Examen Toegepaste Wiskunde II Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2014–2015

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(2yx^3 + y + x\right) dx + \left(x^4 - x\right) dy = 0$$

/6

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

3. Bereken

$$s_n = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 4} + \frac{1}{8 \cdot 5} + ... + \frac{1}{2n\,(n+1)}$$

en zoek $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$. Hint: splits $\dfrac{1}{2k\,(k+1)}$ in partieelbreuken en vul achtereenvolgens $k = 1, 2, ..., n$ in.

/6

4. Bereken de fourierreeks van de functie

$$f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Hint: Splits f eerst op in een even en een oneven functie (Dat is niet strikt nodig, maar maakt de berekening makkelijker; maar als je 't kan vinden zonder deze, mij om 't even)

/6

5. Bereken de inverse matrix van $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

/6

6. Los op met ofwel Gauss–Jordan, ofwel Cramer, met alle mogelijke tussenstappen

$$\begin{cases} -3x - y + 2z = -8 \\ 5x + 3y - 2z = 20 \\ -21x - 11y + 10z = -76 \end{cases}$$

/6

7. Gegeven de rechte in $\mathbb{R}^3$ die gegeven wordt als doorsnede van de vlakken

$$\begin{cases} -6x - 21y + 2z - 27 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

(a) Bepaal een parametervergelijking hiervoor.

(b) Bereken de afstand van de rechte tot het punt $a\,(2,0,4)$ door gebruik van de vergelijking van Plücker.

/6

8. Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

Vier bonuspunten extra als je ook nog de diagonalisatie T' alsook de coördinaattransformatie S kan geven die de matrix omzet naar een Jordanblockdecompositie.

/6

9. Gegeven $f(x,y) = e^{2x+\sin y}$. Bereken $T_3(f,(0,0))(x,y)$

/6

10. Het punt $(2,3,1) \in \mathbb{R}^3$ ligt op de doorsnede van de oppervlakken $F(x,y,z) = x^3 + 3xy + 2z^2 - 28 = 0$ en $G(x,y,z) = y^2 + z^2 - 10 = 0$. Zoek de raaklijn in dat punt.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(2yx^3+y+x\right)dx+\left(x^4-x\right)dy=0$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x^3+1$
$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=4x^3-1$
$\Rightarrow R=\left(4x^3-1\right)-\left(2x^3+1\right)=2x^3-2\neq 0\Rightarrow$ niet exact
$\Rightarrow \dfrac{R}{-Q}=-\dfrac{2x^3-2}{x^4-x}=-\dfrac{2}{x}=\varphi\left(x\right)$
$\Rightarrow$ Stel $\mu\left(x\right)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \left(2yx+\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$ moet wel exact zijn.
$\begin{cases}\varphi_P\left(x,y\right)=\displaystyle\int\left(2yx+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\ln x-\frac{1}{x}y+x^2y+c_y\\ \varphi_Q\left(x,y\right)=\displaystyle\int\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dy=x^2y-\frac{1}{x}y+c_x\end{cases}$
$\Rightarrow \varphi\left(x,y\right)=\ln|x|-\dfrac{1}{x}y+x^2y+c=0$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''-4y'+3y=xe^{3x}$$

Karakteristieke vergelijking:
$t^2-4t+3=0\Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=3$ of 1
$\Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{3x}$
$\mathrm{mult}_\phi\left(3\right)=1$
$\mathrm{gr}\,Q=2$
$\Rightarrow$ Stel $y_{nh}=e^{3x}\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)$
De term b_0 is overbodig
$\Rightarrow \begin{cases}y_{nh}=e^{3x}\left(b_1x+b_2x^2\right)\\ y_{nh}'=e^{3x}\left(b_1+3xb_1+2xb_2+3x^2b_2\right)\\ y_{nh}''=e^{3x}\left(6b_1+2b_2+9xb_1+12xb_2+9x^2b_2\right)\end{cases}$
Eis: $e^{3x}\left(6b_1+2b_2+9xb_1+12xb_2+9x^2b_2\right)-4\cdot e^{3x}\left(b_1+3xb_1+2xb_2+3x^2b_2\right)+3\cdot e^{3x}\left(b_1x+b_2x^2\right)=xe^{3x}$
$\Rightarrow \left(6b_1+2b_2+9xb_1+12xb_2+9x^2b_2\right)-4\left(b_1+3xb_1+2xb_2+3x^2b_2\right)+3\left(b_1x+b_2x^2\right)=x$
$\Rightarrow 2b_1+2b_2+4xb_2=x$
$\Rightarrow \begin{cases}b_1+b_2=0\\ 4b_2=1\end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases}b_1=-\dfrac{1}{4}\\ b_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$
$\Rightarrow y_h=C_1e^x+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{4}\left(x^2-x\right)e^{3x}$

3. Bereken

$$s_n=\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 4}+\frac{1}{8\cdot 5}+...+\frac{1}{2n\left(n+1\right)}$$

en zoek $\lim_{n\to\infty} s_n$. Hint: splits $\frac{1}{2k\left(k+1\right)}$ in partieelbreuken en vul achtereenvolgens $k = 1, 2, ..., n$ in.

