Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2008–2009

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Los op: $z^3 - z^2 + (-3 - i)\, z - 2 - 14i = 0$. Hint: deze veelterm heeft geen *reële* nulpunten! Verspil dus geen tijd met daarnaar te zoeken.

/5

2. Deelt men een veelterm $A(z)$ door $z - i$ dan krijgen we als rest 3. Delen we $A(z)$ door $z - 2$ dan krijgen we als rest $1 + i$. Wat is de rest bij deling van $A(z)$ door $(z - i)(z - 2)$? Je antwoord moet een complexe veelterm van graad ≤ 1 zijn.

/6

3. Ga na voor welke waarde van x de vectoren $(x-2, 10, -24)$, $(4, x-21, 50)$ en $(2, -10, x+24)$ in $\mathbb{R}^3$ lineair afhankelijk zijn.

/6

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w = -2 \\ x + 2y + 3z + 4w = 6 \\ x - 8y - 5z - 14w = -22 \end{cases}$$

/7

5. Zoek de doorsnede van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : x - 4y - 2z + 1 = 0 \\ \beta : 4x + y + 9z + 21 = 0 \\ \gamma : 4x - 9y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

/6

6. Zoek a zodanig dat de vectoren $\overrightarrow{p}\,(2, 1, a)$ en $\overrightarrow{q}\,(-1, a, 2)$ met elkaar een hoek van $\dfrac{\pi}{3}$ maken. Hint: gebruik de definitie van de cosinus tussen twee vectoren. Wat is dan de lengte van $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$?

/5

7. Beschouw de lineaire transformatie met matrix

$$T = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -12 \\ -8 & 17 & 16 \\ 12 & -24 & -23 \end{pmatrix}$$

(a) Bereken hiervan de eigenwaarden en eigenruimten.

(b) Wat voor een soort transformatie is dit?

(c) Diagonaliseer deze in Jordanblokken.

/11

8. Bereken met een methode naar keuze

(a) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{2x - 16}$

/6

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x \cos^2 x - \sin x}$

/6

9. Los op:

$$4 \cdot (8^x - 13 \cdot 4^x) = 2^7 - 11 \cdot 2^{x+4}$$

/5

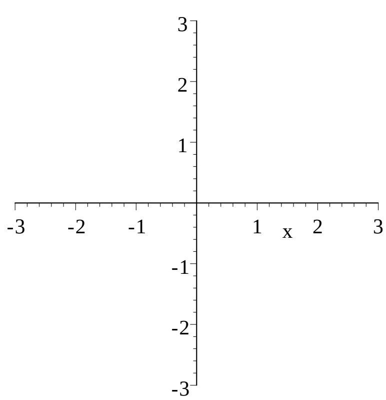
10. Bereken de asymptoten en hun ligging van $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{|x| - 1}$. Maak waar nodig een onderscheid tussen $+\infty$ en $-\infty$

/7

11. De winstverwachting van het aandeel F. wordt de komende dagen, waarbij de $t \in \mathbb{R}^+$ wordt uitgedrukt in aantal dagen, gegeven door de *voorkennisfunctie* $f(t) = t^4 - 38t^2 + 120t + 4$, gegeven in aantal euro per aandeel. Wanneer vertoont de grafiek hiervan een lokaal extremum, is het dan een minimum of een maximum, en hoeveel bedraagt de koers dan?

/5

12. De *rare snijboon* wordt gegeven door de poolvergelijking $r(\theta) = 3\sin\theta + \sin 3\theta$. Maak hiervan een tekenschema tot en met de eerste afgeleide, en schets deze kromme.



/8

13. Bereken het enige reële nulpunt van $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 7$ door gebruik van de methode van Newton–Raphson tot op 6 cijfers na de komma. Ken je een goeie reden waarom dit het enige nulpunt is?

