Elektromagnetisme

God sprak "Laat

$$
\begin{aligned}
\int_S E_n \, \mathrm{d}A &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}\vec{r} \\
\int_S B_n \, \mathrm{d}A &= 0 \\
\oint_C E_t \, \mathrm{d}\ell &= -\int_S \frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}A \\
\oint_C B_t \, \mathrm{d}\ell &= \mu_0 \int_S \left(J_n + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}A
\end{aligned}
$$

zijn" en er was licht.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 21, deel 1)

- De componenten van het elektrisch veld op plaats (x, y, z) ten gevolge van een puntlading q op plaats (x', y', z') wordt gegeven door

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{x - x'}{r}$$

  waarbij

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

  en

$$\varepsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}.$$

  De andere componenten kan je vinden door $x - x'$ in de eerste uitdrukking te vervangen door $y - y'$ of $z - z'$.

- Deze formule geldt enkel voor statische ladingen. In deze cursus hoef je daar echter niet wakker van te liggen.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 21, deel 2)

- Elektrische velden (in hetzelfde punt!) ten gevolge van meerdere puntladingen mogen worden opgeteld. Dit is ook het principe achter de theorie van continue ladingsverdelingen.
- De elektrische kracht op een lading q op positie $\vec{r}$ waar een elektrisch veld heerst wordt gegeven door
$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$
- In het geval van een elektrisch veld veroorzaakt door één puntlading q' op positie $\vec{r}'$ wordt dit
$$F_x = qE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{x-x'}{r}$$
met dezelfde betekenis voor alle gebruikte symbolen en dezelfde opmerking over de andere componenten als op de vorige slide.

Oefening 1: Elektrisch veld (21.12)

Beschouw een vierkant met een lading $+q$ in twee tegenoverliggende hoeken en een lading $-q$ in de andere hoeken. Welke uitspraken zijn correct?

1. $\vec{E}$ is nul in het midden van elke zijde.
2. $\vec{E}$ is nul in het middelpunt van het vierkant.

Oefening 2: Elektrisch veld (21.35)

Vijf identieke puntladingen met lading Q liggen op gelijke afstand langs een halve cirkel met straal R. Zoek de kracht op de lading q gelegen in het "middelpunt" van de halve cirkel.

Oefening 3: Elektrisch veld (21.48)

Twee puntdeeltjes met lading q worden op een afstand a van elkaar geplaatst. Een derde puntdeeltje met lading $2q$ wordt zodanig geplaatst dat de 3 deeltjes een gelijkzijdige driehoek vormen. Tussen de twee deeltjes met lading q wordt een vierde lading q' geplaatst zodanig dat het elektrisch veld in het zwaartepunt van de driehoek nul is. Wat is q'?

Oefening 4: Kracht op een lading (21.53)

Een elektron heeft een initiële snelheid $\vec{v}_0 = v_x\hat{\imath} = 2,0 \cdot 10^6 \frac{m}{s}\hat{\imath}$. Daarna komt het in een gebied waar een uniform elektrisch veld

$$\vec{E} = 300\frac{N}{C}\ \hat{\jmath}$$

heerst.

1. Zoek de versnelling van het elektron.
2. Hoe lang duurt het voor het elektron om een afstand van $10cm$ in de x-richting af te leggen in het gebied waar het $\vec{E}$-veld heerst?
3. Over welke hoek is het elektron afgebogen wanneer het die $10cm$ heeft afgelegd?
4. In welke richting beweegt het elektron dan?

De lading van een elektron is $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}C$ en de massa is $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}kg$.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 22, deel 1)

- De componenten van het elektrisch veld in een punt $\vec{r}$ tegen gevolge van een ladingsdichtheid wordt gegeven door

$$E_x(x,y,z) = \int_Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x-x'}{r}\mathrm{d}q$$

met

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

De andere componenten E_y en E_z kan je bekomen door $x - x'$ te vervangen door $y - y'$ en $z - z'$ respectievelijk.
Afhankelijk van het soort ladingsverdeling is

$$\mathrm{d}q = \lambda(\vec{r}')\mathrm{d}\ell \quad \text{of} \quad \mathrm{d}q = \sigma(\vec{r}')\mathrm{d}S \quad \text{of} \quad \mathrm{d}q = \rho(\vec{r}')\mathrm{d}V$$

waarbij je telkens integreert over de coördinaten met accent. Let op dat wanneer je niet in carthesische coördinaten werkt, de Jacobiaan deel zal uitmaken van dS of dV.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 22, deel 2)

- De elektrische flux door een oppervlak S wordt gegeven door

$$\phi = \int_S E_n \, \mathrm{d}A.$$

- Wet van Gauss

$$\oint_S E_n \, \mathrm{d}A = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}\vec{r}$$

  waarbij S de rand is van het volume V. Dit is een goede manier om te onthouden dat S gesloten dient te zijn. Deze wet zegt dat elektrische veldlijnen beginnen in positieve ladingen en verdwijnen in negatieve ladingen.

