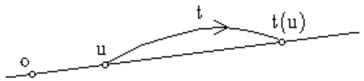
Eigenwaarden

Werner Peeters

Universiteit Antwerpen

1. Defintíes

$(\mathbb{R}, \mathcal{V}, +)$, t lineaire transformatie



$\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{o}$ is een *eigenvector* van t met eigenwaarde $\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} : t(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$

$E_\lambda = \{u \in \mathcal{V} : t(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}\}$

$\operatorname{Spec} t = \{\lambda \in \mathbb{R} : E_\lambda \supsetneqq \{\overrightarrow{o}\}\}$

Stelling (hoofdkenmerk)

$\lambda \in \operatorname{Spec} t \Leftrightarrow \det(t - \lambda e) = 0$

- *algebraïsche multipliciteit* = multipliciteit als nulpunt van de vergelijking $\det(T - \lambda E) = 0$
- *meetkundige multipliciteit* = dimensie van E_λ

meetkundige $\leq$ algebraïsche

Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \mathrm{Spec}\, o = \{0\}$

Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \operatorname{Spec} o = \{0\}$
2. eenheidstransformatie $e \Rightarrow \operatorname{Spec} e = \{1\}$

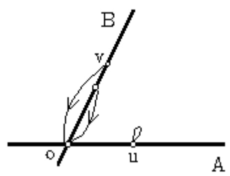
Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \operatorname{Spec} o = \{0\}$
2. eenheidstransformatie $e \Rightarrow \operatorname{Spec} e = \{1\}$
3. lineaire homothetie $\alpha e \Rightarrow \operatorname{Spec} \alpha e = \{\alpha\}$

Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \operatorname{Spec} o = \{0\}$
2. eenheidstransformatie $e \Rightarrow \operatorname{Spec} e = \{1\}$
3. lineaire homothetie $\alpha e \Rightarrow \operatorname{Spec} \alpha e = \{\alpha\}$
4. Lineaire parallelprojectie

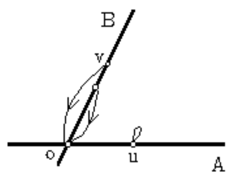
a. op A, evenwijdig met $B \Rightarrow \operatorname{Spec} p_A^B = \{0, 1\}$



Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \operatorname{Spec} o = \{0\}$
2. eenheidstransformatie $e \Rightarrow \operatorname{Spec} e = \{1\}$
3. lineaire homothetie $\alpha e \Rightarrow \operatorname{Spec} \alpha e = \{\alpha\}$
4. Lineaire parallelprojectie

a. op A, evenwijdig met $B \Rightarrow \operatorname{Spec} p_A^B = \{0, 1\}$

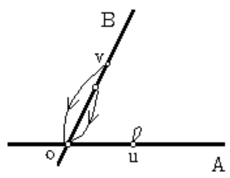


b. op α, evenwijdig met $A \Rightarrow \operatorname{Spec} p_\alpha^A = \{1, 1, 0\}$

Voorbeelden

1. nultransformatie $o \Rightarrow \operatorname{Spec} o = \{0\}$
2. eenheidstransformatie $e \Rightarrow \operatorname{Spec} e = \{1\}$
3. lineaire homothetie $\alpha e \Rightarrow \operatorname{Spec} \alpha e = \{\alpha\}$
4. Lineaire parallelprojectie

a. op A, evenwijdig met $B \Rightarrow \operatorname{Spec} p_A^B = \{0, 1\}$



b. op α, evenwijdig met $A \Rightarrow \operatorname{Spec} p_\alpha^A = \{1, 1, 0\}$

c. op A, evenwijdig met $\alpha \Rightarrow \operatorname{Spec} p_A^\alpha = \{1, 0, 0\}$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

$E_{-1} : \begin{pmatrix} 0-(-1) & 2 \\ 1 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

$E_{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

$E_{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$

Voorbeelden

5. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

$E_{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$

$E_2 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$E_1 : \begin{pmatrix} 1-1 & 8 & 4 \\ 0 & -7-1 & -4 \\ 0 & 8 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8y + 4z = 0 \\ -8y - 4z = 0 \\ 8y + 4z = 0 \end{cases}$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y + z = 0$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y + z = 0$$

$$E_{-3} : \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y + z = 0$$

$$E_{-3} : \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 8y + 4z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ 8y + 8z = 0 \end{cases}$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y + z = 0$$

$$E_{-3} : \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Voorbeelden

6. $T = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & 4 \\ 0 & -7-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (dubbel) en $\lambda_2 = -3$

