Examen Toegepaste Wiskunde III Oefeningen

dr Werner Peeters

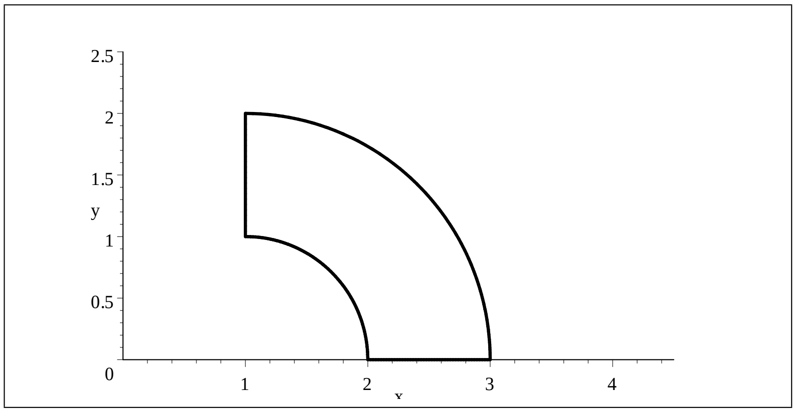
2e bachelor scheikunde & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2010–2011

Naam:	....
Richting:	SCH / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Beschouw het gebied T, ingesloten door de krommen $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ en $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$, boven de rechte $y = 0$ en rechts van de rechte $x = 1$ (zie tekening)



Bereken over het desbetreffende gebied de dubbelintegraal

$$\iint_T 6\left(\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}\right) dS.$$

Hint: gebruik een aangepaste substitutie waarin je makkelijk kan beschrijven dat de krommen $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ en $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ kwartcirkels zijn.

/10

2. Bereken de oppervlakte–integraal $\iint\limits_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dudv$ met $\boldsymbol{\eta}$ de uitwendige normaal, van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, 3x, 5y)$ over de halve sfeer S met vergelijking $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Door middel van de gepaste integraalstelling wordt de oefening een stuk korter.

$\boxed{\quad\quad /10}$

3. Los op met de methode van Frobenius

$$\left(2x^2+1\right)y''+xy'-y=0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 8x(t) - 15y(t) - 31t + 17 \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) - 7t - 4 \end{cases}$$

/10

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op door middel van de Laplacetransformatie:

$$2y'' + 3y' - 2y = 5t\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -7$$

$\boxed{\qquad /10}$

6. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y\,(n+3) - 12y\,(n+1) + 16y\,(n) = 288n \cdot 2^n$$

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Beschouw het gebied T, ingesloten door de krommen $y = \sqrt{-x^2+2x}$ en $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$, boven de rechte $y = 0$ en rechts van de rechte $x = 1$ (zie tekening)

   Bereken over het desbetreffende gebied de dubbelintegraal

$$\iint_T 6\left(\sqrt{x^2-2x+1+y^2} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1+y^2}}\right) dS.$$

   Hint: gebruik een aangepaste substitutie waarin je makkelijk kan beschrijven dat de krommen $y = \sqrt{-x^2+2x}$ en $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$ kwartcirkels zijn.

   Stel $\begin{cases} x = r\cos\theta + 1 \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ dan is het gebied $\widetilde{T} = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

   $\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = r$

   $I = \iint_{\widetilde{T}} 6\left(r + \frac{r\cos\theta}{r}\right) r dS = \iint_{\widetilde{T}} \left(6r^2 + 6r\cos\theta\right) dS$

   $= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 6\left(r^2 + r\cos\theta\right) dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[2r^3 + 3r^2\cos\theta\right]_1^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (14 + 9\cos\theta)\, d\theta = [14\theta + 9\sin\theta]_0^{\pi/2} = 7\pi + 9$

2. Bereken de oppervlakte–integraal $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dudv$ met $\boldsymbol{\eta}$ de uitwendige normaal, van het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = (2z, 3x, 5y)$ over de halve sfeer S met vergelijking $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Door middel van de gepaste integraalstelling wordt de oefening een stuk korter.
   Hier zijn een viertal juiste oplossingsmethoden:

   - Rechtstreeks:
     $\varphi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{4-u^2-v^2}\right)$
     $\eta = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right) \times \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right) = \left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1\right)$
     $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (5,2,3)$
     $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} = (5,2,3)\left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1\right) = \frac{5u+2v}{\sqrt{4-u^2-v^2}} + 3$
     $\Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_S \left(\frac{5u+2v}{\sqrt{4-u^2-v^2}} + 3\right) dvdu$

Na omzetting naar poolcoördinaten (vergeet de Jacobiaan niet!) wordt dit

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{5r^2\cos\theta+2r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}+3r\right)d\theta dr$$

$$=\int_0^2\left[5r^2\frac{\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}-2r^2\frac{\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+3r\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_0^2 6r\pi dr$$

$$=\left[3r^2\pi\right]_0^2=12\pi$$

- In cylindercoördinaten.

