstand $V^2/2g$ boven de HGL. Deze 2 lijnen komen dichter bij elkaar als de snelheid afneemt.
- In een **ideale** Bernoulli-type-stroming is de EGL horizontaal en de hoogte blijft constant (geen wrijvingsverliezen). Idem voor HGL als stromingssnelheid constant blijft.

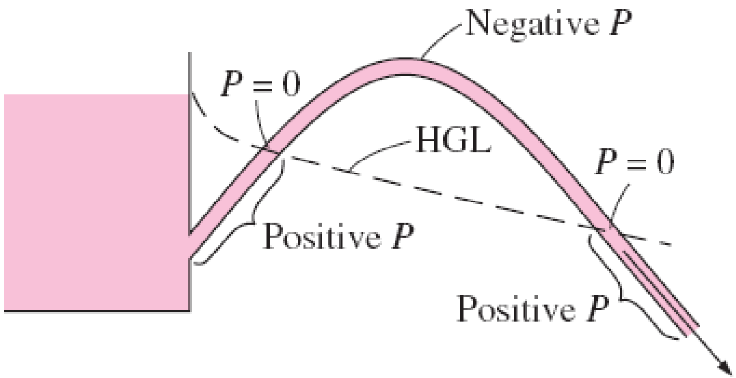


- Voor stroming in een open kanaal: HGL valt samen met vrije vloeistofoppervlakte. EGL ligt afstand $V^2/2g$ hierboven.
- Aan de uitlaat v/e buis is drukhoogte = 0 (P_{atm}); HGL valt samen met buisuitlaat.
- Verlies van mechanische energie door wrijving zorgt voor daling EGL en HGL in stromingsrichting.



- Sterke **verhoging** in EGL en HGL als E_{mech} **geleverd** wordt (vb. pomp). **Daling** als E_{mech} **onttrokken** wordt (vb. turbine)
- (Over)druk v/e vloeistof is 0 waar HGL de vloeistof kruist. Druk in sectie boven HGL is negatief.

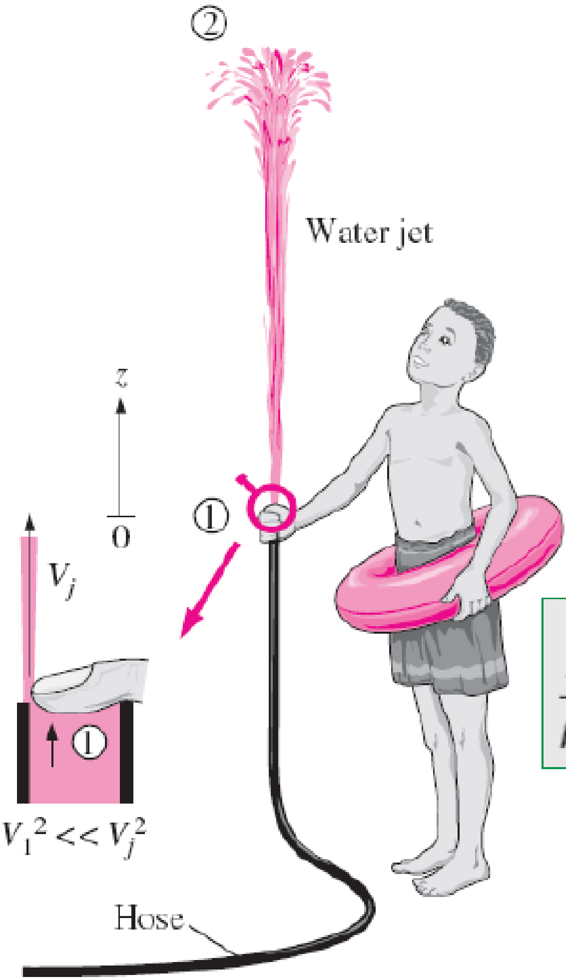




3. Toepassingen van de Bernoullivergelijking

- Vb. 12-2: Water in de lucht sproeien
- Vb. 12-3: Waterafvoer uit een reservoir
- Vb. 12-4: Snelheidsmeting in een Pitot-buis

