- De snelheid in punt 2 is reeds impliciet berekend uit de continuïteitsvergelijking in de vorige stap, namelijk

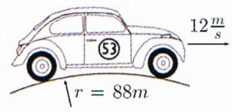
$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = 1 \frac{m}{s}.$$

- De hoogte van de waterkolom is

$$h = \frac{p_2 - p_3 + \frac{1}{2}\frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2}{\rho g} = 6,75m.$$

1. Auto op een heuvel

Een auto rijdt over de top van een heuvel met een snelheid van $12\frac{m}{s}$. Deze top is cirkelvormig met een straal van $r = 88m$. De auto en de chauffeur hebben samen een massa van $975kg$. Wat is — op het ogenblik dat de auto precies bovenaan is —



1. de normaalkracht uitgeoefend door de weg op de auto,
2. de normaalkracht uitgeoefend door de auto op de chauffeur, die een massa heeft van $72kg$,
3. de snelheid van de auto waarbij de normaalkracht op de chauffeur gelijk zou zijn aan nul.

Oplossing

1. Kies voor deze oefening een assenstelsel met de y-as positief naar boven. De andere richtingen zullen niet voorkomen. De tweede wet van Newton voor de auto als geheel, geprojecteerd op deze y-as, zegt

$$m_{\text{auto}} a_y = -m_{\text{auto}} g + F_{n,y}.$$

Omdat de auto in een cirkelvormige baan beweegt, kan dit ook worden geschreven als

$$-m_{\text{auto}} \frac{v^2}{r} = -m_{\text{auto}} g + F_{n,y}.$$

Omschrijven levert

$$\begin{aligned} F_{n,y} &= m_{\text{auto}} \left(g - \frac{v^2}{r} \right) \\ &= 975kg \left(9,81 \frac{m}{s^2} - \frac{(12\frac{m}{s})^2}{88m} \right) \\ &= 7969N. \end{aligned}$$

2. Voor de chauffeur geldt precies dezelfde redenering aangezien hij zich ook langs een cirkelvormige baan voortbeweegt. Enkel de massa dient veranderd te worden. Daarom geldt

$$\begin{aligned} F_{n,y} &= m_{\text{chauffeur}} \left(g - \frac{v^2}{r} \right) \\ &= 72kg \left(9,81 \frac{m}{s^2} - \frac{(12\frac{m}{s})^2}{88m} \right) \\ &= 589N. \end{aligned}$$

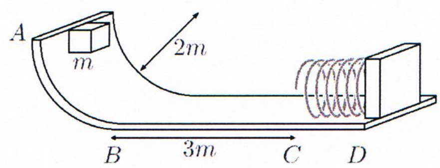
3. De normaalkracht zal verdwijnen wanneer

$$g - \frac{v^2}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 88m} = 29,4 \frac{m}{s}.$$

2. Een glijdend blok

Beschouw een opstelling zoals in de figuur. De sectie AB is een kwart van een cirkel met straal $r = 2,0m$ waarover het blok wrijvingsloos kan bewegen. Het $3m$ lange stuk BC is een horizontaal stuk met kinetische wrijvingscoëfficiënt $\mu_k = 0,25$. De sectie CD is horizontaal en opnieuw wrijvingsloos. Een blok met massa $1,0kg$ wordt vanuit rust in A losgelaten. Na naar beneden gegleden te zijn, drukt het blok de veer een afstand $0,20m$ in. Bepaal

1. de snelheid van het blok in het punt B,
2. de thermische energie geproduceerd wanneer het blok van B naar C glijdt,
3. de snelheid van het blok in punt C,
4. de veerconstante k van de veer.