/5

14. Bereken de volgende onbepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int \frac{-x^2 - 13x + 36}{x^3 - 12x + 16} dx$

/6

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan x}}}$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/100

*0.7

/70

Oplossingen:

1. Los op: $z^3 - z^2 + (-3-i)\,z - 2 - 14i = 0$. Hint: deze veelterm heeft geen *reële* nulpunten! Verspil dus geen tijd met daarnaar te zoeken.

$$\begin{array}{r|llll|l} & 1 & -1 & & -3-i & -2-14i \\ -2i & & -2i & & -4+2i & 2+14i \\ \hline & 1 & -1-2i & & -7+i & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (z+2i)\left(z^2 + (-1-2i)\,z - 7 + i\right) = 0$
$\Delta = (-1-2i)^2 - 4\,(-7+i) = 25$
$\Rightarrow z_{2,3} = \dfrac{1+2i \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 3+i \\ z_3 = -2+i \end{cases}$

2. Deelt men een veelterm $A\,(z)$ door $z-i$ dan krijgen we als rest 3. Delen we $A\,(z)$ door $z-2$ dan krijgen we als rest $1+i$. Wat is de rest bij deling van $A\,(z)$ door $(z-i)\,(z-2)$? Je antwoord moet een complexe veelterm van graad ≤ 1 zijn.
$A\,(z) = (z-i)\,(z-2)\,Q\,(z) + az + b$
$\begin{cases} 3 = A\,(i) = ai + b \\ 1+i = B\,(2) = 2a + b \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 3 = ai + b \\ 1+i = 2a + b \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3+i \end{cases}$
Antwoord: $-z + 3 + i$

3. Ga na voor welke waarde van x de vectoren $(x-2, 10, -24)$, $(4, x-21, 50)$ en $(2, -10, x+24)$ in $\mathbb{R}^3$ lineair afhankelijk zijn.
$$\begin{vmatrix} x-2 & 10 & -24 \\ 4 & x-21 & 50 \\ 2 & -10 & x+24 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 - 2x = x\,(x+2)\,(x-1) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 0, 1\}$$

4. Los op met de methode van Gauss–Jordan:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - w = -2 \\ x + 2y + 3z + 4w = 6 \\ x - 8y - 5z - 14w = -22 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -5 & -14 & -22 \end{array}\right) \overset{R_2 \leftrightarrow R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -8 & -5 & -14 & -22 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}}{=}$$
$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & -9 & -14 \\ 0 & -10 & -8 & -19 & -28 \end{array}\right) \overset{R_2:(-2)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) = 2$$
Aantal parameters $= 4 - 2 = 2$. Stel $z = \lambda$ en $w = \mu \Rightarrow$
$$= \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & -9 & 14 \end{array}\right) \overset{5R_1 - 2R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & 0 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -9 & 14 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow (x, y, z, w) = \left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, 0, 0\right) + \lambda\,(-7, -4, 5, 0) + \mu\,(-2, -9, 0, 5)$$

5. Zoek de doorsnede van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : x - 4y - 2z + 1 = 0 \\ \beta : 4x + y + 9z + 21 = 0 \\ \gamma : 4x - 9y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \cap \beta : \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (-34, -17, 17) \sim (2, 1, -1)$$

Stel $z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + y + 21 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) = (-5, -1)$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta = S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S \cap \gamma : 4(-5 + 2\lambda) - 9(-1 + \lambda) - (-\lambda) + 11 = 0 \Rightarrow 0\lambda = 0 \Rightarrow S \subseteq \gamma$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. Zoek a zodanig dat de vectoren $\overrightarrow{p}(2, 1, a)$ en $\overrightarrow{q}(-1, a, 2)$ met elkaar een hoek van $\dfrac{\pi}{3}$ maken. Hint: gebruik de definitie van de cosinus tussen twee vectoren. Wat is dan de lengte van $\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$?
$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(2, 1, a)(-1, a, 2)}{\|(2, 1, a)\|\,\|(-1, a, 2)\|} = \dfrac{-2 + 3a}{5 + a^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$
In dat geval is $\|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}\| = \|(2, 1, 3) \times (-1, 3, 2)\| = \|(-7, -7, 7)\| = 7\sqrt{3}$

7. Beschouw de lineaire transformatie met matrix

$$T = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -12 \\ -8 & 17 & 16 \\ 12 & -24 & -23 \end{pmatrix}$$

   (a) Bereken hiervan de eigenwaarden en eigenruimten.

