Wetten van Newton

1. Een voorwerp beweegt met een constante snelheidsvector (die eventueel gelijk aan nul kan zijn) tenzij er een externe kracht op werkt.
2. De versnelling van een voorwerp is rechtevenredig met de netto kracht die er op werkt. De evenredigheidsconstante is de massa. In wiskundige vorm

   $$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

   (Let op: dit is geen som over vectorcomponenten!)
3. Wanneer twee lichamen interageren, oefent voorwerp B een kracht uit op voorwerp A die gelijk is in grootte maar tegengesteld gericht aan de kracht uitgeoefend door A op B:

   $$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}.$$

Belangrijk! Deze wetten gelden alleen in zogenaamde inertiële referentiestelsels.

Deze stelsels zijn per definitie die stelstels waarin de eerste wet geldt.

Overige nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 5)

- De versnelling van een deeltje in een cirkelvormige baan in die baan, is de centripetale versnelling. De grootte hiervan wordt gegeven door

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

  waarbij v de baansnelheid is (de component van de snelheid loodrecht op de cirkelbaan speelt hier niet mee!) en r de straal van de baan. De centripetaalkracht $m\vec{a}_c$ is gericht naar het middelpunt van de cirkelvormige baan en verschijnt in "de $m\vec{a}$-kant" van de tweede wet van Newton!

- De grootte van de wrijvingskracht werkend op voorwerpen is gegeven door

$$F_w = \mu_k F_N \quad \text{of} \quad F_w \leqslant \mu_s F_N$$

  in het kinetische respectievelijk statische geval, waar F_N de grootte van de normaalkracht is die het voorwerp uitoefent op het oppervlak waar het contact mee maakt. De richting van de kinetische wrijvingskracht is antiparallel aan de bewegingsrichting. De statische wrijvingskracht heeft een richting (en grootte) zoals nodig om de tweede wet van Newton te laten opgaan (vandaar ook de $\leqslant$ in de formule).

Oefening 1: Stunt- en vliegwerk (5.47)

Een piloot van een jet laat zijn vliegtuig een verticale loop beschrijven.

1. Als de jet met een snelheid van $1200 \frac{km}{h}$ door het onderste punt van de loop passeert, wat is dan de minimale straal van de cirkel zodat de centripetale versnelling op het laagste punt geen $6,0g$ overschrijdt?
2. Wat is het effectieve gewicht van de piloot, wiens massa $78kg$ is, op ditzelfde laagste punt in de baan? Dit is de kracht die de piloot uitoefent op zijn/haar stoel.
3. Wat is dit effectieve gewicht op het bovenste stuk van de baan? Je mag veronderstellen dat de snelheid van het vliegtuig dezelfde grootte heeft overal op de cirkelbaan.

Oefening 2: Roterende blokken aan een touw (5.54)

Twee blokken met massa's m_A en m_B zijn met elkaar en een vast punt verbonden door een touw. Ze roteren rond dit punt met een frequentie f op een frictieloos horizontaal oppervlak op afstanden r_A en r_B van het vaste punt. Zoek een uitdrukking voor de spankrachten in beide segmenten van het touw.

Oefening 3: Uit de bocht (5.58)

Als een bocht met straal $85m$ de juiste hellingsgraad heeft zodat een auto die aan $65 \frac{km}{h}$ rijdt netjes deze curve kan volgen, wat moet dan de statische wrijvingscoëfficiënt zijn opdat een auto met een snelheid van $95 \frac{km}{h}$ niet uit de bocht zou gaan?

Oefening 4: Meer vliegwerk (5.91)

Een vliegtuig vliegt met een snelheid van $480\,\frac{km}{h}$ en wil terugdraaien. De piloot beslist dit te doen door schuin te vliegen onder een hoek van 38° met de horizontale.

1. Hoe lang zal het vliegtuig schuin moeten vliegen om de 180° te draaien?
2. Beschrijf de extra krachten die de passagiers ondervinden tijdens het draaien.

Je mag gebruiken dat er een liftkracht werkt op het vliegtuig die loodrecht staat op het vlak van de vleugels.

