Examenvragen hoofdstuk 6 van de laatste drie jaren

Werner Peeters

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$(-x-y+6)+(5x-3y+2)\,y'=0$$
2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$x^4y''+4x^3y'+2x^2y=-x$$
3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$(y-x)-(y-x)^2+(y')^2+y'=0$$
Hint: probeer de termen twee aan twee samen te nemen!
4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$$
5. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$(-x-y+6)+(5x-3y+2)\,y'=0$$
6. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$x^4y''+4x^3y'+2x^2y=-x$$
7. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:
$$2xy+\frac{1}{y}-2\frac{x}{y^2}+\left(\frac{x}{y^2}+3x^2\right)y'=0$$
8. Los de volgende differentiaalvergelijking van de tweede orde op:
$$y''+y=x\cos x$$
9. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:
$$2xy+\left(2x^2+2\right)y'=0$$
met randvoorwaarde $y\,(1)=2$.
10. Los de volgende differentiaalvergelijking van de tweede orde op:
$$y''-2y'+y=e^x\ln x$$

11. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}$$

met randvoorwaarde $y(1) = 0$.

12. Los de volgende differentiaalvergelijking van tweede orde op door ordereductie.

$$\left(1 + x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

13. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$(2x - y - 1)\, dx + (-3x + 2y - 1)\, dy = 0$$

14. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de variatie van de parameters:

$$3y'' - 2y' - y = 10 \sin x - 10 \cos x$$

Als hint krijg je de volgende twee formules cadeau:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c \end{aligned}$$

15. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$y' - \frac{12y}{x} = -18xy^{2/3}$$

16. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van ordereductie:

$$\left(x^4 + x^2\right) y'' + \left(-4x^3 - 2x\right) y' + \left(4x^2 + 2\right) y = x^8 + 2x^6 + x^4$$

Hint: één van de oplossingen van de geassocieerde homogene vergelijking is duidelijk $y = x$

17. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$\left(3y^3x^2 + 2y^2x\right) + \left(y^2x^3 + 3y^4\right) y' = 0$$

18. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de onbepaalde coëfficiënten:

$$y'' - y = e^x + xe^{-x}$$

Oplossingen:

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$(-x-y+6)+(5x-3y+2)\,y'=0$$

Dit is een vergelijking met lineaire coëfficiënten.

$\begin{cases} -x-y+6=0 \\ 5x-3y-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

Stel $\begin{cases} u=x-2 \\ v=y-4 \end{cases}$

$\Rightarrow (-u-v)+(5u-3v)\,v'=0$

Stel $v=wu \Rightarrow v'=w+w'u$

$\Rightarrow (-u-wu)+(5u-3wu)\,(w+w'u)=0$

$\Rightarrow (-1-w)+\left(5w-3w^2\right)+(5-3w)\,w'u=0$

$\Rightarrow (5-3w)\,\dfrac{dw}{du}u=3w^2-4w+1$

$\Rightarrow \dfrac{(5-3w)}{3w^2-4w+1}dw=\dfrac{du}{u}$

Singuliere oplossingen: $3w^2-4w+1=(3w-1)\,(w-1)=0 \Rightarrow w=\dfrac{1}{3}$ en $w=1$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{(5-3w)}{3w^2-4w+1}dw=\int\frac{du}{u}$

$\Rightarrow \ln|w-1|-2\ln|3w-1|=\ln|u|+c$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}\right|=c$

$\Rightarrow \left|\dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}\right|=k>0$

$\Rightarrow \dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}=k\neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}=c$

$\Rightarrow (w-1)=cu\,(3w-1)^2$

$\Rightarrow \left(\dfrac{v}{u}-1\right)=cu\left(3\dfrac{v}{u}-1\right)^2$

$\Rightarrow (v-u)=c\,(3v-u)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} y-x-2=c\,(3y-x-10)^2 \\ 3y-x-10=0 \end{cases}$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x^4y''+4x^3y'+2x^2y=-x$$

- Eerste methode: ordereductie:
  Deze vergelijking heeft als *homogene* oplossing reeds een functie van de gedaante $y_1=\dfrac{1}{x}$

  $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

  $y''=\dfrac{2}{x^3}$

  $\Rightarrow x^4\left(\dfrac{2}{x^3}\right)+4x^3\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+2x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

  $y_1=\dfrac{1}{x}$ is dus een oplossing van de HOMOGENE vergelijking $x^4y''+4x^3y'+2x^2y=0$