$\frac{1}{2k\left(k+1\right)} = \frac{A}{2k} + \frac{B}{k+1}$

$A = \frac{1}{k+1}|_{k=0} = 1$

$B = \frac{1}{2k}|_{k=-1} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2k\left(k+1\right)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2\left(k+1\right)}$

$$\begin{array}{rcccccl}
 & \frac{1}{2\cdot 2} & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{4} & \\
 & \frac{1}{4\cdot 3} & = & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{6} & \\
 & \frac{1}{6\cdot 4} & = & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{8} & \\
 & & \ldots & & & & \\
+ & \frac{1}{2n\left(n+1\right)} & = & \frac{1}{2n} & - & \frac{1}{2\left(n+1\right)} & \\
\hline
 & s_n & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{2\left(n+1\right)} & = \frac{n}{2\left(n+1\right)}
\end{array}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$

4. Bereken de fourierreeks van de functie

$$f\left(x\right) : \left[-\pi, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in \left[0, \pi\right] \\ 0 & \text{als} \quad x \in \left[-\pi, 0\right[\end{cases}$$

Hint: Splits f eerst op in een even en een oneven functie (Dat is niet strikt nodig, maar maakt de berekening makkelijker; maar als je 't kan vinden zonder deze, mij om 't even)

$$f_E\left(x\right) \quad : \quad \left[-\pi, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{als} \quad x = 0 \end{cases}$$

en

$$f_O\left(x\right) \quad : \quad \left[-\pi, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{als} \quad x \in \left[-\pi, 0\right[\\ 0 & \text{als} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als} \quad x \in \left]0, \pi\right] \end{cases}$$

Dan is

- $a_0 = \langle f_E\left(x\right) | 1\rangle = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2} dx = 1$
- $a_n = \langle f_E\left(x\right) | \cos nx\rangle = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\cos nx dx = \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\right]_0^\pi = 0$
- $b_n = \langle f_E\left(x\right) | \sin nx\rangle = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^\pi = \frac{1}{n\pi}\left[\cos nx\right]_\pi^0 = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \left(-1\right)^n\right) =$
  $\begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases}$

- $\Rightarrow f(x) \overset{\text{b.o.}}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$

5. Bereken de inverse matrix van $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

- $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_2 - R_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 48$
- $A^\tau = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^{ad} = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -12 \\ -16 & 16 & 12 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \dfrac{1}{48} \begin{pmatrix} 16 & -4 & -18 \\ 0 & 0 & -12 \\ -16 & 16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

6. Los op met ofwel Gauss–Jordan, ofwel Cramer, met alle mogelijke tussenstappen

$$\begin{cases} -3x - y + 2z = -8 \\ 5x + 3y - 2z = 20 \\ -21x - 11y + 10z = -76 \end{cases}$$

- <u>Gauss–Jordan:</u>
  $\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & -8 \\ 5 & 3 & -2 & 20 \\ -21 & -11 & 10 & -76 \end{array}\right) \overset{3R_2+5R_1; R_3-7R_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \\ 0 & -4 & -4 & -20 \end{array}\right)$
  $= \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right) = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$
  Stel $z = \lambda$
  $\Rightarrow ... = \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -4 & 20 \end{array}\right) \overset{R_2/4}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$
  $\overset{R_1+R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \overset{R_1/(-3)}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$
  $\Rightarrow (x, y, z) = (1, 5, 0) + \lambda(1, -1, 1)$
- <u>Cramer:</u>
  $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -21 & -11 & 10 \end{vmatrix} = 0$ dus kan geen hoofddeterminant zijn.
  $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -4$ wel
  De karakteristieke determinant is dan $K_3 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -8 \\ 5 & 3 & 20 \\ -21 & -11 & -76 \end{vmatrix} = 0$
  $\Rightarrow$ We mogen ongestraft de derde rij weglaten. Het stelsel wordt dus

$$\begin{cases} -3x - y + 2z = -8 \\ 5x + 3y - 2z = 20 \end{cases}$$

Stel $z=\lambda \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x-y=-2\lambda-8 \\ 5x+3y=2\lambda+20 \end{array}\right.$

$D_x=\left|\begin{array}{cc} -2\lambda-8 & -1 \\ 2\lambda+20 & 3 \end{array}\right|=-4\lambda-4$

$D_y=\left|\begin{array}{cc} -3 & -2\lambda-8 \\ 5 & 2\lambda+20 \end{array}\right|=4\lambda-20$

$\Rightarrow (x,y,z)=\left(\dfrac{-4\lambda-4}{-4},\dfrac{4\lambda-20}{-4},\lambda\right)=(\lambda+1,5-\lambda,\lambda)=(1,5,0)+\lambda\,(1,-1,1)$

