Examen Wiskunde Oefeningen REEKS A

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2010–2011

Naam: ....

Richting: SCH / BIC / BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Los op. a en b moeten reëel zijn.

$$(3-2i)^2 \frac{(a+bi)(-2+i)}{1+(1-i)^3} = -99+i$$

/6

2. Bepaal het complexe getal a zodanig dat $z^4+z^3+7z^2+az-6i$ deelbaar is door $z-i$, en bepaal daarna de drie andere nulpunten.

/5

3. Welke waarde moet a hebben opdat het stel $\overrightarrow{u}\left(a^2-5,-5,3\right)$, $\overrightarrow{v}(-1,1,-1)$ en $\overrightarrow{w}(8,1,a)$ lineair afhankelijk zou zijn in $\mathbb{R}^3$

/5

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} w-2x+y=-8 \\ x-2y+z=-2 \\ y-2z+w=0 \\ z-2w+x=10 \end{cases}$$

/6

5. Bespreek de onderlinge ligging van de volgende drie vlakken in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \alpha : 2x - 20y - 17z + 1 = 0 \\ \beta : -5x + 11y + 10z + 4 = 0 \\ \gamma : -10x - 8y - 5z + 13 = 0 \end{cases}$$

/5

6. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van $T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

/6

7. Bereken de volgende limieten zonder de regel van de l'Hôpital

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - \sqrt{x^2}}{x + 1}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{\frac{2x^3 - 1}{x^2}}$

/6

8. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$1 + \frac{2}{\log_{x+1} 3} = \log_3 \left(x^3 + 11\right)$$

Kijk goed na of de gekomen oplossingen wel oplossingen van de vergelijking zijn!

/6

9. Bereken de afgeleide van $f\left(x\right) = \dfrac{\operatorname{Bgsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

/6

10. Geef een volledig functieonderzoek tot en met een tekening van de functie $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 4}$

/7

11. Bereken $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x \,(1 + \ln(\ln x))} dx$

/6

12. Bereken $\int \frac{x^4 + 4x^3 - 14x + 13}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Los op. a en b moeten reëel zijn.

$$(3-2i)^2\,\frac{(a+bi)\,(-2+i)}{1+(1-i)^3}=-99+i$$

$\Leftrightarrow a+bi=\dfrac{(-99+i)\,(-1-2i)}{(5-12i)\,(-2+i)}$
$\Leftrightarrow a+bi=\dfrac{101+197i}{2+29i}=7-3i$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=7\\ b=-3\end{array}\right.$

2. Bepaal het complexe getal a zodanig dat $z^4+z^3+7z^2+az-6i$ deelbaar is door $z-i$, en bepaal daarna de drie andere nulpunten.
$f(z)=z^4+z^3+7z^2+az-6i$
$f(i)=ia-6-7i=0\Rightarrow a=7-6i$
$\Rightarrow f(z)=z^4+z^3+7z^2+(7-6i)\,z-6i$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 1 & 7 & 7-6i & -6i\\
i & & i & -1+i & -1+6i & 6i\\
\hline
 & 1 & 1+i & 6+i & 6 & 0\\
-1 & & -1 & -i & -6 & \\
\hline
 & 1 & i & 6 & 0 & \\
2i & & 2i & -6 & & \\
\hline
 & 1 & 3i & 0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow f(z)=z^4+z^3+7z^2+(7-6i)\,z-6i=(z-2i)\,(z-i)\,(z+3i)\,(z+1)$
$\Rightarrow$ Andere nulpunten: $\{2i,-3i,-1\}$

3. Welke waarde moet a hebben opdat het stel $\overrightarrow{u}\left(a^2-5,-5,3\right)$, $\overrightarrow{v}\,(-1,1,-1)$ en $\overrightarrow{w}\,(8,1,a)$ lineair afhankelijk zou zijn in $\mathbb{R}^3$
$\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)=\begin{vmatrix} a^2-5 & -5 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 8 & 1 & a\end{vmatrix}=a^3+a^2-10a+8=(a-1)\,(a-2)\,(a+4)=0\Rightarrow a\in\{1,2,-4\}$