- Vb. 12-2: Water in de lucht sproeien

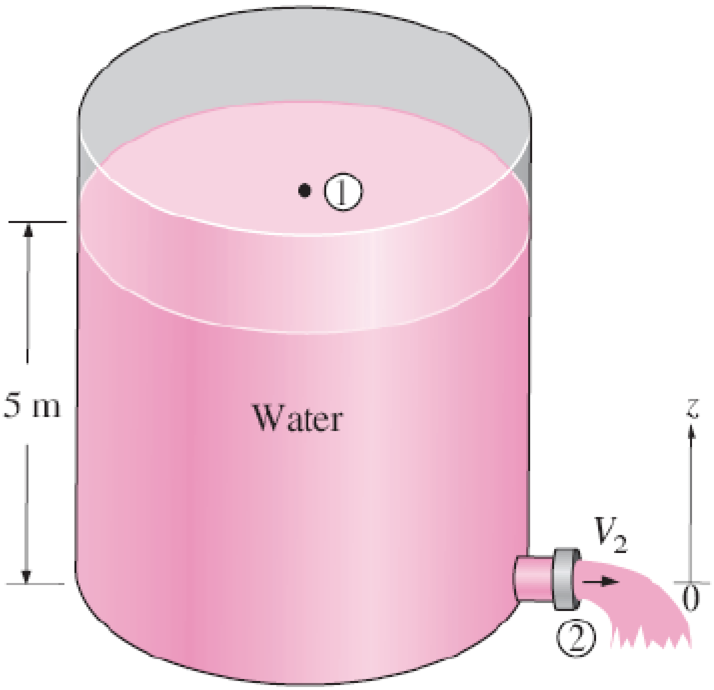


Bepaal de maximale hoogte die de waterstraal bereikt.

$$\frac{P_1}{\rho g} + \overset{\approx 0}{\frac{V_1^2}{2g}} + \overset{0}{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \overset{0}{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} + z_2$$

$$\longrightarrow \quad z_2 = \frac{P_1 - P_{atm}}{\rho g} = \frac{P_{1,over}}{\rho g}$$

- Vb. 12-3: Waterafvoer uit een reservoir



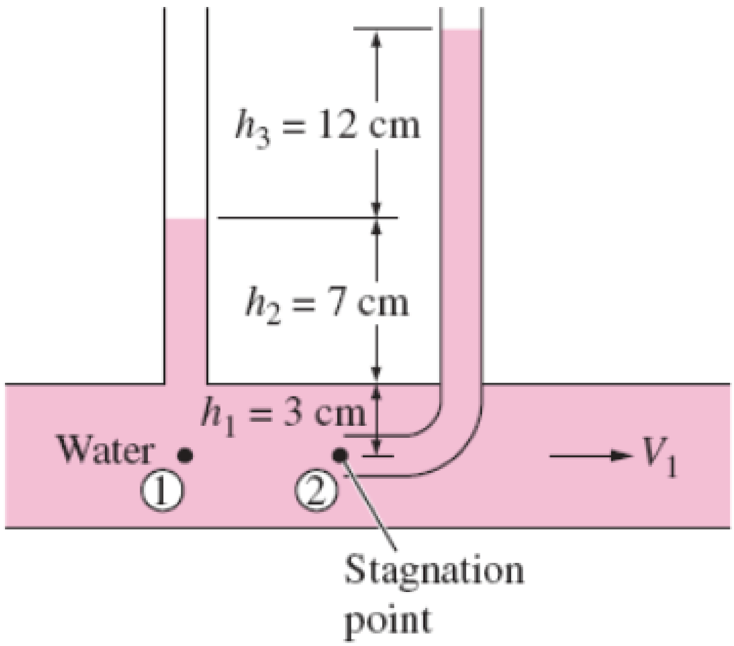
Bepaal de maximale watersnelheid aan de uitlaat.

$$\frac{\cancel{P_1}}{\cancel{\rho} g} + \frac{V_1^2}{2g}^{\approx 0} + z_1 = \frac{\cancel{P_2}}{\cancel{\rho} g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2^{\;0} \rightarrow \quad z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\longrightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gz}$$

Vergelijking van Toricelli

- Vb. 12-4: Snelheidsmeting in een Pitot-buis



Bepaal de snelheid in het centrum van de buis.

$$P_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$P_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}^{\nearrow 0} + \cancel{z_2} \quad \rightarrow \quad \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} \longrightarrow V_1 = \sqrt{2gh_3}$$

4. De algemene energievergelijking

- Behoud van energie (1e wet thermodynamica)

Energie kan niet gecreëerd of vernietigd worden gedurende een proces; het kan enkel van vorm veranderen.

$$E_{\text{in}} - E_{\text{out}} = \Delta E \qquad \dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{net in}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt}$$

$$\dot{Q}_{\text{net in}} = \dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}}$$

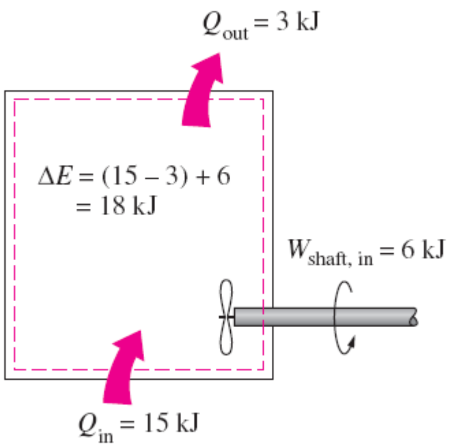
Netto-warmtedebiet (- = afgestaan)

$$\dot{W}_{\text{net in}} = \dot{W}_{\text{in}} - \dot{W}_{\text{out}}$$

Netto vermogensinput (- = output)

