Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2014–2015

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Ontbind in factoren over $\mathbb{C}$:

$$2z^4 + (-1+2i)\,z^3 + (11-i)\,z^2 + (-6-i)\,z - 6$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

2. Ontbind de volgende veelterm in twee factoren van de tweede graad met reële coëfficiënten. Bepaal daarna alle (complexe) nulpunten.

$$z^4 + 6z^2 + 25$$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{2x^3 + x^2 - 4x - 3}$

/6

   (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 5} - \sqrt{5 - 2x}}{x - 2}$

   (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)^{4x+5}$

4. Los op:

$$3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{x-1} + 2 = 0$$

/6

5. Bereken alle buigraaklijnen van de functie

$$f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 + x + 1$$

Is er maar één of zijn er meer?

/6

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 1 + \cos^2 2\theta$$

en maak hier een tekening van.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{9x^2 - 5x + 1}{4x^4 - 4x^3 + x^2} dx$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

/6

9. Bereken

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)(x+1)} dx$$

/6

10. Schets de lus met vergelijkingen

$$\begin{cases} x\left(t\right) = t^2 + 1 \\ y\left(t\right) = t^3 - 2t \end{cases}$$

en bereken de oppervlakte van het ingesloten gebied. Hint: het is héél belangrijk om de t–waarden te bepalen waarvoor deze kromme de coördinaatassen snijdt.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Ontbind in factoren over $\mathbb{C}$:

$$2z^4 + (-1+2i)\,z^3 + (11-i)\,z^2 + (-6-i)\,z - 6$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & -1-2i & 11-i & -6-i & -6 \\
1 & & 2 & 1+2i & 12+i & 6 \\
\hline
 & 2 & 1+2i & 12+i & 6 & 0 \\
-\dfrac{1}{2} & & -1 & -i & -6 & \\
\hline
 & 2 & 2i & 12 & 0 & \\
2i & & 4i & -12 & & \\
\hline
 & 2 & 6i & 0 & &
\end{array}$$

$= (z-1)\left(z+\dfrac{1}{2}\right)(z-2i)\,(2z+6i)$

$= (z-1)\,(2z+1)\,(z-2i)\,(z+3i)$

Feedback: Er zijn nogal wat manieren om dit op te lossen; eens je 2 nulpunten hebt afgesplitst kan je er een vierkantsvergelijking van maken. *De meesten vergeten dan echter de kopcoëfficient 2!* Het antwoord

$$(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-2i)\,(z+3i)$$

is dus **fout**.

Ook zijn er nogal wat studenten die het nodig vonden om de variabele z plots x te noemen. Ook daarvoor werden punten afgetrokken!

2. Ontbind de volgende veelterm in twee factoren van de tweede graad met reële coëfficiënten. Bepaal daarna alle (complexe) nulpunten.

$$z^4 + 6z^2 + 25$$

$= \left(z^2+5\right)^2 - 4z^2 = \left(z^2+2z+5\right)\left(z^2-2z+5\right)$

Nulpunten:

- $z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$
- $z^2 - 2z + 5 = (z-1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow z_{3,4} = 1 \pm 2i$

  Feedback: Wie rechtstreeks de nulpunten heeft bepaald door er bijv. een bikwadratische vergelijking van te maken werd hiervoor gesanctioneerd; er werd immers duidelijk gesteld om eerst de reële factoren van orde te vinden. Het is ook mogelijk om na een rechtstreekse ontbinding deze factoren terug te bepalen door de complex toegevoegde termen weer met elkaar te vermenigvuldigen, maar dat heeft op 1 persoon na niemand gedaan.

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x^2-x+3}{2x^3+x^2-4x-3} = \frac{0}{0}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)\left(x^2-4x+3\right)}{(x+1)^2\,(2x-3)}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-4x+3}{(x+1)\,(2x-3)} = \frac{8}{0}$

- $\displaystyle\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x^2-4x+3}{(x+1)\,(2x-3)} = \frac{8}{0^+\cdot(-5)} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^2-4x+3}{(x+1)(2x-3)} = \dfrac{8}{0^- \cdot (-5)} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{5-2x}}{x-2} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{5-2x}\right)\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{5-2x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{5-2x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-5-5+2x}{(x-2)\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{5-2x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-10}{(x-2)\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{5-2x}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{5-2x}} = \dfrac{5}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^{4x+5} = 1^\infty$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2x+3}{x^2}\right)^{4x+5}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(\left(1+\dfrac{2x+3}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{2x+3}}\right)^{\frac{2x+3}{x^2}}\right)^{4x+5}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2}(4x+5)} = e^8$

Feedback: Ik zie nog regelmatig onzin staan zoals $\lim\limits_{x\to -1} = \dfrac{8}{0}$. *Een limiet zonder functie bestaat niet; hier staat strikt genomen een limiet van een gelijkheidsteken, en zo'n aberranties neerschrijven kost punten!*

4. Los op:

$$3^{2x-1} - 5\cdot 3^{x-1} + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} y = 3^x \quad &\Rightarrow \quad \frac{y}{3} = 3^{x-1} \\ &\Rightarrow \quad y^2 = 3^{2x} \\ &\qquad \Rightarrow \frac{y^2}{3} = 3^{2x-1} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{3} - 5\cdot\dfrac{y}{3} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow y \in \{2,3\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 3 = 1 \\ x = \log_3 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases}$

Feedback: Dit laatste is een perfect valide uitkomst; een numerieke afronding is dat evenwel niet.

