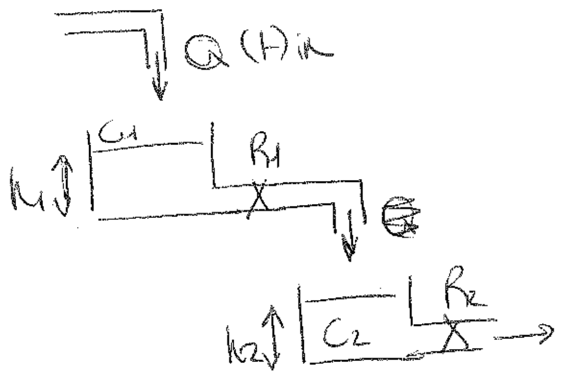
1) VRAAG 1



toestandsruimtemodel
in variabelen: u, x en y

2) $H(s) = \dfrac{ps + q}{(s + 1/C_1R_1)(s + 1/C_2R_2)}$ → bepaal q en p.
+ controleer transferfunctie.

a) diff. verg → balansverg v. vraag 1

b) ~~[illegible]~~ formule toepassen

$H(s) = \bar{c}^T (sI_n - A)^{-1} \bar{b} + d$

→ uit vorige oef

3) bereken uitstroom Quit, waterniveau's h_1 en h_2 en totale watervolume id tanks in steady state wanneer $Q_{in} = 6\ m^3/h$, $R_1 = 1\ h/m^3$, $R_2 = 1\ h/m^3$, $C_1 = 2m^2$ en $C_2 = 4m^2$.

steady state: $\frac{dh_1}{dt} = 0$ en $\frac{dh_2}{dt} = 0$

→ balansverg v. 1

totaal watervolume $= h_1 . C_1 + h_2 . C_2$.

4) analoog aan oef 1. (~~h~~max!) (zie omzijde).

vraag 2

Siso-systeem: toestands-ruimtemodel.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4/2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ \ 1] x(t) + 0u(t)$$

1) interne stabiliteit (in functie v. α)

→ eigenwaarden bepalen

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda$ ~~[illegible]~~ $+ 3 - \alpha \longrightarrow$ $\lambda_1 = 2 - \sqrt{1 + \alpha}$
$\lambda_2 = 2 + \sqrt{1 + \alpha}$

(4) vertrekkend v. situatie vraag 3, daalt Q_{in} tot $2\ m^3/h$

→ bepaal systeemrespons met dezelfde waarden voor R_1, R_2, C_1 en C_2

→ intern stabiel als reëel deel negatief is

→ onafh. vd waarde v. α is het systeem altijd inwendig onstabiel.

voor $\alpha < 0$ → wortel is imaginair dus reëel deel blijft + (2)

→ onstabiel

$\alpha = 0$ → reëel deel blijft positief → onstabiel

$\alpha > 0$ → de 1e ~~is al~~ geeft dan een negatief reëel deel maar de andere blijft +

→ nog steeds onstabiel.

(2) $H(s) = \dfrac{ps + q}{s^2 - 4s + 3 - \alpha}$

$\boxed{\text{opgelet inverteren matrix}}$

Bepaal transferfunctie en q en p.

↔ 42 ↩

(3) Bespreek de I/O-stabiliteit vh systeem (in functie v. α)

→ kijken naar transferfunctie noemer (nulpunten = polen) zie (2)

$s_1 = 2 + \sqrt{1+\alpha}$

$s_2 = 2 - \sqrt{1-\alpha}$

Input-output stabiel als reëel deel v. s_1 en s_2 negatief is

Nakijken of voor bepaalde waarde v. α een s geschrapt kan worden in teller en noemer.

bv voor $\alpha = 0$:

$$\frac{42.(s-1)}{(s-2-\sqrt{1+\alpha})(s-2+\sqrt{1+\alpha})} = \frac{42\,\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}.(s-3)}$$

↓

reëel deel nog steeds positief dus nog steeds onstabiel

$s = 3$

⑥ Bepaal de staprespons voor:

a) $\alpha = 0$

b) $\alpha = 3$

c) $\alpha = -1$

→ Laplace transformatie $\frac{1}{s}$ → staprespons!
Bij impulsrespons is dit 1.

$Y(s) = H(s) \cdot U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \ldots$

$U(s) = \frac{1}{s}$

$H(s)$: uit oef 2.

Tips examen

- geen schrijffouten!
  inwendige stabiliteit → reële delen v.d. eigenwaarden
  ≠ gewoon eigenwaarden
- tijdsdomein en Laplacedomein niet verwisselen
- rekenfouten.
- $\boxed{t \geq 0}$

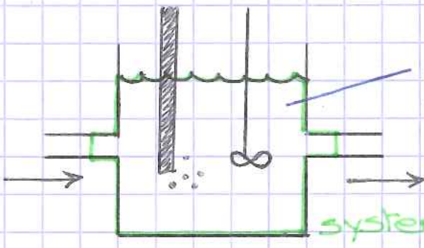
Modelleren en simuleren van biosystemen

Hoofdstuk 1: Modelleren

Proces
Procesdynamica = evolutie ve proces id tijd: $x(t)$

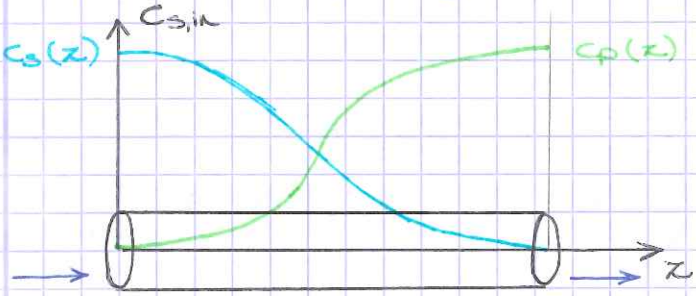
Voorbeelden:

* Mengreactor:



$c(t, x, y, z)$: component vd concentratie afh vd tijd t en plaats (x, y, z)

* Turbulente reactor = buisreactor
  → diameter is voldoende klein tov lengte waardoor na verloop v. tijd de stroom in evenwicht zal komen



$c(\cancel{x}, \cancel{y}, z)$
→ alleen afh vd plaats

Om een concentratie / reactie te beschrijven gebruiken we een partieel differentiaalvergelijking (PDE)
→ bij de mengreactor vallen de plaatsvariabelen weg door het continu mengen, dus we gebruiken een gwne differentiaalvergelijking (ODE) met 1 variabele
→ analoog met de buisreactor waar de afh vd tijd wegvalt

Onder sommige condities wordt een diff. verg. algebraïsch, de voorwaarde is evenwicht.

Eigenschappen ve proces

- een referentiestelsel
- variabelen: temperatuur T, concentratie c_i, druk p, pH, ... (= afhankelijk) en plaats, tijd, ... (= onafhankelijk)

  kinetiek = typische functie vd afh. variabelen
- procesgrens definiëren
  = scheiding tussen proces en omgeving ≈ controle-volume, deze twee kunnen namelijk met elkaar uitwisselen
  → inwendige variabelen = toestandsvariabelen = variabelen binnen de grenzen

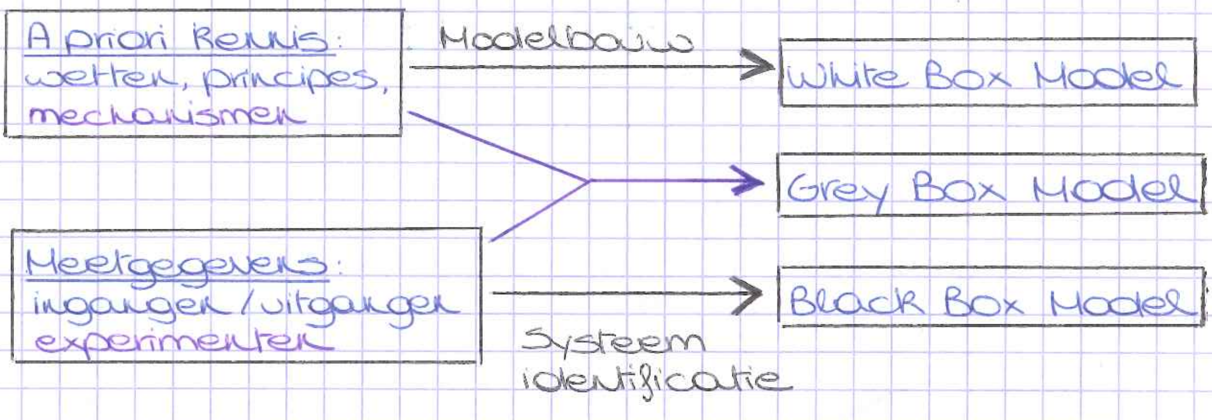
→ ingang = plaats v. input
uitgang = plaats v. output

Als we deze eig. willen omzetten naar een wiskundige vergelijking dan stellen we de Balansvergelijking op om tot een procesmodel te komen.

Balansverg: $\boxed{\langle \text{ophoping / accumulatie} \rangle = \langle \text{conversie} \rangle + \langle \text{transport} \rangle}$

→ conversie = verandering v. c id tijd
→ bij negatieve accumulatie is er een daling ipv stijging (ook omzetting kan negatief zijn)

We gebruiken a priori kennis en kennis van experimenten:



Mechanistisch model = behoudswet gebaseerd op stellingen van andere vakken
→ geldt alleen voor Newtoniaanse wetten
→ white box model = perfect mechanistisch (bestaat niet!)
→ (wiskundige) modelbouw = adhv. wiskundige verg.

Systeemidentificatie = verzamelen v. meetgegevens v. experimenten vd in- en uitgang(en) en andere plaatsen
→ black box model = zuivere regressie tussen in- en uitgang(en)

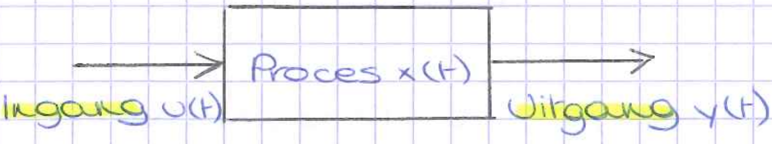
Simulatiemodel = combineren a priori kennis en meetgegevens
→ grey box model

Opstellen van modellen voor:

- stimuleren, voorspellen, efficientie bepalen
- scenarioanalyse, sensitiviteitsanalyse
→ modelvalidatie

- stabiliteit testen
- optimaliseren stabiliteit door: proces te stabiliseren of door performantie te verbeteren

Hoofdstuk 2: Interpretatie van systemen



Deze wordt beschreven door een differentiaalverg. Als je de verg. oplost, kun je het systeem interpreteren.

→ een 1e orde differentiaalverg. beschrijft een 1e orde proces

→ als je een constante ingang aanlegt, komt er na verloop v. tijd een constante uitgang uit

Oplossen ve lineaire differentiaalverg.

① Algemeen:

geg: $\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$

methode: 1) Vind de homogene opl. y_h
2) Vind de particuliere opl. y_p
3) Gebruik de initiële condities

opl: $y = y_h + y_p$

② Oplossingsmethode:

1) Vinden vd homogene opl:
* oplossen vd karakteristieke verg.
KV: $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$
* mogelijke opl:
→ eenvoudige wortels: $y_h = A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_n e^{s_n t}$
→ herhalende wortels met multipliciteit k:
$y_h = \dots + A_{i1} \cdot e^{s_i t} + A_{i2}\, t e^{s_i t} + \dots + A_{ik} \cdot t^{k-1} e^{s_i t}$
→ complexe wortels: $y_h = \dots + e^{at}(A_1 \cos bt + A_2 \sin bt)$

2) Vinden vd particuliere opl:
→ methode vd onbepaalde
* stel y_p afh aan rechterlid vd verg.
→ exp. functie: $\dots = a e^{bt} \Rightarrow y_p = K e^{bt}$
→ polynomiale functie: $\dots = a t^n$
$\Rightarrow y_p = K_n t^n + \dots + K_1 t + K_0$
→ sinus of cosinus: $\dots = a \sin bt \Rightarrow y_p = K_1 \cos bt + K_2 \sin bt$
* vul y_p in de differentiaalverg. in
* bepaal de constanten K_i

3) Gebruik v. initiële condities
→ vul de initiële condities in de gevonden verg. $y = y_p + y_h$ in

Voorbeelden TAAK

* $\frac{dy}{dt} + 3y = 5 \qquad y(t=0) = 2, \; t \geq 0$

A.O.H.V (algemene opl. vd homogene verg)

$\frac{dy}{dt} + 3y = 0$

$\longrightarrow$ KV (karakteristieke verg.)

$s + 3 = 0 \Rightarrow s = -3$

$\Rightarrow y_h(t) = ce^{-3t}$

$\longrightarrow$ PO (particuliere opl.)