Totale specifieke energie:

$$e = u + \text{ke} + \text{pe} = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

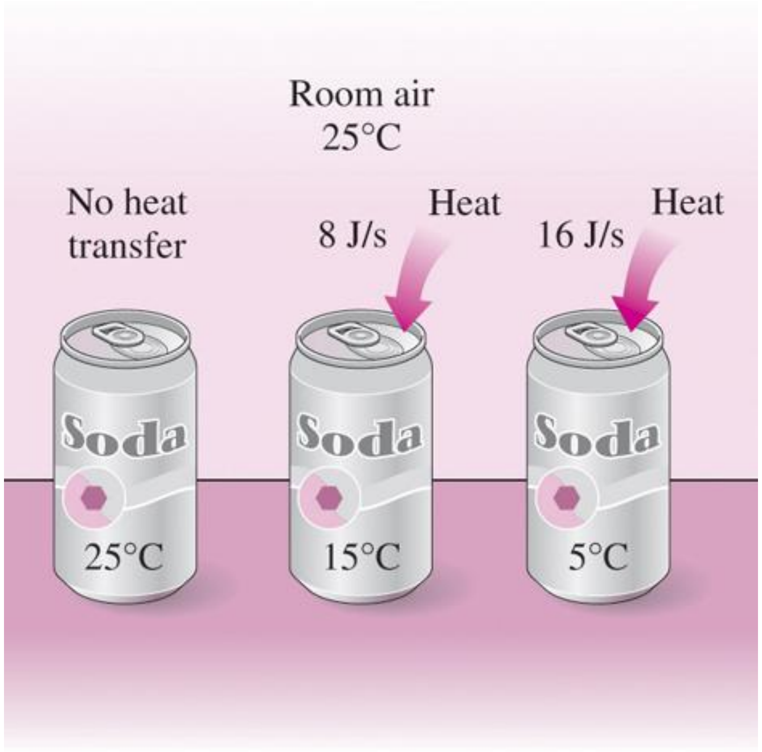


Energieoverdracht door warmte, Q

Thermische energie:
Voelbare en latente vormen van interne energie

Warmte transfer:
Energietransfer van 1 systeem naar ander door temperatuursverschil

Adiabatisch proces: Proces zonder warmte transfer



- Energieoverdracht door arbeid, W

$$W_{totaal} = W_{as} + W_{druk} + W_{viskeus} + W_{ander}$$

W_{as} = de arbeid overgedragen door een roterende as

W_{druk} = de arbeid uitgeoefend door drukkrachten op het controleoppervlak

$W_{viskeus}$ = de arbeid door de normale en tangentiële componenten van viskeuze krachten op het controleoppervlak (bewegende wanden zijn meestal in het controlevolume aanwezig)

W_{ander} = de arbeid door andere krachten zoals de electrische kracht, de magnetische kracht en de oppervlaktespanning (te verwaarlozen)

