Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

dr. Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2019–2020

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Hoeveel is

$$\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\frac{1}{i+3}+\frac{1}{i+4}$$

Het antwoord moet in de vorm $a+bi$ staan.

/6

2. De rest bij deling van $A(z)$ door $z - i$ is $3i$. De rest bij deling van $A(z)$ door $z - 2i$ is $1 + i$. Wat is de rest bij deling van $A(z)$ door $z^2 - 3iz - 2$?

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{1+2x}}{x^2 - 3x + 2}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(\sin x + \sin 5x)(\cos x - \cos 3x)}{(1 - \cos 2x) \sin x}$

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2+x}\right)^{3x-4}$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\frac{1}{\log_x 2} + \log_2\left(52 - x^2\right) = 5 + \log_2 3$$

Kijk goed na of de gekomen oplossingen wel oplossingen van de vergelijking zijn!

/6

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + \mathrm{Bgtan}^2\, x}$, en vereenvoudig de vorm zodanig dat er nog maar maximaal één breuk in je oplossing staat.

/6

6. Maak een tekenonderzoek (= domein, asymptoten, nulpunten en polen, onderzoek 1e en 2e afgeleide en tekening) van de functie $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+1}$. Bepaal in het bijzonder de functiewaarde in alle minima, maxima en buigpunten.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{5x^3 + x^2 + 2x - 3}{x^4 + x^2} dx$$

/6

8. Bereken door een goeie substitutie van tweede klasse:

$$\int \frac{2dx}{2\cos x + \sin x + 1}$$

/6

9. Bereken de oneigenlijke integraal $\int\limits_{0+}^{1} \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}} dx$. Er wordt streng toegekeken op de juiste notatie!

/6

10. Bereken de oppervlakte binnen de cirkel $r = 1$ en buiten de poolkromme $r = \sqrt{\sin 3\theta}$. Teken het gebied in kwestie eerst.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Hoeveel is

$$\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\frac{1}{i+3}+\frac{1}{i+4}$$

Het antwoord moet in de vorm $a+bi$ staan.
$\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\frac{1}{i+3}+\frac{1}{i+4}=\frac{1-i}{2}+\frac{2-i}{5}+\frac{3-i}{10}+\frac{4-i}{17}=\frac{85(1-i)+34(2-i)+17(3-i)+10(4-i)}{170}=\frac{122}{85}-\frac{73}{85}i$

Feedback: $\frac{66i+20}{40i-10}$ is dus NIET geijk aan $-2+\frac{33}{20}i$! Wie iets geschreven heeft in de zin van $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}i$, heeft op deze vraag een nul.

2. De rest bij deling van $A(z)$ door $z-i$ is $3i$. De rest bij deling van $A(z)$ door $z-2i$ is $1+i$. Wat is de rest bij deling van $A(z)$ door $z^2-3iz-2$?
$A(z)=\left(z^2-3iz-2\right)Q(z)+az+b$
$\begin{cases} A(i)=ai+b=3i \\ A(2i)=2ai+b=1+i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2-i \\ b=-1+5i \end{cases}$
$\Rightarrow R(z)=(-2-i)z-1+5i$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{1+2x}}{x^2-3x+2}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4-x-1-2x}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{1+2x}\right)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-3x}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{1+2x}\right)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-3}{(x-2)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{1+2x}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+\sin 5x)(\cos x-\cos 3x)}{(1-\cos 2x)\sin x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cos 2x\cdot(-2)\sin 2x\sin(-x)}{2\sin^2 x\sin x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 3x\cos 2x\sin 2x\sin x}{2\sin^3 x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cos 2x\sin 2x}{\sin^2 x}$
$=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot 2x}{x^2}=12$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{3x-4}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{(x+2)\frac{3x-4}{x+2}}$
$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x+2}}=e^3$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\frac{1}{\log_x 2} + \log_2\left(52 - x^2\right) = 5 + \log_2 3$$

Kijk goed na of de gekomen oplossingen wel oplossingen van de vergelijking zijn!
$\log_2 x + \log_2\left(52 - x^2\right) = 5 + \log_2 3$
$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2\left(52 - x^2\right) = \log_2 2^5 + \log_2 3$
$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2\left(52 - x^2\right) = \log_2 32 + \log_2 3$
$\Leftrightarrow \log_2\left(52x - x^3\right) = \log_2 96$
$\Leftrightarrow x^3 - 52x + 96 = 0$
$\Rightarrow x \in \{2, 6, -8\}$ maar die laatste oplossing is niet mogelijk omwille van de beginvoorwaarde
$\Rightarrow x \in \{2, 6\}$