$y_p(t) = A \Rightarrow 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

$\rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ce^{-3t} + \frac{5}{3}$

voor $y(t=0) = 2$: $2 = c + \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$\rightarrow y(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{5}{3}$ voor $t \geq 0$

→ nieuwe as met andere schaal

RUST

→ regime steady state evenwicht

Transient gaat over in regime (evenwicht)

→ eigendynamica sterft uit en we kunnen het uitgangssignaal zelf bepalen

→ stabiel proces

Eigendynamica = 'eigen wil' vh proces

* $\frac{dy}{dt} - 3y = 5 \qquad y(t=0) = 2, \; t \geq 0$

A.O.H.V

$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$

$\longrightarrow$ KV: $s - 3 = 0 \Rightarrow s = 3$

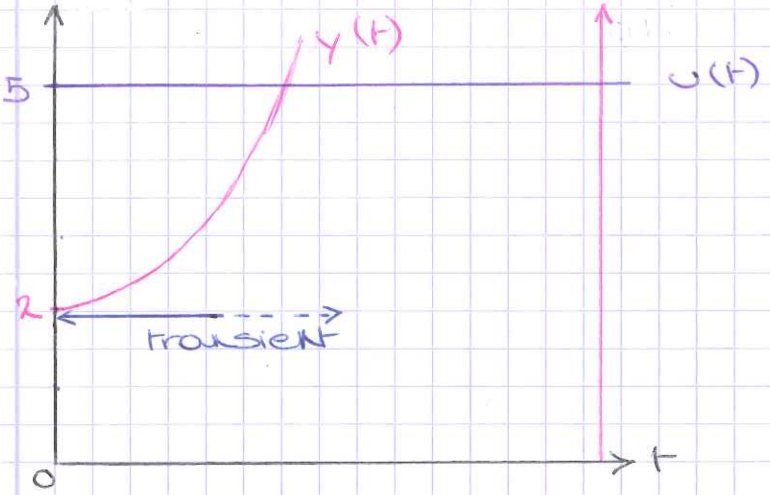
$\Rightarrow y_h(t) = ce^{3t}$

$\longrightarrow$ PO: $y_p(t) = A \Rightarrow 0 - 3A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{3}$

$\rightarrow y(t) = ce^{3t} - \frac{5}{3}$

voor $y(t=0) = 2$: $2 = ce^{0} - \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{11}{3}$

$\rightarrow y(t) = \frac{11}{3}e^{3t} - \frac{5}{3}$ voor $t \geq 0$



Uitgang neemt exponentieel toe naar + of - ∞. De eigendynamica sterft dus niet uit, want uitgang bereikt nooit $\frac{-5}{3}$.

→ transient $\frac{11}{3}$ is dominant

→ systeem ontploft
→ onstabiel proces

Besluit: Aan de eigendynamica kan je niets veranderen aan het rechterlid wel. Deze kan de eindwaarde bepalen en het linkerlid bepaalt de stabiliteit.

* $\frac{dy}{dt} - 3y = 7t \qquad y(t=0) = 2, \quad t \geq 0$

A.O.H.V: $\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \longrightarrow$ KV: $s - 3 = 0 \Rightarrow s = 3$
$\Rightarrow y_h(t) = ce^{3t}$

P.O: $y_p(t) = At + B \Rightarrow A - 3.(At + B) = 7t$
$\Rightarrow \begin{cases} A - 3B = 0 \\ -3At = 7t \end{cases}$
$\Rightarrow B = \frac{7}{9}$ en $A = -\frac{7}{3}$

$\longrightarrow y_p(t) = -\frac{7}{3}t + \frac{7}{9}$

$\longrightarrow y(t) = ce^{3t} - \frac{7}{3}t + \frac{7}{9}$

voor $y(t=0) = 2$: $2 = c - \frac{7}{3}.0 + \frac{7}{9} \Rightarrow c = \frac{2}{9}$

$\longrightarrow y(t) = \frac{2}{9}e^{3t} - \frac{7}{3}t + \frac{7}{9}$ (analoog $\frac{dy}{dt} + 3y = 7t$)

* $\frac{dy}{dt} + 3y = 3\sin 2t \qquad y(t=0) = 2, \quad t \geq 0$

A.O.H.V: $\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \longrightarrow$ KV: $s + 3 = 0 \Rightarrow s = -3$
$\longrightarrow y_h(t) = ce^{-3t}$

PO: $y_p(t) = A\sin 2t + B\cos 2t$
$\rightarrow 2A\cos 2t - 2B\sin 2t + 3A\sin 2t + 3B\cos 2t = 3\sin 2t$
$\Rightarrow (2A + 3B)\cos 2t + (3A - 2B)\sin 2t = 3\sin 2t$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 3A - 2B = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \frac{9}{13}$ en $B = -\frac{6}{13}$

$\rightarrow y_p(t) = \frac{9}{13}\sin 2t - \frac{6}{13}\cos 2t$

$\rightarrow y(t) = ce^{-3t} + \frac{9}{13}\sin 2t - \frac{6}{13}\cos 2t$

voor $y(t=0) = 2$: $c + \frac{9}{13}\sin 0 - \frac{6}{13}\cos 0 = 2$

$\Rightarrow c = \frac{32}{13}$

$\rightarrow y(t) = \frac{32}{13}e^{-3t} + \frac{9}{13}\sin 2t - \frac{6}{13}\cos 2t$ voor $t \geq 0$

Laplace-transformaties formularium

Laplace-transformatie

* Algemene definitie:

$$\boxed{\mathcal{L}[f] : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt}\,dt}$$

* Basisformules:

  * Heaviside-functie $\mathcal{L}[1] : z \longrightarrow \frac{1}{z}$
  * $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{L}[t^n] : z \longrightarrow \frac{n!}{z^{n+1}}$
  * $\forall \alpha > -1 : \mathcal{L}[t^\alpha] : z \longrightarrow \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$
  * $\mathcal{L}[e^{at}] : z \longrightarrow \frac{1}{z-a}$ $\quad Re(z) > a$
  * $\mathcal{L}[\sin kt] : z \longrightarrow \frac{k}{z^2+k^2}$ $\quad Re(z) > 0$
  * $\mathcal{L}[\cos kt] : z \longrightarrow \frac{z}{z^2+k^2}$ $\quad Re(z) > 0$
  * $\mathcal{L}[\operatorname{sh} kt] : z \longrightarrow \frac{k}{z^2-k^2}$ $\quad Re(z) > |k|$
  * $\mathcal{L}[\operatorname{ch} kt] : z \longrightarrow \frac{z}{z^2-k^2}$ $\quad Re(z) > |k|$

* convolutieproduct 1:

$$\boxed{f * g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} : x \mapsto (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).g(x-y)\,dy}$$

* convolutieproduct v. Laplace-functies

$$\boxed{(f*g)(z) = \int_0^z f(z-s)\,g(s)\,ds}$$

* Heaviside shift: $H_a : [0,+\infty[\to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } t \in [0,a[\\ 1 & \text{als } t \in [a,+\infty[\end{cases}$

$\longrightarrow H_a(t) = H(t-a)$

$\longrightarrow \mathcal{L}[H(t-a)](z) = \frac{e^{-az}}{z}$

* 1e translatiewet: $\boxed{\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f](z)}$

* 2e translatiewet: $\boxed{\mathcal{L}[e^{ct}f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z-c)}$

* willekeurige translatie: $\boxed{\mathcal{L}[f(t).H(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f(t+a)](z)}$

* homothetie: $\boxed{\mathcal{L}[f(at)](z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{1}{a}z\right)}$

* Laplace-transformatie vd afgeleide

$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)](z) = z\,\mathcal{L}[f](z) - f(0)}$

* Afgeleide vd Laplace-transformatie:

$\boxed{\mathcal{L}[t f(t)](z) = -\mathcal{L}[f]'(z)}$

* convolutie-theorema: $\boxed{\mathcal{L}[f * g](z) = \mathcal{L}[f].\mathcal{L}[g]}$

<u>Inverse Laplace-transformaties</u>

* Basisformules:
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = 1$
    * $\forall n \in \mathbb{N}: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{z^{n+1}}\right] = t^n$
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-a}\right] = e^{at}$
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{z^2+k^2}\right] = \sin kt$
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+k^2}\right] = \cos kt$
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{z^2-k^2}\right] = \operatorname{sh} kt$
    * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-k^2}\right] = \operatorname{ch} kt$

Mod & sim

les 3

Laplacetransformaties

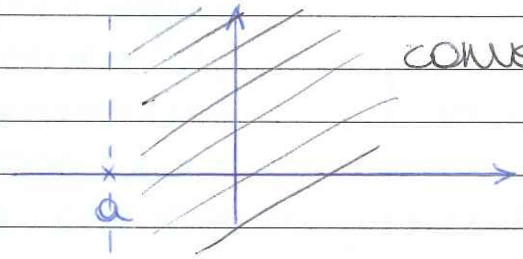
① Definitie $f(t),\ t \geq 0 \Leftrightarrow F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$

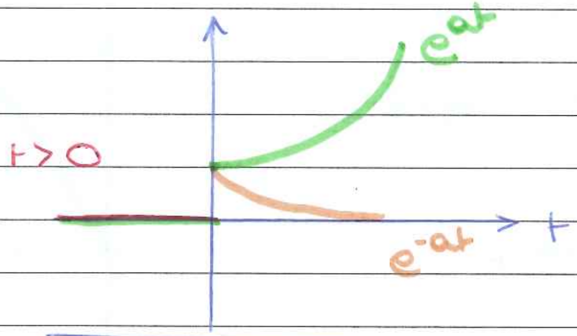
② Eigenschappen

③ Transformatieparen

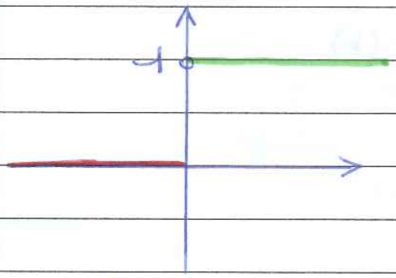
$\star\ e^{at} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}\ ;\ s > a$

convergentiegebied = ~~meest rechtse gebied~~ gebied rechts van het meest rechtse nulpunt vd noemer.





$\star$ $\boxed{\text{voor } a = 0}$ → stapsfunctie $1(t)\ ;\ t > 0$

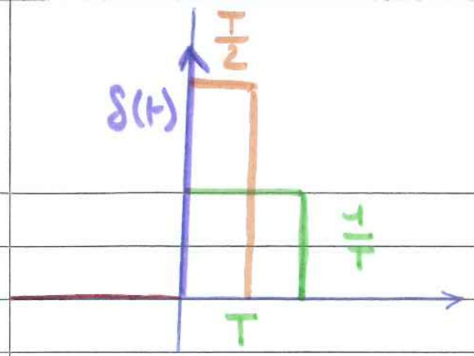


$\updownarrow \mathcal{L}$

$\frac{1}{s}$

$\star$ Dirac functie

$\neq$ functie = impuls! = inverse Laplace v. 1



= een puls
= een puls } gelijk opp, dus een gelijke integraal dus gelijke intensiteit (= 1)

→ Dirac impuls, heeft geen opp maar behoudt wel de intensiteit (= 1)

$\mathcal{L}[\delta(t)] \stackrel{!}{=} 1$

vb $\mathcal{L}[3\delta(t)] = 3$ (omgekeerd wordt dit veel gebruikt ⇒ $3 = \mathcal{L} \longleftrightarrow 3\delta(t)$)

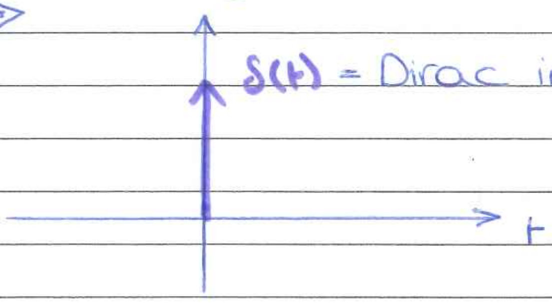
Impulsresponsie - Transferfunctie

$u(t) \longrightarrow \boxed{P} \longrightarrow y(t)$ SISO = single input, single output

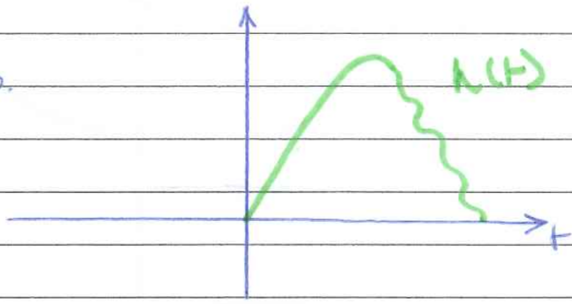
met $u(t) = \delta(t)$ initieel in rust } → $y(t) = h(t)$; $t \geq 0$ impulsresponsie = antwoord op impuls

wat is het antwoord (responsie) op een willekeurige ingang $u(t)$?