   $\det(T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & -12 \\ -8 & 17-\lambda & 16 \\ 12 & -24 & -23-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$

   - Als $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & -12 & -12 \\ -8 & 18 & 16 \\ 12 & -24 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$
   - Als $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 & -12 \\ -8 & 16 & 16 \\ 12 & -24 & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 : x - 2y - 2z = 0$

   (b) Wat voor een soort transformatie is dit?
   Dit is een spiegeling op E_1 evenwijdig met E_{-1}

   (c) Diagonaliseer deze in Jordanblokken.
   Neem $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & -12 & -12 \\ -8 & 17 & 16 \\ 12 & -24 & -23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Bereken met een methode naar keuze

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{2x - 16} = \lim_{x \to 8} \frac{x - 8}{2(x - 8)\left(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 4\right)} = \frac{1}{24}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x\cos^2 x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O\left(x^4\right)\right)^2 - x + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}$

   $\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}{x\left(1 - x^2 + O\left(x^4\right)\right) - x + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}{x - x^3 + O\left(x^5\right) - x + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + O\left(x^5\right)}{-\frac{5}{6}x^3 + O\left(x^5\right)} = -\frac{1}{5}$$

Tweede mogelijkheid:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\cos^2 x - \sin x} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos^2 x - 2x\cos x \sin x - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{-4\cos x \sin x - 4x\cos^2 x + \sin x + 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6 - 12\cos^2 x + 8x\cos x \sin x + \cos x} = -\frac{1}{5}$$

9. Los op:

$$4 \cdot \left(8^x - 13 \cdot 4^x\right) = 2^7 - 11 \cdot 2^{x+4}$$

$\Rightarrow 4 \times 8^x - 13 \cdot 4^{x+1} - 2^7 + 11 \times 2^{x+4} = 0$
$\Rightarrow 4 \times 8^x - 52 \cdot 4^x - 128 + 176 \times 2^x = 0$
$\Rightarrow 8^x - 13 \cdot 4^x - 32 + 44 \times 2^x = 0$
$\Rightarrow y^3 - 13 \cdot y^2 - 32 + 44 \times y = 0$
$\Rightarrow y \in \{1, 4, 8\}$
$\Rightarrow x \in \{0, 2, 3\}$

10. Bereken de asymptoten en hun ligging van $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{|x| - 1}$. Maak waar nodig een onderscheid tussen $+\infty$ en $-\infty$

VA $x = 1$ want $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$

VA $x = -1$ want $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

SA: $a = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x\left(|x| - 1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x \cdot x} = 1$

$b = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{|x| - 1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1 - x(x - 1)}{x - 1}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{-1}{x - 1}\right) = 0$

$\Rightarrow y = x$

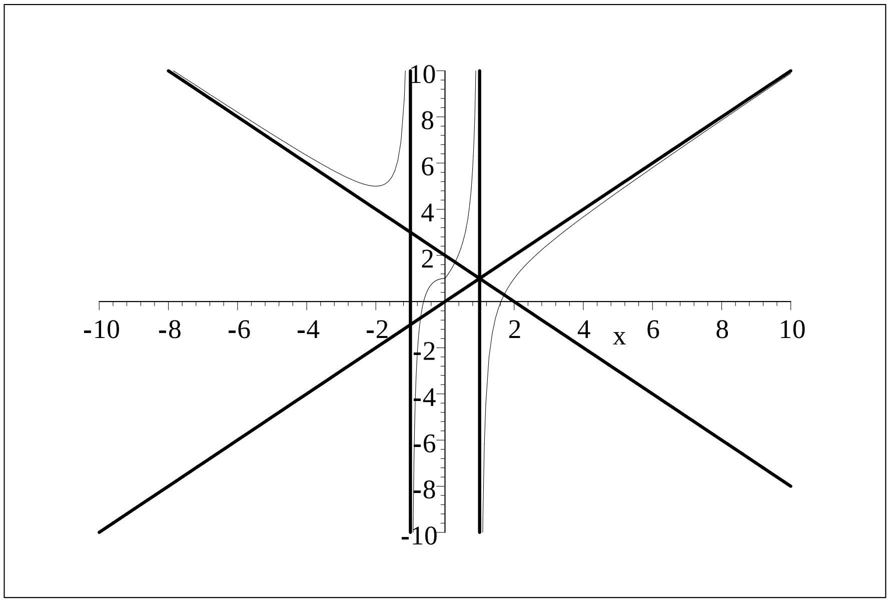
$f(x) - A = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} - x = -\frac{1}{x - 1} \Rightarrow$ Als $x \to +\infty$ dan ligt f onder A

