Examenvoorbeelden Toegepaste Wiskunde II

dr Werner Peeters

1 OPGAVEN

1.1 JUNI 2008

1. Bereken de volgende bepaalde integralen:

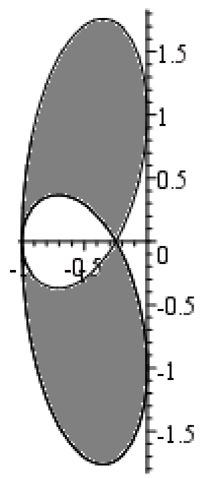
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5 \sqrt{1 - x^3} dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\left(1 + x^2\right)^4} dx$

2. Welke oppervlakte heeft het gebied dat boven de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2x^3 - 2x - 3$ en onder de X–as ligt? Hint: ontbind f eerst in factoren en maak er een tekenonderzoek van.

3. De parameterkromme $(x(t), y(t)) = \left(\cos^2 t - 1, \cos t - \sin 2t\right)$ heeft het volgende beeld:



(a) Vul de volgende tabel met punten in, en duid al die punten aan op bovenstaande tekening:

punt	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	0							-1		$-\frac{1}{4}$	0
y	-1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$					0			-1

(b) Bewijs dat

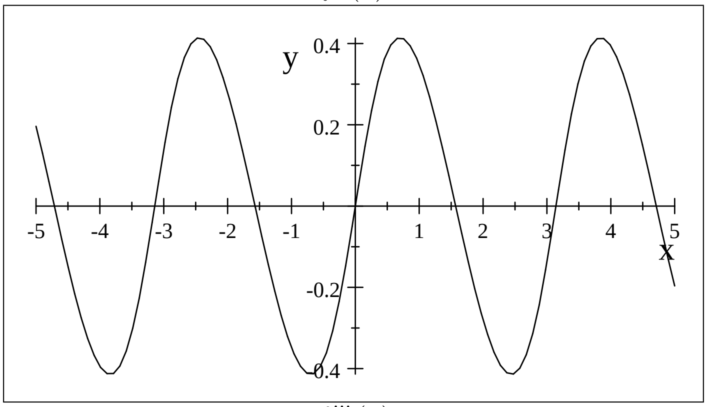
$$\int y(t)\, x'(t)\, dt = \frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} + c$$

(c) Bereken de oppervlakte van het grijs ingekleurde gebied. Let op symmetrie, oriëntatie, eventuele overlappingen, ... Geen numerieke afrondingen!!!

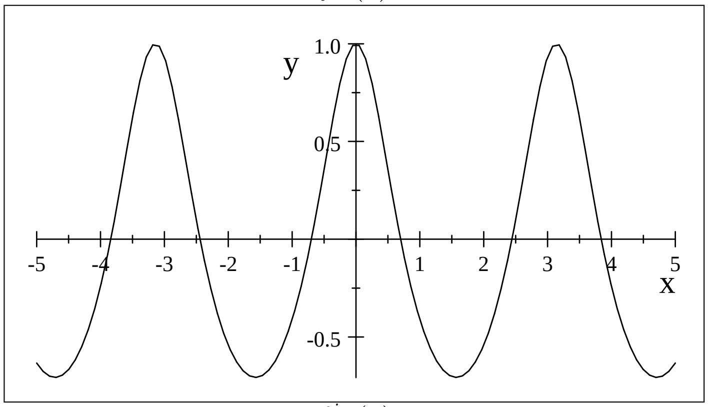
4. Bereken *numeriek* de booglengte van de kromme $y = \cos x$ op het interval $[0, 1]$. De werkelijke waarde hiervan moet $1.123\,887\,722\,945\,53$ zijn. Gebruik $n = 10$ en de Simpsonmethode, en schat de fout af.

Je krijgt voor dit laatste als hulpmiddel de plots van de eerste zes afgeleiden van $\sqrt{(f'(x))^2+1}$.

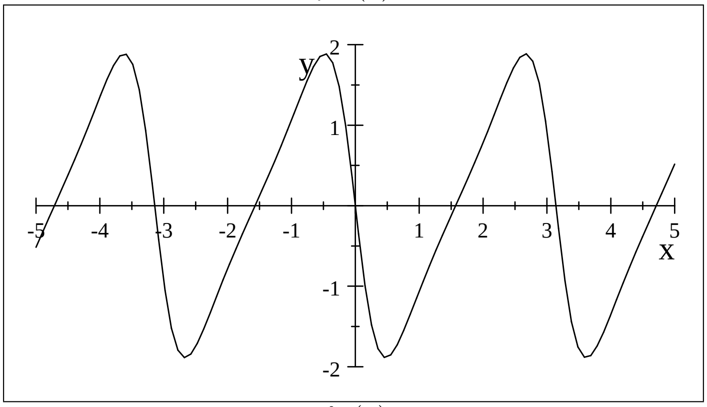
$f'(x)$



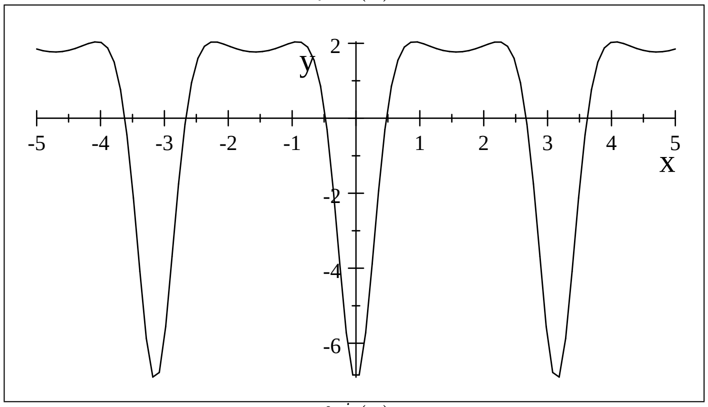
$f''(x)$



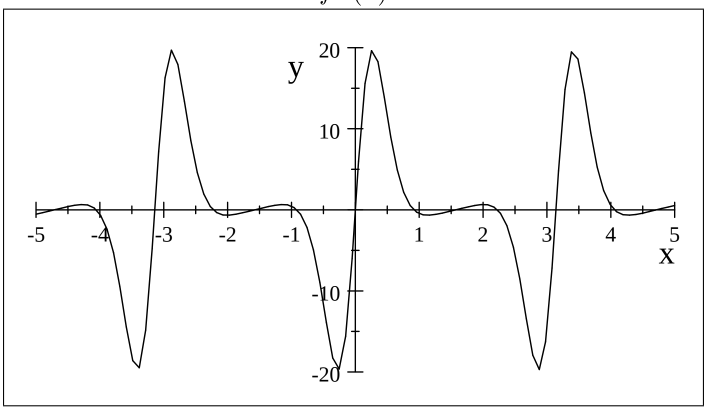
$f'''(x)$



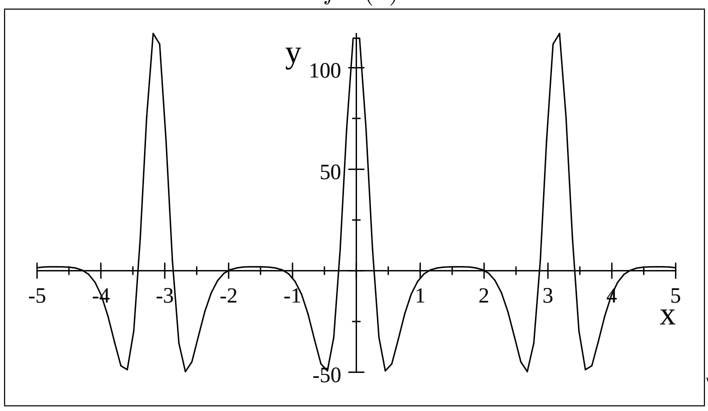
$f^{iv}(x)$



$f^{v}(x)$



$f^{vi}(x)$



5. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

   (a) $\left(3x^2y - y^2 + \dfrac{x}{y}\right) dx + \left(2x^3 - 3xy\right) dy = 0$

   (b) $y''' - 11y' + 20y = 37e^{-4x}$

6. Voor drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij geldt dat $x_1 + x_3 = 35$ en $\dfrac{x_2+x_3}{x_1+x_3} = \dfrac{6}{5}$. Wat

zijn de elementen? Er zijn 2 oplossingen!

7. Bewijs dat de volgende twee reeksen een ander convergentiegedrag hebben: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\ln n}$ en $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\ln n}$

8. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x$. We willen deze bepalen in $\frac{1}{4}$.

   (a) Geef de Taylorpolynoom $T_{2n+1}(\operatorname{sh}, 0)(x)$

   (b) Geef een gedaante voor de restterm en bewijs dat deze naar nul gaat. Je mag gebruiken dat $\operatorname{sh} \xi$ en $\operatorname{ch} \xi \leq 1$ zijn.