Oefening 5: Flux

1. Indien de netto flux doorheen een *gesloten* oppervlak gelijk is aan nul, volgt daaruit dan dat het $\vec{E}$-veld op het oppervlak overal gelijk is aan nul?
2. Volgt daaruit dat de netto lading omsloten door het oppervlak gelijk is aan nul?

Oefening 6: Flux (22.32)

Wat is de flux door één zijde van een kubus die in het midden een puntlading van $-3\mu C$ heeft zitten?

Oefening 7: Elektrisch veld (22.22)

Een niet-geleidende ring met straal a heeft een ladingsverdeling die varieert als

$$\lambda = \lambda_0 \sin \vartheta$$

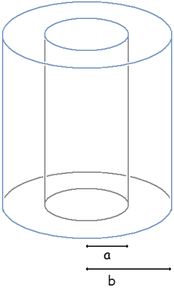
met λ_0 een constante. Wat is de richting en de grootte van het elektrisch veld in het centrum van de ring?

Oefening 8: Elektrisch veld (22.26)

Gegeven is een halve bolschil met straal r met een uniforme oppervlakteladingsdichtheid σ. Wat is het elektrisch veld in het "middelpunt" van de bol?

Oefening 9: $\vec{E}$ van een holle cilinder (22.56)

Gegeven een oneindig lange cilinder waarvan de wand een eindige dikte heeft. De binnenste mantel heeft een straal a en de buitenste mantel een straal b. De cilinder heeft een homogene volumeladingsdichtheid ρ in de wand. Zoek het elektrisch veld overal in de ruimte (zowel in de cilinder, in de wand als buiten de cilinder).



Figuur: De holle cilinder met homogene volumeladingsdichtheid ρ.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 23,deel 1)

- Gegeven de elektrische potentiaal wordt het elektrisch veld gegeven door

$$E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r})$$

en opnieuw analoog voor y en z. Dit *is* de definitie van een potentiaal.

- Voor een continue ladingsverdeling geldt voor de potentiaal in een punt met coördinaten (x, y, z)

$$V(x, y, z) = \int_Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}q$$

met r en dq precies zoals gedefinieerd op de eerste slide met nuttige uitdrukkingen van hoofdstuk 22.

- De potentiaal van een puntlading is sferisch symmetrisch rond de lading en de waarde van de potentiaal op een afstand r van de lading is

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \text{cte.}$$

De (integratie)constante wordt vaak 0 gesteld zodat V verdwijnt op oneindig maar dit is geen verplichting.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 23, deel 2)

- Een potentiaal*verschil* tussen twee punten wordt gedefinieerd door

$$\Delta V = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

  Deze integraal hangt niet af van het gekozen pad. Het staat je dus vrij het eenvoudigste "integratiepad" te kiezen.

- De potentiële energie van een lading q op positie $\vec{r}$ wordt gegeven door

$$U(\vec{r}) = qV(\vec{r}).$$

Oefening 10: Elektrische potentiaal (23.3)

1. Zal een positieve lading die initieel in rust is naar een gebied van hogere of lagere potentiaal bewegen?
2. Indien de potentiaal uniform is in een gebied van de ruimte, wat kan je dan zeggen over het elektrisch veld in dat gebied?

Oefening 11: Potentiaal en elektrisch veld

Toon aan dat de potentiaal van een puntdeeltje (zoals gegeven op de slide met nuttige uitdrukkingen) aanleiding geeft tot het elektrisch veld van eenzelfde puntdeeltje (zoals op de slide van hoofdstuk 21).

Oefening 12: Elektrische potentiaal (23.10)

Een elektrostatische potentiaal wordt gegeven door (in V)

$$V(x, y, z) = 4|x| + V_0$$

met V_0 een constante en x uitgedrukt in m.

1. Teken het elektrisch veld voor deze potentiaal.
2. Welke situatie geeft aanleiding tot deze potentiaal?
   1. Een puntlading in de oorsprong.
   2. Een geladen plaat in de oorsprong.
   3. Een uniform geladen bol gecentreerd rond de oorsprong.

   Bepaal ook het teken dat de lading dient te hebben.

