1e Ba scheikunde & biochemie

Splitsing in partieelbreuken

Werner Peeters

Splitsen in partieelbreuken

- Inleidend voorbeeld
- Euclidische deling van veeltermen
- De eigenlijke splitsing
- De eigenlijke integratie
- Recursieformules
- De regel van Fuss
- Voorbeelden

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2 - 1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x(A + B) + A - B}{x^2 - 1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2-1} \equiv \frac{x(A+B) + A - B}{x^2-1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + k \end{aligned}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + k \end{aligned}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; I &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + k \end{aligned}$$

Inleidend voorbeeld

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 \equiv x(A+B) + A - B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \; \ln \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + k$$

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} R(x) < \operatorname{gr} B(x)$

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\frac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, R(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\frac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, R(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, A(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} R(x) < \operatorname{gr} B(x)$

$\Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \dfrac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$

Ansatz: $B(x)$ kan worden ontbonden in factoren

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\frac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, R(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, A(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

Ansatz: $B(x)$ kan worden ontbonden in factoren

(Hoofdstelling van de Algebra): als $B(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ factoren van graad maximaal 2

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\frac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} R(x) < \operatorname{gr} B(x)$

$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$

Ansatz: $B(x)$ kan worden ontbonden in factoren

(Hoofdstelling van de Algebra): als $B(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ factoren van graad maximaal 2

Factoren van de vorm:

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, R(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\, A(x) < \mathrm{gr}\, B(x)$

Ansatz: $B(x)$ kan worden ontbonden in factoren
(Hoofdstelling van de Algebra): als $B(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ factoren van graad maximaal 2

Factoren van de vorm:

- $(x-a)^n$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$

Euclidische deling van rationale functies

Idee: alle rationale functies $\frac{A(x)}{B(x)}$ zijn primitiveerbaar!

$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} R(x) < \operatorname{gr} B(x)$

$\Rightarrow \int \frac{A(x)}{B(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{B(x)} dx$

$\Rightarrow$ Het volstaat om alle breuken te integreren van de vorm $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$

Ansatz: $B(x)$ kan worden ontbonden in factoren
(Hoofdstelling van de Algebra): als $B(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ factoren van graad maximaal 2

Factoren van de vorm:

- $(x-a)^n$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $\left(ax^2 + bx + c\right)^n$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\,A(x) < \mathrm{gr}\,B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. $\forall$ factor $(x - a_i)^n$ met $n > 1$:macht van $(x - a_i)$ uitputten:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n} + \ldots$$

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. $\forall$ factor $(x - a_i)^n$ met $n > 1$:macht van $(x - a_i)$ uitputten:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n} + \ldots$$

3. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)$ met $\Delta < 0$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. $\forall$ factor $(x - a_i)^n$ met $n > 1$:macht van $(x - a_i)$ uitputten:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n} + \ldots$$

3. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)$ met $\Delta < 0$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

4. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)^n$ met $\Delta < 0$ en multipliciteit $n > 1 \Rightarrow$ uitputten

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \ldots$$

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. $\forall$ factor $(x - a_i)^n$ met $n > 1$:macht van $(x - a_i)$ uitputten:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n} + \ldots$$

3. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)$ met $\Delta < 0$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

4. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)^n$ met $\Delta < 0$ en multipliciteit $n > 1 \Rightarrow$ uitputten

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \ldots$$

Daarna: alle breuken op dezelfde noemer zetten en tellers bepalen!

De eigenlijke splitsing

$\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\,A(x) < \mathrm{gr}\,B(x)$ *splitsen in partieelbreuken*: 4 mogelijkheden:

1. $B(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

2. $\forall$ factor $(x - a_i)^n$ met $n > 1$:macht van $(x - a_i)$ uitputten:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{A_{i,1}}{x - a_i} + \frac{A_{i,2}}{(x - a_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,n}}{(x - a_i)^n} + \ldots$$

3. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)$ met $\Delta < 0$

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c} + \ldots$$

4. $B(x)$ bevat $\left(ax^2 + bx + c\right)^n$ met $\Delta < 0$ en multipliciteit $n > 1 \Rightarrow$ uitputten

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ldots + \frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \ldots$$

Daarna: alle breuken op dezelfde noemer zetten en tellers bepalen!
$\Rightarrow$ Stelsel dat altijd uniek oplosbaar is.