Oplossingen

Oplossing 1.1

- De minimale straal zal zodanig zijn dat de centripetale versnelling gelijk is aan $6g$.
- De centripetale versnelling heeft een grootte gegeven door

  $$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

  Dit betekent

  $$r_{\min} = \frac{v^2}{a_{c,\max}} = \frac{(33,33\,\frac{m}{s})^2}{6 \cdot 9,81\,\frac{m}{s^2}} = 1887m.$$

- Het effectieve gewicht van de piloot is de kracht dat deze uitoefent op de stoel. Deze is gelijk in grootte aan de normaalkracht die de stoel uitoefent op de piloot. Deze krachten zullen gericht zijn langs de straal van de cirkelbaan. De tweede wet van Newton zegt voor de piloot

  $$m\vec{a}_c = m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_N$$

  met in het rechterlid de zwaartekracht en de normaalkracht respectievelijk.

Oplossing 1.2

- De z-as naar boven kiezend, kan deze vectorvergelijking worden geschreven als

  $$ma_{c,z} = F_{g,z} + F_{N,z} \quad F_{\text{net. gew.}} = F_N = F_{N,z} = ma_{c,z} - F_{g,z} = ma_c + g.$$

  Met de straal uit het eerste deel van de vraag wordt $a_c = 6g$ en dus wordt het netto gewicht $7g$ maal m voor een totaal van $5356N$.

- In het bovenste gedeelte van de baan gaat de tweede wet van Newton nog steeds op. De versnelling en de normaalkracht ondervonden door de piloot zullen echter naar beneden gericht zijn in deze situatie, zodat

  $$F_{\text{net. gew.}} = F_N = -F_{N,z} = F_{g,z} - ma_{c,z} = -g + ma_c.$$

  Opnieuw in de situatie van het eerste deel wordt $a_c = 6g$ zodat het netto gewicht wordt

  $$F_N = 5mg = 5 \cdot 78kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} = 3826N.$$

Oplossing 2.1

- Zonder verlies van algemeenheid kan je aannemen dat $r_A < r_B$. Dit is ook de situatie zoals getekend in het boek.
- Hoewel het systeem roteert, kan je een vast assenstelsel kiezen. De gezochte spankrachten zijn op elk ogenblik dezelfde en dus volstaat het het systeem te "bevriezen" in de tijd en je coördinaatas langs het touw te kiezen. Dit is nog steeds een inertieel referentiestelsel, terwijl een stelsel dat met het touw en de blokken mee roteert dat niet zou zijn. Laat ons de as in kwestie postief kiezen naar buiten toe en deze de x-as noemen.
- Noem de spankrachten in het eerste deel van het touw T_A, de sprankracht tussen beide blokken T_B. Dan zal de x-component van de tweede wet van Newton voor de twee blokken respectievelijk

$$-m_A a_{c,A} = -T_A + T_B \quad \text{en} \quad -m_B a_{c,B} = -T_B$$

zijn.

Oplossing 2.2

- De centripetale versnelling is niet gekend. Deze kan echter worden berekend aangezien

$$a_{c,i} = \frac{v_i^2}{r_i} = \frac{(2\pi r_i f)^2}{r_i} = (2\pi f)^2 r_i, \quad i = A, B.$$

- Deze waarden invullen in de wet van Newton op de vorige slide levert het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -m_A(2\pi f)^2 r_A & = & -T_A + T_B \\ -m_B(2\pi f)^2 r_B & = & -T_B. \end{array} \right.$$

  Dit stelsel kan je oplossen door de tweede vergelijking in te vullen in de eerste om T_B te elimineren en dan vind je

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_A & = & (2\pi f)^2 [m_A r_A + m_B r_B] \\ T_B & = & (2\pi f)^2 m_B r_B. \end{array} \right.$$

Oplossing 3.1

- Als een auto in een cirkelvormige bocht blijft bij een snelheid van 95 $\frac{km}{h}$, betekent dit dat de centripetale versnelling gelijk is aan
$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$
Om deze versnelling te bekomen, zijn krachten nodig.
- De krachten die op de auto werken, zijn de zwaartekracht, de normaalkracht uitgeoefend door het wegdek en de statische wrijvingskracht. De radiële component van deze kracht is een statische wrijving omdat de auto niet beweegt in die richting, ook al beweegt de auto wel in een andere richting.
- De tweede wet van Newton luidt dus voor de auto (in de veronderstelling dat de tangentiële component van de versnelling nul is)
$$m\vec{a} = m\vec{a}_c = \vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_w.$$
- Kies een coördinaatstelsel met de y-as positief naar boven en de x-as naar de buitenkant van de bocht (radiële richting).