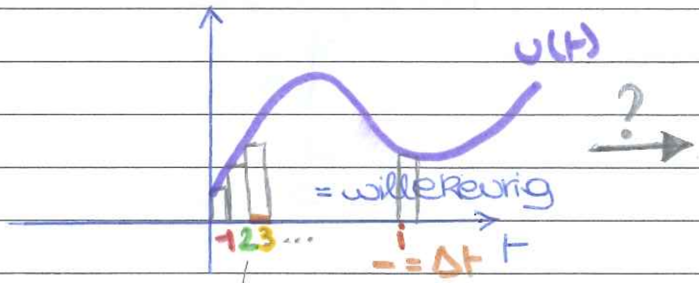
⇒



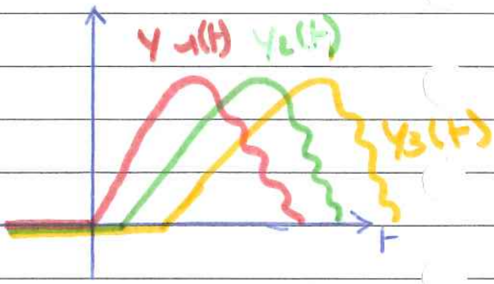
INGANG



UITGANG



?



→ opm: zie wisk 2: Riemannsom (hfd 7)
→ ondersom

Functie opdelen in allemaal kleine tijdsintervallen (allemaal impulsen)

1: intensiteit $I = u(t=0)\Delta t$
2: $I = u(t=\Delta t).\Delta t$
3: $I = u(t=2\Delta t).\Delta t$
i: $I = u(t=i\Delta t).\Delta t$

opdeling vd ingang!

$\longrightarrow$ 1: $y_1(t) = (u(t=0)\Delta t).h(t)$
2: $y_2(t) = (u(t=\Delta t).\Delta t).h(t-\Delta t)$
3: $y_3(t) = (u(t=2\Delta t)\Delta t).h(t-2\Delta t)$
i: $y_i(t) = u(t=i\Delta t)\Delta t).h(t-i\Delta t)$

opdeling vd uitgang!

Nu nemen we de som v alle deelantwoorden
$\Rightarrow y(t) = \sum_i^{\infty} y_i(t) = \sum_i^{\infty} u(i\Delta t).h(t-i\Delta t).\Delta t$

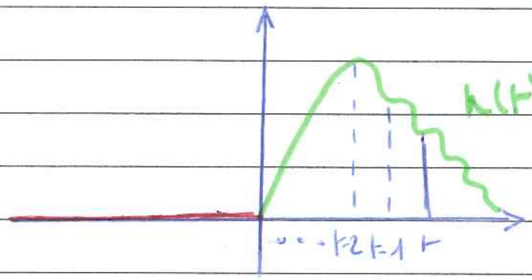
voor $\Delta t \to 0$: $\boxed{y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau}$

met $\tau \triangleq i\Delta t$

$\to$ dit is een convolutie-integraal : $u(t) * h(t)$ is de specifieke notatie

TAAK 2: oef v. TOPIC 2 : GRAFIEK!

Opm: grenzen



$\to$ grenzen integraal aanpassen:
$0 \to \tau = 0$
$+\infty \to \tau = t$
omvormen tot eindige integraal

$\to$ naar laplace domein

$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\int_{\tau=0}^{\tau=t} u(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau]$

$= \boxed{Y(s) = H(s).U(s)}$!

H(s) is uniek voor het proces
= 'verwerking vd ingang' en 'aflevering aan de uitgang'
= transferfunctie = overdrachtsfunctie

Hoofdstuk 3: Laplace transformaties

Oplossen v. differentiaalverg. in Laplace domein

① Algemeen:

geg: $f\left(\frac{d^n y}{dt^n}, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}, y\right) = g(t)$

methode: 1) Laplace transformatie vd verg:
$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$
2) Herschrijven naar $Y(s) = \dots$
3) $Y(s)$ opsplitsen in partieel breuken
4) Inverse Laplace transformatie
$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

opl: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

② Methode:

1) Laplace transformatie vd differentiaalverg:
$f(t) \rightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

2) Herschrijven naar $Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$

3) $Y(s)$ opsplitsen in partieelbreuken
→ noemer splitsen in factoren
$Y(s) = \alpha_0 + \frac{\beta_1}{s - s_1} + \dots + \frac{\gamma_1 s + \gamma_2}{s^2 + as + b} + \dots$
→ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bepalen
* bij c^{te} term: $\alpha_0 = \lim_{s \to 0} Y(s)$ $(= 0 \Leftarrow m < n)$
* als β 'eenvoudig' is: $\beta = [Y(s)(s - s_i)]_{s = s_i}$
* als β_1 en β_2 herhaaldelijk zijn
$(s - s_1)^2 \leftrightarrow \dots \frac{\beta_1}{s - s_i} + \frac{\beta_2}{(s - s_i)^2} + \dots$
↳ $\beta_1 = [Y(s)(s - s_i)^2]_{s = s_i}$
↔ β_1 vinden door: - op gelijke noemer brengen
- waarden voor s kiezen

4) Inverse Laplace transformaties
$F(s) \rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \to \infty} \int_{c - Rj}^{c + Rj} F(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$

Laplacetransformaties

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$

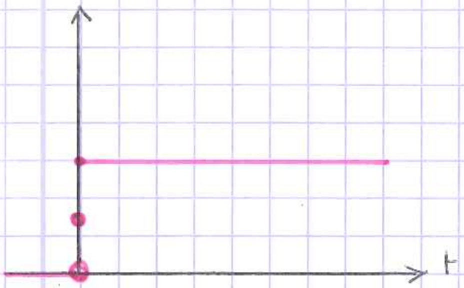
→ klein beetje naar links op de grafiek want alles wat op 0 gebeurt moet ook in de transformatie

Bepaalde oneigenlijke integraal

$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots$ = tweezijdig

Voorbeelden

* **Stapsfunctie**: $f(t) = A.1(t)$



→ constante ingang

$$\mathcal{L}[A.1(t)] = \int_0^{+\infty} A.1(t)e^{-st}\,dt$$
$$= A.\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$$
$$= A.\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{s} \qquad \underline{\underline{Re(s) > 0}}$$

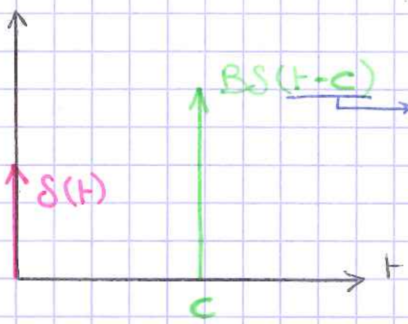
→ Opm: Laplace is een lineaire operator, s is een complexe variabele dus convergentiegebied niet vergeten

* Exponentiële functie: $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt$$
$$= \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a} \qquad \underline{\underline{Re(s) > a}}$$

→ de stapsfunctie is hier een speciaal geval v, namelijk voor $t = 0$

* **Dirac functie**: (δ)



→ schift naar rechts id tijd

Dirac functie id oorsprong

→ puur mathematisch: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)f(t)\,dt$
$$= f(0).\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)\,dt}_{1}$$

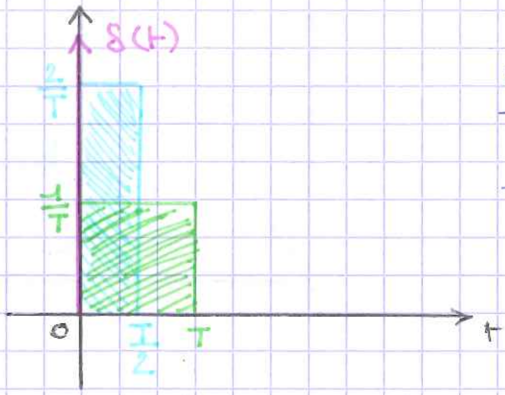
→ $\int_{-\infty}^{+\infty} B\delta(t-c)g(t)\,dt = B.g(c)$

→ Eigenschappen:

1) $x(t) \longrightarrow x(s)$: Laplace transformatie
$\frac{dx}{dt}(t) \longrightarrow s\,x(s) - x(0)$

2) $x(t) \longrightarrow x(s)$
$\int x(t)\,dt \longrightarrow \frac{x(s)}{s}$

→ Dirac is een **pulsfunctie**



voor $T \rightarrow 0$: impuls = 1
→ puls wordt smaller en hoger maar $I = 1$ blijft behouden
→ impuls
↕
puls : heeft een eindige breedte

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Voorbeeldproces

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{Proces}} \longrightarrow y(t)$$

geg: • $u(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = h(t)$; $t \geq 0$
• proces is initieel in rust

gevr: $u(t)$ (willekeurig) $\longrightarrow y(t) = ?$
zonder dat het experiment effectief wordt uitgevoerd

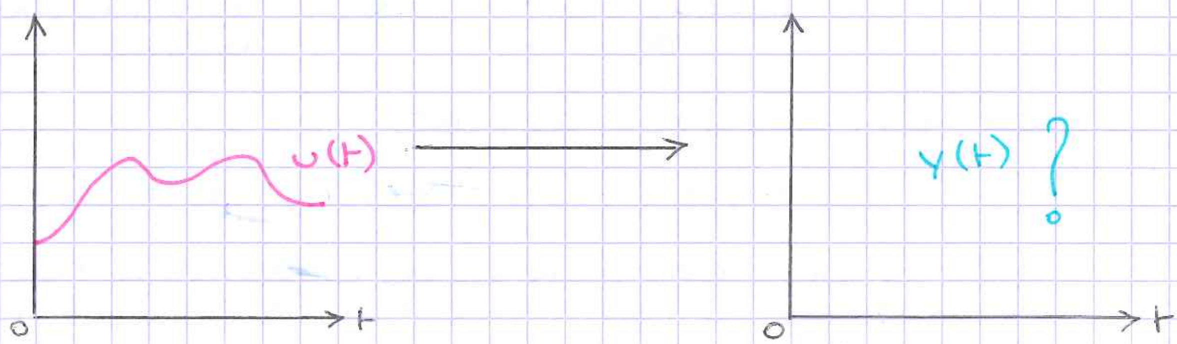
• = ingang
• = uitgang

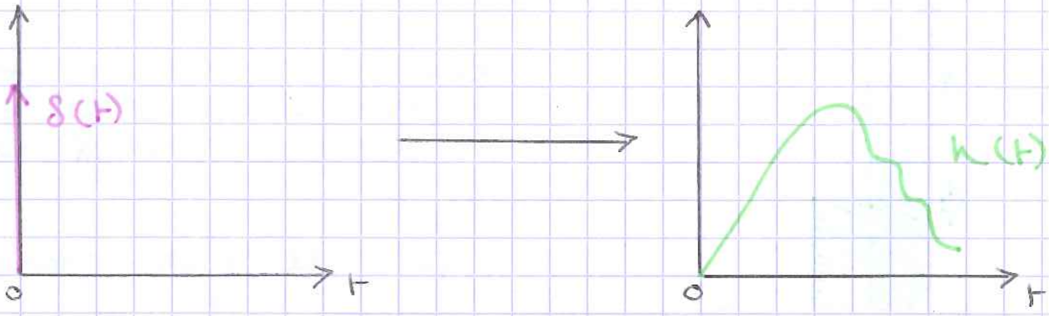
Vertragingstijd = tijd nodig om impuls, ingeschoten id ingang, te detecteren aan de uitgang
→ bij bacteriën is dit de lagfase

Finite Impuls Response (FIR)
- Delay, looptijd, lag, …
  → wel al een ingang maar nog geen uitgang
- "rust"
  = geen verandering id tijd (relatief begrip)
  → afh vh gekozen referentiestelsel
- lineariteit en superpositie gebruiken:

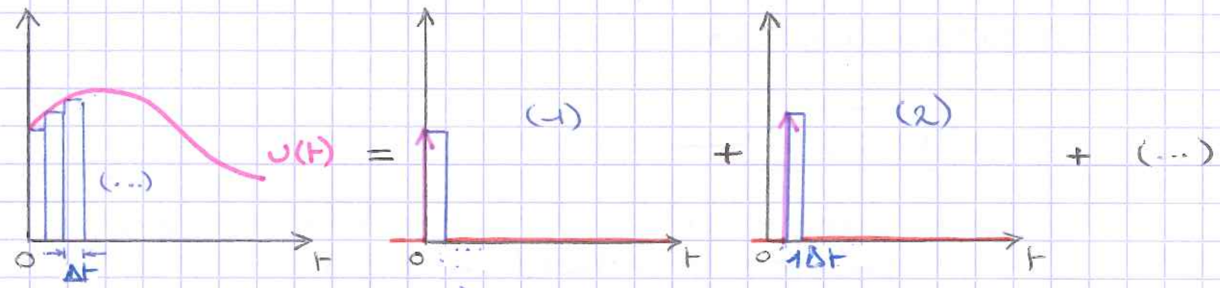
$$\begin{array}{l} u_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ u_2(t) \longrightarrow y_2(t) \\ \hline \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \end{array}$$

in grafiek:





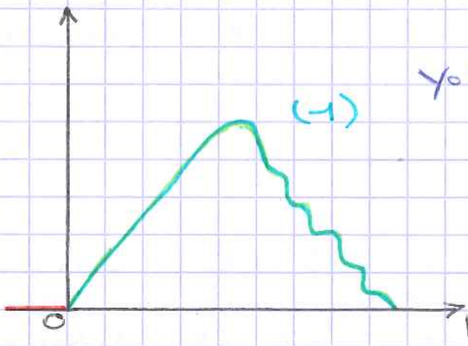
opl:



we beschrijven u(t) als een reeks van pulsen, gebruik makend vd lineariteit en superpositie. We bekomen een lineaire differentiaalverg. met c^{te} coëfficienten. voor lim $\Delta t \to 0$ worden de pulsen als impulsen beschouwd.

voor (1): $I_0 = u(t=0)\,\Delta t$

$\rightarrow$ effect vd puls op de uitgang:



$y_0(t) = (u(t=0)\cdot\Delta t) \,.\, h(t)$

Een eenheidsdiracimpuls met intensiteit 1 heeft als effect h(t).