Stel $y=\dfrac{u}{x}$
$\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}$
$\Rightarrow y''=\dfrac{u''}{x}-2\dfrac{u'}{x^2}+2\dfrac{u}{x^3}$
Dan is $x^4\left(\dfrac{u''}{x}-2\dfrac{u'}{x^2}+2\dfrac{u}{x^3}\right)+4x^3\left(\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}\right)+2x^2\left(\dfrac{u}{x}\right)=-x$
$\Rightarrow u''x^3+2u'x^2=-x$
Stel $v=u'$
$\Rightarrow x^3v'+2x^2v=-x$
$\Rightarrow v'+\dfrac{2}{x}v=-\dfrac{1}{x^2}$
Deze heeft als integrerende factor $\mu(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$
$\Rightarrow x^2v'+2xv=-1$
$\Rightarrow \left(x^2v\right)'=-1$
$\Rightarrow x^2v=-x+c_1$
$\Rightarrow x^2u'=-x+c_1$
$u'=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{c_1}{x^2}$
$u=-\ln|x|-\dfrac{c_1}{x}+c_2$
$y=\dfrac{u}{x}=-\dfrac{\ln|x|}{x}-\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x}$

- Tweede methode: Euler
  $x^4y''+4x^3y'+2x^2y=-x$
  $\Rightarrow x^2y''+4xy'+2y=-\dfrac{1}{x}$
  Stel $x=e^z$
  $\Rightarrow \left(\ddot{y}-\dot{y}\right)+4\dot{y}+2y=0$
  $\Rightarrow \ddot{y}+3\dot{y}+2y=0$
  $\Phi(t)=t^2+3t+2=(t+2)(t+1)$
  $\Rightarrow y_h(z)=c_1e^{-2z}+c_2e^{-z}$
  $\Rightarrow y_h(x)=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x}$
  $W(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1}{x}\\ -\dfrac{2}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{x^4}$
  $\Rightarrow z_1'=x^4\begin{vmatrix}0 & \dfrac{1}{x}\\ -\dfrac{1}{x^3} & -\dfrac{1}{x^2}\end{vmatrix}=1\Rightarrow z_1=\int 1dx=x$
  $\Rightarrow z_2'=x^4\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x^2} & 0\\ -\dfrac{2}{x^3} & -\dfrac{1}{x^3}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{x}\Rightarrow z_2=\int -\dfrac{1}{x}dx=-\ln|x|$
  $\Rightarrow y_p=\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{\ln|x|}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\ln|x|$
  $\Rightarrow y(x)=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x}-\dfrac{1}{x}\ln|x|$

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$(y-x)-(y-x)^2+(y')^2+y'=0$$

Hint: probeer de termen twee aan twee samen te nemen!
$\Rightarrow (y-x)-(y-x)^2+p^2+p=0$
$\Rightarrow p^2-(y-x)^2+p+(y-x)=0$
$\Rightarrow (p-(y-x))(p+(y-x))+(p+(y-x))=0$
$\Rightarrow (p+(y-x))(p-(y-x)+1)=0$
$\Rightarrow (p+y-x)(p-y+x+1)=0$

- $y'+y=x$
  Integrerende factor $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$
  $\Rightarrow (e^x y)'=xe^x$
  $\Rightarrow e^x y=e^x(x-1)+c$
  $\Rightarrow y=x-1+ce^{-x}$
- $y'-y=-x-1$
  Integrerende factor $\mu(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$
  $\Rightarrow (e^{-x}y)'=(-x-1)e^{-x}$
  $\Rightarrow e^{-x}y=e^{-x}(x+2)+c$
  $\Rightarrow y=x+2+ce^x$