Integralen van de partieelbreuken

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a,b,c,p,q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d\,(x-a)}{x-a}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + k$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$I_n :$

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$

  $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$I_n :$
substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$I_n :$

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{dy}{y^n}$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int y^{-n} dy$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int y^{-n} dy = \frac{y^{1-n}}{1-n} + k$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int y^{-n} dy = \frac{1}{(1-n)\,y^{n-1}} + k$

Integralen van de partieelbreuken

- $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
- $J_n = \displaystyle\int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ met $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ en $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

I_n :

substitutie $y = x - a$

- $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dy}{y} = \ln|x-a| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $$I_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int y^{-n} dy = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + k$$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} :$$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)}$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y}$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n}:$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + k$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n}:$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n}\ :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n}$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n}$:

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$

  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{dy}{y^n}$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \int y^{-n}dy$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \int y^{-n}dy = \frac{y^{1-n}}{1-n} + k$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} = \int y^{-n}dy = \frac{1}{(1-n)\,y^{n-1}} + k$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + s\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$
  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \int y^{-n}dy = \frac{1}{(1-n)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}} + k$

De eigenlijke integratie: J_n

$$J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = r\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + s\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

voor zekere r en s

$\Rightarrow r = \dfrac{p}{2a}$ en $s = q - \dfrac{pb}{2a}$

$$\Rightarrow J_n = \int \frac{(px+q)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{p}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$K_n = \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} :$$

substitutie $y = ax^2+bx+c$

- $K_1 = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)} = \int \frac{dy}{y} = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + k$
- $n > 1 \Rightarrow$

  $K_n = \displaystyle\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{(ax^2+bx+c)^n} = \int y^{-n}dy = \frac{1}{(1-n)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}} + k$

Restprobleem: $L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} :$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$2adx = dy$$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax + b)^2 \end{aligned}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= \left(2ax + b\right)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \end{aligned}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2 \end{aligned}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \end{aligned}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= \left(2ax + b\right)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2 + bx + c\right) \end{aligned}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2 + bx + c\right) \end{aligned}$$

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\dfrac{dy}{2a}}{\left(\dfrac{y^2+m^2}{4a}\right)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2 + bx + c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\dfrac{dy}{2a}}{\left(\dfrac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n\,(2a)^{-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\dfrac{dy}{2a}}{\left(\dfrac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n (2a)^{-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n\,(2a)^{-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\dfrac{dy}{2a}}{\left(\dfrac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n (2a)^{-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n\,(2a)^{-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

$\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$

De eigenlijke integratie: L_n

$$L_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n (2a)^{-1} \int \frac{dy}{\left(y^2+m^2\right)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1} \int \frac{dy}{\left(y^2+m^2\right)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+m^2\right)^n} = \int \frac{mdz}{\left(m^2z^2+m^2\right)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2 + bx + c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n (2a)^{-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = \int \frac{mdz}{(m^2z^2+m^2)^n} = \frac{m}{m^{2n}} \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n\,(2a)^{-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = \int \frac{mdz}{(m^2z^2+m^2)^n} = \frac{m}{m^{2n}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

$$\Rightarrow L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{m^{2n-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

De eigenlijke integratie: L_n

$L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ Stel $\Delta = -m^2$

Substitutie $2ax + b = y$

$$\begin{aligned} 2adx &= dy \\ y^2 &= (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ y^2 + m^2 &= 4a\left(ax^2+bx+c\right) \end{aligned}$$

$$L_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{\frac{dy}{2a}}{\left(\frac{y^2+m^2}{4a}\right)^n} = (4a)^n\,(2a)^{-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = 2^{2n-1}a^{n-1}\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n}$$

Substitutie $y = mz$

$$dy = mdz$$

$$\int \frac{dy}{(y^2+m^2)^n} = \int \frac{mdz}{(m^2z^2+m^2)^n} = \frac{m}{m^{2n}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

$\Rightarrow L_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{m^{2n-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} \Rightarrow$ Restprobleem: $M_n = \displaystyle\int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2 + 1\right)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = \int \frac{\left(z^2+1-z^2\right) dz}{(z^2+1)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = \int \frac{\left(z^2+1\right) dz}{\left(z^2+1\right)^n} - \int \frac{z^2 dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z \cdot z dz}{(z^2+1)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: ***recursieformule***

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2} \int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \mathrm{Bgtg}\, z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{(z^2+1)^n}$$

Partiële integratie:

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases}$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z\frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \mathrm{Bgtg}\, z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\left[\frac{z}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} - \int \frac{dz}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}}\right]$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: ***recursieformule***

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{(2n-2)}\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^{n-1}}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: ***recursieformule***

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}M_{n-1}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \mathrm{Bgtg}\, z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = \mathbf{M_{n-1}} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n-2}}\mathbf{M_{n-1}}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$M_n = M_{n-1} - \frac{1}{2}\int z \frac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n}$$