5. Bereken alle buigraaklijnen van de functie

$$f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 + x + 1$$

Is er maar één of zijn er meer?

$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x + 1$

$f''(x) = 20x^3 - 60x - 40 = 20(x+1)^2(x-2) = 0 \Rightarrow x \in \left\{-1^{(2)}, 2\right\}$

		$-1^{(2)}$		2	
f''	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\frown$	B	$\smile$

De enige raaklijn in $(2, f(2))$ is dus

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2)(x-2) \\ &\Leftrightarrow\ y + 125 = -119(x-2) \\ &\Leftrightarrow\ y = -119x + 113 \end{aligned}$$

Feedback: In -1 is er dus *geen* buigpunt en *geen* buigraaklijn!

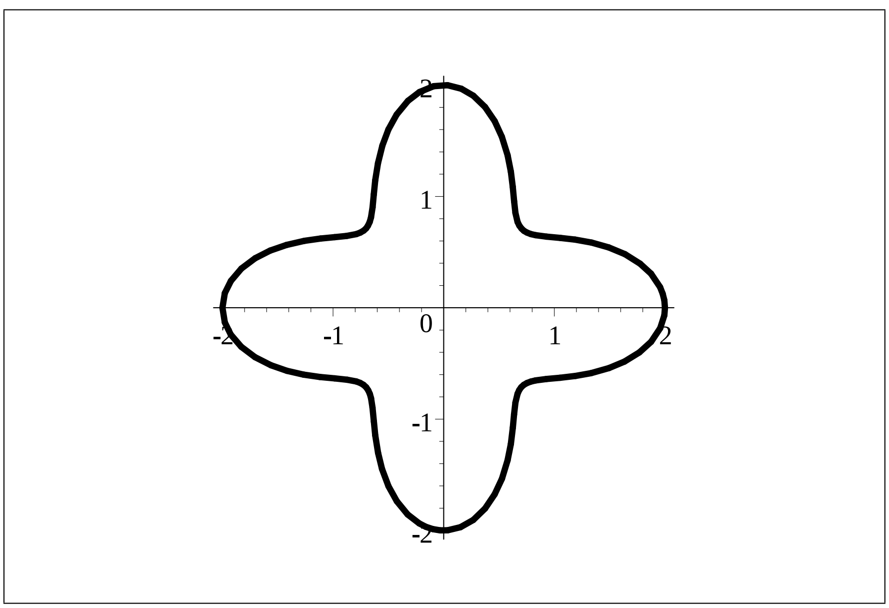
6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 1 + \cos^2 2\theta$$

en maak hier een tekening van.

- Domein $= \mathbb{R}$
Periode $= \pi$
Beperkt domein $= [0, \pi]$
- $r = 0$ kan niet
- $r' = -4\cos 2\theta \sin 2\theta = -2\sin 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = k \cdot \dfrac{\pi}{4}$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
r	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
	$M(2)$	$\searrow$	$m(1)$	$\nearrow$	$M(2)$	$\searrow$	$m(2)$	$\nearrow$	$M(2)$



Feedback: Men zou kunnen zeggen dat $1 + \cos^2 2\theta = 1 + \dfrac{1 + \cos 4\theta}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 4\theta$ en dat de periode $\dfrac{\pi}{4}$ is. Dit antwoord werd — uiteraard — ook goedgekeurd.

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{9x^2 - 5x + 1}{4x^4 - 4x^3 + x^2} dx$$

$$\frac{9x^2-5x+1}{4x^4-4x^3+x^2}=\frac{9x^2-5x+1}{x^2\left(2x-1\right)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{\left(2x-1\right)^2}+\frac{D}{2x-1}$$

$$A=\frac{9x^2-5x+1}{\left(2x-1\right)^2}|_{x=0}=1$$
$$\frac{9x^2-5x+1}{x^2\left(2x-1\right)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{9x^2-5x+1-\left(2x-1\right)^2}{\left(2x-1\right)^2x^2}=\frac{5x-1}{x\left(2x-1\right)^2}\Rightarrow B=\frac{5x-1}{\left(2x-1\right)^2}|_{x=0}=-1$$
$$C=\frac{9x^2-5x+1}{x^2}|_{x=\frac{1}{2}}=3$$
$$\frac{9x^2-5x+1}{x^2\left(2x-1\right)^2}-\frac{3}{\left(2x-1\right)^2}=\frac{9x^2-5x+1-3x^2}{x^2\left(2x-1\right)^2}=\frac{3x-1}{\left(2x-1\right)x^2}\Rightarrow D=\frac{3x-1}{x^2}|_{x=\frac{1}{2}}=2$$

$$\Rightarrow I=\int\left(\frac{3}{\left(2x-1\right)^2}+\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{x}-\ln|x|-\frac{3}{2\left(2x-1\right)}+\ln|2x-1|+c$$

Feedback: De ontbinding van de noemer is $x^2\left(2x-1\right)^2$ en dus *niet* $x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$!

