

HFST 21 Het Elektrische veld I : discrete ladingsverdelingen

Elektriciteit komt van het Griekse woord voor Barnsteen = Elektron.

Sommige voorwerpen trekken elkaar aan en sommige stoten elkaar af als ze opgewreven worden met zijde of dierenpels. (twee groepen)

Benjamin franklin verklaarde dit als volgt: elk voorwerp een “normale” hoeveelheid “elektriciteit” die kan overgedragen worden van het ene voorwerp op het andere bij contact: ene voorwerp heeft een overschot aan lading (excess), het andere een even groot tekort aan lading.

Franklin beschreef deze resultaten met + en -, hij koos + als de lading van glas waarover gewreven is met zijde (elektronen transfer van glas naar zijde), en – als de lading van rubber waarover gewreven is met pels.

Gelijke lading = afstoting; tegengestelde lading = aantrekking

{ Voorwerp met EXCES aan lading is NEGATIEF geladen
{ Voorwerp met TEKORT aan lading is POSITIEF geladen.

Kwantisatie van lading

- Nu weten we dat materie uit atomen bestaat die op hun beurt bestaan uit enerzijds een kern met positief geladen protonen en ongeladen neutronen en anderzijds negatief geladen elektronen. Vermits het atoom ladingsneutraal is, is de totale lading van de elektronen gelijk maar tegengesteld aan de totale positieve lading van de protonen.

- De lading van het proton stellen we voor door e en die van het elektron is dan $-e$. Het elektron en het proton hebben de kleinst gekende lading.

e = fundamentele eenheid van lading

Een willekeurige lading = Q of q

Lading is een intrinsieke eigenschap (eigen aan materiaal)

Lading is gekwantiseerd!!! Maw het kan enkel voorkomen als een geheel aantal maal de elementaire lading e maw elke lading $Q = N e$ (N = geheel getal)

(hoewel, voor vele vwpn is N zeer groot \rightarrow lading toch continue. Zoals lucht ook continue is ondanks dat het bestaat uit discrete moleculen)

Vb: wrijven met zijde over glas: $N \sim 10^{10}$ elektronen die overgaan van ene materiaal naar andere \rightarrow lading kan voorgesteld worden door continue ladingsverdeling!

Behoud van lading

Wanneer twee voorwerpen tegen elkaar gewreven worden gaan er elektronen van het ene over naar het andere, zo wordt het ene positief geladen en het andere negatief, maar de totale lading blijft wel behouden!! = wet van behoud van lading

Dit is een natuurwet die zowel op macroscopische als op atomaire schaal geldt. (netto lading van universum is constant)

SI eenheid van lading is Coulomb C, welke bepaald is in termen van de eenheid van elektrische stroom: $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ = de lading die vervoert wordt door een elektrische stroom van 1A gedurende 1s.

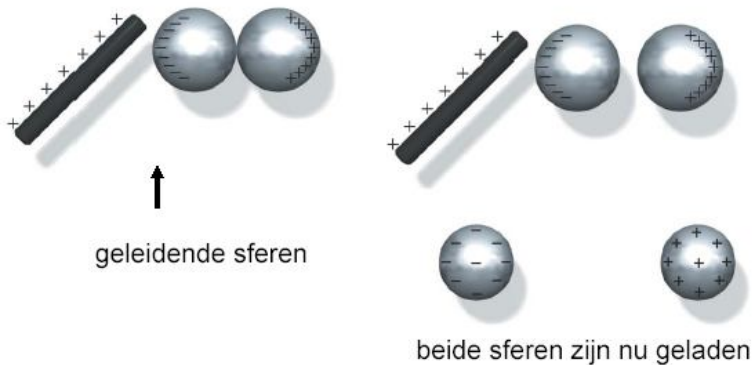
De lading van een elektron in C : $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Geleiders en isolatoren

Geleiders ("conductors") zijn materialen waarin (sommige) elektronen vrij kunnen bewegen doorheen het ganse materiaal.