Oplossing

1. De snelheid in punt B kan je berekenen uit behoud van energie. Kies het nulpunt van de potentiële energie ter hoogte van het horizontale oppervlak, dan zal de potentiële energie die het blok initieel heeft volledig worden omgezet in kinetische energie. Daarom geldt

$$
\begin{aligned}
mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Leftrightarrow \quad v_B &= \sqrt{2gh_A} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 2m} \\
&= 6,26\frac{m}{s}.
\end{aligned}
$$

2. De thermische energie opgewekt in het stuk BC is de kinetische energie verloren door wrijving. De wrijvingskracht is gegeven door $\vec{F}_w = -\mu_k mg\hat{v}$. De arbeid uitgeoefend door deze kracht is — met de x-as horizontaal en positief naar rechts —

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{\text{therm.}} &= -W \\
&= -\int_B^C \vec{F}_w \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= +\mu_k mg \int_{x_B}^{x_C} \mathrm{d}x \\
&= +\mu_k mg \Delta s_{BC} \\
&= +0,25 \cdot 1kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 3m \\
&= +7,36J.
\end{aligned}
$$

3. De arbeid berekend in het vorige puntje is ook de toename[1] van kinetische energie, met andere woorden

$$K_C = K_B + W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \mu_k mg\Delta s_{BC}.$$

Hieruit haal je

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{v_B^2 - 2\mu_k g\Delta s_{BC}} \\ &= \sqrt{(6,26\tfrac{m}{s})^2 - 2 \cdot 0,25 \cdot 9,81\tfrac{m}{s} \cdot 3m} \\ &= 4,95\frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Hetzelfde resultaat kan je ook bekomen door gebruik te maken van de uitdrukking $\Delta v^2 = 2a\Delta s$ met $a = F_w/m$ aangezien de wrijvingskracht en dus ook de daardoor veroorzaakte versnelling constant is.

4. Bij het indrukken van de veer zal de kinetische energie op punt C volledig worden omgezet in potentiële energie van de veer, of

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} k &= \frac{mv_C^2}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{1kg \cdot (4,95\frac{m}{s})^2}{(0,2m)^2} \\ &= 613\frac{N}{m}. \end{aligned}$$

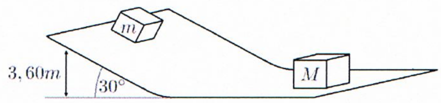
[1]Netto is er een afname omdat $W < 0$.

3. Een ander glijdend blok

Een blok met massa $m = 2,20kg$ glijdt vanuit rust naar beneden op een helling met hellingsgraad van $30°$, beginnend op een hoogte van $3,60m$. Beneden aangekomen botst het blok met een tweede blok met massa $M = 7,0kg$ dat in rust is op een horizontaal oppervlak. Wat is

1. de snelheid van de beide blokken na de botsing,
2. de afstand die het kleine blokje nog langs de helling zal afleggen na de botsing?

Je mag veronderstellen dat er nergens wrijving optreedt, dat de botsing tussen de blokken elastisch en frontaal is en dat de overgang tussen de helling en het horizontale stuk voldoende glad is zodat het geen invloed heeft op de beweging behalve het van richting te veranderen.



Oplossing

1. Je kan dit probleem beschouwen als een ééndimensionaal probleem. Behoud van impuls tijdens de centrale botsing zal er immers voor zorgen dat de twee blokken na de centrale botsing enkel een impuls hebben in de oorspronkelijke bewegingsrichting van het lichtere blokje. Laat ons de as waarlangs de blokken bewegen de x-as noemen. De impuls van het lichtere blokje zal na het afdalen van de helling maar nog voor de botsing met het andere blok gelijk zijn aan

$$p_x = m\sqrt{2gh}.$$

(Dit door behoud van energie — zie ook vorige oefening.) Tijdens de botsing zal zowel de totale kinetische energie als de totale impulsvector worden behouden. De impuls van het zware blok met q noterend om niet teveel indices te moeten schrijven en de grootheden na de botsing onderscheidend van die voor de botsing met een tilde, zijn deze behoudswetten

$$\begin{aligned} p_x &= \tilde{p}_x + \tilde{q}_x \\ \frac{1}{2m}p_x^2 &= \frac{1}{2m}\tilde{p}_x^2 + \frac{1}{2M}\tilde{q}_x^2. \end{aligned}$$

