Examen Fysica I, 20 juni 2011

Achternaam:

Voornaam:

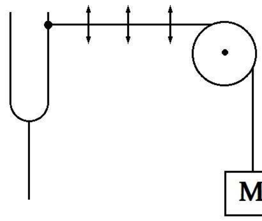
Studierichting:

Het definitieve antwoord, inclusief berekening, moet op het opgaveblad worden geschreven. Wil je het antwoord of een deel daarvan elders noteren, verwijs er dan duidelijk en ondubbelzinnig naar op het opgaveblad! Een leeg opgaveblad staat gelijk aan geen antwoord. Denk er aan dat niet alleen het uiteindelijke antwoord punten waard is: je redenering en berekening kunnen dus ook punten opleveren, ook wanneer de uiteindelijk bekomen waarde of uitdrukking fout is. Als je een tussenresultaat niet vindt, antwoord ook dan op de rest van de vraag en laat het onbekende tussenresultaat staan in je uiteindelijke uitkomst. Denk er aan dat sommige grootheden vectoren zijn! Als je een goniometrische formule nodig hebt en je ze niet meer zeker weet, kan je deze onder andere vinden in de appendix van je handboek als je geen eigen formularium hebt.

Toegelaten materiaal: Handboek, nota's, oefeningen waarvan de oplossing op BlackBoard is verschenen, rekenmachine (al dan niet grafisch), een zelfgemaakt formularium, iets om te schrijven.

Veel succes!

1. Een snaar wegen met een stemvork



Je hebt een dunne snaar met lengte $2m$ waarvan je de massa m wil bepalen. Je hebt echter geen weegschaal maar wel een stemvork, een katrol, een meetlat van $30cm$ en een nauwkeurig gekende massa $M = 2kg \gg m$. Je bouwt de opstelling zoals in de tekening: de massa M wordt opgehangen aan de snaar, die over een katrol naar de stemvork loopt. Door de stemvork aan te slaan, creëer je lopende golven met een frequentie van $440Hz$ in het touw. Deze lopende golven worden gereflecteerd tegen de katrol. Dit betekent dat er lopende golven met dezelfde golflengte, frequentie en amplitude als de invallende golven worden opgewekt maar die in de andere richting lopen en waarvan de fase zodanig is dat de uitwijking nul is aan de katrol. Wanneer het horizontale stuk snaar een lengte van $23cm$ heeft, vind je dat de snaar trilt in de derde harmoniek.

- Wat is de massa van het touw?
- Schrijf een uitdrukking neer voor zowel de invallende als de gereflecteerde lopende golf in het touw en verifieer dat het resultaat een staande golf is (in de derde harmoniek). De amplitude van de golven mag je gelijk kiezen aan $0,5mm$.

Houd er rekening mee dat het uiteinde van het touw aan de stemvork oscilleert met een maximale uitwijking en dat de amplitude van de oscillatie aan de katrol nul is. De massa van het verticale stuk touw mag je verwaarlozen omdat dit veel kleiner zal zijn dan M. Je mag veronderstellen dat de massadichtheid van het touw overal dezelfde is. Als je ergens een assenstelsel nodig hebt, mag je dat zelf invoeren.

Oplossing

- De snaar heeft één uiteinde met een maximale amplitude en één uiteinde is vast. Voor de derde harmoniek geldt daarom

  $$L_h = \frac{3}{4}\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{4}{3}L_h$$

  met $L_h = 0,24m$ de lengte van het horizontale stuk van de snaar. Je kent ook de frequentie en dus is de golfsnelheid

  $$v = \lambda f = \frac{4}{3}L_h f.$$

  De spankracht in het touw is het gewicht van de massa M, dus $F = Mg$. De massadichtheid van het horizontale stuk snaar (en dus van de hele snaar) is daarom

  $$\frac{m}{L} = \mu = \frac{F}{v^2} = \frac{Mg}{v^2} = \frac{9}{16}\frac{Mg}{(L_h f)^2}$$