$\rightarrow$ een bijna diracimpuls met I u(0) heeft als effect $(h(t) I_0)$

voor (2): $I_1 = u(t = 1\Delta t) \,.\, \Delta t$

$y_1(t) = (u(t = 1\Delta t) \,.\, \Delta t)$
$\underline{h(t - \Delta t)}$
$\downarrow$
verschuiving naar rechts

voor (i): $I_i = u(t = i\Delta t) \,.\, \Delta t$

$\longrightarrow y_i(t) = (u(t = i\Delta t) \,.\, \Delta t) \,.\, h(t - i\Delta t)$

$\Rightarrow$ y(t) is de som van alle uitgangen (geschaalde, verschoven id tijd impulsen, versies vh oorspr. probleem)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(t=i\Delta t).\, h(t-i\Delta t)\cdot\Delta t \quad \text{(Riemann-som)}$$

wanneer $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau).\, h(t-\tau)\, d\tau}$$

(convolutie-integraal)

→ τ is hier een lopende variabele, $\tau \triangleq i\Delta t$

→ zo kunnen we de uitgang ve willekeurige ingang bepalen adhv. $h(t)$, deze is niet willekeurig maar moet een impulsresponsie zijn.

"Voor een lineair tijdsproces vind ik de uitgang op een willekeurige ingang door de convolutie te nemen vd ingang met het impulsantwoord ($h(t)$)"

→ $h(t)$ is eigen aan het proces ⇒ eigendynamica

Alternatieve formulering: $y(t) \triangleq u(t) * h(t)$

met τ als lopende variabele:

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=\cancel{+\infty}\, t} u(\tau).\, h(t-\tau)\, d\tau$$

We nemen vd convolutie-integraal de Laplace transformatie:

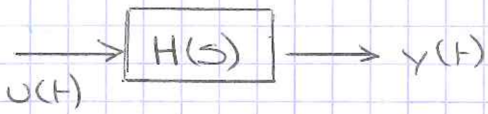
$$\left.\begin{aligned} Y(s) &\triangleq \mathcal{L}[y(t)] \\ U(s) &\triangleq \mathcal{L}[u(t)] \\ H(s) &\triangleq \mathcal{L}[h(t)] \end{aligned}\right\} \boxed{Y(s) = H(s).\, U(s)}$$

Hierbij is $H(s)$ de overdrachtsfunctie (= transfer-functie), een unieke eig. vh proces

Opm: in de alternatieve formulering passen we de grenzen vd integraal aan zodat deze omgevormd wordt tot een eindige integraal.

Hoofdstuk 4: Processen

Proces met 1 ingang en 1 uitgang

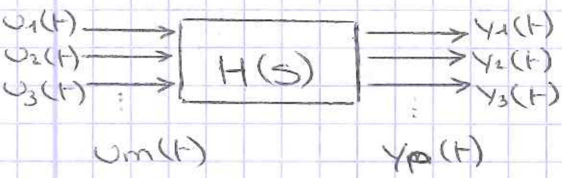


SISO = single input, single output

$Y(s) = U(s) . H(s)$

opgelet op examen: ~~$y(t) = H(s) . u(t)$~~
in blokschema mogen 2 formules door elkaar gehaald worden maar in formularium absoluut niet

Proces met meerdere in- en uitgangen



MIMO = multiple inputs, multiple outputs
met:

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \qquad \bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

dimensie: $m * 1$ dimensie: $p * 1$

$$\bar{U}(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \dots \\ U_m(s) \end{pmatrix} \qquad \bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_p(s) \end{pmatrix}$$

$m * 1$ $p * 1$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{Y}(s) = \mathbf{H}(s) . \bar{U}(s)}$$ met $\mathbf{H}(s)$ = matrix

$p * 1$ $p * m$ $m * 1$

opm: $\mathbf{H}(s) . \bar{U}(s)$ en niet $\bar{U}(s) . \mathbf{H}(s)$, anders klopt vermenigvuldiging niet (niet commutatief)

in beginvoorwaarde staat: proces initieel in rust maar dit is niet noodzakelijk. Bij lineair proces geldt: $Y(s) = H(s) . U(s) + (o)$

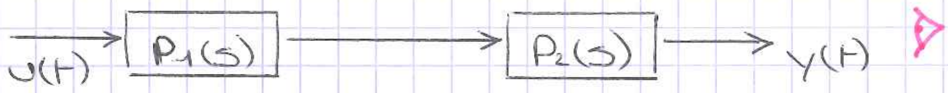
$\downarrow$

initiële toestand

Bij een proces initiëel niet in rust zoekt men de transferfunctie H(s). Eerst ga je er van uit dat het proces wel in rust is, de term (o) is uiteindelijk onbelangrijk om H(s) te bepalen. Bepaal dan h(t) en neem de Laplace transformatie om (o) te bepalen.

Equivalente transferfuncties

* Processen in serie:
= uitgang vd ene, is ingang vd andere

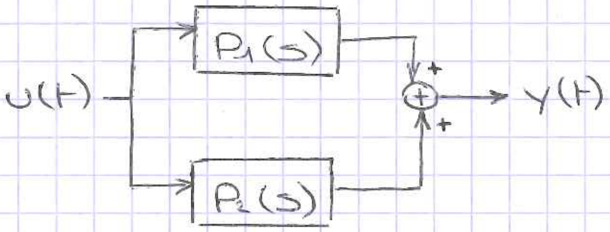


we zijn geïnteresseerd in u(t) en uiteindelijk y(t).
De equivalente transferfunctie: $Y(s) = H(s) . U(s) + \dots$
(+ ... wanneer initieel niet in rust)

$\Rightarrow Y(s) = P_2(s) . P_1(s) . U(s)$

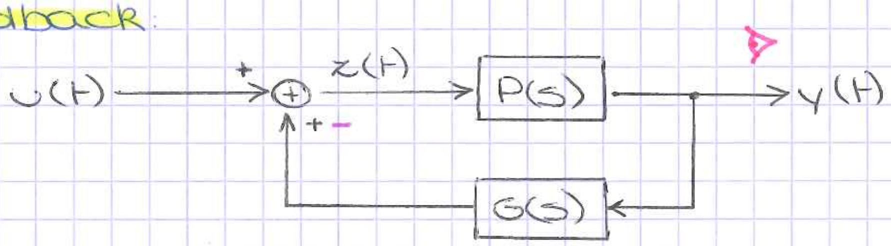
opm: eerst P_2 en dan P_1 want je kijkt van uitgang naar ingang

* Processen in parallel:



$$Y(s) = \underbrace{(P_1(s) + P_2(s))}_{= H(s)} . U(s)$$

* Feedback:
vb.



$$\begin{aligned} Y(s) &= P(s) . Z(s) \\ &= P(s) . (U(s) \mp G(s) . Y(s)) \\ &= P(s) . U(s) \mp P(s) . G(s) . Y(s) \end{aligned}$$

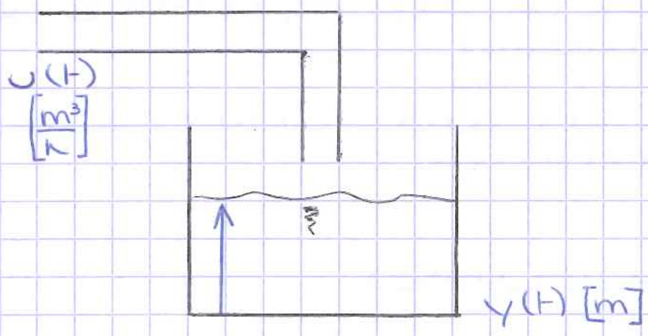
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{P(s) . U(s)}{1 \pm P(s) G(s)}$$

Dit vb. toont positieve feedback, dit zijn vaak niet stabiele processen.
→ negatieve feedback

vb. je haalt snelheid met je auto: bij positieve feedback zou de auto bij het indrukken vd rem versnellen terwijl bij negatieve feedback vertraagt deze.

Hoofdstuk 5: Stabiliteit

Inleidend voorbeeld: Een geïdealiseerd bad
examen!



C (capaciteit)
→ 'het opp' [m²]

* Balansverg: $\frac{d}{dt}(C\,y(t)) = u(t)$ met $C = c^{te}$
  = volumeverandering

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}u(t) \quad ; \quad y(t=0) = y_0$$

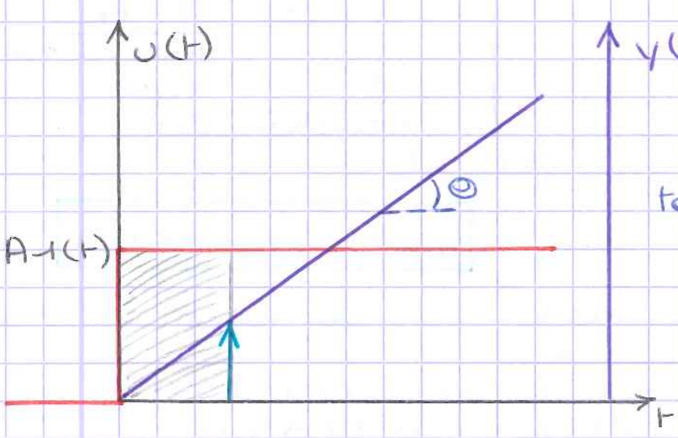
* Transferfunctie: $sY(s) - y(0^-) = \frac{1}{C}U(s)$
  = Laplace vd balansverg.

$$\Rightarrow sY(s) = y(0^-) + \frac{1}{C}U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{1}{sC}}_{\text{transferfunctie}}\underbrace{U(s)}_{\text{ingang}} + \underbrace{\frac{y(0^-).C}{Cs}}_{\text{proces initieel niet in rust}}$$

We bekomen: in symbolen

$$u(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{sC}} \rightarrow y(t)$$



$\tan\theta = \frac{A}{C}$ = rico

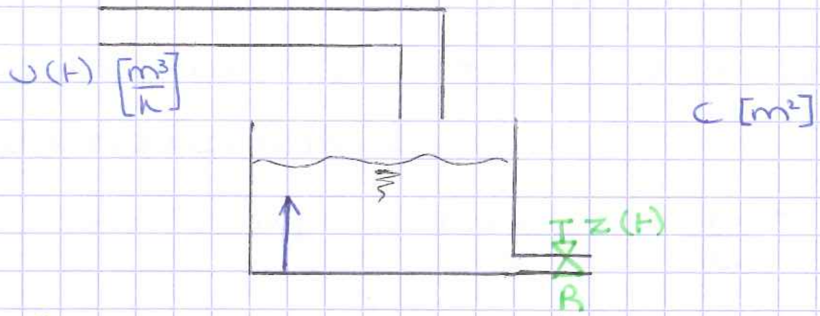
je start met een leeg bad: $y(0^-) = 0$
je zet de kraan open en het bad vult met c^{te} debiet
→ Dirac impuls?

$$Y(s) = \frac{1}{sC}\cdot\frac{A}{s} = \frac{A}{C}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$\rightarrow y(t) = \frac{A}{C}\,t \quad ; \quad t \geq 0$$

Opmerkingen:
1) De uitgang is de integraal vd ingang.
→ op juiste schaal zou ▨ = ↑ moeten zijn
→ zie eenheden m^2 en m^3/h
2) Dit bad is onstabiel want de ingang is begrensd en de uitgang neemt onbegrensd toe als t toeneemt:
$t \to \infty \to y(t) \to +\infty$
→ we kunnen het bad stabiliseren dmv negatieve feedback
vb. afvoer

Geïdealiseerd bad met afvoer



* Balansverg: $\frac{d}{dt}(C.y(t)) = u(t) - z(t)$ met $z(t) = \frac{y(t)}{R}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{C}\frac{R}{R}u(t) - \frac{1}{RC}y(t)$$

$$\Rightarrow R.C\frac{dy}{dt} + y(t) = Ru(t)$$

* Transferfunctie: $RC.(sY(s) - y(0^-)) + Y(s) = R.U(s)$

$$\Rightarrow (1 + RCs).Y(s) = RU(s) + RCy(0^-)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{RU(s) + RCy(0^-)}{1 + RCs}$$

$$= \underbrace{U(s)}_{\text{ingang}}\underbrace{\frac{R}{1+RCs}}_{\text{transferfunctie}} + \underbrace{\frac{RC}{1+RCs}.y(0^-)}_{\text{initiëel niet in rust}}$$

Hydraulische wet v. Ohm: $\boxed{y(t) - 0 = R.z(t)}$

→ R is c^{te} maar deze kan wel de hydraulische weerstand beïnvloeden
Hoe groter R, hoe kleiner de weerstand
Er ontstaat een potentiaalverschil

Ohm: $v(t) = R.i(t)$

We mogen aannemen dat $y(0^-) = 0$:
$Y(s) = U(s)\frac{R}{1+RCs}$ + duidt op negatieve feedback.