$\rightarrow$ $$W_{totaal} = W_{as} + W_{druk}$$

Asarbeid, W_{as}

Kracht *F* inwerkend via een momentarm *r* geeft een torsie *T*

$$\mathrm{T} = Fr \quad \rightarrow \quad F = \frac{\mathrm{T}}{r}$$

Die kracht werkt op een afstand *s*

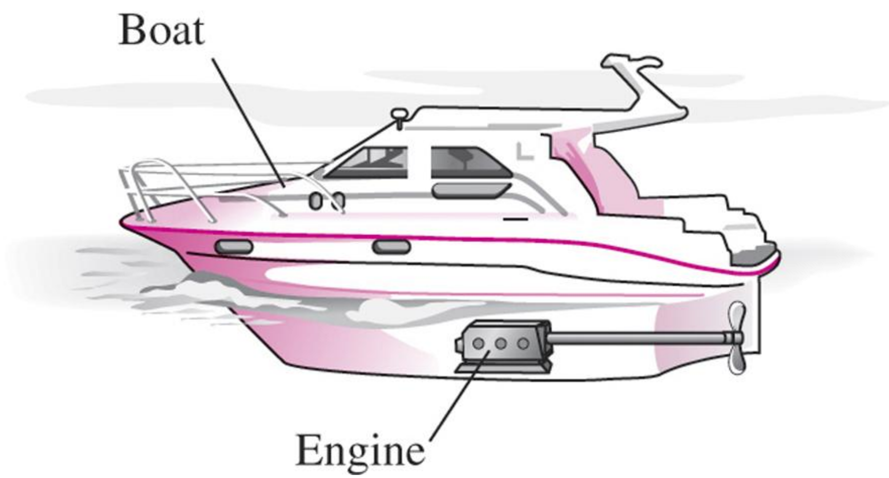
$$s = (2\pi r)n$$

Asarbeid of *Shaft work*

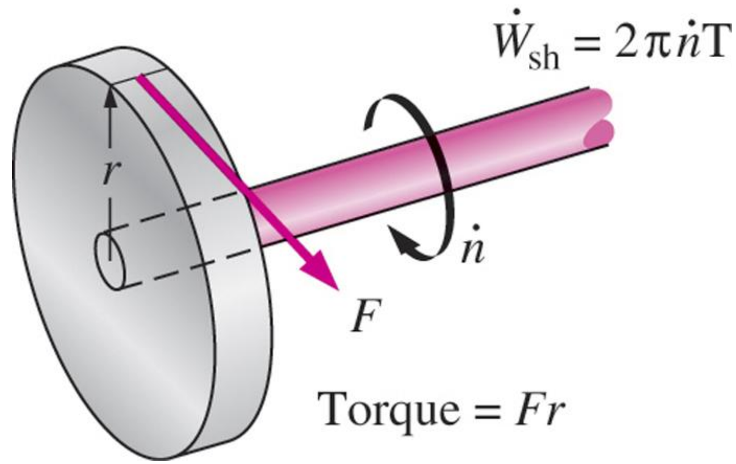
$$W_{sh} = Fs = \left(\frac{\mathrm{T}}{r}\right)(2\pi r n) = 2\pi n \mathrm{T} \qquad \text{(kJ)}$$

Het overgedragen vermogen door de as, is de asarbeid per tijdseenheid

$$\boxed{\dot{W}_{sh} = 2\pi \dot{n} \mathrm{T} \qquad \text{(kW)}}$$

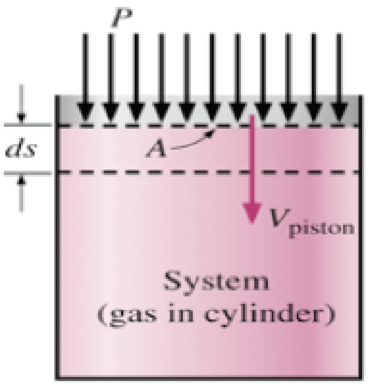


Energie-overdracht door roterende assen komt veel voor in de praktijk



Asarbeid is evenredig met de aangelegde torsie en het toerental

Drukarbeid, W_{druk}

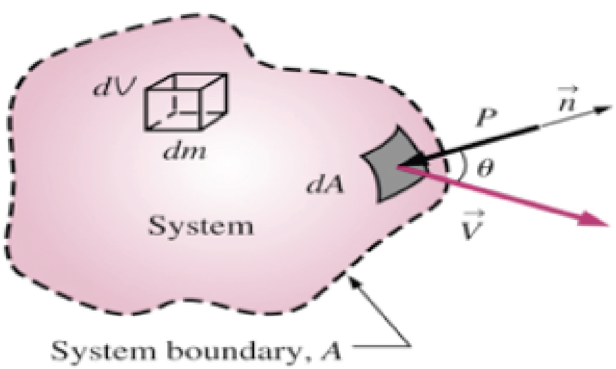


(a)

Grensarbeid op systeem: $\delta W_{grens} = PA\ \ ds$

Vermogen overgedragen: $\delta \dot{W}_{druk} = \delta \dot{W}_{grens} = PAV_{piston}$

Deel van het fluïdum met willekeurige vorm:



(b)

$$\delta \dot{W}_{druk} = -PdAV_n = -PdA\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)$$

$$\dot{W}_{druk,\ net\ \ in} = -\int_A P\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)dA = -\int_A \frac{P}{\rho}\rho\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)dA$$