$\varphi(r,\theta)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta,\sqrt{4-r^2}\right)$

$\eta(r,\theta)=\left(\cos\theta,\sin\theta,-\dfrac{r}{\sqrt{4-r^2}}\right)\times(-r\sin\theta,r\cos\theta,0)=\left(\dfrac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}},\dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}},r\right)$

$\operatorname{rot}\mathbf{F}=(5,2,3)$

$\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}=(5,2,3)\left(\dfrac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}},\dfrac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}},r\right)=5r^2\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+2r^2\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}+3r$

$$\Rightarrow\iint_S\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}dS=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(5r^2\frac{\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+2r^2\frac{\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}+3r\right)d\theta dr$$

$$=\int_0^2\left[5r^2\frac{\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}-2r^2\frac{\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}+3r\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_0^2 6r\pi dr$$

$$=\left[3r^2\pi\right]_0^2=12\pi$$

- In bolcoördinaten: Stel

$$\begin{cases}x=2\sin u\cos v\\ y=2\sin u\sin v\\ z=2\cos u\end{cases}\quad\text{met } u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],v\in[0,2\pi]$$

$$\eta(u,v)=\begin{pmatrix}2\cos u\cos v\\2\cos u\sin v\\-2\sin u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\sin u\sin v\\2\sin u\cos v\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sin^2u\cos v\\4\sin^2u\sin v\\4\cos u\sin u\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rot}\mathbf{F}=(5,2,3)$

$\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}=(5,2,3)\left(4\sin^2u\cos v,4\sin^2u\sin v,4\sin u\cos u\right)=20\sin^2u\cos v+8\sin^2u\sin v+12\cos u\sin u$

$$\Rightarrow\iint_S\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}dS=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(20\sin^2u\cos v+8\sin^2u\sin v+12\cos u\sin u\right)dvdu$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(20\sin^2u\cos v+8\sin^2u\sin v+12\cos u\sin u\right)dvdu$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}24\pi(\cos u\sin u)du=12\pi\left[\sin^2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi$$

- Met Stokes: Stel $\alpha:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3:t\mapsto\alpha(t)=(2\cos t,2\sin t,0)$

$\Rightarrow\alpha'(t)=(-2\sin t,2\cos t,0)$

$F(\alpha(t))\alpha'(t)=(0,6\cos t,10\sin t)\cdot(-2\sin t,2\cos t,0)=12\cos^2t$

$$\Rightarrow\iint_S\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}dudv=\int_0^{2\pi}12\cos^2t\,dt=\int_0^{2\pi}6(1+\cos 2t)dt=[6t+3\sin 2t]_0^{2\pi}=12\pi$$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$\left(2x^2+1\right)y''+xy'-y=0$$

Stellen we

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2}
\end{aligned}
$$

dan is

$$
\begin{aligned}
\left(2x^2+1\right) y'' + xy' - y &= \left(2x^2+1\right) \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{m=n-2}{=} 2\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^n + \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+2\right)\left(m+1\right) c_{m+2} x^m + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+2\right)\left(n+1\right) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n+2\right)\left(n+1\right) c_{n+2} + 2n\left(n-1\right) c_n + n c_n - c_n\right] x^n = 0 \\
&= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n+2\right)\left(n+1\right) c_{n+2} + c_n\left(2n+1\right)\left(n-1\right)\right] x^n = 0
\end{aligned}
$$

De recursiebetrekking is

$$
\begin{aligned}
2c_2 - c_0 &= 0 \\
6c_3 &= 0 \\
\forall n &\geq 2 : c_{n+2} = -\frac{\left(2n+1\right)\left(n-1\right) c_n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}
\end{aligned}
$$

De eerste betrekking is dus conform de recursiebetrekking. Uit de tweede betrekking en de recursiebetrekking volgt alvast dat

$$c_3 = c_5 = c_7 = ...c_{2n+1} = 0$$

Stellen we enerzijds $c_0 \neq 0$ en $c_1 = 0$ dan vinden we

$$c_1 = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{2}c_0 \\
c_4 &= -\frac{5\cdot 1 c_2}{3\cdot 4} = -\frac{5\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4}c_0 \\
c_6 &= -\frac{9\cdot 3 c_4}{5\cdot 6} = \frac{9\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}c_0 \\
c_8 &= -\frac{13\cdot 5 c_4}{7\cdot 8} = -\frac{13\cdot 9\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}c_0 \\
&\ldots \\
c_{2n} &= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots\cdot (4n-3)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-3)}{(2n)!} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots\cdot (4n-3)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots\cdot (2n-3)\cdot (2n-2)\cdot (2n-1)\cdot (2n)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots\cdot (4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot (2n-2)\cdot (2n-1)\cdot (2n)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots\cdot (4n-3)}{2^n\cdot n!\,(2n-1)}
\end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_0 = 0$ en $c_1 \neq 0$ dan vinden we enkel c_1, wat betekent dat alle functies $c_1 x$ oplossingen zijn van het probleem. Hieruit volgt dat

$$y(x) = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots\cdot (4n-3)}{2^n\cdot n!\,(2n-1)}\right)x^{2n} + c_1 x$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 8x(t) - 15y(t) - 31t + 17 \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) - 7t - 4 \end{array}\right.$$

