Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr. Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 2e zittijd 2018–2019

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Bepaal het oppervlakte ingesloten door de krommen $xy^4 = 1$, $xy^4 = 8$, $x^2 = y$ en $x^2 = 27y$. Hint: zoek de unieke p en q zodanig dat $\left(xy^4\right)^p \left(\frac{x^2}{y}\right)^q = x^2y^2$.

/10

2. Bepaal $\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \eta dS$ voor het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto \big(y, x, z^2\big)$ met Ω het gesloten lichaam, ingesloten door de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ en het vlak $z = 1$.

/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' + 2xy' + y = 0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 9y(t) + 13t + 6 \\ y'(t) = 4x(t) + 8y(t) - 12t - 3 \end{cases}$$

/10

5. Een elektrische stroom beweegt zich over een draad met lengte L en voldoet aan de golfvergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

De Neumann–randvoorwaarden zijn

$$\forall t \geq 0 : \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$$

De beginvoorwaarden zijn

$$\forall x \in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

en

$$\psi(x,0) = f(x) = \begin{cases} \psi_0 & \text{als} \quad x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ 0 & \text{als} \quad x \in \left[\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

Bepaal $\psi(x,t)$.

/10

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 4t \text{ met } y\,(0) = -1, y'\,(0) = 7 \text{ en } y''\,(0) = -12$$

/10

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$x(n+1) = \frac{7x(n) - 9}{2x(n) - 4}$$

Voor vijf bonuspunten extra: geef een gesloten formule (i.e. er mogen geen parameters meer instaan) voor $x(n)$ als je bijeist dat $x(0) = 4$; bepaal in dat geval $x(10)$.

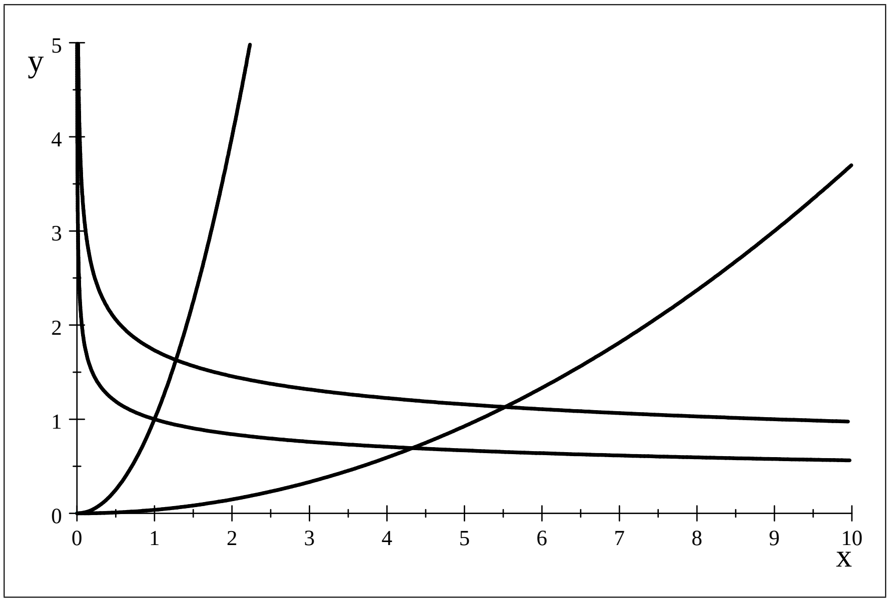
/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70
⇒ /60

Oplossingen:

1. Bepaal het oppervlakte ingesloten door de krommen $xy^4 = 1$, $xy^4 = 8$, $x^2 = y$ en $x^2 = 27y$. Hint: zoek de unieke p en q zodanig dat $\left(xy^4\right)^p \left(\frac{x^2}{y}\right)^q = x^2y^2$



Stel $\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ v = xy^4 \end{cases} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ y^4 & 4xy^3 \end{vmatrix} = 9x^2y^2$

Stel $\begin{cases} p + 2q = 2 \\ 4p - q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2/3 \\ q = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 9u^{2/3}v^{2/3}$

$\Rightarrow I = \iint\limits_R dxdy = \iint\limits_R \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \dfrac{1}{9}\int_1^8\int_1^{27} \dfrac{1}{u^{2/3}v^{2/3}} dvdu = \dfrac{1}{9}\int_1^8 \dfrac{1}{u^{2/3}} du \cdot \int_1^{27} \dfrac{1}{v^{2/3}} dv = \dfrac{1}{9} \cdot [3\sqrt[3]{u}]_1^8 \cdot [3\sqrt[3]{v}]_1^{27} = 2$

2. Bepaal $\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\eta dS$ voor het vectorveld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto \left(y, x, z^2\right)$ met Ω het gesloten lichaam, ingesloten door de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ en het vlak $z = 1$.

