Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr. Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2018–2019

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Bereken het volume van het gebied boven het XY−vlak tussen de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ en de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hint: schets eerst dit gebied en gebruik dan een geschikt coördinaatsysteem.

/10

2. Zij $R \subseteq \mathbb{R}^2$ het gebied binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en onder de eerste bissectrice $y = x$. Zij verder $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \big(x^4 - y^4, 2x^2y^2\big)$. Bereken $\oint\limits_{\alpha} \mathbf{f} \cdot d\alpha$ waarbij α de rand van R is, doorlopen in tegenwijzerzin.

/10

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$5x^2y'' + x\,(1+x)\,y' - y = 0$$

Voor vijf bonuspunten extra: één van de twee oplossingen is een gekende functie. Welke?

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 3y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2z(t) \end{cases}$$

/10

5. Een elektrische stroom beweegt zich over een draad met lengte L en voldoet aan de golfvergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

De Dirichelet–randvoorwaarden zijn

$$\forall t \geq 0 : \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0$$

De beginvoorwaarden zijn

$$\forall x \in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}\left(x,0\right) = 0$$

en

$$\psi\left(x,0\right) = f\left(x\right) = \begin{cases} \psi_0 & \text{als} \quad x \in \left[0,\dfrac{L}{2}\right] \\ 0 & \text{als} \quad x \in \left[\dfrac{L}{2},L\right] \end{cases}$$

Bepaal $\psi\left(x,t\right)$. $\boxed{\quad /10}$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 2y' - 3y = 4t\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 5 \text{ en } y'(0) = -3$$

/10

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y\,(n+2) + 2y\,(n+1) - 15y\,(n) = 16 \cdot 3^{n+1} \text{ met } y\,(0) = 4 \text{ en } y\,(1) = 2$$

/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\qquad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\qquad /60}$

Oplossingen:

1. Bereken het volume van het gebied boven het $XY-$vlak tussen de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ en de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hint: schets eerst dit gebied en gebruik dan een geschikt coördinaatsysteem.
Als we bolcoördinaten gebruiken, dan krijgen we
$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta d\rho = \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\pi}{3}$
Feedback: het gaat om een *volume*. De te integreren functie is dus de constante 1–functie en niks anders! De $\rho^2 \sin\varphi$ die er bij komt, is de Jacobiaan.

2. Zij $R \subseteq \mathbb{R}^2$ het gebied binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en onder de eerste bissectrice $y = x$. Zij verder $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \left(x^4 - y^4, 2x^2y^2\right)$. Bereken $\oint_\alpha \mathbf{f} \cdot d\alpha$ waarbij α de rand van R is, doorlopen in tegenwijzerzin.
$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial\left(2x^2y^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x^4 - y^4\right)}{\partial y} = 4y^3 + 4xy^2$

$$\Rightarrow \oint_\alpha \mathbf{f} \cdot d\alpha = \iint_R \left(4y^3 + 4xy^2\right) dydx = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r\left(4r^3 \sin^3\theta + 4r^3 \cos\theta \sin^2\theta\right) drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 4r^4 \left(\sin^3\theta + \cos\theta \sin^2\theta\right) drd\theta = \int_0^2 4r^4 dr \cdot \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta\right) d\theta = -\frac{256}{15}\sqrt{2}$$

$$= \left[\frac{4}{5}r^5\right]_0^2 \cdot \left(-\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2\theta\right) d(\cos\theta) + \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta d(\sin\theta)\right)$$

$$= \frac{128}{5} \cdot \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{256}{15}\sqrt{2}$$

Feedback: het enige interval waarover je correct mag integreren, is $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; dus *niet* $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ (dat is het gebied boven de diagonaal) en al *zeker niet* $[0, \pi]$ (dat is de bovenste helft van de cirkel) of $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (dat is 1/8 van de cirkel).

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$5x^2y'' + x(1 + x)y' - y = 0$$

Voor vijf bonuspunten extra: één van de twee oplossingen is een gekende functie. Welke?