   (c) Bepaal de numerieke waarde van $\operatorname{sh} \frac{1}{4}$ tot op 14 cijfers na de komma nauwkeurig. De werkelijke waarde waar U mee moet vergelijken is.$\operatorname{sh} \frac{1}{4} = 0.252612316808168 30791$

9. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(x^2y, xy^3\right)$ en $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(3x + 2y^2, 3x^2 + 2y\right)$ gegeven. Bereken $D(g \circ f)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.

10. Zoek de extrema van de functie $f(x, y) = \frac{x^2y}{2} - 6y^2x - 2xy + 24y^2$ Je zou 4 kritische punten moeten vinden. Hint voor het niet–lineaire stelsel op te lossen: probeer de vergelijkingen te ontbinden in factoren, en herinner je dat het product van twee functies nul is als en slechts als één van de twee nul is.

1.2 SEPTEMBER 2008

1. Gegeven de poolkromme $r(\theta) = \sin 4\theta + 2\cos 2\theta$

   (a) Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide, plus een tekening.

   (b) Bereken de oppervlakte van de alsdus bekomen figuur.

   (c) Wat is de minimale straal waarbinnen de gehele figuur past? (Hint: dit zou je moeten weten uit het tekenonderzoek):

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y' = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right) y + x^2y^2$$

   Hint: zoek eerst 1 particuliere oplossing en ga deze niet te ver zoeken.

3. Bewijs dat

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n(n+1) + n(n+2) = \frac{1}{6} n(n+1)(4n+11)$$

   en geef een goede reden waarom deze uitkomst altijd een geheel getal is.

4.

   (a) Bewijs dat $\int e^x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{1+n^2} e^x \cos nx + \frac{n}{1+n^2} e^x \sin nx + c$

   (b) Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$

5. In welk punt van het oppervlak $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 8$ is $x - 2y + 2z$ maximaal?

1.3 JUNI 2007

1. Bereken de volgende bepaalde integralen:

   (a) $\int\limits_0^1 (1-x)^{2007} x^2 dx$

   (b) $\int\limits_0^2 \frac{(2x^5+x^2)\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$

   (c) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx$

2. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

   (a) $\left[3x^2 \ln(\cos y) + \sin x\right] - \left[x^3 \operatorname{tg} y + \cos y\right] \cdot y' = 0$

   (b) $y'' - 7y' + 6y = 10xe^x$

3. Gegeven de rekenkundige rij $(2, 7, 24, 59, 118, 207, 332, ...)$ van hogere orde.

   (a) Bepaal de orde van deze rij, alsook een niet–recursieve formule om het n–de element te bepalen (we beginnen te tellen bij 1).

   (b) Bepaal de som van de eerste 15 elementen van die rij.

4. Voor drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij geldt dat $x_1+x_2+x_3 = 104$ en $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = \frac{13}{72}$. Wat zijn de elementen?

5. Welk convergentiegedrag hebben de volgende reeksen, en waarom?

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(n^2)\,n!}{(2n^3-1)\,n^n}$

   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n^2)}{n^2}$

6. Bepaal via de stelling van Taylor de numerieke waarde van $\sin\frac{7}{8}$ tot op 8 cijfers na de komma nauwkeurig. De werkelijke waarde waar U mee moet vergelijken is 0.767 543 502 236 027

7. Bereken de differentiaal van de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \longrightarrow \left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{y^3}\right), \operatorname{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right), \operatorname{tg}(x^2y^4)\right)$

8. Bewijs dat het oppervlak

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, 4u^3v^2 + 2v)$$

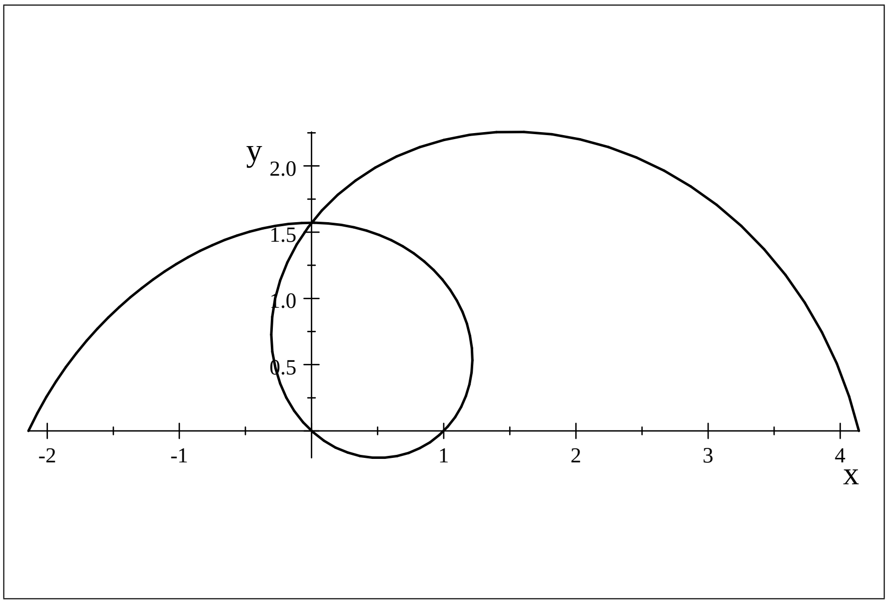
   regulier is, en bereken het raakvlak in het punt $(1, -2, 12)$.

9. Zij $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (\ln(x^2+y^2), zx)$ en $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x^2y, y^2x, x^2y^2)$ gegeven. Bereken $D(g \circ f)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.

10. Zoek de extrema van de functie $f(x, y) = e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}$

1.4 SEPTEMBER 2007

1. Hier krijg je de grafiek van de functie $r = \theta + \cos\theta$:



Bereken de oppervlakte van de lus. (Hint: je zal eerst moeten bepalen waar het snijpunt van de kromme ligt.)

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$3x^2y'' - xy' + y = \sqrt[3]{x}$$

3. Onderzoek de convergentie van de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$

4. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \sin x & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$

5. Onderzoek in $(0,0,0)$ de continuïteit, de (partiële) afleidbaarheid en de differentieerbaarheid van de volgende functie:

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2yz^2}{x^4z^2 + y^6 + z^4} & \text{als} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{als} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \end{array}$$

6. Zoek de relatieve extrema en/of zadelpunten van de functie

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

2 OPLOSSINGEN

2.1 JUNI 2008

1. Bereken de volgende bepaalde integralen:

   (a) $$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \left[\ln|\cos x + \sin x|\right]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$$

   (b) $$\int_{-1}^{1} x^5 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$\begin{aligned} t = 1 - x^3 \quad &\Rightarrow \quad dt = -3x^2 dx \\ &\Rightarrow \quad x^3 = 1 - t \\ & \quad x = -1 \rightarrow t = 2 \\ & \quad x = 1 \rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

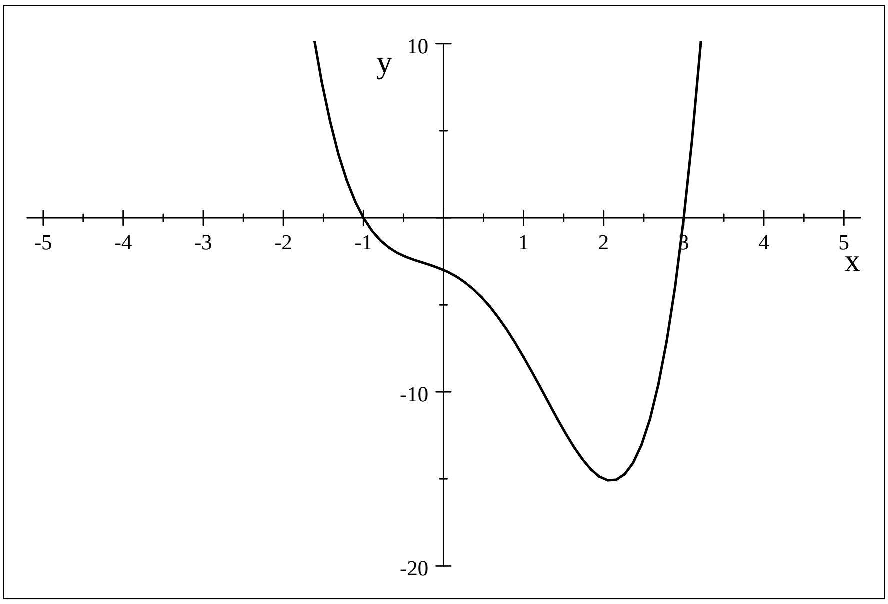
$$= \int_2^0 (1-t)\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right) dt = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = -\frac{4\sqrt{2}}{45}$$

   (c) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)^4} dx$$

$$\begin{aligned} t = 1 + x^2 \quad &\Rightarrow \quad dt = 2x dx \\ &\Rightarrow \quad x^2 = t - 1 \\ & \quad x = 0 \rightarrow t = 1 \\ & \quad x = +\infty \rightarrow t = +\infty \end{aligned}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)\,dt}{2t^4} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t^3} - \frac{1}{2t^4}\right) dt = \left[\frac{1}{6t^3} - \frac{1}{4t^2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

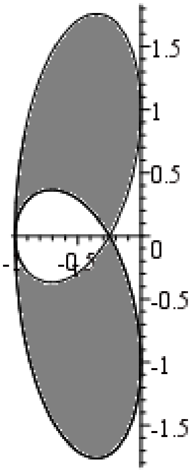
2. Welke oppervlakte heeft het gebied dat boven de functie $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2x^3 - 2x - 3$ en onder de X–as ligt? Hint: ontbind f eerst in factoren en maak er een tekenonderzoek van.