Bijlage: Taak

1) eenheid v. R: uit de hydraulische wet:

$$\Delta y(t) = R \cdot x(t)$$

$$\rightarrow [m] = x \left[\frac{m^3}{h}\right] \Rightarrow x = \left[\frac{h}{m^2}\right]$$

2) eenheid v. RC: $\tau = R.C$

$$\rightarrow \left[\frac{h}{m^2}\right] \cdot [m^2] = [h]$$

3) Voor bad met afvoer uitgang $y(t)$ bepalen voor ingang $u(t) = A\,1(t)$:

$$Y(s) = \frac{R}{1+RCs} \cdot \frac{A}{s} = AR \cdot \left(\frac{1}{s(1+RCs)}\right)$$

$\rightarrow$ opsplitsen in partieelbreuken (Fuss.)

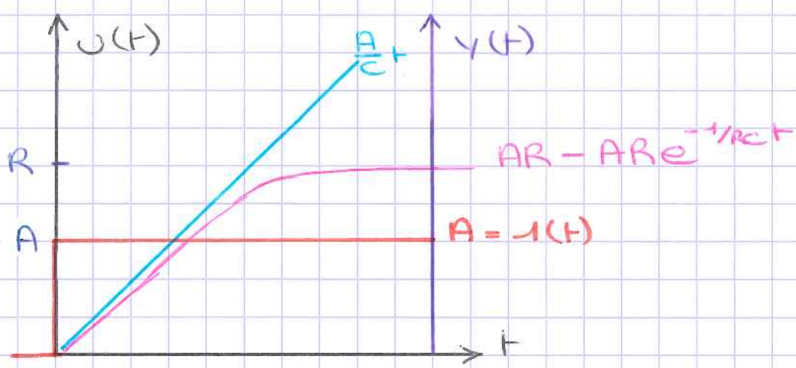
$$\frac{B}{s} + \frac{C}{1+RCs} \quad \text{met } B = \left.\frac{1}{1+RCs}\right|_{s=0} = 1$$

$$C = \left.\frac{1}{s}\right|_{s=\frac{-1}{RC}} = -RC$$

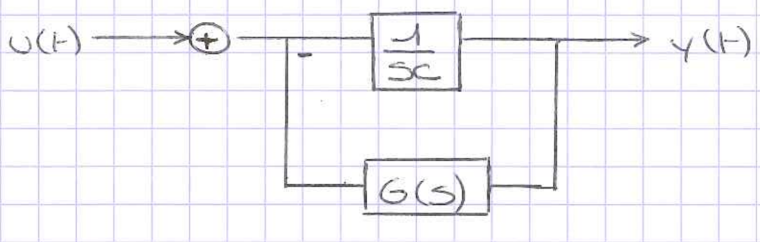
$$\rightarrow Y(s) = AR \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{RC}{1+RCs}\right) = AR\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-(-\frac{1}{RC})}\right)$$

$\rightarrow$ inverse Laplace transformatie:

$y(t) = AR - ARe^{-\frac{1}{RC}t}$ voor $t \geq 0$



4) Negatieve terugkoppeling:



$$Y(s) = \frac{1}{sC} \cdot X(s)$$

$$= \frac{1}{sC} \cdot (U(s) - G(s)Y(s))$$

$$= \frac{1}{sC} U(s) - \frac{1}{sC} G(s) \cdot Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) + \frac{1}{sC} G(s) Y(s) = \frac{1}{sC} U(s)$$

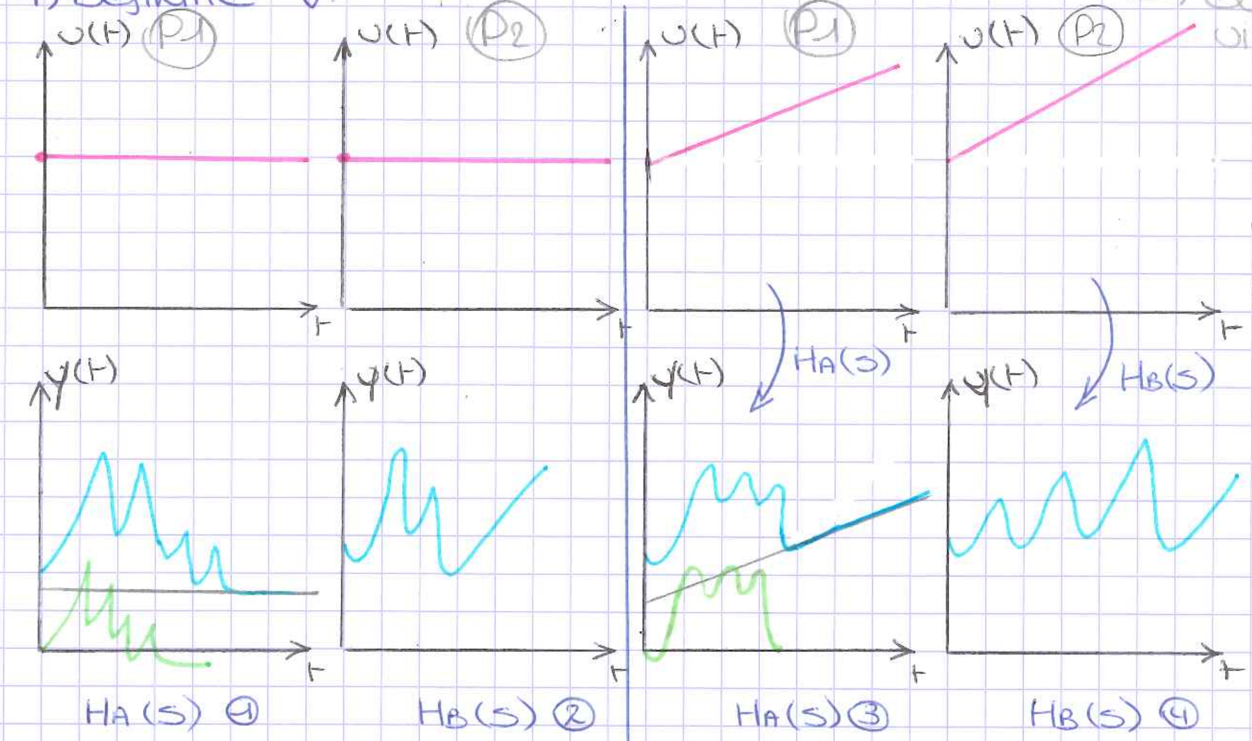
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{1 + {}^1/_{sC} \cdot G(s)} U(s)$$

De equivalente transferfunctie is: $Y(s) = \frac{R}{1+RCs} \cdot U(s)$
Door deze gelijk te stellen bekomen we voor $G(s) = \frac{1}{R}$

I/O - stabiliteit (input / output)

2 processen (P1 en P2) → elk 2x uitgevoerd

1) Definitie ∀:



om hierover te beoordelen moet info over zowel input als output beschikbaar zijn

P2 onstabiel
P1 stabiel?
→ zie ③

→ $y(t) = \underline{y_{transient}(t)} + \underline{y_{regime}(t)}$ regime = evenwicht = steady state

① Transiet moet stabiel zijn om regime naar 0 te laten gaan.

② Begrensde ingang en onbegrensde uitgang. De oneindige toename bij de uitgang kan enkel door een onstabiel proces komen.

→ Regime kan het antwoord zijn vd. tijd (begrensd)
vb. sinus input geeft sinus uitput (na tijd) met dezelfde pulsatie

③ u(t) = lineair toenemende ingang
Onbegrensde ingang geeft na verloop v tijd een onbegrensde uitgang. Dit zegt niets over de stabiliteit. Je weet niet of de toenemende output komt door een instabiel proces of door toenemende input.
→ je kan onmogelijk alle inputs testen

Een proces is I/O - stabiel
1) voor elke begrensde ingang blijft de uitgang begrensd
2) voor elke begrensde ingang de uitgang het regime bereikt als $t \to +\infty$
3) voor elke begrensde ingang het transiënte deel in de uitgang naar 0 convergeert

Criterium: voor I/O - stabiliteit "H(s)" → criterium nodig want def is 'waardeloos' id praktijk
→ er zit een transferfunctie in

vb. $\frac{dy}{dt} + ay = bu$ $\quad y(t=0) = y_0$

$\rightarrow (sY(s) - y_0) + aY(s) = bU(s)$

$\Rightarrow (s+a) . Y(s) = bU(s) + y_0$

Herhalingsoef.

impulsrespons = antwoord op impuls
transferfunctie = Laplace transformatie v. impulsrespons v. proces initieel in rust
rust = geen verandering id tijd

Continue reactor
(CSTR)

$F_{in} = F_{uit} \triangleq F$

→ reactor komt in ~~df~~ regime (dynamisch in rust)

vb. waterzuivering

$\mathcal{L}[h(t)]$ met $\begin{cases} u(t) = \delta(t) \\ \text{initieel in rust} \end{cases}$ $y(t) = h(t)$

Vb id praktijk

$3\frac{dy}{dt} + 2y = \underbrace{7\frac{du}{dt} - 2u}$ wat is $H(s) = ?$

gekend, is een functie vd tijd.

met $u(t=0) = u_0$
$y(t=0) = y_0$

→ $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$ dus we stappen over naar het Laplace domein

$\xrightarrow{\mathcal{L}} 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 7sU(s) - 7u(0) - 2U(s)$

$\Rightarrow Y(s)(3s+2) - 3y_0 = U(s)(7s-2) - 7u_0$

$\Rightarrow Y(s) = U(s) \cdot \underbrace{\frac{7s-2}{3s+2}}_{H(s)} \boxed{- \frac{7u_0 + 3y_0}{3s+2}}$

→ uniek verband, H(s) kan niets anders zijn voor dit proces

opm 1 → proces is niet persé initieel in rust

"in rust" is een noodzakelijke voorwaarde voor $Y(s) = H(s)U(s)$ maar dit geldt niet voor elk proces, er komen dan extra termen bij ter compensatie

Hoe krijgen we dit proces initieel in rust?
→ $y_0 = 0 = u_0$ of $3y_0 = 7u_0$

$\boxed{\text{opm 2}}$ Het lijkt alsof de 2 delen op dezelfde noemer staan en dus zo verband hebben. Dit is niet zo want $U(s)$ heeft bijna gegarandeerd ook een noemer die verschillend zal zijn.
$\longrightarrow$ noemer v. $H(s)$ gemeenschappelijk
$\longrightarrow$ zie rechts

TAAK : vorige oef : met $u(t) = \sin 3t$
$u_0 = 0$
$y_0 = 1$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{b}{s+a}}_{\text{transferfunctie } H(s)} U(s) + \underbrace{\frac{y_0}{s+a}}_{\text{initiële voorwaarden / toestand}}$$

→ Algemeen: $\boxed{Y(s) = H(s).U(s) + \frac{\langle u^{(i)}(0), y^{(i)}(0)\rangle}{NH(s)}}$

Als het proces initieel niet in rust is en er wordt geen ingang aangelegd, dan is er nog steeds een respons. (omgekeerde ook waar)

$$Y(s) = H(s)U(s) + \frac{\langle u^{(i)}(0), y^{(i)}(0)\rangle}{N.H(s)}$$

$$= \frac{TH(s)}{NH(s)} \cdot \frac{TU(s)}{NU(s)} + \frac{\langle u^{(i)}(0), y^{(i)}(0)\rangle}{N\,H(s)}$$ T = teller, N = noemer

$$= \frac{TH(s).U(s) + \langle u^{(i)}(0), y^{(i)}(0)\rangle . NU(s)}{NH(s).N\,U(s)}$$

$$= \underbrace{\frac{P_1(s)}{NH(s)}}_{Y_H(s)} + \underbrace{\frac{P_2(s)}{NU(s)}}_{\text{ingang is "braaf" als je een begrensde ingang aanlegt}}$$ met P_x een polynoom.