Partiële integratie: $\begin{cases} u = z \\ dv = \dfrac{d\left(z^2+1\right)}{\left(z^2+1\right)^n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \dfrac{1}{(1-n)\left(z^2+1\right)^{n-1}} \end{cases}$

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \mathrm{Bgtg}\, z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- M_2

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \dfrac{1}{2} M_1 + \dfrac{z}{2\left(z^2+1\right)}$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \dfrac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \dfrac{z}{2\left(z^2+1\right)} + k$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \dfrac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \dfrac{z}{2\left(z^2+1\right)} + k$
- M_3

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \dfrac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \dfrac{z}{2\left(z^2+1\right)} + k$
- $M_3 = \dfrac{3}{4} M_2 + \dfrac{z}{4\left(z^2+1\right)^2}$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\,(z^2+1)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \dfrac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \dfrac{z}{2\,(z^2+1)} + k$
- $M_3 = \dfrac{3}{4} \left(\dfrac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \dfrac{z}{2\,(z^2+1)} \right) + \dfrac{z}{4\,(z^2+1)^2} + k$

M_n: Recursieformule

$$M_n = \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n}$$

- $M_1 = \operatorname{Bgtg} z + k$
- M_n met $n > 1$: *recursieformule*

$$\boxed{M_n = \frac{2n-3}{2n-2} M_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)\left(z^2+1\right)^{n-1}}}$$

Voorbeelden:

- $M_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)} + k$
- $M_3 = \frac{3}{8} \operatorname{Bgtg} z + \frac{3z}{8\left(z^2+1\right)} + \frac{z}{4\left(z^2+1\right)^2} + k$

enz.

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2} \int \frac{d\,(2x-1)}{2x-1}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y}$

$$y = 2x - 1$$

Voorbeelden

1. $I = \displaystyle\int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln|y| + k$

$$y = 2x - 1$$

Voorbeelden

1. $I = \displaystyle\int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\,(2x-1)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln|2x-1| + k$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^{4}}dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right)$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy$

$$y = x - 2$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{3}{3}y^{-3} + k$

$$y = x - 2$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{y^3} + k$

$$y = x - 2$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2} - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2+1}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

Voorbeelden

1. $I = \displaystyle\int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \displaystyle\int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \displaystyle\int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln|2x-1| + k$

2. $I = \int \frac{3}{(x-2)^4}dx = 3\int (x-2)^{-4}\, d(x-2) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{(x-2)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\,(x+1) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{(x+1)(x^2-2x+5)}dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ &= \frac{A\left(x^2-2x+5\right) + \left(Bx+C\right)\left(x+1\right)}{x^3-x^2+3x+5}\end{aligned}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ &= \frac{x^2\left(A+B\right) + x\left(-2A+B+C\right) + \left(5A+C\right)}{x^3-x^2+3x+5} \end{aligned}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ &\equiv \frac{x^2\left(A+B\right) + x\left(-2A+B+C\right) + \left(5A+C\right)}{x^3-x^2+3x+5} \end{aligned}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ &\equiv \frac{x^2\left(A+B\right) + x\left(-2A+B+C\right) + \left(5A+C\right)}{x^3-x^2+3x+5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ -2A+B+C=1 \\ 5A+C=13 \end{cases}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ &\equiv \frac{x^2\left(A+B\right) + x\left(-2A+B+C\right) + \left(5A+C\right)}{x^3-x^2+3x+5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ -2A+B+C=1 \\ 5A+C=13 \end{cases} \Rightarrow \left(A,B,C\right) = \left(2,2,3\right)$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} &= \frac{2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2-2x+5} \\ &\equiv \frac{x^2\left(A+B\right) + x\left(-2A+B+C\right) + \left(5A+C\right)}{x^3-x^2+3x+5}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ -2A+B+C=1 \\ 5A+C=13 \end{cases} \Rightarrow \left(A,B,C\right) = \left(2,2,3\right)$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$\frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2-2x+5}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$
$= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2-2x+5}\right)dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$= 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}dx$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$= 2\ln\left|x+1\right| + \int \frac{2x+3}{x^2-2x+5}dx$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$= 2\ln\left|x+1\right| + \int \frac{d\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5} + 5\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + 5\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + 5\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2+4}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + 5\int \frac{dx}{\frac{4}{4}\left(x-1\right)^2+4}$

Voorbeelden

1. $I=\int\frac{7dx}{2x-1}=\frac{7}{2}\int\frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1}=\frac{7}{2}\int\frac{dy}{y}=\frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right|+k$

2. $I=\int\frac{3}{\left(x-2\right)^{4}}dx=3\int\left(x-2\right)^{-4}d\left(x-2\right)=3\int y^{-4}dy=-\frac{1}{\left(x-2\right)^{3}}+k$