Isolatoren ('insulators') zijn materialen waarin de elektronen sterk aan atomen gebonden zijn.

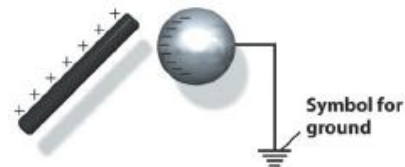
Lading door inductie



twee ongeladen metalen sferen zijn in contact. wanneer een geladen staaf in e buurt gebracht wordt van 1 van de sferen, vloeien er vrije elektronen van de ene sfeer naar de andere, naar een positief geladen staaf toe of weg van een negatief geladen staaf. Wanneer de sferen gescheiden worden voor men de geladen staaf wegneemt, dan blijven de sferen over met even grote, tegengestelde ladingen (gepolariseerd).

Aarde kan beschouwd worden als een grote geleider die een grote hoeveelheid lading voorradig heeft.

Wanneer een geleider verbonden is met de aarde zegt men dat hij "geaard" is.



De wet van Coulomb

Coulomb onderzocht de kracht tussen 2 ladingen **in rust**. Afstand tussen geladen bolletjes was groter dan afmeting van de bolletjes → bolletjes beschouwen als **puntladingen** (als mathematische entiteit) maw. zonder inwendige structuur.

De wet van Coulomb:

De kracht uitgeoefend door 1 puntlading op een andere gaat langs de lijn door de ladingen. Ze varieert invers als de vierkantswortel van de afstand en is proportioneel tot het product van de ladingen. De kracht is repulsief als de ladingen hetzelfde teken hebben en attractief als ze tegengestelde ladingen hebben.

De **elektrostatische** kracht tussen 2 puntladingen wordt gegeven door :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Kracht uitgeoefend van lading q_1 op q_2
 k = een experimentele cste = cste van coulomb = $8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

k in SI eenheden: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ϵ_0 = permitiviteit van vacuum
 $= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C/Nm}^2$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Eenheidsvector langs de verbindingslijn tussen q_1 en q_2 in de richting van q_1 naar q_2

De grootte van de kracht is $F_{12} = k \frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2}$

De kracht van q_2 op q_1 is dezelfde als die van q_1 op q_2 maar tegengesteld. Dit volgt uit de derde wet van Newton!

Gelijkenis met gravitatiewet van Newton! Maar er is slechts 1 type van massa: steeds aantrekking, elektrostatische krachten zijn veel groter dan gravitatiekrachten.

(maar tussen grote objecten speelt toch vooral gravitatiekracht een rol want grote objecten hebben evenveel positieve als negatieve ladingen, de attractieve en repulsieve elektrische krachten heffen elkaar op. De nettokracht tussen twee astronomische objecten is daarom vooral alleen gravitationele kracht.

Vergelijk gravitatiekracht met elektrostatische kracht tussen een e^- en een p^+ in H atoom:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}; F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_e m_p} = 2.27 \cdot 10^{39}$$

Kracht tgv een systeem van ladingen

In een systeem van ladingen, oefent elke lading een kracht uit op elke andere lading. De netto kracht op een lading is de vectorsom van de individuele krachten uitgeoefend op die lading door alle andere ladingen in het systeem. Dit volgt uit het principe van superpositie van krachten.