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$$

- Homogene vergelijking: $y''-6y'+9y=0$
  Karakteristieke vergelijking: $\Phi(t)=t^2-6t+9=(t-3)^2=0 \Rightarrow t\in\left\{3^{(2)}\right\}$
  $\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$
- Methode van de onbepaalde coëfficiënten
  $\operatorname{gr} Q=2$
  $\operatorname{mult}_\Phi(3)=2$
  $\Rightarrow 2+2=4$
  Stel $y_p(x)=\left(b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4\right)e^{3x}$
  $\Rightarrow y_p'(x)=\left(3b_4x^4+(3b_3+4b_4)x^3+(3b_2+3b_3)x^2+2b_2x\right)e^{3x}$
  $\Rightarrow y_p''(x)=\left(9b_4x^4+(9b_3+24b_4)x^3+(9b_2+18b_3+12b_4)x^2+(12b_2+6b_3)x+2b_2\right)e^{3x}$
  $\Rightarrow y_h''-6y_h'+9y_h=e^{3x}\left(12b_4x^2+6b_3x+2b_2\right)e^{3x}\equiv x^2$
  $$\Rightarrow \begin{cases}12b_4=1\\6b_3=0\\2b_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_4=\dfrac{1}{12}\\b_3=0\\b_2=0\end{cases}$$
  $\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+\dfrac{1}{12}x^4e^{3x}$
- Methode van de variatie van de parameters:
  $W(x)=\begin{vmatrix}e^{3x} & xe^{3x}\\3e^{3x} & (3x+1)e^{3x}\end{vmatrix}=e^{6x}\neq 0$
  $\Rightarrow z_1'=\dfrac{1}{e^{6x}}\begin{vmatrix}0 & xe^{3x}\\x^2e^{3x} & (3x+1)e^{3x}\end{vmatrix}=-x^3\Rightarrow z_1=\displaystyle\int -x^3dx=-\frac{x^4}{4}$
  $\Rightarrow z_2'=\dfrac{1}{e^{6x}}\begin{vmatrix}e^{3x} & 0\\3e^{3x} & x^2e^{3x}\end{vmatrix}=x^2\Rightarrow z_2=\displaystyle\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$
  $\Rightarrow y_p=-\dfrac{x^4}{4}e^{3x}+\dfrac{x^3}{3}xe^{3x}=\dfrac{1}{12}x^4e^{3x}$
  $\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+\dfrac{1}{12}x^4e^{3x}$

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$(-x-y+6)+(5x-3y+2)\,y'=0$$

Dit is een vergelijking met lineaire coëfficiënten.
$\begin{cases} -x-y+6=0 \\ 5x-3y-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$
Stel $\begin{cases} u=x-2 \\ v=y-4 \end{cases}$
$\Rightarrow (-u-v)+(5u-3v)\,v'=0$
Stel $v=wu \Rightarrow v'=w+w'u$
$\Rightarrow (-u-wu)+(5u-3wu)\,(w+w'u)=0$
$\Rightarrow (-1-w)+\left(5w-3w^2\right)+(5-3w)\,w'u=0$
$\Rightarrow (5-3w)\,\dfrac{dw}{du}u=3w^2-4w+1$
$\Rightarrow \dfrac{(5-3w)}{3w^2-4w+1}dw=\dfrac{du}{u}$
Singuliere oplossingen: $3w^2-4w+1=(3w-1)\,(w-1)=0 \Rightarrow w=\dfrac{1}{3}$ en $w=1$
$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{(5-3w)}{3w^2-4w+1}dw=\int \frac{du}{u}$
$\Rightarrow \ln|w-1|-2\ln|3w-1|=\ln|u|+c$
$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}\right|=c$
$\Rightarrow \left|\dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}\right|=k>0$
$\Rightarrow \dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}=k\neq 0$
$\Rightarrow \dfrac{(w-1)}{u\,(3w-1)^2}=c$
$\Rightarrow (w-1)=cu\,(3w-1)^2$
$\Rightarrow \left(\dfrac{v}{u}-1\right)=cu\left(3\dfrac{v}{u}-1\right)^2$
$\Rightarrow (v-u)=c\,(3v-u)^2$
$\Rightarrow \begin{cases} y-x-2=c\,(3y-x-10)^2 \\ 3y-x-10=0 \end{cases}$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x^4y''+4x^3y'+2x^2y=-x$$

- Eerste methode: ordereductie:
  Deze vergelijking heeft als *homogene* oplossing reeds een functie van de gedaante $y_1=\dfrac{1}{x}$
  $y'=-\dfrac{1}{x^2}$
  $y''=\dfrac{2}{x^3}$
  $\Rightarrow x^4\left(\dfrac{2}{x^3}\right)+4x^3\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+2x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$
  $y_1=\dfrac{1}{x}$ is dus een oplossing van de HOMOGENE vergelijking $x^4y''+4x^3y'+2x^2y=0$
  Stel $y=\dfrac{u}{x}$

