



## Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 25, deel 1)

- Elektrische stroom  $I$  is het debiet van elektrische lading door een oppervlak

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d = \rho Av_d$$

- De stroomdichtheid  $\vec{J}$  is gegeven door

$$\vec{J} = qn\vec{v}_d = \rho\vec{v}_d.$$

De stroom  $I$  door een oppervlak  $S$  is de flux van de stroomdichtheid, en dus

$$I = \int_S J_n dA.$$

- Elektrische weerstand is de verhouding tussen het aangelegde potentiaalverschil over een (deel van een) schakeling en de stroom die daardoor loopt.

$$R = \frac{V}{I}.$$

Voor Ohmse materialen is de weerstand onafhankelijk van de stroom en het potentiaalverschil.



## Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 25, deel 2)

- Het vermogen geleverd aan een apparaat is het product van stroom en spanning

$$P = IV \quad \left( = IR^2 = \frac{V^2}{R} \right)$$

- Een bron van *emf* is iets dat elektrische energie levert aan een circuit, wat zich uit als een geleverd vermogen

$$P = I\mathcal{E}$$

- Meerdere weerstanden kunnen worden vervangen door een equivalente weerstand

$$R_{\text{eq,s}} = \sum_{i=1}^N R_i \quad \text{of} \quad R_{\text{eq,p}}^{-1} = \sum_{i=1}^N R_i^{-1}.$$

- Voor alle praktische toepassingen mag je weerstanden (en andere elementen later) in serie beschouwen wanneer door beiden dezelfde stroom loopt en in parallel wanneer zij hetzelfde spanningsverschil overbruggen.



# Nuttige uitdrukkingen: De wetten van Kirchhof

- De stroomwet zegt dat in elk knooppunt waar twee of meer draden samenkomen, de som van de stromen die aankomen gelijk is aan de som van de stromen die het knooppunt weer verlaten. Hiervoor dien je in elke tak een stroomrichting te kiezen. Indien je uiteindelijk uitkomt dat  $I < 0$  voor een bepaalde tak, betekent dit dat de stroom eigenlijk in de andere richting stroomt.
- De spanningswet zegt dat in elke gesloten kring in een schakeling de som van de spanningen over weerstanden (of algemener: impedanties) gelijk is aan de som van de spanning geleverd door de spanningsbronnen in deze zelfde kring.



## Oefening 1: Geleverde spanning (25.66)

De gemeten stroom in een leiding is  $12,5A$ . Het enige toestel dat aanstaat is een verwarmingselement in de badkamer. De afstand van de voeding ( $220V$ ) naar de badkamer is  $30m$  en de leiding bestaat uit koperdraden.

- 1 Bereken de effectieve spanning die geleverd wordt aan het toestel als je weet dat de resistiviteit van Cu gelijk is aan  $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m$  en dat de draden een doorsnede van  $3,309 mm^2$  hebben. Gebruik hiervoor dat voor een geleider

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

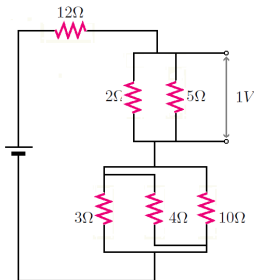
met  $\ell$  de lengte van de geleider,  $A$  de oppervlakte van de dwarsdoorsnede en  $\rho$  de resisitiviteit.

- 2 Als je in huis beschikt over zekeringen van  $20A$ , hoeveel lampen van  $60W$  kan je dan nog aansluiten alvorens de zekering doorslaat?



## Oefening 2: Gelijkstroomcircuit

Beschouw het elektrisch circuit uit de bijgaande figuur en bereken de spanning en het vermogen geleverd door de bron.

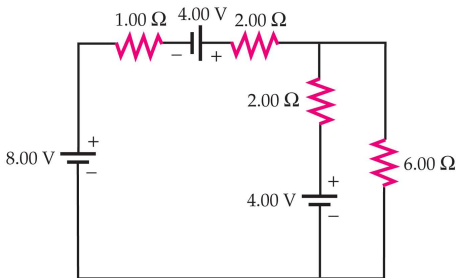




## Oefening 3: Gelijkstroomcircuit (25.90)

Beschouw het elektrisch circuit uit de bijgaande figuur.

- 1 Bereken de stroom door elke weerstand.
- 2 Bereken het vermogen ontwikkeld in elke batterij.
- 3 Bereken het vermogen gedissipeerd in elke weerstand.