3. $I=\int\frac{x-2}{x^{2}+2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^{2}+2x+2\right|-3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right)+k$

4. $I=\int\frac{4x^{2}+x+13}{x^{3}-x^{2}+3x+5}dx=\int\frac{4x^{2}+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^{2}-2x+5\right)}dx$

$$=2\ln\left|x+1\right|+\ln\left|x^{2}-2x+5\right|+5\int\frac{dx}{4\left(\frac{1}{4}\left(x-1\right)^{2}+1\right)}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}$$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}$$

Substitutie $z = \frac{x-1}{2} \Rightarrow dx = 2dz$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

   $= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{4}\int \frac{2dz}{z^2+1}$

   Substitutie $z = \frac{x-1}{2} \Rightarrow dx = 2dz$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

   $= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}$

   Substitutie $z = \frac{x-1}{2} \Rightarrow dx = 2dz$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{2}\,\mathrm{Bgtg}\, z + k$

Substitutie $z = \frac{x-1}{2} \Rightarrow dx = 2dz$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$

$= 2\ln\left|x+1\right| + \ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{5}{2}\,\mathrm{Bgtg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + k$

Voorbeelden

1. $I = \int \frac{7dx}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{d\left(2x-1\right)}{2x-1} = \frac{7}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{7}{2}\ln\left|2x-1\right| + k$

2. $I = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^4}dx = 3\int \left(x-2\right)^{-4} d\left(x-2\right) = 3\int y^{-4}dy = -\frac{1}{\left(x-2\right)^3} + k$

3. $I = \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{Bgtg}\left(x+1\right) + k$

4. $I = \int \frac{4x^2+x+13}{x^3-x^2+3x+5}dx = \int \frac{4x^2+x+13}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+5\right)}dx$
$= \ln\left|\left(x+1\right)^2\left(x^2-2x+5\right)\right| + \frac{5}{2}\,\mathrm{Bgtg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + k$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \right) dx$ (Euclidisch delen)

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = \int (2x+1)\, dx + \int \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$ (noemer ontbinden in factoren)

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \displaystyle\int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{x^2(A+B+C) + x(B-3C) + (-4A-2B+2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \\ &\equiv \frac{x^2(A+B+C) + x(B-3C) + (-4A - 2B + 2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \\
&\equiv \frac{x^2(A+B+C) + x(B-3C) + (-4A - 2B + 2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 4 \\ B - 3C = -1 \\ -4A - 2B + 2C = -6 \end{cases}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \\ &\equiv \frac{x^2(A+B+C) + x(B-3C) + (-4A-2B+2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 4 \\ B - 3C = -1 \\ -4A - 2B + 2C = -6 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 2, 1)$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} &= \frac{\mathbf{1}}{x-1} + \frac{\mathbf{2}}{x-2} + \frac{\mathbf{1}}{x+2} \\ &\equiv \frac{x^2(A+B+C) + x(B-3C) + (-4A-2B+2C)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 4 \\ B - 3C = -1 \\ -4A - 2B + 2C = -6 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C) = (1, 2, 1)$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$$\frac{4x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + \ln|x+2| + k$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \displaystyle\int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$

6. $I = \displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \int (x+1)\, dx + \int \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$$
(Euclidisch delen)

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$

6. $I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

(noemer ontbinden in factoren)

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$

$$\frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \displaystyle\int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$

6. $I = \displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \\ &\equiv \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1} \\ &\equiv \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B - 2C + D = 0 \\ A + C - 2D = -1 \\ -A + B + D = 4 \end{cases}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$

$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &\equiv \frac{(A+C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 + (A + C - 2D)x + (-A + B + D)}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B - 2C + D = 0 \\ A + C - 2D = -1 \\ -A + B + D = 4 \end{cases} \Rightarrow (A, B, C, D) = (-1, 2, 2, 1)$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I=\int\frac{2x^4-x^3-5x^2+3x-2}{x^3-x^2-4x+4}dx=x^2+x+\int\frac{4x^2-x-6}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$$
$$=x^2+x+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=x^2+x+\ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right|+k$$

6. $$I=\int\frac{x^5-x^4+x^3-2x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^3-x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$

$$\begin{aligned}\frac{x^3-x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} &= \frac{\mathbf{-1}}{x-1}+\frac{\mathbf{2}}{(x-1)^2}+\frac{\mathbf{2}x+\mathbf{1}}{x^2+1}\\ &\equiv \frac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)}{x^3-x^2-4x+4}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=1\\-A+B-2C+D=0\\A+C-2D=-1\\-A+B+D=4\end{cases}\Rightarrow(A,B,C,D)=(-1,2,2,1)$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\frac{x^3 - x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I=\int\frac{2x^4-x^3-5x^2+3x-2}{x^3-x^2-4x+4}dx=x^2+x+\int\frac{4x^2-x-6}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$$
$$=x^2+x+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=x^2+x+\ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right|+k$$