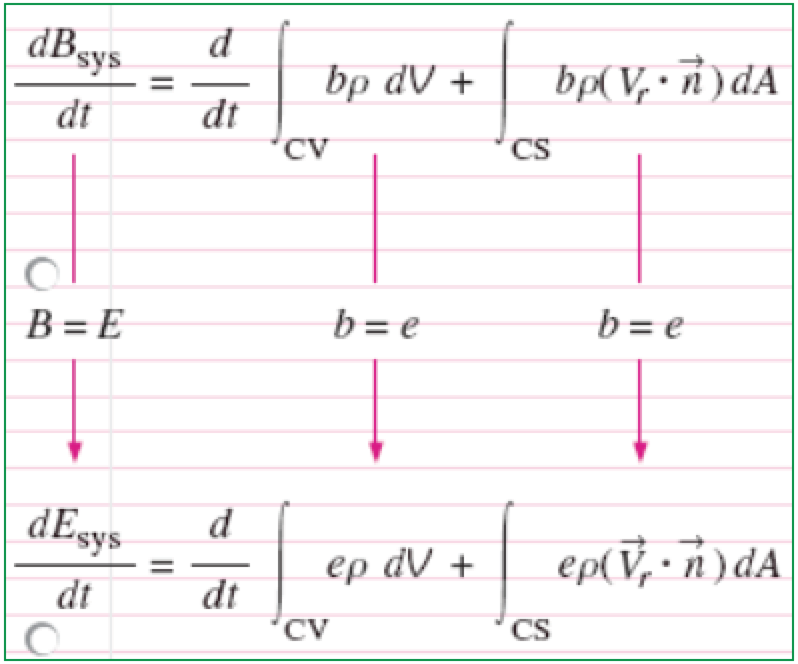
(arbeid verricht door drukkrachten op het systeem is positief)

Netto-vermogen overgedragen:

$$\dot{W}_{net\ \ in} = \dot{W}_{as,\ net\ \ in} + \dot{W}_{druk,\ net\ \ in} = \dot{W}_{as,\ net\ \ in} - \int_A P\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)dA$$

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ net\ \ in} + \dot{W}_{druk,\ net\ \ in} = \frac{dE_{sys}}{dt}$$

- Behoud van energie voor een controlevolume



De vergelijking voor behoud van energie wordt bekomen door B in het Reynolds transporttheorema te vervangen door energie E en b door de specifieke energie e.

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} + \dot{W}_{druk,\ \ net\ \ in} = \frac{dE_{sys}}{dt}$$

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} + \dot{W}_{druk,\ \ net\ \ in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \int_{CS} e\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \int_{CS} \left(\frac{P}{\rho} + e\right)\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n})\, dA$$

- Behoud van energie voor controlevolume

Als P/ρ+e bijna uniform is over de in- of uitlaat en $\dot{m} = \int_{A_c} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA_c$

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \sum_{out} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + e\right)$$

$$\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \sum_{uit} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} gz\right)$$

Definitie van de enthalpie $h = u + Pv = u + P/\rho.$

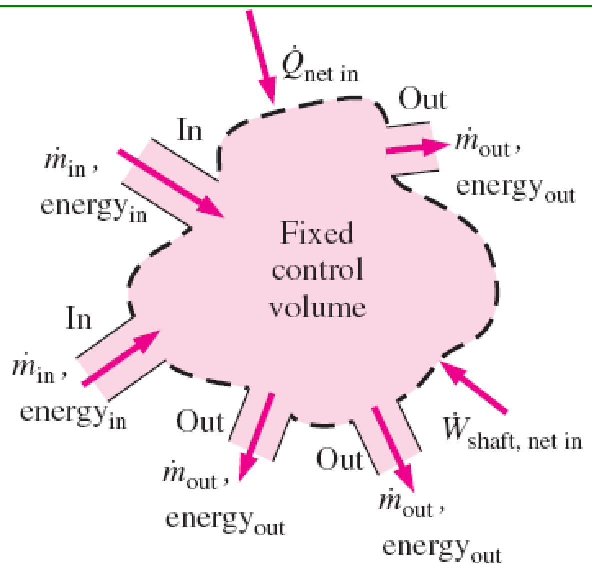
$$\boxed{\dot{Q}_{net\ \ in} + \dot{W}_{as,\ \ net\ \ in} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\rho\, dV + \sum_{uit} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{in} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} gz\right)}$$

5. Energieanalyse van stationaire stromingssystemen

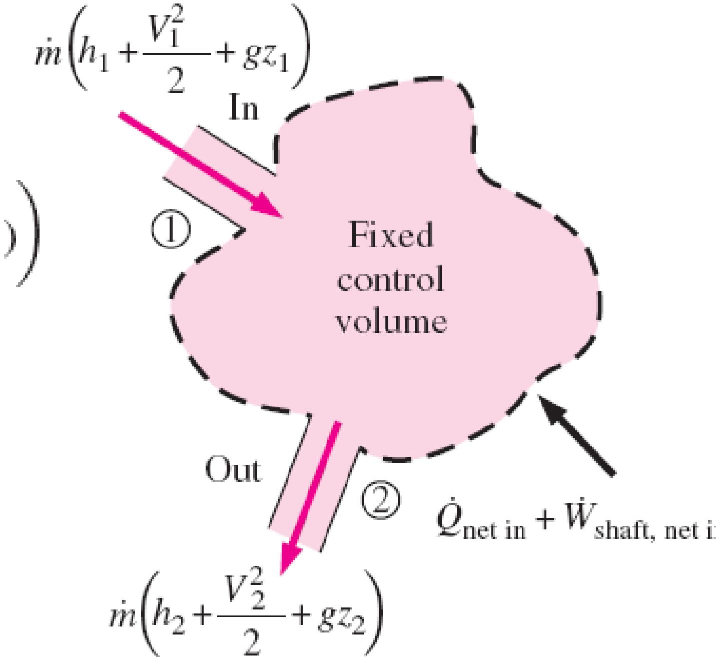
- Energievergelijking voor **stationaire** stroming