$\Rightarrow y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$
$\Rightarrow y'' = \frac{u''}{x} - 2\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3}$
Dan is $x^4\left(\frac{u''}{x} - 2\frac{u'}{x^2} + 2\frac{u}{x^3}\right) + 4x^3\left(\frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}\right) + 2x^2\left(\frac{u}{x}\right) = -x$
$\Rightarrow u''x^3 + 2u'x^2 = -x$
Stel $v = u'$
$\Rightarrow x^3v' + 2x^2v = -x$
$\Rightarrow v' + \frac{2}{x}v = -\frac{1}{x^2}$
Deze heeft als integrerende factor $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$
$\Rightarrow x^2v' + 2xv = -1$
$\Rightarrow \left(x^2v\right)' = -1$
$\Rightarrow x^2v = -x + c_1$
$\Rightarrow x^2u' = -x + c_1$
$u' = -\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$
$u = -\ln|x| - \frac{c_1}{x} + c_2$
$y = \frac{u}{x} = -\frac{\ln|x|}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x}$

- Tweede methode: Euler
  $x^4y'' + 4x^3y' + 2x^2y = -x$
  $\Rightarrow x^2y'' + 4xy' + 2y = -\frac{1}{x}$
  Stel $x = e^z$
  $\Rightarrow \left(\ddot{y} - \dot{y}\right) + 4\dot{y} + 2y = 0$
  $\Rightarrow \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$
  $\Phi(t) = t^2 + 3t + 2 = (t+2)(t+1)$
  $\Rightarrow y_h(z) = c_1e^{-2z} + c_2e^{-z}$
  $\Rightarrow y_h(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x}$
  $W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4}$
  $\Rightarrow z_1' = x^4 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow z_1 = \int 1dx = x$
  $\Rightarrow z_2' = x^4 \begin{vmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ -\frac{2}{x^3} & -\frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} \Rightarrow z_2 = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x|$
  $\Rightarrow y_p = \frac{x}{x^2} - \frac{\ln|x|}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln|x|$
  $\Rightarrow y(x) = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x} - \frac{1}{x}\ln|x|$

7. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:

$$2xy + \frac{1}{y} - 2\frac{x}{y^2} + \left(\frac{x}{y^2} + 3x^2\right)y' = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+\frac{1}{y}-2\frac{x}{y^2}\right)=2x+4\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}+3x^2\right)=6x+\frac{1}{y^2}$$
$$\Rightarrow R=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4x-4\frac{x}{y^3}+\frac{2}{y^2}\text{ dus de vergelijking is niet exact}$$
$$\Rightarrow\frac{R}{P}=\frac{4x-4\frac{x}{y^3}+\frac{2}{y^2}}{2xy+\frac{1}{y}-2\frac{x}{y^2}}=\frac{4xy^3-4x+2y}{2xy^4+y^2-2xy}=\frac{2\left(2xy^3+y-2x\right)}{y\left(2xy^3+y-2x\right)}==\frac{2}{y}=\xi\left(y\right)$$
$$\Rightarrow\mu\left(y\right)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=y^2$$
$$\Rightarrow 2xy^3+y-2x+\left(x+3x^2y^2\right)y'=0\text{ is wél exact}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\varphi\left(x,y\right)=\int\left(2xy^3+y-2x\right)dx=x^2y^3-x^2+xy+c_y\\\varphi\left(x,y\right)=\int\left(x+3x^2y^2\right)dy=x^2y^3+xy+c_x\end{cases}$$
$$\Rightarrow\varphi\left(x,y\right)=\int\left(2xy^3+y-2x\right)dx=x^2y^3-x^2+xy+c$$

8. Los de volgende differentiaalvergelijking van de tweede orde op:

$$y''+y=x\cos x$$

- Karakteristieke vergelijking: $t^2+1=0\Rightarrow t\in\{i,-i\}\Rightarrow y_h\left(x\right)=C_1\cos x+C_2\sin x$
- $W\left(x\right)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\-\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$
- $z_1'\left(x\right)=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\x\cos x & \cos x\end{vmatrix}=-x\cos x\sin x$
- $\Rightarrow z_1\left(x\right)=\int -x\cos x\sin xdx=\frac{-1}{2}\int x\sin 2xdx$

$$\begin{cases}u=x\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\overset{\Rightarrow}{=}\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx\right)$$
$$=\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{4}\int\cos 2xdx=\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$$

- $z_2'\left(x\right)=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\-\sin x & x\cos x\end{vmatrix}=x\cos^2 x$
- $\Rightarrow z_2\left(x\right)=\int x\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int x\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx$

$$\begin{cases}u=x\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\overset{\Rightarrow}{=}\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx\right)$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\int\sin 2xdx$$
$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$$