$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 2x^3 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 3\}$

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^{3} \left(-x^4 + 2x^2 + 2x^3 + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{448}{15}$$

3. De parameterkromme $(x(t), y(t)) = \left(\cos^2 t - 1, \cos t - \sin 2t\right)$ heeft het volgende beeld:



(a) Vul de volgende tabel met punten in, en duid al die punten aan op bovenstaande tekening:

punt	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	0							-1		$-\frac{1}{4}$	0
y	-1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$					0			-1

punt	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	0	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
y	-1	0	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	1	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	0	-1

(b) Bewijs dat

$$\int y(t)\, x'(t)\, dt = \frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} + c$$

$LL = \int (\cos t - \sin 2t)(-2\cos t \sin t)\, dt = \int \left(-2\cos^2 t \sin t + \sin^2 2t\right) dt = \frac{2\cos^3 t}{3} + \int \frac{1-\cos 4t}{2} dt =$
$\frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} + c$

(c) Bereken de oppervlakte van het grijs ingekleurde gebied. Let op symmetrie, oriëntatie, eventuele overlappingen, ... Geen numerieke afrondingen!!!

$$S = 2\left(\int\limits_{-\pi/2}^{0} y\left(t\right) x'\left(t\right) dt - \int\limits_{\pi/6}^{0} y\left(t\right) x'\left(t\right) dt - \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} y\left(t\right) x'\left(t\right) dt\right)$$

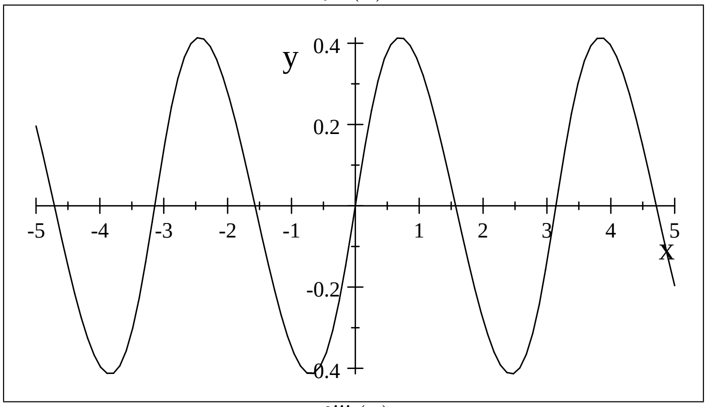
$$= 2\left(\left[\left[\left[\frac{2\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right]_{-\pi/2}^{0}\right]_{0}^{\pi/6}\right]_{5\pi/6}^{\pi/2}\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\pi\right) - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}\right) - \left(\left(-\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{6}\pi\right)\right)\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

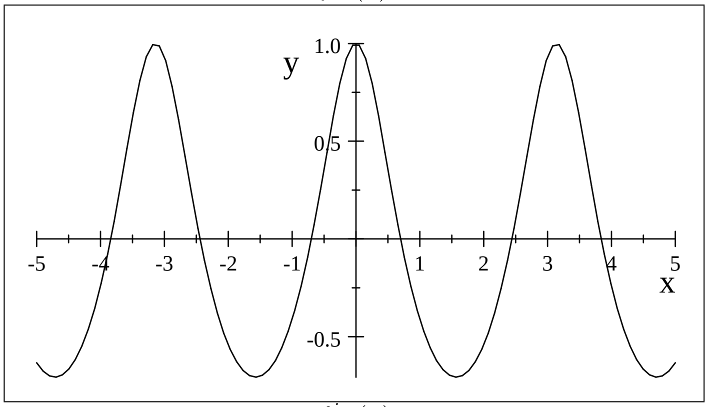
4. Bereken *numeriek* de booglengte van de kromme $y = \cos x$ op het interval $[0, 1]$. De werkelijke waarde hiervan moet $1.123\,887\,722\,945\,53$ zijn. Gebruik $n = 10$ en de Simpsonmethode, en schat de fout af.

Je krijgt voor dit laatste als hulpmiddel de plots van de eerste zes afgeleiden van $\sqrt{\left(f'\left(x\right)\right)^2+1}$.

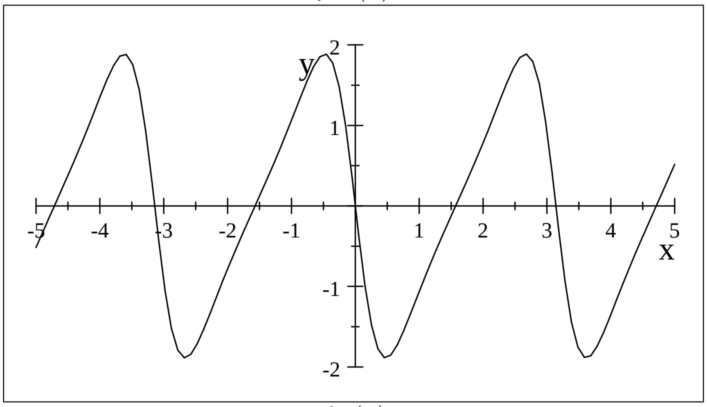
$f'\left(x\right)$



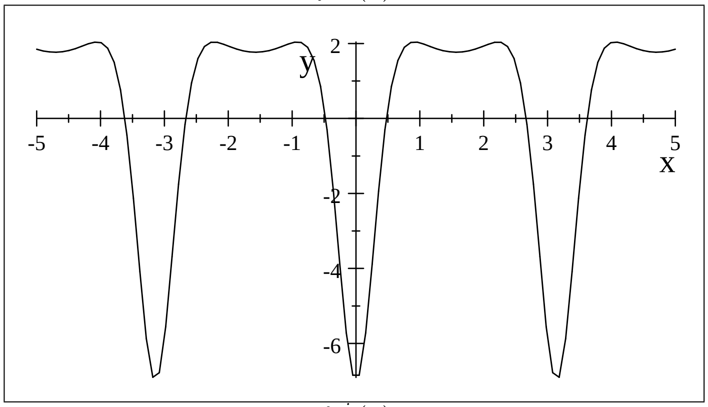
$f''\left(x\right)$



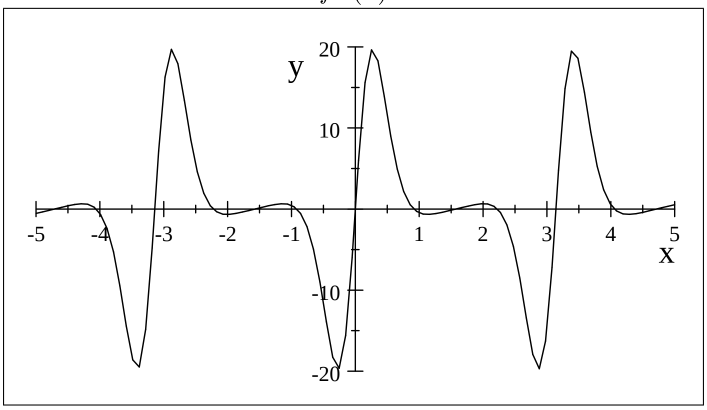
$f'''\left(x\right)$



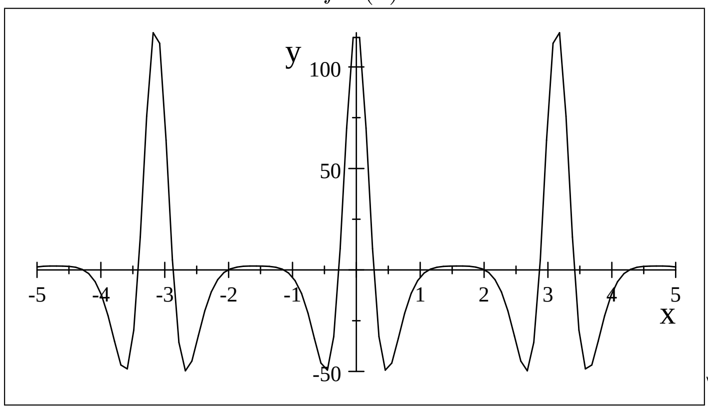
$f^{iv}\left(x\right)$



$f^{v}\left(x\right)$



$f^{vi}\left(x\right)$



$$L=\int_0^1\sqrt{\sin^2 x+1}dx=1.123\,887\,722\,945\,53$$

x	$\sqrt{\sin^2 x + 1}$	
0	1	1
0.1	1. 004 971 000 118 6	4
0.2	1. 019 543 771 987 53	2
0.3	1. 042 752 220 110 40	4
0.4	1. 073 148 007 185 60	2
0.5	1. 108 985 503 541 83	4
0.6	1. 148 399 374 242 98	2
0.7	1. 189 544 630 751 57	4
0.8	1. 230 690 765 850 89	2
0.9	1. 270 275 972 907 68	4
1	1. 306 932 828 523 93	1
	33. 716 613 976 778 3	

