Differentiaalvergelijkingen

Definitie: De meest algemene vorm van een gewone differentiaalvergelijking (DV) van orde n voor een (onbekende) functie y wordt gegeven door

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

met $F : J \times I_0 \times I_1 \times \ldots I_n \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$,
waarbij het oplossen van de DV neerkomt op het vinden van alle mogelijke functies $y(x)$ die aan de DV voldoen. Hierbij is $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ een functie die minstens n maal differentieerbaar is op I en zodanig dat $\forall x \in I$ geldt dat

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

De **orde** van een DV is de hoogste orde van afleiding.
De verzameling van alle oplossingen voor een DV noemt met de **algemene oplossing**. Bevat de oplossing n reële parameters, dan spreken we van een n**-parameterfamilie van oplossingen**. Een oplossing die niet tot de familie van oplossingen behoort, is een **singuliere oplossing**, e.g. het wegdelen van een factor die 0 kan worden. Voert men een randvoorwaarde in waaraan moet voldaan zijn, dan bekomt men een **particuliere oplossing**.
De **graad** van een DV is de hoogste macht waarin de hoogste afgeleide voorkomt.

Differentiaalvergelijkingen van orde 1 en graad 1

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y) \text{ gegeven.}$$

Zoek alle functies $y(x)$ zodat $\frac{dy(x)}{dx} = F(x, y(x))$.

1. Scheiden der veranderlijken:

$$F(x, y) = g(x)h(y).$$

Oplossingsmethode:

- Schrijf $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, of nog, $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.
- Integreer beide leden: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$.
- De oplossing is van de vorm $H(y) = G(x)$+constante.

Voorbeelden:

- $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y-1)}{x^2+1}$ waarbij $h(y) = y - 1$ en $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y-1} = \frac{2xdx}{x^2+1}$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2xdx}{x^2+1}$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} \ln|y-1| = \ln|x^2+1| + c$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} e^{\ln|y-1|} = e^{\ln|x^2+1|+c}$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} |y-1| = K|x^2+1|$ met $K = e^c \in \mathbb{R}_0^+$
$\overset{y\neq 1}{\Longrightarrow} y - 1 = \pm K(x^2+1)$
$\Rightarrow y = 1 + K'(x^2+1)$ met $K' \in \mathbb{R}$.

- $y' = y$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$
$\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} \int \frac{dy}{y} = \int dx$
$\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} \ln|y| = x + c$ met $c \in \mathbb{R}$
$\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} |y| = Ke^x$ met $K = e^c \in \mathbb{R}_0^+$
$\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} y = Ke^x$ met $K \in \mathbb{R}_0$
$\Rightarrow y = ce^x$ met $c \in \mathbb{R}$.

- $\frac{dx}{dt} = t\sqrt{1-x^2}$
$\overset{x^2\neq 1}{\Longrightarrow} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int tdt$
$\overset{x\neq \pm 1}{\Longrightarrow} \arcsin(x) = \frac{t^2}{2} + c$ met $c \in \mathbb{R}$ en $\frac{t^2}{2} + c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\Rightarrow x = \sin(\frac{t^2}{2} + c)$ met $c \in \mathbb{R}$ en $\frac{t^2}{2} + c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow x = \sin(\frac{t^2}{2} + c)$ met $c \in \mathbb{R}, t^2 \in [-\pi - 2c, \pi - 2c]$ en $c < \frac{\pi}{2}$.

2. Homogene differentiaalvergelijking van orde n:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y),$$

met $\lambda \in \mathbb{R}$.

Oplossingsmethode:

- Schrijf $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, of nog, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, waarbij $P(x, y)$ en $Q(x, y)$ allebei homogeen zijn van orde n.
- Stel $u = \frac{y}{x}$ met $x \neq 0$ en pas scheiden der veranderlijken toe.

Voorbeeld:

- $x^2 + y^2 = 2xyy'$
  - Stel $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$ en $y' = u'x + u$.
  - De DV wordt dan $x^2 + u^2x^2 = 2x^2u(u'x + u)$
    $\Rightarrow x^2 - u^2x^2 = 2x^3uu'$
    $\Rightarrow 1 - u^2 = 2xu\frac{du}{dx}$
    $\xRightarrow{u^2 \neq 1} \int \frac{2udu}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x}$
    $\xRightarrow{u \neq \pm 1} -\ln|1 - u^2| = \ln|x| + c$ met $c \in \mathbb{R}$
    $\xRightarrow{y \neq \pm x} \frac{1}{1-u^2} = \pm kx$ met $k = e^c \in \mathbb{R}_0^+$
    $\xRightarrow{y \neq \pm x} x(1 - u^2) = c$ met $c = \pm\frac{1}{k} \in \mathbb{R}_0$
    $\xRightarrow{y \neq \pm x} x(1 - \frac{y^2}{x^2}) = c$
    $\xRightarrow{y \neq \pm x} x^2 - y^2 = cx$
    $\Rightarrow x^2 - y^2 = Kx$ met $K \in \mathbb{R}$.