Oefening 13: Potentiaalverschil (23.47)

Twee concentrische geleidende bolschillen hebben een gelijke maar tegengestelde lading. De binnenste schil heeft een straal a en een lading $+q$, de buitenste schil heeft een straal b en een lading $-q$. Zoek het potentiaalverschil tussen de bolschillen.

Oefening 14: Potentiaal en elektrisch veld (23.32)

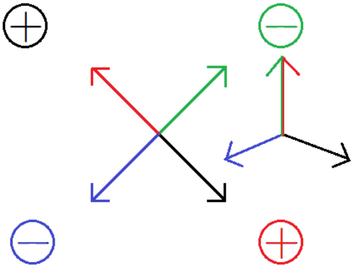
Een lading van $+3e$ bevindt zich in de oorsprong en een 2^e lading van $-2e$ bevindt zich op $x = a$.

1. Schets de potentiaalfunctie $V(x)$.
2. In welke punten is $V(x)$ nul?
3. In welke punten is het elektische veld nul?
4. Hoeveel arbeid wordt er verricht om een derde lading $+e$ vanuit oneindig tot aan het punt $x = a/2$ te brengen?

Oplossingen

Oefening 1: Oplossing

1. Het elektrisch veld in het midden van de zijden is niet gelijk aan nul.
2. Het elektrisch veld in het midden van het vierkant is wel nul.



Figuur: Het elektrische veld ten gevolge van elk van de ladingen. Het totale elektrische veld is de som van de vectoren. Merk op dat het elektrisch ten gevolge van positieve ladingen van de lading weg wijst terwijl het voor negatieve ladingen net andersom is.

Oefening 2: Oplossing (1)

- Indien gewenst, kan je het elektrisch veld volledig uitrekenen met behulp van de wet van Coulomb en het superpositiebeginsel. Je kan je jezelf echter veel werk besparen.
- Kies een coördinatenstelsel waarvan de oorsprong in het middelpunt van de halve cirkel ligt en waarvan één as (laat ons deze de y-as kiezen) door de twee "buitenste" ladingen loopt. De x-as staat hier loodrecht op, in deze oplossing in de richting van de middelste lading.
- Het netto elektrisch veld in de oorsprong zal nu enkel in de x-richting liggen (van de ladingen weg als $Q > 0$ en naar de ladingen toe indien $Q < 0$) daar de y-component van het elektrisch veld ten gevolge van elke lading wordt gecompenseerd door het elektrisch veld ten gevolge van een andere lading.
- De twee "buitenste" ladingen dragen niet bij want hun elektrisch veld heeft geen component in de x-richting.

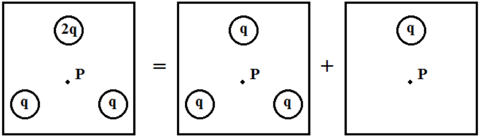
Oefening 2: Oplossing (2)

- Er moet alleen worden gekeken naar x-componenten en er zijn nog maar 3 van de 5 ladingen belangrijk. Daarom geldt

$$
\begin{aligned}
E_x(\vec{0}) = & \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(-x^{(2)} - x^{(3)} - x^{(4)}\right) \\
= & \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(-R\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - R\cos(0) - \cos\left(R\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
= & -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

Oefening 3: Oplossing (1)

- Om je leven aangenaam te maken, kan je opmerken dat $2q = q + q$ en dat het superpositiebeginsel geldt voor elektrische velden. Als je dus in de plaats van één deeltje met lading $2q$ twee deeltjes met elk lading q zou plaatsen, zou het totale elektrisch veld ten gevolge van de ladingen op de hoekpunten dezelfde blijven.
- Net zoals bij het vierkant in de eerste oefening het elektrisch veld in het midden de waarde nul kreeg, zal het elektrisch veld ten gevolge van 3 identieke ladingen op de hoekpunten ook verdwijnen in het midden van de driehoek. Het elektrisch veld ten gevolge van de eerste 3 ladingen is dus hetzelfde als het elektrisch veld ten gevolge van één lading q in het hoekpunt waar de lading $2q$ zit.



