

Inleiding:

Maxwell's vergelijkingen relateren de elektrische en magnetische veld vectoren  $E$  en  $B$  en hun bronnen, elektrische lading en stroom. Deze vergelijkingen vatten de experimentele wetten van elektriciteit en magnetisme samen – de wetten van Coulomb, Biot-Savart, Gauss, Ampère en Faraday. Deze experimentele wetten gelden algemeen behalve de wet van Ampère, welke enkel van toepassing is op continue, constante stromen.

In principe kunnen alle problemen uit de klassieke elektriciteit en magnetisme opgelost worden door gebruik te maken van de vergelijkingen van Maxwell, net zoals alle problemen uit de klassieke mechanica opgelost kunnen worden met de wetten van Newton.

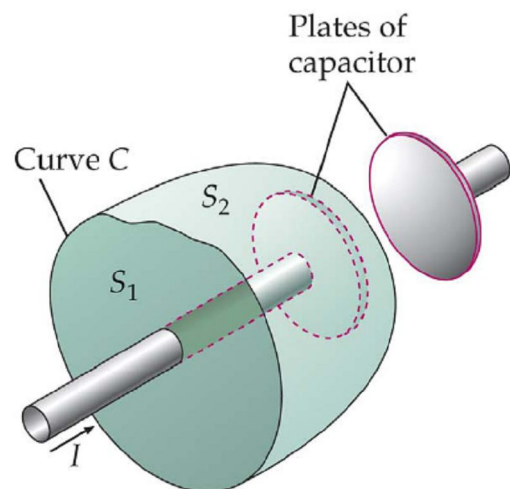
Maxwell toonde aan dat zijn vergelijkingen gecombineerd kunnen worden om de golfvergelijking samen te stellen voor de elektrische en magnetische veld vectoren  $E$  en  $B$ . Zulke elektromagnetische golven worden veroorzaakt door versnelde ladingen. Deze elektromagnetische golven werden voor het eerst in een labo geproduceerd door Hertz in 1887. Maxwell toonde aan dat zijn vergelijkingen de snelheid van elektrische magnetische golven in de vrije ruimte voorspelde.

### Maxwell's verplaatsingstroom.

De wet van Ampère relateert de kringintegraal van het magnetische veld over een gesloten curve  $C$  aan de stroom die door een oppervlak gebonden door die curve gaat:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Maxwell herkende een fout in de wet van Ampère. De figuur toont twee verschillende oppervlakken  $S_1$  en  $S_2$  afgebakend door dezelfde curve  $C$ , welke een draad die een stroom naar een condensatorplaat draagt omringt. De stroom door het oppervlak  $S_1$  is  $I$ , maar er is geen stroom door  $S_2$  omdat de lading stopt op de condensator plaat. Dus, er is iets mis aan de zin “de stroom die door een oppervlak gevonden door die curve”. Zo'n probleem doet zich voor wanneer de stroom niet continu is.



Maxwell toonde aan dat de wet veralgemeend kan worden zodat ze alle situaties omvat als de stroom  $I$  in de vergelijking vervangen wordt door de som van de stroom  $I$  en een andere term  $I_d$  Maxwell's verplaatsingstroom genaamd, gedefinieerd als:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

Waarbij  $\Phi_e$  = de flux van het E-veld door hetzelfde oppervlak gebonden door  $C$ .

De algemene vorm van de wet van Ampère is dan:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \mu_0 (I + I_d)$$

Waar komt die verplaatsingsstroom vandaan ? (niet in boek)

•Stel dat we een vlakke plaat condensator hebben met oppervlakte A en dat op de + plaat een lading Q zit, we kunnen dan de flux berekenen doorheen een oppervlak tussen de platen tgv. het elektrische veld dat heerst tussen de platen van de condensator.

Die flux wordt gegeven door:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A = \frac{Q}{A \epsilon_0} A$$

$$\Rightarrow \phi_e = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_e}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} I_d$$

de fluxverandering kan beschreven worden door een “stroom”. Dit is geen echte stroom i.e. correspondeert niet met verplaatsing van lading

•De stroom I stroomt naar de condensatorplaat en wordt daar alshet ware voortgezet door Id.. Indien het diëlektricum tussen de 2 condensatorplaten lichtjes geleidend is dan treedt er naast I ook een echte stroom I' op, die in rekening moet gebracht worden voor een oppervlak dat tussen de 2 condensatorplaten komt zoals S2.