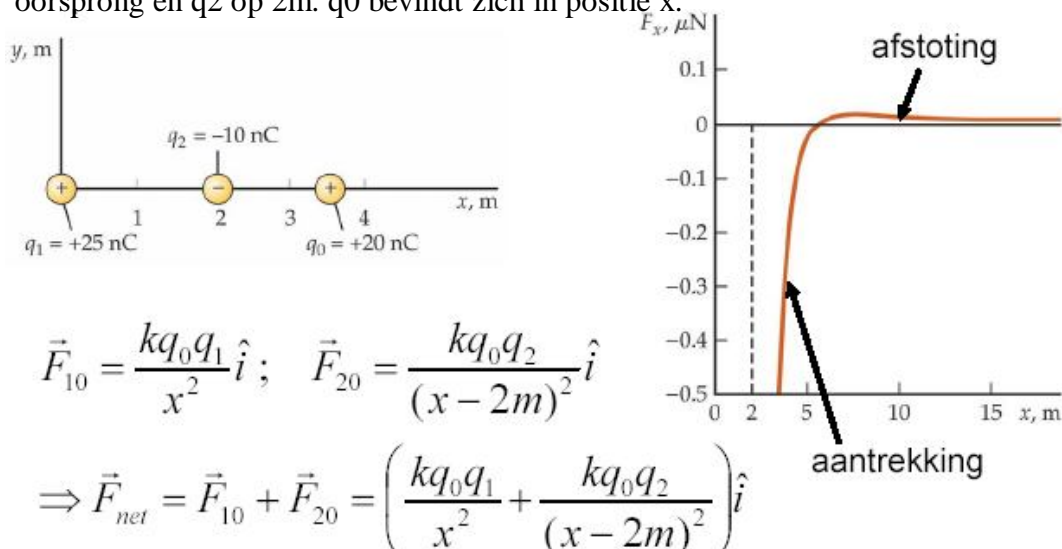
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = k \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

positie van lading q
positie van lading q_i

Als een systeem van ladingen stationair moet blijven, dan moet er een andere kracht op de ladingen werken zodat de nettokracht van alle bronnen werkend op elke lading nul is.

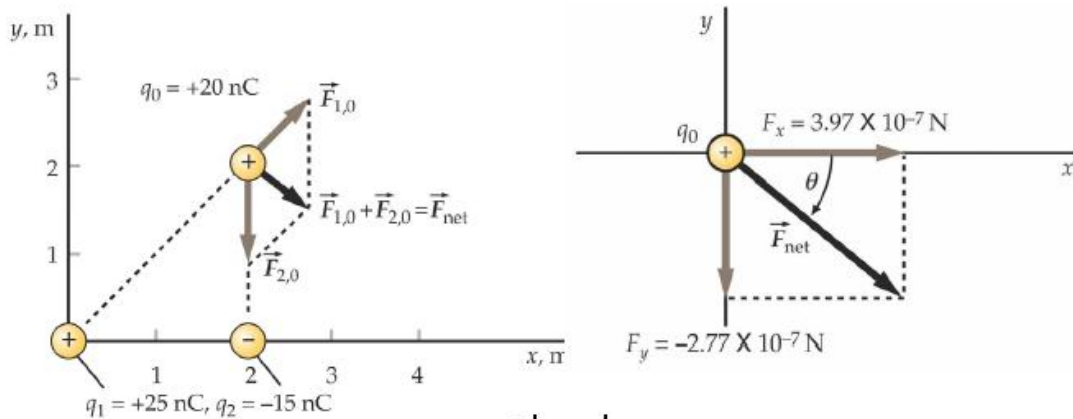
voorbeeld 1

zoek de netto kracht op q_0 tgv. q_1 en q_2 in het gebied $2m < x < \infty$. q_1 bevindt zich in de oorsprong en q_2 op $2m$. q_0 bevindt zich in positie x .



Voorbeeld 2

Nettokracht in 2 dimensies



$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} & F_{10} &= \frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2} & F_{10,x} &= F_{10,y} = F_{10} \cos 45^\circ \\ \sum F_x &= F_{10,x} + F_{20,x} & & \text{analoog voor } \vec{F}_{20} & & \\ \sum F_y &= F_{10,y} + F_{20,y} & \text{grootte netto kracht: } F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; & \text{tg } \theta &= \frac{F_y}{F_x} \end{aligned}$$

Het elektrisch veld

kracht tussen 2 ladingen : wisselwerking-vanop-afstand (“action-at-a-distance”)kracht. Hoe wordt deze kracht overgedragen ??