6. $$I=\int\frac{x^5-x^4+x^3-2x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^3-x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$

6. $I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

$= \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int (x-1)^{-2} dx + \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{Bgtg} x + k$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx$$ (is al een partieelbreuk)

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2(x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{(x^2+2x+2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I=\int\frac{2x^4-x^3-5x^2+3x-2}{x^3-x^2-4x+4}dx=x^2+x+\int\frac{4x^2-x-6}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$$
$$=x^2+x+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=x^2+x+\ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right|+k$$

6. $$I=\int\frac{x^5-x^4+x^3-2x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^3-x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}+\operatorname{Bgtg}x+k$$

7. $$I=\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\frac{-1}{x^2+2x+2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

met $z=x+1\Rightarrow dz=dx$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+2} + M_2(z) + k$$

met $z = x + 1 \Rightarrow dz = dx$

Voorbeelden (ctd.)

5. $I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$

$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$

6. $I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$

7. $I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg} z + \frac{z}{2(z^2+1)} + k$

met $z = x + 1 \Rightarrow dz = dx$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I = \int \frac{2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + x + \int \frac{4x^2 - x - 6}{(x-1)(x-2)(x+2)} dx$$
$$= x^2 + x + \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = x^2 + x + \ln \left| (x-1)(x-2)^2 (x+2) \right| + k$$

6. $$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^3 - x + 4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x^2+1}{x-1} \right| - \frac{2}{x-1} + \operatorname{Bgtg} x + k$$

7. $$I = \int \frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2} dx = \frac{-1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg}(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + k$$

Voorbeelden (ctd.)

5. $$I=\int\frac{2x^4-x^3-5x^2+3x-2}{x^3-x^2-4x+4}dx=x^2+x+\int\frac{4x^2-x-6}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx$$
$$=x^2+x+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+2}=x^2+x+\ln\left|(x-1)(x-2)^2(x+2)\right|+k$$

6. $$I=\int\frac{x^5-x^4+x^3-2x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^3-x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|\frac{x^2+1}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}+\operatorname{Bgtg}x+k$$

7. $$I=\int\frac{2x+3}{(x^2+2x+2)^2}dx=\frac{x-1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\operatorname{Bgtg}(x+1)+k$$

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af
- Kan soms uit het hoofd!

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af
- Kan soms uit het hoofd!

Ansatz: rationale functie $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\mathrm{gr}\,A(x) < \mathrm{gr}\,B(x)$

met $B(x)$ ontbonden in factoren van graad 1 en 2

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af
- Kan soms uit het hoofd!

Ansatz: rationale functie $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$
met $B(x)$ ontbonden in factoren van graad 1 en 2
Drie gevallen:

1. $B(x)$ heeft allemaal verschillende reëele nulpunten.

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af
- Kan soms uit het hoofd!

Ansatz: rationale functie $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$
met $B(x)$ ontbonden in factoren van graad 1 en 2
Drie gevallen:

1. $B(x)$ heeft allemaal verschillende reële nulpunten.
2. $B(x)$ heeft reële nulpunten, waarvan eventueel sommige een multipliciteit > 1 hebben.

De regel van Fuss

Probleem:

- Vaak stelsels met veel onbekenden
- Juistheid van éne onbekende hangt van andere(n) af
- Kan soms uit het hoofd!

Ansatz: rationale functie $\frac{A(x)}{B(x)}$ met $\operatorname{gr} A(x) < \operatorname{gr} B(x)$
met $B(x)$ ontbonden in factoren van graad 1 en 2
Drie gevallen:

1. $B(x)$ heeft allemaal verschillende reële nulpunten.
2. $B(x)$ heeft reële nulpunten, waarvan eventueel sommige een multipliciteit > 1 hebben.
3. $B(x)$ heeft ook toegevoegd complexe nulpunten.