3. DV van orde 1 en graad 1 met lineaire coëfficiënten:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

met $P(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$ en $Q(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$, waarbij $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Voorbeelden:

- $(x - 2y + 4)dx + (2x + y - 7)dy = 0$
  - Stel $x - 2y + 4 = 0$ en $2x + y - 7 = 0 \Rightarrow (x,y) = (2,3) =$ snijpunt van de 2 rechten.
  - Stel dan $u = x - 2$ en $v = y - 3$.
  - De DV wordt dan $(u - 2v) + (2u + v)v' = 0 =$ homogeen van de orde 1.
  - Stel $w = \frac{v}{u} \Rightarrow v = wu$ en $v' = w'u + w$
    $\Rightarrow (u - 2wu) + (2u + wu)(w'u + w) = 0$
    $\Rightarrow (u - 2wu) + (2u^2w' + 2uw + ww'u^2 + w^2u) = 0$
    $\Rightarrow 1 + w^2 + w'u(2 + w) = 0$
    $\Rightarrow (2 + w)u\frac{dw}{du} = -(1 + w^2)$
    $\Rightarrow \int -\frac{2+w}{1+w^2}dw = \int \frac{du}{u}$
    $\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+w^2)}{1+w^2} - 2\int \frac{dw}{1+w^2} = \int \frac{du}{u}$
    $\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1 + w^2) - 2\arctan(w) = \ln|u| + c$ met $c \in \mathbb{R}$
    $\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(1 + \frac{v^2}{u^2}) - \ln|u| - 2\arctan(\frac{v}{u}) = c$
    $\Rightarrow -\ln(\sqrt{u^2 + v^2}) - 2\arctan(\frac{v}{u}) = c$
    $\Rightarrow -\ln(\sqrt{((x-2)^2 + (y-3)^2)}) - 2\arctan(\frac{y-3}{x-2}) = c.$

- $(x - 2y + 1)dx + (2x - 4y - 2)dy = 0$
  - We zien dat $x - 2y + 1 = 0$ en $2x - 4y - 2 = 0$ evenwijdige rechten zijn.
  - Stel dan $z = x - 2y + 1 \Rightarrow 2x - 4y - 2 = 2z - 4$ en $z' = 1 - 2y'$.
  - De DV wordt dan $z + (2z - 4)(\frac{1-z'}{2}) = 0$
    $\Rightarrow z + (z - 2)(1 - z') = 0$
    $\Rightarrow z + (z - zz' - 2 + 2z') = 0$
    $\Rightarrow 2z - 2 - (z - 2)z' = 0$
    $\xRightarrow{z-1\neq 0} \int \frac{z-2}{2z-2}dz = \int dx$
    $\xRightarrow{z\neq 1} \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2z-2})dz = \int dx$
    $\xRightarrow{x\neq 2y} \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\ln|z - 1| = x + c$ met $c \in \mathbb{R}$
    $\xRightarrow{x\neq 2y} z - \ln|z - 1| = 2x + 2c$
    $\xRightarrow{x\neq 2y} \ln|z - 1| = z - 2x - 2c$
    $\xRightarrow{x\neq 2y} |z - 1| = ke^{z-2x}$ met $k = e^{-2c} \in \mathbb{R}_0^+$
    $\xRightarrow{x\neq 2y} z = 1 + ke^{z-2x}$ met $k \in \mathbb{R}_0$
    $\Rightarrow z = 1 + ce^{z-2x}$ met $c \in \mathbb{R}$
    $\Rightarrow x - 2y = ce^{-x-2y+1}.$

- $(3x + 4y + 2)dx + (-6x - 8y - 4)dy = 0$
  - We zien dat $3x + 4y + 2 = 0$ en $-6x - 8y - 4 = 0$ samenvallende rechten zijn.
  - We krijgen een singuliere oplossing als $3x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
  - Delen we de DV door de singuliere oplossing $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$, dan houden we over $dx - 2dy = 0$, of nog, $1 - 2y' = 0$
    $\Rightarrow y' = \frac{1}{2}$
    $\Rightarrow y(x) = \frac{x}{2} + c$ met $c \in \mathbb{R}$.

4. Exacte differentiaalvergelijking:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

waarbij $f = (P,Q)$ een **gradiënt** is, i.e., er bestaat een twee keer continu differentieerbare functie φ zodat $\nabla\varphi = f$, of nog, $P(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ en $Q(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$. De DV wordt dan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

De functie φ is twee keer continu differentieerbaar als en slechts als

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

wat de voorwaarde is voor een exacte DV.

Oplossingsmethode:

- Bepaal $\int P(x,y)dx = p(x,y) + c_y \Rightarrow p(x,y) = \varphi(x,y) - c_y$ en $\int Q(x,y)dy = q(x,y) + c_x \Rightarrow q(x,y) = \varphi(x,y) - c_x$, waarbij c_x een constante is die kan afhangen van x en c_y een constantie is die kan afhangen van y.

- Bepaal c_x en c_y als volgt:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(p(x,y) + c_y) & = & Q(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(q(x,y) + c_x) & = & P(x,y). \end{cases}$$

Voorbeelden:

- $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$
$\Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{x}$ en $Q(x,y) = \frac{1}{y}$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{y} = 0$, dus we hebben met een exacte DV te maken.
$\Rightarrow \int P(x,y)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_y = \varphi(x,y)$ en $\int Q(x,y)dy = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c_x = \varphi(x,y)$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\ln|x| + c_y) = \frac{dc_y}{dy} = \frac{1}{y}$ en $\frac{\partial}{\partial x}(\ln|y| + c_x) = \frac{dc_x}{dx} = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow c_x = \ln|x|$ en $c_y = \ln|y|$
$\Rightarrow \varphi(x,y) = \ln|x| + \ln|y| = \ln|xy| = c.$