  zodat

  $$m = \mu L = \frac{9}{16}\frac{MgL}{(L_h f)^2} = 0,0022kg.$$

- Er is geen assenstelsel gespecifieerd dus dat mag je zelf kiezen. Het makkelijkst is waarschijnlijk een x-as te kiezen die langs het horizontale stuk van de snaar gespannen is en die nul is op de plaats waar de snaar aan de stemvork is bevestigd. De lopende golven hebben dezelfde frequentie $f = 440Hz$ en golflengte $\lambda = 0,307m$ als de staande golf waarin ze zullen resulteren. Dit betekent

$$y_\pm(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \delta_\pm) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} \pm 2\pi f t + \delta_\pm\right)$$

waarbij de $-$ moet worden gekozen voor de invallende golf aangezien deze naar rechts beweegt en $+$ voor de gereflecteerde golf. Als $x = L_h = \frac{3}{4}\lambda$, worden deze golven

$$y_\pm(x,t) = A\cos(\tfrac{3\pi}{2} \pm 2\pi f t + \delta_\pm)$$

Op deze positie moeten de totale fases $kx \pm \omega t + \delta_\pm$ in totaal π verschillen en dus geldt (bijvoorbeeld) $\delta_+ = \pi/2$ en $\delta_- = -\pi/2$. De lopende golven worden daarom gegeven door

$$y_\pm(x,t) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} \pm 2\pi f t \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

De totale resulterende golf wordt dan

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_+(x,t) + y_-(x,t) \\ &= A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + 2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) + A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\sin\left(2\pi f t\right). \end{aligned}$$

Varianten hierop met een andere keuze voor δ_+ en δ_- zijn natuurlijk ook juist gegeven dat de berekeningen juist zijn uitgevoerd.

2. Voorwerp aan een veer

Een voorwerp met onbekende massa m hangt aan een verticale veer met veerconstante $1600\frac{N}{m}$. Wanneer het voorwerp 2,5cm naar beneden wordt getrokken vanuit evenwicht en vanuit rust in deze positie wordt losgelaten, oscilleert het geheel met een frequentie van $4Hz$.

- Wat is de massa van het voowerp?
- Hoe ver zal de veer (in evenwicht) uitrekken wanneer deze massa aan de veer wordt bevestigd?
- Wat is de amplitude van de oscillatie als het voorwerp tijdens het oscilleren met een snelheid van $1,2\frac{m}{s}$ door zijn evenwichtspositie beweegt?

Oplossing

- De massa van het voorwerp is gegeven door

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{1600\frac{N}{m}}{4\pi^2(4Hz)^2} = 2,53kg.$$

- In de onbelaste toestand heeft de veer een evenwichtslengte ℓ_0. Met de massa bevestigd aan de veer is het systeem in evenwicht wanneer

$$k(\ell - \ell_0) = mg \;\Rightarrow\; (\ell - \ell_0) = \frac{mg}{k} = 0,0155m.$$

- De positie van de oscillerende massa wordt gegeven door

$$x(t) = A\sin(\omega t).$$

  Je mag hier een faseconstante meenemen maar door een goede keuze van welk ogenblik $t = 0$ is, kan je deze nul stellen. Het nulpunt van de x-as werd zodanig gekozen dat de evenwichtspositie zich op $x = 0$ bevindt. De snelheid is dan

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t).$$

  Wanneer het deeltje door de evenwichtspositie beweegt, is de snelheid maximaal. Deze snelheid is gegeven. Dus

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{1,2\frac{m}{s}}{2\pi 4Hz} = 0,048m.$$

3. Valse noten

Je staat op straat te wachten om over te steken en er rijdt een auto voorbij waaruit luide muziek klinkt. Je herkent de muziek maar in plaats van een la hoor je een sol kruis wanneer de auto terug van je weg rijdt. (Deze noten hebben frequenties respectievelijk $440Hz$ en $415Hz$.) Als je weet dat er een wind staat van $20\frac{km}{h}$ en dat de auto tegen deze wind in rijdt, hoe snel rijdt de auto dan (ten opzichte van de grond)? De snelheid van het geluid in lucht is $343\frac{m}{s}$.