De eerste vergelijking in de tweede invullen om $\tilde{q}$ te elimineren levert

$$\begin{aligned} & Mp_x^2 = M\tilde{p}_x^2 + m(p_x - \tilde{p}_x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (M+m)\tilde{p}_x^2 - 2mp_x\tilde{p}_x + (m-M)p_x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \tilde{p}_x = \frac{2mp_x \pm \sqrt{(2mp_x)^2 - 4(M+m)(m-M)p_x^2}}{2(M+m)} \\ \Leftrightarrow\ & \tilde{p}_x = p_x\left(\frac{m}{M+m} \pm \frac{1}{M+m}\sqrt{m^2-(m^2-M^2)}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \tilde{p}_x = p_x\frac{m \pm M}{m+M}. \end{aligned}$$

De oplossing met de plus geeft je $\tilde{p}_x = p_x$ en $\tilde{q}_x = 0$. Dit beschrijft de situatie waarin de blokken niet botsen. In het tweede geval vind je

$$\tilde{p}_x = p_x \frac{m-M}{m+M} \qquad \text{en} \qquad \tilde{q}_x = p_x - \tilde{p}_x = p_x - p_x \frac{m-M}{m+M} = \frac{2M}{m+M} p_x.$$

Dit omzetten naar snelheden levert je

$$\frac{\tilde{p}_x}{m} = \frac{m-M}{m+M}\frac{p}{m} = \frac{m-M}{m+M}\sqrt{2gh} = -4,4\frac{m}{s};$$
$$\frac{\tilde{q}_x}{M} = \frac{2M}{m+M}\frac{p}{M} = \frac{2M}{m+M}\frac{m}{M}\sqrt{2gh} = +4,0\frac{m}{s}.$$

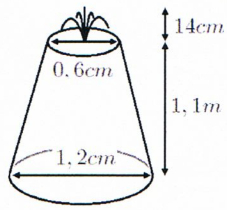
2. Met de snelheid die het kleine blokje nu heeft, kan het nog een hoogte

$$h' = \frac{K}{mg} = \frac{\tilde{p}_x^2}{2m^2 g}$$

bereiken. De afstand die het zal afleggen langs de helling is daarom

$$\Delta s = \frac{h'}{\sin(30°)} = 2h' = \frac{\tilde{p}_x^2}{m^2 g} = 1,96m.$$

4. Een drinkfonteintje



Een drinkfonteintje spuit water omhoog door een buisje met diameter $0,6cm$. De waterstraal bereikt een maximale hoogte van $14cm$. De pomp aan de basis van het fonteintje, die zich $1,1m$ onder de opening van het buisje bevindt, pompt water in een buis met diameter $1,2cm$. Welke overdruk ten opzichte van de atmosferische druk dient de pomp te voorzien?

Oplossing

We kunnen de vergelijking van Bernouilli opschrijven om het niveau van de pomp (noem dit "0") en de mond van het fonteintje ("1") te relateren, namelijk

$$p_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2.$$

Gebruikmakend van de continuïteitsvergelijking voor niet-samendrukbare vloeistoffen

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{A_1}{A_0} v_1 = \frac{\pi(d_1/2)^2}{\pi(d_2/2)^2} v_1 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1,$$

alsook van $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$, bekom je

$$\begin{aligned} p_0 - p_{\text{atm}} &= \rho g(h_1 - h_0) + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{d_1^4}{d_0^4}\right) \\ &= \rho g(h_1 - h_0) + \frac{15}{32}\rho v_1^2. \end{aligned}$$

De vergelijking van Bernouilli gebruikend om de mond van het fonteintje te relateren aan het hoogste punt van de waterstraal, waar $v_2 = 0$, leert je dat

$$p_{\text{atm}} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{\text{atm}} + \rho g h_2$$

waaruit volgt

$$v_1^2 = 2g(h_2 - h_1).$$

De gezochte overdruk is daarom

$$\begin{aligned} p_0 - p_{\text{atm}} &= \rho g(h_1 - h_0) + \frac{15}{32}\rho v_1^2 \\ &= \rho g(h_1 - h_0) + \frac{15}{16} g\rho(h_2 - h_1) \\ &= \rho g\left((h_1 - h_0) + \frac{15}{16}(h_2 - h_1)\right) \\ &= 1000\frac{kg}{m^3} \cdot 9,81\frac{m}{s^2}\left(1,1m + \frac{15}{16}0,14m\right) \\ &= 12079Pa. \end{aligned}$$