De noemer vh ingangsignaal zit in $Y(s)$, het zit id zelfde familie als $P_1/NH(s)$ het niet 'om zeep' helpt.
Dit beïnvloedt de stabiliteit niet zolang $U(s)$ begrensd is.

Splitsen in partieelbreuken:

$$Y_H(s) = \frac{P_1(s)}{NH(s)}$$

$$= \frac{P_1(s)}{s.s^2 \ldots (s-a).(s-b)^2 \ldots (s^2+\omega_1^2).(s^2+\omega_2^2)^2 \ldots ((s+\alpha_1)^2+\beta_1).((s+\alpha_2)^2+\beta_2)^2 \ldots}$$

met
- zuiver imaginair complex toegevoegde: $s = \pm i\omega_1$
- $s = -\alpha_1 \pm i\beta_1$ = complex getal

→ nulpunten vd noemer = x = "De Polen"

$$\rightarrow Y_H(s) = A + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s-a} + \frac{E}{(s-b)^2} + \frac{}{s^2+\omega_1^2} + \frac{}{(s^2+\omega_2^2)^2} + \frac{}{(s+\alpha_1)^2+\beta_1}$$
$$+ \frac{}{((s+\alpha_2)^2+\beta_2)^2} + \ldots$$

We nemen vervolgens de inverse Laplace transformatie:
$\mathcal{L}^{-1}(Y_H(s)) = y_H(s)$

$$= A\,\delta(t) + B\,1(t) + Ct + De^{at} + Ete^{bt} + e^{-\alpha_1 t}(X\cos\beta_1 t + Z\sin\beta_1 t)$$

$\boxed{\text{voor } t\to\infty}$	$A\,\delta(t)$	$B\,1(t)$	Ct	De^{at}	Ete^{bt}	$e^{-\alpha_1 t}(X\cos\beta_1 t + Z\sin\beta_1 t)$
	0	B	$\pm\infty$	0 als $a<0$ en $s=-a$	0 als $b<0$ en $s=-b$	0 als $\alpha_1>0$
op grafiek:		x	x	x	x links liggend	x links liggend

$+ \; te^{-\alpha_1 t}\,(X.\cos\beta_2 t + Z.\sin\beta_2 t)$ $\;+\;(F\cos\omega_1 t + G\sin\omega_1 t)$

$\downarrow$ 0 als $\alpha_1 > 0$

oscillatie maar blijft begrensd.

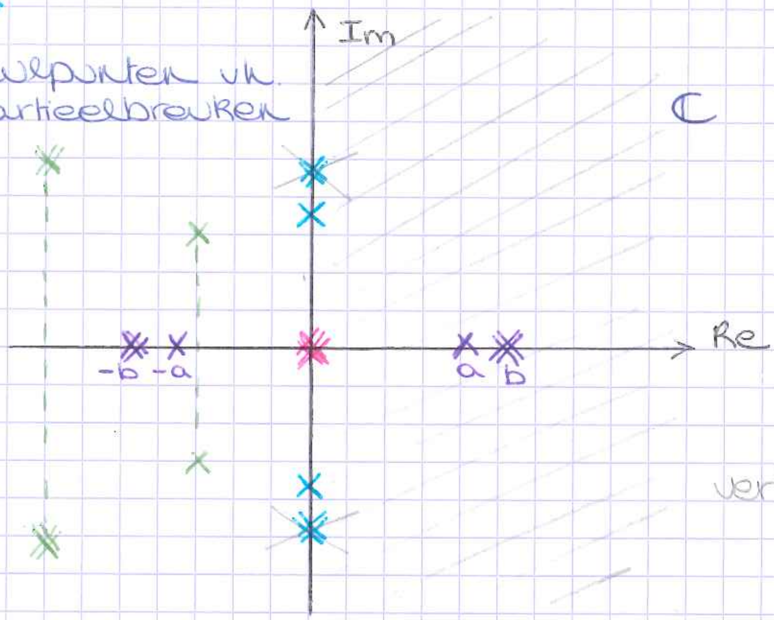
$\downarrow$ ∞

X. oscillatie maar blijft stabiel = marginaal stabiel

$+ \; t.\,(F\cos\omega_2 t + G\sin\omega_2 t)$

$\downarrow$ ∞

Grafiek:
hier zijn de nulpunten v.h. splitsen in partieelbreuken te zien:



Opmerkingen:

* dubbel kruis = hogere multipliciteit
* X en ⋇ liggen beide i/d oorsprong
  → dubbele pool i/d oorsprong kan niet, anders ontploft het proces
* ⋇, X en ⋇ zijn linksliggend.

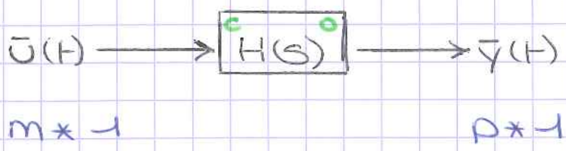
vb: voor De^{-at}: nulpunten v. $D/(s+a)$: $-a \rightarrow \lim_{t\to+\infty} De^{-at}$ → $a>0$: 0 ; $a<0$: $+\infty$

dus voor $a > 0$ is de uitgang stabiel en voor $a < 0$ niet.
⇒ voor nulpunt $s = -a$ is de limiet van De^{-at} voor $t \to +\infty$ gelijk aan 0 en is de uitgang dus stabiel

* $E.t.e^{+bt}$ gaat altijd naar 0, t wordt weggewerkt door l'Hôpital en d e-macht blijft staan (dominante functie)
* • oscileert op de imaginaire as (Im) maar voor een enkelvoudige pool geeft dit een marginaal stabiele uitgang en voor een meervoudige pool een instabiele uitgang ($\to +\infty$ door t)

Stabiele uitgang = limiet v/d inverse Laplace gaat naar een waarde (of 0)
Instabiele uitgang = limiet gaat naar $\pm\infty$
Marginaal stabiel = limiet oscileert tussen 2 waarden (enkel voor enkelvoudige polen)

Hoofdstuk 6: Concept (interne) toestand



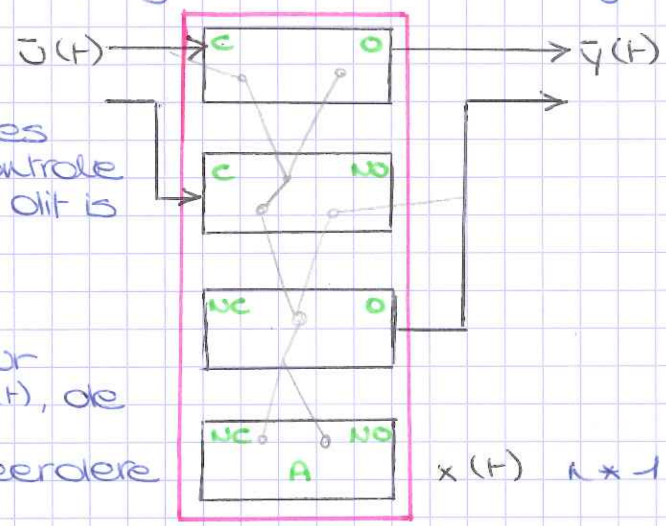
I/O

C = controleerbaar
O = observeerbaar

De nulpunten vd noemers moeten in open linker vlak liggen.
(zie vorig hfdst.)

→ Dit is niet voldoende om het volledige proces te beschrijven.

Proces opgesplitst



Proces bestaat uit 4 deelblokjes
→ ideaal geval: je hebt overal controle op en je kan alles observeren: dit is enkel het geval voor blok 1.

NO = niet observeerbaar
vb. sensor is kapot of te duur
→ controle op basis v. y(t), de afgeleide uitgang
→ effect zien in 1 of meerdere uitgangen

NC = niet controleerbaar

A = autonome deelmechanica vh proces (ben je je vaak niet v. bewust)

Hoe maak je een reactor veilig?
Je probeert de overtallige e⁻ te capteren om te vermijden dat reactie onbeperkt blijft toenemen.
Hoe?
Regelstaven met elektromagneet boven de reactor.
→ in normale situaties bepalen we de hoogte vd staven met een katrol.
→ in geval v gevaar door bv technische problemen uitvallen vd elektrische stroom zorgt ervoor dat de elektromagneet wegvalt en de regelstaven oiv de zwaartekracht in reactievat vallen
= safety plan

Economisch vb: Tsjernobil
→ situatie v. blok 3 in proces: geen controle meer omdat regelstaven werden tegengehouden
observatie: stijgende temp.

Uitleg figuur

* blok staat voor deel ve proces dat bv. controleerbaar en observeerbaar is.
* uitgang is altijd observeerbaar en ingang controleerbaar, vandaar →
* ⟜ verbinden de verschillende delen vh proces

Toestandsmodellen

Een toestand beschrijft de interne structuur.
→ $x(t)$ geeft een lijst v. nieuwe variabelen weer om ook de dynamica vd andere blokken te beschrijven. (algemener als $H(s)$)

We onderscheiden lineaire en niet-lineaire toestandsmodellen.

MIMO - toestandsmodel

opm: de n^{de}-orde differentiaalverg. = n-maal 1e-orde diff verg.

voor de ingangen:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}.u_m \quad \text{met } x_1(t=0) = x_{10}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2m}u_m \quad \text{met } x_2(t=0) = x_{20}$$

...

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}u_m \quad \text{met } x_n(t=0) = x_{n0}$$

→ Algemene toestandsverg. voor de ingangen vh proces:

$$\boxed{\frac{d\bar{x}}{dt} = A.\bar{x} + B.\bar{u} \quad \text{met } \bar{x}(t=0) = \bar{x}_0}$$

opgelet: het rechterlid kan ook niet-lineair zijn.

Principe: · als x_i niet beïnvloed wordt door de ingang: $b=0$
· als x_2 geen effect heeft op x_1: $a_{12}x_2 = 0$

Toestandsverg = beschrijving vd processen en de invloed erop vd ingang

Dimensies: $\underset{n*1}{\frac{d\bar{x}}{dt}} = \underset{n*n}{A}\,\underset{n*1}{\bar{x}} + \underset{n*m}{B}\,\underset{m*1}{\bar{u}}$ met A, B = matrices, $\bar{x}, \bar{u}$ = vectoren

voor de uitgangen:

$$y_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \ldots + d_{1m}u_m$$

...

$$y_p = c_{p1}x_1 + \ldots + c_{pn}x_n + d_{p1}u_1 + \ldots + d_{pm}u_m$$

→ Algemene uitgangsverg:

$$\boxed{\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}}$$

Dimensies: $\underset{p*1}{\bar{y}} = \underset{p*n}{C}\,.\,\underset{n*1}{\bar{x}} + \underset{p*m}{D}\,.\,\underset{m*1}{\bar{u}}$ met C, D = matrices, $\bar{x}, \bar{u}$ = vectoren

Het MIMO is een zeer flexibel model. Je moet niet weten of er een bepaald blok aanwezig is of niet. (Je zal het merken aan bv 0 id matrices).

SISO-toestandsmodel

Toestandsverg: $\boxed{\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{b}u \quad \text{met } \bar{x}(t=0) = \bar{x}_0}$

+

$n*1 \quad 1*n$

Uitgangsverg: $\boxed{y = \bar{c}^T x + du}$

$1*1 \quad 1*n \quad n*1 \quad 1*1 \quad 1*1$

Model opstellen

1) Geg: $[A, B, C, D]$ en $\bar{x}_0 \longrightarrow$ MIMO-toestandsmodel
2) Geg: $[A, \bar{b}, \bar{c}, d]$ en $\bar{x}_0 \longrightarrow$ SISO-toestandsmodel

De toestand $x(t)$ vat op een unieke manier het verleden vh proces tot op elk ogenblik t samen.
→ als je de toestand vh proces wil kennen, volstaat $x(t)$
als dit niet lukt, het je $x(t)$ fout gekozen.