$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y + z = 0$

$E_{-3} : \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 19\lambda + 30 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 19\lambda + 30 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 3$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 19\lambda + 30 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 3$

$$E_{-5} : \begin{pmatrix} 11 & 10 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 19\lambda + 30 = (\lambda+5)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 3$

$$E_{-5} : \begin{pmatrix} 11 & 10 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 4 & 10 & -12 \\ -2 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

7. $T = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -12 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 19\lambda + 30 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$ en $\lambda_3 = 3$

$$E_{-5} : \begin{pmatrix} 11 & 10 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 4 & 10 & -12 \\ -2 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} 3 & 10 & -12 \\ -2 & -6 & 6 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ (dubbel)

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ (dubbel)

$$E_1 : \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -6 \\ 8 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y - 5z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ (dubbel)

$$E_1 : \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -6 \\ 8 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y - 5z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -6 \\ 8 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 5z = 0 \\ 6x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

8. $T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -6 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$ (dubbel)

$$E_1 : \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -6 \\ 8 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y - 5z = 0 \\ 6x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -6 \\ 8 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 5z = 0 \\ 6x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{mult}_{alg}(E_2) = 2$ maar $\mathrm{mult}_{meetk}(E_2) = 1!$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 3\right)\left(\lambda - 4\right)\left(\lambda + 1\right) = 0$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-4\right)\left(\lambda+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} 3-3 & -6 & 3 \\ -4 & -15-3 & 7 \\ -8 & -38 & 18-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ -4 & -18 & 7 \\ -8 & -38 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{cases} -6y + 3z = 0 \\ -4x - 18y + 7z = 0 \\ -8x - 38y + 15z = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{cases} -6y + 3z = 0 \\ -4x - 18y + 7z = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 3\right)\left(\lambda - 4\right)\left(\lambda + 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{cases} -6y + 3z = 0 \\ -4x - 18y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_4 : \begin{pmatrix} 3-4 & -6 & 3 \\ -4 & -15-4 & 7 \\ -8 & -38 & 18-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_4 : \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 \\ -4 & -19 & 7 \\ -8 & -38 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_4 : \begin{cases} -x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 19y + 7z = 0 \\ -8x - 38y + 14 = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_4 : \begin{cases} -x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 19y + 7z = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_4 : \begin{cases} -x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 19y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} : \begin{pmatrix} 3+1 & -6 & 3 \\ -4 & -15+1 & 7 \\ -8 & -38 & 18+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} : \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -4 & -14 & 7 \\ -8 & -38 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} : \begin{cases} 4x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 14y + 7z = 0 \\ -8x - 38y + 19z = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} : \begin{cases} 4x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 14y + 7z = 0 \end{cases}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} : \begin{cases} 4x - 6y + 3z = 0 \\ -4x - 14y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(T - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-4\right)\left(\lambda+1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = ST'S^{-1}$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = ST'S^{-1} \Rightarrow T' = S^{-1}TS$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T = ST'S^{-1} \Rightarrow T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisatie

2.1. Equispectraliteit

T en T' equispectraal $\Leftrightarrow \exists S : T = ST'S^{-1}$

Stelling

Als T en T' op $\mathcal{V}$ equispectraal zijn, dan hebben ze dezelfde verzameling eigenwaarden.

Voorbeeld

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 3 \\ -4 & -15-\lambda & 7 \\ -8 & -38 & 18-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} T = \{-1, 3, 4\}$

$$E_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stel $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T = ST'S^{-1} \Rightarrow T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & -15 & 7 \\ -8 & -38 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Jordanblokken en Jordanmatrices

Jordanblok

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanmatrix = diagonale “som” van Jordanblokken

$$
J_{\lambda_1}^{n_1} \oplus J_{\lambda_2}^{n_2} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_k}^{n_k} =
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k
\end{array}\right)
$$

Voorbeelden

1. $J^2_{3+\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $J_{3+\sqrt{2}}^2 = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $J_2^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $J^2_{3+\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $J^3_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $J^4_{-5} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $J_{3+\sqrt{2}}^{2} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $J_{2}^{3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $J_{-5}^{4} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

4. $J_{-1}^{2} \oplus J_{4}^{3} = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

Voorbeelden

1. $J^2_{3+\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2. $J^3_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $J^4_{-5} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

4. $J^2_{-1} \oplus J^3_4 = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$

Voorbeelden

5. $J_4^2 \oplus J_3^1 \oplus J_3^2 \oplus J_{1-\sqrt{2}}^2 = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right)$