- $(5x^4 + 8x^3y^3 - y^4)dx + (6x^4y^2 - 4xy^3 + 6y^5)dy = 0$
$\Rightarrow P(x,y) = 5x^4 + 8x^3y^3 - y^4$ en $Q(x,y) = 6x^4y^2 - 4xy^3 + 6y^5$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 24x^3y^2 - 4y^3 = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$, dus we hebben met een exacte DV te maken.
$\Rightarrow \int P(x,y)dx = x^5 + 2x^4y^3 - xy^4 + c_y = \varphi(x,y)$ en $\int Q(x,y)dy = 2x^4y^3 - xy^4 + y^6 + c_x = \varphi(x,y)$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(x^5 + 2x^4y^3 - xy^4 + c_y) = 6x^4y^2 - 4xy^3 + 6y^5 = 6x^4y^2 - 4xy^3 + \frac{dc_y}{cy}$ en $\frac{\partial}{\partial x}(2x^4y^3 - xy^4 + y^6 + c_x) = 5x^4 + 8x^3y^3 - y^4 = 8x^3y^3 - y^4 + \frac{dc_x}{dx}$
$\Rightarrow c_x = x^5$ en $c_y = y^6$
$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^5 + 2x^4y^3 - xy^4 + y^6 = c.$

5. Partiële differentiaalvergelijking:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0.$$

Bestaat er een functie $\mu(x,y)$ zodat $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$, dan is de DV $\mu(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)Q(x,y)y' = 0$ exact. We noemen de functie $\mu(x,y)$ een **integrerende factor**. Er geldt

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \text{ is een partiële DV.}$$

Stel $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = R(x,y) =$ de **rotor** van (P,Q), dan kan de partiële DV herschreven worden als $\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu R$.

Oplossingsmethode:

- $\mu = \mu(x)$ is enkel functie van x:
  De voorwaarde voor exactheid wordt dan $\frac{\partial \mu}{\partial x}Q = -\mu R$.
  $\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{R}{-Q} = \varphi(x)$
  $\Rightarrow \int \frac{\mu'(x)dx}{\mu(x)} = \int \varphi(x)dx$
  $\Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int \varphi(x)dx$
  $\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$.
  Omgekeerd, als $\frac{R}{-Q} = \varphi(x) \Rightarrow$ de DV $\mu(x)P(x,y)dx + \mu(x)Q(x,y)dy = 0$ is exact met $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$:
  $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$
  $\Leftrightarrow \mu\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$
  $\Leftrightarrow e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \varphi(x)e^{\int \varphi(x)dx}Q + e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial Q}{\partial x}$
  $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \stackrel{?}{=} Q\varphi(x)$
  $\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} \stackrel{!}{=} \varphi(x)$.

- $\mu = \mu(y)$ is enkel functie van y:
  $\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}P = \mu R$
  $\Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{R}{P} = \varphi(y)$
  $\Rightarrow \int \frac{\mu'(y)dy}{\mu(y)} = \int \varphi(y)dy$
  $\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy}$.
  Omgekeerd, als $\frac{R}{P} = \varphi(y) \Rightarrow$ de DV $\mu(y)P(x,y)dx + \mu(y)Q(x,y)dy = 0$ is exact met $\mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy}$.

- $\mu = \mu(x+y) = \mu(t)$ is enkel functie van $t = x+y$:
  $\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}$
  $\Rightarrow \frac{d\mu}{dt}(P-Q) = \mu R$
  $\Rightarrow \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{R}{P-Q} = \varphi(t)$
  $\Rightarrow \mu(t) = e^{\int \varphi(t)dt}$.

Omgekeerd, als $\frac{R}{P-Q} = \varphi(t) \Rightarrow$ de DV $\mu(t)P(x,y)dx + \mu(t)Q(x,y)dy = 0$ is exact met $\mu(t) = e^{\int \varphi(t)dt}$.

- $\mu = \mu(xy) = \mu(u)$ is enkel functie van $u = xy$:
  $\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{d\mu}{du}$ en $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{d\mu}{du}$
  $\Rightarrow \frac{d\mu}{du}(xP - yQ) = \mu R$
  $\Rightarrow \frac{\mu'(u)}{\mu(u)} = \frac{R}{xP-yQ} = \varphi(u)$
  $\Rightarrow \mu(u) = e^{\int \varphi(u)du}$.
  Omgekeerd, als $\frac{R}{xP-yQ} = \varphi(u) \Rightarrow$ de DV $\mu(u)P(x,y)dx + \mu(u)Q(x,y)dy = 0$ is exact met $\mu(u) = e^{\int \varphi(u)du}$.

Voorbeelden:

- $x^2 + y^2 + x + xyy' = 0$
  $\Rightarrow P(x,y) = x^2 + y^2 + x$ en $Q(x,y) = xy$
  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = y$
  $\Rightarrow \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} = \frac{R}{-Q} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} = \varphi(x)$
  $\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|} = x$
  $\Rightarrow$ de DV $x^3 + xy^2 + x^2 + x^2yy' = 0$ is exact
  $\Rightarrow \varphi'_P(x,y) = \int P'(x,y)dx = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c_y$ en $\varphi'_Q(x,y) = \int Q'(x,y)dy = \int x^2ydy = \frac{x^2y^2}{2} + c_x$
  $\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c.$

