Examenvragen hoofdstuk 7 van de laatste drie jaren

Werner Peeters

1. Bereken $s_n = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + ... + n(n+3)(n+4)$ door middel van de Bernoullipolynomen en bewijs dat dit altijd een geheel getal is.

2. Beschouw de functie $f(x) = e^{-x^2/2}$

   (a) Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{cases}$

   (b) Bewijs dat de $2n$-de Taylorpolynoom van de reeks gelijk is aan $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \cdot k!}$

   (c) Bereken de $2n$-de restterm van de Taylorreeks $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \cdot k!}$ door middel van de reststelling van Lagrange, en bewijs dat deze naar nul gaat.

3. Onderzoek het convergentiegedrag van de reeks $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^3)}{n^3}$.

4. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{als} \quad x \geq 0 \\ \pi + x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}$

5. Gegeven een meetkundige rij $(x_n)_n$. Bepaal x_1 als $s_2 = -8$ en $s_6 = -728$; er zijn 2 oplossingen.

6. Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   (a) Bereken hiervoor $T_n(f, 0)(x)$

   (b) Bereken $R_n(x)$ door middel van de reststelling van Lagrange en bewijs dat $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}$. Onder welke voorwaarde is $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$?

   (c) Bereken $\dfrac{1}{1.004}$ tot op 6 cijfers na de komma.

7. Bepaal de orde, de algemene term en de volgende term in het rijtje van de volgende rekenkundige rijen van hogere orde, en bewijs dat alle elementen van deze rij natuurlijke getallen zijn.

$$(3, 16, 50, 120, 245, 448, 756, 1200, ...)$$

8.

   (a) Bewijs dat de n–de Taylorpolynoom $T_n(f, 0)(x)$ voor $f(x) = (1+x)^{1/2}$ rond 0 gelijk is aan

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^3}{6} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3)\, x^n}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n}$$

(b) Bewijs dat $|R_n(x)| \leq \left|\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{3}{2} - n\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - n\right) x^{n+1}\right|$ voor $x \geq 0$

(c) Bereken $\sqrt{\frac{5}{4}}$ door de vorige formule voor $n = 3$ te gebruiken, en schat af hoe groot de fout is. (De werkelijke waarde is $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118\,033\,989$)

9. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Bgtan} n}{n^2}$$

10.

(a) Bewijs dat de functie $f(x) = e^x \cos x$ op een factor na gelijk is aan zijn eigen vierde afgeleide. Welke factor?

(b) Schrijf de 7e Taylorpolynoom van $f(x)$ rond 0 op.

(c) Beschouw deze ontwikkeling op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Schrijf de restterm $R_7(x)$ van Lagrange op.

(d) Hoeveel is $\sqrt{e} \cos \frac{1}{2}$ volgens deze benadering, en hoeveel bedraagt de fout?

11. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{4}{2 + 3^n n}$$

12. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$. Hint: bewijs eerst dat

$$\int e^x \cos nx dx = \frac{e^x}{1 + n^2} (\cos nx + n \sin nx) + c$$

13. Gegeven een meetkundige rij waarvoor $s_3 = \frac{26}{9}$ en $s_6 - s_5 = 54$. Bepaal x_1 en q. (er is maar één oplossing)

14. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n - 1)}$$

15. Gegeven de rekenkundige rij van hogere orde

$$(3, 0, 9, 42, 111, 228, 405, ...)$$

Wat is de algemene formule voor de n–de term en wat is het volgend element uit het rijtje?

16. Bereken de Taylorpolynoom $T_6(f, 0)(x)$ voor $f(x) = \cos^2 x$. Hint: gebruik de gepaste goniometrische formule!

17. Ned Stark heeft vijf kinderen: van oud naar jong heten ze Robb, Sansa, Bran, Arya en Rickon. Hun leeftijden vormen een rekenkundige rij. De som van hun leeftijden is 50 en de som van de kwadraten van hun leeftijden is 590. Hoe oud is Sansa?

18. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ 2x & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$

Oplossingen:

1. Bereken $s_n = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + ... + n(n+3)(n+4)$ door middel van de Bernoullipolynomen en bewijs dat dit altijd een geheel getal is.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+3)(k+4) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^3 + 7k^2 + 12k\right) = S_3(n) + 7S_2(n) + 12S_1(n) \\ &= \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right) + 7\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + 12\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) \\ &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{17}{6}n^3 + \frac{39}{4}n^2 + \frac{43}{6}n = \frac{1}{12}n(n+1)\left(3n^2 + 31n + 86\right) \end{aligned}$$

Merk nu op:

- n of $n+1$ is altijd even
- $3n^2 + 31n + 86$ is altijd even
$\Rightarrow n(n+1)\left(3n^2 + 31n + 86\right)$ is dus deelbaar door 4
- Als $n = 0 \bmod 3$ dan is n deelbaar door 3
- Als $n = 2 \bmod 3$ dan is $n+1$ deelbaar door 3
- Als $n = 1 \bmod 3$ dan is $\left(3n^2 + 31n + 86\right) \bmod 3 = 120 \bmod 3 = 0 \bmod 3$, dan is $\left(3n^2 + 31n + 86\right)$ deelbaar door
$\Rightarrow n(n+1)\left(3n^2 + 31n + 86\right)$ is dus deelbaar door 3
$n(n+1)\left(3n^2 + 31n + 86\right)$ is dus deelbaar door 12.

2. Beschouw de functie $f(x) = e^{-x^2/2}$

(a) Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{cases}$

$f(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f''(0) = -1$
$f'''(x) = \left(-x^3 + 3x\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f^{iv}(x) = \left(x^4 - 6x^2 + 3\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{iv}(0) = 3$
$f^{v}(x) = \left(-x^5 + 10x^3 - 15x\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{v}(0) = 0$
$f^{vi}(x) = \left(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{vi}(0) = -15$
...
$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$
$f^{(2n+1)}(0) = 0$
Het bewijs gaat per inductie:
$f'(x) = -xf(x)$
Als we deze uitdrukking n keer afleiden via Leibnitz, dan krijgen we
$f^{(n+1)}(x) = -xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$
$\Rightarrow f^{(n+1)}(0) = -nf^{(n-1)}(0)$
$\Rightarrow f^{(n+2)}(0) = -(n+1)f^{(n)}(0)$
waaruit de betrekking volgt. Alle oneven coëfficiënten zijn dan namelijk 0, en voor de even coëfficiënten geldt dan
$\Rightarrow f^{(2n+2)}(0) = -(2n+1)f^{(2n)}(0)$

(b) Bewijs dat de $2n$-de Taylorpolynoom van de reeks gelijk is aan $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \cdot k!}$

$T_{2n}(f,0)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)) x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)) (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k) x^{2k}}{(2k)! (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k)} =$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \cdot k!}$

(c) Bereken de $2n$-de restterm van de Taylorreeks $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \cdot k!}$ door middel van de reststelling van Lagrange, en bewijs dat deze naar nul gaat.
$R_{2n}(f,0)(x) = \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\xi^2/2}$
$\Rightarrow |R_{2n}(f,0)(x)| \leq \dfrac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Deze laatste term gaat naar nul, want het is de algemene term van de reeks $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$, waarvoor wegens d'Alembert geldt dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^2}{(2+2)(2k+3)} = 0$$

3. Onderzoek het convergentiegedrag van de reeks $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^3)}{n^3}$.

   Meerdere antwoorden zijn hier mogelijk:

   - Wegens het verdichtingscriterium geldt: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^3)}{n^3} \sim \sum_{n\geq 1} (2^n) \frac{\ln\left((2^n)^3\right)}{(2^n)^3} = \sum_{n\geq 1} \frac{3n\ln 2}{(2^n)^2} =$ $3\ln 2 \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{4^n}$
     Nu is $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}$ wegens d'Alembert. De oorspronkelijke reeks is dus ook convergent.
   - Wegens het criterium van convergente majoranten is

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n^3)}{n^3} = 3\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3} \lesssim 3\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3} = 3\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

     wat een hyperharmonische reeks met $p > 1$ is, dus convergent.

4. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{als} \quad x \geq 0 \\ \pi + x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}$
   Dit is overduidelijk een even functie $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : b_n = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \langle f(x) \mid \cos nx \rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = \pi - x \\ dv = \cos nx dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = -dx \\ dv = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right. = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{als} & n \text{ even} \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{als} & n \text{ oneven} \end{array}\right.$$

en

$$a_0 = \langle f(x) \mid \cos 0x \rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx = \frac{-1}{\pi}\left[(\pi - x)^2\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$$

5. Gegeven een meetkundige rij $(x_n)_n$. Bepaal x_1 als $s_2 = -8$ en $s_6 = -728$; er zijn 2 oplossingen.

$$\left\{\begin{array}{l} s_6 = x_1 \frac{1-q^6}{1-q} \\ s_2 = x_1 \frac{1-q^2}{1-q} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -728 = x_1 \frac{1-q^6}{1-q} \\ -8 = x_1 \frac{1-q^2}{1-q} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 91 = \frac{1-q^6}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow 91 = q^4 + q^2 + 1$$

$$\Rightarrow q^4 + q^2 - 90 = 0 \Rightarrow q \in \{3, -3\}$$

- Als $q = 3 \Rightarrow x_1 = s_2 \frac{1-q}{1-q^2} = -8 \frac{1-3}{1-3^2} = -2$

  $\Rightarrow \boxed{x_1 = -2}$
- Als $q = -3 \Rightarrow x_1 = s_2 \frac{1-q}{1-q^2} = -8 \frac{1+3}{1-(-3)^2} = 4$

  $\Rightarrow \boxed{x_1 = 4}$

6. Beschouw de functie $f(x) = \frac{1}{1+x}$

   (a) Bereken hiervoor $T_n(f, 0)(x)$

   $f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(0) = 1$

   $f'(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f(0) = -1$

   $f''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f(0) = 2!$

$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow f(0) = -3!$
$f^{iv}(x) = 24(1+x)^{-5} \Rightarrow f(0) = 4!$
...
$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n!\,(1+x)^{-(n+1)} \Rightarrow f(0) = (-1)^n\, n!$
$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot (n+1)!\,(1+x)^{-(n+2)} \Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \cdot (n+1)!\,(1+\xi)^{-(n+2)}$
$T_n(f,0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n$

(b) Bereken $R_n(x)$ door middel van de reststelling van Lagrange en bewijs dat $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}$. Onder welke voorwaarde is $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$?
$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot (n+1)!\,(1+x)^{-(n+2)} \Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^n \cdot (n+1)!\,(1+\xi)^{-(n+2)}$
$R_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}$
$|R_n(x)| \leq \left|\dfrac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}\right| \leq |x|^{n+1}$ als $x > 0$ (zie theorie over de binomiaalreeks) en dus ook $\xi > 0$
$\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} = 0$ als $0 < x < 1$

(c) Bereken $\dfrac{1}{1.004}$ tot op 6 cijfers na de komma.

n	$\|0.004\|^{n+1}$
1	1.6×10^{-5}
2	6.4×10^{-8}

$\Rightarrow n = 2$
$\Rightarrow T_2(f,0)(x) = 1 - x + x^2$
$\Rightarrow T_2(f,0)(0.004) = 0.996\,016$
Werkelijke waarde $\simeq 0.996\,015\,936\,3$

7. Bepaal de orde, de algemene term en de volgende term in het rijtje van de volgende rekenkundige rijen van hogere orde, en bewijs dat alle elementen van deze rij natuurlijke getallen zijn.

$$(3, 16, 50, 120, 245, 448, 756, 1200, ...)$$

- $v = (13, 34, 70, 125, 203, 308, 444, ...)$
  $v' = (21, 36, 55, 78, 105, 136...)$
  $v'' = (15, 19, 23, 27, 31...)$
  $v''' = (4, 4, 4, 4...) \Rightarrow$ orde nul
  $\Rightarrow$ De originele rij is van orde 4
- $\Rightarrow x_n = \alpha n^4 + \beta n^3 + \gamma n^2 + \delta n + \varepsilon$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 3 \\ 16\alpha + 8\beta + 4\gamma + 2\delta + \varepsilon = 16 \\ 81\alpha + 27\beta + 9\gamma + 3\delta + \varepsilon = 50 \\ 256\alpha + 64\beta + 16\gamma + 4\delta + \varepsilon = 120 \\ 625\alpha + 125\beta + 25\gamma + 5\delta + \varepsilon = 245 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{6} \\ \beta = \frac{5}{6} \\ \gamma = \frac{4}{3} \\ \delta = \frac{2}{3} \\ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

  $$\Rightarrow x_n = \frac{1}{6}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{4}{3}n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)^2}{6}$$
- n of $n+1$ is even dus de teller is een tweevoud
  n of $n+1$ of $n+2$ is deelbaar door 3 dus de teller is een drievoud
  De teller is dus een zesvoud, dus alle x_n zijn gehele getallen.