Oefening 3: Oplossing (2)

- Een ander interessant inzicht is dat het middelpunt van een gelijkzijdige driehoek zich op 2/3 van de zwaartelijn van een hoekpunt af bevindt. De afstand van de lading q tot het middelpunt is dus dubbel zo groot als de afstand van q' tot het middelpunt.
- Indien we willen dat (in het middelpunt)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d^2} - \frac{q'}{(d/2)^2}\right)\hat{\jmath} = 0,$$

dan moet

$$q' = \frac{1}{4}q.$$

Oefening 4: Oplossing (1)

- De versnelling van het elektron is gegeven door de tweede wet van Newton. Dit betekent

$$
\begin{aligned}
a_y &= \frac{F_y}{m_e} \\
&= \frac{-e}{m} E_y \\
&= \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} C}{9,1 \cdot 10^{-31} kg} 300 \frac{N}{C} \\
&= -5,27 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2}.
\end{aligned}
$$

- In de x-richting wordt het electron niet versneld en dus geldt

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{0,1 m}{2,0 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} = 5,0 \cdot 10^{-8} s.$$

Oefening 4: Oplossing (2)

- Om te weten onder welke hoek het elektron is afgebogen, moeten we weten waar het zich bevindt na deze $5,0 \cdot 10^{-8} s$ (ten opzichte van de oorspronkelijke positie). In het bijzonder geldt

$$\Delta x = 0,1 m \quad \text{en} \quad \Delta y = \tfrac{1}{2} a t^2 = -\tfrac{e}{2} E_y \left(\frac{\Delta x}{v_x} \right)^2 .$$

  Daarom geldt

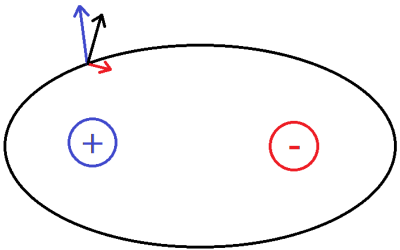
$$\theta = \mathrm{Bgtg}\left(\frac{2\Delta x}{a t^2} \right) = \mathrm{Bgtg}\left(\frac{2 \cdot 0,1 m}{-5,27 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2} 5,0 \cdot (10^{-8} s)^2} \right) = 56,6^\circ .$$

- Het elektron beweegt in de richting van zijn snelheid en deze richting is gegeven door

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{\vec{v}}{v} \\ &= \frac{v_x}{v} \hat{\imath} + \frac{a_y t}{v} \hat{\jmath} \\ &= 0,6 \hat{\imath} + 0,8 \hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Oefening 5: Oplossing

1. Neen. Het betekent enkel dat de integraal van de normale component van het elektrisch veld over het oppervlak nul is. Een tegenvoorbeeld is gegeven in de figuur. De ladingen zijn gelijk maar tegengesteld en de zwarte pijl is de som van de twee bijdrages.



2. Ja. Dit volgt uit de wet van Gauss of uit een beschouwing van de veldlijnen. In de linkse helft van de ellips zal het elektrisch veld naar buiten toe wijzen, in het rechtse gedeelte naar binnen toe. Deze bijdragen zullen elkaar exact opheffen. De makkelijkste manier om dat in te zien is opnieuw door symmetrie.

Oefening 6: Oplossing (1)

- Je kan de flux door een dergelijk oppervlak perfect berekenen door het uitrekenen van de oppervlakte-integraal

$$\phi = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{x^2 + y^2 + (a/2)^2} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

waarbij

$$\vartheta = \mathrm{Bgtan}\left(\frac{2x}{a}\right) \quad \text{en} \quad \varphi = \mathrm{Bgtan}\left(\frac{2y}{a}\right).$$

Dit is gelukkig niet de eenvoudigste methode.

Oefening 6: Oplossing (2)

- De wet van Gauss is geldig voor alle gesloten oppervlakken, ongeacht de precieze eigenschappen van dit oppervlak zoals vorm, volume...
- Dit betekent dat de totale flux door de kubus gelijk is aan

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

- Door de symmetrie is de flux door een zijde van de kubus één zesde van de totale flux en dus geldt voor de flux door 1 zijde

$$\begin{aligned}
\phi_{1\text{ zijde}} &= \frac{Q}{6\varepsilon_0} \\
&= \frac{-3 \cdot 10^{-6} C}{6 \cdot 8,854187817 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 \cdot s^4}{kg \cdot m^3}} \\
&= -56470 \frac{Nm^2}{C}.
\end{aligned}$$

Oefening 7: Oplossing (1)

- Kies een coördinaatstselsel met als oorsprong het middelpunt van de cirkel en de
- De lading van een infinitesimaal stukje draad dat zich bevindt tussen ϑ en $\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$ is
$$\mathrm{d}q = \lambda(\vartheta)\mathrm{d}\ell = \lambda(\vartheta)a\mathrm{d}\vartheta = \lambda_0 \sin(\vartheta)a\mathrm{d}\vartheta$$
- De bijdrage aan het elektrische veld in de oorsprong, ten gevolge van dit stukje draad is dus
$$\mathrm{d}E_y(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{a^2}\frac{0-y}{a} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 \sin^2(\vartheta)}{a}\mathrm{d}\vartheta.$$
waarbij is gebruik gemaakt van $y = a\sin(\vartheta)$.