Stel $\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1} \\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} \end{cases}$

$\Rightarrow 5x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$

$\Rightarrow x^r \left[5 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$

Stel $m = n+1 \Rightarrow n = m-1$

$\Rightarrow x^r \left[5 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^n + \sum_{m=1}^{\infty} (m+r-1)\, c_{m-1} x^m - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$

$\Rightarrow x^r \left[5 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)\, c_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$

$\Rightarrow x^r \left[(5r(r-1) + r - 1)\, c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 5(n+r)(n+r-1)\, c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)\, c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)\, c_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right] = 0$

$\Rightarrow x^r \left[\left(5r^2 - 4r - 1\right) c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (5(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1)\, c_n + (n+r-1)\, c_{n-1} x^n \right] = 0$

$\Rightarrow x^r \left[(5r+1)(r-1)\, c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+r-1)(5n+5r+1)\, c_n + (n+r-1)\, c_{n-1})\, x^n \right] = 0$

Indexwortels zijn $r = -\frac{1}{5}$ en $r = 1$, en $\forall n \geq 1 : c_n = -\frac{c_{n-1}}{5n+5r+1}$

- Als $r = 1 \Rightarrow \forall n \geq 1 : c_n = -\frac{c_{n-1}}{5n+6}$

  Kies $c_0 \Rightarrow c_1 = -\frac{c_0}{11}$

  $\Rightarrow c_2 = -\frac{c_1}{16} = \frac{c_0}{11 \cdot 16}$

  $\Rightarrow c_3 = -\frac{c_2}{21} = -\frac{c_0}{11 \cdot 16 \cdot 21}$

  $\Rightarrow ...$

  $\Rightarrow c_n = \frac{(-1)^n c_0}{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot ... \cdot (5n+6)}$

  $y_1(x) = c_0 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot ... \cdot (5n+6)} \right)$

- Als $r = -\frac{1}{5} \Rightarrow \forall n \geq 1 : d_n = -\frac{d_{n-1}}{5n}$

  Kies $d_0 \Rightarrow d_1 = -\frac{d_0}{5 \cdot 1}$

  $\Rightarrow d_2 = -\frac{d_1}{5 \cdot 2} = \frac{d_0}{5^2 \cdot 2!}$

  $\Rightarrow d_3 = -\frac{d_2}{5 \cdot 3} = -\frac{d_0}{5^3 \cdot 3!}$

  $\Rightarrow ...$

$$\Rightarrow d_n = \frac{(-1)^n d_0}{5^n \cdot n!}$$

$$\Rightarrow y_2 = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-\frac{1}{5}}}{5^n \cdot n!} = d_0 x^{-\frac{1}{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x}{5}\right)^n}{n!} = d_0 x^{-\frac{1}{5}} e^{-\frac{x}{5}}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_0 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot (5n+6)} \right) + d_0 x^{-\frac{1}{5}} e^{-\frac{x}{5}}$$

Feedback: aandachtspuntje hier is dat de x in de eerste oplossing wel degelijk discordant is, en de som daardoor pas vanaf 1 begint te tellen. Het is niet toegestaan achteruit te tellen.

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 5x(t) + 3y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2z(t) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3-\lambda & -3 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$
$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3$

- $E_1 : \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Stel $X_2(t) = (U + tW) e^t$
  $\Rightarrow (U + W + tW) e^{2t} = (AU + tAW) e^t$
  $\Rightarrow \begin{cases} AW = W \\ (A - E) U = W \end{cases}$
  $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y - z = 0$
  Kies $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t+1 \end{pmatrix}$
- Stel $X_3(t) = \left(U + tW + \frac{t^2}{2} Z \right) e^t$
  $\Rightarrow \frac{1}{2} e^t \left(2U + 2W + 2tW + Zt^2 + 2Zt \right) = \left(AU + tAW + \frac{t^2}{2} AZ \right) e^t$

$\Rightarrow \begin{cases} AZ = Z \\ (A-E)\,W = Z \\ (A-E)\,U = W \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kies $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow W = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_3\,(t) = e^t \begin{pmatrix} t^2 - 3t + 1 \\ 5t - t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix}$

- $\Rightarrow X\,(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t+1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} t^2 - 3t + 1 \\ 5t - t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix}$

  Feedback: hier zijn uiteraard tal van andere oplossingen mogelijk, uitgaande van het kiezen van een andere beginoplossing. Deze allemaal opsommen zou ons te ver leiden.