- $\frac{y^2}{x^2}(x^2 + 2x + y)dx + (x^2 - 2y - \frac{y^2}{x})dy = 0$
  $\Rightarrow P(x,y) = \frac{y^2}{x^2}(x^2 + 2x + y)$ en $Q(x,y) = x^2 - 2y - \frac{y^2}{x}$
  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = y\frac{2x^2+4x+3y}{x^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + \frac{y^2}{x^2} = \frac{2x^3+y^2}{x^2}$
  $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = R = \frac{2x^3+y^2-2yx^2-4xy-3y^2}{x^2}$
  $\Rightarrow \frac{R}{P-Q} = \frac{-2}{x+y} = \frac{-2}{t} = \varphi(t)$
  $\Rightarrow \mu(t) = e^{-\int \frac{2}{t}dt} = e^{-2\ln|t|} = t^{-2} = \frac{1}{(x+y)^2}$
  $\Rightarrow$ de DV wordt dan $\frac{y^2}{x^2(x+y)^2}(x^2 + 2x + y)dx + \frac{1}{(x+y)^2}(x^2 - 2y - \frac{y^2}{x})dy = 0$
  $\Rightarrow P'(x,y) = \frac{y^2}{x^2(x+y)^2}(x^2 + 2x + y)$ en $Q'(x,y) = \frac{x^3-2xy-y^2}{x(x+y)^2}$
  $\Rightarrow \frac{\partial P'}{\partial y} = \frac{y}{x^2(x+y)^3}(2x^3 + 4x^2 + 3xy + y^2)$ en $\frac{\partial Q'}{\partial x} = \frac{2x^3y+4x^2y+3xy^2+y^3}{x^2(x+y)^3}$
  $\Rightarrow \varphi'_P(x,y) = \int P'(x,y)dx = \int \frac{y^2}{x^2(x+y)^2}(x^2 + 2x + y)dx = -\frac{y^2}{x+y} - \frac{y^2}{x(x+y)} + c_y$, waarbij we gebruik gemaakt hebben dat $\int \frac{dx}{x^2(x+y)} = -\frac{1}{y^2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{y}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{y^2}\int \frac{dx}{x+y}$ en $\int \frac{dx}{x(x+y)^2} = \frac{1}{y^2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{y^2}\int \frac{dx}{x+y} - \frac{1}{y}\int \frac{dx}{(x+y)^2}$ (splitsen in partieelbreuken)
  en
  $\varphi'_Q(x,y) = \int Q'(x,y)dy = \int \frac{x^3-2xy-y^2}{x(x+y)^2}dy = -\frac{x^2}{x+y} - \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x} + c_x$, waar we opnieuw gebruik gemaakt hebben van splitsen in partieelbreuken
  $\Rightarrow \varphi'_P(x,y) = \frac{-xy^2-y^2}{x(x+y)} + c_y$ en $\varphi'_Q(x,y) = \frac{-x^3-x^2-yx-y^2}{x(x+y)} + c_x$
  $\Rightarrow \varphi'_P(x,y) - \varphi'_Q(x,y) = x + 1 - y + c_y - c_x = c$
  $\Rightarrow \varphi'_P(x,y) = \frac{-xy^2-y^2}{x(x+y)} + y + c'$ en $\varphi'_Q(x,y) = \frac{-x^3-x^2-yx-y^2}{x(x+y)} + x + 1 + c'$
  $\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{-xy^2-y^2+yx(x+y)}{x(x+y)} + c' = \frac{yx^2-y^2}{x(x+y)} + c'$

alsook,
$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{-x^3-x^2-y(x+y)+(x+1)x(x+y)}{x(x+y)} + c' = \frac{yx^2-y^2}{x(x+y)} + c'.$

6. Homogene lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

Oplossingsmethode:

- Pas scheiden der veranderlijken toe:
  $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$
  $\Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + c_1$
  $\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\int P(x)dx + c_1}$
  $\Rightarrow |y| = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^{c_1}$
  $\Rightarrow y = ce^{-\int P(x)dx}$ met $c = \pm e^{c_1}$ $(*)$.

7. Inhomogene lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \neq 0.$$

Oplossingsmethode:

- Schrijf in $(*)$ c als onbekende functie van x, nl. $c(x)$. Dan is $y = c(x)e^{-\int P(x)dx}$ en $\frac{dy}{dx} = \frac{dc(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$.

- Vullen we dit in de DV, dan krijgen we
  $\frac{dc(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$
  $\Rightarrow \int \frac{dc(x)}{dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$
  $\Rightarrow c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c'$

- De oplossing is van de vorm $y(x) = e^{-\int P(x)dx}(c' + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$.

Voorbeelden:

- $\frac{dy}{dx} - y = e^x$
  $\Rightarrow P(x) = -1$ en $Q(x) = e^x$
  $\Rightarrow \int P(x)dx = -\int dx = -x$
  $\Rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{-x}$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int e^x e^{-x}dx = x$
  $\Rightarrow$ De oplossing is van de vorm $y(x) = e^x(c' + x)$.

- $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x^3 + 1$
  $\Rightarrow P(x) = -\frac{1}{x}$ en $Q(x) = x^3 + 1$
  $\Rightarrow \int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x|$
  $\Rightarrow e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln|x|} = |x|$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int (x^3+1)\frac{dx}{|x|} = \int x^2 dx + \int \frac{dx}{|x|} = \frac{x^3}{3} + \ln|x|$
  $\Rightarrow$ De oplossing is van de vorm $z(x) = |x|(c' + \frac{x^3}{3} + \ln|x|)$.

- $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = \frac{1}{1-t}$
  $\Rightarrow P(t) = \frac{-1}{t}$ en $Q(t) = \frac{1}{1-t}$
  $\Rightarrow \int P(t)dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|$
  $\Rightarrow e^{\int -P(t)dt} = e^{\ln|t|} = |t|$
  $\Rightarrow \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt = \int \frac{1}{1-t}\frac{dt}{|t|} = \int(\frac{1}{|t|} + \frac{1}{1-t})dt = \ln|t| - \ln|1-t| = \ln|\frac{t}{1-t}|$
  $\Rightarrow$ De oplossing is van de vorm $y(t) = |t|(c' + \ln|\frac{t}{1-t}|)$.