Hoe kan een lading een kracht uitoefenen (in vacuüm) op een andere lading waarmee het geen direct contact heeft ?

probleem !

oplossing : invoeren van nieuwe begrip : “veld”. In geval van elektrische krachten :

Elektrisch veld E.

De eerste lading creëert een elektrisch veld overal in de ruimte, en dit veld oefent een kracht uit op de tweede lading. De kracht wordt dus uitgeoefend door het veld op de plaats van de 2de lading en niet rechtstreeks door de eerste lading zelf.

Men kan aantonen dat veranderingen in het elektrisch veld zich verplaatsen zich met de lichtsnelheid c. M.a.w. wanneer de eerste lading zich verplaatst, dan verandert de kracht op de 2de lading op een afstand r pas r/c later.

Het elektrisch veld tgv. verschillende discrete ladingen in een welbepaald punt r

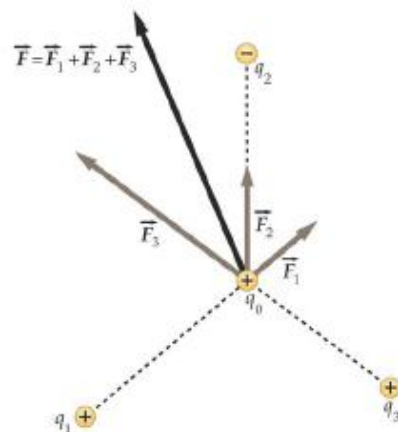
Beschouw een **kleine positieve** testlading q_0 in dit punt r en bereken de netto kracht F op q_0 tgv. deze ladingen.

Elektrisch veld:
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}$$

- q_0 moet klein zijn want in principe zorgt de aanwezigheid van q_0 voor een herverdeling van de lading in zijn omgeving maw. het oorspronkelijke veld verandert.

- Uit het superpositiebeginsel der krachten volgt ook de superpositie van elektrische velden : elk der ladingen q_1, q_2, q_3 zorgt voor een elektrisch veld in punt r. Het totale veld in r is dan :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \vec{E}_3(\vec{r})$$



In het geval het elektrische veld niet afhangt van de tijd spreken we van een elektrostatisch veld.

De SI eenheid van het elektrisch veld: N/C

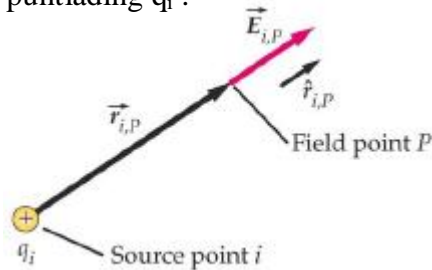
Gegeven een ladingsverdeling q_1, q_2, \dots dan kunnen we in elk punt van de ruimte E bepalen. E is een (vector)functie van de plaats:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow E_x = E_x(\vec{r}); E_y = E_y(\vec{r}); E_z = E_z(\vec{r})$$

Het elektrische veld te wijten aan een puntlading q_i :