5. Een elektrische stroom beweegt zich over een draad met lengte L en voldoet aan de golfvergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

De Dirichelet–randvoorwaarden zijn

$$\forall t \geq 0 : \psi\,(0,t) = \psi\,(L,t) = 0$$

De beginvoorwaarden zijn

$$\forall x \in [0,L] : \frac{\partial\psi}{\partial t}\,(x,0) = 0$$

en

$$\psi\,(x,0) = f\,(x) = \begin{cases} \psi_0 & \text{als} \quad x \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \\ 0 & \text{als} \quad x \in \left]\frac{L}{2}, L\right] \end{cases}$$

Bepaal $\psi\,(x,t)$.
Laten we als Ansatz aannemen dat in de functie ψ de veranderlijken kunnen worden gescheiden; met andere woorden dat

$$\psi\,(x,t) = X\,(x) \cdot T\,(t)$$

In dat geval kunnen we deze invullen in de vergelijking, en krijgen we na deling door XT

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{c^2}\frac{T^{\cdot\cdot}}{T} = 0$$

waarbij we ruimtelijke afgeleiden met $'$ noteren en tijdsafgeleiden met $\cdot$. Dan krijgen we dat beide termen afzonderlijk constant moeten zijn:

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -k^2 \\ \dfrac{T^{\cdot\cdot}}{T} = -\omega^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X'' = -k^2 X \\ T^{\cdot\cdot} = -\omega^2 T \end{cases}$$

De separatieconstanten moeten dan voldoen aan $\omega^2 = c^2 k^2$. De randvoorwaarden worden op een analoge manier gescheiden. Zo krijgen we dat $X(0) = X(L) = 0$ voor de eerste vergelijking en $T^{\cdot}(0) = 0$ voor de tweede vergelijking.

Hiermee is het oorspronkelijke probleem dus opgesplitst in twee deelproblemen. Het X–probleem is vanwege de vorm van zijn vergelijking en de homogeniteit van de bijhorende randvoorwaarden een *eigenwaardeprobleem*; het T–probleem noemen we het *restprobleem*. Het X–probleem is dus als volgt gesteld:

$$\begin{cases} X'' = -k^2 X \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Als $k \neq 0$ is dit een gewone differentiaalvergelijking van tweede orde met als oplossing

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)$$

De randvoorwaarden geven aanleiding tot de betrekkingen

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

Indien we aannemen dat de oplossing niet–triviaal is, t.t.z. dat $C_2 \neq 0$ (anders hebben we enkel de nulfunctie), dan kan deze alleen maar bestaan als $k = k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ met $n \in \mathbb{Z}$. We vinden dus als eigenwaarden en eigenfuncties

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ en } X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Aangezien we voor n en $-n$ op een minteken na dezelfde oplossing krijgen, mogen we zonder verlies van algemeenheid de index $n \in \mathbb{N}$ nemen. Als $k = 0$ krijgen we de oplossing $X_0(x) = C_1 x + C_2$; echter in dat geval leren de randvoorwaarden ons dat $C_1 = C_2 = 0$ en krijgen we enkel de triviale nuloplossing.

Laat ons nu het resterende T–probleem beschouwen. Met elke oplossing X_n van het eigenwaardeprobleem voor X komt er een vergelijking overeen van de vorm

$$T^{\cdot\cdot} = -\omega_n^2 T$$

met $\omega_n = ck_n$. Deze vergelijking heeft als oplossing

$$T(t) = C_3 \cos(\omega_n t) + C_4 \sin(\omega_n t)$$

Uit de randvoorwaarde $T^{\cdot}(0) = 0$ volgt dan dat $C_4 = 0$, waardoor op een veelvoud na de functies

$$T_n(t) = \cos(\omega_n t)$$

oplossingen zijn van het tijdsprobleem.