- $\frac{dy}{dx} - y = -x$ met $y(1) = 0$
  $\Rightarrow P(x) = -1$ en $Q(x) = -x$
  $\Rightarrow e^{-\int P(x)dx} = e^x$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = -\int xe^{-x}dx = xe^{-x} + e^{-x}$
  $\Rightarrow$ De oplossing is van de vorm $y(x) = e^x(c' + xe^{-x} + e^{-x}) = c'e^x + x + 1$.
  $\Rightarrow$ Nu is $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = c'e + 2 \Rightarrow c' = -2e^{-1} \Rightarrow y(x) = x + 1 - 2e^{x-1}$.

- $y' + 2xy = x^3$
  $\Rightarrow P(x) = 2x$ en $Q(x) = x^3$
  $\Rightarrow \int P(x)dx = \int 2xdx = x^2$
  $\Rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{x^2}$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int te^tdt = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + c$ met $t = x^2$
  $\Rightarrow y(x) = e^{-\int P(x)dx}(c' + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx) = e^{-x^2}(c' + \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)) = \frac{1}{2}(x^2-1) + c'e^{-x^2}$.

8. Differentiaalvergelijking van Bernoulli:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

met $m > 1$.

Oplossingsmethode:

- Vermenigvuldig de DV met $\mu(y) = \frac{1-m}{y^m}$.
- Voer een substitutie uit: $u = y^{1-m}$.
- Los de DV verder op zoals een lineaire DV van de eerste orde.

Voorbeeld:

- $y' - \frac{y}{x} = -\frac{5}{2}x^2y^3$
  $\Rightarrow m = 3, P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = -\frac{5}{2}x^2$ en $\mu(x) = \frac{-2}{y^3}$
  $\Rightarrow$ De DV wordt dan $-\frac{2y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = 5x^2$.
  $\Rightarrow$ Stel $u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y^{-3}y'$.
  $\Rightarrow$ De DV wordt $u' + \frac{2u}{x} = 5x^2$.
  $\Rightarrow P(x) = \frac{2}{x}$ en $Q(x) = 5x^2$
  $\Rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2dx}{x}} = e^{2\ln|x|} = x^2$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \int 5x^2 \cdot x^2 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^5}{5} = x^5$
  $\Rightarrow u(x) = x^{-2}(c' + x^5)$
  $\Rightarrow y^{-2} = \frac{x^5+c'}{x^2}$
  $\Rightarrow y = (\frac{x^5+c'}{x^2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pm x}{\sqrt{x^5+c'}}$.

9. Differentiaalvergelijking van Ricatti:

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2,$$

met $f_2 \neq 0$.
Oplossingsmethode:

- Zoek een oplossing y_1.
- Voer de substitutie $y = y_1 + \frac{1}{u}$ door.
- Los de DV verder op zoals een lineaire DV van orde 1.

Voorbeeld:

- $y' = x^5 + \frac{1}{2}x + y(-2x^3 + \frac{3}{2x}) + xy^2$
  Ga na dat $y_1 = x^2$ een oplossing is van de DV.
  $\Rightarrow$ Stel $y = x^2 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 2x - \frac{u'}{u^2}$
  $\Rightarrow$ De DV wordt $-\frac{u'}{u^2} = \frac{3}{2ux} + \frac{x}{u^2}$
  $\Rightarrow$ Vermenigvuldigen met $-u^2$ geeft $u' = -\frac{3u}{2x} - x \Rightarrow u' + \frac{3u}{2x} = -x$
  $\Rightarrow P(x) = \frac{3}{2}x$ en $Q(x) = -x$
  $\Rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3dx}{2x}} = e^{\frac{3}{2}\ln|x|} = |x|^{\frac{3}{2}}$
  $\Rightarrow \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = -\int x \cdot |x|^{\frac{3}{2}}dx = -\int |x|^{\frac{5}{2}}dx = -\frac{2}{7}|x|^{\frac{7}{2}}$
  $\Rightarrow u = |x|^{-\frac{3}{2}}(-\frac{2}{7}|x|^{\frac{7}{2}} + c) = -\frac{2}{7}x^2 + c|x|^{\frac{-3}{2}}$
  $\Rightarrow y = x^2 + \frac{1}{u} = x^2 + \frac{1}{-\frac{2}{7}x^2+c|x|^{\frac{-3}{2}}} = x^2 + 7\frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{-2x^{\frac{7}{2}}+7c}$.

Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde $n, n \geq 2$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \text{ gegeven.}$$

1. Homogene lineaire DV van orde 2 met constante coëfficiënten:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

Oplossingsmethode:

Stel de oplossing $y = e^{\lambda x}$ met $\lambda =$ constant voorop.

$\Rightarrow (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$\Rightarrow$ discriminant $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0 : \lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow e^{\lambda_1 x}$ en $e^{\lambda_2 x}$ zijn de twee oplossingen.
  $\Rightarrow y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$.

- $D = 0 : \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow e^{\lambda x}$ en $xe^{\lambda x}$ zijn de twee oplossingen.
  $\Rightarrow y(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}$.

- $D < 0 : \lambda_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{D}) = \frac{1}{2a}(-b \pm i\sqrt{-D}) = p \pm qi$ met $p = -b/2a$ en $q = \sqrt{-D}/2a$
  $\Rightarrow y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{(p+iq)x} + Be^{(p-qi)x} = e^{px}(Ae^{iqx} + Be^{-iqx})$
  $\Rightarrow y(x) = e^{px}(A\cos(qx) + iA\sin(qx) + B\cos(qx) - iB\sin(qx))$
  $\Rightarrow y(x) = e^{px}((A + B)\cos(qx) + i(A - B)\sin(qx))$
  $\Rightarrow y(x) = e^{px}(C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx))$,
  waarbij de formule van Euler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ gebruikt werd.

Voorbeelden:

- $y'' - 3y' + 2y = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
  $\Rightarrow D = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$
  $\Rightarrow$ De algmene oplossing is $y(x) = Ae^{2x} + Be^{x}$.