- $\Rightarrow y_p = \left(\frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x\right)\cos x + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)\sin x$
  $= \frac{1}{4}x\cos^3 x - \frac{1}{4}x\sin^2 x\cos x - \frac{1}{4}\sin x\cos^2 x + \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{2}x\sin^2 x\cos x + \frac{1}{8}\cos^2 x\sin x - \frac{1}{8}\sin^3 x$
  $= \frac{1}{4}x^2\sin x + x\left(\frac{1}{4}\cos^3 x + \frac{1}{4}\cos x\sin^2 x\right) - \frac{1}{8}\cos^2 x\sin x - \frac{1}{8}\sin^3 x$
  $= \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) - \frac{1}{8}\sin x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$
  $= \frac{1}{4}x^2\sin x - \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{4}x\cos x$
- $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x^2\sin x - \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{4}x\cos x\backslash$

9. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:

$$2xy + \left(2x^2 + 2\right)y' = 0$$

met randvoorwaarde $y(1) = 2$.
Voor de differentiaalvergelijking

$$2xy + \left(2x^2 + 2\right)y' = 0$$

geldt dat

$$P(x,y) = 2xy \text{ en } Q(x,y) = 2x^2 + 2$$

en dus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \text{ en } \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x$$

De differentiaalvergelijking is dus niet exact, maar

$$\frac{R}{P} = \frac{2x}{2xy} = \frac{1}{y}$$

wat een functie van y alleen is. Een integrerende factor is dus

$$\mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$

De differentiaalvergelijking

$$2xy^2 + \left(2x^2 + 2\right)yy' = 0$$

zou dus wel exact moeten zijn. En inderdaad,

$$P(x,y) = 2xy^2 \text{ en } Q(x,y) = \left(2x^2 + 2\right)y$$

en dus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy \text{ en } \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$$

Dan is

$$\begin{aligned}\varphi_P(x,y) &= \int P(x,y)\,dx = \int 2xy^2 dx = x^2y^2 + c_y \\ \varphi_Q(x,y) &= \int Q(x,y)\,dy = \int \left(2x^2+2\right)y dy = y^2\left(x^2+1\right) + c_x\end{aligned}$$

en er geldt dan dat

$$\varphi(x,y) := \varphi_P(x,y) = \varphi_Q(x,y) = y^2x^2 + y^2 = c$$

Voor het particuliere probleem: als $2^2 1^2 + 2^2 = c \Rightarrow c = 8$
$\Rightarrow y^2x^2 + y^2 = 8$

10. Los de volgende differentiaalvergelijking van de tweede orde op:

$$y'' - 2y' + y = e^x \ln x$$

- $t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t \in \left\{1^{(2)}\right\}$
  $\Rightarrow y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$
- $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$
  $z_1' = \dfrac{1}{e^{2x}} \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x \ln x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -x \ln x$
  $\Rightarrow z_1 = \displaystyle\int -x \ln x dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$
  $z_2' = \dfrac{1}{e^{2x}} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \ln x \end{vmatrix} = \ln x$
  $\Rightarrow z_2 = \displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$
- $\Rightarrow y_p = \left(\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x^2 \ln x\right) e^x + (x(\ln x - 1))\, xe^x = \dfrac{1}{4}x^2 e^x (2\ln x - 3)$
  $\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \dfrac{1}{4}x^2 e^x (2 \ln x - 3)$

11. Los de volgende differentiaalvergelijking van eerste orde op:

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{y}$$

met randvoorwaarde $y(1) = 0$.
Dit is een vergelijking van Bernoulli met $m = \dfrac{1}{2}$. Een integrerende factor is $\mu(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{2x} = \frac{1}{2}$$

met $y = 0$ een singuliere oplossing. Stel $u = \sqrt{y}$, dan is $u' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'$

$$\Rightarrow u' + \frac{u}{2x} = \frac{1}{2}$$

Hiervoor is een integrerende factor $\nu(x) = e^{\int \frac{dx}{2x}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\quad \sqrt{x}u' + \frac{u}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
\Rightarrow &\quad \left(\sqrt{x}u\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
\Rightarrow &\quad \sqrt{x}u = \int \frac{1}{2}\sqrt{x}dx = \frac{\sqrt{x^3}}{3} + c \\
\Rightarrow &\quad u = \frac{x}{3} + \frac{c}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{cases} y = u^2 = \left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{c}{\sqrt{x}}\right)^2 = \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{2}{3}c\sqrt{x} + \dfrac{c^2}{x} \\ y = 0 \text{ S.O.} \end{cases}$$