8. Bereken

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Stel $x=\operatorname{sh}t\Rightarrow dx=\operatorname{ch}t\,dt$

$$=\int\frac{\operatorname{sh}^2t}{\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}t\,dt=\int\operatorname{sh}^2t\,dt$$

Alternatief 1:

$$\begin{cases}u=\operatorname{sh}t\\ dv=\operatorname{sh}t\,dx=\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\operatorname{ch}t\,dt\\ v=\operatorname{ch}t\end{cases}$$

$$=\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-\int\operatorname{ch}^2t\,dt$$
$$=\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-\int\left(1+\operatorname{sh}^2t\right)dt$$
$$=\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-t-\int\operatorname{sh}^2t\,dt$$
$$\Rightarrow 2I=\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-t+c$$
$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-\frac{t}{2}+c$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{Bgsh}x+c$$

Alternatief 2:

$$\int\operatorname{sh}^2t\,dt=\int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2dt$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(e^{2t}-2+e^{-2t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{8}e^{2t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8e^{2t}}+c$$
$$=\frac{1}{8}e^{2\operatorname{Bgsh}x}-\frac{1}{2}\operatorname{Bgsh}x-\frac{1}{8e^{2\operatorname{Bgsh}x}}+c$$

Alternatief 3:

$$\int\operatorname{sh}^2t\,dt=\int\frac{\operatorname{ch}2t-1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}2t}{2}-t\right)+c$$

$= \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsh} x + c$
$= \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsh} x + c$
$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsh} x + c$

Feedback: $\operatorname{sh}^2 t$ is niet gelijk aan $\dfrac{1-\operatorname{ch} 2t}{2}$ maar aan $\dfrac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$

9. Bereken

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx$$

$$\frac{1}{(2x+1)(x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x+1}\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = 2 \\ B &= \frac{1}{2x+1}\Big|_{x=-1} = -1 \end{aligned}$$

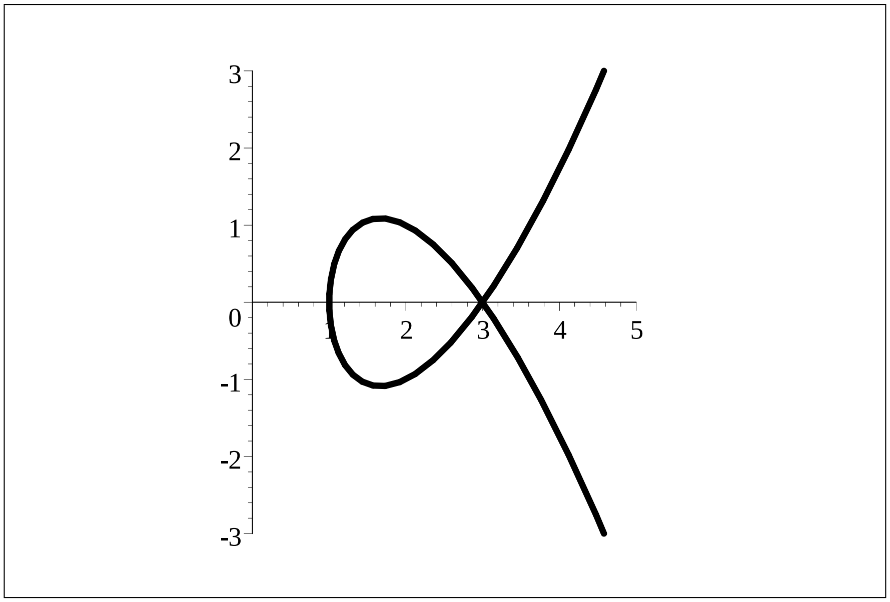
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)(x+1)}dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\ln|2x+1| - \ln|x+1|\right]_0^c$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|\right]_0^c$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \ln\left|\frac{2c+1}{c+1}\right| - \ln 1$$
$$= \ln\left|\lim_{c\to+\infty} \frac{2c+1}{c+1}\right| = \ln 2$$

10. Schets de lus met vergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 - 2t \end{cases}$$

en bereken de oppervlakte van het ingesloten gebied. Hint: het is héél belangrijk om de t–waarden te bepalen waarvoor deze kromme de coördinaatassen snijdt.

t	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2
x	5	3	2	1	2	3	5
y	-4	0	1	0	-1	0	4



$$S = 2\int_{\sqrt{2}}^{0} \left(t^3 - 2t\right) 2t dt = \left[\frac{4}{5}t^5 - \frac{8}{3}t^3\right]_{\sqrt{2}}^{0} = \frac{32}{15}\sqrt{2}$$