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{33.\,716\,613\,976\,778\,3}{30} = 1.\,123\,887\,132\,559\,28$$

Fout: $\left\|f^{iv}\right\| = \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{d^4\left(\sqrt{\sin^2 x + 1}\right)}{dx^4} \right| = 7$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \sqrt{\sin^2 x + 1}dx - S_{10} \right| \leq \frac{7}{180 \cdot 10^4} = \frac{7}{1\,800\,000} = 0.000\,003\,888\,888\,889$$

5. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

   (a) $\left(3x^2y - y^2 + \frac{x}{y}\right) dx + \left(2x^3 - 3xy\right) dy = 0$

   $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 2y - \frac{x}{y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y + 6x^2 \end{cases}$ is niet exact

   $$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{\left(3x^2 - 2y - \frac{x}{y^2}\right) - \left(-3y + 6x^2\right)}{-\left(3x^2y - y^2 + \frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{y}$$

   $\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$

   $\Rightarrow \left(3x^2y^2 - y^3 + x\right) dx + \left(2x^3y - 3xy^2\right) dy$ moet wel exact zijn

   $$\begin{cases} \varphi(x,y) = \int \left(3x^2y^2 - y^3 + x\right) dx = x^3y^2 - y^3x + \frac{1}{2}x^2 + c_y \\ \varphi(x,y) = \int \left(2x^3y - 3xy^2\right) dy = x^3y^2 - y^3x + c_x \end{cases}$$

   $\Rightarrow \varphi(x,y) = x^3y^2 - y^3x + \frac{1}{2}x^2 + c = 0$

   (b) $y''' - 11y' + 20y = 37e^{-4x}$

   KV: $\Phi(\lambda) = \lambda^3 - 11\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-4, 2+i, 2-i\}$

   $y_h = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}\cos x + C_3e^{2x}\sin x$

   $\begin{cases} \text{mult}_\Phi(-4) = 1 \\ \text{gr}(Q(x)) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Zij een particuliere oplossing gegeven door

   $$\begin{cases} y_p = b_1xe^{-4x} \\ y_p' = b_1e^{-4x}(-4x+1) \\ y_p'' = 8b_1e^{-4x}(2x-1) \\ y_p''' = 16b_1e^{-4x}(-4x+3) \end{cases}$$

Eis: $e^{-4x}\left[16b_1(-4x+3)-11b_1(-4x+1)+20b_1x\right]\equiv 37e^{-4x}$
$\Rightarrow e^{x}(37b_1)\equiv 37e^{-4x}\Rightarrow b_1=1$
$\Rightarrow y_h=(x+C_1)\,e^{-4x}+C_2e^{2x}\cos x+C_3e^{2x}\sin x$

6. Voor drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij geldt dat $x_1+x_3=35$ en $\dfrac{x_2+x_3}{x_1+x_3}=\dfrac{6}{5}$. Wat zijn de elementen? Er zijn 2 oplossingen!

$$\begin{cases} x_1+x_1q^2=35 \\ \dfrac{x_1\left(q+q^2\right)}{x_1\left(1+q^2\right)}=\dfrac{6}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_1q^2=35 \\ 5\left(q+q^2\right)=6\left(1+q^2\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{35}{1+q^2} \\ q^2-5q+6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{35}{1+q^2} \\ q=2 \text{ of } q=3\end{cases}$$

$(x_1,q)\in\{7,2\},\left(\dfrac{7}{2},3\right)\Rightarrow(7,14,28)$ of $\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{21}{2},\dfrac{63}{2}\right)$

7. Bewijs dat de volgende twee reeksen een ander convergentiegedrag hebben: $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n+\ln n}$ en $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2+\ln n}$

- $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n+\ln n}$ is divergent want $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n+\ln n}\geq\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{2n}$
- $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2+\ln n}$ is convergent want $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2+\ln n}\leq\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$

8. Beschouw de functie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto \operatorname{sh}x$. We willen deze bepalen in $\dfrac{1}{4}$.

(a) Geef de Taylorpolynoom $T_{2n+1}(\operatorname{sh},0)(x)$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n(x)$$

(b) Geef een gedaante voor de restterm en bewijs dat deze naar nul gaat. Je mag gebruiken dat $\operatorname{sh}\xi$ en $\operatorname{ch}\xi\leq 1$ zijn.
$R_n(x)=\dfrac{\operatorname{sh}\xi x^{2n+2}}{(2n+2)!}$
$\Rightarrow|R_n(x)|\leq\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$. Dit is een algemene term van een reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ die convergeert wegens d'Alembert

(c) Bepaal de numerieke waarde van $\operatorname{sh}\dfrac{1}{4}$ tot op 14 cijfers na de komma nauwkeurig. De werkelijke waarde waar U mee moet vergelijken is.$\operatorname{sh}\dfrac{1}{4}=0.25261231680816830791$

n	$\dfrac{\left\lvert\frac{1}{4}\right\rvert^{2n+2}}{(2n+2)!}$
3	3.8×10^{-10}
4	2.6×10^{-13}
5	1.2×10^{-16}

$$\Rightarrow \operatorname{sh}\frac{1}{4} \simeq \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{5!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^9}{9!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{11!}$$

$$\begin{array}{llccccccccccccccccccc}
1/4 & = & 0 & . & 2 & 5 \\
(1/4)^3/3! & \simeq & 0 & . & 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
(1/4)^5/5! & \simeq & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 3 & 8 & 0 & 2 & 0 & 8 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
(1/4)^7/7! & \simeq & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\
(1/4)^9/9! & \simeq & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 2 & 2 & 8 \\
(1/4)^{11}/11! & \simeq & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 9 & 7 \\
 & & \mathbf{0} & . & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{9}
\end{array}$$

$\simeq 0.25261231680817$

9. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \left(x^2y, xy^3\right)$ en $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \left(3x+2y^2, 3x^2+2y\right)$ gegeven. Bereken $D\left(g \circ f\right)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.
Stel $(p,q) = \left(x^2y, xy^3\right)$

$$\begin{aligned} Df\left(x,y\right) &= \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix} \\ Dg\left(p,q\right) &= \begin{pmatrix} 3 & 4q \\ 6p & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow D\left(g \circ f\right)(x,y) = Dg\left(f\left(x,y\right)\right) \cdot Df\left(x,y,z\right)$
$= \begin{pmatrix} 3 & 4xy^3 \\ 6x^2y & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy+4xy^6 & 3x^2+12x^2y^5 \\ 12x^3y^2+2y^3 & 6x^4y+6xy^2 \end{pmatrix}$

10. Zoek de extrema van de functie $f\left(x,y\right) = \dfrac{x^2y}{2} - 6y^2x - 2xy + 24y^2$ Je zou 4 kritische punten moeten vinden. Hint voor het niet–lineaire stelsel op te lossen: probeer de vergelijkingen te ontbinden in factoren, en herinner je dat het product van twee functies nul is als en slechts als één van de twee nul is.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy - 6y^2 - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 - 12xy - 2x + 48y = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y\left(x-6y-2\right) = 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(x-4\right)\left(x-24y\right) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) \in \left\{ (4,0), \left(4, \frac{1}{3}\right), (0,0), \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{9}\right) \right\}$$

$$H\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} y & x-12y-2 \\ x-12y-2 & -12x+48 \end{pmatrix}$$

$H\left(0,0\right) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 48 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow (0,0)$ is een zadelpunt

$H\left(4,0\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow (4,0)$ is een zadelpunt

$H\left(4, \frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \left(4, \frac{1}{3}\right)$ is een zadelpunt

$H\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{9}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 16 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{9}\right)$ is een minimum

