Examen Toegepaste Wiskunde III Oefeningen

dr Werner Peeters

2e bachelor scheikunde & bio–ingenieur
— 2e zittijd 2009–2010

Naam:	....
Richting:	SCH / BIR
Studentenkaartnr.:	....

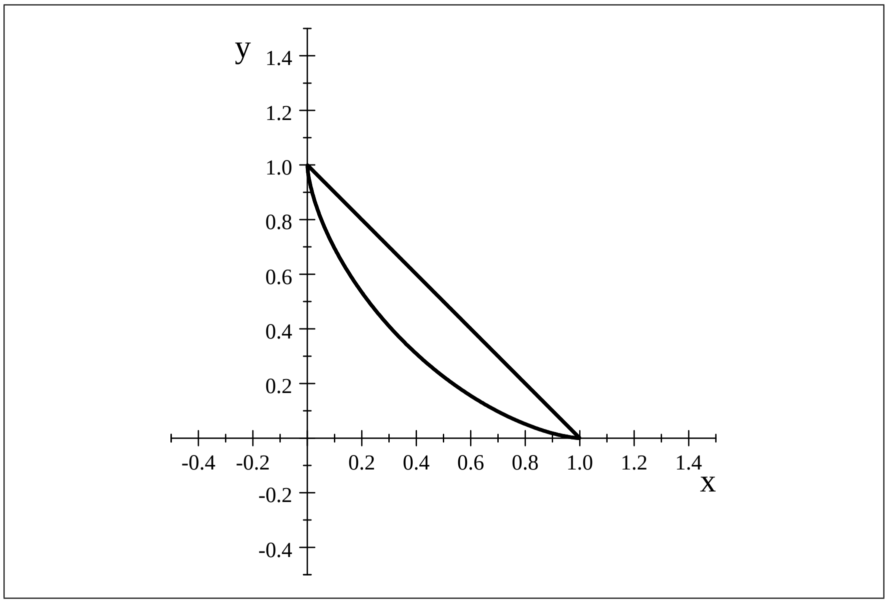
- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Beschouw het gebied $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \leq x \text{ en } 0 \leq z \leq 6\}$. Bereken $\iiint\limits_Y (x^2 + y^2 + z)\, dV$.

/10

2. Bereken door gebruik van de stelling van Green de oppervlakte van de doorsnede in het eerste kwadrant van de gebieden $x^{2/3} + y^{2/3} \geq 1$ en $y \leq 1 - x$.



/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' + x^2 y' + xy = 0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + y(t) + 4 \\ y'(t) = -4x(t) + 4t \end{cases}$$

/10

5. Een model voor wisselstroom wordt als volgt gegeven: op een draad met lengte L wordt een beginverdeling van een spanning op begintijdstip $t = 0$ gegeven door de functie

$$\psi(x,0) = f(x) = \begin{cases} \psi_0 & \text{als } x \in \left[\dfrac{L}{4}, \dfrac{3L}{4}\right] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Het proces waarmee de spanning zich herverdeelt is net als bij de trillende snaar gelijk aan de ééndimensionale golfvergelijking, gegeven door $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ waarbij $\psi = \psi(x,t)$ de spanning op plaats $x \in [0, L]$ op tijdstip $t \geq 0$ is. Voor randvoorwaarden nemen we de Dirichelet–randvoorwaarden $\forall t \geq 0 : \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ wat erop neerkomt dat de draad in een perfecte isolator zit, en dat $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0$ m.a.w. de toestand is op het begintijdstip in rust. Gebruik de methode voor scheiding van veranderlijken om ψ te berekenen.

/10

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y\left(n+2\right)-4y\left(n\right)=2^{n}+4\cdot\left(-2\right)^{n}$$