7. Gegeven de rechte in $\mathbb{R}^3$ die gegeven wordt als doorsnede van de vlakken

$$\left\{\begin{array}{l} -6x-21y+2z-27=0 \\ 2x+3y-7=0 \end{array}\right.$$

(a) Bepaal een parametervergelijking hiervoor.
De richting van de snijlijn is $(-6,-21,2)\times(2,3,0)=(-6,4,24)\sim(-3,2,12)$
Kies bijv. $z=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -6x-21y=27 \\ 2x+3y=7 \end{array}\right. \Rightarrow$ Snijpunt $\left(\dfrac{19}{2},-4,0\right)$
$\Rightarrow A:\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19/2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

(b) Bereken de afstand van de rechte tot het punt $\mathbf{a}\,(2,0,4)$ door gebruik van de vergelijking van Plücker.
$\mathbf{u}\,(-3,2,12)$
$\mathbf{a}\,(2,0,4)$
$\mathbf{p}\left(\dfrac{19}{2},-4,0\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{ap}=\mathbf{p}-\mathbf{a}=\left(\dfrac{19}{2},-4,0\right)-(2,0,4)=\left(\dfrac{15}{2},-4,-4\right)$
$\Rightarrow d\,(\mathbf{a},A)=\dfrac{\|\mathbf{u}\times\overrightarrow{ap}\|}{\|\mathbf{u}\|}=\dfrac{\left\|(-3,2,12)\times\left(\dfrac{15}{2},-4,-4\right)\right\|}{\|(-3,2,12)\|}=\dfrac{\|(40,78,-3)\|}{\|(-3,2,12)\|}=7$

8. Bereken de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie.

$$T=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

Vier bonuspunten extra als je ook nog de diagonalisatie T' alsook de coördinaattransformatie S kan geven die de matrix omzet naar een Jordanblockdecompositie.
Karakteristieke vergelijking:
$\det(T-\lambda E)=\left|\begin{array}{ccc} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & -9 & 6-\lambda \end{array}\right|$
$=(2-\lambda)\left|\begin{array}{cc} -3-\lambda & 2 \\ -9 & 6-\lambda \end{array}\right|+2\left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{array}\right|+\left|\begin{array}{cc} 2 & -3-\lambda \\ 2 & -9 \end{array}\right|$
$=(2-\lambda)\left((-3-\lambda)(6-\lambda)+18\right)+2\,(12-2\lambda-4)+(-18+6+2\lambda)$
$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right)+2\,(12-2\lambda-4)+(-18+6+2\lambda)$
$=-\lambda^3+5\lambda^2-6\lambda+16-4\lambda+2\lambda-12$
$=-\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4$
$=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2$
$\Rightarrow \operatorname{Spec} T=\left\{1,2^{(2)}\right\}$

- $E_1 : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - 9y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 9y + 5z = 0 \end{cases}$

  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (-1, -3, -5) \sim (1, 3, 5)$

  $\Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

  $AM = MM = 1$

- $E_2 : \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \begin{cases} -2y + z = 0 = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - 9y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + z = 0 = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (1, 2, 4)$

  $\Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $AM = 2 > MM = 1$

- Veralgemeende eigenruimte:

  $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

  $\widetilde{E_2} : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0$

  Kies $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \\ -16 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \\ -16 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 3 \\ -16 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

  $J_2^2 \oplus J_1^1$

9. Gegeven $f(x,y) = e^{2x+\sin y}$. Bereken $T_3(f,(0,0))(x,y)$

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = e^{2x+\sin y} && \Rightarrow \quad f(0,0) = 1\\
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2e^{2x+\sin y} && \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x+\sin y}\cos y && \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4e^{2x+\sin y} && \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2e^{2x+\sin y}\cos y && \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 2\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{2x+\sin y}\left(\cos^2 y - \sin y\right) && \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 8e^{2x+\sin y} && \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = 8\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = 4e^{2x+\sin y}\cos y && \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) = 4\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = 2e^{2x+\sin y}\left(\cos^2 y - \sin y\right) && \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) = 2\\
&\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = e^{2x+\sin y}\left(\cos^3 y - \sin y \cos y - 2\cos y \sin y - \cos y\right) && \Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow T_3(f,(0,0))(x,y) = 1 + 2x + y + \frac{1}{2!}\left(4x^2 + 2xy + y^2\right) + \frac{1}{3!}\left(8x^3 + 4x^2y + 2xy^2\right)$$
$$= 1 + 2x + y + 2x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{3}xy^2$$

10. Het punt $(2,3,1) \in \mathbb{R}^3$ ligt op de doorsnede van de oppervlakken $F(x,y,z) = x^3 + 3xy + 2z^2 - 28 = 0$ en $G(x,y,z) = y^2 + z^2 - 10 = 0$. Zoek de raaklijn in dat punt.

$$\nabla(F,G)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+3y & 3x & 4z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \nabla(F,G)(2,3,0) = \begin{pmatrix} 21 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \overset{CT}{\rightarrow} (-12,-42,126) \sim (2,7,-21)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -21 \end{pmatrix}$$