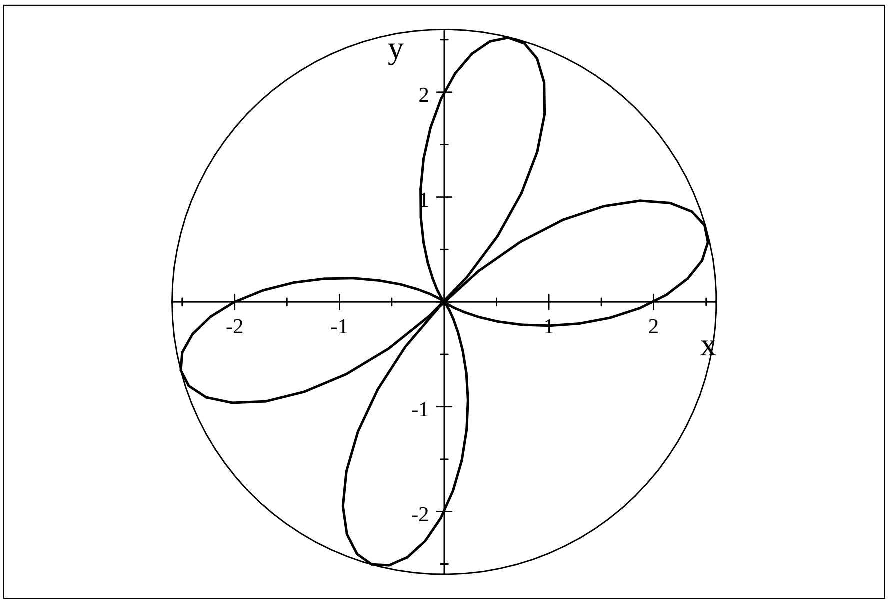
2.2 SEPTEMBER 2008

1. Gegeven de poolkromme $r\left(\theta\right)=\sin 4\theta+2\cos 2\theta$

   (a) Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide, plus een tekening.

   - Periode: π, interval is $[0,\pi]$ bijvoorbeeld.
   - $r\left(\theta\right)=\sin 4\theta+2\cos 2\theta=0$
     $\Leftrightarrow 2\sin 2\theta\cos 2\theta+2\cos 2\theta=2\cos 2\theta\left(\sin 2\theta+1\right)=0$
     $\Rightarrow \begin{cases} 2\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2\theta=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \end{cases}$
   - $r'\left(\theta\right)=8\cos^2 2\theta-4-4\sin 2\theta=8\left(1-\sin^2 2\theta\right)-4-4\sin 2\theta=-8\sin^2 2\theta-4\sin 2\theta+4=0$
     $\Rightarrow 2\sin^2 2\theta+\sin 2\theta-1=0$
     $\Delta=1^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9$
   - $\Rightarrow \sin 2\theta=\dfrac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\theta=\dfrac{1}{2} \\ \sin 2\theta=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2\theta=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ 2\theta=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ \theta=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \end{cases}$
   -

θ	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$r\left(\theta\right)$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$r'\left(\theta\right)$	+	+	0	−	−	−	0	+	0	+	+
$r\left(\theta\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
			$\frac{3\sqrt{3}}{2}$				$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$				



   (b) Bereken de oppervlakte van de alsdus bekomen figuur.

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sin 4\theta+2\cos 2\theta\right)^2 d\theta=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sin^2 4\theta+4\sin 4\theta\cos 2\theta+4\cos^2 2\theta\right)d\theta$$

$$= 2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1-\cos 8\theta}{2} + 2\sin 6\theta + 2\sin 2\theta + 4\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(1-\cos 8\theta + 4\sin 6\theta + 4\sin 2\theta + 4 + 4\cos 4\theta\right) d\theta$$
$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(5-\cos 8\theta + 4\sin 6\theta + 4\sin 2\theta + 4\cos 4\theta\right) d\theta$$
$$= \left[5\theta - \frac{1}{8}\sin 8\theta - \frac{2}{3}\cos 6\theta - 2\cos 2\theta + \sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{5}{2}\pi$$

(c) Wat is de minimale straal waarbinnen de gehele figuur past? (Hint: dit zou je moeten weten uit het tekenonderzoek):
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y' = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right) y + x^2 y^2$$

Hint: zoek eerst 1 particuliere oplossing en ga deze niet te ver zoeken.
Dit is een differentiaalvergelijkig van Ricatti met als particuliere oplossing $y = x$ We stellen

$$y = x + \frac{1}{u}$$

$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right)\left(x + \frac{1}{u}\right) + x^2\left(x + \frac{1}{u}\right)^2$
$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = 1 - \frac{4}{ux} + \frac{x^2}{u^2}$
$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{4}{ux} + \frac{x^2}{u^2}$
$\Rightarrow u' - \frac{4}{x}u = -x^2$
Stel $\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = \frac{1}{x^4}$
$\Rightarrow \frac{u'}{x^4} - \frac{4u}{x^5} = -\frac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \left(\frac{u}{x^4}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \frac{u}{x^4} = \frac{1}{x} + c$
$\Rightarrow u = x^3 + cx^4$
$\Rightarrow y = x + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{x^3 + cx^4}$ met als SO $y = x$

3. Bewijs dat

$$1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 3\cdot 5 + ... + n(n+1) + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$$

en geef een goede reden waarom deze uitkomst altijd een geheel getal is.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(k\left(k+1\right)+k\left(k+2\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+k^2+2k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+3k\right)\\
&= 2S_2\left(n\right)+3S_1\left(n\right)=2\cdot\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)+3\cdot\frac{1}{2}n\left(n+1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(2n^3+3n^2+n\right)+\frac{3}{2}\left(n^2+n\right)=\frac{2}{3}n^3+\frac{5}{2}n^2+\frac{11}{6}n\\
&= \frac{1}{6}\left(15n^2+11n+4n^3\right)=\frac{1}{6}n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)
\end{aligned}$$

n of $n+1$ is even, dus $n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)$ is deelbaar door 2
Als $n\equiv 0 \bmod 3$ dan is n en dus $n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)$ deelbaar door 3
Als $n\equiv 2 \bmod 3$ dan is $n+1$ en dus $n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)$ deelbaar door 3
Als $n\equiv 1 \bmod 3$ dan is $4n+11=15 \bmod 3=0 \bmod 3$ en dus $4n+11$ en dus $n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)$ deelbaar door 3
$n\left(n+1\right)\left(4n+11\right)$ is dus deelbaar door 6

4.

(a) Bewijs dat $\displaystyle\int e^x\cos\left(nx\right)dx=\frac{1}{1+n^2}e^x\cos nx+\frac{n}{1+n^2}e^x\sin nx+c$

Nu is $\displaystyle\int e^x\cos\left(nx\right)dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\cos nx\\ dv=e^x dx\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du=-n\sin nx dx\\ v=e^x\end{array}\right.$$

$= e^x\cos nx+n\displaystyle\int e^x\sin nx dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\sin nx\\ dv=e^x dx\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du=n\cos nx dx\\ v=e^x\end{array}\right.$$

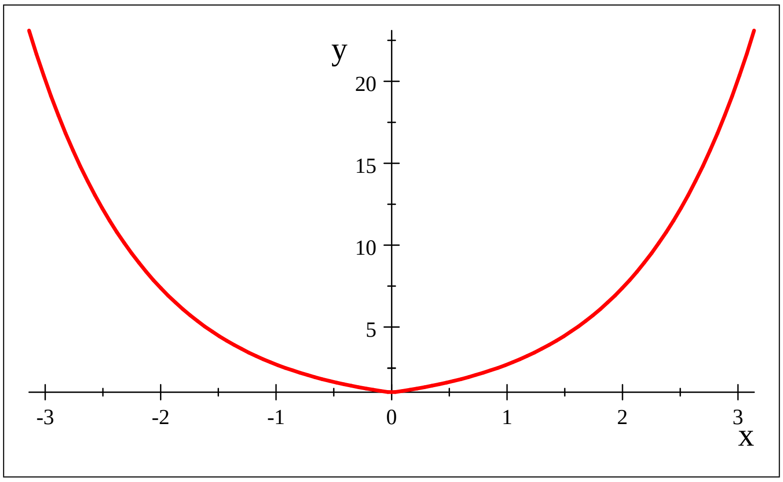
$= e^x\cos nx+n\left(e^x\sin nx-n\displaystyle\int e^x\cos nx dx\right)$

$= e^x\cos nx+ne^x\sin nx-n^2\displaystyle\int e^x\cos nx dx$

$\Rightarrow \left(n^2+1\right)\displaystyle\int e^x\cos\left(nx\right)dx=e^x\cos nx+ne^x\sin nx+c$

$\Rightarrow \displaystyle\int e^x\cos\left(nx\right)dx=\frac{1}{n^2+1}e^x\cos nx+\frac{n}{n^2+1}e^x\sin nx+c$