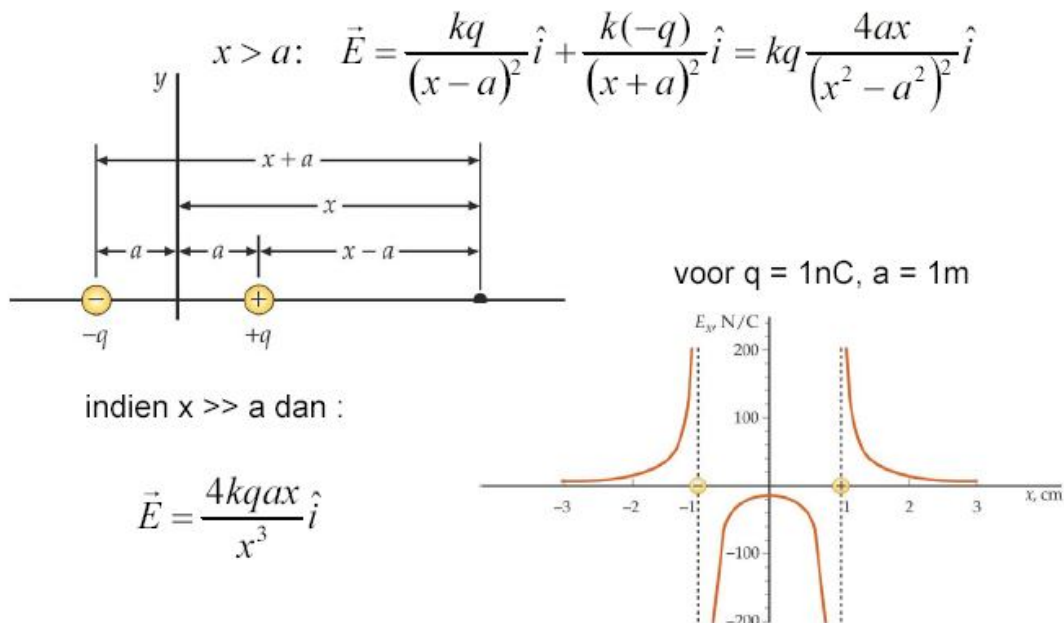
$$\vec{E}_{i,P} = \frac{kq_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P}$$

eenheidsvector in de richting van de lading naar het "veldpunt" P.



Elektrisch veld te wijten aan een systeem van puntladingen: som van formule hierboven voor elke lading in het systeem.

Voorbeeld: het elektrische veld tgv twee elektrische ladingen op de as.

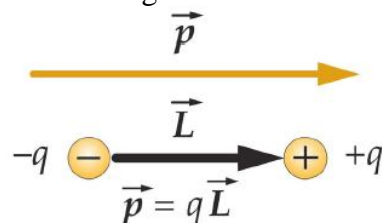


De elektrische dipool

Een systeem van twee gelijk en tegengestelde ladingen q zeer dicht bij elkaar op een kleine afstand L noemt men een elektrische dipool. Zijn sterkte en orientatie worden beschreven door het elektrische dipoolmoment, welke een vector is die van de negatieve naar de positieve lading wijst en grootte qL heeft.

$$\vec{p} = q\vec{L}$$

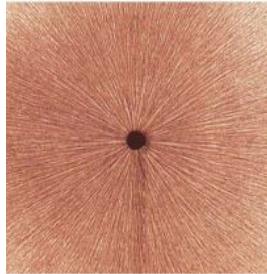
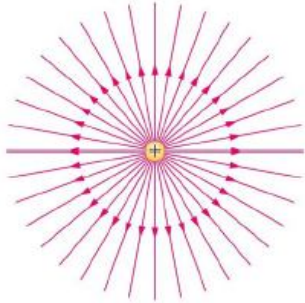
Ver weg van de dipool valt het E af als: $E \approx \frac{2kp}{r^3}$



Elektrische veldlijnen

In elk punt van de ruimte tekenen we de E-veld vector en tekenen we lijnen waaraan de E-veldvector **rakend** is. Deze lijnen noemen we krachtlijnen of elektrische veldlijnen. Deze veldlijnen geven dus de richting aan van de kracht op een positieve testlading.

Voorbeeld van een puntlading:

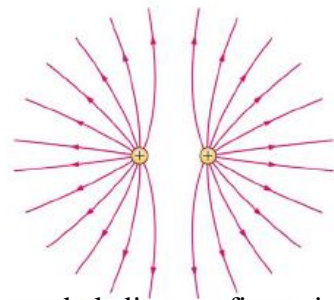


De ruimte tussen de lijnen geeft de sterkte van het Eveld weer. Naarmate we verder van de lading weg gaan, wordt het veld zwakker en liggen de lijnen verder uit elkaar.