De netto-energieoverdracht per tijdseenheid aan het systeem door warmte en arbeid gedurende stationaire stroming is gelijk aan het verschil tussen de uitgaande en binnenkomende energiestromen met de massa.

$$\boxed{\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \sum_{\text{out}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{in}} \dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2} + gz\right)}$$



- Systemen met 1 inlaat en 1 uitlaat is het massadebiet constant:



$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \dot{m}\left(h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right)$$

$$q_{\text{net in}} + w_{\text{shaft, net in}} = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$$w_{\text{shaft, net in}} + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + (u_2 - u_1 - q_{\text{net in}})$$

$$e_{\text{mech, loss}} = u_2 - u_1 - q_{\text{net in}} \qquad w_{\text{shaft, net in}} = w_{\text{pump}} - w_{\text{turbine}}$$

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + w_{\text{pump}} = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 + w_{\text{turbine}} + e_{\text{mech, loss}}}$$

Mechanische energiebalans: $e_{\text{mech, in}} = e_{\text{mech, out}} + e_{\text{mech, loss}}$

- Vermenigvuldigen met het massadebiet:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}gz_1\right)+\dot{W}_{pomp}=\dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}gz_2\right)+\dot{W}_{turbine}+\dot{E}_{mech,verlies}$$

$$\dot{E}_{mech,verlies}=\dot{E}_{mech,verlies,pomp}+\dot{E}_{mech,verlies,turbine}+\dot{E}_{mech,verlies,pomp}$$

- Uitgedrukt in **hoogte**:

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump, }u} = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine, }e} + h_L}$$

Nuttige hoogte geleverd aan het fluïdum door de pomp:

$$h_{pomp,\ u} = \frac{w_{pomp,\ u}}{g} = \frac{\dot{W}_{pomp,\ u}}{\dot{m}g} = \frac{\eta_{pomp}\dot{W}_{pomp}}{\dot{m}g}$$

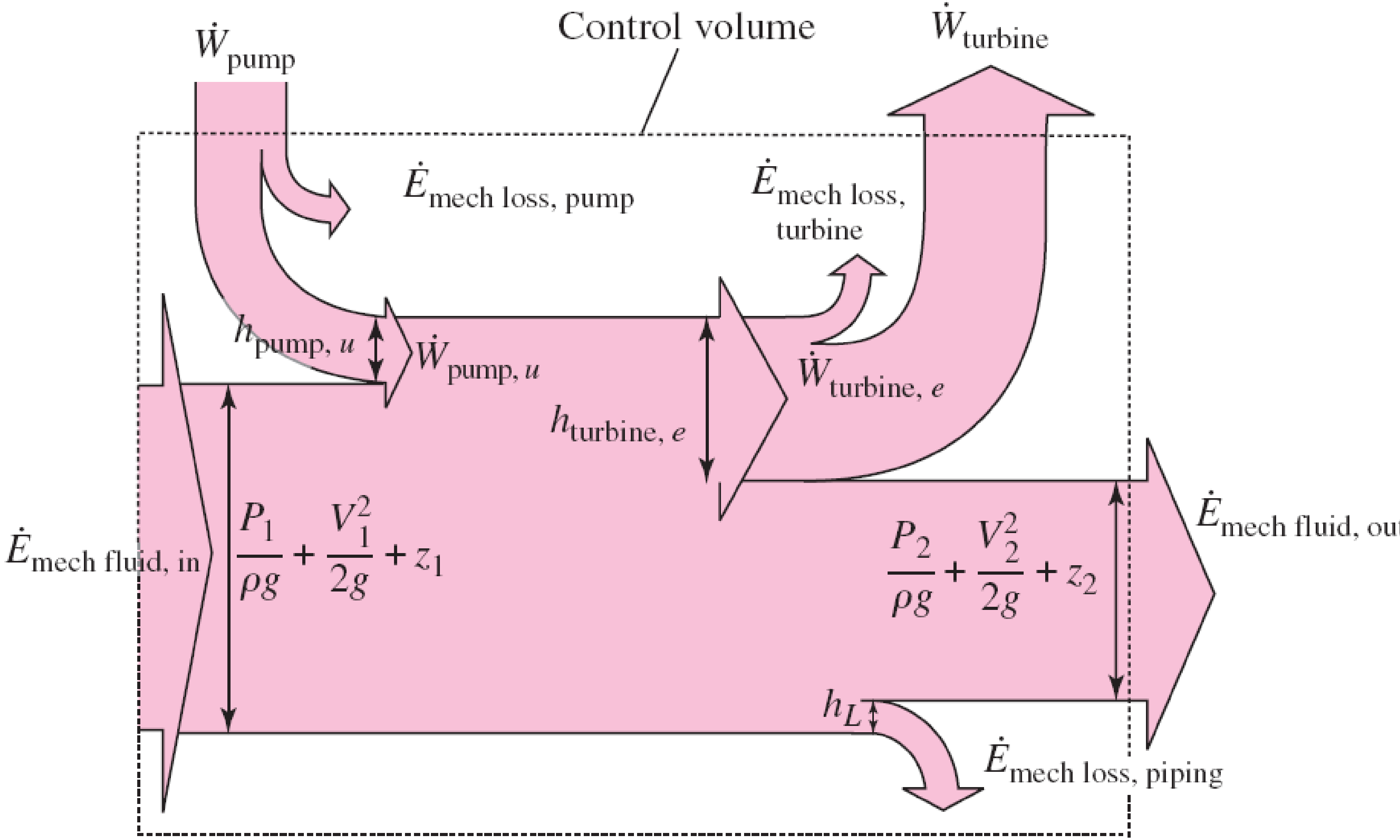
Geëxtraheerde hoogte, verwijdert door de turbine:

