Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie en bio–ingenieur
— 2e zittijd 2011–2012

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Gegeven $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3+x^5}$. Bereken $\int\limits_1^2 f(x)\,dx$ met de methode van Simpson voor $n = 10$ als je weet dat

$$\|f'\| \leq 0.9; \|f''\| \leq 2; \|f'''\| \leq 3.5; \left\|f^{iv}\right\| \leq 42; \|f^{v}\| \leq 250; \left\|f^{vi}\right\| \leq 900$$

en schat de fout af. De werkelijke waarde is ongeveer 0.113 864 181 1

/9

2. Bereken de oppervlakte tussen de krommen $f(x) = 8x^3 - 40x^2 + 46x + 4$ en $g(x) = -8x^2 + 14x + 4$. Voor de goede orde: het gaat over één gebied.

/9

3. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$(2x - y - 1)\, dx + (-3x + 2y - 1)\, dy = 0$$

/9

4. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de variatie van de parameters:

$$3y'' - 2y' - y = 10\sin x - 10\cos x$$

Als hint krijg je de volgende twee formules cadeau:

$$\begin{aligned} \int e^{ax}\sin bx dx &= \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c \\ \int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c \end{aligned}$$

/9

5. Gegeven een meetkundige rij waarvoor $s_3 = \dfrac{26}{9}$ en $s_6 - s_5 = 54$. Bepaal x_1 en q. (er is maar één oplossing)

/8

6. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}$$

/9

7. Gegeven de functie $f(x, y) = x^3 y + x + y$. Bereken het raakvlak aan zijn grafiek in het punt $(1, 1)$

$\boxed{\quad /9}$

8. Bepaal de punten van het oppervlak $x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0$ waarvoor de afstand tot de Y–as minimaal is.

/8

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Gegeven $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3+x^5}$. Bereken $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ met de methode van Simpson voor $n = 10$ als je weet dat

$$\|f'\| \leq 0.9; \|f''\| \leq 2; \|f'''\| \leq 3.5; \left\|f^{iv}\right\| \leq 42; \|f^{v}\| \leq 250; \left\|f^{vi}\right\| \leq 900$$

en schat de fout af. De werkelijke waarde is ongeveer 0.113 864 181 1

n	x_n	$f(x_n)$		
0	1	1.0	1	0.333 333 333 3
1	1.1	0.999 000 999 0	4	0.253 709 872 6
2	1.2	0.992 063 492 1	2	0.191 706 030 3
3	1.3	0.973 709 834 5	4	0.144 719 266 3
4	1.4	0.939 849 624 1	2	0.109 622 198 1
5	1.5	0.888 888 888 9	4	0.083 550 913 84
6	1.6	0.822 368 421 1	2	0.064 177 602 53
7	1.7	0.744 601 638 1	4	0.049 722 622 35
8	1.8	0.661 375 661 4	2	0.038 868 642 64
9	1.9	0.578 368 999 4	4	0.030 656 048 64
10	2.0	0.5	1	0.0243 902 439
			30	3. 415 907 419

$S_{10} = \dfrac{3.\,415\,907\,419}{30} \simeq 0.113\,863\,580\,6$

$\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_{10}\right| \leq \dfrac{42 \cdot 1^5}{180 \cdot 10^4} = \dfrac{7}{300\,000} = 2.\,333\,333\,333 \times 10^{-5}$

$\Leftrightarrow 0.600\,5 \times 10^{-6} \leq 1.\,89 \times 10^{-5}$ OK

2. Bereken de oppervlakte tussen de krommen $f(x) = 8x^3 - 40x^2 + 46x + 4$ en $g(x) = -8x^2 + 14x + 4$. Voor de goede orde: het gaat over één gebied.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 8x^3 - 40x^2 + 46x + 4 = -8x^2 + 14x + 4$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 32x^2 + 32x = 0$

$\Rightarrow x(x-2)^2 = 0$

		0		2	
$f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	$0^{(2)}$	$+$

$$I = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 \left(8x^3 - 32x^2 + 32x\right)dx = \left[2x^4 - \frac{32}{3}x^3 + 16x^2\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

3. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$(2x - y - 1)\,dx + (-3x + 2y - 1)\,dy = 0$$

$\left\{\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -3x + 2y - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x, y) = (3, 5)$

$$Stel \left\{\begin{array}{l} u = x - 3 \\ v = y - 5 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow (2u - v)\,du + (-3u + 2v)\,dv = 0$