SISO-Laplace opstellen

SISO toestandsverg: $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \; \bar{b}u$

$\mathcal{L}[x(t)] \triangleq \bar{x}(s) \Rightarrow sI_n x(s) - x_0 = A\bar{x}(s) + bU(s)$

$\Rightarrow (sI_n - A).x(s) = \bar{b}U(s) + x_0$

$\Rightarrow x(s) = \frac{\bar{b}U(s) + x_0}{sI_n - A}$

$\rightarrow Y(s) = \bar{c}^T x(s) + dU(s)$

ingang

SISO $\Rightarrow Y(s) = \boxed{[\bar{c}^T.(sI_n - A)^{-1}.\bar{b} + d]}\,\boxed{U(s)} + \boxed{\bar{c}^T(sI_n - A)^{-1}.\bar{x}_0}$

MIMO $\Rightarrow Y(s) = \boxed{[C.(sI_n - A)^{-1}.B + D]}\,\boxed{U(s)} + \boxed{C(sI_n - A)^{-1}.\bar{x}_0}$

H(s): transferfunctie matrix

invloed vd initiële condities

→ op examen: eenheidsmatrix er tussen foefelen

(c) 18/12

Vertrek v. H(s), bepaal het toestandsruimte-model

$$H(s) = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

→ zie verder

Taak: 10/12/'13

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (3 \quad 0)\bar{x} + 0.u \end{cases}$$

met $x_{1,0} = 1$ en $x_{2,0} = 3$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = (3 \quad 0) X(s) + 0.U(s) \quad (1)$$

* Stel $\mathcal{L}[\bar{x}(t)] = \bar{X}(s)$:

$$s I \bar{X}(s) - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \bar{X}(s) + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} U(s)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\bar{X}(s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} U(s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{pmatrix}}_{\text{inverse} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}} \bar{X}(s) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} U(s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Theorie: $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

of $\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}(-1)^{i+j}}$

$$\Leftrightarrow \bar{X}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} U(s) + \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

→ (2) in (1):

$$Y(s) = (3 \quad 0)\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}}_{2*2}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2*1} U(s) + \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (3 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{5}{s+2} \\ 0 \end{pmatrix} U(s) + \underbrace{\ldots}_{\text{afh. v/d initiële condities.}}$$

$$= \boxed{\frac{15}{s+2}} U(s) + \ldots$$

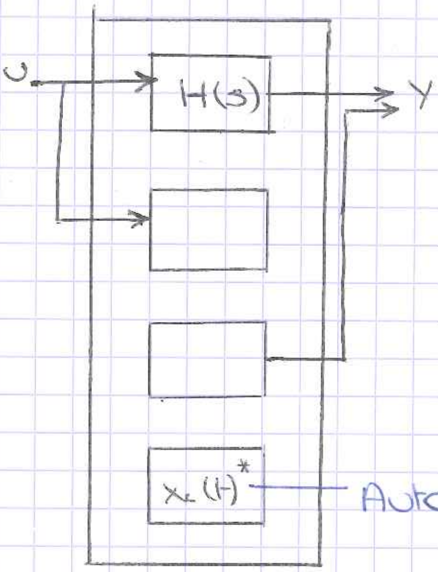
H(s) = transferfunctie

De vergelijkingen kun je ook anders schrijven:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 5u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_2 + \underline{0u} \longrightarrow x_2(t) = x_{2,0}\, e^{3t} = 3e^{3t}$$

voor $t \to +\infty$ gaat $x_2(t) \to \infty$



Autonome dynamica

* Je ziet $x_2(t)$ niet in uitgangsverg. : $y = (3 \;\; 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1$
en deze beïnvloedt $x_1(t)$ niet : $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 5u$

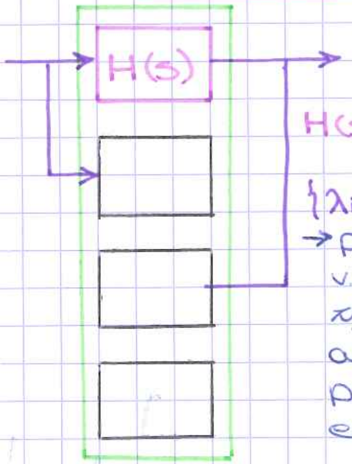
* ingang beïnvloedt x_2 niet, x_1 wel. $\frac{dx_2}{dt} = 3x_2$

⇒ Autonome dynamica

Dus hoewel H(s) stabiel lijkt, zal proces toch onstabiel zijn, door de 2e toestand $x_2(t)$.
Je kan het niet beïnvloeden in u en ook niet in y.

Dus I/O stabiel maar autonoom onstabiel
⇒ inwendig onstabiel.

- Als proces inwendig stabiel is, dan is het ook I/O stabiel
WAAR
- Als proces I/O stabiel is, dan is het ook inwendig stabiel.
ONWAAR
- Als proces inwendig onstabiel is, dan is het ook I/O onstabiel.
ONWAAR
- Als proces I/O onstabiel is, dan is het ook inwendig onstabiel.
WAAR.



$H(s) = [\bar{c}^T (sI - A)^{-1} \bar{b} + d]$

$\{\lambda_i(A)\} \supseteq \{s_{p_{ij}}(H(s))\}$

→ polen sp zijn deelverz. v. eigenwaarden λ_i, ze zijn er zelfs gelijk aan als H(s) het volledige proces beschrijft dus geen extra vakken

$Re[\lambda_i(A)] < 0$

Realisatie $\xrightarrow{}$ $[\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T, \tilde{d}]$

Stabiliteit (*)

$[A, \bar{b}, \bar{c}^T, d]$ inwendig stabiel

eigenwaarden: alle nulpunten in open half linker vlak

$Re[\lambda_i(A)] < 0$

$H(s) = \left(\dfrac{\bar{c}^T Adj(sI - A) . \bar{b} + d|sI - A|}{|sI - A|} \right)$

→ polen altijd een andere eigenw.

→ soms kan je er wegschrappen

$H(s) \rightarrow$ I/O stabiliteit

$[A, \bar{b}, \bar{c}^T, d] \rightarrow$ inwendige stabiliteit

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{b}u \quad \text{met } \bar{x}(t=0) = \bar{x}_0 \\ y = \bar{c}^T \bar{x} + du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} s\bar{X}(s) - \bar{x}_0 = A\bar{X}(s) + \bar{b}U(s)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{X}(s)}_{\text{inwendige stabiliteit}} = (sI - A)^{-1} \bar{b} U(s) + (sI - A)^{-1} + \bar{x}_0$$

$$Y(s) = \underbrace{(\bar{c}^T (sI - A)^{-1} \bar{b} + d)}_{\text{I/O stabiliteit}} U(s) + \underbrace{\bar{c}^T (sI - A)^{-1} \bar{x}_0}_{\text{rust}: \bar{x}_0 = 0}$$

opm: d is de rechtstreekse doorkoppeling v. in- naar uitgang (meestal 0)

$$\Rightarrow \bar{X}(s) = \frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|} \bar{b} . U(s) + \frac{Adj(sI - A)}{|sI - A|} \bar{x}_0$$

Deel vd noemer is hetzelfde

→ van belang want U(s) kunnen we zelf kiezen

→ om stabiel te zijn moeten deze punten liggen in open linkervlak

inwendig stabiel $|sI - A| = 0$

eigenwaarden: nulpunten vd determinant (*)

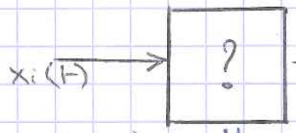
Hoofdstuk 7: Realisaties $H(s) \xrightarrow{\text{realisatie}} [A, B, C, D]$

Minimale realisatie = met zo min mogelijk 'bouwblokjes' (sommige te duur)

Verschillende mogelijke bouwblokjes:

aan de uitgang v. integrator mag je altijd een toestand tekenen

1) Integrator (dynamisch)



$z_i(t) = \int_0^t x_i(t)\,dt$

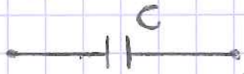
integreert de ingang

$X_i(s)$ $\quad = \frac{1}{s} \quad$ $\frac{X_i(s)}{s}$

* Gouden regel I: # integratoren = n
vb. 5e graad in noemer v. H(s) dus n = 5
→ 5 integratoren in systeem.
opgelet: altijd eerst vereenvoudigen! $\frac{s^4}{s^5} = \frac{1}{s}$

* Opmerking: bij aftakkingen: deze behoren ook tot $z(t)$
→ niet splitsen.

* In elektrische kring is de condensator de integrator.

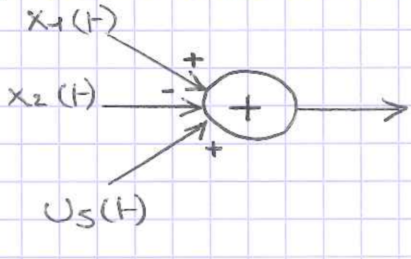


* In een hydraulisch systeem is een vat de integrator.

C [m²] $\quad C\frac{dh}{dt} = Q_{in} \rightarrow [m^2] \cdot \left[\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$

→ "integreert het binnenkomende debiet"

2) Somator (statisch)



$x_1(t) - x_2(t) + u_5(t)$

3) Versterker (verzwakker)

A = amplitude
> 1 voor versterker en
< 1 verzwakker

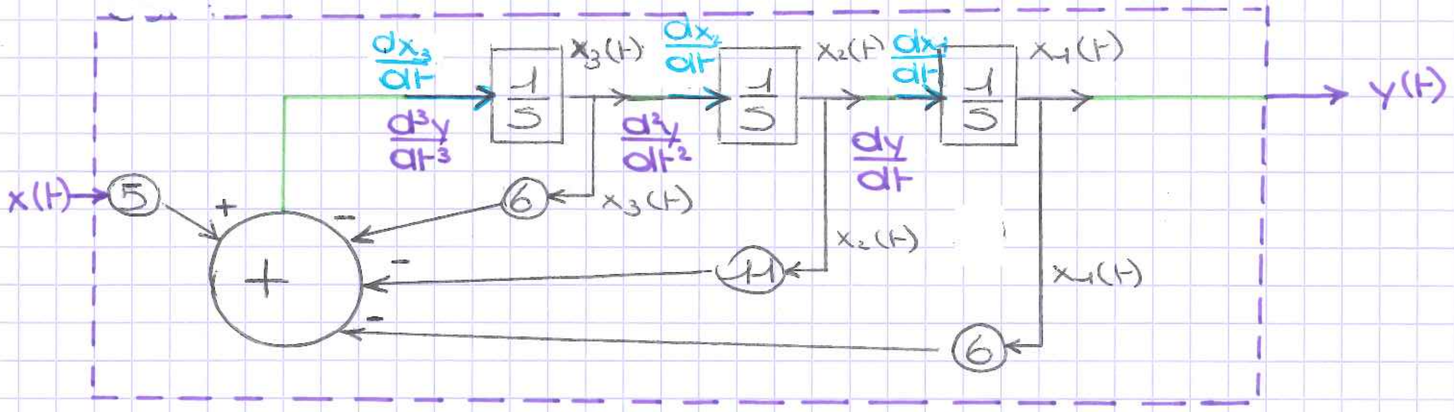
→ in elektrische kring: O.P.A.M

Oefening 1: SERIE

Geg: transferfunctie $H(s) = \dfrac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

→ 3 integratoren.

gevr: $[A, b, \bar{c}^T, d]$



legende: Systeem met ingang x(t) en uitgang y(t)
verbindingen.
→ door verbindingen en benaderingen door in- en uitgangen:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^3y}{dt^3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = x_3(t) \qquad (3)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2(t) \qquad (2)$$

Gouden regel II : $x_i(t)$ = toestand = uitgang vd integrator i

opl: $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

$$\Rightarrow 5U(s) = s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s)$$

$$(\mathcal{L}^{-1}) \Rightarrow 5u = \frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = 5u - 6\frac{d^2y}{dt^2} - 11\frac{dy}{dt} - 6y$$ (zie tekening: somator)

→ in x-coördinaten: $\frac{dx_3}{dt} = 5u - 6x_3 - 11x_2 - 6x_1$ (1)

Toestandsverg: (1), (2) en (3)

Uitgangsverg: $y(t) = x_1(t)$

→ we steken deze 4 verg. in de vectornotatie:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} u(t)$$ (toestandsverg)

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \cancel{0\,u(t)}$$ (uitgangsverg.)

→ negatieve terugkoppeling
→ faseverandering
→ invloed vd teller

Hieruit halen we al de gevraagden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \bar{c}^T = (1\ 0\ 0) \quad d = 0$$

Opmerking: nu pas tekening afmaken om fouten te vermijden.

Voorwaarde van ons systeem: volledig bestuurbaar en volledig waarneembaar.

maar is hieraan voldaan?