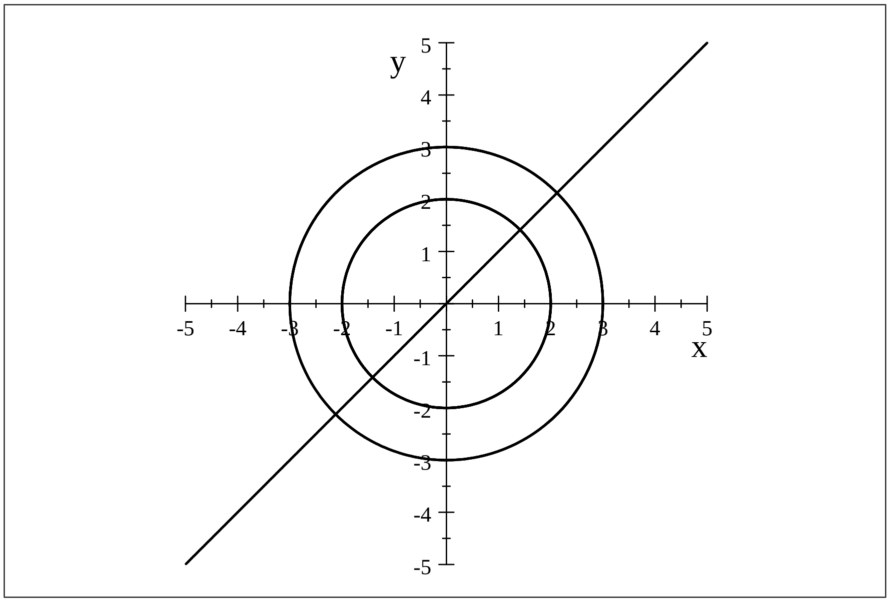
$\boxed{\quad /10}$

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

| /60 |

Oplossingen:

1. Beschouw het gebied $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9, y \le x \text{ en } 0 \le z \le 6\right\}$. Bereken $\iiint\limits_{Y} \left(x^2 + y^2 + z\right) dV$.

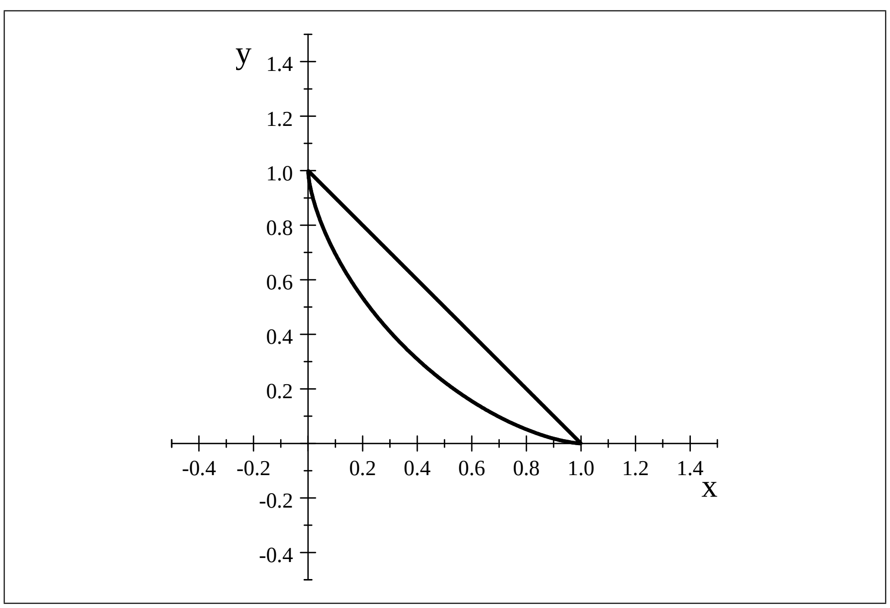


Beschouwen we de overgang naar cylindercoördinaten, dan is

$$I = \int\limits_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int\limits_{0}^{6} \int\limits_{2}^{3} r\left(r^2 + z\right) drdzd\theta = \int\limits_{-3\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cdot \int\limits_{0}^{6} \int\limits_{2}^{3} r\left(r^2 + z\right) drdz = \pi \cdot \int\limits_{0}^{6} \left[\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}zr^2\right]_2^3 dz$$

$$= \pi \cdot \int\limits_{0}^{6} \left(\frac{5}{2}z + \frac{65}{4}\right) dz = \pi \cdot \left[\frac{5}{4}z^2 + \frac{65}{4}z\right]_0^6 = \frac{285}{2}\pi$$

2. Bereken door gebruik van de stelling van Green de oppervlakte van de doorsnede in het eerste kwadrant van de gebieden $x^{2/3} + y^{2/3} \ge 1$ en $y \le 1 - x$.