Oefening 7: Oplossing (2)

- Er rest ons nu nog slechts $\mathrm{d}E_y$ te integreren over de cirkel om het eindresultaat te bekomen. Aldus

$$
\begin{aligned}
E_y(\vec{0}) &= \oint_C \mathrm{d}E_y(\vec{0}) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_0 \sin^2(\vartheta)}{a} \mathrm{d}\vartheta \\
&= -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_0^{2\pi} \sin^2(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= -\frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0 a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

Oefening 8: Oplossing (1)

- Door de symmetrie kan je het makkelijkst werken in bolcoördinaten met als oorsprong het punt waarin het elektrisch veld dient te worden berekend. De integralen die je moet doen zullen een pak moeilijker zijn in carthesische coördinaten (maar het resultaat zal natuurlijk wel hetzelfde blijven).
- Eveneens door symmetrie kan je afleiden dat het netto elektrische veld opgewekt door de halve bolschil gericht moet zijn langs de (rotatie-) symmetrie-as van het probleem. Laat ons dit als de z-as kiezen.
- De eerste stap is het zoeken van een infinitesimaal ladingselementje $\mathrm{d}q$. Dit is per definitie van de oppervlakteladingsdichtheid gegeven door

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}A$$

  met $\mathrm{d}A$ een infinitesimaal oppervlakte-elementje op de bolschil.
- In bolcoördinaten is het oppervlakte-elementje (voor een oppervlak waar r een constante is) gegeven door

$$\mathrm{d}A = r^2 \sin(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

Oefening 8: Oplossing (2)

- De volgende stap is het zoeken van de infinitesimale bijdrage aan de z-component van het elektrisch veld ten gevolge van $\mathrm{d}q$. Deze is gegeven door

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_z = & \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{0-z}{r}\mathrm{d}q \\
= & -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r\cos(\vartheta)}{r}\sigma\mathrm{d}A \\
= & -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

  De eerste gelijkheid is een deel van de eerste nuttige uitdrukking van hoofdstuk 22 (zie slide 7). Verder werd gebruik gemaakt van $z = r\cos(\vartheta)$, één van de transformatieformules die bol- en carthesische coördinaten aan elkaar relateren.

Oefening 8: Oplossing (3)

- De laatste stap is het berekenen van het elektrisch veld. Deze wordt gegeven door

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int \mathrm{d}E_z \\
&= -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\;\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\;\mathrm{d}\vartheta \\
&= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{1}\sin(\vartheta)\;\mathrm{d}\sin(\vartheta) \\
&= -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

- Zoals gezegd dienen de andere carthesische componenten niet uitgerekend te worden. Uit symmetrie volgt dat deze gelijk zullen zijn aan nul.

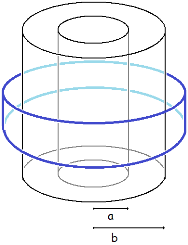
Oefening 9: Oplossing (1)

- Door de symmetrie van het probleem (invariant onder rotaties om de cilinderas en onder translaties langs deze as), zal het elektrisch veld sferisch symmetrisch zijn:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$$

  waarbij r de afstand van een punt tot de cilinderas voorstelt.

- Kies een Gaussoppervlak zoals in de figuur: een cilinder met hoogte h en straal r, die coaxiaal is met de gegeven cilinder.



Oefening 9: Oplossing (2)

- In deze oplossing zal r de straal van de cilinder voorstellen, de radiële integratievariabele zal telkens r' heten.
- Daar het elektrisch veld cilindersymmetrisch is, zal het overal loodrecht staat op de mantel van ons cilindervormig Gaussoppervlak. De grootte van het elektrisch veld op deze mantel hangt enkel van r af en is dus constant op de mantel. Op het boven- en ondervlak zal zich geen normale component bevinden: deze component zou E_z zijn en deze is nul.
- Je kan dit probleem in 3 delen opdelen als je dat wil. Het is ook mogelijk de berekening in één keer te doen. Voor de volume-integraal in de wet van Gauss moet je in principe integreren van 0 tot aan de straal van de cilinder maar van dit integratiedomein moet je enkel deel tussen $r' = a$ en $r' = b$ meenemen.

Oefening 9: Oplossing (3)

- De wet van Gauss zegt

$$\oint_S E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}\vec{r}\,'$$

met S het totale oppervlak en V het volume van de blauwe cilinder.