•Maxwell's modificatie is niet enkel geldig voor condensatoren, maar voor willekeurige systemen met (tijd-en plaatsafhankelijke) E-en B-velden.

•We zien dus dat een veranderende elektrische flux een magneetveld creëert.

•Maxwell's correctie zorgt ervoor dat de wet van Ampère volledig symmetrisch wordt aan Faraday's wet.

•Faraday : verandering in magnetische flux veroorzaakt een elektrisch veld.

•Ampère & Maxwell : verandering in elektrische flux veroorzaakt een magnetisch veld.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

er is geen “magnetisch” equivalent voor de stroom I : er bestaan geen magnetische monopolen (“magnetische ladingen”)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

### De Maxwell vergelijkingen

4 fundamentele wetten beschrijven volledig het gedrag van elektrische en magnetische velden:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

De wet van Gauss; zegt dat de flux van het elektrische veld door een gesloten oppervlak =  $1/\epsilon_0$  keer de netto lading binnen het oppervlak.

zoals gezien in hfst 22 impliceert de wet van Gauss dat het elektrisch veld tgv een puntlading omgekeerd varieert als de wortel van de afstand van de lading. Deze wet beschrijft hoe elektrische veldlijnen ontspringen uit een positieve lading en samenkomen in een negatieve lading. Zijn experimentele basis is de wet van Coulomb.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

De wet van Gauss voor magnetisme; zegt dat de flux van de magnetisch veld vector B nul is door elk gesloten oppervlak. deze vergelijking beschrijft de experimentele observatie dat magnetische veldlijnen niet ontstaan uit een punt in de ruimte en ook niet samenkomen in een punt. Dit is, de vgl impliceert dat geïsoleerde magnetische polen niet bestaan.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

De wet van Faraday; zegt dat de integraal van het elektrische veld over een gesloten curve, welke de emf is, gelijk is aan de (negatieve) mate van verandering van de magnetische flux door een oppervlak S gevonden door die curve. (S is geen gesloten oppervlak, dus de magnetische flux door een S is niet noodzakelijk nul). De wet van Faraday beschrijft hoe elektrische veldlijnen elk gebied waardoor de magnetische flux verandert omcirkelen en het relateert de elektrische veld vector E aan de mate van verandering van de magnetische veld vector B.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt}$$

De wet van Ampère gemodificeerd zodat ze Maxwell's verplaatsingstroom omvat; zegt dat de kringintegraal van het magnetische veld B rond een gesloten curve gelijk is aan  $\mu_0$  keer de stroom door een oppervlak S gevonden door die curve plus  $\mu_0 \epsilon_0$  keer de mate van verandering van de elektrische flux door hetzelfde oppervlak S. Deze wet beschrijft hoe de magnetische veldlijnen een gebied waardoor een stroom passeert of waardoor de elektrische flux verandert omcirkelt.

Merk op dat deze vergelijkingen geldig zijn voor elektrische en magnetische velden die zowel tijd- als plaatsafhankelijk zijn:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

D.m.v. de Maxwell kan men bewijzen dat de componenten v/h E en Bveld voldoen aan de drie-dimensionale golfvergelijking (zie ook cursus Fysica I) :

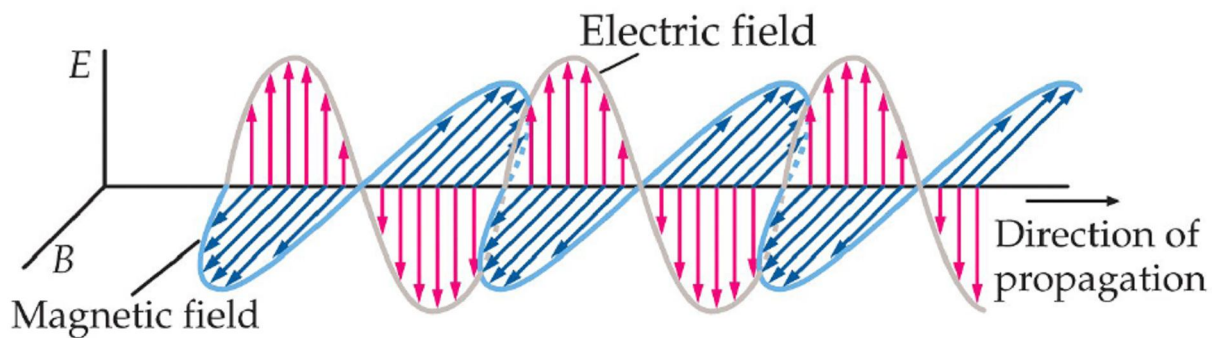
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

En analoog voor de andere componenten:  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  en  $B_z$ .