Oplossing Laat ons alle snelheden uitdrukken ten opzichte van de grond. Dan is $u_r = 0$ want je staat stil te wachten om over te steken. De snelheid van het geluid ten opzichte van de grond is

$$v = 343\frac{m}{s} + \frac{1\frac{m}{s}}{3,6\frac{km}{h}}20\frac{km}{h} = 348,6\frac{m}{s}.$$

De snelheid van de bron u_r is de snelheid van de auto. Deze is gevraagd ten opzichte van de grond dus we hoeven deze niet meer om te rekenen. Aangezien de bron wegbeweegt van de waarnemer, wordt de formule van het dopplereffect in dit geval

$$f_r = \frac{v}{v+u_s}f_s \quad \Rightarrow \quad u_s = v\left(\frac{f_s}{f_r} - 1\right) = 348,6\frac{m}{s}\left(\frac{440Hz}{415Hz} - 1\right) = 21\frac{m}{s}.$$

Dit komt overeen met ongeveer $76\frac{km}{h}$, wat een realistische snelheid is voor een auto.

4. Fysica van de open haard

Ergens in het koude noorden staat een blokhut waarin twee mensen zitten. De ene persoon wil hout op het vuur gooien maar wordt tegengehouden door de andere. Deze laatste beweert immers dat het zinloos is het hout te verbranden: hij zegt dat je de totale energie van de luchtdeeltjes in de blokhut niet kan verhogen. De eerste persoon gaat niet akkoord en zegt dat het wel helpt om te stoken aangezien je de temperatuur wel kan verhogen.

- Toon aan dat op elk ogenblik de totale energie van de luchtdeeltjes die zich op dat ogenblik in de blokhut bevinden constant is. Veronderstel hiervoor dat de lucht een ideaal gas is dat bestaat uit één soort moleculen.
- Gegeven dat de blokhut afmetingen van $4m \times 5m \times 3m$ heeft en dat de temperatuur door het stoken stijgt van $10°C$ naar $15°C$, beide bij een luchtdruk van 1013 hPa, bereken dan hoeveel luchtdeeltjes de blokhut zullen verlaten bij het verwarmen. Je mag hier dezelfde veronderstellingen maken als bij het vorige puntje.

De ideale gasconstante R is $8,31\frac{J}{mol\cdot K}$ en de constante van Boltzmann k_B is $1,38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$.

Oplossing

- De ideale gaswet zegt
$$pV = Nk_BT.$$
Aangezien p en V in dit geval constant zijn, is hun product dat ook en dus is ook Nk_BT constant. Aangezien de energie van een molecule van een ideaal gas gegeven is door $\frac{1}{2}k_BT$ per vrijheidsgraad, is de totale energie van de luchtdeeltjes in de blokhut
$$E_{\text{tot}} = \frac{3N}{2}k_BT = \frac{3}{2}pV = \text{cte}.$$
(In de oefeningen in de les werd gezien dat $E = \frac{3}{2}pV$ dus dat zou bekend moeten zijn).
- Bij een temperatuur van $10°C = 283,15K$ bevinden zich
$$N_1 = \frac{pV}{k_BT_1} = \frac{101300Pa \cdot 60m^3}{1,38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 283,15K} = 1,56 \cdot 10^{27}.$$
deeltjes in de blokhut. Bij een temperatuur van $288,15K$ is dit
$$N_2 = \frac{pV}{k_BT_1} = \frac{101300Pa \cdot 60m^3}{1,38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 288,15K} = 1,53 \cdot 10^{27}.$$
Het gevraagde aantal deeltjes is het verschil hiertussen: $\Delta N = 3 \cdot 10^{25}$.