- $y'' + 7y' + 6y = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$
  $\Rightarrow D = 49 - 24 = 25 = 5^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6$ en $\lambda_2 = -1$
  $\Rightarrow$ De algmene oplossing is $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-6x}$.

- $y'' + 6y' + 9y = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$
  $\Rightarrow D = 36 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$
  $\Rightarrow$ De algmene oplossing is $y(x) = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$.

- $y'' + 4y' + 4y = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$
  $\Rightarrow D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$
  $\Rightarrow$ De algmene oplossing is $y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$.

- $y'' + y = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$
  $\Rightarrow D = -4 = \sqrt{(2i)^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$
  $\Rightarrow y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} = A(\cos x + i \sin x) + B(\cos x - i \sin x) = (A + B) \cos x + i(A - B) \sin x$.

- $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$
  $\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
  $\Rightarrow D = 4 - 20 = -16 = \sqrt{(4i)^2} < 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + 2i$ en $\lambda_2 = -1 - 2i$
  $\Rightarrow y(x) = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$
  $\Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$
  $\Rightarrow y'(x) = -e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + e^{-x}(-2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x))$
  $\Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow 2C_2 - C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 1/2$
  $\Rightarrow y(x) = e^{-x}(\cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x))$.

2. Differentiaalvergelijking van Euler:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

met alle a_i reëel en $a_n \neq 0$.

Oplossingsmethode:

- Stel $x = e^z$ voor $x > 0$ en $x = -e^z$ voor $x < 0$.
- De DV wordt zo een homogene lineaire DV met constante coëfficiënten.

Voorbeeld:

- $4x^2y'' + 4xy' + y = 0$
  $\Rightarrow$ Stel $x = e^z \Rightarrow z = \ln(x)$
  $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}(\frac{dy}{dx}) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d}{dz}(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2}$
  $\Rightarrow$ Stel $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dz^2}$ en $\dot{y} = \frac{dy}{dz}$, dan is $y' = \frac{1}{x}\dot{y}$ en $y'' = \frac{1}{x^2}\ddot{y} - \frac{1}{x^2}\dot{y}$.
  $\Rightarrow$ De DV wordt dan $4(\ddot{y} - \dot{y}) + 4\dot{y} + y = 4\ddot{y} + y = 0$
  $\Rightarrow$ De karakteristieke vergelijking is $4\lambda^2 + 1 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{i}{2}$ en $\lambda_2 = \frac{-i}{2}$
  $\Rightarrow y(z) = Ae^{\frac{iz}{2}} + Be^{\frac{-iz}{2}} = C_1 \cos(\frac{z}{2}) + C_2 \sin(\frac{z}{2})$
  $\Rightarrow y(x) = C_1 \cos(\frac{\ln(x)}{2}) + C_2 \sin(\frac{\ln(x)}{2})$.

3. Inhomogene lineaire DV van orde 2 met constante coëfficiënten:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x),$$

met $f(x) \neq 0$. De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, waarbij $y_H(x)$ de algemene oplossing is van $ay'' + by' + cy = 0$, en $y_P(x)$ een willekeurige particuliere oplossing is van de inhomogene DV.

Methode van de onbepaalde coëfficiënten:

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

waarbij $P_n(x)$ een polynoom is van graad n in x en $\alpha \in \mathbb{R}$.

Oplossingsmethode:

- α is geen wortel van de karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dan is

$$y_P(x) = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

- α is een enkelvoudige wortel van de karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dan is

$$y_P(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x},$$

- α is een dubbele wortel van de karakteristieke vergelijking $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, dan is

$$y_P(x) = x^2Q_n(x)e^{\alpha x},$$

waarbij $Q_n(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n$.
Substitueer $y_P(x)$ in de DV om de onbekenden $A_0, A_1, \ldots, A_n$ te bepalen.

Voorbeelden:

- $y'' + 4y' + 3y = x$
  $\Rightarrow n = 1, P_n(x) = x$ en $\alpha = 0$
  $\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow \lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = -1$
  $\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$
  $\Rightarrow \alpha = 0$ is geen wortel van $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, dus $y_P(x) = A_0 + A_1x$
  $\Rightarrow 0 + 4A_1 + 3(A_0 + A_1x) = x$
  $\Rightarrow 3A_1x + 4A_1 + 3A_0 = x$
  $\Rightarrow A_0 = -\frac{4}{9}$ en $A_1 = \frac{1}{3}$
  $\Rightarrow y_H(x) = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$
  $\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}x$.

- $\frac{d^2q}{dt^2} + 0.024\frac{dq}{dt} + 8 \cdot 10^{-5}q = 8 \cdot 10^{-3}$ waarbij $q(0) = 0$ en $\frac{dq}{dt}(0) = 2.96$
  $\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 0.024\lambda + 8 \cdot 10^{-5} = 0$
  $\Rightarrow D = 0.000256 \Rightarrow \lambda_1 = -0.004$ en $\lambda_2 = -0.02$
  $\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $q_H(t) = C_1e^{-0.02t} + C_2e^{-0.004t}$
  $\Rightarrow \alpha = 0$ is geen wortel van $\lambda^2 + 0.024\lambda + 8 \cdot 10^{-5} = 0$, dus $q_P(t) = A_0$
  $\Rightarrow 8 \cdot 10^{-5}A_0 = 8 \cdot 10^{-3}$
  $\Rightarrow A_0 = 100$
  $\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $q(t) = C_1e^{-0.02t} + C_2e^{-0.004t} + 100$.
  $\Rightarrow q(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + 100 = 0$
  $\Rightarrow \frac{dq}{dt}(0) = 2.96 \Rightarrow C_1(-0.02) + C_2(-0.004) = 2.96$
  $\Rightarrow C_1 = -160$ en $C_2 = 60$
  $\Rightarrow q(t) = 100 - 160e^{-0.02t} + 60e^{-0.004t}$.