Homogene vergelijking

$A = \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -15 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$* \; \lambda = 2 \Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - 5y = 0 \Rightarrow V_1 : \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$* \; \lambda = 3 \Rightarrow E_3 : \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 3y = 0 \Rightarrow V_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_h(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 5e^{2t} & 3e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$ is dus een fundamentele matrix

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{2t} & 3e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ 2e^{-3t} & -5e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W'(t) = \Phi^{-1}(t)\,F(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ 2e^{-3t} & -5e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -31t + 17 \\ -7t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (10t - 29)\,e^{-2t} \\ (-27t + 54)\,e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W(t) = \int \begin{pmatrix} (10t - 29)\,e^{-2t} \\ (-27t + 54)\,e^{-3t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} (-5t + 12)\,e^{-2t} \\ (9t - 15)\,e^{-3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi(t)\, W(t) = \begin{pmatrix} 5e^{2t} & 3e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5t+12)\, e^{-2t} \\ (9t-15)\, e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+15 \\ -t+9 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow X_h(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t+15 \\ -t+9 \end{pmatrix}$

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op door middel van de Laplacetransformatie:

$$2y'' + 3y' - 2y = 5t\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -7$$

$2\left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + 3\left(zY(z) - y(0)\right) - 2Y(z) = -5\dfrac{d}{dz}\left(e^{-z}\right) = 5e^{-z}$
$\Leftrightarrow 2\left(z^2 Y(z) - z + 7\right) + 3\left(zY(z) - 1\right) - 2Y(z) = 5e^{-z}$
$\Leftrightarrow \left(2z^2 + 3z - 2\right) Y(z) = 2z - 11 + 5e^{-z}$
$\Leftrightarrow (z+2)(2z-1)\, Y(z) = 2z - 11 + 5e^{-z}$
$\Leftrightarrow Y(z) = \dfrac{2z-11}{(z+2)(2z-1)} + \dfrac{5e^{-z}}{(z+2)(2z-1)}$
$\Leftrightarrow Y(z) = \left(\dfrac{3}{z+2} - \dfrac{4}{2z-1}\right) + e^{-z}\left(\dfrac{2}{2z-1} - \dfrac{1}{z+2}\right)$
$\Rightarrow y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{\frac{t}{2}} + H(t-1)\left(e^{\frac{t-1}{2}} - e^{-2t+2}\right)$

6. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y(n+3) - 12y(n+1) + 16y(n) = 288n \cdot 2^n$$

KV: $E^3 - 12E + 16 = (E+4)(E-2)^2 = 0$
$\Rightarrow y_h(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 (-4)^n$
Annihilator $= (E-2)^2$
Hyperannihilator $= (E+4)(E-2)^4$
Stel $y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n + a_3 n^2 2^n + a_4 n^3 2^n + a_5 (-4)^n$
$\Rightarrow y_p(n) = a_3 n^2 2^n + a_4 n^3 2^n$
$\Leftrightarrow a_3 (n+3)^2 2^{n+3} + a_4 (n+3)^3 2^{n+3} - 12a_3 (n+1)^2 2^{n+1} - 12a_4 (n+1)^3 2^{n+1} + 16a_3 n^2 2^n + 16a_4 n^3 2^n = 288n2^n$
$\Leftrightarrow a_3 (n+3)^2 2^3 + a_4 (n+3)^3 2^3 - 12a_3 (n+1)^2 2^1 - 12a_4 (n+1)^3 2^1 + 16a_3 n^2 + 16a_4 n^3 = 288n$
$\Leftrightarrow 8a_3\left(n^2 + 6n + 9\right) + 8a_4\left(n^3 + 9n^2 + 27n + 27\right) - 24a_3\left(n^2 + 2n + 1\right) - 24a_4\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 16a_3 n^2 + 16a_4 n^3 = 288n$
$\Leftrightarrow 8a_3\left(n^2 + 6n + 9\right) + 8a_4\left(n^3 + 9n^2 + 27n + 27\right) - 24a_3\left(n^2 + 2n + 1\right) - 24a_4\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) + 16a_3 n^2 + 16a_4 n^3 = 288n$
$\Leftrightarrow n^3\left(8a_4 - 24a_4 + 16a_4\right) + n^2\left(8a_3 + 72a_4 - 24a_3 - 72a_4 + 16a_3\right) + n\left(48a_3 + 216a_4 - 48a_3 - 72a_4\right) + 72a_3 + 216a_4 - 24a_3 - 24a_4 = 288n$
$\Leftrightarrow 144a_4 n + 48a_3 + 192a_4 = 288n$
$\Rightarrow \begin{cases} 144a_4 = 288 \\ 48a_3 + 192a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = -8 \\ a_4 = 2 \end{cases}$
$\Rightarrow y(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 (-4)^n - 8n^2 2^n + 2n^3 2^n$