- $x_9 = 1815$

8.

(a) Bewijs dat de n–de Taylorpolynoom $T_n(f,0)(x)$ voor $f(x) = (1+x)^{1/2}$ rond 0 gelijk is aan

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)\,x^n}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)(1+x)^{-5/2} \\
&... \\
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n} \\
f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-n}
\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(0) &= \frac{1}{2} \\
f''(0) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \\
f'''(0) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right) \\
&... \\
f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right) \\
f^{(n+1)}(c) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+c)^{-\frac{1}{2}-n}
\end{aligned}$$

De Maclaurinreeks wordt dus

$$\begin{aligned}
T_n(f,0)(x) &= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)x^3 \\
&\quad +... + \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{6} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot(2n-2)}\frac{x^n}{2n}
\end{aligned}$$

(b) Bewijs dat $|R_n(x)| \le \left|\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)x^{n+1}\right|$ voor $x \ge 0$

$$R_n = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+c)^{-\frac{1}{2}-n}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Voor $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot ...\cdot\left(\frac{3}{2}-n\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-n\right)x^{n+1}(1+c)^{-n-\frac{1}{2}}$ geldt dat de exponent $-n-\frac{1}{2}$

zeker negatief is, en indien $x \geq 0$, dan is ook $c > 0$, en *alleen in dat geval* kunnen we deze restterm afschatten door

$$|R_n(x)| \leq \left|\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{2} - n\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - n\right) x^{n+1}\right|$$

(c) Bereken $\sqrt{\frac{5}{4}}$ door de vorige formule voor $n = 3$ te gebruiken, en schat af hoe groot de fout is. (De werkelijke waarde is $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118\,033\,989$)

$T_3(f,0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^3}{6}$

$\Rightarrow T_3(f,0)\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{6} = \frac{1145}{1024} \simeq 1.118\,164\,063$

Fout: $|R_n(x)| \leq \left|\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4\right| = 0.003\,662\,109\,375$

9. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{Bgtan} n}{n^2}$$

Het criterium der convergente majoranten zegt:
$\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{Bgtan} n}{n^2} \leq \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}$
$\Rightarrow$ De reeks is convergent.

10.

(a) Bewijs dat de functie $f(x) = e^x \cos x$ op een factor na gelijk is aan zijn eigen vierde afgeleide. Welke factor?
$\frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x(\cos x - \sin x)$
$\frac{d^2}{dx^2}(e^x \cos x) = -2e^x \sin x$
$\frac{d^3}{dx^3}(e^x \cos x) = -2e^x(\cos x + \sin x)$
$\frac{d^4}{dx^4}(e^x \cos x) = -4e^x(\cos x) \Rightarrow -4$

(b) Schrijf de 7e Taylorpolynoom van $f(x)$ rond 0 op.
$\frac{d^5}{dx^5}(e^x \cos x) = -4e^x(\cos x - \sin x)$
$\frac{d^6}{dx^6}(e^x \cos x) = 8e^x \sin x$
$\frac{d^7}{dx^7}(e^x \cos x) = 8e^x(\cos x + \sin x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (e^x \cos x)(0) = 1 \\ \dfrac{d}{dx}(e^x \cos x)(0) = 1 \\ \dfrac{d^2}{dx^2}(e^x \cos x)(0) = 0 \\ \dfrac{d^3}{dx^3}(e^x \cos x)(0) = -2 \\ \dfrac{d^4}{dx^4}(e^x \cos x)(0) = -4 \\ \dfrac{d^5}{dx^5}(e^x \cos x)(0) = -4 \\ \dfrac{d^6}{dx^6}(e^x \cos x)(0) = 0 \\ \dfrac{d^7}{dx^7}(e^x \cos x)(0) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_7(f(x), 0)(x) = 1 + \frac{x}{1!} - \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^4}{4!} - \frac{4x^5}{5!} + \frac{8x^7}{7!} = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{630}$$