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\left\{\begin{array}{l} w-2x+y=-8\\ x-2y+z=-2\\ y-2z+w=0\\ z-2w+x=10\end{array}\right.$$

$$\operatorname{rg}A^+=\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 1 & 10\end{array}\right)\begin{array}{c} R_3-R_1\\ R_4+2R_1\\ =\end{array}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 8\\ 0 & -3 & 2 & 1 & -6\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1+2R_2\\ R_3-2R_2\\ R_4+3R_2\\ =\end{array}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -12\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & -4 & 12\\ 0 & 0 & -4 & 4 & -12\end{array}\right)\begin{array}{c} R_4=-R_3\\ R_3/4\\ =\end{array}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & -12\\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1+3R_3\\ R_2+2R_3\\ =\end{array}\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3\end{array}\right)=3$$

Stel $z=\lambda \Rightarrow \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow (w,x,y,z) = (-3+\lambda, 4+\lambda, 3+\lambda, \lambda) = (-3,4,3,0)+\lambda(1,1,1,1)$

5. Bespreek de onderlinge ligging van de volgende drie vlakken in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \alpha : 2x-20y-17z+1=0 \\ \beta : -5x+11y+10z+4=0 \\ \gamma : -10x-8y-5z+13=0 \end{cases}$$

$\alpha \cap \beta : \begin{pmatrix} 2 & -20 & -17 \\ -5 & 11 & 10 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (-13,65,-78) \sim (1,-5,6)$

Stel $x=1 \Rightarrow \begin{cases} 2-20y-17z+1=0 \\ -5+11y+10z+4=0 \end{cases} \Rightarrow (y,z)=(1,-1)$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta = L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$L \cap \gamma : -10(1+k) - 8(1-5k) - 5(-1+6k) + 13 = 0 \Rightarrow 0k=0 \Rightarrow L \subseteq \gamma$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

6. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van $T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(T-\lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 & 4 \\ 8 & 4-\lambda & -4 \\ -4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda(\lambda-2)^2 = 0$

- $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \begin{cases} -4x-y+4z=0 \\ 8x+4y-4z=0 \\ -4x-y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow (-4,-1,4)\times(8,4,-4) = (-12,16,-8) \sim (3,-4,2)$

  $\Rightarrow E_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\begin{cases} -6x-y+4z=0 \\ 8x+2y-4z=0 \\ -4x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow (-4,8,-4) \sim (1,-2,1)$

  $\Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Bereken de volgende limieten zonder de regel van de l'Hôpital

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-2)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = -\dfrac{1}{4}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2}}{x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+x}{x} = 3$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{2x^3-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x^3-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{2x+1}\right)^{-\frac{2x+1}{2}\frac{2x^3-1}{x^2}} = e^{-2}$

8. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$1+\frac{2}{\log_{x+1} 3} = \log_3\left(x^3+11\right)$$

$\Leftrightarrow 1+2\log_3(x+1)-\log_3\left(x^3+11\right)=0$
$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{3(x+1)^2}{x^3+11}=0$
$\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{3+3x^2+6x}{x^3+11}=0$
$\Leftrightarrow 3^0 = \dfrac{3+3x^2+6x}{x^3+11}$
$\Leftrightarrow x^3+11=3+3x^2+6x$
$\Leftrightarrow x^3+8=3x^2+6x$
$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-4)=0$
$\Leftrightarrow x\in\{1,-2,4\}$
-2 is echter ingevoerd want je kan van $-2+1$ en $(-2)^3+11$ geen logaritme nemen $\Rightarrow x\in\{1,4\}$

9. Bereken de afgeleide van $f(x)=\dfrac{\text{Bgsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Bgsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\right) &= \frac{\sqrt{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-(\text{Bgsin}\, x)\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}+x(\text{Bgsin}\, x)}{\sqrt{1-x^2}\,(x^2-1)}\\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}+x(\text{Bgsin}\, x)}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)} = \frac{\sqrt{1-x^2}+x(\text{Bgsin}\, x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\end{aligned}$$

10. Geef een volledig functieonderzoek tot en met een tekening van de functie $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+4}$

- Domein $=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (dubbele pool)
- Asymptoten
  - Verticale asymptoot: $x=2$ want $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+4}=\infty$

    Bovendien is $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\dfrac{8}{0^+}=+\infty$
  - Horizontale asymptoot: $\dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+4}=1+\dfrac{6x-4}{x^2-4x+4}\Rightarrow y=1$