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\frac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\frac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$\frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij $B(x) = (x-a)\,C(x)$, waarbij $(x-a)$ geen deler meer is van $C(x)$. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan $\frac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$\frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \left.\dfrac{19x-23}{(x-2)(x+3)}\right|_{x=1} \\ B = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x+3)}\right|_{x=2} \\ C = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=-3} \end{cases}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$\frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \left.\dfrac{19x-23}{(x-2)(x+3)}\right|_{x=1} = 1 \\ B = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x+3)}\right|_{x=2} = 3 \\ C = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=-3} = -4 \end{cases}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$\frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{\mathbf{1}}{x-1} + \frac{\mathbf{3}}{x-2} + \frac{\mathbf{-4}}{x+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \left.\dfrac{19x-23}{(x-2)(x+3)}\right|_{x=1} = 1 \\ B = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x+3)}\right|_{x=2} = 3 \\ C = \left.\dfrac{19x-23}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=-3} = -4 \end{cases}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\dfrac{A\left(x\right)}{B\left(x\right)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B\left(x\right) = \left(x-a\right)C\left(x\right)$*, waarbij* $\left(x-a\right)$ *geen deler meer is van* $C\left(x\right)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A\left(a\right)}{C\left(a\right)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)}dx$$

$$\frac{19x-23}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-4}{x+3}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x-2} - 4\int \frac{dx}{x+3}$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$
$$= \ln|x-1| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+3| + k$$

Fuss I (allemaal verschillende nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)\,C(x)$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{x-a}$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{19x-23}{x^3-7x+6}dx = \int \frac{19x-23}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$= \ln\left|\frac{(x-1)(x-2)^3}{(x+3)^4}\right| + k$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = (x-a)^k C(x)$ *met* $k > 1$*, waarbij* $(x-a)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(a)}{C(a)}}{(x-a)^k}$*; voor alle breuken horende bij factoren* $(x-a)^l$ *met* $l < k$ *trekt met van het linkerlid eerst de reeds gevonden breuken af en vereenvoudigt men die. Dus als enkele factoren van* $\dfrac{A(x)}{B(x)}\ \dfrac{\alpha_1}{x-a} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_k}{(x-a)^k}$ *zijn, dan is*

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{A(a)}{C(a)}; \\
\alpha_{k-1} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}\right)(x-a)^{k-1}\Bigg|_{x=a} \\
\alpha_{k-2} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{\alpha_k}{(x-a)^k} - \frac{\alpha_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}\right)(x-a)^{k-2}\Bigg|_{x=a} \\
&\ldots \\
\alpha_{k-l} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)} - \sum_{i=1}^{l-1}\frac{\alpha_{k-i}}{(x-a)^{k-i}}\right)(x-a)^{k-l}\Bigg|_{x=a}
\end{aligned}
$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \int \left(x^2 + x\right) dx + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx$$

(euclidische deling)

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-27x^3-83x^2-37x+51}{x^3-27x-54}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}dx$$

$$\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}=\frac{A}{(x+3)^2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-6}$$

$$C=\left.\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2}\right|_{x=6}=1$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left.\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2}\right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left.\frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6}\right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{A}{(x+3)^2} = \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{2}{(x+3)^2}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{A}{(x+3)^2} = \frac{-2x^2 + 17x + 51 - 2(x-6)}{(x+3)^2 (x-6)}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-27x^3-83x^2-37x+51}{x^3-27x-54}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}dx$$

$$\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}=\frac{A}{(x+3)^2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left.\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2}\right|_{x=6}=1 \\ A &= \left.\frac{-2x^2+17x+51}{x-6}\right|_{x=-3}=2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}-\frac{A}{(x+3)^2}=\frac{-2x^2+15x+63}{(x+3)^2(x-6)}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{A}{(x+3)^2} = \frac{-(x+3)(2x-21)}{(x+3)^2 (x-6)}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{A}{(x+3)^2} = \frac{-2x + 21}{(x+3)(x-6)}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hoe vinden we B?

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} - \frac{A}{(x+3)^2} = \frac{-2x + 21}{(x+3)(x-6)}$$

$$\Rightarrow B = \left. \frac{-2x + 21}{(x-6)} \right|_{x=-3} = -3$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \\ B &= \left. \frac{-2x + 21}{(x-6)} \right|_{x=-3} = -3 \end{aligned}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{\mathbf{2}}{(x+3)^2} + \frac{\mathbf{-3}}{x+3} + \frac{\mathbf{1}}{x-6}$$

$$\begin{aligned} C &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2} \right|_{x=6} = 1 \\ A &= \left. \frac{-2x^2 + 17x + 51}{x-6} \right|_{x=-3} = 2 \\ B &= \left. \frac{-2x + 21}{(x-6)} \right|_{x=-3} = -3 \end{aligned}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$\frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} = \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-6}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-27x^3-83x^2-37x+51}{x^3-27x-54}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\int\frac{dx}{(x+3)^2}-3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{dx}{x-6}$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 27x^3 - 83x^2 - 37x + 51}{x^3 - 27x - 54} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x^2 + 17x + 51}{(x+3)^2 (x-6)} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2\int \frac{dx}{(x+3)^2} - 3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x-6}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x+3} - 3\ln|x+3| + \ln|x-6| + k$$

