Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 7, deel 1)

- De kinetische energie wordt gedefinieerd als
$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2.$$
- De arbeid W geleverd door een kracht $\vec{F}(\vec{r})$ op een deeltje dat over een pad van punt $\vec{r}_1$ naar punt $\vec{r}_2$ beweegt, is gegeven door
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$
Een andere manier om dit te schrijven is
$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{waarbij} \quad \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}.$$
- Het principe van arbeid en kinetische energie zegt
$$W = \Delta K = \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1) \quad \text{met} \quad t_2 > t_1.$$
- Geleverd vermogen is de afgeleide van de geleverde arbeid naar de tijd
$$P(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t') \cdot \vec{v}(t')\, \mathrm{d}t' = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 7, deel 2)

- Hoe reken je de integraal
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
uit?
- In het geval van een conservatieve kracht, speelt het pad geen rol en kan je het integratiepad zo makkelijk kiezen als je wil.
  - In het geval van een recht pad kan je (bijvoorbeeld) de x-as in deze richting kiezen en wordt de arbeid
  $$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\, \mathrm{d}x.$$
  - Een andere manier om de arbeid te berekenen is het pad op te splitsen in drie stukken die elk parallel is met één van de coördinaatassen, bijvoorbeeld
  $$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x, y_1, z_1)\, \mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} F_y(x_2, y, z_1)\, \mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2} F_z(x_2, y_2, z)\, \mathrm{d}z.$$
  Dit geval komt overeen door integreren langs de 3 ribbes van een balk met de punten $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ op tegenoverliggende hoekpunten.

Oefening 1: De rekken vullen (7.71)

Bij een bepaald model van boekenkast bevindt de onderste plank zich op $12cm$ boven de grond. De overige vier planken bevinden zich telkens $33cm$ hoger. Als een gemiddeld boek een hoogte heeft van $22cm$ en een massa heeft van $1,4kg$ en als een plank kan 28 boeken bevatten, hoeveel arbeid moet je dan verrichten om het boekenrek te vullen als alle boeken initieel plat op de grond liggen?

Je mag de boeken beschrijven alsof hun massa geconcentreerd zit in het midden van het boek.

Oefening 2: Een piano verhuizen (7.11)

Een piano van $380kg$ glijdt $3,9m$ naar beneden langs een helling van 27°. Hierbij heeft de piano een constante snelheid omdat een man probeert de piano tegen te houden. Deze man oefent een kracht uit parallel met de helling. Bepaal — wrijving negerend —

1. de grootte van de kracht uitgeoefend door de man,
2. de arbeid geleverd door de man op de piano,
3. de arbeid geleverd door de zwaartekracht,
4. de netto arbeid uitgeoefend op de piano.

Oefening 3: Een rotatie (7.47)

Een object beweegt langs de omtrek van een cirkel met straal R en ondervindt een kracht met een constante grootte. De kracht is ten alle tijden gericht zodat er een hoek van 30° is tussen de kracht en de raaklijn aan de cirkel. Bepaal hoeveel arbeid deze kracht uitoefent op het voorwerp wanneer dit laatste een halve cirkel beschrijft.

Oefening 4: Een vallende ketting (7.49)

Een ketting met lengte $3m$ werd op een horizontaal oppervlak gelegd. De ketting heeft een gewicht per eenheid van lengte van $18N/m$. Een deel van het touw, met lengte $2m$, bevindt zich op de tafel en ligt langs een rechte. Het overige gedeelte van de ketting hangt van het oppervlak af. Als de wrijving klein genoeg is, zal de ketting beginnen bewegen. Hoeveel arbeid is er uitgeoefend geweest op de ketting door de zwaartekracht van het ogenblik dat er nog $2m$ van de ketting op het oppervlak ligt tot op het ogenblik dat de volledige ketting van het oppervlak gegleden is?

Oefening 5: Een meteoriet (7.72)

Een meteoriet met massa $75kg$ stort neer op aarde en komt tot stilstand $5m$ onder het oppervlak van zachte modder. De kracht tussen de meteoriet en de modder is gegeven door $F(x) = (640N/m^3)x^3$, waar x de diepte in de modder is. Wat was de snelheid waarmee de meteoriet de modder raakte?

Hoewel niet vermeld in de opgave in het boek, moet je een veronderstelling maken over de hoek waaronder de meteoriet inslaat. Deze zal je oplossing beïnvloeden. De eenvoudigste aanname is dat de meteoriet loodrecht inslaat op het aardoppervlak.