(c) Beschouw deze ontwikkeling op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Schrijf de restterm $R_7(x)$ van Lagrange op.

$$\frac{d^8}{dx^8}(e^x \cos x) = 16e^x \cos x$$

$$\Rightarrow R_8(x) = \frac{16e^\xi \cos \xi}{8!}x^8 = \frac{e^\xi \cos \xi}{2520}x^8 \text{ met } \xi \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

(d) Hoeveel is $\sqrt{e}\cos\frac{1}{2}$ volgens deze benadering, en hoeveel bedraagt de fout? (De werkelijke waarde is ongeveer 1.446 889 037)

$$T_7(f(x), 0)\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 0.5}\left(1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{630}\right) = 1.446\,887\,401$$

$$|R_8(x)| \leq \frac{\sqrt{e}\cos\frac{1}{2}}{2520} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \leq \frac{2}{2520} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{322\,560} = 0.000\,003\,100\,198\,413$$

11. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{4}{2 + 3^n n}$$

d'Alembert zegt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{2+3^{n+1}(n+1)}}{\frac{4}{2+3^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3^n n}{2+3^{n+1}(n+1)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{(H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 3^n n \ln 3}{3^{n+1}(\ln 3 + n\ln 3 + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n\ln 3}{3(\ln 3 + n \ln 3 + 1)} =$$
$$\frac{\infty}{\infty} \overset{(H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 3}{3 \ln 3} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ De reeks is convergent.

Een ander mooi argument dat ik u niet wil onthouden is het volgende:

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$ is een convergente reeks, want ze is meetkundig met $q = \frac{1}{3}$, en $\left(\frac{1}{n}\right)_n \searrow 0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n n}$ is een convergente reeks wegens het criterium van Dirichelet of Abel

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2+3^n n}$ is een convergente reeks want die hierboven is er een convergente majorant van

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{4}{2+3^n n}$ is een convergente reeks want vermenigvuldigen met 4 verandert de convergentie of divergentie niet.

12. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$. Hint: bewijs eerst dat

$$\int e^x \cos nx dx = \frac{e^x}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) + c$$

$f(x) = e^{|x|}$ is even $\Rightarrow \forall b_n = 0$

Laten we $\int e^x \cos nx dx$ berekenen. $\begin{cases} u = \cos nx \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -n \sin nx dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int e^x \cos nx dx = e^x \cos nx dx + n \int e^x \sin nx dx$$

$\begin{cases} u = \sin nx \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n \cos nx dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int e^x \cos nx dx = e^x \cos nx + n \left(e^x \sin nx - n \int e^x \cos nx dx \right) \\
&\Rightarrow \int e^x \cos nx dx = e^x \cos nx + n e^x \sin nx - n^2 \int e^x \cos nx dx \\
&\Rightarrow \left(1+n^2\right) \int e^x \cos nx dx = e^x (\cos nx + n \sin nx) \\
&\Rightarrow \int e^x \cos nx dx = \frac{e^x}{1+n^2} (\cos nx + n \sin nx) + c
\end{aligned}$$

De fouriercoëfficiënten worden

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos nx dx = \frac{2}{\pi (1+n^2)} \left[e^x (\cos nx + n \sin nx) \right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{e^\pi \cos \pi n - 1}{n^2+1} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1} = \begin{cases} \dfrac{2(e^\pi - 1)}{\pi (n^2+1)} & \text{als} \quad n \text{ even} \\ -\dfrac{2(e^\pi + 1)}{\pi (n^2+1)} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases}
\end{aligned}$$

In het bijzonder is $a_0 = \frac{2}{\pi} (e^\pi - 1)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1} \cos nx$$

13. Gegeven een meetkundige rij waarvoor $s_3 = \frac{26}{9}$ en $s_6 - s_5 = 54$. Bepaal x_1 en q. (er is maar één oplossing)