- Deze oppervlakte-integraal kan worden herschreven als

$$\begin{aligned} \oint_S E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A &= \int_M E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A + \int_{S_{\text{boven}}} E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A + \int_{S_{\text{onder}}} E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A \\ &= \int_M E_n(\vec{r})\, \mathrm{d}A \end{aligned}$$

waarbij M het manteloppervlak van de cilinder is, S_{boven} en S_{onder} zijn de boven- en ondervlakken. De laatste gelijkheid geldt omdat het elektrisch veld in het boven- en ondervlak van de cilinder geen component heeft die loodrecht op die vlakken staat.

Oefening 9: Oplossing (4)

- De oppervlakte-integraal in de wet van Gauss is het eenvoudigst. Deze kan worden uitgerekend als

$$\begin{aligned}\int_M E(\vec{r})\,\mathrm{d}A &= \int_0^h \int_0^{2\pi} E(r)\; r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z \\ &= rE(r)\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi hrE(r).\end{aligned}$$

  Hier is $E_n(r)$ vervangen door $E(r)$ daar het elektrisch veld gelijk is aan zijn normale component op mantel van het cilindervormige Gaussoppervlak.

Oefening 9: Oplossing (5)

- De volume-integraal is een beetje tricky, je vindt namelijk

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}\vec{r}' &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho(r')\; r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r')\; r'\mathrm{d}r' \\ &= \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\int_{\min\{a,r\}}^{\min\{b,r\}} \rho\; r'\mathrm{d}r' \\ &= \frac{\pi h\rho}{\varepsilon_0}\left(\min\{b,r\}^2 - \min\{a,r\}^2\right).\end{aligned}$$

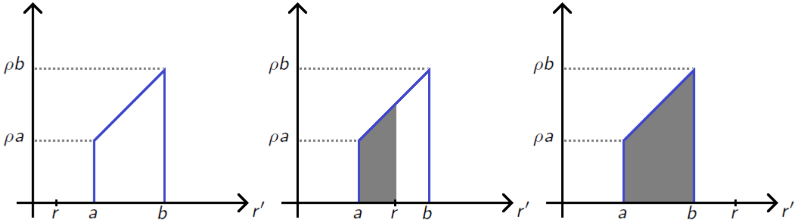
  Een grafische illustratie van de integraal over r' vind je op d volgende slide.

- Wanneer dit resultaat wordt gelijk gesteld aan het resultaat van de andere integraal, vind je

$$E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left(\min\{b,r\}^2 - \min\{a,r\}^2\right).$$

  Deze uitdrukking is continu maar niet overal afleidbaar, zoals verwacht.

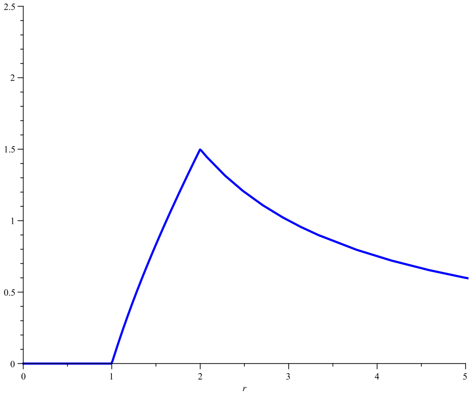
Oefening 9: Volume-integraal



Figuur: Een illustratie van de r'-integraal op de vorige slide. Voor de drie kwalitatief verschillende waarden van r is de integraal afgebeeld als de grijsgekleurde oppervlakte. Het integrand wordt weergegevend door de blauwe lijn. Wie verkiest deze integraal in 3 stukken op te lossen, mag dit natuurlijk ook doen.

Oefening 9: Oplossing (6)

- Een schets van het resultaat ziet er uit als



Figuur: Het verloop van $E(r)$ voor $a = 1$ en $b = 2$, alles uitgedrukt in arbitraire eenheden.

Oefening 10: Oplossing

- Een lading streeft net als elk ander voorwerp naar een zo laag mogelijke potentiële energie. Dit betekent niet noodzakelijk een zo laag mogelijke potentiaal.
- Voor een positieve lading zal een hoge potentiaal overeenkomen met een hoge potentiële energie, immers

  $$U = qV = +|q|V.$$

  Dit betekent dat streven naar een lage potentiële energie hetzelfde is als streven naar een lagere potentiaal.
- Voor een negatieve lading is het net andersom aangezien

  $$U = qV = -|q|V.$$

  Minima de in potentiaal worden dus maxima in potentiële energie en omgekeerd. Een negatieve lading zal daarom streven naar een hogere potentiaal.