Voorbeelden

5. $J_4^2 \oplus J_3^1 \oplus J_3^2 \oplus J_{1-\sqrt{2}}^2 = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right)$

6. $J_4^2 \oplus J_3^3 \oplus J_{1-\sqrt{2}}^2 = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right)$

Voorbeelden

5. $J_4^2 \oplus J_3^1 \oplus J_3^2 \oplus J_{1-\sqrt{2}}^2 = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right)$

6. $J_4^2 \oplus J_3^3 \oplus J_{1-\sqrt{2}}^2 = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right)$

7. Merk dus op dat $J_\lambda^1 \oplus J_\lambda^2 \neq J_\lambda^3$!

Stelling

1. *Een Jordanblok* $J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$ *heeft als* n*–voudige eigenwaarde* λ.

2. *Een Jordanmatrix heeft als eigenwaarde de collectie eigenwaarden van de onafhankelijke Jordanblokken.*

Voorbeelden

1. $J_2^2 \oplus J_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $J_2^2 \oplus J_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $J_2^2 \oplus J_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda - 2\right)^2 \left(\lambda - 1\right)^3$$

Voorbeelden

1. $J_2^2 \oplus J_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda-2\right)^2\left(\lambda-1\right)^3$$

2. Alle volgende Jordanmatrices hebben als vierdubbele eigenwaarde 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \ldots$$

2.3. Veralgemeende eigenruimte

Zij t een lineaire afbeelding op $\mathcal{V}$.

$$\widetilde{E_\lambda} := \left\{ x \in \mathcal{V} : \exists j \in \mathbb{N}_0 : (t - \lambda\,\mathrm{id})^j\,(x) = o \right\}$$

waarbij $(t - \lambda\,\mathrm{id})^j = \underbrace{(t - \lambda\,\mathrm{id}) \circ (t - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \ldots \circ (t - \lambda\,\mathrm{id})}_{j \text{ keer}}$.

$\widetilde{E_\lambda}$ noemen we de *veralgemeende eigenruimte* met eigenwaarde λ, en de vectoren een *veralgemeende eigenvector*.
Als $(t - \lambda\,\mathrm{id})^j\,(x) = o$ dan is $(t - \lambda\,\mathrm{id})^k\,(x) = o$ voor alle $k > j$;
Als $(t - \lambda\,\mathrm{id})^j\,(x) = o$ maar $(t - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\,(x) \neq o$ dan noemen we x een *veralgemeende eigenvector van orde* j.
Opmerking: $E_\lambda \subseteq \widetilde{E_\lambda}$.

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_1 = \mathrm{Ker}\,(T - 1E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_1 = \mathrm{Ker}\,(T - 1E) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(T-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}\,(T-E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_1 = \mathrm{Ker}\,(T - 1E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \ \mathrm{Ker}\,(T-E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \ \mathrm{Ker}\,(T-E)^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_1 = \mathrm{Ker}\,(T - 1E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \ \mathrm{Ker}\,(T-E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \ \mathrm{Ker}\,(T-E)^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \widetilde{E_1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk op dat de $\mathrm{mult}_{alg}(E_1) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(E_1) = 1$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk op dat de $\operatorname{mult}_{alg}(E_1) = 2 > \operatorname{mult}_{meetk}(E_1) = 1$

$$E_1 = \operatorname{Ker}(T - 1E) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

2. $T=\begin{pmatrix}-6 & 7 & 9\\ -15 & 16 & 19\\ 8 & -8 & -9\end{pmatrix} \Rightarrow \det(T-\lambda E)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

Merk op dat de $\operatorname{mult}_{alg}(E_1)=2>\operatorname{mult}_{meetk}(E_1)=1$

$$E_1=\operatorname{Ker}(T-1E)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-7 & 7 & 9\\ -15 & 15 & 19\\ 8 & -8 & -10\end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2=\begin{pmatrix}-7 & 7 & 9\\ -15 & 15 & 19\\ 8 & -8 & -10\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}16 & -16 & -20\\ 32 & -32 & -40\\ -16 & 16 & 20\end{pmatrix}$$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk op dat de $\mathrm{mult}_{alg}(E_1) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(E_1) = 1$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(T - 1E) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2 = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & -20 \\ 32 & -32 & -40 \\ -16 & 16 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T-E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