$\Leftrightarrow (2u - v) + (-3u + 2v)\,v' = 0$

$$v = wu \Rightarrow v' = w'u + w$$

$\Leftrightarrow (2u - wu) + (-3u + 2wu)(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow (2 - w) + (-3 + 2w)(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow (2 - w) - 3(w'u + w) + 2w(w'u + w) = 0$
$\Leftrightarrow 2 - w - 3w'u - 3w + 2ww'u + 2w^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2 - 4w + 2w^2 + (2w - 3) w'u = 0$
$\Leftrightarrow 2 - 4w + 2w^2 = -(2w - 3)\dfrac{dw}{du}u$
$\Leftrightarrow \dfrac{du}{u} = -\dfrac{(2w-3)}{2(w-1)^2}dw$
Hierbij is $w = 1 \Leftrightarrow v = u \Leftrightarrow y - 5 = x - 3 \Leftrightarrow y = x + 2$ een singuliere oplossing
$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int \frac{(2w-3)}{2(w-1)^2}dw$
$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = \int \left(\frac{1}{2(w-1)^2} - \frac{1}{w-1}\right) dw$
$\Leftrightarrow \ln|u| = -\dfrac{1}{2(w-1)} - \ln|w-1| + c$
$\Leftrightarrow \ln(w-1) + \ln|u| = -\dfrac{1}{2(w-1)} + c$
$\Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{v}{u} - 1\right| + \ln|u| = -\dfrac{1}{2\left(\dfrac{v}{u} - 1\right)} + c$
$\Leftrightarrow \ln|v - u| = -\dfrac{u}{2(v-u)} + c$
$\Leftrightarrow \ln|y - x - 2| = -\dfrac{x-3}{2(y-x-2)} + c$
$\Leftrightarrow \ln|y - x - 2| = -\dfrac{x-3}{2(y-x-2)} + c$
$\Leftrightarrow |y - x - 2| = Ke^{-\frac{x-3}{2(y-x-2)}}$
$\Rightarrow y - x - 2 = ce^{-\frac{x-3}{2(y-x-2)}}$ (SO abondant)

4. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de variatie van de parameters:

$$3y'' - 2y' - y = 10\sin x - 10\cos x$$

Als hint krijg je de volgende twee formules cadeau:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$$
$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$$

- $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow (3t+1)(t-1) = 0 \Rightarrow t \in \left\{1, -\dfrac{1}{3}\right\}$
  $\Rightarrow y_h = c_1e^x + c_2e^{-x/3}$
- $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x/3} \\ e^x & -\dfrac{1}{3}e^{-x/3} \end{vmatrix} = -\dfrac{4}{3}e^{2x/3} \neq 0$
  $z_1' = \dfrac{1}{-\dfrac{4}{3}e^{2x/3}} \begin{vmatrix} 0 & e^{-x/3} \\ 10\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{3}\right) & -\dfrac{1}{3}e^{-x/3} \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{4e^{2x/3}}\left(\dfrac{10}{3}(\cos x)e^{-x/3} - \dfrac{10}{3}(\sin x)e^{-x/3}\right) =$
  $-\dfrac{5}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$
  $\Rightarrow z_1 = \displaystyle\int -\frac{5}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)dx = -\frac{5}{2}(\sin x)e^{-x}$

$$z_2' = \frac{1}{-\frac{4}{3}e^{2x/3}} \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 10\left(\dfrac{\sin x - \cos x}{3}\right) \end{vmatrix} = \frac{3}{4e^{2x/3}} \left(\frac{10}{3}(\cos x)\, e^x - \frac{10}{3} e^x \sin x\right) = \frac{5}{2} e^{x/3} (\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow z_2 = \int \frac{5}{2} e^{x/3} (\cos x - \sin x)\, dx = \frac{3}{2} e^{x/3} (2\cos x + \sin x)$$

- $\Rightarrow y_p = \left(-\frac{5}{2}(\sin x)\, e^{-x}\right) e^x + \left(\frac{3}{2} e^{x/3} (2\cos x + \sin x)\right) e^{-x/3} = 3\cos x - \sin x$

  $\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-x/3} + 3\cos x - \sin x$

5. Gegeven een meetkundige rij waarvoor $s_3 = \dfrac{26}{9}$ en $s_6 - s_5 = 54$. Bepaal x_1 en q. (er is maar één oplossing)

$$\begin{cases} s_3 = x_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} \\ s_6 - s_5 = x_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} - x_1 \dfrac{1-q^5}{1-q} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{26}{9} = x_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} \\ 54 = x_1 \dfrac{q^5-q^6}{1-q} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{26}{9} = x_1 \left(1+q+q^2\right) \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{243} = \dfrac{1+q+q^2}{q^5} \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 13q^5 = 243\left(1+q+q^2\right) \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 13q^5 - 243q^2 - 243q - 243 = 0 \\ 54 = x_1 q^5 \end{cases}$$

	13	0	0	−243	−243	−243
3		39	117	351	324	243
	13	39	117	108	81	0

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ x_1 = \dfrac{54}{q^5} = \dfrac{54}{3^5} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

De rij is $\left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{3}, 2, 6, 18, 54, ...\right)$

6. Onderzoek het convergentiegedrag van de volgende reeks:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}$$

d'Alembert zegt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n+1)}}{\dfrac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n+1)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{De reeks is convergent}$$

7. Gegeven de functie $f(x,y) = x^3 y + x + y$. Bereken het raakvlak aan zijn grafiek in het punt $(1,1)$

   $f(1,1) = 3$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3yx^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 4$
$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 2$
$\Rightarrow z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1)$
$\Rightarrow z = 4x + 2y - 3$

8. Bepaal de punten van het oppervlak $x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0$ waarvoor de afstand tot de Y–as minimaal is.
Stel $F(x,y,z,\lambda) = x^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + 2y - 2z^2\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda(2y+2) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + z^2 - y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1+\lambda)x = 0 \\ 2\lambda(y+1) = 0 \\ 2z(1-2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

- Als $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) \in \{(1,-1,0), (-1,-1,0)\}$
- Als $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,0), (0,-2,0)\}$
- Als $\lambda = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ 2z^2 + 1 = 0 \end{cases}$ heeft geen reële oplossingen
- Stel $f(x,y,z) = x^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} f(1,-1,0) = 1 \\ f(-1,-1,0) = 1 \\ f(0,0,0) = 0 \\ f(0,-2,0) = 0 \end{cases}$

  $(1,-1,0)$ en $(-1,-1,0)$ zijn dus maxima, $(0,0,0)$ en $(0,-2,0)$ zijn minima.