Wat de particuliere oplossing betreft, als we de randvoorwaarde invullen, dan krijgen we

$$0 = c^2 + \frac{2}{3}c + \frac{1}{9} \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

en dus

$$\begin{cases} y_P = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^2 = \dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{2}{9}\sqrt{x} + \dfrac{1}{9x} \\ y_P = 0 \end{cases}$$

12. Los de volgende differentiaalvergelijking van tweede orde op door ordereductie.

$$\left(1 + x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$y = x$ is een oplossing van het homogene probleem, want

$$\left(1 + x^2\right) \cdot 0 - 2x \cdot 1 + 2x = 0$$

Stellen we daarom $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$ en $y'' = u''x + 2u'$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \left(1 + x^2\right)\left(u''x + 2u'\right) - 2x\left(u'x + u\right) + 2ux = 0 \\ &\Rightarrow \quad u''\left(x^3 + x\right) + 2u' = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow u''\left(x^3 + x\right) + 2u' = 0$
Stel $v = u'$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad v'\left(x^3 + x\right) + 2v = 0 \\ &\Rightarrow \quad v' + \frac{2}{x^3 + x}v = 0 \end{aligned}$$

Een integrerende factor is $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x^3+x}dx} = e^{2\ln x - \ln\left(x^2+1\right)} = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+1}v' + 2\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{x^2+1}v\right)' = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+1}v = c_1 \\ &\Rightarrow \quad u' = v = c_1\frac{x^2+1}{x^2} \\ &\Rightarrow \quad u = c_1\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2 \\ &\Rightarrow \quad y = ux = \left(c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2\right)x = c_1\left(x^2 - 1\right) + c_2 x \end{aligned}$$

13. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$(2x - y - 1)\,dx + (-3x + 2y - 1)\,dy = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (3, 5)$$

$$Stel \begin{cases} u = x - 3 \\ v = y - 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (2u - v)\, du + (-3u + 2v)\, dv = 0$
$\Leftrightarrow (2u - v) + (-3u + 2v)\, v' = 0$

$$v = wu \Rightarrow v' = w'u + w$$

$\Leftrightarrow (2u - wu) + (-3u + 2wu)(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow (2 - w) + (-3 + 2w)(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow (2 - w) - 3(w'u + w) + 2w(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow 2 - w - 3w'u - 3w + 2ww'u + 2w^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2 - 4w + 2w^2 + (2w - 3)\, w'u = 0$
$\Leftrightarrow 2 - 4w + 2w^2 = -(2w - 3)\dfrac{dw}{du}u$
$\Leftrightarrow \dfrac{du}{u} = -\dfrac{(2w - 3)}{2(w - 1)^2}dw$
Hierbij is $w = 1 \Leftrightarrow v = u \Leftrightarrow y - 5 = x - 3 \Leftrightarrow y = x + 2$ een singuliere oplossing
$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \frac{(2w - 3)}{2(w - 1)^2}dw$
$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \left(\frac{1}{2(w - 1)^2} - \frac{1}{w - 1}\right) dw$
$\Leftrightarrow \ln|u| = -\dfrac{1}{2(w - 1)} - \ln|w - 1| + c$
$\Leftrightarrow \ln(w - 1) + \ln|u| = -\dfrac{1}{2(w - 1)} + c$
$\Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{v}{u} - 1\right| + \ln|u| = -\dfrac{1}{2\left(\frac{v}{u} - 1\right)} + c$
$\Leftrightarrow \ln|v - u| = -\dfrac{u}{2(v - u)} + c$
$\Leftrightarrow \ln|y - x - 2| = -\dfrac{x - 3}{2(y - x - 2)} + c$
$\Leftrightarrow |y - x - 2| = Ke^{-\frac{x-3}{2(y-x-2)}}$
$\Rightarrow y - x - 2 = ce^{-\frac{x-3}{2(y-x-2)}}$ (SO abondant)

14. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de variatie van de parameters:
$$3y'' - 2y' - y = 10\sin x - 10\cos x$$
Als hint krijg je de volgende twee formules cadeau:
$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + c \\ \int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + c\end{aligned}$$

- $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow (3t + 1)(t - 1) = 0 \Rightarrow t \in \left\{1, -\dfrac{1}{3}\right\}$
  $\Rightarrow y_h = c_1e^x + c_2e^{-x/3}$
- $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x/3} \\ e^x & -\frac{1}{3}e^{-x/3} \end{vmatrix} = -\dfrac{4}{3}e^{2x/3} \neq 0$
  $z_1' = \dfrac{1}{-\frac{4}{3}e^{2x/3}}\begin{vmatrix} 0 & e^{-x/3} \\ 10\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{3}\right) & -\frac{1}{3}e^{-x/3} \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{4e^{2x/3}}\left(\dfrac{10}{3}(\cos x)\, e^{-x/3} - \dfrac{10}{3}(\sin x)\, e^{-x/3}\right) =$