2. $T=\begin{pmatrix}-6&7&9\\-15&16&19\\8&-8&-9\end{pmatrix}\Rightarrow\det(T-\lambda E)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow E_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ en $E_{-1}:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Merk op dat de $\operatorname{mult}_{alg}(E_1)=2>\operatorname{mult}_{meetk}(E_1)=1$

$$E_1=\operatorname{Ker}(T-1E)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-7&7&9\\-15&15&19\\8&-8&-10\end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2=\begin{pmatrix}-7&7&9\\-15&15&19\\8&-8&-10\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}16&-16&-20\\32&-32&-40\\-16&16&20\end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{Ker}(T-E)^2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\operatorname{Ker}(T-E)^2=\widetilde{E_1}:4x-4y-5z=0$$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk op dat de $\mathrm{mult}_{alg}(E_1) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(E_1) = 1$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(T - 1E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(T - E)^2 = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & -20 \\ 32 & -32 & -40 \\ -16 & 16 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T - E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T - E)^2 = \widetilde{E_1} : 4x - 4y - 5z = 0$$

Merk op: $\begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 9 \\ -15 & 16 & 19 \\ 8 & -8 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(T - \lambda E) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0$

$\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Merk op dat de $\mathrm{mult}_{alg}(E_1) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(E_1) = 1$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(T - 1E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(T-E)^2 = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & -20 \\ 32 & -32 & -40 \\ -16 & 16 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T-E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T-E)^2 = \widetilde{E_1} : 4x - 4y - 5z = 0$$

Merk op: $\begin{pmatrix} -7 & 7 & 9 \\ -15 & 15 & 19 \\ 8 & -8 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ is veralgemeende eigenvector van orde 2

Stelling

1. *Voor alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *is* $\widetilde{E_\lambda}$ *een deelvectorruimte van* $\mathcal{V}$.
2. $\widetilde{E_\lambda}$ *is strikt groter dan de nulruimte als en slechts als* λ *een eigenwaarde van* t *is.*

Stelling

1. *Voor alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *is* $\widetilde{E_\lambda}$ *een deelvectorruimte van* $\mathcal{V}$.
2. $\widetilde{E_\lambda}$ *is strikt groter dan de nulruimte als en slechts als* λ *een eigenwaarde van* t *is.*

Definitie (diagonalisatie)

S is een *diagonalisatie* van $T \Leftrightarrow T = S^{-1}T'S$ met T' een Jordanmatrix

Afhankelijk van zowel de meetkundige als de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarden

Afhankelijk van zowel de meetkundige als de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarden

- $\forall\lambda$ met $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda) = \mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) = k \Rightarrow$ in T' een Jordanblok

$$\underbrace{J_\lambda \oplus J_\lambda \oplus ... \oplus J_\lambda}_{k \text{ keer}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

Afhankelijk van zowel de meetkundige als de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarden

- $\forall\lambda$ met $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda) = \mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) = k \Rightarrow$ in T' een Jordanblok

$$\underbrace{J_\lambda \oplus J_\lambda \oplus ... \oplus J_\lambda}_{k \text{ keer}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

- $\forall\lambda$ met $\mathrm{mult}_{alg}(\lambda) = k$ en $\mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) = l < k \Rightarrow$ in T' een Jordanblok

$$J_\lambda^{k-l+1} \oplus \underbrace{J_\lambda \oplus J_\lambda ... \oplus J_\lambda}_{l-1 \text{ keer}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

Uiteindelijke Jordanmatrix = som van de Jordanblokken.

Uiteindelijke Jordanmatrix = som van de Jordanblokken.
Constructie S aan de hand van de eigenvectoren

Uiteindelijke Jordanmatrix = som van de Jordanblokken.

Constructie S aan de hand van de eigenvectoren

- $\mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda) \Rightarrow$ genoeg lineair onafhankelijke eigenvectoren

Uiteindelijke Jordanmatrix = som van de Jordanblokken.
Constructie S aan de hand van de eigenvectoren

- $\mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) = \mathrm{mult}_{alg}(\lambda) \Rightarrow$ genoeg lineair onafhankelijke eigenvectoren
- $\mathrm{mult}_{meetk}(\lambda) < \mathrm{mult}_{alg}(\lambda) \Rightarrow$ eigenvectoren kiezen, langs rechts aanvullen met veralgemeende eigenvectoren die op de eigenvectoren in kwestie worden afgebeeld.

