Nuttige uitdrukkingen (Hoofdstuk 8)

- De totale energie van een gesloten systeem is behouden.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = 0.$$

  Behoud van energie is altijd geldig maar dit betekent niet dat elk beschouwd systeem gesloten is! Ook kunnen verschillende vormen van energie in elkaar worden omgezet.

- Er bestaan vele vormen van potentiële energie (U). De twee meest voorkomende gevallen in deze oefeningen zijn

$$\begin{array}{ll} mg\Delta z & \text{zwaartekracht,} \\ \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 & \text{veren.} \end{array}$$

- Als de totale energie een som is van kinetische en potentiële energie, biedt dit een makkelijke manier om geleverde arbeid te berekenen, namelijk

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2).$$

  Let hier op de volgorde van de termen!

Oefening 1: Conservatieve kracht? (8.7)

Een bepaalde veer oefent een kracht uit, gegeven door

$$\vec{F} = (-kx + ax^3 + bx^4)\hat{\imath}$$

waar x de uitwijking tov evenwicht is.

1. Is de kracht conservatief?
2. Indien ja, wat is de potentiele energiefunctie?

Oefening 2: Bungeespringen (8.15)

Een bungeespringer met een massa van $55kg$ springt van een brug. Ze is vastgebonden aan een touw dat $12m$ lang is maar tijdens de sprong rekt het touw uit tot maximaal $31m$.

1. Wat is de veerconstante k van het touw (elastiek) in de veronderstelling dat de wet van Hooke geldt wanneer het touw langer is dan de evenwichtslengte?
2. Wat is de maximale versnelling die de springster ondervindt?

Oefening 3: Twee massa's (8.22)

Twee massa's zijn verbonden met een touw. Eén massa $m_A = 4kg$ bevindt zich op een helling met hoek 32° ten opzichte van de horizontale. Het touw loopt over een katrol en daaraan hangt een massa $m_B = 5kg$. Deze massa bevindt zich op een hoogte $h = 0,75m$ boven de grond.

1. Als m_B naar beneden valt, wat zal de resulterende versnelling van de massa's zijn?
2. Als de massa's oorspronkelijk in rust zijn, gebruik dan de kinematische relaties om hun snelheden te vinden net voor m_B de grond raakt.
3. Bepaal dezelfde snelheden opnieuw, nu gebruik makend van behoud van energie.

Oefening 4: Skiën op een sfeer (8.28)

Een skiër met massa m vertrekt in rust op het bovenste punt van een sfeer met straal r. De skiër zal versnellen ten gevolge van de zwaartekracht en wrijvingsloos over de sfeer glijden.

1. Welke hoek ten opzichte van de horizontale zal de positie van de skiër maken op het ogenblik dat zij de sfeer verlaat?
2. Zal dit eerder of later zijn als de beweging over de sfeer niet wrijvingsloos is?

Oefening 5: Een botsende bal (8.39)

Je laat een bal vallen van een hoogte van $2m$ en deze botst terug tot op een hoogte van $1,5m$.

- Welke fractie van de energie van de bal is verloren gegaan tijdens het botsen?
- Wat was de snelheid van de bal net voor en net na het botsen?
- Waar is de verloren energie naartoe?

Oplossingen

Oplossing 1.1

- Een kracht is conservatief als totale de arbeid geleverd door de kracht op een deeltje dat terug op zijn beginpositie uitkomt, gelijk is aan nul:

$$W = \oint \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0.$$

- In deze oefening wordt dit

$$W = \int_a^a F_x(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

aangezien $\vec{F}$ hier enkel afhangt van de positie (en niet van bijvoorbeeld de snelheid).

Oplossing 1.2

- De potentiële energiefunctie is een functie $U(\vec{x})$ zodat

$$\vec{F}(x) = -\vec{\nabla} U(\vec{x}) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}.$$

- In deze oefening heeft de kracht enkel een x-component en dus volstaat het om daar op te concentereren. Verder kan worden ingezien dat

$$U(x_2) - U(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uitrekenen van de integraal geeft

$$-\int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,\mathrm{d}x = -\left(-kx_2^2 + \frac{1}{4}ax_2^4 + \frac{1}{5}bx_2^5 + kx_1^2 - \frac{1}{4}ax_1^4 - \frac{1}{5}bx_1^5\right).$$

Identificatie van deze uitdrukking met $U(x_2) - U(x_1)$ levert

$$U(x) = kx^2 - \frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{5}bx^5.$$

Oplossing 2

- De bungeespringer zal zich op het laagste punt bevinden wanneer haar kinetische energie opnieuw nul is. Behoud van energie zegt dan dat haar potentiële energie bovenaan de brug en onderaan dezelfde moeten zijn.
- Met de x-as horizontaal naar boven en het nulpunt van de gravitationele potentiële energie $31m$ onder de brug betekent dit (met $h = 31m$ en $\Delta\ell = 19m$ de uitrekking van de elastiek)

$$mgh = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \quad \Rightarrow \quad k = 93\frac{N}{m}.$$

- In vrije val is de versnelling g. Wanneer de elastiek een lengte $\Delta\ell$ langer is dan de evenwichtslengte, geldt door de wetten van Newton

$$a_x = \frac{1}{m}(k\Delta\ell - g).$$

Voor een maximale $\Delta\ell$ van $19m$ is deze versnelling gelijk aan $32\frac{m}{s^2}$. Dit is dan ook de maximale versnelling.