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + \operatorname{Bgtan}^2 x}$, en vereenvoudig de vorm zodanig dat er nog maar maximaal één breuk in je oplossing staat.
$f'(x) = \dfrac{\left(1 + \operatorname{Bgtan}^2 x\right) 2x - x^2 \cdot 2 \operatorname{Bgtan} x \dfrac{1}{1+x^2}}{\left(1 + \operatorname{Bgtan}^2 x\right)^2}$
$= \dfrac{\left(1 + \operatorname{Bgtan}^2 x\right) 2x \left(1 + x^2\right) - x^2 \cdot 2 \operatorname{Bgtan} x}{\left(1 + \operatorname{Bgtan}^2 x\right)^2 \left(1 + x^2\right)}$
Feedback: een macht $^{-1}$ schrijven om het probleem te omzeilen mag natuurlijk niet. Een substitutie $\tan t = x$ helpt niet.

6. Maak een tekenonderzoek (= domein, asymptoten, nulpunten en polen, onderzoek 1e en 2e afgeleide en tekening) van de functie $f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+1}$. Bepaal in het bijzonder de functiewaarde in alle minima, maxima en buigpunten.

- Domein $= \mathbb{R}$
- VA: geen
  HA: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ is een horizontale asymptoot

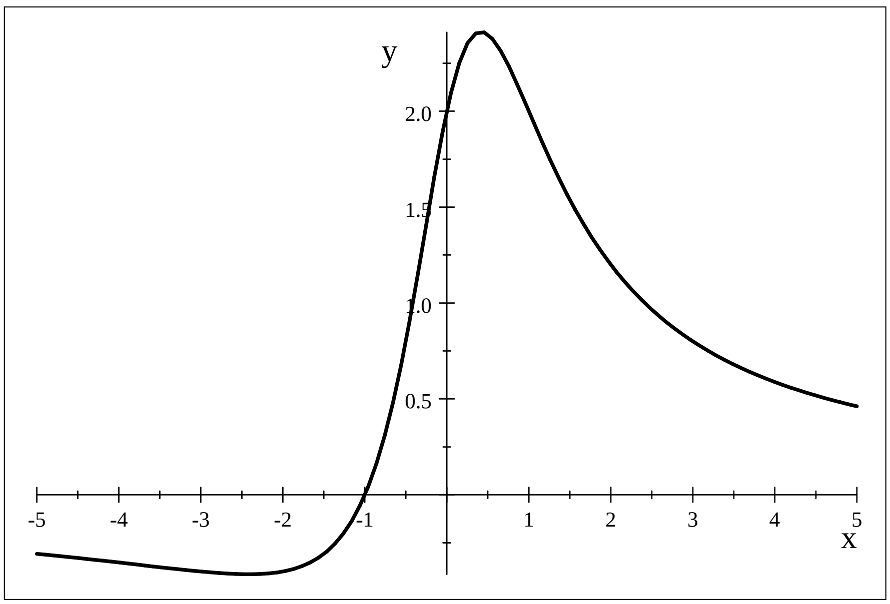
x		-1	
$f(x) - A$	$-$	0	$+$

  Als $x \to +\infty$, dan ligt f boven A
  Als $x \to -\infty$, dan ligt f onder A
  Er is bijgevolg geen SA
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
  Polen: geen
- $f'(x) = -\dfrac{2\left(x^2 + 2x - 1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\right\}$
- $f''(x) = \dfrac{4\left(x^3 + 3x^2 - 3x - 1\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}, 1\right\}$

-

x		$-2-\sqrt{3}$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-2+\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{2}$		1	
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m\left(1-\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$M\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\frown$	$B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$B(2)$	$\smile$

-



Feedback: De tweede afgeleide schrijven als $\dfrac{4x^5+12x^4-8x^3+8x^2-12x-4}{(x^2+1)^4}$ resulteert in het feit dat je NOOIT de nulpunten gaat vinden! Het is belangrijk om één keer x^2+1 weg te schrappen van zodra dit mogelijk is. Bij een asymptotenonderzoek hoort ook een liggingsonderzoek!

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^4+x^2}dx$$

$$\frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^4+x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x}$$

$$\begin{aligned}
Ai+B &= \left.\frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^2}\right|_{x=i} = 4+3i \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=4 \end{cases} \\
C &= \left.\frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^2+1}\right|_{x=0} = -3 \\
\frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^4+x^2}+\frac{3}{x^2} &= \frac{5x^2+4x+2}{x^3+x} \\
D &= \left.\frac{5x^2+4x+2}{x^2+1}\right|_{x=0} = 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{5x^3+x^2+2x-3}{x^4+x^2} = \dfrac{3x+4}{x^2+1} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{5x^3+x^2+2x-3}{x^4+x^2}dx = \int \frac{3x+4}{x^2+1}dx - \int \frac{3}{x^2}dx + \int \frac{2}{x}dx$

$= \dfrac{3}{2}\displaystyle\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{x^2+1} - 3\int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x}$

$= \dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4\,\mathrm{Bgtan}\,x + \dfrac{3}{x} + 2\ln|x| + c$

Feedback: De splitsing in partieelbreuken is NIET $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2}$. Een uitkomst met complexe getallen in, is onzin.