Voorbeelden

1. Allemaal verschillende reële eigenwaarden

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. Allemaal verschillende reële eigenwaarden

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda - 60 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

Voorbeelden

1. Allemaal verschillende reële eigenwaarden

$$T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 47\lambda - 60 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } E_5 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. Allemaal verschillende reële eigenwaarden

$$T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3-12\lambda^2+47\lambda-60=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)=0$$

$$\Rightarrow E_3=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_4:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ en } E_5:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T'=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Eén eigenwaarde met algebraïsche en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eén eigenwaarde met algebraïsche en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2 = 0$$

2. **Eén eigenwaarde met algebraïsche en meetkundige multipliciteit 2**

$$T=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3-10\lambda^2+33\lambda-36=(\lambda-4)(\lambda-3)^2=0$$

$\Rightarrow E_3=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_4:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. **Eén eigenwaarde met algebraïsche en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{mult}_{alg}(3) = \mathrm{mult}_{meetk}(3) = 2$

2. **Eén eigenwaarde met algebraïsche en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } E_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mult}_{alg}(3) = \mathrm{mult}_{meetk}(3) = 2$$

$$\Rightarrow T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **en** $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **met** $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **en** $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **met** $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1

$$T=\begin{pmatrix}9&-3&-7\\2&1&-2\\7&-3&-5\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

$\Rightarrow E_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $E_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2)=2>\mathrm{mult}_{meetk}(2)=1$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}\,(T-2\cdot E)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}7&-3&-7\\2&-1&-2\\7&-3&-7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}7&-3&-7\\2&-1&-2\\7&-3&-7\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-6&3&6\\-2&1&2\\-6&3&6\end{pmatrix}\Rightarrow\mathrm{Ker}\,(T-2\cdot E)^2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}7&-3&-7\\2&-1&-2\\7&-3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}7&-3&-7\\2&-1&-2\\7&-3&-7\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3&-7\\2&-1&-2\\7&-3&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ met $e_3 \in E_1, e_1 \in E_2$ en $e_2 \in \widetilde{E_2}$ met $(T - 2E)(e_2) = e_1$

3. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 2 maar meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **en** $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **met** $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 2 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **met** $e_3 \in E_1, e_1 \in E_2$ **en** $e_2 \in \widetilde{E_2}$ **met** $(T - 2E)(e_2) = e_1$

$$\Rightarrow T' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ met } \mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ met } \mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e_2$ niet lineair afhankelijk van de voorgaande twee, bijvoorbeeld $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e_2$ niet lineair afhankelijk van de voorgaande twee, bijvoorbeeld $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e_2$ niet lineair afhankelijk van de voorgaande twee, bijvoorbeeld $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e_2$ niet lineair afhankelijk van de voorgaande twee, bijvoorbeeld $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 2

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0$$

$\Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 2$

$$\Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T - 2 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e_2$ niet lineair afhankelijk van de voorgaande twee, bijvoorbeeld $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

5. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\operatorname{mult}_{alg}(2) = 3 > \operatorname{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(T + 3 \cdot E) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

5. Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\operatorname{mult}_{alg}(2) = 3 > \operatorname{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(T + 3 \cdot E) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T=\begin{pmatrix}-12 & 4 & -9\\ 4 & -5 & 4\\ 11 & -5 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27=(\lambda+3)^3=0$$

$$E_{-3}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\text{ met } \mathrm{mult}_{alg}\,(2)=3>\mathrm{mult}_{meetk}\,(2)=1$$

$$e_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}\,(T+3\cdot E)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-9 & 4 & -9\\ 4 & -2 & 4\\ 11 & -5 & 11\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-9 & 4 & -9\\ 4 & -2 & 4\\ 11 & -5 & 11\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\mathrm{Ker}\,(T+3\cdot\lambda E)^2:\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, en

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **met** $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, en

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\text{mult}_{alg}(2) = 3 > \text{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T + 3 \cdot E) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \text{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ Kies $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3$

$$S = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ Kies $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^3$

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cdot & -9 & 0 \\ \cdot & 4 & 0 \\ \cdot & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\operatorname{mult}_{alg}(2) = 3 > \operatorname{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(T + 3 \cdot E) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \operatorname{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ Kies $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3$

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda+3)^3 = 0$$

$$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ met } \mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \text{Kies} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(T + 3 \cdot \lambda E)^3$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Eén eigenwaarde met algebraïsche multipliciteit 3 en meetkundige multipliciteit 1**

$$T = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = (\lambda + 3)^3 = 0$$

$E_{-3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\mathrm{mult}_{alg}(2) = 3 > \mathrm{mult}_{meetk}(2) = 1$

$$e_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot E) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -9 & 4 & -9 \\ 4 & -2 & 4 \\ 11 & -5 & 11 \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\,(T + 3 \cdot \lambda E)^3 = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T' = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -12 & 4 & -9 \\ 4 & -5 & 4 \\ 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$