$\begin{cases} s_3 = x_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} \\ s_6 - s_5 = x_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} - x_1 \dfrac{1-q^5}{1-q} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{26}{9} = x_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} \\ 54 = x_1 \dfrac{q^5-q^6}{1-q} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{26}{9} = x_1 \left(1+q+q^2\right) \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{243} = \dfrac{1+q+q^2}{q^5} \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 13q^5 = 243\left(1+q+q^2\right) \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 13q^5 - 243q^2 - 243q - 243 = 0 \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 13 & 0 & 0 & -243 & -243 & -243 \\ 3 & & 39 & 117 & 351 & 324 & 243 \\ \hline & 13 & 39 & 117 & 108 & 81 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ x_1 = \dfrac{54}{q^5} = \dfrac{54}{3^5} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$
De rij is $\left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{3}, 2, 6, 18, 54, ...\right)$

14. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}$$

d'Alembert zegt:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}}{\dfrac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{De reeks is convergent}$$

15. Gegeven de rekenkundige rij van hogere orde

$$(3, 0, 9, 42, 111, 228, 405, ...)$$

Wat is de algemene formule voor de n–de term en wat is het volgend element uit het rijtje?
Verschilrij: $(-3, 9, 33, 69, 117, 177, ...)$
Verschilrij: $(12, 24, 36, 48, 60, ...)$
Verschilrij: $(12, 12, 12, 12, 12, ...)$
De oorspronkelijke rij is dus van orde 3
Stel $x_n = an^3 + bn^2 + cn + d$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a + b + c + d = 3 \\ x_2 = 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ x_3 = 27a + 9b + 3c + d = 9 \\ x_4 = 64a + 16b + 4c + d = 42 \end{cases}$$
$\Rightarrow (a, b, c, d) = (2, -6, 1, 6)$
$\Rightarrow x_n = 2n^3 - 6n^2 + n + 6$
$\Rightarrow x_8 = 654$

16. Bereken de Taylorpolynoom $T_6\left(f,0\right)\left(x\right)$ voor $f\left(x\right)=\cos^2 x$. Hint: gebruik de gepaste goniometrische formule!
$f\left(x\right)=\cos^2 x \Rightarrow f\left(0\right)=1$
$f'\left(x\right)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x \Rightarrow f'\left(0\right)=0$
$f''\left(x\right)=-2\cos 2x \Rightarrow f''\left(0\right)=-2$
$f'''\left(x\right)=4\sin 2x \Rightarrow f'''\left(0\right)=0$
$f^{iv}\left(x\right)=8\cos 2x \Rightarrow f^{iv}\left(0\right)=8$
$f^{v}\left(x\right)=-16\sin 2x \Rightarrow f^{v}\left(0\right)=0$
$f^{vi}\left(x\right)=-32\cos 2x \Rightarrow f^{v}\left(0\right)=-32$
$\Rightarrow T_6\left(f,0\right)\left(x\right)=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{8}{4!}x^4-\frac{32}{6!}x^6=1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6$

17. Ned Stark heeft vijf kinderen: van oud naar jong heten ze Robb, Sansa, Bran, Arya en Rickon. Hun leeftijden vormen een rekenkundige rij. De som van hun leeftijden is 50 en de som van de kwadraten van hun leeftijden is 590. Hoe oud is Sansa?
Stel de RR $\left(x_3+2v, x_3+v, x_3, x_3-v, x_3-2v\right)$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3+2v+x_3+v+x_3+x_3-v+x_3-2v=50 \\ \left(x_3+2v\right)^2+\left(x_3+v\right)^2+x_3^2+\left(x_3-v\right)^2+\left(x_3-2v\right)^2=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 5x_3=50 \\ 10v^2+5x_3^2=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ 10v^2+500=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ 10v^2=90 \end{cases}$
$|\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ v^2=9 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ v=-3 \end{cases}$
$\Rightarrow \left(16,13,10,7,4\right)$. Sansa is dus 13.

18. Bereken de fourierreeks van de functie $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & \text{als} \quad x\in\left[-\pi,0\right] \\ 2x & \text{als} \quad x\in\left[0,\pi\right] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f_E\left(x\right)=\left|x\right| \\ f_O\left(x\right)=x \end{cases}$

- $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx=\pi$
- $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx dx=\left[\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos nx+nx\sin nx\right)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right)\begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \\ 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \end{cases}$
- $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sin nx-nx\cos nx\right)\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{n}\left(-1\right)^n=\frac{2}{n}\left(-1\right)^{n+1}$
- $\Rightarrow f\left(x\right)\overset{b.o.}{=}\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n-1\right)x}{\left(2n-1\right)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin nx$