$a = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x\left(|x| - 1\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x \cdot (-x)} = -1$

$b = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{|x| - 1} + x\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1 + x(-x - 1)}{-x - 1}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) = 2$

$\Rightarrow y = -x + 2$

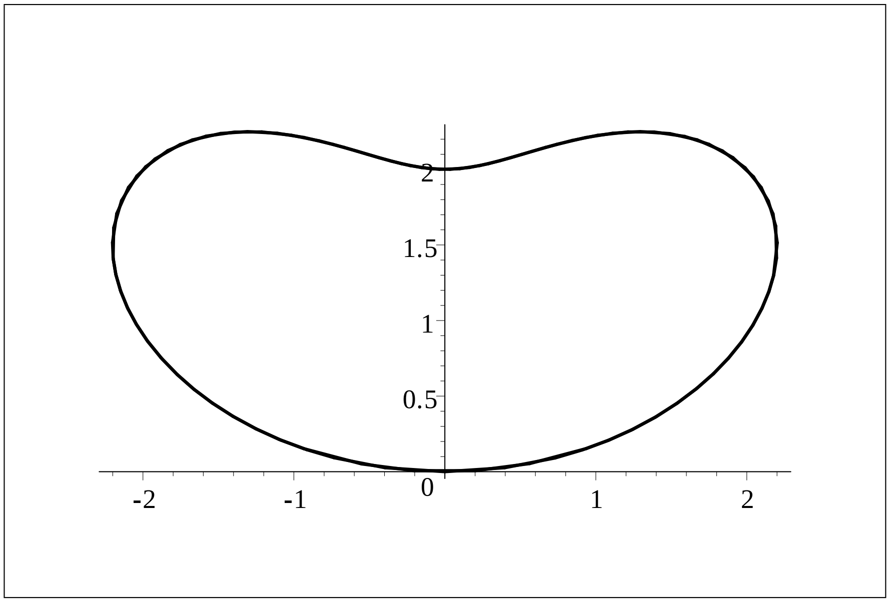
$f(x) - A = \frac{x^2 - x - 1}{-x - 1} + x - 2 = -\frac{1}{x + 1}$ Als $x \to -\infty$ dan ligt f boven A



11. De winstverwachting van het aandeel F. wordt de komende dagen, waarbij de $t \in \mathbb{R}^+$ wordt uitgedrukt in aantal dagen, gegeven door de *voorkennisfunctie* $f(t) = t^4 - 38t^2 + 120t + 4$, gegeven in aantal euro per aandeel. Wanneer vertoont de grafiek hiervan een lokaal extremum, is het dan een minimum of een maximum, en hoeveel bedraagt de koers dan?
$f'(t) = 4t^3 - 76t + 120 = 4(t+5)(t-2)(t-3) = 0 \Rightarrow t \in \{-5, 2, 3\}$ maar $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow t \in \{2, 3\}$
$$f''(t) = 12t^2 - 76 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = -28 < 0 \\ f''(3) = 32 > 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow f$ heeft in 3 een lokaal minimum en in 2 een lokaal maximum.
$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 108 \\ f(3) = 103 \end{cases}$$

