Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

2e bachelor scheikunde & bio–ingenieur
— 2e zittijd 2008–2009

Naam:	....
Richting:	SCH / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. (a) (enkel voor tweede bachelor chemie) Bereken $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dV$ met V de driedimensionale annulus, gegeven door $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 4\leq x^2+y^2+z^2\leq 9\right\}$. Gebruik een geschikt coördinaatsysteem.

   (b) (enkel voor tweede bachelor bio–ingenieur) Los de volgende differentiaalvergelijking op met de methode van Ricatti:

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x} \quad \text{met } y\left(0\right) = -1$$

/10

2. Gebruik de stelling van Green om de kringintegraal $\oint\limits_C (xy, x^2)\, d\alpha$ te berekenen met C de positief georiënteerde rand van het gebied *in het eerste kwadrant* van de poolkromme met vergelijking $r = \sin 2\theta$.

/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$\left(x^2+1\right)y'' - 10xy' + 28y = 0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) + 1 + t \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2 + t \end{cases}$$

/10

5. Bereken $\mathcal{L}\left[\int_0^t s\sin^2 s ds\right](z)$

/10

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y(n+1) = 3y(n) + n \text{ met } y(0) = 1$$

en bepaal $y(10)$ zonder $y(1)$ t/m $y(9)$ te bepalen. Je krijgt ter herinnering nog de volgende formule

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2} \text{ als } a \neq 1$$

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1.

(a) (enkel voor tweede bachelor chemie) Bereken $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) dV$ met V de driedimensionale annulus, gegeven door $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$. Gebruik een geschikt coördinaatsysteem.

Overgang naar bolcoördinaten

$$\begin{array}{llll} \Psi: & \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3: \\ & (\rho,\varphi,\theta) & \mapsto & (x,y,z) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi) \end{array}$$

geeft ons als Jacobiaan

$$\left| \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \right| = \rho^2\sin\varphi$$

en $x^2+y^2 = (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 = \rho^2\sin^2\varphi$

Hierdoor wordt de integraal

$$\iiint\limits_U \rho^4 \sin^3\varphi dU$$

met $U = [2,3] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$

$$I = \int_2^3\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^4\sin^3\varphi d\theta d\varphi d\rho = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_2^3 \cdot \left[-\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi\right]_0^\pi \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{211}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi = \frac{1688}{15}\pi$$

(b) (enkel voor tweede bachelor bio–ingenieur) Los de volgende differentiaalvergelijking op met de methode van Ricatti:

$$y' = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x} \text{ met } y(0) = -1$$

Een particuliere oplossing wordt gegeven door $y = \sin x$, wat triviaal verifieerbaar is. Stel $y = \sin x + \dfrac{1}{u} \Rightarrow y' = \cos x - \dfrac{u'}{u^2}$

$\Rightarrow \cos x - \dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + \left(\sin x + \dfrac{1}{u}\right)^2}{2\cos x}$

$\Rightarrow \cos x - \dfrac{u'}{u^2} = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\sin x}{u} + \dfrac{1}{2(\cos x)u^2}$

$\Rightarrow -\dfrac{u'}{u^2} = \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\sin x}{u} + \dfrac{1}{2(\cos x)u^2}$

$\Rightarrow -u' = u\tan x + \dfrac{1}{2\cos x}$

$\Rightarrow u' + u\tan x = -\dfrac{1}{2\cos x}$

We nemen als integrerende factor

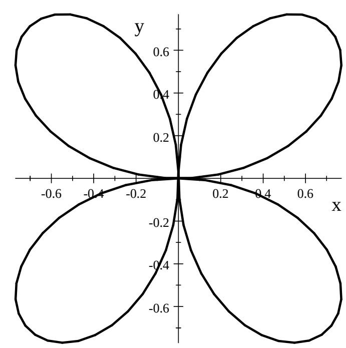
$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$\Rightarrow \dfrac{u'}{\cos x} + \dfrac{u\sin x}{\cos^2 x} = -\dfrac{1}{2\cos^2 x}$

$\Rightarrow \dfrac{u'}{\cos x} + \dfrac{u\sin x}{\cos^2 x} = -\dfrac{1}{2\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{2\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow \frac{u}{\cos x} = -\int \frac{1}{2\cos^2 x} dx = -\frac{\tan x}{2} + c$$
$$\Rightarrow u = -\frac{\sin x}{2} + c\cos x$$
$$\Rightarrow \text{A.O.:} \begin{cases} y = \sin x + \dfrac{1}{-\dfrac{\sin x}{2} + c\cos x} \\ y = \sin x \end{cases}$$
$$\text{P.O.: } y(0) = -1 \Rightarrow -1 = \sin 0 + \frac{1}{-\dfrac{\sin 0}{2} + c\cos 0} \Rightarrow c = -1$$
$$\Rightarrow \text{P.O.: } y = \sin x + \frac{1}{-\dfrac{\sin x}{2} - \cos x}$$

2. Gebruik de stelling van Green om de kringintegraal $\oint\limits_C (xy, x^2)\, d\alpha$ te berekenen met C de positief georiënteerde rand van het gebied *in het eerste kwadrant* van de poolkromme met vergelijking $r = \sin 2\theta$.



$$\oint\limits_\alpha F d\alpha = \iint\limits_S \text{rot}\, F dS = \iint\limits_S x dS = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\sin 2\theta} r^2 \cos\theta dr d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sin 2\theta} \cos\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta \cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^4\theta d\theta = -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2\theta\right)\cos^4\theta d(\cos\theta)$$
$$= -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\cos^4\theta - \cos^6\theta\right) d(\cos\theta) = -\frac{8}{3}\int\limits_1^0 \left(t^4 - t^6\right) dt = \frac{8}{3}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{16}{105}$$