Beschouw een sferisch oppervlak met straal r met zijn middelpunt op de lading. Zijn oppervlak is $4\pi r^2$. Dus, als r afneemt, zo neemt ook de dichtheid van de veldlijnen (het aantal lijnen per oppervlakte-eenheid) af met $1/r^2$, de zelfde mate van afname als E .

Voorbeeld van twee positieve ladingen:

Deze figuur geeft de elektrische veldlijnen weer voor twee even grote positieve puntladingen q op een kleine afstand van elkaar. In de nabijheid van elke lading, is het veld benaderend het gevolg van die lading alleen omdat de andere lading te ver weg is. Hier uit volgt dat de veldlijnen bij elke lading radiaal zijn, met evenveel spatie tussen de lijnen.



omdat de lading gelijk zijn, tekenen we een gelijk aantal lijnen afkomstig van elke lading. Op heel grote afstand, zijn de details van de lading configuratie niet belangrijk en lijkt het systeem een puntlading van grootte $2q$.

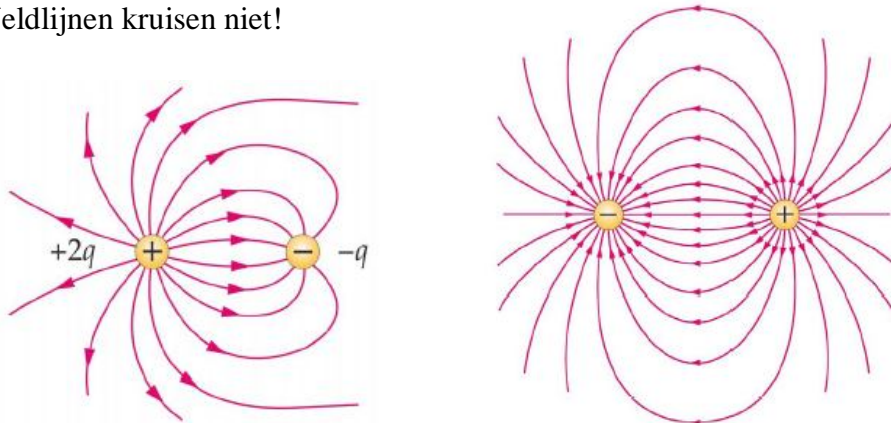
We zien ook dat de dichtheid van veldlijnen tussen de twee ladingen klein is vergeleken met de dichtheid van de lijnen erbuiten. Dit wilt zeggen dat het Eveld daar dus zwakker is.

We kunnen deze redeneringen gebruiken om de Eveldlijnen voor eender welk systeem te tekenen. Zeer dicht bij elke lading, zijn de veldlijnen op gelijke afstand en komen ze radiaal uit of gaan ze radiaal in de lading, afhankelijk van het teken van de lading. Heel ver van alle ladingen, is de gedetailleerde structuur van het systeem niet belangrijk zodat de veldlijnen lijken op die van een enkele puntlading die de nettolading van het systeem draagt.

De regels voor het tekenen van Eveld lijnen kunnen als volgt samengevat worden:

- Elektrische veldlijnen beginnen bij positieve ladingen en eindigen bij negatieve ladingen
- De lijnen worden getekend op gelijke afstand als ze uit of in een geïsoleerde lading komen.
- Het aantal lijnen dat uit of in een lading komen is proportioneel tot de grootte van die lading.
- De dichtheid van de lijnen in eender welk punt is proportioneel tot de grootte van het veld in dat punt.

- Op grote afstand van het systeem van ladingen, zijn de veldlijnen radiaal en op gelijke afstand, alsof ze van een puntlading zijn met een lading gelijk aan de nettolading van het systeem.
- Veldlijnen kruisen niet!



de conventie tussen de elektrische veldlijnen en het elektrische veld gaat op omdat het Eveld varieert als $1/r^2$. omdat het gravitatieveld van een puntmassa ook varieert als $1/r^2$, zijn veldlijnen ook nuttig bij het voorstellen van het gravitatieveld.