(b) Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$



Deze functie is duidelijk even.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi}\left[e^x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}e^x\cos nx + \frac{n}{1+n^2}e^x \sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+n^2}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{2\left(e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)} & \text{als } n \text{ even} \\ \dfrac{2\left(-e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases} = \frac{2\left(\left(-1\right)^n e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) \overset{\text{b.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right) + \sum_{n=1}^{k}\frac{2\left(\left(-1\right)^n e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}\cos nx$$

5. In welk punt van het oppervlak $x^2+y^2+z^2+2x=8$ is $x-2y+2z$ maximaal?

$$F(x,y,z,\lambda) = x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2+2x-8\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1+2\lambda(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2+2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2+2\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2+2x-8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}-1 \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-1}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2+2x-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}-1 \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-1}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2+2x-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2\lambda}-1\right) - 8 = \frac{9}{4\lambda^2} - 9 = 0 \Rightarrow \lambda \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

- Als $\lambda = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (x,y,z) = (-2,2,-2) \Rightarrow f(x,y,z) = -2-2\cdot 2+2\cdot(-2) = -10 \Rightarrow$ minimum
- Als $\lambda = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-2,2) \Rightarrow f(x,y,z) = 0+2\cdot 2-2\cdot(-2) = 8 \Rightarrow$ maximum

2.3 JUNI 2007

1. Bereken de volgende bepaalde integralen:

   (a) $\int\limits_0^1 (1-x)^{2007} x^2 dx$

$$t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$$
$$\Rightarrow x^2 = (1-t)^2 = t^2 - 2t + 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$= -\int\limits_1^0 t^{2007}\left(t^2 - 2t + 1\right) dt = \int\limits_0^1 t^{2007}\left(t^2 - 2t + 1\right) dt = \int\limits_0^1 \left(t^{2009} - 2t^{2008} + t^{2007}\right) dt$$
$$= \left[\frac{t^{2010}}{2010} - \frac{2t^{2009}}{2009} + \frac{t^{2008}}{2008}\right]_0^1 = \frac{1}{2010} - \frac{2}{2009} + \frac{1}{2008} = \frac{1}{4054\,242\,360}$$

   (b) $\int\limits_0^2 \frac{\left(2x^5 + x^2\right) dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int\limits_0^2 \frac{2x^3+1}{\sqrt{x^3+1}} x^2 dx$

$$t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow x^3 = t - 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 2 \rightarrow t = 3 \end{cases}$$

$$= \int\limits_1^9 \frac{1}{3}\frac{(2t-1)\,dt}{\sqrt{t}} = \left[\frac{4}{9}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{t}\right]_1^9 = \frac{92}{9}$$

   (c) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

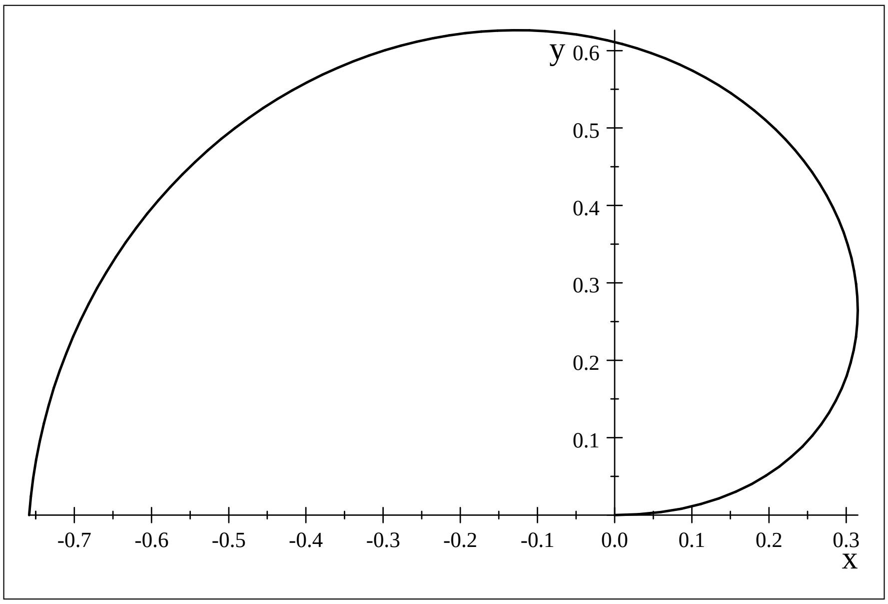
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\right]_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} x \sin 2x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$\begin{cases} u = -x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \cos 2x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2x dx = -\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{4}\pi$$

2. Schets de kromme met poolvergelijking $r = \dfrac{\theta}{\theta+1}$ op $[0, \pi]$ en bereken het oppervlak dat men krijgt

tussen deze en de X–as



$$V = 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^2 d\theta = 2\pi \int_0^\pi \frac{\theta^2}{(\theta+1)^2} d\theta = 2\pi \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{(\theta+1)^2} - \frac{2}{\theta+1}\right) d\theta$$
$$= 2\pi \left[\theta - \frac{1}{\theta+1} - 2\ln(\theta+1)\right]_0^\pi = \frac{2\pi^3}{\pi+1} + \frac{4\pi^2}{\pi+1} - \frac{4\pi^2}{\pi+1}\ln(\pi+1) - \frac{4\pi}{\pi+1}\ln(\pi+1)$$

3. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

(a) $\left[3x^2 \ln(\cos y) + \sin x\right] - \left[x^3 \operatorname{tg} y + \cos y\right] \cdot y' = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{d}{dy}\left(3x^2 \ln(\cos y) + \sin x\right) = -3x^2 \operatorname{tg} y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}\left(-x^3 \operatorname{tg} y + \cos y\right) = -3x^2 \operatorname{tg} y \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int \left(3x^2 \ln(\cos y) + \sin x\right) dx = x^3 \ln(\cos y) - \cos x + c_y \\ \displaystyle\int \left(-x^3 \tan y - \cos y\right) dy = x^3 \ln(\cos y) - \sin y + c_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^3 \ln(\cos y) - \cos x - \sin y + c_x = 0$$

(b) $y'' - 7y' + 6y = 10xe^x$

KV: $\Phi(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, 6\}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$

$$\begin{cases} \operatorname{mult}_\Phi(1) = 1 \\ \operatorname{gr}(Q(x)) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Zij een particuliere oplossing gegeven door}$$

$$\begin{cases} y_p = e^x \left(b_1 x + b_2 x^2\right) \\ y_p' = e^x \left(b_1 + (2b_2 + b_1)x + b_2 x^2\right) \\ y_p'' = e^x \left(2b_2 + 2b_1 + (4b_2 + b_1)x + b_2 x^2\right) \end{cases}$$

Eis: $e^x \left[\left(2b_2 + 2b_1 + (4b_2 + b_1)x + b_2x^2\right) - 7\left(b_1 + (2b_2 + b_1)x + b_2x^2\right) + 6\left(b_1 x + b_2 x^2\right)\right] \equiv 10xe^x$

$\Rightarrow e^x \left(2b_2 - 5b_1 - 10b_2 x\right) \equiv 10exe^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b_2 - 5b_1 = 0 \\ -10b_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow (b_1, b_2) = \left(-\frac{2}{5}, -1\right)$$

$$\Rightarrow y=\left(C_1-\frac{2}{5}x-x^2\right)e^x+C_2e^{6x}$$

4. Gegeven de rekenkundige rij $(2,7,24,59,118,207,332,...)$ van hogere orde.

   (a) Bepaal de orde van deze rij, alsook een niet–recursieve formule om het n–de element te bepalen (we beginnen te tellen bij 1).
   $(2,7,24,59,118,207,332,...)$
   Verschilrij $(5,17,35,59,89,125,...)$
   Verschilrij $(12,18,24,30,36,...)$
   Verschilrij $(6,6,6,6...)$
   De oorspronkelijke rij is dus van orde 3. Zij $x_n=an^3+bn^2+cn+d$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=2\\8a+4b+2c+d=7\\27a+9b+3c+d=24\\64a+16b+4c+d=59\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=2\\7a+3b+c=5\\19a+5b+c=17\\37a+7b+c=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=2\\7a+3b+c=5\\12a+2b=12\\18a+2b=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=2\\7a+3b+c=5\\6a+b=6\\9a+b=9\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a+b+c+d=2\\7a+3b+c=5\\6a+b=6\\3a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-2\\d=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n=n^3-2n+3$$

   (b) Bepaal de som van de eerste 15 elementen van die rij.

$$s_{15}=\sum_{n=1}^{15}\left(n^3-2n+3\right)=S_3(15)-2S_1(15)+3\cdot 15=\frac{15^2\cdot 16^2}{4}-2\frac{15\cdot 16}{2}+45=14\,205$$