Oplossingen

Oplossing 1

- De totale arbeid die moet worden uitgeoefend is de som van de arbeid voor elk boek afzonderlijk:

$$\sum_i \vec{F}_i \vec{d}_i = \sum_i mgd_i.$$

- De verplaatsingen zijn gegeven door de hoogte van het rek waar het boek op moet plus de $11cm$ dat het massamiddelpunt stijgt wanneer het boek wordt rechtgezet.
- De totale arbeid is daarom

$$\begin{aligned} W &= 28mg(0,23m + 0,56m + 0,89m + 1,22m + 1,55m) \\ &= 28 \cdot 1,4kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2}(0,23m + 0,56m + 0,89m + 1,22m + 1,55m) \\ &= 1711J. \end{aligned}$$

Oplossing 2.1

- Kies een coördinaatstelsel met de x-as horizontaal en positief in de richting van de dalende helling en met de y-as positief naar boven.
- De kracht uitgeoefend door de man moet de component van de gravitatiekracht langs de helling compenseren. Deze component heeft een grootte

$$F_{g,\parallel} = F_g \sin(27^\circ) = 380kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \sin(27^\circ) = 1692N.$$

De man oefent een kracht uit met dezelfde grootte maar tegengesteld gericht, dus

$$\vec{F}_{\text{man}} = 1692N[-\cos(27^\circ)\hat{\imath} + \sin(27^\circ)\hat{\jmath}].$$

Oplossing 2.2

- De arbeid geleverd door de man op de piano is gegeven door

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}_{\text{man}} \cdot \vec{d} \\ &= 1692N[-\cos(27^\circ)\hat{\imath} + \sin(27^\circ)\hat{\jmath}] \cdot 3,9m[\cos(27^\circ)\hat{\imath} - \sin(27^\circ)\hat{\jmath}] \\ &= -6600J. \end{aligned}$$

  Het minteken wijst er op dat de beweging tegengesteld gericht is aan de kracht uitgeoefend door de man.

- De arbeid geleverd door de zwaartekracht is

$$\begin{aligned} W_g &= \vec{F}_g \cdot \vec{d} \\ &= -mg\hat{\jmath} \cdot d[\cos(27^\circ)\hat{\imath} - \sin(27^\circ)\hat{\jmath}] \\ &= (-mgd)(-\sin(27^\circ)) \\ &= 6600J. \end{aligned}$$

Oplossing 2.3

- De netto arbeid is gegeven door

$$W_{\text{tot}} = \sum_i W_i = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \vec{d}\right) = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot \vec{d}.$$

Gebruikmakend van de tweede wet van Newton wordt dit

$$W_{\text{tot}} = m\vec{a} \cdot \vec{d} = m\vec{0} \cdot \vec{d} = 0.$$

Oplossing 3

- De arbeid geleverd op het voorwerp is gegeven door

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t = F\cos(30^\circ) \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t.$$

- De grootte van de snelheid zal in het algemeen afhangen van de tijd. Er is immers een component van de kracht $\vec{F}$ die parallel aan de snelheid werkt. Uit het gegeven — het voorwerp beweegt over een cirkelbaan — weet je niet dat de baansnelheid ook constant is. Je weet wel dat

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi R} \mathrm{d}\ell = \pi R.$$

- Dit invullen in de uitdrukking voor W levert je

$$W = \pi R F \cos(30^\circ).$$

Oplossing 4.1

- De arbeid uitgeoefend door de zwaartekracht op de ketting is gegeven door

$$W_g = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_g \cdot \vec{v}\, \mathrm{d}t.$$

- De kracht die door de zwaartekracht wordt uitgoefend op het hangende stuk ketting is gegeven door

$$F_g(\ell) = \mu g \ell$$

  waarbij ℓ de lengte van de ketting is die over de rand hangt en μ de massadichtheid van de ketting per lengte-eenheid.

- Een interessante truc om toe te passen is dat

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = v$$

  waarbij v de snelheid van de ketting is.

Oplossing 4.2

- De arbeid kan je nu berekenen door

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_g \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t \\
&= \mu g \int_{t_1}^{t_2} \ell(t) \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t \\
&= \mu g \int_{\ell(t_1)}^{\ell(t_2)} \ell\ \mathrm{d}\ell \\
&= \frac{1}{2}\mu g[\ell_2^2 - \ell_1^2] \\
&= \frac{1}{2} 1,83 \frac{kg}{m} 9,81 \frac{m}{s^2}[(3m)^2 - (1m)^2] \\
&= 72J.
\end{aligned}
$$

Oplossing 5.1

- Kies een coördinaatstelsel met de x-as positief naar boven.
- De snelheid van de meteoriet kan — onder andere — worden bepaald uit de kinetische energie als
$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}.$$
- De kinetische energie bij het inslaan op de modder is min de totale arbeid uitgeoefend op de meteoriet:
$$K(\text{inslaan}) = -W = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = -\int_0^d (-mg + F(x))(-\mathrm{d}x)$$
- Uitwerken van deze integraal levert
$$K = \int_0^d (-mg + F(x)) \, \mathrm{d}x = -mgd + \frac{160N}{m^3} d^4.$$

Oplossing 5.2

- Dit kan worden ingevuld in eerdere berekeningen en zo vinden we

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2K}{m}} \\
&= \sqrt{-2gd + 2\left(640\,\frac{N}{m^3}\right) m^{-1} d^4} \\
&= \sqrt{-2\cdot 9,81\,\frac{m}{s^2}(-5m) + \frac{2}{75\,kg}\left(160\,\frac{N}{m^3}\right)(-5m)^4} \\
&= 52\,\frac{m}{s}.
\end{aligned}
$$