Beweging van (punt)ladingen in een elektrisch veld

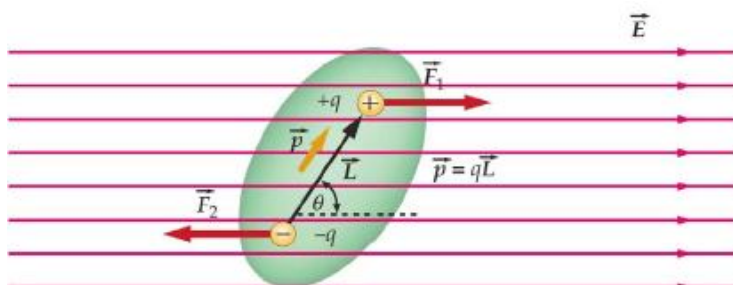
Wanneer een deeltje met lading q in een elektrisch veld E geplaatst wordt, dan ondervindt het een kracht qE . Als de elektirsche kracht de enige belangrijke kracht is die op het deeltje werkt, dan heeft het deeltje een versnelling:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

(als dit deeltje een elektron is, dan is zijn snelheid in een elektrisch veld vaak een significante fractie van de lichtsnelheid. In zulke gevallen, moet Newton's wet van beweging aangepast worden door Einstein's speciale relativiteits theorie.)

Elektrische dipolen in een elektrisch veld.

Een uniform Eveld oefent geen netto kracht uit op een dipool, maar tgv het Eveld is er wel een moment (torque) dat ervoor zorgt dat de dipool zich richt volgens het Eveld.



We zien dat het moment berekend voor de positie van ieder van de ladingen een grootte $F_1 L \sin \theta = qEL \sin \theta = pE \sin \theta$ heeft. De richting van het moment is in het papier zodat het de dipoolmoment p roteert in de richting van E . het moment kan conventioneel geschreven worden als het kruisproduct van het dipoolmoment p en het elektrische veld E .

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Wanneer de dipool gedraaid wordt over $d\theta$, dan verricht het Eveld arbeid:

$$dW = \underset{\uparrow}{-}\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta \quad \text{cf. Hfdst. 9}$$

-teken hier ingevoerd om aan te geven dat moment een *toename* van θ tegenwerkt.

Als we de negatieve equivalent van deze arbeid gelijk stellen aan de potentiële NRG:

$$dU = -dW = pE \sin \theta d\theta$$

Integreren:

$$\Rightarrow U = -pE \cos \theta + U_0$$

we kiezen $U_0 = 0$ voor $\theta = 90^\circ$

Dan vinden we de potentiële NRG van een dipool in een elektrisch veld:

$$U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

- sommige moleculen zoals H₂O hebben een permanent elektrisch dipoolmoment tgv. de inhomogene ladingsverdeling. We noemen dit **polaire** moleculen.
- microgolfovens maken gebruik van dit dipoolmoment van water. Microgolven hebben (net als alle EM golven) een variërend E-veld maw. er wordt steeds een moment uitgeoefend op de el. dipolen van de watermoleculen in het eten. De rotationele kinetische energie van de moleculen neemt snel toe : opwarmen eten.
- Niet-polaire of apolaire moleculen hebben geen permanent dipoolmoment, maar wanneer geplaatst in een E-veld treedt er een scheiding op van de positieve en negatieve lading in de molecule. bv. apolaire molecule in veld van + puntlading : elektronen van moleculen worden aangetrokken en + nucleus wordt afgestoten. In de molecule wordt dus een dipool **geïnduceerd**. Men spreekt dan ook van **geïnduceerde** dipolen.
- Deze dipolen richten zich volgens de veldlijnen.
- wanneer een apolaire molecule in een niet-homogeen E-veld wordt geplaatst dan ondervindt deze een netto kracht (**vraag : waarom ?**) en wordt ze aangetrokken of afgestoten door dit Eveld.