Stel $\begin{cases} \alpha_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (1-t, t) \\ \alpha_2 : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\sin^3 t, \cos^3 t\right) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS = \frac{1}{2}\oint\limits_\alpha (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 ((1-t)\cdot 1 - t\cdot(-1))\, dt + \int\limits_0^{\pi/2} \left(-3\sin^3 t\cos^2 t\sin t - 3\cos^3 t\sin^2 t\cos t\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 dt - 3\int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2} dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{32}\pi
\end{aligned}$$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' + x^2 y' + xy = 0$$

Stellen we

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}
\end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned}
y'' + x^2 y' + xy &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&\overset{m=n-3}{=} \sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)(m+2)c_{m+3}x^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + (6c_3 + c_0)x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + (6c_3 + c_0)x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+3)(n+2)c_{n+3} + (n+1)c_n\right] x^{n+1}
\end{aligned}$$

De recursiebetrekking is

$$\begin{aligned}
2c_2 &= 0 \\
6c_3 + c_0 &= 0 \\
\forall n &\geq 1 : c_{n+3} = -\frac{(n+1)c_n}{(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

De tweede betrekking is dus conform de recursiebetrekking. Uit de eerste betrekking en de recursiebetrekking volgt alvast dat

$$c_2 = c_5 = c_8 = ...c_{3n+2} = 0$$

Stellen we enerzijds $c_0 \neq 0$ en $c_1 = 0$ dan vinden we

$$c_1 = c_4 = c_7 = ... = c_{3n+1} = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{1}{6}c_0 = -\frac{1}{3 \cdot 2}c_0 \\
c_6 &= -\frac{4c_3}{6 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0 \\
c_9 &= -\frac{7c_6}{9 \cdot 8} = -\frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0 \\
&\dots \\
c_{3n} &= \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n-5) \cdot ... \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1}{3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-3) \cdot (3n-4) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2}c_0
\end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_0 = 0$ en $c_1 \neq 0$ dan vinden we

$$c_0 = c_3 = c_6 = ... = c_{3n} = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{2c_1}{4 \cdot 3} \\
c_7 &= -\frac{5c_4}{7 \cdot 6} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1 \\
c_{10} &= -\frac{8c_7}{10 \cdot 9} = -\frac{8 \cdot 5 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1 \\
&\dots \\
c_{3n+1} &= \frac{(-1)^n \cdot (3n-1) \cdot (3n-4) \cdot ... \cdot 5 \cdot 2}{(3n+1) \cdot 3n \cdot (3n-2) \cdot (3n-3) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3}c_1
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0\left(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{4\cdot 1\cdot x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}-\frac{7\cdot 4\cdot x^9}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+...+\frac{\left(-x^3\right)^n\cdot(3n-2)\cdot(3n-5)\cdot...\cdot 7\cdot 4}{3n\cdot(3n-1)\cdot(3n-3)\cdot(3n-4)\cdot...\cdot 3\cdot 2}+...\right)\\ &\quad +c_1\left(x-\frac{2\cdot x^4}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2\cdot x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}-\frac{8\cdot 5\cdot 2\cdot x^{10}}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+...+\frac{(-1)^n\cdot(3n-1)\cdot(3n-4)\cdot...\cdot 5\cdot 2\cdot x^{3n+1}}{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-2)\cdot(3n-3)\cdot...\cdot 4\cdot 3}+...\right)\end{aligned}$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t)=-4x(t)+y(t)+4\\ y'(t)=-4x(t)+4t\end{cases}$$

Homogene vergelijking

$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-\lambda E)=\left|\begin{pmatrix}-4-\lambda & 1\\ -4 & -\lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$

* $\lambda=-2\Rightarrow E_{-2}:\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow 2x-y=0\Rightarrow V_2:\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_1(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

* Stel $X_2(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+te^{-2t}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=e^{-2t}U+te^{-2t}W$

$\Rightarrow -2e^{-2t}U+e^{-2t}W-2te^{-2t}W=e^{-2t}AU+te^{-2t}AW$

$\Rightarrow\begin{cases} AU=-2U+W\\ AW=-2W\end{cases}$

Stel $W=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4a+b\\ -4a\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2a+b\\ -4a+2b\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow -2a+b=1$. Neem bijvoorbeeld $(a,b)=(0,1)$

$\Rightarrow X_2(t)=e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+te^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=e^{-2t}\begin{pmatrix}t\\ 2t+1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t)=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}t\\ 2t+1\end{pmatrix}$

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ 2e^{-2t} & (2t+1)e^{-2t}\end{pmatrix}$ is dus een fundamentele matrix