Fuss II (eventueel meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-27x^3-83x^2-37x+51}{x^3-27x-54}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{-2x^2+17x+51}{(x+3)^2(x-6)}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2\int\frac{dx}{(x+3)^2}-3\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{dx}{x-6}$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x+3}+\ln\left|\frac{x-6}{(x+3)^3}\right|+k$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$. *Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\frac{\frac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$, *waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$. *Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$, *waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \int \left(3x + \frac{x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x}\right) dx$$

(euclidische deling)

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha + \beta i)}{C(\alpha + \beta i)}}{ax^2 + bx + c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \int 3x dx + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\frac{\frac{A(\alpha + \beta i)}{C(\alpha + \beta i)}}{ax^2 + bx + c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2+bx+c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2+bx+c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$. *Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$, *waarbij* $\alpha+\beta i$ *een complex nulpunt is van* ax^2+bx+c.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4+12x^3+16x^2-5x-5}{x^3+4x^2+5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2-5x-5}{x\left(x^2+4x+5\right)} dx$$

$$\frac{x^2-5x-5}{x\left(x^2+4x+5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

$$A = \left.\frac{x^2-5x-5}{x^2+4x+5}\right|_{x=0} = -1$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x^2 + 4x + 5}\right|_{x=0} = -1 \\ B(-2+i) + C &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x}\right|_{x=-2+i} = \frac{8 - 9i}{-2 + i} = -5 + 2i \end{aligned}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$. *Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha + \beta i)}{C(\alpha + \beta i)}}{ax^2 + bx + c}$, *waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x^2 + 4x + 5}\right|_{x=0} = -1 \\ B(-2 + i) + C &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x}\right|_{x=-2+i} = \frac{8 - 9i}{-2 + i} = -5 + 2i \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2B + C = -5 \\ iB = 2i \end{cases} \end{aligned}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2 + bx + c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x^2 + 4x + 5}\right|_{x=0} = -1 \\ B(-2+i) + C &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x}\right|_{x=-2+i} = \frac{8 - 9i}{-2 + i} = -5 + 2i \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2B + C = -5 \\ iB = 2i \end{cases} \Rightarrow (B, C) = (2, -1) \end{aligned}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$. *Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$, *waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$.

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{\mathbf{-1}}{x} + \frac{\mathbf{2}x\mathbf{-1}}{x^2 + 4x + 5}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x^2 + 4x + 5}\right|_{x=0} = -1 \\
B(-2+i) + C &= \left.\frac{x^2 - 5x - 5}{x}\right|_{x=-2+i} = \frac{8 - 9i}{-2 + i} = -5 + 2i \\
&\Rightarrow \begin{cases} -2B + C = -5 \\ iB = 2i \end{cases} \Rightarrow (B, C) = (2, -1)
\end{aligned}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha + \beta i)}{C(\alpha + \beta i)}}{ax^2 + bx + c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$\frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x - 1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \ln|x| + \int \frac{d\left(x^2 + 4x + 5\right)}{x^2 + 4x + 5} - 5\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha + \beta i)}{C(\alpha + \beta i)}}{ax^2 + bx + c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \ln|x| + \ln\left|x^2 + 4x + 5\right| - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1}$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \ln|x| + \ln\left|x^2 + 4x + 5\right| - 5\,\mathrm{Bgtg}\,(x+2) + k$$

Fuss III (eventueel complexe nulpunten)

Zij $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij* $B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) C(x)$ *waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\dfrac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}}{ax^2+bx+c}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.*

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 5x - 5}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx = \frac{3x^2}{2} + \int \frac{x^2 - 5x - 5}{x\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x^2 + 4x + 5}{x}\right| - 5\,\mathrm{Bgtg}\,(x+2) + k$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)
= Fuss II + Fuss III

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Zij $\frac{A(x)}{B(x)}$ *een rationale functie die men wenst te splitsen in partieelbreuken, en zij*

$$B(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)^k C(x)$$

met $k > 1$*, waarbij* $\left(ax^2 + bx + c\right)$ *geen deler meer is van* $C(x)$*. Dan is de bij deze factor horende partieelbreuk gelijk aan* $\dfrac{\frac{A(\alpha \pm \beta i)}{C(\alpha \pm \beta i)}}{(ax^2 + bx + c)^k}$*, waarbij* $\alpha + \beta i$ *een complex nulpunt is van* $ax^2 + bx + c$*.; voor alle breuken horende bij factoren* $\left(ax^2 + bx + c\right)^l$ *met* $l < k$ *trekt met van het linkerlid eerst de reeds gevonden breuken af en vereenvoudigt men die.*