Oplossing 3.2

- Uit de y-component van de wet van Newton, kan worden gehaald dat

$$a_y = 0 \Rightarrow F_{N,y} = mg.$$

Om te bepalen wat de x-component van de normaalkracht is, moet de hellingsgraad van de baan gekend zijn. Hiervoor is het laatst overgebleven deel van het gegeven nodig: een auto met een snelheid van $65\,\frac{km}{h}$ blijft netjes in de bocht zonder dat er wrijvingskracht voor nodig is.

- In hetzelfde coördinaatstelsel kan de tweede wet van Newton voor een auto aan deze snelheid worden opgeschreven als

$$\begin{cases} -m\frac{v^2}{r} & = & -F_N\cos(\theta) \\ 0 & = & +F_N\sin(\theta) - mg; \end{cases}$$

waar θ de hoek tusen $\vec{F}_N$ en de y-as. Hieruit volgt

$$\theta = \text{Bgtan}\left(\frac{v^2}{gr}\right) = \text{Bgtan}\left(\frac{(65/3,6\,\frac{m}{s})^2}{9,81\,\frac{m}{s^2}\cdot 85m}\right) = 21,4^\circ.$$

Oplossing 3.3

- Nu deze hoek gekend is, kan ook de x-component van de normaalkracht in het geval van de snelle auto berekend worden. De tweede wet van Newton, in het bijzonder de x-compontent, zegt

$$-m\frac{v^2}{r} = -F_N \sin(\theta) - F_w \cos(\theta).$$

- Omdat de auto net niet uit de bocht glijdt, is de statische wrijving maximaal en dus geldt $F_w = \mu_s F_N$. Dit betkent

$$m\frac{v^2}{r} = F_N(\sin(\theta) + \mu \cos(\theta))$$

- Hetzelfde doen voor de y-component leert je

$$0 = F_N \cos(\theta) - (\mu_s F_N) \sin(\theta) - mg$$

ofwel

$$mg = F_N(\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)).$$

Oplossing 3.4

- Beide uitdrukkingen omschrijven om de normaalkracht te isoleren in één lid en vervolgens beide uitdrukkingen aan elkaar gelijk stellen, levert je

  $$\frac{v^2}{r}(\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)) = g(\sin(\theta) + \mu_s \cos(\theta))$$

  Hieruit kan je μ_s isoleren zodat

  $$\begin{aligned}\mu_s &= \frac{v^2 \cos(\theta) - gr \sin(\theta)}{gr \cos(\theta) + v^2 \sin(\theta)} \\ &= \frac{(\frac{95}{3,6}\,\frac{m}{s})^2 - 9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot 85m \tan(21,4^\circ)}{9,81\,\frac{m}{s^2} \cdot 85m + (\frac{95}{3,6}\,\frac{m}{s})^2 \tan(21,4^\circ)} \\ &= 0,33.\end{aligned}$$

Oplossing 4.1

- De tijd die nodig is om de halve cirkel te beschrijven, is gegeven door

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\pi r}{v}.$$

  In de eenvoudigste veronderstelling is de $480 \frac{km}{h}$ de snelheid van het vliegtuig tijdens het draaien.

- De straal waarmee gedraaid wordt, is bepaald de centripetale versnelling, namelijk

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi v}{a_c}.$$

- Om de centripetale versnelling te bekomen, kan de tweede wet van Newton worden toegepast.

Oplossing 4.2

- Er werken twee krachten in op het vliegtuig als de wrijving wordt verwaarloosd: de zwaartekracht en de lifktracht. Deze laatste kracht is nu echter niet meer verticaal gericht.
- Als we veronderstellen dat de verticale component van de versnelling nul is, zal

$$\begin{cases} 0 &= F_{\text{lift}} \cos(38^\circ) - mg \\ m\frac{v^2}{r} &= F_{\text{lift}} \sin(38^\circ). \end{cases}$$

- In beide vergelijkingen F_{lift} isoleren en de vergelijkingen gelijkstellen aan elkaar geeft je als resultaat

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g \tan(38^\circ).$$

Oplossing 4.3

- De totale tijd die benodigd is, is daarom gegeven door

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\pi v}{a_c} \\ &= \frac{\pi v}{g\tan(38^\circ)} \\ &= \frac{\pi \cdot 133,33\,\frac{m}{s}}{9,81\,\frac{m}{s^2}\tan(38^\circ)} \\ &= 54,7s.\end{aligned}$$

- De passagiers van het vliegtuig zullen tijdens het draaien sterker in hun stoel gedrukt worden dan voor het draaien: de verticale compontent van de normaalkracht dient nog steeds de valversnelling te compenseren en hier komt ook een horizontale component bij om de juiste centripetale versnelling aan de passagiers te geven.