Snelheid golf:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

### Elektromagnetische golven



EM golven kunnen door vacuum bewegen, zij hebben geen middenstof nodig zoals geluidsgolven.

De figuur toont de elektrische en magnetische veld vectoren van een elektromagnetische golf. De elektrische en magnetische velden staan loodrecht tov elkaar en loodrecht tov de richting waarin de golf voortbeweegt. Elektromagnetische golven zijn dus transversale golven. De elektrische en magnetische velden zijn in fase en, op elk punt in de ruimte en op elk moment, zijn hun groottes gerelateerd door:

$$E = c B ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 300.000 \text{ km/s}$$

↑  
snelheid van licht ! Hieruit  
concludeerde Maxwell dat  
licht ook een EM golf was.

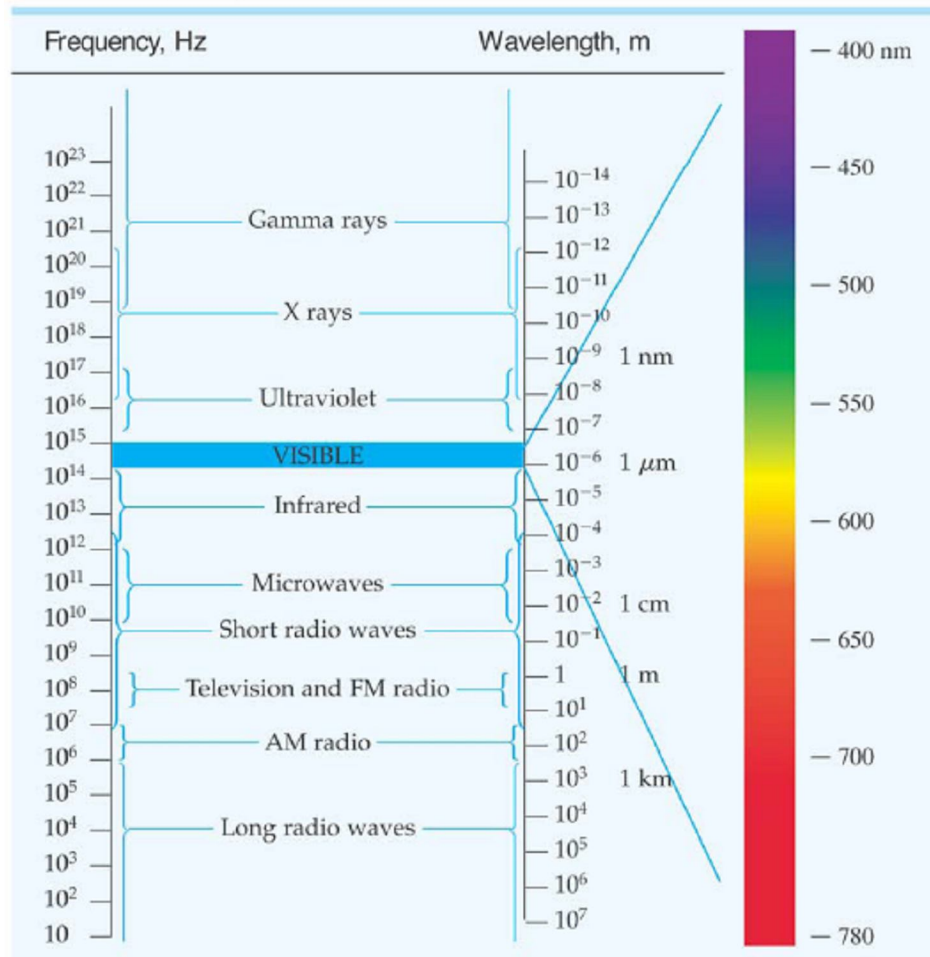
De richting van voortbewegen van de EM golf is de richting van het kruisproduct  $E \times B$ .