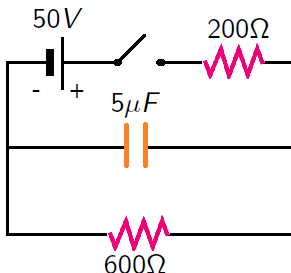




## Oefening 4: Circuit met condensatoren (25.103)

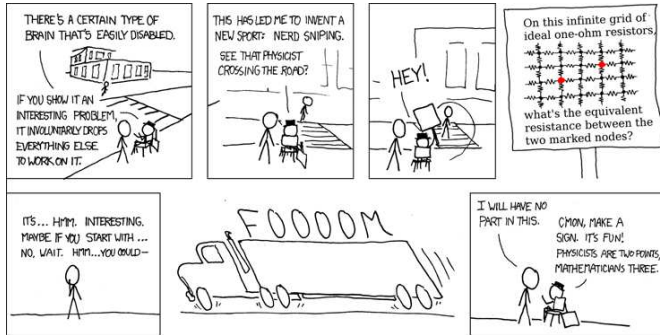
Stel dat de schakelaar reeds lang open staat. Op  $t = 0$  wordt deze gesloten.

- Wat is de stroom uit de batterij op  $t = 0$ ?
- Wat is de stroom uit de batterij op  $t \rightarrow \infty$ ?





## Extra: Nerd sniping



Figuur: Praktische toepassing van deze theorie. Bron: [www.xkcd.com/356](http://www.xkcd.com/356)





# Oplossingen



## Oefening 1: Oplossing (1)

- Er zijn drie weerstandselementen in de keten: de draad naar de kachel, de kachel zelf en de draad terug weg.
- De equivalente weerstand is de som van deze drie weerstanden, de stroom door de drie weerstanden is dezelfde en de totale spanning is opnieuw de som van de spanningen over elk van de drie elementen apart.
- De totale spanning is de spanning geleverd door de voeding. In combinatie met het vorige puntje betekent dit dat de spanning over de kachel is gegeven door de spanning geleverd door de voeding min de spanning over de twee stukken draad.
- De spanning over een weerstand (zowel draad als kachel) wordt gegeven door het product van de weerstand en de stroom die door de weerstand loopt.
- Alles samennemen levert

$$V_k = V_{\text{tot}} - 2\rho_{\text{Cu}} \frac{L}{A} I_{\text{tot}} = 220V - 2 \cdot \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m \cdot 30m \cdot 12,5A}{3,309 \cdot 10^{-6} m^2} = 216V.$$



## Oefening 1: Oplossing (2)

- Negeer voor de eenvoud de draad voor dit deel van de oefening. Indien je deze wil meerekenen, dien je bij de weerstand van elke lamp en bij die van de kachel de extra weerstand van de draad bij te tellen.
- Voor elk apparaat dat in de keten wordt opgenomen (aangeschakeld), is een vermogen  $P = IV$  nodig. Daar de lampen en de kachel in parallel geschakeld zijn, is de spanning over elk dezelfde.
- Elk van deze apparaten zal dus een bepaalde hoeveelheid stroom door zich laten lopen en de totale stroom loopt ook door de zekering. Dit is een gevolg van de stroomwet van Kirchhof. Het is deze totale stroom die niet groter mag worden dan 20A.
- Elk van de 60W-lampen zal een stroom

$$I_1 = \frac{P_1}{V} = \frac{60W}{220V} = 0,27A$$

nodig hebben.

- De zekering zal niet doorsmelten wanneer

$$12,5A + N \cdot 0,27A < 20A \quad \Leftrightarrow \quad N < 27,5$$

Je kan dus 27 dergelijke lampen aansluiten.



## Oefening 2: Oplossing (1)

- De spanning over  $R_5$  is  $1V$ . Daar  $R_2$  in parallel geschakeld is met  $R_5$ , is de spanning over deze weerstand eveneens  $1V$ . De equivalente weerstand  $R_{2+5}$  is gegeven door

$$\frac{1}{R_{2+5}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \Rightarrow R_{2+5} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = \frac{10}{7} \Omega.$$

- De totale stroom die loopt doorheen de keten kan dus reeds berekend worden als

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1V}{\frac{10}{7} \Omega} = 0,7A.$$

- De spanning geleverd door de bron is

$$\mathcal{E} = IR_{\text{tot}}.$$

- Ondanks de ietwat vreemde vorm staan weerstanden  $R_3$ ,  $R_4$  en  $R_{10}$  gewoon in parallel. De zwarte lijnen hebben geen weerstand en dus ook geen spanningsval. Dit betekent dat de potentiaal verschillen over elk van de 3 weerstanden dezelfde is.



## Oefening 2: Oplossing (2)

- De totale weerstand  $R_{\text{tot}}$  wordt daarom gegeven door

$$R_{\text{tot}} = R_{12} + R_{2+5} + \left( R_3^{-1} + R_4^{-1} + R_{10}^{-1} \right)^{-1} = 14,89\Omega$$

- De spanning geleverd door de bron is bijgevolg

$$\mathcal{E} = IR_{\text{tot}} = 0,7A \cdot 14,89\Omega = 10,42V.$$

- Het geleverde vermogen is de totale stroom maal de aangelegde spanning, dus

$$P = \mathcal{E}I = 10,42V \cdot 0,7A = 7,29W.$$



## Oefening 3: Oplossing (1)

- Noem de stroom door de linkse verticale draad  $I_1$ , de stroom door de middelste verticale draad  $I_2$  en door de rechtse  $I_3$ . Stromen veranderen alleen aan vertakkingen van draden en niet aan weerstanden of stroombronnen, dus deze 3 stromen volstaan. Kies de richting van de stromen in elke draad tak naar beneden in het verticale stuk. Als een stroom eigenlijk in de andere richting loopt, zal dat blijken uit het teken.
- Er zijn twee knooppunten waar draden bij elkaar komen. In beiden geldt