5. Voor drie opeenvolgende termen van een meetkundige rij geldt dat $x_1+x_2+x_3=104$ en $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{13}{72}$. Wat zijn de elementen?

$$\begin{cases}\frac{x_2}{q}+x_2+x_2q=104\\\frac{q}{x_2}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{qx_2}=\frac{13}{72}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2\frac{1+q+q^2}{q}=104\\\frac{1}{x_2}\frac{1+q+q^2}{q}=\frac{13}{72}\end{cases}\Rightarrow x_2^2=\frac{104\cdot 72}{13}=576\Rightarrow x_2=\pm 24$$

- $1+q+q^2=\frac{104}{24}q=\frac{13}{3}q\Rightarrow 3q^2-10q+3=0\Rightarrow q\in\left\{3,\frac{1}{3}\right\}$
  $\Rightarrow$ De rij is $(8,24,72)$ of zijn omgekeerde
- $1+q+q^2=-\frac{13}{3}q\Rightarrow q\in\left\{-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{55},-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{55}\right\}$
  $\Rightarrow$ De rij is $\left(\frac{72}{8-\sqrt{55}},-24,64-8\sqrt{55}\right)$ of $\left(\frac{72}{8+\sqrt{55}},-24,64+8\sqrt{55}\right)$

6. Welk convergentiegedrag hebben de volgende reeksen, en waarom?

   (a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\left(n^2\right)n!}{(2n^3-1)\,n^n}$
   is convergent wegens het criterium van d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(n^2+2n+1\right)(n+1)!}{(2n^3+6n^2+6n+1)\,(n+1)^{n+1}}}{\frac{\left(n^2\right)n!}{(2n^3-1)\,n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(n^2+2n+1\right)(n+1)}{(2n^3+6n^2+6n+1)\,(n+1)^{n+1}}}{\frac{\left(n^2\right)}{(2n^3-1)\,n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\left(n^2+2n+1\right)}{\left(2n^3+6n^2+6n+1\right)(n+1)^n}}{\dfrac{\left(n^2\right)}{\left(2n^3-1\right)n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} \cdot \frac{2n^3-1}{2n^3+6n^2+6n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}$

Wegens het verdichtingscriterium heeft deze reeks hetzelfde gedrag als

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n \cdot \ln\left(\left(2^n\right)^2\right)}{\left(2^n\right)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{2n\ln 2}{2^n}$$

en die is convergent wegens het criterium van d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(n+1)\ln 2}{2^{n+1}}}{\dfrac{2n\ln 2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

7. Bepaal via de stelling van Taylor de numerieke waarde van $\sin\frac{7}{8}$ tot op 8 cijfers na de komma nauwkeurig. De werkelijke waarde waar U mee moet vergelijken is 0.767 543 502 236 027

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{\pm \sin\xi x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

n	$\dfrac{\left\lvert\frac{7}{8}\right\rvert^{2n+2}}{(2n+2)!}$
3	8.52×10^{-6}
4	7.25×10^{-8}
5	4.20×10^{-10}

$$\Rightarrow \sin\frac{7}{8} \simeq \frac{7}{8} - \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^9}{9!} - \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{11}}{11!}$$

$$\begin{array}{lccl}
7/8 & = & & 0\,.\,8\,7\,5 \\
\dfrac{(7/8)^5}{5!} & \simeq & & 0\,.\,0\,0\,4\,2\,7\,4\,2\,4\,1\,1\,2\,9 \\
\dfrac{(7/8)^9}{9!} & \simeq & & 0\,.\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,8\,2\,8\,5\,3\,2 \\
 & & & \mathbf{0\,.\,8\,7\,9\,2\,7\,5\,0\,6\,9\,6\,6\,1} \\
 & & & \\
-\dfrac{(7/8)^3}{3!} & \simeq & - & 0\,.\,1\,1\,1\,6\,5\,3\,6\,4\,5\,8\,3\,3 \\
-\dfrac{(7/8)^7}{7!} & \simeq & - & 0\,.\,0\,0\,0\,0\,7\,7\,9\,2\,5\,8\,5\,4 \\
-\dfrac{(7/8)^{11}}{11!} & \simeq & - & 0\,.\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,5\,7\,6\,7 \\
 & & & \mathbf{0\,.\,1\,1\,1\,7\,3\,1\,5\,6\,7\,4\,5\,4} \\
 & & & \\
 & & & 0\,.\,7\,6\,7\,5\,4\,3\,5\,0\,2\,2\,0\,7
\end{array}$$

$\simeq 0.767\,543\,502\,207\,827$

8. Bereken de differentiaal van de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \longrightarrow \left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{y^3}\right), \operatorname{Bgsin}\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right), \operatorname{tg}\left(x^2y^4\right)\right)$

$$Df = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y^3}\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) & \dfrac{-3x}{y^4}\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) \\ -\dfrac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x^2-y}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x^2y-y^2}} \\ 2xy^4\left(1+\operatorname{tg}^2 x^2y^4\right) & 4x^2y^3\left(1+\operatorname{tg}^2 x^2y^4\right) \end{pmatrix}$$

9. Bewijs dat het oppervlak

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \left(u, v, 4u^3v^2 + 2v\right)$$

regulier is, en bereken het raakvlak in het punt $(1, -2, 12)$.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \left(1, 0, 12u^2v^2\right)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(0, 1, 8u^3v + 2\right)$

$\Rightarrow \eta = \left(1, 0, 12u^2v^2\right) \times \left(0, 1, 8u^3v + 2\right) = \left(-12u^2v^2, -2 - 8u^3v, 1\right) \neq (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \eta\,(1, -2) = (-48, 14, 1)$

$\Rightarrow -48\,(x-1) + 14\,(y+2) + (z-12) = -48x + 14y + z + 64$

$\Rightarrow z = 48x - 14y - 64$

10. Zij $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\ln\left(x^2+y^2\right), zx\right)$ en $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto \left(x^2y, y^2x, x^2y^2\right)$ gegeven.
Bereken $D\,(g \circ f)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.
Stel $(p, q) = \left(\ln\left(x^2+y^2\right), zx\right)$

$$\begin{aligned} Df\,(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \\ Dg\,(p, q) &= \begin{pmatrix} 2pq & p^2 \\ q^2 & 2pq \\ 2pq^2 & 2p^2q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow D\,(g \circ f)\,(x, y, z) = Dg\,(f\,(x, y, z)) \cdot Df\,(x, y, z)$

$$= \begin{pmatrix} 2xz\ln\left(x^2+y^2\right) & \left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)^2 \\ x^2z^2 & 2xz\ln\left(x^2+y^2\right) \\ 2x^2z^2\ln\left(x^2+y^2\right) & 2xz\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x^2z\dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + z\left(\ln^2\left(x^2+y^2\right)\right) & \dfrac{4xyz}{x^2+y^2}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) & x\left(\ln^2\left(x^2+y^2\right)\right) \\ \dfrac{2x^3z^2}{x^2+y^2} + 2xz^2\ln\left(x^2+y^2\right) & \dfrac{2x^2yz^2}{x^2+y^2} & 2x^2z\ln\left(x^2+y^2\right) \\ \dfrac{4x^3z^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + 2xz^2\ln^2\left(x^2+y^2\right) & \dfrac{4x^2yz^2}{x^2+y^2}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right) & 2x^2z\ln^2\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}$$

11. Zoek de extrema van de functie $f\left(x,y\right) = e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right) = -\left(x^2-1\right)e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$$

$$\frac{d}{dy}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right) = -2ye^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$$

$$\begin{cases} -\left(x^2-1\right)e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} = 0 \\ -2ye^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(1,0), (-1,0)\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right) = -2xe^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} + e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}x^4 - 2e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}x^2 + e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right) = -2e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} + 4y^2e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right) = 2y\left(x^2-1\right)e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$$

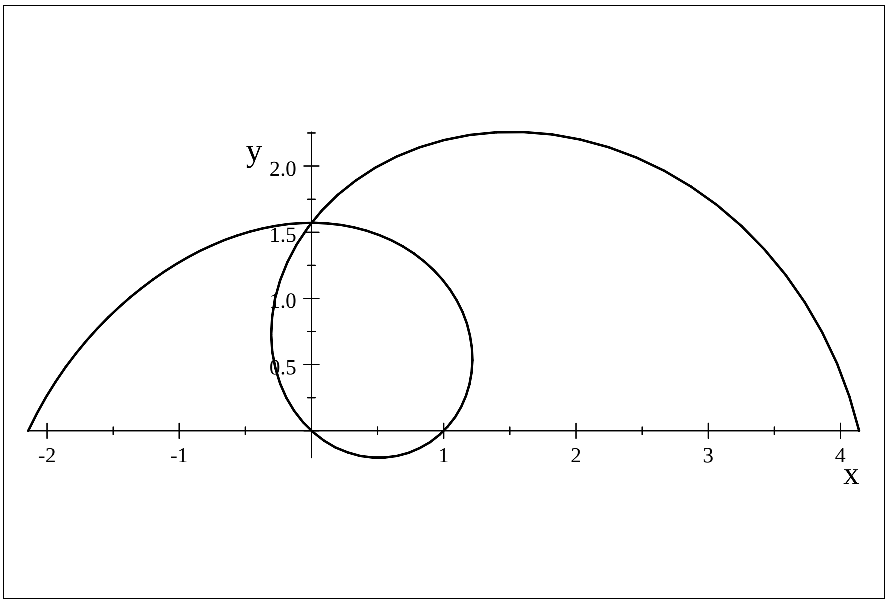
- $H\left(1,0\right) = \begin{vmatrix} -2e^{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -2e^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = 4e^{\frac{4}{3}} > 0$ en $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-\frac{x^3}{3}+x-y^2}\right)(1,0) < 0$