## Het elektromagnetisch spectrum

Dikwijls onderscheidt men verschillende types van EM-golven - licht, radio golven, X stralen, gamma stralen, microgolven en andere - afhankelijk van hun frequentie (of golflengte), welke gerelateerd zijn tot de snelheid  $c$  volgens  $f\lambda = c$ . Men spreekt dan over het elektromagnetische spectrum om het geheel aan te duiden van alle types van EM golven.

Het elektromagnetisch spectrum:

The Electromagnetic Spectrum



Hierin vindt men alle types van EM golven en hun bijhorende frequencies en golflengte gebied. Deze gebieden zijn vaak slecht afgebakend en overlappen soms.

Bijvoorbeeld, elektromagnetische golven met golflengtes van ongeveer 0.1nm zijn meestal X-stralen, maar als de elektromagnetische golven afkomstig zijn van nucleaire radioactiviteit dan noemt men ze gamma-stralen.

Het menselijke oog is gevoelig voor EM straling binne nde golflengtes van ongeveer 400 – 700 nm, welke het gebied van het zichtbaar licht genoemd wordt.

De kortste golflengtes in het zichtbare spectrum corresponderen met violet licht en de langste golflengtes met rood licht, tussen deze twee uiterste waarden komen alle kleuren van de regenboog voor.

EM golven met golflengtes net buiten het zichtbare spectrum aan de korte-golflengte kant noemt men ultra-violet stralen en de EM golven met golflengtes net buiten het zichtbare spectrum aan de lange-golflengte kant noemt men IR golven. Warmte straling afgegeven door lichamen op normale temperaturen is in het IR gebied van het EM spectrum. Er zijn geen limieten aan de golflengtes van EM straling; dat is, alle golflengtes (of frequenties) zijn theoretisch mogelijk.

De verschillen in golflengtes van de verschillende soorten EM golven hebben belangrijke fysische gevolgen. Zoals we weten hangt het gedrag van golven sterk af van de relatieve grootte van de golflengtes en de fysische objecten of openingen die de golven tegenkomen. Aangezien de golflengtes van licht in het eerder nauwere gedeelte van ongeveer 400 – 700 nm liggen, zijn deze veel kleiner dan de meeste obstakels, dus is de straal benadering (hfst 15 deel 4) vaak geldig.

De golflengte en frequentie zijn ook belangrijk bij het bepalen van de soorten interacties tussen EM golven en materie. X-stralen bijvoorbeeld hebben een zeer korte golflengte en hoge frequenties. Zij penetreren makkelijk veel materialen die ondoorgrondelijk zijn voor lagere-frequentie lichtstralen, welke geabsorbeerd worden door het materiaal.

Microgolven hebben golflengtes in de orde van een paar centimeters en frequenties die dicht bij de natuurlijke resonantie frequentie van watermoleculen in vaste en vloeibare vorm liggen. Microgolven worden daarom makkelijk geabsorbeerd door het water in voedsel, wat het mechanisme is van microgolf ovens.

### **Genereren van elektromagnetische stralen.**

EM straling wordt veroorzaakt door (1) de **versnelling** van vrije ladingen of (2) door elektronen die gebonden zijn in atomen of moleculen en een overgang maken naar een energetisch lagere toestand.

Zo worden Radiogolven veroorzaakt door macroscopische elektrische stromen die heen en weer oscilleren in een antenne. De frequentie van de uitgezonden golven is gelijk aan de frequentie van de oscillatie van de ladingen.

Een continu spectrum aan x-stralen wordt gegenereerd wanneer elektronen botsen tegen een stuk metaal en daarbij sterk vertraagd (dus een versnelling ondergaan) worden. Deze straling noemt men “**Bremstrahlung**” (“bremsen” in het Duits betekent remmen).

De Kwantummechanica leert ons dat de energie van EM straling gekwantiseerd is en de energie v/e “kwantum” energie is evenredig met frequentie van de straling. Heel energetische straling maw. met een hoge frequentie zoals X-stralen wordt verkregen wanneer energetisch laag gelegen energieniveaus van een atoom/molecuul onbezet zijn en een hoger gelegen elektron naar deze toestand kan “springen”. Hierbij wordt dan straling uitgezonden met een energie

**Synchrotron**(x-) straling ontstaat wanneer geladen deeltjes (meestal elektronen of positronen i.e het antideeltje van het e-wat een positieve lading heeft) in een circulaire baan bewegen (en dus versneld worden vermits de richting van de snelheidsvector steeds verandert) in een deeltjesversneller (een “synchrotron”).