Oefening 11: Oplossing (1)

- Het is de bedoeling aan te tonen dat

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{x-x'}{r} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right).$$

  en analoog voor y en z.
- Het is mogelijk deze berekening te doen gebruikmakend van

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

  om het resultaat te bekomen door standaard calculus.

Oefening 11: Oplossing (2)

- Je kan deze oefening ook als excuus aanwenden om de uitdrukking voor
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$
in het geval van sferisch symmetrische problemen af te leiden.
- Een eerste stap is om de oorsprong van het coördinatenstelsel zo te kiezen dat $\vec{r}' = \vec{0}$.
- We kunnen gebruik maken van de kettingregel, die zegt

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\imath} + \text{analoge termen}\right) \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}.
\end{aligned}$$

Oefening 11: Oplossing (3)

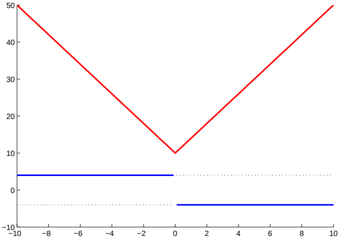
- Met deze uitdrukking voor de gradiënt in bolcoördinaten, kan je berekenen dat

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\vec{\nabla} V \\
&= -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \text{cte}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \text{cte}\right)\hat{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{r^2}\hat{r} \\
&= +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.
\end{aligned}
$$

Dit is inderdaad het elektrisch veld van een puntlading in bolcoördinaten.

Oefening 12: Oplossing (1)

- De schets ziet er uit als volgt:



Figuur: De potentiaal in het rood, de gradiënt van deze potentiaal in zwarte stippellijn en de x-component van het elektrisch veld in het blauw. De x-as wordt gemeten in m, de y-as in V en V/m.

Oefening 12: Oplossing (2)

- Uit symmetrie volgt dat enkel een geladen plaat aanleiding kan geven tot dit elektrisch veld. De andere twee mogelijkheden zouden een bolsymmetrische potentiaal $V(r)$ hebben.
- De potentiaal is het laagst aan de plaat zelf. Dit wijst op een negatieve lading. Een manier om dit in te zien of te onthouden is te bedenken dat een positieve testlading die je ergens plaatst, naar een gebied met een kleinere potentiaal wil gaan omdat zo de potentiële energie wordt verlaagd. Net zoals bij de zwaartekracht — al zijn daar de massa's, die de rol van ladingen spelen, positief. Positieve ladingen worden aangetrokken door negatieve ladigen en afgestoten door positieve ladingen dus deze potentiaal wordt veroorzaakt door negatieve ladingen.

Oefening 13: Oplossing (1)

- Een belangrijke opmerking is dat potentialen continue functies zijn en dat het superpositieprincipe ook voor hen geldt:

$$V_{\mathrm{tot}}(\vec{r}) = \sum_i V_i(\vec{r}).$$

  Potentialen hoeven niet differentieerbaar te zijn.

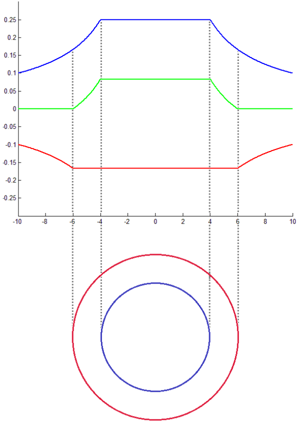
- Het superpositieprincipe betekent dat we de potentiaal ten gevolge van één bolschil kunnen berekenen en dat kunnen optellen bij de potentiaal ten gevolge van de andere bolschil.

- Uit het boek vinden we voor een bol met straal R en lading Q dat

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} & \text{als} \quad r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} & \text{als} \quad r > R. \end{cases}$$

  Deze potentialen zijn apart geplot op de volgende slide, alsook hun som.

Oefening 13: Schets



Figuur: De potentiaal ten gevolge van de beide bolschillen in rood en blauw en hun som, die de totale potentiaal voorstelt, in groen.