$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\eta dS = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F} dV = \iiint\limits_{\Omega} 2z dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 2rz dz dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left[z^2\right]_{r^2}^1 dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\left(1 - r^4\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r - r^5\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\dfrac{r^2}{2} - \dfrac{r^6}{6}\right]_0^1 d\theta = \dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$y'' + 2xy' + y = 0$$

Stellen we

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

dan is

$$\begin{aligned} y'' + 2xy' + y &= \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &\overset{m=n-2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+1\right)\left(m+2\right) c_{m+2} x^m + 2\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n+1\right)\left(n+2\right) c_{n+2} + \left(2n+1\right) c_n\right] x^n \end{aligned}$$

De recursiebetrekking is

$$\forall n \geq 0 : c_{n+2} = -\frac{\left(2n+1\right) c_n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$$

Stellen we enerzijds $c_0 \neq 0$ en $c_1 = 0$ dan vinden we

$$c_1 = c_3 = c_5 = ... = c_{2n+1} = 0$$

en

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2} \\ c_4 &= \frac{5c_2}{3\cdot 4} = \frac{5c_0}{4!} \\ c_6 &= -\frac{9c_4}{5\cdot 6} = -\frac{5\cdot 9c_0}{6!} \\ c_8 &= \frac{13c_4}{7\cdot 8} = \frac{5\cdot 9\cdot 13c_0}{8!} \\ & ... \\ c_{2n} &= \left(-1\right)^n \frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot\left(4n-3\right) c_0}{\left(2n\right)!} \end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_0 = 0$ en $c_1 \neq 0$ dan vinden we

$$c_0 = c_2 = c_4 = ... = c_{2n} = 0$$

en

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{3\cdot c_1}{2\cdot 3} \\
c_5 &= \frac{7c_3}{4\cdot 5} = \frac{3\cdot 7c_1}{5!} \\
c_7 &= -\frac{11c_5}{6\cdot 7} = -\frac{3\cdot 7\cdot 11c_1}{7!} \\
c_9 &= \frac{15c_5}{8\cdot 9} = \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15c_1}{9!} \\
&\cdots \\
c_{2n+1} &= (-1)^n\,\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots\cdot (4n-1)\,c_1}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$y(x) = c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{(2n)!}x^{2n}\right)+c_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 9y(t) + 13t + 6 \\ y'(t) = 4x(t) + 8y(t) - 12t - 3 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -9 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$

$E_2 : \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x+3y=0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$X_2(t) = (U+tW)\,e^{2t}$

$\Rightarrow (2U+W+2tW)\,e^{2t} = (AU+tAW)\,e^{2t}$

$\Rightarrow \begin{cases} AW = 2W \\ (A-2E)\,U = W \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Kies $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} 1-6t \\ 4t \end{pmatrix} e^{2t}$

Stel $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & (1-6t)\,e^{2t} \\ -2e^{2t} & 4te^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi(t) = 2e^{4t}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & (1-6t)\,e^{2t} \\ -2e^{2t} & 4te^{2t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(6t-1) \\ e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} t$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t)\,F(t) = \begin{pmatrix} 2te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(6t-1) \\ e^{-2t} & \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13t+6 \\ -12t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(-10t^2+9t+\frac{3}{2}\right) \\ e^{-2t}\left(-5t+\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \int \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(-10t^2+9t+\frac{3}{2}\right) \\ e^{-2t}\left(-5t+\frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(5t^2+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ e^{-2t}\left(\frac{5t}{2}+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X_{nh}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & (1-6t)\,e^{2t} \\ -2e^{2t} & 4te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(5t^2 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}\right) \\ e^{-2t}\left(\dfrac{5t}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-6t \\ 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

5. Een elektrische stroom beweegt zich over een draad met lengte L en voldoet aan de golfvergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

De Neumann–randvoorwaarden zijn

$$\forall t \geq 0 : \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(L,t) = 0$$

De beginvoorwaarden zijn

$$\forall x \in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0$$

en

$$\psi(x,0) = f(x) = \begin{cases} \psi_0 & \text{als} \quad x \in \left[0, \dfrac{L}{2}\right] \\ 0 & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

Bepaal $\psi(x,t)$.
Laten we als Ansatz aannemen dat in de functie ψ de veranderlijken kunnen worden gescheiden; met andere woorden dat

$$\psi(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

In dat geval kunnen we deze invullen in de vergelijking, en krijgen we na deling door XT