$$h_{turbine,\ e} = \frac{w_{turbine,\ e}}{g} = \frac{\dot{W}_{turbine,\ e}}{\dot{m}g} = \frac{\dot{W}_{turbine}}{\eta_{turbine}\dot{m}g}$$

Onomkeerbaar hoogteverlies:

$$h_L = \frac{e_{mech\ verlies,\ buizen}}{g} = \frac{\dot{E}_{mech\ verlies,\ buizen}}{\dot{m}g}$$

- Mechanische-energie-stroomschema voor fluïdumstroming waar pomp en turbine actief zijn



- Speciaal geval: Onsamendrukbare stroming zonder mechanische arbeid en verwaarloosbare wrijving

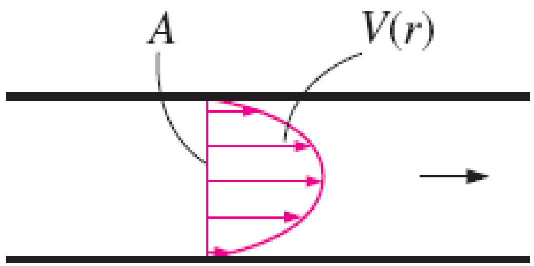
Energy equation:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \overset{\nearrow 0}{h_{\text{pump, u}}} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \overset{\nearrow 0}{h_{\text{turbine, e}}} + \overset{\nearrow 0}{h_L}$$

Bernoulli equation:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

- De kinetische energiecorrectiefactor, α



$$\dot{m} = \rho V_{avg} A, \qquad \rho = \text{constant}$$

$$\dot{KE}_{act} = \int \text{ke}\,\delta\dot{m} = \int_A \frac{1}{2} V^2(r)[\rho V(r)\,dA]$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int_A V^3(r)\,dA$$

$$\dot{KE}_{avg} = \frac{1}{2}\dot{m}V_{avg}^2 = \frac{1}{2}\rho A V_{avg}^3$$

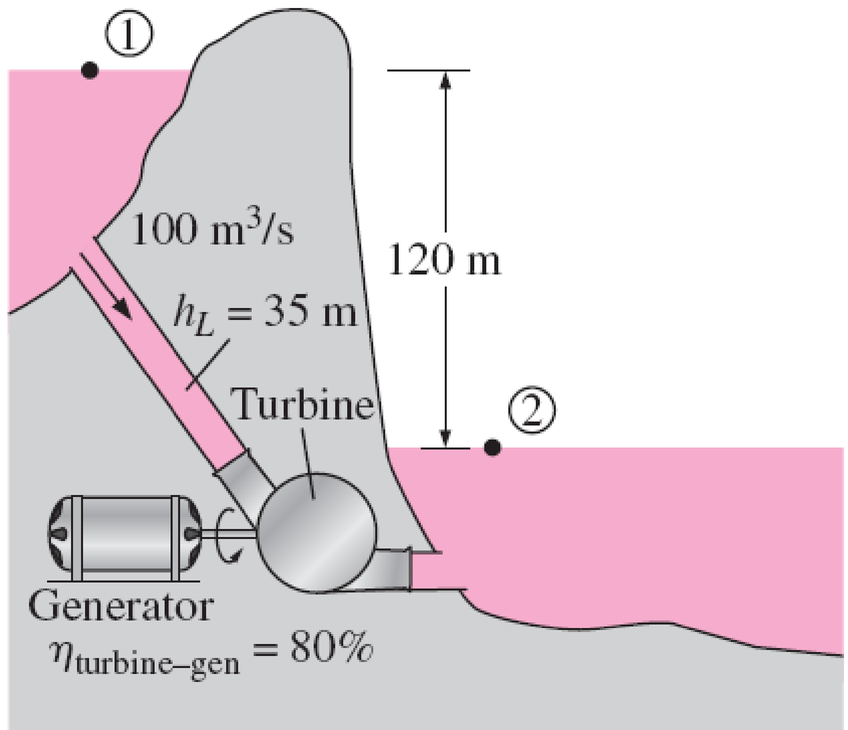
$$\alpha = \frac{\dot{KE}_{act}}{\dot{KE}_{avg}} = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{V(r)}{V_{avg}}\right)^3 dA$$