8. Bereken door een goeie substitutie van tweede klasse:

$$\int \frac{2dx}{2\cos x + \sin x + 1}$$

Stel $t = \tan\dfrac{x}{2}$

$= \displaystyle\int \frac{\frac{4dt}{1+t^2}}{2\frac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+1} = \int \frac{4}{-t^2+2t+3}dt = \int -\frac{4}{(t+1)(t-3)}dt$

$-\dfrac{4}{(t+1)(t-3)} = \dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{t-3}$

$$\begin{aligned}
A &= -\left.\frac{4}{t-3}\right|_{t=-1} = 1 \\
B &= -\left.\frac{4}{t+1}\right|_{t=3} = -1
\end{aligned}$$

$-\dfrac{4}{(t+1)(t-3)} = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t-3}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{2dx}{2\cos x+\sin x+1} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-3} = \ln|t+1| - \ln|t-3| + c$

$= \ln\left|\dfrac{t+1}{t-3}\right| + c = \ln\left|\dfrac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-3}\right| + c$

9. Bereken de oneigenlijke integraal $\int\limits_{0+}^{1} \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}} dx$. Er wordt streng toegekeken op de juiste notatie!

$$\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{0+}^{1} \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0+} \left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} \right]_c^1 = -\frac{8}{5} - \lim_{c \to 0+} \left(\frac{2}{5}c^2\sqrt{c} + 2c\sqrt{c} - 4\sqrt{c} \right) = -\frac{8}{5}$$

10. Bereken de oppervlakte binnen de cirkel $r = 1$ en buiten de poolkromme $r = \sqrt{\sin 3\theta}$. Teken het gebied in kwestie eerst.

- Periode $= \frac{2\pi}{3}$

  Domein $= \left[k\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \right]$

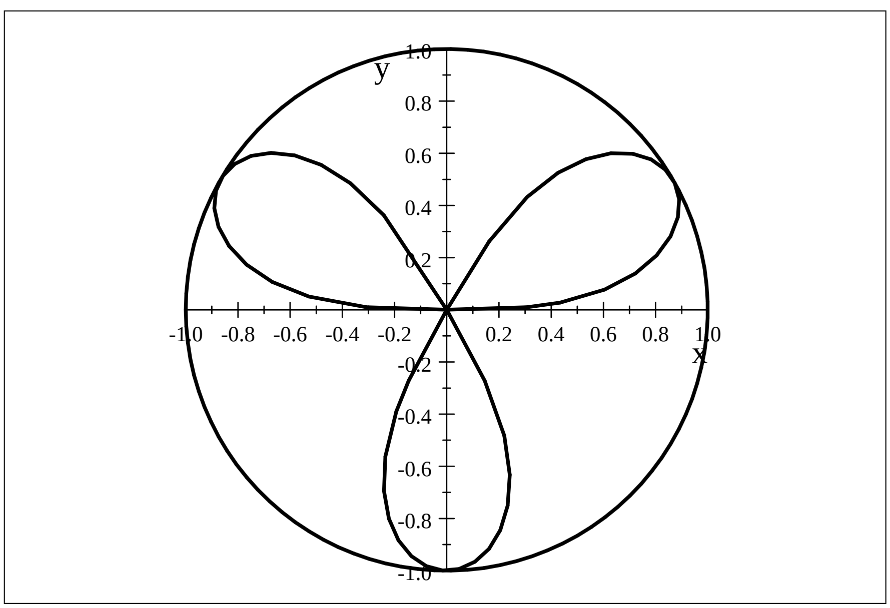
  $\Rightarrow$ Beperkt domein $\left[0, \frac{\pi}{3} \right]$

- $r = \sqrt{\sin 3\theta} = 0 \Leftrightarrow 3\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{3}$

- $r' = \frac{3}{2} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 3\theta}} = 0 \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
	$m\,(0)$	$\nearrow$	$M\,(1)$	$\searrow$	$m\,(0)$

-



- $S = \pi - 6 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3\theta d\theta = \pi - 3 \left[-\frac{1}{3} \cos 3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \pi + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \pi - 1$

  Feedback: De oppervlakte van een cirkel met straal 1 is π, NIET 2π