Deze synchrotron straling wordt oa. in de geneeskunde gebruikt als diagnosemiddel. Ook in scheikunde en de fysica wordt synchrotronstraling gebruikt om de chemische samenstelling van materialen en hun structurele en elektronische eigenschappen te onderzoeken.

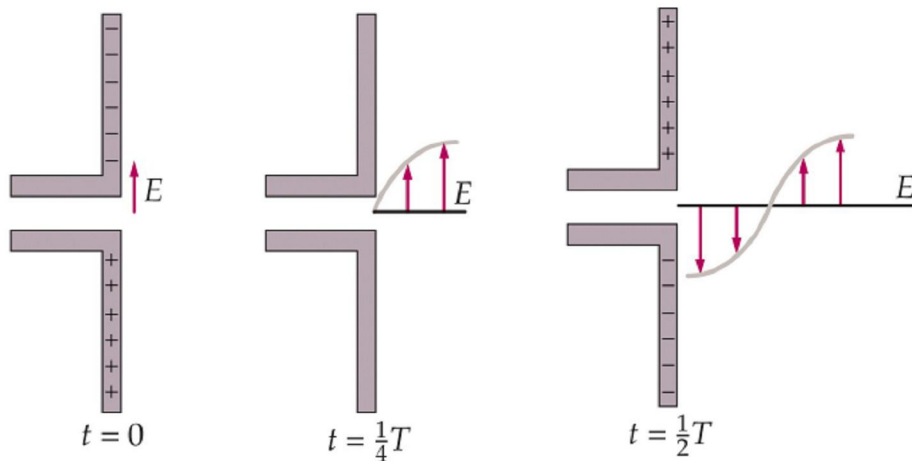
Wanneer een atoom**kern** van een energetisch hogere toestand naar een lagere toestand gaat dan wordt er ook straling uitgezonden. Deze zeer energetische straling noemen we gamma straling ( $\gamma$ -straling).

Warmte wordt uitgestraald door de thermisch geëxciteerde moleculaire veranderingen. Het spectrum van warmte uitstraling is het zwarte-lichaam straling spectrum. (hfst 20-4).

Licht golven, welke frequenties hebben in de orde van  $10^{14}$  Hz, worden algemeen geproduceerd door overgangen van gebonden atoom ladingen. We bespreken bronnen van lichtgolven in hfst 31.

### **Elektrische dipoolstraling.**

In een radio beweegt lading steeds heen en weer: dit creëert een Eveld dat oscileert:



De figuur is een schematische tekening van een elektrische dipool radio antenne die bestaat uit twee geleidende draden langs een lijn gevoed door een wisselstroom generator.

Op tijd  $t = 0$  worden de uiteinden van de draad geladen en is er een elektrisch veld nabij de draad parallel tot de draad. Er is ook een magnetisch veld, welk niet getoond wordt, dat de draden omcirkelt tgv de stroom in de draden. De fluctuaties in deze velden bewegen weg van de draden met de lichtsnelheid. Na een kwart periode, op  $t = T/4$ , zijn de draden ongeladen, en is het Eveld nabij de draad  $= 0$ .