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

- In de linkse kring geldt (doorloop de keten in tegenwijzerzin zodat  $I_1$  positief is in deze richting!)

$$-8V + 4V - (-I_2) \cdot 2\Omega - I_1 \cdot 2\Omega - 4V - I_1 \cdot 1\Omega = 0.$$

Bronnen van min naar plus doorlopen, zorgt voor een term  $+\varepsilon$  (zoals de tweede term), van plus naar min  $-\varepsilon$  (eerste term). Spanningen over weerstanden krijgen een minteken als de keten in de richting van de stroom wordt doorlopen (vierde term) en nog een extra minteken als dit in de andere richting gaat (derde term).

- In de rechtse kring zegt de spanningswet van Kirchhof (eveneens in tegenwijzerzin doorlopen)

$$-4V - (-I_3) \cdot 6\Omega - I_2 \cdot 2\Omega = 0.$$

- De buitenste kring levert nu geen extra informatie meer.



## Oefening 3: Oplossing (2)

- Deze drie vergelijkingen kunnen worden gecombineerd tot een stelsel van 3 vergelijkingen en 3 onbekenden:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -3I_1 + 2I_2 + 0 = 8A \\ 0 + -I_2 + 3I_3 = 2A. \end{cases}$$

De vergelijkingen bekomen door de spanningswet werden gedeeld door  $1\Omega$  en  $2\Omega$  respectievelijk om alles als stromen te schrijven en in dit stelsel gegoten, waaruit de stromen kunnen worden bepaald.

- De eerste vergelijking kan worden herschreven, gebruikmakend van de andere twee, als

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= -\frac{1}{3}[8A - 2I_2] + I_2 + \frac{1}{3}[2A + I_2] \\ &= \frac{1}{3}[-8A + 2I_2 + 3I_2 + 2A + I_2] \end{aligned}$$

Aangezien  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ , geldt  $I_2 = 1A$ .



## Oefening 3: Oplossing (3)

- Hieruit volgt, gebruikmakend van de derde vergelijking

$$I_3 = \frac{1}{3}[2A + I_2] = \frac{1}{3}[2A + 1A] = 1A.$$

- Tenslotte de tweede vergelijking gebruikend,

$$I_1 = \frac{1}{3}[8A - 2I_2] = 2A.$$

- De vermogens ontwikkeld in de batterij zijn het product van de geleverde spanning met de stroom die er door loopt, rekening houdend met het teken van de stroom. Dit betekent dat de vermogens van de batterijen, links beginnend en in wijzerzin, zijn gegeven door

$$P_{8V} = 16W; \quad P_{4V} = 8W; \quad P'_{4V} = -4W.$$

Deze laatste (negatieve) waarde wijst er op dat de batterij stroom gevoed wordt in plaats van stroom levert aan de keten.





## Oefening 3: Oplossing (4)

- Voor de weerstanden is het gedissipeerd vermogen gegeven door

$$P = VI = RI^2.$$

- Dit betekent voor de weerstanden (eveneens in wijzerzin, van links te beginnen)

$$P_{1\Omega} = 4W; \quad P_{2\Omega} = 8W; \quad P'_{2\Omega} = 2W; \quad P_{6\Omega} = 6W.$$

- Je kan controleren dat de som van de geleverde vermogens gelijk is aan de som van de gedissipeerde vermogens. Beiden zijn  $20W$ .



## Oefening 4: Oplossing

- Op  $t = 0$  is de condensator niet geladen en gedraagt deze zich als een weerstandsloze geleider. Dit betekent dat

$$\varepsilon - R_1 I(0) = 0 \quad \text{zodat} \quad I(0) = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{50V}{200\Omega} = 0,25A.$$

- Op  $t \rightarrow \infty$  is de condensator volledig opgeladen en gedraagt deze zich als een geleider met een oneindige weerstand. Aldus geldt — opnieuw Kirchhoff toepassend —

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon - R_1 I(t) - R_2 I(t)) = \varepsilon - (R_1 + R_2) \lim_{t \rightarrow \infty} I(t),$$

zodat

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{50V}{800\Omega} \\ &= 0,0625A. \end{aligned}$$



## Extra: Oplossing

- De equivalente weerstand is gelijk aan

$$R_{\text{eq}} = \left( \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right) (1\Omega).$$

Bron: D. Atkinson en F.J. van Steenwijk, *Infinite resistive lattices*, Am. J. Phys. **67** nr 6 (1999).

Dit resultaat werd slechts voor de volledigheid gegeven. Zoals reeds vermeld is dit niet te interpreteren als een oefening.