Uitgaande van de Ansatz vinden we dus een parameterstel oplossingen

$$\psi_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

die voldoen aan de homogene rand–en beginvoorwaarden, maar niet aan de inhomogene beginvoorwaarde. Uit de lineariteit van de differentiaaloperatoren weten we dat een superpositie van dergelijke oplossingen nog steeds aan de homogene randvoorwaarden zal voldoen. Stel dus

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

dan moeten we op zoek naar de coëfficiënten $(c_n)_n$ zodanig dat ψ ook voldoet aan de inhomogene randvoorwaarde. We willen dus dat

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Uit de fourier sinusregel volgt dan dat

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2\psi_0}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{2\psi_0}{L}\cdot\frac{L}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} \\ &= -\frac{2\psi_0}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right) = \frac{2\psi_0}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n \in 4\mathbb{N}_0 \\ \frac{4\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n \in 4\mathbb{N}+2 \\ \frac{2\psi_0}{n\pi} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \frac{2\psi_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 2y' - 3y = 4t\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 5 \text{ en } y'(0) = -3$$

$z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0) + 2(zY(z) - y(0)) - 3Y(z) = 4e^{-z}$
$\Rightarrow z^2 Y(z) - 5z + 3 + 2(zY(z) - 5) - 3Y(z) = 4e^{-z}$
$\Rightarrow \left(z^2 + 2z - 3\right)Y(z) = 5z - 3 + 10 + 4e^{-z}$
$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{5z+7}{(z+3)(z-1)} + \dfrac{4e^{-z}}{(z+3)(z-1)}$

- $\dfrac{5z+7}{(z+3)(z-1)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+3} \Rightarrow \begin{cases} A = \left.\dfrac{5z+7}{z+3}\right|_{z=1} = 3 \\ B = \left.\dfrac{5z+7}{z-1}\right|_{z=-3} = 2 \end{cases}$

  $\Rightarrow \dfrac{5z+7}{(z+3)(z-1)} = \dfrac{3}{z-1} + \dfrac{2}{z+3}$

- $\dfrac{4}{(z+3)(z-1)} = \dfrac{C}{z-1} + \dfrac{D}{z+3} \Rightarrow \begin{cases} C = \left.\dfrac{4}{z+3}\right|_{z=1} = 1 \\ D = \left.\dfrac{4}{z-1}\right|_{z=-3} = -1 \end{cases}$

  $\Rightarrow \dfrac{4}{(z+3)(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+3}$

$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{3}{z-1} + \dfrac{2}{z+3} + \left(\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z+3}\right) e^{-z}$
$\Rightarrow y(t) = 3e^{t} + 2e^{-3t} + H(t-1)\left(e^{t-1} - e^{3-3t}\right)$
Feedback: de Laplacetransformatie van een produkt is *niet* het produkt van de Laplacetransformaties; de Laplacetransformatie van $4t\delta_1(t)$ is dus *niet* $\dfrac{4e^{-z}}{z^2}$ maar wel $-4\dfrac{d}{dz}\left(e^{-z}\right) = 4e^{-z}$

7. Los de volgende differentievergelijking op:

$$y(n+2) + 2y(n+1) - 15y(n) = 16 \cdot 3^{n+1} \text{ met } y(0) = 4 \text{ en } y(1) = 2$$

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{3, -5\}$
$\Rightarrow y_c(n) = c_1 3^n + c_2(-5)^n$
Annihilator $N(E) = E - 3$
Hyperannihilator: $p(E)\,N(E) = (E-3)^2(E+5)$
$\Rightarrow y_{nh}(n) = a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3(-5)^n$
$\Rightarrow y_{nh}(n) = a_2 n 3^n$
Eis: $a_2(n+2)\,3^{n+2} + 2a_2(n+1)\,3^{n+1} - 15a_2 n 3^n = 24 \cdot 3^n a_2 \equiv 48 \cdot 3^n \Rightarrow a_2 = 2$
$\Rightarrow 24a_2 = 48 \Rightarrow a_2 = 2$
$\Rightarrow y(n) = c_1 3^n + c_2(-5)^n + 2n3^n$
Eis: $\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 4 \\ y(1) = 3c_1 - 5c_2 + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$
$\Rightarrow y(n) = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot (-5)^n + 2n \cdot 3^n$
Feedback: een verbazend aantal studenten is gewoon vergeten de beginvoorwaarde in te vullen!