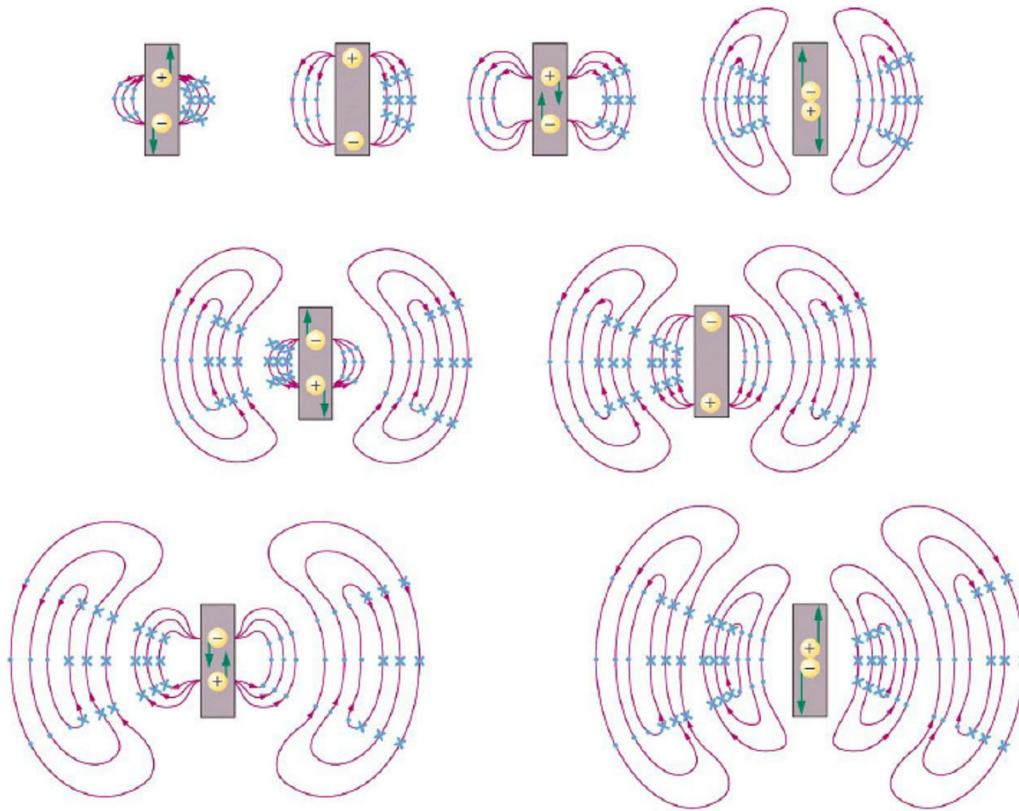
Op  $t = T/2$  zijn de draden weer geladen, maar de ladingen zijn tegensteld aan die op  $t = 0$ .

Het elektrische en magnetische veld op een grote afstand van de antenne zijn heel anders dan de velden nabij de antenne.

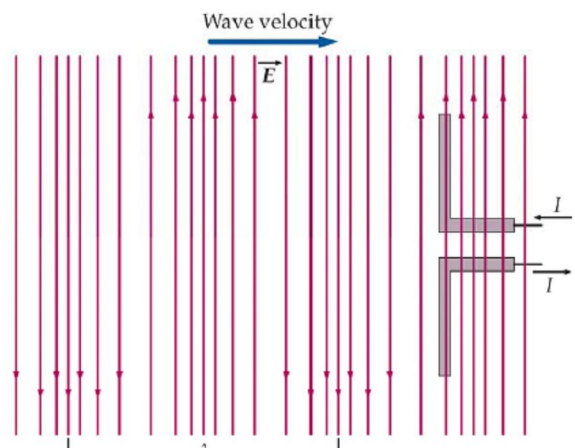
Ver weg van de antenne oscileren het Eveld en het Bveld in fase met een simpele harmonische beweging, loodrecht tov elkaar en tov de richting waarin de golf voortbeweegt.



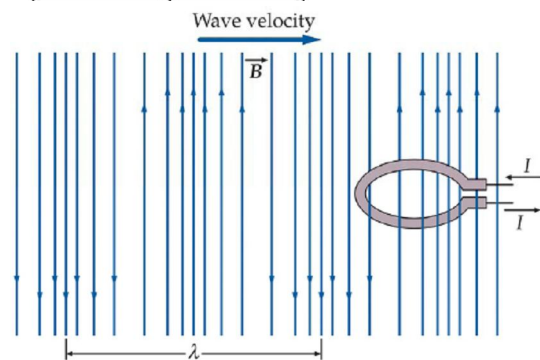
Ver weg van de antenne lijkt het alsof de straling veroorzaakt wordt door een 'oscillerende' dipool:



EM golven van een radio of televisie frequenties kunnen opgevangen worden door een elektrische dipool antenne die parallel staat met het E veld van de binnenkomende golf, zodat het een wisselstroom induceert in de antenne.



Deze EM golven kunnen ook opgevangen worden door een lusvormige antenne die loodrecht tov het magnetische veld geplaatst wordt, zodat de verandering in magnetische flux door de lus een stroom in de lus induceert.