  $\Rightarrow (1,0)$ is een maximum
- $H\left(-1,0\right) = \begin{vmatrix} 2e^{-\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & -2e^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -4e^{-\frac{4}{3}} < 0$

  $\Rightarrow (-1,0)$ is een zadelpunt

2.4 SEPTEMBER 2007

1. Hier krijg je de grafiek van de functie $r = \theta + \cos\theta$:



Bereken de oppervlakte van de lus. (Hint: je zal eerst moeten bepalen waar het snijpunt van de kromme ligt.)

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\theta + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\theta^2 + 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3 + 2\cos\theta + 2\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{24}\pi^3 + \frac{1}{4}\pi$$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$3x^2y'' - xy' + y = \sqrt[3]{x}$$

Homogene vergelijking: $3x^2y'' - xy' + y = 0$
Euler: stel $z = e^x$
$\Rightarrow 3\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) - \dot{y} + y = 0$
$\Rightarrow 3\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 0$
Karakteristieke vergelijking: $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t \in \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$
$\Rightarrow y_H(z) = C_1e^z + C_2e^{z/3}$
$\Rightarrow y_H(x) = C_1x + C_2\sqrt[3]{x}$
Niet–homogene vergelijking:
$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \sqrt[3]{x} \end{cases}$
Stel $y_P = z_1y_1 + z_2y_2$

$\Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} x & \sqrt[3]{x} \\ 1 & \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$z_1' = -\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x}}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt[3]{x} \\ \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x^2} & \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \dfrac{1}{2}x^{-5/3} \Rightarrow z_1 = \displaystyle\int \frac{1}{2}x^{-5/3}dx = -\frac{3}{4}x^{-2/3}$

$$z_2' = -\frac{3}{2\sqrt[3]{x}} \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt[3]{x}}{3x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2x} \Rightarrow z_2 = \int -\frac{1}{2x} dx = -\frac{1}{2} \ln x$$

$$\Rightarrow y_P = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \ln x$$

$$\Rightarrow y = y_H + y_P = C_1 x + C_2 \sqrt[3]{x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \ln x = C_1 x + C_2 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \ln x$$

3. Onderzoek de convergentie van de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$

$$\frac{1}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^2\left(n+1-n\right)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^2}$$

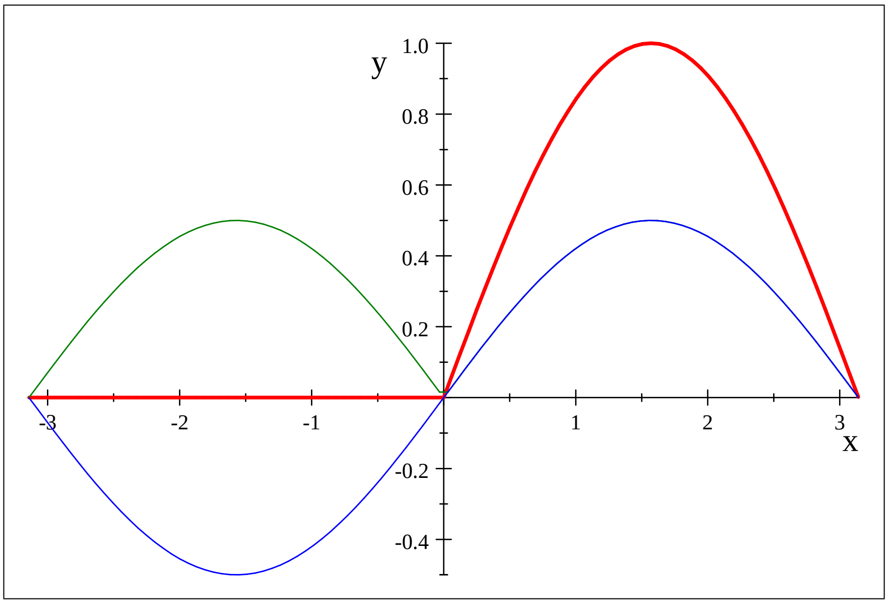
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$

Verhoudingscriterium: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$

$\Rightarrow$ De beide reeksen hebben hetzelfde convergentiegedrag als $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ dus convergent.

4. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \sin x & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$



$$\Rightarrow \begin{cases} f_E(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{2} & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases} = \dfrac{\sin|x|}{2} \\ f_O(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases} = \dfrac{\sin x}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{2} dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos x \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos nx) \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\sin(nx + x) - \sin(nx - x))\, dx$$

$$\text{* Als } n = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin x dx = \left[\frac{1}{2\pi} \sin^2 x \right]_0^\pi = 0$$

$$\text{* Als } n \neq 1 \Rightarrow b_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\cos(n+1)x}{n+1} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos \pi (n-1)}{n-1} - \frac{\cos \pi (n+1)}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1-n^2)} & \text{als} \quad n \text{ even} \\ 0 & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin nx) \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(nx - x) - \cos(nx + x))\, dx$$

$$\text{* Als } n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi} [x - \cos x \sin x]_0^\pi = \frac{1}{2}$$

$$\text{* Als } n \neq 1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi n}{1 - n^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \overset{b.o.}{=} \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)} \cos(2nx)$$

5. Onderzoek in $(0,0,0)$ de continuïteit, de (partiële) afleidbaarheid en de differentieerbaarheid van de volgende functie:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2yz^2}{x^4z^2 + y^6 + z^4} & \text{als} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{als} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \end{array}$$

Merk op dat $\lim\limits_{k \to 0} f|_{(k^3,k^4,k^6)} = \dfrac{k^{22}}{3k^{24}} \nrightarrow 0$, dus f is niet continu in $(0,0,0)$.
Verder is

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y,z) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda h_1, 0, 0) - f(0,0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda h_1, 0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0}{\lambda} = 0 \\ D_2 f(x,y,z) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0, \lambda h_2, 0) - f(0,0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0, \lambda h_2, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0}{\lambda} = 0 \\ D_3 f(x,y,z) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0, 0, \lambda h_3) - f(0,0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(0, 0, \lambda h_3)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{0}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

f is dus partieel afleidbaar in $(0,0,0)$. Ook is

$$\begin{aligned} Df\left((x,y,z)\left(h_1,h_2,h_3\right)\right) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\lambda h_1,\lambda h_2,\lambda h_3\right)-f\left(0,0,0\right)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^5 h_1^2 h_2 h_3^2}{\lambda^5\left(\lambda^2 h_1^4 h_3^2+\lambda^2 h_2^6+h_3^4\right)} \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{h_1^2 h_2 h_3^2}{\lambda^2 h_1^4 h_3^2+\lambda^2 h_2^6+h_3^4}=\frac{h_1^2 h_2}{h_3^2} \end{aligned}$$

f is dus afleidbaar in $(0,0,0)$ t.o.v. elke willekeurige richting (h_1,h_2,h_3); f is echter niet differentieerbaar in $(0,0,0)$, want niet continu.

6. Zoek de relatieve extrema en/of zadelpunten van de functie

$$f\left(x,y\right)=x^4+y^4-4xy+1$$

We bepalen eerst

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3-4y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3-4x=0 \end{aligned}$$

met andere woorden

$$\begin{cases} x^3=y \\ y^3=x \end{cases}$$

dus

$$\begin{aligned} x &= x^9 \Rightarrow x^9-x=0 \\ &\Rightarrow x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x\in\{-1,0,1\}$. Kandidaat–kritieke punten zijn dus $(-1,-1)$, $(0,0)$ en $(1,1)$
Verder berekenen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12y^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H\left(x,y\right)=144x^2y^2-16$
$H\left(-1,-1\right)=128$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1,-1\right)=12>0\Rightarrow(-1,-1)$ is een lokaal minimum
$H\left(0,0\right)=-16<0\Rightarrow(0,0)$ is een zadelpunt
$H\left(1,1\right)=128$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1,1\right)=12>0\Rightarrow(1,1)$ is een lokaal minimum