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{c^2}\frac{T^{\cdot\cdot}}{T} = 0$$

waarbij we ruimtelijke afgeleiden met $'$ noteren en tijdsafgeleiden met $\cdot$. Dan krijgen we dat beide termen afzonderlijk constant moeten zijn:

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k^2 \\ \dfrac{T^{\cdot\cdot}}{T} = -\omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X'' = -k^2 X \\ T^{\cdot\cdot} = -\omega^2 T \end{cases}$$

De separatieconstanten moeten dan voldoen aan $\omega^2 = c^2k^2$. De randvoorwaarden worden op een analoge manier gescheiden. Zo krijgen we dat $X(0) = X(L) = 0$ voor de eerste vergelijking en $T^{\cdot}(0) = 0$ voor de tweede vergelijking.
Hiermee is het oorspronkelijke probleem dus opgesplitst in twee deelproblemen. Het X–probleem is vanwege de vorm van zijn vergelijking en de homogeniteit van de bijhorende randvoorwaarden een *eigenwaardeprobleem*; het T–probleem noemen we het *restprobleem*. Het X–probleem is dus als volgt gesteld:

$$\begin{cases} X'' = -k^2 X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Als $k \neq 0$ is dit een gewone differentiaalvergelijking van tweede orde met als oplossing

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

waaruit

$$X'(x) = -kC_1 \sin(kx) + kC_2 \cos(kx)$$

De randvoorwaarden geven aanleiding tot de betrekkingen

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

Indien we aannemen dat de oplossing niet–triviaal is, t.t.z. dat $C_1 \neq 0$ (anders hebben we enkel de nulfunctie), dan kan deze alleen maar bestaan als $k = k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ met $n \in \mathbb{Z}$. We vinden dus als eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ en } X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Aangezien we voor n en $-n$ na dezelfde oplossing krijgen, mogen we zonder verlies van algemeenheid de index $n \in \mathbb{N}$ nemen. Als $k = 0$ krijgen we de oplossing $X_0(x) = C_1 x + C_2$; echter in dat geval leren de randvoorwaarden ons dat $C_1 = 0$ en krijgen we als oplossing de constante functies C_2.
Laat ons nu het resterende T–probleem beschouwen. Met elke oplossing X_n van het eigenwaardeprobleem voor X komt er een vergelijking overeen van de vorm

$$T^{\cdot\cdot} = -\omega_n^2 T$$

met $\omega_n = ck_n$. Deze vergelijking heeft als oplossing

$$T = C_3 \cos(\omega_n t) + C_4 \sin(\omega_n t)$$

Uit de randvoorwaarde $T^{\cdot}(0) = 0$ volgt dan dat $C_4 = 0$, waardoor op een veelvoud na de functies

$$T_n = \cos(\omega_n t)$$

oplossingen zijn van het tijdsprobleem.
Uitgaande van de Ansatz vinden we dus een parameterstel oplossingen

$$\psi_0(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \text{ en } \psi_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

die voldoen aan de homogene rand–en beginvoorwaarden, maar niet aan de inhomogene beginvoorwaarde. Uit de lineariteit van de differentiaaloperatoren weten we dat een superpositie van dergelijke oplossingen nog steeds aan de homogene randvoorwaarden zal voldoen. Stel dus

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n = \frac{c_0}{2}\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

dan moeten we op zoek naar de coëfficiënten $(c_n)_n$ zodanig dat ψ ook voldoet aan de inhomogene randvoorwaarde. We willen dus dat

$$\psi(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Uit de fourier cosinusregel volgt dan dat

$$c_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{2\psi_0}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} dx = \psi_0$$

en

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2\psi_0}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2\psi_0}{L}\cdot\frac{L}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{2\psi_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \frac{\psi_0}{2} + \frac{2\psi_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

$$= \frac{\psi_0}{2} + \frac{2\psi_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{(2m+1)\pi c}{L}t\right)$$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 4t \text{ met } y(0) = -1, y'(0) = 7 \text{ en } y''(0) = -12$$

$$\Rightarrow 2\left(z^3Y(z) - z^2y(0) - zy'(0) - y''(0)\right) + \left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) - 5\left(zY(z) - y(0)\right) + 2Y(z) = \frac{4}{z^2}$$

$$\Rightarrow 2\left(z^3Y(z) + z^2 - 7z + 12\right) + \left(z^2Y(z) + z - 7\right) - 5\left(zY(z) + 1\right) + 2Y(z) = 0$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(2z^3 + z^2 - 5z + 2\right) = -2z^2 + 14z - 24 - z + 7 + 5 + \frac{4}{z^2} = \frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2}$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(2z^3 + z^2 - 5z + 2\right) = -2z^2 + 14z - 24 - z + 7 + 5 + \frac{4}{z^2} = \frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(2z^3 + z^2 - 5z + 2)} = \frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(z-1)(2z-1)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{2z-1} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}$$