EM golven van frequentie van zichtbaar licht worden opgevangen door het oog of door een fotografische film, elk van beide zijn vooral gevoelig voor het elektrische veld.

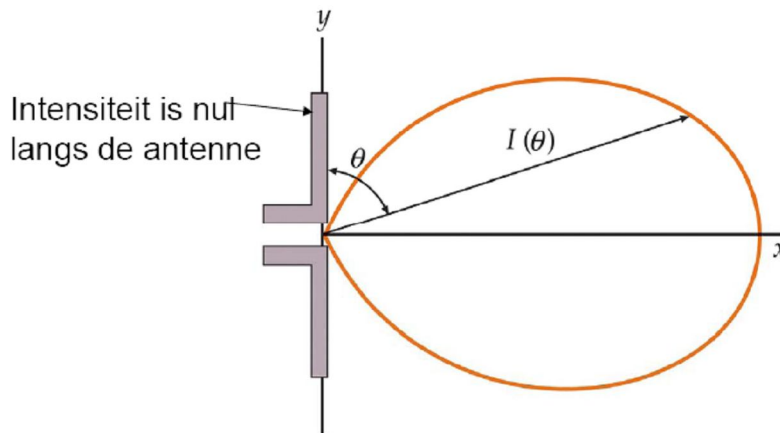


Ver weg van de antenne lijkt het veld op dat van een dipool.

De straling van een dipool antenne noemt men elektrische dipoolstraling.

Vee IEM golven vertonen de karakteristieken van elektrische dipoolstraling. Een belangrijk kenmerk van dit type van straling (dipoolstraling) is dat de intensiteit van de EM golven uitgestraald door een dipool antenne nul is langs de as van de antenne (want  $E = 0$ ) en maximaal is in de radiale richting (weg van de as).

Als de dipool in de y richting is met zijn middelpunt op de oorsprong, zoals in de figuur, dan is de intensiteit nul langs de y as en maximaal in het xz-vlak. In de richting van een lijn die een hoek  $\Theta$  maakt met de y-as, is de intensiteit proportioneel met  $\sin^2 \Theta$ .



We kunnen de intensiteit tekenen als functie van de hoek tov. de antenne : een zogenaamde “**polaire plot**”: de intensiteit is  $\sim$  de lengte van de pijl.

### Energie en impuls van een elektromagnetische golf

Zoals andere golven, dragen EM energie en een impuls. De gedragen energie wordt beschreven adhv de intensiteit, welke het gemiddelde vermogen per oppervlakte-eenheid is op een oppervlak loodrecht tov de richting van propagatie vd golf. Het impuls per tijdseenheid per oppervlakte-eenheid gedragen door een magnetische golf noemt men de stralingsdruk.

#### INTENSITEIT

Beschouw een EM golf die naar rechts beweegt en een cilindrische gebied van lengte  $L$  en doorsnede  $A$  met zijn as georiënteerd van links naar rechts. De gemiddelde hoeveelheid EM energie  $U_{av}$  binnen dit gebied is gelijk aan  $u_{av}V$ , waarbij  $u_{av}$  de gemiddelde energiedichtheid is en  $V = LA$  het volume van het gebied. In de tijd die nodig is voor de EM golf om de afstand  $L$  af te leggen, passeert al deze energie het rechter einde van het gebied. De tijd  $\Delta t$  voor de golf om de afstand  $L$  af te leggen is  $L/c$ , dus het vermogen  $P_{av}$  (de energie per tijdseenheid) die langs het rechter einde van het gebied passeert is

$$P_{av} = \frac{u_{av} L A}{\Delta t} = u_{av} A c \quad \text{want } \Delta t = L / c$$

En de intensiteit  $I$  (het gemiddelde vermogen per oppervlakte-eenheid) is

$$I = \frac{P_{av}}{A} = u_{av} c$$

De totale energie dichtheid in de golf  $u$  is de som van de elektrische en magnetische energiedichtheden. De elektrische energiedichtheid  $u_e$  en de magnetische energiedichtheid  $u_m$  zijn:

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$u_b = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

in een EM golf in vrije ruimte is  $E = cB$ , we gebruiken ook  $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$ , zodat we zien dat de elektrische en magnetische energiedichtheden gelijk zijn. De totale energie dichtheid is dan:

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E B}{\mu_0 c}$$

Om de gemiddelde energiedichtheid te berekenen, vervangen we de ogenblikkelijke velden  $E$  en  $B$  door hun rms waarden:

$$E_{rms} = E_0/\sqrt{2}$$

En

$$B_{rms} = B_0/\sqrt{2}$$

Waarbij  $E_0$  en  $B_0$  de maximum waarden van de velden zijn.