Oplossing 3.1

- Het makkelijkst is waarschijnlijk om beide massa's te beschrijven in een verschillend assenstelsel (bvb door een georiënteerde x-as langs het touw te kiezen).
- De versnelling van de massa's zal dezelfde zijn omdat ze verbonden zijn door een (opgespannen) touw en door gebruik te maken van de tweede wet van Newton volgt dat

$$a = \frac{m_B - m_A \sin(32^\circ)}{m_A + m_B} g = 3,1 \frac{m}{s^2}.$$

- Door de kinematische relatie $v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$ toe te passen — samen met de net berekende waarde voor a — te bepalen dat

$$v = \sqrt{2g|\Delta h_B| \frac{m_B - m_A \sin(32^\circ)}{m_A + m_B}} = 2,2 \frac{m}{s}.$$

Oplossing 3.2

- Behoud van energie zegt in zijn meest algemene vorm dat

$$\frac{1}{2}mv_A^2(1) + U_A(1) + \frac{1}{2}mv_B^2(1) + U_B(1)$$
$$= \frac{1}{2}mv_A^2(2) + U_A(2) + \frac{1}{2}mv_B^2(2) + U_B(2).$$

  waarbij $v_i(2)$ en $v_i(1)$ de eind- en beginsnelheiden van blok i zijn en analoog voor U_i, de potentiële energie.

- De beginsnelheden zijn nul. De snelheden van de blokken zijn gelijk, dus $v_A = v_B \equiv v$. Het verschil in potentiële energie voor blok B wordt gegeven door

$$U_B(2) - U_B(1) = m_B g \Delta h_B \quad \text{met} \quad \Delta h_B = -4m.$$

  Omdat blok A zich op de schuine helling bevindt, zal de potentiële energie slechts toenemen met

$$U_A(2) - U_A(1) = m_A g \Delta h_A \quad \text{waar} \quad \Delta h_A = -\Delta h_B \sin(32^\circ) = 2,12m.$$

Oplossing 3.3

- De kennis uit het vorige puntje gebruikend, kan het behoud van energie geschreven worden als

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2(2) + [U_A(2) - U_A(1)] + [U_B(2) - U_B(1)] \\ &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 + m_A g|\Delta h_B|\sin(32^\circ) - m_B g|\Delta h_B| \end{aligned}$$

- Herschrijven levert je opnieuw dat

$$v = \sqrt{2g|\Delta h_B|\frac{m_B - m_A\sin(32^\circ)}{m_A + m_B}} = 2,2\frac{m}{s}.$$

Oplossing 4.1

- Waarschijnlijk het eenvoudigst is om een assenstelsel te kiezen zodanig dat één as loodrecht staat op het oppervlak van de bol en de andere as rakend is aan het boloppervlak.
- Omdat de skiër — alvorens contact met het boloppervlak te verliezen — een cirkelvormige beweging beschrijft (let wel: de baansnelheid is niet constant als functie an de tijd), zal de centripetale component van de versnelling gegeven worden door

$$m\frac{v^2(\theta)}{r} = -F_N(\theta) + mg\sin(\theta)$$

  met θ de hoek die de positie van de skiër op de bol maakt met de horizontale. Deze gelijkheid geldt door de tweede wet van Newton. Het rechterlid is de component van de som van de krachten op de skiër in de richting van de centripetale versnelling. Merk op dat de normaalkracht ook afhangt van de hoek.
- Op het ogenblik dat de skiër het contact met het oppervlak verbreekt, zal $F_N(\theta_0) = 0$. Daarom geldt

$$m\frac{v^2(\theta_0)}{r} = mg\sin(\theta_0).$$

Oplossing 4.2

- Indien $v(\theta)$ gekend is, kan de laatste vergelijking op de vorige slide worden opgelost. Hiervoor kan behoud van energie worden gebruikt.
- Wanneer de skiër zich bevindt op de positie waar we naar verwijzen met θ, zal zij zich bevinden op een hoogte

$$\Delta h = -r(1 - \sin(\theta))$$

onder zijn beginpositie. Zij zal dus een potentiële energie $\Delta U(\theta) = mgr(1 - \sin(\theta))$ verloren hebben. Dit verlies aan potentiële energie wordt gecompenseerd door een extra hoeveelheid kinetische energie, dus

$$\Delta U(\theta) = mgr(1 - \sin(\theta)) = \frac{1}{2} m v^2(\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2(\theta) = 2gr(1 - \sin(\theta)).$$

Dit invullen in de laatste vergelijking van de vorige slide levert je

$$2(1 - \sin(\theta)) = \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{Bgsin}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 42^\circ.$$

Oplossing 5

- De bal valt van een hoogte van $2m$ vanuit rust. Dit betekent dat de totale energie mgh met $h = 2m$ is. Na het botsen is de totale energie mgh' met $h' = 1,5m$. Daarom is een fractie van

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{mgh - mgh'}{mgh} = \frac{2m - 1,5m}{2m} = 0,25$$

  van de energie verloren gegaan.
  Deze energie is verloren gegaan aan warmte, trillingen in het oppervlak, vervorming van de bal, geluidsgolven...

- De snelheden van de bal zijn gegeven door

$$v_{\text{voor}} = \sqrt{2gh} = 6,26\frac{m}{s} \quad \text{en} \quad v_{\text{na}} = \sqrt{2gh'} = 5,42\frac{m}{s}.$$

  Dit kan je afleiden uit behoud van energie; $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{cte}$.