12. De *rare snijboon* wordt gegeven door de poolvergelijking $r(\theta) = 3\sin\theta + \sin 3\theta$. Maak hiervan een tekenschema tot en met de eerste afgeleide, en schets deze kromme.
Domein $= \mathbb{R}$, periode $= 2\pi \Rightarrow [0, 2\pi]$
$r(\theta) = 0 \Leftrightarrow 3\sin\theta + \sin 3\theta = 0$
$\Leftrightarrow 3\sin\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0$
$\Leftrightarrow 6\sin\theta - 4\sin^3\theta = 0$
$\Leftrightarrow 3\sin\theta - 2\sin^3\theta = 0$
$\Leftrightarrow (\sin\theta)\left(3 - 2\sin^2\theta\right) = 0$
$\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$
$$\frac{d}{d\theta}(3\sin\theta + \sin 3\theta) = 3\cos\theta + 3\cos 3\theta = 6\cos 2\theta\cos\theta = 0$$
$$\begin{cases} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$r(\theta)$	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0
$r'(\theta)$	+	+	0	−	0	+	0	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+
$r(\theta)$	↗	↗	M	↘	m	↗	M	↘	↘	↘	m	↗	M	↘	m	↗	↗
			$2\sqrt{2}$		2		$2\sqrt{2}$				$-2\sqrt{2}$		-2		$-2\sqrt{2}$		



13. Bereken het enige reële nulpunt van $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 7$ door gebruik van de methode van Newton–Raphson tot op 6 cijfers na de komma. Ken je een goeie reden waarom dit het enige nulpunt is?
$f(1) = -3$
$f(2) = 43$
$\Rightarrow$ Seed $= 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	-3	12	1.25
1	1.25	1. 208 007 813	22. 582 031 25	1. 196 505 795
2	1. 196 505 795	0.074 706 135 38	19. 837 523 41	1. 192 739 895
3	1. 192 739 895	$3.438\,793\,298 \times 10^{-4}$	19. 655 129 38	1. 192 722 399
4	1. 192 722 399	$5.709\,700\,475 \times 10^{-10}$	19. 654 285 22	1. 192 722 399

$\Rightarrow x \simeq 1.192\,722$
Bovendien is $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 \geq 0$ dus is de functie overal stijgend.

14. Bereken de volgende onbepaalde integralen:

(a) $\displaystyle\int \frac{-x^2 - 13x + 36}{x^3 - 12x + 16} dx$

$$\frac{-x^2 - 13x + 36}{x^3 - 12x + 16} = \frac{-x^2 - 13x + 36}{(x-2)^2 (x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 2} \frac{-x^2 - 13x + 36}{(x+4)} = 1 \\
B &= \lim_{x \to 2} \left(\frac{-x^2 - 13x + 36}{(x-2)^2 (x+4)} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) (x-2) \\
&= \lim_{x \to 2} \left(\frac{-x - 16}{(x-2)(x+4)} \right) (x-2) = \lim_{x \to 2} \frac{-x - 16}{x+4} = -3 \\
C &= \lim_{x \to -4} \frac{-x^2 - 13x + 36}{(x-2)^2} = 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 3 \int \frac{dx}{x-2} + 2 \int \frac{dx}{x+4} = 2 \ln|x+4| - \frac{1}{x-2} - 3 \ln|x-2| + c$$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\tan x}}} = \int \frac{\tan x + 1}{2\tan x + 1}dx$

$$t = \tan x \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \int \frac{(t+1)}{(2t+1)\left(t^2+1\right)}dt = \int \left(\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{2t+1}\right)dt$$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{t\to -\frac{1}{2}} \frac{t+1}{t^2+1} = \frac{2}{5} \\ Ai + B &= \lim_{t\to i} \frac{t+1}{2t+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A,B,C) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5}\int \frac{-t+3}{t^2+1}dt + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{2t+1} = -\frac{1}{10}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} + \frac{3}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{2t+1}$$

$$= -\frac{1}{10}\ln\left|t^2+1\right| + \frac{3}{5}\,\mathrm{Bgtg}\, t + \frac{1}{5}\ln|2t+1| + c$$

$$= -\frac{1}{10}\ln\left|\tan^2 x+1\right| + \frac{3x}{5} + \frac{1}{5}\ln|2\tan x+1| + c$$