$-\dfrac{5}{2}e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Rightarrow z_1=\displaystyle\int-\frac{5}{2}e^{-x}\left(\cos x-\sin x\right)dx=-\frac{5}{2}\left(\sin x\right)e^{-x}$

$z_2'=\dfrac{1}{-\frac{4}{3}e^{2x/3}}\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 10\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{3}\right)\end{vmatrix}=\dfrac{3}{4e^{2x/3}}\left(\dfrac{10}{3}\left(\cos x\right)e^x-\dfrac{10}{3}e^x\sin x\right)=\dfrac{5}{2}e^{x/3}\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Rightarrow z_2=\displaystyle\int\frac{5}{2}e^{x/3}\left(\cos x-\sin x\right)dx=\frac{3}{2}e^{x/3}\left(2\cos x+\sin x\right)$

- $\Rightarrow y_p=\left(-\dfrac{5}{2}\left(\sin x\right)e^{-x}\right)e^x+\left(\dfrac{3}{2}e^{x/3}\left(2\cos x+\sin x\right)\right)e^{-x/3}=3\cos x-\sin x$

  $\Rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-x/3}+3\cos x-\sin x$

15. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$y'-\frac{12y}{x}=-18xy^{2/3}$$

$$\text{Stel }\mu\left(y\right)=\frac{1}{3y^{2/3}}$$

$\Rightarrow \dfrac{y'}{3y^{2/3}}-\dfrac{4y^{1/3}}{x}=-6x$

$$\text{Stel }u=y^{1/3}\Rightarrow u'=\frac{1}{3y^{2/3}}y'$$

$\Rightarrow u'-\dfrac{4u}{x}=-6x$

$$\text{Stel }\nu\left(x\right)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=\frac{1}{x^4}$$

$\Rightarrow \dfrac{u'}{x^4}-\dfrac{4u}{x^5}=-\dfrac{6}{x^3}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{u}{x^4}\right)'=-\dfrac{6}{x^3}$

$\Rightarrow \dfrac{u}{x^4}=-\displaystyle\int\frac{6}{x^3}dx=\frac{3}{x^2}+c$

$\Rightarrow u=3x^2+cx^4$

$\Rightarrow y=u^3=\left(3x^2+cx^4\right)^3=27x^6+27x^8c+9x^{10}c^2+c^3x^{12}$

16. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van ordereductie:

$$\left(x^4+x^2\right)y''+\left(-4x^3-2x\right)y'+\left(4x^2+2\right)y=x^8+2x^6+x^4$$

Hint: één van de oplossingen van de geassocieerde homogene vergelijking is duidelijk $y=x$

$$\text{Stel }y=ux\Rightarrow\begin{cases} y'=u'x+u \\ y''=u''x+2u'\end{cases}$$

$\Rightarrow \left(x^4+x^2\right)\left(u''x+2u'\right)+\left(-4x^3-2x\right)\left(u'x+u\right)+\left(4x^2+2\right)ux=x^8+2x^6+x^4$

$\Rightarrow \left(x^4+x^2\right)\left(u''x+2u'\right)+\left(-4x^3-2x\right)\left(u'x+u\right)+\left(4x^2+2\right)ux=x^8+2x^6+x^4$

$\Rightarrow \left(x^5+x^3\right)u''-2x^4u'=x^8+2x^6+x^4$

$\Rightarrow \left(x^2+1\right)u''-2xu'=x^5+2x^3+x$

$$\text{Stel }v=u'$$

$\left(x^2+1\right)v'-2xv=x^5+2x^3+x$
$\Rightarrow v'-\dfrac{2x}{x^2+1}v=\dfrac{x^5+2x^3+x}{x^2+1}$
$\Rightarrow v'-\dfrac{2x}{x^2+1}v=x^3+x$

$$\text{Stel } \mu(x)=e^{\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}=\frac{1}{x^2+1}$$

