<u>Oefening 2.4: Alcoholtest</u>

Situatieschets

Een automobilist die een aanrijding veroorzaakt moet een bloedproef ondergaan. Nu blijkt dat er in Europa drie verschillende bloedproeven bestaan, elk van mekaar verschillend door gebruik te maken van andere chemische producten. De Europese minister die bevoegd is voor veiligheid in het verkeer wil deze bloedproeven vergelijken. Uit studies blijkt dat 1% van de automobilisten die een aanrijding veroorzaken onder invloed is. De drie verschillende bloedproeven hebben respectievelijk 75%, 85% en 65% kans dat het resultaat positief is als de automobilist onder invloed is. De bloedproeven geven respectievelijk met 5%, 10% en 2% kans aan dat het resultaat positief is als de automobilist niet onder invloed is.

Vragen

1. Schrijf de gegevens op in formulevorm.
2. Welke voorwaardelijke kansen kan je berekenen om de kwaliteit van de bloedproeven na te gaan? Bereken deze kansen.
3. Welke bloedproef is de beste? Wat is de algemene indruk over de kwaliteit van de drie bloedproeven? Kan je een oplossing hiervoor bedenken?

Oplossingen

1. Ω={automobilisten die een ongeval veroorzaken}
   Gebeurtenis R_1: {bloedproef 1 geeft een positief resultaat}
   Gebeurtenis R_2: {bloedproef 2 geeft een positief resultaat}
   Gebeurtenis R_3: {bloedproef 3 geeft een positief resultaat}
   Gebeurtenis I: {automobilist is onder invloed}

   Gegeven:
   $P(I)=1\% \Rightarrow P(I^C)=99\%$

   $P(R_1|I)=75\%$
   $P(R_2|I)=85\%$
   $P(R_3|I)=65\%$

   $P(R_1|I^C)=5\%$
   $P(R_2|I^C)=10\%$
   $P(R_3|I^C)=2\%$

2. Van een kwaliteitsvolle test verwachten we dat de kansen er weinig valse beschuldigingen gebeuren en dat er weinig chauffeurs onder invloed onbeboet blijven. Dit komt overeen met de kansen $P(I^C|R_i)$ voor de kans op valse beschuldigingen (niet onder invloed als positieve test is) en $P(I|R^C_i)$ voor de kans op onbeboete chauffeurs (onder invloed als negatieve test is) (i=1,2,3). Indien voor de eerste voorwaarde de kans hoog is ➔ veel valse beschuldigingen. Indien voor de tweede voorwaarde de kans hoog is ➔ veel dronken chauffeurs blijven onbeboet.

Voor het berekenen van de voorwaardelijke kansen, berekenen we eerst $P(R_i)$. Hiervoor maken we gebruik van de **stelling van de totale kans** waarbij I en I^C een partitie van Ω vormen.

$P(R_1) = P(R_1|I)P(I) + P(R_1|I^C)P(I^C)$
$P(R_1) = 0.75*0.01 + 0.05*0.99 = 0.0570$

$P(R_2) = P(R_2|I)P(I) + P(R_2|I^C)P(I^C)$
$P(R_2) = 0.85*0.01 + 0.10*0.99 = 0.1075$

$P(R_3) = P(R_3|I)P(I) + P(R_3|I^C)P(I^C)$
$P(R_3) = 0.65*0.01 + 0.02*0.99 = 0.0263$

$P(I^C|R_1) = P(R_1|I^C)P(I^C)/P(R_1) = (0.05*0.99)/0.0570 = 0.868 = 86.8\%$
$P(I^C|R_2) = P(R_2|I^C)P(I^C)/P(R_2) = (0.10*0.99)/0.1075 = 0.921= 92.1\%$
$P(I^C|R_3) = P(R_3|I^C)P(I^C)/P(R_3) = (0.02*0.99)/0.0263 = 0.753 = 75.3\%$
➔ deze voorwaardelijke kansen zijn hoog (slecht) ➔ veel valse beschuldigingen

$P(I|R^C_1) = P(R^C_1|I)P(I)/P(R^C_1) = ((1-0.75)*0.01)/(1-0.0570) = 0.003 = 0.3\%$
$P(I|R^C_2) = P(R^C_2|I)P(I)/P(R^C_2) = ((1-0.85)*0.01)/(1-0.1075) = 0.002 = 0.2\%$
$P(I|R^C_3) = P(R^C_3|I)P(I)/P(R^C_3) = ((1-0.65)*0.01)/(1-0.0263) = 0.004 = 0.4\%$
➔ deze voorwaardelijke kansen zijn laag (goed) ➔ slechts weinig dronken chauffeurs ontsnappen aan een boete

3. Als de testen een positief resultaat weergeven, zal voor bloedproef 1, de automobilist slechts in 13.2% ($=P(I|R_1)=1- P(I^C|R_1)$) van de gevallen effectief onder invloed zijn. Dit is heel laag: veel "nuchtere"chauffeurs zouden toch beboet worden. Bloedproef 2 doet nog slechter (slechts 7.9% van de positieve testen onder invloed). Bloedproef 3 scoort het best: 25% van de positieve testen komen van dronken chauffeurs. Van een goede bloedproef wordt ook verwacht dat wanneer ze een negatief resultaat geeft, de automobilist ook effectief nuchter is. Wat dat aspect betreft doen de 3 bloedproeven het goed. Meer dan 99.5% van de negatieve testen zijn afkomstig van automobilisten die nuchter zijn. Om de kwaliteit van de testen te verbeteren, moet men op zoek gaan naar een bloedproef waarvoor de kans $P(I|R_i)$ groter is of anders gezegd $P(I^C|R_i)$ kleiner is.