Oefening 13: Oplossing (2)

- Het potentiaalverschil tussen de twee schillen is gelijk aan het verschil in potentialen op de plaatsen van de twee schillen:

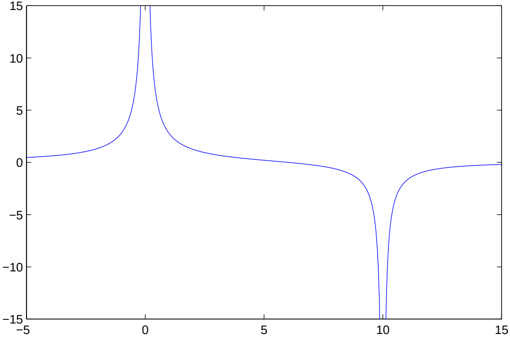
$$
\begin{aligned}
\Delta V &= V(b) - V(a) \\
&= [V_{R=a}(b) + V_{R=b}(b)] - [V_{R=a}(a) + V_{R=b}(a)] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[\frac{q}{b} + \frac{-q}{b}\right] - \left[\frac{q}{a} + \frac{-q}{b}\right]\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).
\end{aligned}
$$

Oefening 14: Oplossing (1)

- De potentiaal wordt gegeven door

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3e}{|x|} - \frac{2e}{|x-a|}\right).$$

Voor $a = 10$ ziet de potentiaal (in eenheden waar $\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} = 1$) er uit als



Oefening 14: Oplossing (2)

- De potentiaal is nul wanneer

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3e}{|x|} - \frac{2e}{|x-a|}\right) = 0.$$

- Er zijn 3 gebieden, namelijk $x < 0$, $0 < x < a$ en $a < x$. Deze voldoen aan

Gebied	$\|x\|$	$\|x-a\|$	$V(x) = 0$
1	$-x$	$a-x$	$x = 3a$
2	x	$a-x$	$x = \frac{3}{5}a$
3	x	$x-a$	$x = 3a$

- Twee van deze oplossingen vallen samen, waardoor je kan besluiten dat de potentiaal twee nulpunten heeft op de x-as, namelijk

$$x = \frac{3}{5}a \quad \text{en} \quad x = 3a.$$

Opmerking: Het nulpunt dat je vindt voor vergelijking 1 ligt in gebied 3 en moet je dus eigenlijk "weggooien". In deze oefening is het echter zo dat de potentialen in gebieden 1 en 3 gelijk zijn op een minteken na en dus vallen de nulpunten sowieso samen.

Oefening 14: Oplossing (3)

- Net als bij de potentiaal dient er hier aandacht te worden besteed aan welk interval van de x-as precies wordt beschouwd daar de uitdrukkingen (zonder absolute waarden) anders zijn voor de verschillende intervallen. De tabel op de vorige slide is nog steeds geldig en daarom geldt

$$4\pi\varepsilon_0 E_z = \begin{cases} -\frac{3e}{x^2} + \frac{2e}{(a-x)^2} & \text{als} \quad x < 0 < a \\ +\frac{3e}{x^2} + \frac{2e}{(a-x)^2} & \text{als} \quad 0 < x < a \\ +\frac{3e}{x^2} - \frac{2e}{(a-x)^2} & \text{als} \quad 0 < a < x \end{cases}$$

- Ook van deze functies kunnen de nulpunten worden bepaald. Net zoals hierboven houden we enkel de fysische nulpunten over; nulpunten van een vergelijking die vallen buiten het interval waar de vergelijking de fysica beschrijft (en die niet elders ook voorkomen) zijn niet fysisch. Van de zes wiskundige nulpunten blijft er eentje over, namelijk

$$x = (3 + \sqrt{6})a \approx 5,45a.$$

Oefening 14: Oplossing (4)

- Op oneindig werd de potentiaal gelijk aan 0 gekozen. (We hebben dit impliciet gedaan maar je kan dit eenvoudig controleren).
- De arbeid die dient geleverd te worden om de lading op de gegeven positie te plaatsen is gelijk aan

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-\vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell},$$

  met $\vec{F}$ de kracht op de ladingen ten gevolge van de reeds aanwezige ladingen en het minteken verschijnt daar deze kracht gecompenseerd dient te worden.
- Deze integraal evalueren langs een willekeurig pad is meestal erg moeilijk. Voor deze integraal geldt de hoofdstelling van de analyse echter ook en zo vind je (zie ook Fysica I)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{\nabla} V)(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = qV(\vec{r}_2) - qV(\vec{r}_1).$$

Oefening 14: Oplossing (5)

- In het specifieke geval van deze oefening wordt de benodigde arbeid daarom
$$W = eV(a/2).$$
- De potentiaal in het punt $x = a/2$ is gegeven door (gebruik de uitdrukking die geldig is in het juiste gebied!)
$$V(a/2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3e}{a/2} - \frac{2e}{a/2}\right) = \frac{e}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$
- De arbeid die dient geleverd te worden om de nieuwe lading te verplaatsen is daarom gegeven door
$$W = eV(a/2) = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$