$\Rightarrow \dfrac{v'}{x^2+1}-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}v=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$
$\Rightarrow \left(\dfrac{v}{x^2+1}\right)'=x$
$\Rightarrow \dfrac{v}{x^2+1}=\dfrac{x^2}{2}+c_1$
$\Rightarrow v=\left(\dfrac{x^2}{2}+c_1\right)\left(x^2+1\right)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x^4+c_1\left(1+x^2\right)$
$\Rightarrow u=\displaystyle\int v(x)\,dx=\int\left(c_1\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^4\right)dx=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{10}x^5+\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)c_1+c_2$
$\Rightarrow y=ux=\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{1}{10}x^6+\left(x^2+\dfrac{1}{3}x^4\right)c_1+c_2x$

17. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$\left(3y^3x^2+2y^2x\right)+\left(y^2x^3+3y^4\right)y'=0$$

$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(3y^3x^2+2y^2x\right)=9y^2x^2+4yx\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^2x^3+3y^4\right)=3y^2x^2\end{array}\right.\Rightarrow \text{de vergelijking is niet exact}$
$\Rightarrow R(x,y)=9y^2x^2+4yx-3y^2x^2=6y^2x^2+4yx$
$\Rightarrow \dfrac{R}{-P}=\dfrac{6y^2x^2+4yx}{-\left(3y^3x^2+2y^2x\right)}=\dfrac{6y^2x^2+4yx}{-3y^3x^2-2y^2x}=-\dfrac{2}{y}$ is een functie van y alleen
$\Rightarrow \mu(y)=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=\dfrac{1}{y^2}$ is een integrerende factor en $y=0$ is een singuliere oplossing
$\Rightarrow \left(3yx^2+2x\right)+\left(x^3+3y^2\right)y'=0$ is wél exact
$\displaystyle\int\left(3yx^2+2x\right)dx=x^3y+x^2+c_y$
$\displaystyle\int\left(x^3+3y^2\right)dy=x^3y+y^3+c_x$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\varphi(x,y)=x^3y+x^2+y^3+c=0\\ y=0 \text{ SO}\end{array}\right.$

18. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de onbepaalde coëfficiënten:

$$y''-y=e^x+xe^{-x}$$

- Homogene vergelijking: $y''-y=0$
  Karakteristieke vergelijking: $t^2-1=0\Rightarrow t\in\{1,-1\}$
  $\Rightarrow y_H=c_1e^x+c_2e^{-x}$
- $y''-y=e^x$
  Stel $\alpha=1\Rightarrow \text{mult}_\Phi(\alpha)=1$
  $k=\text{gr}(Q(x))=0$

$\Rightarrow$ Stel $V(x) := b_0 + b_1 x$, zonder verlies van algemeenheid is $b_0 = 0$
$\Rightarrow$ Stel $V(x) := b_1 x$

$$\begin{array}{rcl|l} y_P & = & b_1 x e^x & -1 \\ y_P' & = & b_1 (1+x) e^x & 0 \\ y_P'' & = & b_1 (2+x) e^x & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow (2+x) b_1 e^x - b_1 x e^x \equiv e^x$
$\Rightarrow 2b_1 e^x \equiv e^x$
$\Rightarrow b_1 = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow y_{P_1} = \dfrac{1}{2} x e^x$

- $y'' - y = xe^{-x}$
Stel $\alpha = -1 \Rightarrow \mathrm{mult}_\Phi(\alpha) = 1$
$k = \mathrm{gr}(Q(x)) = 1$
$\Rightarrow$ Stel $V(x) := d_0 + d_1 x + d_2 x^2$, zonder verlies van algemeenheid is $d_0 = 0$

$$\begin{array}{rcl|l} y_P & = & \left(d_1 x + d_2 x^2\right) e^{-x} & -1 \\ y_P' & = & \left(d_1 + (2d_2 - d_1) x - d_2 x^2\right) e^{-x} & 0 \\ y_P'' & = & \left(2d_2 - 2d_1 + (d_1 - 4d_2) x + d_2 x^2\right) e^{-x} & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \left(2d_2 - 2d_1 + (d_1 - 4d_2) x + d_2 x^2\right) e^{-x} - \left(d_1 x + d_2 x^2\right) e^{-x} \equiv xe^{-x}$
$\Rightarrow (2d_2 - 2d_1 - 4xd_2) e^{-x} \equiv xe^{-x}$
$\Rightarrow \begin{cases} 2d_2 - 2d_1 = 0 \\ -4d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -\dfrac{1}{4} \\ d_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$
$\Rightarrow y_{P_2} = -\dfrac{\left(x^2 + x\right)}{4} e^{-x}$

- $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2} x e^x - \dfrac{\left(x^2 + x\right)}{4} e^{-x}$