- $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$
  $\Rightarrow f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ met $n = 1$ en $\alpha = 1$
  $\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
  $\Rightarrow D = 49 - 24 = 25 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 6$
  $\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$
  $\Rightarrow \alpha = 1$ is een wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = (A_0 + A_1x)xe^x$
  $\Rightarrow y'_P(x) = (A_0 + x(A_0 + 2A_1) + A_1x^2)e^x$ en $y''_P(x) = ((2A_0 + 2A_1) + x(A_0 + 4A_1) + x^2A_1)e^x$
  $\Rightarrow$ De DV wordt $-10A_1x + 2A_1 - 5A_0 = x - 2$
  $\Rightarrow A_0 = \frac{-1}{10}$ en $A_1 = \frac{9}{25}$
  $\Rightarrow y_P(x) = x(\frac{-1}{10}x + \frac{9}{25})e^x$
  $\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x} + x(\frac{-x}{10} + \frac{9}{25})e^x$.

- $y'' - y = x^2$
  $\Rightarrow P(x) = x^2, n = 2$ en $\alpha = 0$
  $\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 1 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$
  $\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$

$\Rightarrow \alpha = 0$ is geen wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$
$\Rightarrow$ De DV wordt $A_2 - (A_0 + A_1x + A_2x^2) = x^2$
$\Rightarrow A_0 = -2, A_1 = 0$ en $A_2 = -1$
$\Rightarrow y_P(x) = -2 - x^2$
$\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 2$.

- $y'' + y = xe^{2x}$
$\Rightarrow f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ met $n = 1$ en $\alpha = 2$
$\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$
$\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$\Rightarrow \alpha = 2$ is geen wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = (A_0 + A_1x)e^{2x}$
$\Rightarrow y_P'(x) = (2A_0 + A_1 + 2A_1x)e^{2x}$ en $y_P''(x) = (4A_0 + 4A_1 + 4A_1x)e^{2x}$
$\Rightarrow$ De DV wordt $e^{2x}(4A_0 + 4A_1 + 4A_1x) + (A_0 + A_1x)e^{2x} = x^{2x}$
$\Rightarrow A_0 = \frac{-4}{25}$ en $A_1 = \frac{1}{5}$
$\Rightarrow y_P(x) = (\frac{-4}{25} + \frac{x}{5})e^{2x}$
$\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{-4}{25} + \frac{x}{5})e^{2x}$.

- $y'' - y = 2e^x$
$\Rightarrow f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ met $n = 0$ en $\alpha = 1$
$\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 1 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$
$\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$
$\Rightarrow \alpha = 1$ is een wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = A_0xe^x$
$\Rightarrow y_P'(x) = (A_0 + A_0x)e^x$ en $y_P''(x) = (2A_0 + A_0x)e^x$
$\Rightarrow$ De DV wordt $2A_0e^x = 2e^x$
$\Rightarrow A_0 = 1$
$\Rightarrow y_P(x) = xe^x$
$\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x$.

- $y'' + y = \cos x$
$\Rightarrow f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ met $n = 0$ en $\alpha = \pm i$
$\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$
$\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$\Rightarrow \alpha = \pm i$ is een wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = A_1x \sin x + B_1x \cos x$
$\Rightarrow y_P'(x) = A_1 \sin x + A_1x \cos x + B_1 \cos x - B_1x \sin x$ en $y_P''(x) = 2A_1 \cos x - A_1x \sin x - 2B_1 \sin x - B_1x \cos x$
$\Rightarrow$ De DV wordt $2A_1 \cos x - 2B_1 \sin x = \cos x$
$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$ en $B_1 = 0$
$\Rightarrow y_P(x) = \frac{x}{2} \sin x$

$\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$.

- $y'' + y = x \sin x$
  $\Rightarrow f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ met $n = 1$ en $\alpha = \pm i$
  $\Rightarrow$ karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = i$ en $\lambda_2 = -i$
  $\Rightarrow$ algemene homogene oplossing $y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
  $\Rightarrow \alpha = \pm i$ is een wortel van de karakteristieke vergelijking, dus $y_P(x) = x(A_1 + A_2 x) \sin x + x(B_1 + B_2 x) \cos x$
  $\Rightarrow y_P'(x) = \sin x(A_1 + 2A_2 x - B_1 x - B_2 x^2) + \cos x(A_1 x + A_2 x^2 + B_1 + 2B_2 x)$ en $y_P''(x) = \sin x(2A_2 - A_1 x - A_2 x^2 - B_1 - 2B_2 x - B_1 - 2B_2 x) + \cos x(A_1 + 2A_2 x + A_1 + 2A_2 x + 2B_1 - B_1 x - B_2 x^2)$
  $\Rightarrow$ Na invullen krijgen we $A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = 0, B_1 = 0$ en $B_2 = \frac{-1}{4}$
  $\Rightarrow y_P(x) = \frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x$
  $\Rightarrow$ De algemene oplossing is van de vorm $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{4} \sin x - \frac{x^2}{4} \cos x$.

4. Variatie van de parameters:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Oplossingsmethode:

- Stel $\{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ oplossingen van de homogene lineaire DV, dus voor $b(x) = 0$, dan bestaat er een oplossing van de niet-homogene lineaire DV:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)z_i(x).$$

- Bepaal de z_i'tjes.