→ ik kan elke toestand beïnvloeden met de ingang want door formules is alles verbonden

$u \to x_3$

$x_3 \to x_2$ dus $u \to x_2$

$x_2 \to x_1$ dus $u \to x_1$

→ analoog voor waarneembaarheid vd uitgang

$y \to x_1$

$x_1 \to x_2$ dus $y \to x_2$

$x_2 \to x_3$ dus $y \to x_3$

controle of antwoord klopt:

$$\boxed{H(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d}$$

$$= (1\ 0\ 0) \cdot \left(s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0$$

$$= (1\ 0\ 0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{pmatrix}^{-1}}_{*} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

* Bepalen inverse matrix:

1) Determinant matrix: $\begin{pmatrix} s^2+6s+11 & -6 & -6s \\ s+6 & s^2+6s & -11s-6 \\ 1 & s & s^2 \end{pmatrix}$

2) Totale determinant: $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

$$= (1\ 0\ 0) \underbrace{\begin{pmatrix} s^2+6s+11 & -6 & -6s \\ s+6 & s^2+6s & -11s-6 \\ 1 & s & s^2 \end{pmatrix}^T}_{\text{rijen en kolommen verwisselen}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$= (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} s^2+6s+11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2+6s & s \\ -6s & -11s-6 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$

1 * 3 3 * 3 3 * 1

$$= \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \rightarrow \text{KLOPT!}$$

Een andere vorm van controle kan zijn om te bepalen of het aantal eigenwaarden = aantal polen.

Oefening 2

$$H(s) = \frac{5(s-2)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$ probleem vereenvoudigen!

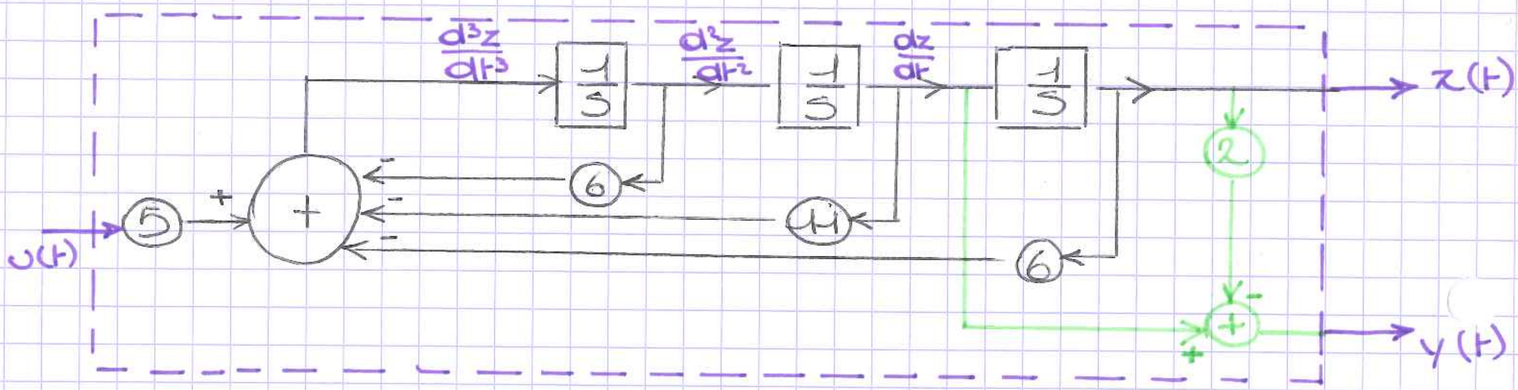
$$= \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{s-2} = \frac{5\,U(s)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$= Z(s)$ (hulpvariabele).

Analoog oplossen als oef 1 met $z(t)$ als uitgang.

$$Z(s) \triangleq \frac{Y(s)}{s-2} \Rightarrow Y(s) = sZ(s) - 2Z(s) \rightarrow y(t) = \frac{dz}{dt} - 2z(t)$$



uitgangsverg: $y = (-2 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \cancel{0\,u(t)}$

Oefening 3 : PARALLEL

$$H(s) = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

splitsen in partieelbreuken:

	1	6	11	6
−1		−1	−5	−6
	1	5	6	0

$\rightarrow (s+1).(s^2+5s+6)$
$= (s+1).(s+2).(s+3)$

$$Y(s) = \left(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}\right) U(s)$$

$$\rightarrow A = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{2}$$

$$B = \frac{5}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3}\Big|_{s=-2} = -5$$

$$C = \frac{5}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-3} = \frac{5}{2}$$

$$= \left(\frac{5}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{-5}{s+2} + \frac{5}{2}\frac{1}{s+3}\right) U(s)$$

Mogelijke oplossingsmethode: $Y(s)$ beschouwen als een som vd toestanden:

$Y(s) \triangleq X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)$

met: * $X_1(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s+1} U(s)$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} + 1 x_1(t) = \frac{5}{2} u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{5}{2} u(t) - x_1(t) \rightarrow \text{zie figuur}$$

* $X_2(s) = \frac{-5}{s+2} U(s)$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dt} + 2 x_2(t) = -5 u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -5 u(t) - 2 x_2(t) \rightarrow \text{zie figuur}$$

* $X_3(s) = \frac{5}{2}\frac{1}{s+3} U(s)$

$$\Rightarrow \frac{dx_3}{dt} + 3 x_3(t) = \frac{5}{2} u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = \frac{5}{2} u(t) - 3 x_3(t) \rightarrow \text{zie figuur}$$

Vectornotatie:

→ Toestandsverg: $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5/2 \\ -5 \\ 5/2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} u(t)$

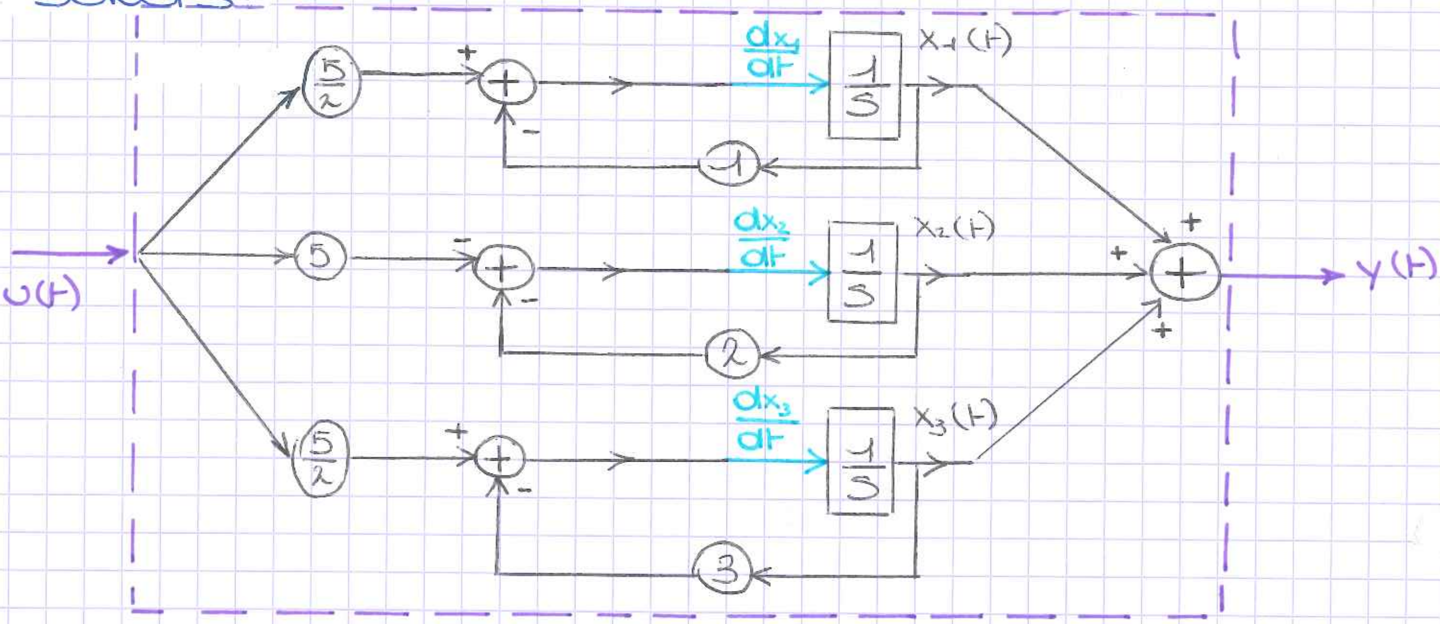
→ Uitgangsverg: $y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{c}^T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad d = 0$

Voorwaarden vh systeem: volledig bestuurbaar en waarneembaar

→ aan de voorwaarden is voldaan, toestanden zijn niet onderling gekoppeld maar ze zijn wel allemaal beïnvloed door de ingang (bestuurbaar) en ze beïnvloeden allemaal zelf de uitgang (waarneembaar)

Controle: analoog oef. 1.

Schets:



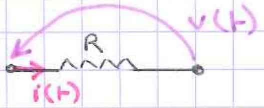
Examen

* Tenzij expliciet vermeld: serie of parallel maakt niet uit.
  → in het geval dat er een parameter α in de vectoriële toestandverg. staat dan is serie veel makkelijker
  → wanneer teller geen getal is (oef 2) dan is serie ook veel makkelijker

* Bij parameter in toestandsverg: evaluatie geven
  → bestuurbaarheid, waarneembaarheid en stabiliteit zijn afh v/d waarde v. α

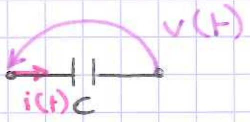
Hoofdstuk 8: Elektrische kring

Weerstand $v(t) = Ri(t) \rightarrow \boxed{V(s) = R.I(s)}$



Als we de stroom als de input beschouwen dan kunnen we de weerstand als een versterker beschouwen.

Condensator $v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \rightarrow \boxed{V(s) = \frac{1}{sC} I(s)}$



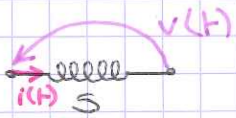
Impedantie voor weerstand: $\boxed{Z_R(s) = R}$

voor condensator: $\boxed{Z_C(s) = \frac{1}{sC}}$

= lineair respons op tijdsafh. signaal

Spoel $v(t) = L\frac{di}{dt} \rightarrow \boxed{V(s) = LsI(s)}$

$\boxed{Z_S(s) = sL}$

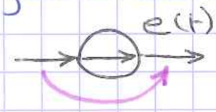


$\Rightarrow \boxed{V(s) = Z(s).I(s)}$ Deze formule geldt alleen in gebruikersreferentiestelsel

Opmerking: de voorgaande puntjes waren altijd voor een stroom en spanning met gelijke zin.

Soorten bronnen

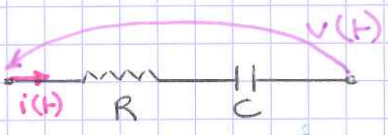
1) Spanningsbron:
→ c^te spanning onafh. v/d totale impedantie (wat je in je circuit steekt)



(gelijke zin)

2) Stroombron
→ c^te stroom maar afh. v/d totale impedantie

Oefening 1



$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

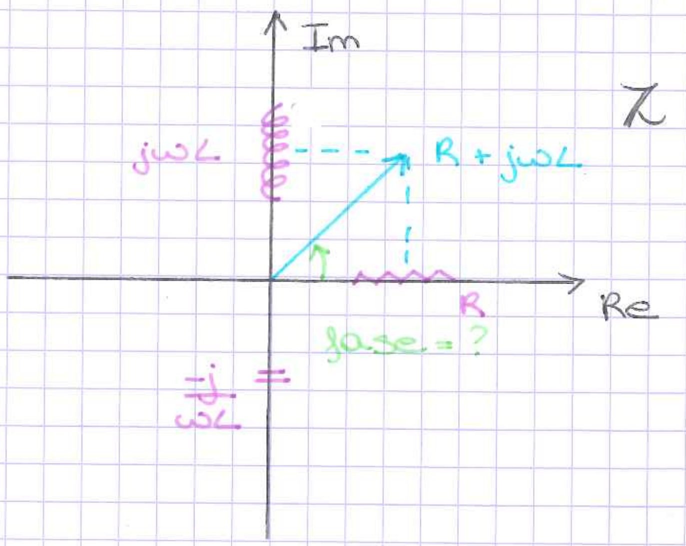
$\rightarrow V(s) = R.I(s) + \frac{1}{sC} I(s)$

$= \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s)$ SERIE met $Z_{RC,serie}(s) = R + \frac{1}{sC}$

Oefening 2

$Z_{RL,serie}(s) = R + sL$

modules $= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ met $s = j\omega$ in een zuivere wisselstroom



Wetten v. Kirchoff.

1) Stroomwet: in elk knooppunt ie elektr. kring is de som vd stromen die in dat punt samenkomen gelijk aan de som vd stromen die in dat punt vertrekken

2) Spanningswet: som vd elektrische potentiaalverschillen in elke gesloten lus ie kring is 0