De intensiteit is dan

$$I = u_{av} c = \frac{E_{rms} B_{rms}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = |\vec{S}|_{av}$$

Waarbij de vector

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

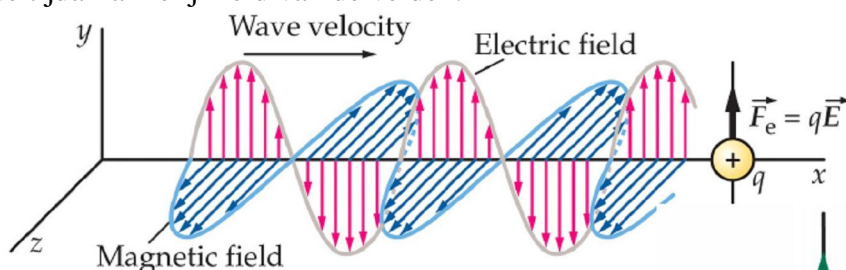
de zogenaamde Poynting vector (genoemd naar John Poynting) is.

Deze vector is in de richting van de voortplantingsrichting van de golf en heeft als gemiddelde grootte de intensiteit

## STRALINGSDRUK

We tonen adhv een voorbeeld dat een EM golf een impuls draagt. Beschouw een golf die langs de x-as beweegt en invalt op een stationaire lading.

Voor de eenvoud nemen we aan dat  $E$  is in de y richting en  $B$  is in de z richting en negeren we de tijdafhankelijkheid van de velden.



Het deeltje ondervindt een kracht  $qE$  in de  $y$  richting en is dus versneld door het Eveld. Op een ogenblik  $t$  is de snelheid in de  $y$  richting:

$$v_y = at = \frac{qE}{m}t$$

Na een korte tijd  $t_1$  heeft de lading een kinetische energie bekomen:

$$K = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2$$

Wanneer de lading in de  $y$  richting beweegt ondervindt deze een magnetische kracht:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q^2EB}{m}t \hat{i}$$

Merk op dat deze kracht in de richting is waarin de golf voortbeweegt.

Als we gebruik maken van  $dp_x = F_x dt$ , dan vinden we voor het impuls  $p_x$  overgedragen door de golf op het deeltje in tijd  $t_1$ :

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x dt = \frac{1}{2}\frac{q^2EB}{m}t_1^2 = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2E^2}{m}t_1^2\right) = \frac{K}{c}$$

(waarbij  $B = E/c$ )

Wanneer we deze vergelijking vergelijken met de vergelijking voor de kinetische energie, dan zien we dat het impuls verworven door de lading in de richting van de golf  $1/c$  keer de energie is. De grootte van het impuls gedragen door een EM golf is  $1/c$  keer de energie gedragen door de golf:

$$p = \frac{U}{c}$$

Aangezien de intensiteit de energie is per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid, is de intensiteit gedeeld door  $c$  gelijk aan het impuls gedragen door de golf per eenheid van oppervlakte per tijdseenheid.

De intensiteit gedeeld door  $c$  is dus een kracht per oppervlakte-eenheid, welke een druk is.

Deze druk is de stralingsdruk  $P_r$ :

$$P_r = \frac{F}{A} = \frac{p}{A\Delta t} = \frac{U}{Ac\Delta t} = \frac{I}{c}$$

We kunnen de stralingsdruk relateren aan het Eveld en Bveld:

$$P_r = \frac{E_0B_0}{2\mu_0c} = \frac{E_{rms}B_{rms}}{\mu_0c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$$

Beschouw een EM golf die normaal invalt op een oppervlak. Als het oppervlak energie  $U$  absorbeert van de EM golf, dan absorbeert deze ook impuls  $p = U/c$ , en de druk uitgeoefend op het oppervlak is de stralingsdruk. Als de golf gereflecteerd wordt, is het overgedragen impuls  $2p$  omdat de golf nu een impuls in de tegengestelde richting draagt. De druk uitgeoefend op het oppervlak door de golf is dan twee maal de stralingsdruk.