•Volledig ontwikkelde **laminaire** stroming in ronde buis:
α = 2.0

•Volledig ontwikkelde **turbulente** stroming in ronde buis:
1.04 ≤ α ≤ 1.11

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump},u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine},e} + h_L}$$

- Vb. 12-7: Generatie hydro-elektrisch vermogen van een dam



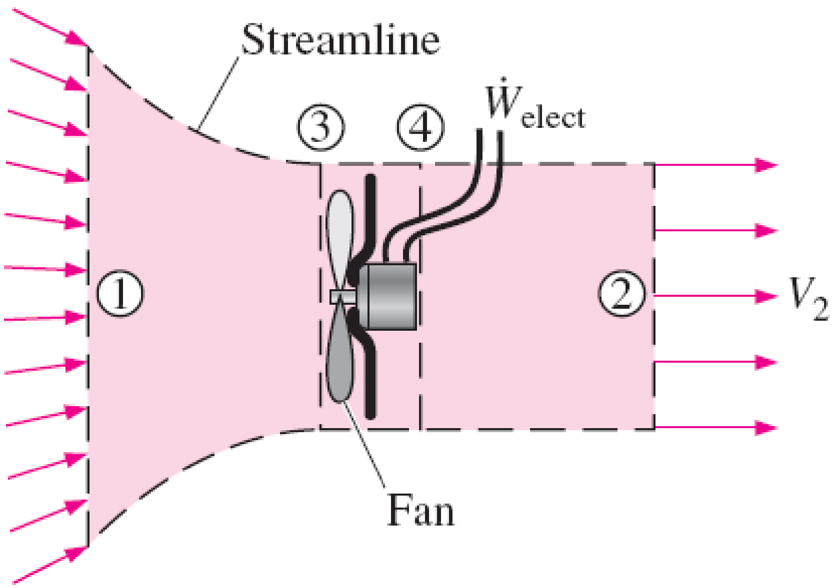
$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \alpha_1 \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + z_1 + h_{\text{pump},\,u}^{\nearrow 0} = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \alpha_2 \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + z_2^{\nearrow 0} + h_{\text{turbine},\,e} + h_L$$

$$h_{\text{turbine},\,e} = z_1 - h_L$$

$$\boxed{\dot{W}_{\text{turbine},\,e} = \dot{m} g h_{\text{turbine},\,e}}$$

$$\boxed{\dot{W}_{\text{electric}} = \eta_{\text{turbine-gen}} \dot{W}_{\text{turbine},\,e}}$$

- Vb. 12-8: Selectie ventilator voor koeling computer



Energievgl. tussen 3 en 4

$$\dot{m}\frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{\text{fan}} = \dot{m}\frac{P_4}{\rho} + \dot{E}_{\text{mech loss, fan}}$$

$$\dot{W}_{\text{fan, }u} = \dot{m}\frac{P_4 - P_3}{\rho}$$

Energievgl. tussen 1 en 2

$$\dot{m}\left(\cancel{\frac{P_1}{\rho}} + \cancelto{0}{\alpha_1\frac{V_1^2}{2}} + \cancel{gz_1}\right) + \dot{W}_{\text{fan}} = \dot{m}\left(\cancel{\frac{P_2}{\rho}} + \alpha_2\frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2}\right) + \cancelto{0}{\dot{W}_{\text{turbine}}} + \dot{E}_{\text{mech loss, fan}}$$

$$\dot{W}_{\text{fan}} - \dot{E}_{\text{mech loss, fan}} = \dot{W}_{\text{fan, }u}$$

$$\dot{W}_{\text{fan, }u} = \dot{m}\alpha_2\frac{V_2^2}{2}$$

$$\dot{W}_{\text{elect}} = \frac{\dot{W}_{\text{fan, }u}}{\eta_{\text{fan–motor}}}$$