3. Los op met de methode van Frobenius:
$$\left(x^2 + 1\right) y'' - 10xy' + 28y = 0$$

Stellen we

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned}
\left(x^2+1\right)y''-10xy'+28y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}-10\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n+28\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\
&\overset{m=n-2}{=} \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)(m+2)c_{m+2}x^m+\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_nx^n-10\sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^n+28\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2}+\left(n^2-11n+28\right)c_n\right]x^n
\end{aligned}$$

De recursiebetrekking is

$$\forall n\geq 0: c_{n+2}=-\frac{(n-4)(n-7)c_n}{(n+1)(n+2)}$$

Stellen we enerzijds $c_0\neq 0$ en $c_1=0$ dan vinden we

$$c_1=c_3=c_5=...=c_{2n+1}=0$$

en

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{(-4)(-7)c_0}{1\cdot 2}=-14c_0 \\
c_4 &= -\frac{(-2)(-5)c_2}{3\cdot 4}=-\frac{(-2)(-5)(-14c_0)}{3\cdot 4}=\frac{35}{3}c_0 \\
c_6 &= c_8=c_{10}=...=0
\end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_1\neq 0$ en $c_0=0$ dan vinden we

$$c_0=c_2=c_4=...=c_{2n}=0$$

en

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{(-3)(-6)c_1}{2\cdot 3}=-3c_1 \\
c_5 &= -\frac{(-1)(-4)c_3}{4\cdot 5}=-\frac{(-1)(-4)(-3c_1)}{4\cdot 5}=\frac{3}{5}c_1 \\
c_7 &= -\frac{(1)(-2)c_5}{6\cdot 7}=-\frac{(1)(-2)\left(\frac{3}{5}c_1\right)}{6\cdot 7}=\frac{1}{35}c_1 \\
c_9 &= c_{11}=c_{13}=...=0
\end{aligned}$$

Dus de oplossing wordt gegeven door

$$y(x)=c_0\left(1-14x^2+\frac{35}{3}x^4\right)+c_1\left(x-3x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{35}x^7\right)$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t)=3x(t)-y(t)+1+t \\ y'(t)=x(t)+y(t)+2+t \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$

* $\lambda=2\Rightarrow E_2:\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow x-y=0\Rightarrow V_1:\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow X_1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Stel $X_2(t)=e^{2t}U+te^{2t}W\Rightarrow 2e^{2t}U+e^{2t}W+2te^{2t}W=e^{2t}AU+te^{2t}AW$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2U+W=AU \\ 2W=AW \end{array} \right.$

Stel $W=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $U=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a-b \\ a+b \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b \\ a-b \end{pmatrix} \Rightarrow$ Stel $(a,b)=(1,0) \Rightarrow X_2(t)=e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$

$X_h(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}$

Niet–homogene oplossing: Zij een fundamentele matrix

$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & (1+t)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & (1+t)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -te^{-2t} & e^{-2t}(t+1) \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W'(t)=\Phi^{-1}(t)F(t)=\begin{pmatrix} -te^{-2t} & e^{-2t}(t+1) \\ e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2e^{-2t}(t+1) \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W(t)=\int \begin{pmatrix} 2e^{-2t}(t+1) \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} dt=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}(2t+3) \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi(t)W(t)=\begin{pmatrix} e^{2t} & (1+t)e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}(2t+3) \\ \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t-1 \\ -\frac{1}{2}t-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t-1 \\ -\frac{1}{2}t-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

5. Bereken $\mathcal{L}\left[\int_0^t s\sin^2 s ds\right](z)$

$\mathcal{L}\left[\sin^2 t\right]=\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t]=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+4}=\frac{2}{z(z^2+4)}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left[t\sin^2 t\right]=-\frac{d}{dz}\left(\frac{2}{z(z^2+4)}\right)=\frac{6z^2+8}{z^2(z^2+4)^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t s\sin^2 s ds\right]=\frac{1}{z}\mathcal{L}\left[t\sin^2 t\right]=\frac{6z^2+8}{z^3(z^2+4)^2}$

6. $\int_0^t s\sin^2 s ds=-\frac{1}{2}t\cos t\sin t+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 t$

7. $\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{8z}-\frac{z}{8(z^2+4)}-\frac{z}{(z^2+4)^2}=\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{8z}-\frac{z}{8z^2+32}-\frac{z}{(z^2+4)^2}=2\frac{3z^2+4}{z^3(z^2+4)^2}$

8. Los de volgende differentievergelijking op

$$y(n+1)=3y(n)+n \text{ met } y(0)=1$$

en bepaal $y(10)$ zonder $y(1)$ t/m $y(9)$ te bepalen. Je krijgt ter herinnering nog de volgende formule

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k=\frac{(a-1)(n+1)a^{n+1}-a^{n+2}+a}{(a-1)^2} \text{ als } a\neq 1$$

$y(n)=\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right)y(n_0)+\sum_{j=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a(i)\right)g(j)$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=0}^{n-1} 3\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} 3\right) j \\
&= 3^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(3^{n-j-1}\right) j \\
&= 3^n + 3^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^j j \\
&= 3^n + 3^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)(n)\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} \\
&= 3^n + 3^{n-1} \left(-\frac{3}{2} n \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4}\right) \\
&= 3^n - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{3}\right)^n 3^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n 3^n + \frac{1}{4} 3^n \\
&= \frac{5}{4} 3^n - \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{3}\right)^n 3^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n 3^n \\
&= \frac{5}{4} 3^n - \frac{1}{2} n - \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow y(10) = \frac{5}{4} 3^{10} - \frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{1}{4} = 73\,806
\end{aligned}
$$