$\Rightarrow\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ 2e^{-2t} & (2t+1)e^{-2t}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}e^{2t}(2t+1) & -te^{2t}\\ -2e^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow W'(t)=\Phi^{-1}(t)F(t)=\begin{pmatrix}e^{2t}(2t+1) & -te^{2t}\\ -2e^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e^{2t}\left(-t^2+2t+1\right)\\ 4e^{2t}(t-2)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow W(t)=\int\begin{pmatrix}4e^{2t}\left(-t^2+2t+1\right)\\ 4e^{2t}(t-2)\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}-e^{2t}\left(2t^2-6t+1\right)\\ e^{2t}(2t-5)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\Phi(t)W(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ 2e^{-2t} & (2t+1)e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{2t}\left(2t^2-6t+1\right)\\ e^{2t}(2t-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t-1\\ 4t-7\end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t)=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix}t\\ 2t+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t-1\\ 4t-7\end{pmatrix}$

5. Een model voor wisselstroom wordt als volgt gegeven: op een draad met lengte L wordt een beginverdeling van een spanning op begintijdstip $t=0$ gegeven door de functie

$$\psi(x,0)=f(x)=\begin{cases}\psi_0 & \text{als } x\in\left[\frac{L}{4},\frac{3L}{4}\right]\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$$

Het proces waarmee de spanning zich herverdeelt is net als bij de trillende snaar gelijk aan de ééndimensionale golfvergelijking, gegeven door

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

waarbij $\psi = \psi(x,t)$ de spanning op plaats $x \in [0, L]$ op tijdstip $t \geq 0$ is. Voor randvoorwaarden nemen we de Dirichelet–randvoorwaarden

$$\forall t \geq 0 : \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

wat erop neerkomt dat de draad in een perfecte isolator zit, en dat

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

m.a.w. de toestand is op het begintijdstip in rust. Gebruik de methode voor scheiding van veranderlijken om ψ te berekenen.
Oplossing: Laten we als Ansatz aannemen dat in de functie ψ de veranderlijken kunnen worden gescheiden; met andere woorden dat

$$\psi(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

In dat geval kunnen we deze invullen in de vergelijking, en krijgen we na deling door XT

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{c^2} \frac{T^{\cdot\cdot}}{T} = 0$$

waarbij we ruimtelijke afgeleiden met $'$ noteren en tijdsafgeleiden met $\cdot$. Dan krijgen we dat beide termen afzonderlijk constant moeten zijn:

$$\begin{cases} X'' = -\alpha^2 X \\ T^{\cdot\cdot} = -\alpha^2 c^2 T \end{cases}$$

De randvoorwaarden worden voor X dat $X(0) = X(L) = 0$. De beginvoorwaarde kunnen we pas in aanmerking nemen bij het beschouwen van het restprobleem. Het X–probleem is dus als volgt gesteld:

$$\begin{cases} X'' = -\alpha^2 X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Als $\alpha \neq 0$ is dit een gewone differentiaalvergelijking van tweede orde met als oplossing

$$X = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$$

De randvoorwaarden geven aanleiding tot de betrekkingen

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(\alpha L) = 0 \end{cases}$$

Indien we aannemen dat de oplossing niet–triviaal is, t.t.z. dat $C_2 \neq 0$ (anders hebben we enkel de nulfunctie), dan kan deze alleen maar bestaan als $\alpha = \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L}$ met $n \in \mathbb{Z}$. We vinden dus als eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ en } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Aangezien we voor n en $-n$ tegengestelde oplossing krijgen, en het minteken eventueel; in de constante kan worden geïncorporeerd, mogen we zonder verlies van algemeenheid de index $n \in \mathbb{N}$ nemen. Als $\alpha = 0$ krijgen we de constante nulfunctie als oplossing, hetgeen uiteraard niet in overeenstemming is met de beginvoorwaarde. Laat ons nu het resterende T–probleem beschouwen. Met elke oplossing X_n van het eigenwaardeprobleem voor X komt er een vergelijking overeen van de vorm

$$T^{\cdot\cdot} = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T$$

Deze vergelijking heeft als oplossing

$$T = C_3 \cos \frac{n\pi ct}{L} + C_4 \sin \frac{n\pi ct}{L}$$

De randvoorwaarde leert ons dat $T^{\cdot}(0) = 0$, dus $C_4 = 0.$, waardoor op een veelvoud na de functies

$$T_n(t) = C_3 \cos \frac{n\pi ct}{L}$$

oplossiungen zijn van het probleem.
Uitgaande van de Ansatz vinden we dus een parameterstel oplossingen

$$\psi_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

die voldoen aan de homogene rand–en beginvoorwaarden, maar niet aan de inhomogene beginvoorwaarde. Uit de lineariteit van de differentiaaloperatoren weten we dat een superpositie van dergelijke oplossingen nog steeds aan de homogene randvoorwaarden zal voldoen. Stel dus

$$\psi = \sum_{n=01}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

dan moeten we op zoek naar de coëfficiënten $(c_n)_n$ zodanig dat ψ ook voldoet aan de inhomogene randvoorwaarde. We willen dus dat