    Bovendien is

x		$\frac{2}{3}$		2	
$f-A=\dfrac{6x-4}{x^2-4x+4}$	$-$	0	$+$	$\vert^{(2)}$	$+$

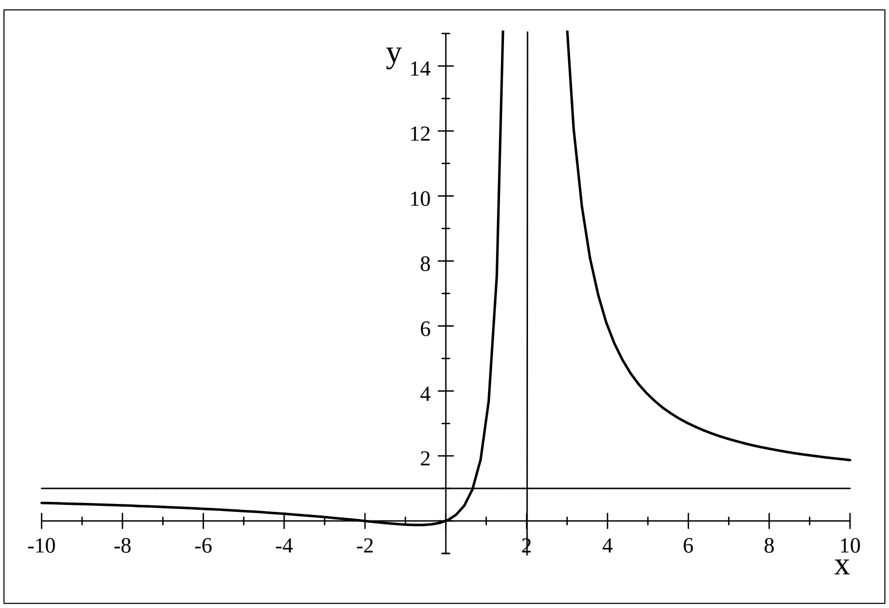
Als $x \to +\infty$ dan ligt f boven A
Als $x \to -\infty$ dan ligt f onder A

– Er is dus geen SA

- Nulpunten: $T = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 0\}$
  Polen: $N = 0 \Leftrightarrow x = 2^{(2)}$
- $f'(x) = \dfrac{-6x-4}{(x-2)^3}$
  Nulpunten: $T = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$
  Polen: $N = 0 \Leftrightarrow x = 2^{(3)}$
- $f''(x) = \dfrac{12(x+2)}{(x-2)^4}$
  Nulpunten: $T = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\}$
  Polen: $N = 0 \Leftrightarrow x = 2^{(4)}$
- Tekenverloop:

x		-2		$-\frac{2}{3}$		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert^{(2)}$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\vert^{(3)}$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\vert^{(4)}$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m(-1/8)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\vert$	$\searrow$
	$\frown$	$B(0)$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$		$\smile$

- Grafiek:



11. Bereken $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x\,(1 + \ln(\ln x))}dx$

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{\ln t}{t\,(1 + \ln t)}dt$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$$

$= \int \frac{u}{1+u} du = u - \ln|1+u| + c = \ln t - \ln|1+\ln t| + c = \ln(\ln x) - \ln|1+\ln(\ln x)| + c$

12. Bereken $\int \frac{x^4+4x^3-14x+13}{x^4-2x^3+2x-1} dx$

$\frac{x^4+4x^3-14x+13}{x^4-2x^3+2x-1} = 1 + \frac{6x^3-16x+14}{x^4-2x^3+2x-1} = 1 + \frac{6x^3-16x+14}{(x+1)(x-1)^3} = 1 + \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to 1} \frac{6x^3-16x+14}{x+1} = 2 \\
\frac{6x^3-16x+14}{(x+1)(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^3} &= \frac{6x^3-16x+14-2x-2}{(x+1)(x-1)^3} = \frac{(6x+12)}{(x-1)(x+1)} \\
B &= \lim_{x\to 1} \frac{(6x+12)(x-1)}{x+1} = 0 \\
C &= \lim_{x\to 1} \frac{6x+12}{x+1} = 9 \\
D &= \lim_{x\to -1} \frac{6x^3-16x+14}{(x-1)^3} = -3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow I = \int \left(1 + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{9}{x-1} - \frac{3}{x+1}\right) dx = x - 3\ln|x+1| - \frac{1}{(x-1)^2} + 9\ln|x-1| + c$