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

(vervolg) *Dus als enkel factoren van* $\dfrac{A(x)}{B(x)}$

$$\frac{\beta_1 x+\gamma_1}{ax^2+bx+c}+\frac{\beta_2 x+\gamma_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+...+\frac{\beta_k x+\gamma_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$$

zijn, en $\alpha+\beta i$ ***is een complex nulpunt van*** $ax^2+bx+c=0$***, dan is***

$$\begin{aligned}
\beta_k(\alpha+\beta i)+\gamma_k &= \frac{A(\alpha+\beta i)}{C(\alpha+\beta i)}\\
\beta_{k-1}(\alpha+\beta i)+\gamma_{k-1} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{\beta_k x+\gamma_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k-1}\Bigg|_{x=\alpha+\beta i}\\
\beta_{k-2}(\alpha+\beta i)+\gamma_{k-2} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{\beta_k x+\gamma_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}-\frac{\beta_{k-1} x+\gamma_{k-1}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k-1}}\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k-2}\Bigg|_{x=\alpha+\beta i}\\
&\dots\\
\beta_{k-l}(\alpha+\beta i)+\gamma_{k-l} &= \left(\frac{A(x)}{B(x)}-\sum_{i=1}^{l-1}\frac{\beta_{k-i} x+\gamma_{k-i}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{k-i}}\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{k-l}\Bigg|_{x=\alpha+\beta i}
\end{aligned}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2 + 1)^3} dx$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3 \Big|_{x=i} = 1 - 3i$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4+3x^3}{x^6+3x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$$

$$\frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$Ai+B = x^4+3x^3\Big|_{x=i} = 1-3i \Rightarrow (A,B) = (-3,1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{-3x+1}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{Ax + B}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{Cx + D}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{Ax + B}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x^4 + 3x^3 + 3x - 1}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} - \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{\left(x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} + \frac{Cx + D}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} - \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4+3x^3}{x^6+3x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{x^4+3x^3}{(x^2+1)^3}dx$$

$$\frac{x^4+3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A,B) = (-3,1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4+3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2+3x-1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i \Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4+3x^3}{x^6+3x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$$

$$\frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4+3x^3\Big|_{x=i} = 1-3i \Rightarrow (A,B) = (-3,1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} - \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x^2+3x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$Ci + D = x^2+3x-1\Big|_{x=i} = -2+3i \Rightarrow (C,D) = (3,-2)$$

Voor E en F:

$$\frac{x^2+3x-1}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+3x-1}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{3x-2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i \Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

Voor E en F:

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2} - \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i \Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

Voor E en F:

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2} - \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i \Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

Voor E en F:

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2} - \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (E, F) = (0, 1)$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{\mathbf{-3}x + \mathbf{1}}{(x^2+1)^3} + \frac{\mathbf{3}x - \mathbf{2}}{(x^2+1)^2} + \frac{\mathbf{1}}{x^2+1}$$

$$Ai + B = x^4 + 3x^3\Big|_{x=i} = 1 - 3i \Rightarrow (A, B) = (-3, 1)$$

Voor C en D:

$$\frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} - \frac{Ax + B}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2}$$

$$Ci + D = x^2 + 3x - 1\Big|_{x=i} = -2 + 3i \Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

Voor E en F:

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{(x^2+1)^2} - \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow (E, F) = (0, 1)$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$$

$$\frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-3x+1}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{3x-2}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$= \int \frac{-3x+1}{(x^2+1)^3} dx + \int \frac{3x-2}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

$$= \frac{-3}{2} \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)^3} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

$$= \frac{3}{4\left(x^2 + 1\right)^2} + M_3\left(x\right) - \frac{3}{2\left(x^2 + 1\right)} - 2M_2\left(x\right) + M_1\left(x\right) + k$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I=\int\frac{x^4+3x^3}{x^6+3x^4+3x^2+1}dx=\int\frac{x^4+3x^3}{\left(x^2+1\right)^3}dx$$

$$=\frac{3}{4\left(x^2+1\right)^2}+\left(\frac{3}{8}\operatorname{Bgtg}x+\frac{3x}{8\left(x^2+1\right)}+\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}\right)-\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}-2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Bgtg}x+\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}\right)+\operatorname{Bgtg}x+k$$

Fuss IV (complexe meervoudige nulpunten)

Voorbeeld:

$$I = \int \frac{x^4 + 3x^3}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{x^4 + 3x^3}{\left(x^2+1\right)^3} dx$$

$$= \frac{x+3}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{-5x-12}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\,\mathrm{Bgtg}\,x + k$$

EINDE

van deze presentatie