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Laten we aannemen dat deze reeks uniform convergent is, dan kunnen we de beide leden achtereenvolgens vermenigvuldigen met $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ en integreren op het interval $[0,L]$. In dergelijk geval mogen we de som en de integraal verwisselen, en krijgen we

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$$

Nu is

$$I = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\right)dx$$

Als $m \neq n$, dan is deze integraal gelijk aan

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L} - \frac{L}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]_0^L \\ &= \frac{L}{2(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi L}{L} - \frac{L}{2(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi L}{L} = 0 \end{aligned}$$

Als daarentegen $m = n$, dan is

$$I = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\cos 0 + \cos\frac{2m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \sin\frac{2m\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

Bijgevolg is dus $I = \delta_{mn} \dfrac{L}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{L}{2} \delta_{m,n} = c_m \frac{L}{2}$$

Dus is

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{2\psi_0}{L} \int_{L/4}^{3L/4} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= -\frac{2\psi_0}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_{L/4}^{3L/4} \\ &= \frac{-2\psi_0}{n\pi} \left(\cos\frac{3}{4}n\pi - \cos\frac{1}{4}n\pi\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \\ 2\sqrt{2}\dfrac{\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n = 1 \bmod 8 \text{ of } 7 \bmod 8 \\ -2\sqrt{2}\dfrac{\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n = 3 \bmod 8 \text{ of } 5 \bmod 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Samengevat is

$$\begin{aligned} c_{8n+1} &= 2\sqrt{2} \frac{\psi_0}{(8n+1)\pi} \\ c_{8n+3} &= -2\sqrt{2} \frac{\psi_0}{(8n+3)\pi} \\ c_{8n+5} &= -2\sqrt{2} \frac{\psi_0}{(8n+5)\pi} \\ c_{8n+7} &= -2\sqrt{2} \frac{\psi_0}{(8n+7)\pi} \end{aligned}$$

De oplossing is dus

$$\psi = \frac{2\sqrt{2}\psi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{(8n+1)\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{(8n+1)\pi c}{L}t\right)}{(8n+1)} - \frac{\sin\left(\frac{(8n+3)\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{(8n+3)\pi c}{L}t\right)}{(8n+3)} - \frac{\sin\left(\frac{(8n+5)\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{(8n+5)\pi c}{L}t\right)}{(8n+5)} + \frac{\sin\left(\frac{(8n+\right.}{}\right.}{}$$

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y(n+2) - 4y(n) = 2^n + 4 \cdot (-2)^n$$

KV: $t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$
$\Rightarrow y_c(n) = c_1 2^n + c_2 (-2)^n$

- $y(n+2) - 4y(n) = 2^n$
  $N(E) = (E-2) \Rightarrow (E-2)^2 (E+2)\, y(n) = 0$
  $\Rightarrow \left(E^3 - 2E^2 - 4E + 8\right) y(n) = 0$
  $\Rightarrow y_p(n) = (a_0 + a_1 n) 2^n + a_2 (-2)^n$
  $\Rightarrow y_p(n) = a_1 n 2^n$
  $\Rightarrow a_1 (n+2) 2^{n+2} - 4a_1 n 2^n = 8a_1 2^n = 2^n \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{8}$

- $y\left(n+2\right)-4y\left(n\right)=\left(-2\right)^{n}$
  $N\left(E\right)=\left(E+2\right)\Rightarrow\left(E-2\right)\left(E+2\right)^{2}y\left(n\right)=0$
  $\Rightarrow\left(E^{3}+2E^{2}-4E-8\right)y\left(n\right)=0$
  $\Rightarrow y_{p}\left(n\right)=\left(b_{0}+b_{1}n\right)\left(-2\right)^{n}+a_{2}\cdot2^{n}$
  $\Rightarrow y_{p}\left(n\right)=b_{1}n\left(-2\right)^{n}$
  $\Rightarrow b_{1}\left(n+2\right)\left(-2\right)^{n+2}-4b_{1}n\left(-2\right)^{n}=8b_{1}\left(-2\right)^{n}=4\cdot\left(-2\right)^{n}\Rightarrow b_{1}=\dfrac{1}{2}$
  $y_{c}\left(n\right)=c_{1}2^{n}+c_{2}\left(-2\right)^{n}+\dfrac{n2^{n}}{8}+\dfrac{n\left(-2\right)^{n}}{2}$