- $A = \left.\frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(2z-1)(z+2)}\right|_{z=1} = 1$
- $B = \left.\frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(z-1)(2z-1)}\right|_{z=-2} = -3$
- $C = \left.\frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(z-1)(z+2)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -8$
- $D = \left.\frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{(z-1)(2z-1)(z+2)}\right|_{z=0} = 2$
- $\frac{-2z^4 + 13z^3 - 12z^2 + 4}{z^2(z-1)(2z-1)(z+2)} - \frac{2}{z^2} = \frac{-2z^3 + 9z^2 - 14z + 10}{z(z-1)(2z-1)(z+2)} \Rightarrow E = \left.\frac{-2z^3 + 9z^2 - 14z + 10}{(z-1)(2z-1)(z+2)}\right|_{z=0} = 5$

  $\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{z+2} - \frac{8}{2z-1} + \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z}$

  $\Rightarrow y(t) = e^t - 3e^{-2t} - 4e^{\frac{t}{2}} + 2t + 5$

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$x\left(n+1\right)=\frac{7x\left(n\right)-9}{2x\left(n\right)-4}$$

Voor vijf bonuspunten extra: geef een gesloten formule (i.e. er mogen geen parameters meer instaan) voor $x\left(n\right)$ als je bijeist dat $x\left(0\right)=4$; bepaal in dat geval $x\left(10\right)$.

Stel $x\left(n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{y\left(n+1\right)}{y\left(n\right)}+4\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{y\left(n+2\right)}{y\left(n+1\right)}+4\right)=\frac{\frac{7}{2}\left(\frac{y\left(n+1\right)}{y\left(n\right)}+4\right)-9}{2\frac{1}{2}\left(\frac{y\left(n+1\right)}{y\left(n\right)}+4\right)-4}=\frac{\frac{7}{2}\frac{y\left(n+1\right)}{y\left(n\right)}+5}{\frac{y\left(n+1\right)}{y\left(n\right)}}=\frac{7y\left(n+1\right)+10y\left(n\right)}{2y\left(n+1\right)}$

$\Rightarrow\frac{y\left(n+2\right)}{y\left(n+1\right)}+4=\frac{7y\left(n+1\right)+10y\left(n\right)}{y\left(n+1\right)}$

$\Rightarrow y\left(n+2\right)+4y\left(n+1\right)=7y\left(n+1\right)+10y\left(n\right)$

$\Rightarrow y\left(n+2\right)-3y\left(n+1\right)-10y\left(n\right)=0$

$t^{2}-3t-10=\left(t+2\right)\left(t-5\right)$

$\Rightarrow y\left(n\right)=c_{1}5^{n}+c_{2}\left(-2\right)^{n}$

$\Rightarrow x\left(n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{1}5^{n+1}+c_{2}\left(-2\right)^{n+1}}{c_{1}5^{n}+c_{2}\left(-2\right)^{n}}+4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c_{1}5^{n+1}+c_{2}\left(-2\right)^{n+1}+4c_{1}5^{n}+4c_{2}\left(-2\right)^{n}}{c_{1}5^{n}+c_{2}\left(-2\right)^{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{9c_{1}5^{n}+2c_{2}\left(-2\right)^{n}}{c_{1}5^{n}+c_{2}\left(-2\right)^{n}}\right)=$
$\frac{1}{2}\left(\frac{9\cdot5^{n}+2c\left(-2\right)^{n}}{5^{n}+c\left(-2\right)^{n}}\right)$

Extra: Stel $x\left(0\right)=\lim_{n\rightarrow0}\frac{1}{2}\left(\frac{9\cdot5^{n}+2c\left(-2\right)^{n}}{5^{n}+c\left(-2\right)^{n}}\right)=\frac{1}{2}\frac{2c+9}{c+1}=4\Rightarrow c=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow x\left(n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{9\cdot5^{n}+\frac{1}{3}\left(-2\right)^{n}}{5^{n}+\frac{1}{6}\left(-2\right)^{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{54\cdot5^{n}-\left(-2\right)^{n+1}}{6\cdot5^{n}+\left(-2\right)^{n}}\right)$

$x\left(10\right)=\frac{37\,667\,557}{8370\,682}$