Voorbeelden:

- $y'' - y = 2e^x$
  $\Rightarrow$ homogene DV $y'' - y = 0$ heeft als oplossing $u(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$
  $\Rightarrow y_P(x) = z_1(x)e^x + z_2(x)e^{-x}$
  $\Rightarrow z_1'(x)e^x + z_2'(x)e^{-x} = 0$ en $z_1'(x)e^x - z_2'(x)e^{-x} = \frac{b(x)}{a_2(x)} = 2e^x$
  $\Rightarrow$ Dit stelsel heeft een unieke oplossing als $\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
  $\Rightarrow z_1'(x) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ 2e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = 1$ en $z_2'(x) = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = -e^{2x}$
  $\Rightarrow z_1(x) = \int dx = x$ en $z_2(x) = \int -e^{2x}dx = -\frac{1}{2}e^{2x}$
  $\Rightarrow y_P(x) = xe^x - \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = xe^x - \frac{1}{2}e^x$
  $\Rightarrow y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x - \frac{1}{2}e^x = ce^x + c_2e^{-x} + xe^x.$

- $y'' + y = \tan x$
  $\Rightarrow$ homogene DV $y'' + y = 0$ heeft als oplossing $u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$
  $\Rightarrow y_P(x) = z_1(x)\sin x + z_2(x)\cos x$
  $\Rightarrow z_1'(x)\sin x + z_2'(x)\cos x = 0$ en $z_1'(x)\cos x - z_2'(x)\sin x = \tan x$
  $\Rightarrow$ Dit stelsel heeft een unieke oplossing als $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$
  $\Rightarrow z_1'(x) = -\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x$ en $z_2'(x) = -\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$
  $\Rightarrow z_1(x) = \int \sin x dx = -\cos x$ en $z_2(x) = \int (\cos x - \frac{1}{\cos x})dx = \sin x - \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$
  $= \sin x - \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} \cdot \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx = \sin x - \int \frac{1}{\frac{1}{\cos x}+\tan x}(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x})dx$
  $= \sin x - \int \frac{1}{\frac{1}{\cos x}+\tan x}d(\frac{1}{\cos x} + \tan x) = \sin x - \ln|\frac{1}{\cos x} + \tan x| + c$
  $\Rightarrow y_P(x) = -\sin x \cos x + \cos x(\sin x - \ln|\frac{1}{\cos x} + \tan x|) = -\cos x \cdot \ln|\frac{1}{\cos x} + \tan x|$
  $\Rightarrow y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \cos x \cdot \ln|\frac{1}{\cos x} + \tan x|.$

- $x^2y'' - 3xy' + 4y = \sqrt{x}$
  $\Rightarrow$ de homogene DV $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ is een vergelijking van Euler. Stel $x = e^z$.

$\Rightarrow (\ddot{y} - \dot{y}) - 3\dot{y} + 4y = \ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow y_H(z) = c_1 e^{2z} + c_2 z e^{2z} \Rightarrow y_H(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$

$\Rightarrow y_P(x) = z_1(x)x^2 + z_2(x)x^2 \ln(x)$

$\Rightarrow z_1'(x)x^2 + z_2'(x)x^2 \ln(x) = 0$ en $z_1'(x)2x + z_2'(x)(2x\ln(x) + x) = \frac{b(x)}{a_2(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$

$\Rightarrow$ Dit stelsel heeft een unieke oplossing als $\begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln(x) \\ 2x & 2x\ln(x) + x \end{vmatrix} = x^3 \neq 0$ als $x \neq 0$

$\Rightarrow z_1'(x) = \frac{1}{x^3}\begin{vmatrix} 0 & x^2\ln(x) \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & 2x\ln(x) + x \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^3}$ en $z_2'(x) = \frac{1}{x^3}\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{\sqrt{x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$

$\Rightarrow z_1(x) = \int -\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^3}dx = \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln(x) + \frac{4}{9}x^{-\frac{3}{2}}$ en $z_2(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{x^3}dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y_P(x) = x^2(\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\ln(x) + \frac{4}{9}x^{-\frac{3}{2}}) - \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}x^2\ln(x) = \frac{4}{9}\sqrt{x}$

$\Rightarrow y(x) = c_1x^2 + c_2x^2\ln(x) + \frac{4}{9}\sqrt{x}$.

5. Reductie van de orde van een DV:

Voorbeeld:

- $(2x^2+1)y'' - 4xy' + 4y = 0$
  $\Rightarrow y_1(x) = x$ is een oplossing van de geassocieerde homogene vergelijking
  $\Rightarrow$ Stel $y(x) = u(x)y_1(x) \Rightarrow y' = u'x + u$ en $y'' = u''x + 2u'$
  $\Rightarrow$ De DV wordt $(2x^2+1)(u''x+2u') - 4x(u'x+u) + 4ux = (2x^3+x)u'' + 2u' = 0$
  $\Rightarrow$ Stel $v = u' \Rightarrow (2x^3+x)v' + 2v = 0 \Rightarrow v' + \frac{2}{x(2x^2+1)}v = 0$
  $\Rightarrow$ scheiden der veranderlijken: $\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x(2x^2+1)} = -(2\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{xdx}{2x^2+1}) = -(2\ln|x| - \ln(2x^2+1)) = -\ln(\frac{x^2}{2x^2+1})$
  $\Rightarrow \ln(v) = -\ln(\frac{x^2}{2x^2+1})$
  $\Rightarrow v(x) = \frac{2x^2+1}{x^2} \cdot c = 2c + \frac{c}{x^2}$
  $\Rightarrow u(x) = \int v(x)dx = 2cx - \frac{c}{x} + c_1$
  $\Rightarrow y = ux = c(2x^2-1) + c_1x.$