Examenvragen hoofdstuk 10 van de laatste drie jaren

Werner Peeters

1. Gegeven $f(x,y) = \sqrt[3]{x+2y}$. Bereken $T_2(f,(4,2))(x,y)$

2. Bepaal de extreme waarde van de functie $f(x,y,z) = x^2yz + 1$ op de doorsnede van het vlak $z = 1$ met de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. (Als je dit goed doet, vind je 3 maxima en 3 minima)

3. Ga na of de volgende functie f in $\overline{0} = (0,0)$ continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is:
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Geef de vergelijking van de raaklijn aan de kromme, die de snijding is van het oppervlak $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2xy^3 - 1 = 0$ en het vlak $G(x,y,z) = x + y - z - 1 = 0$, en dit in het punt $(1,1,1)$.

5. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto \left(xy, x^2 + 2y^2, 4xy^2\right)$ en $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xy + yz^2$. Bereken $D(g \circ f)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.

6. Zoek de punten op de ellips $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ waarvoor het produkt $f(x,y) = xy$ minimaal of maximaal is.

7. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x,y,z) = x^2y - yz^3$ in het punt $\mathbf{a}(2,2,-1)$ in de richting $\mathbf{h}\left(1, \dfrac{1}{2}, 2\right)$

8. Zoek de kritieke punten van de functie $f(x,y) = -x^3 - x^2 + 2y^2 - 8y + 8$ en ga na of het minima, maxima of zadelpunten zijn.

9. Ga na of de functie
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{cases}$$
in $\overline{0} = (0,0)$ continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is:

10. Bereken het raakvlak aan het oppervlak $z^2 = 3x^4 - 2y^4$ in het punt $(1,1,1)$

11. Gegeven de functie $f(x,y) = x^3y + x + y$. Bereken het raakvlak aan zijn grafiek in het punt $(1,1)$

12. Bepaal de punten van het oppervlak $x^2 + y^2 + 2y - 2z^2 = 0$ waarvoor de afstand tot de Y–as minimaal is.

13. Ga na of de volgende functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\overline{0} = (0,0)$ continu, partieel afleidbaar,afleidbaar, differentieerbaar is:
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6+y^4} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14. De oppervlakken $y^3 = x^2 + z^2$ en $(x+y)\,z - 2z^2 = 0$ gaan beide door het punt $(2,2,2)$ en snijden elkaar in een kromme. Bereken aan die kromme de raaklijn.

15. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f\,(x,y,z) = \sqrt{1+x+y+z}$ in het punt $(0,0,0)$ in de richting $(2,3,-6)$

16. Zoek de lokale extrema van $f\,(x,y) = -2x^2 + 8xy + 8x - y^4 - 16y - 8$

Oplossingen:

1. Gegeven $f(x,y) = \sqrt[3]{x+2y}$. Bereken $T_2(f,(4,2))(x,y)$

   $f(4,2) = 2$

   $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}(x+2y)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4,2) = \frac{1}{12}$

   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}(x+2y)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4,2) = \frac{1}{6}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2}{9}(x+2y)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,2) = -\frac{1}{144}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4}{9}(x+2y)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,2) = -\frac{1}{72}$

   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-8}{9}(x+2y)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,2) = -\frac{1}{36}$

   $\Rightarrow T_3(f,(4,2))(x,y) = 2+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{12}(x-4)+\frac{1}{6}(y-2)\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{144}(x-4)^2-\frac{2}{72}(x-4)(y-2)-\frac{1}{36}(y-2)^2\right)$

   $= 2+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}y-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2!}\left(\left(-\frac{1}{144}x^2+\frac{1}{18}x-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{18}x+\frac{1}{9}y-\frac{1}{36}xy-\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{1}{36}y^2+\frac{1}{9}y-\frac{1}{9}\right)\right)$

   $= \frac{10}{9}+\frac{5}{36}x+\frac{5}{18}y-\frac{1}{288}x^2-\frac{1}{72}xy-\frac{1}{72}y^2$

2. Bepaal de extreme waarde van de functie $f(x,y,z) = x^2yz+1$ op de doorsnede van het vlak $z=1$ met de bol $x^2+y^2+z^2 = 10$. (Als je dit goed doet, vind je 3 maxima en 3 minima)

   Eis: $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$

   $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2yz+1+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)+\mu(z-1)$

   $$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xyz+2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2z+2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = x^2y+2\lambda z+\mu = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-10 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = z-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xyz+2\lambda x = 0 \\ x^2z+2\lambda y = 0 \\ x^2y+2\lambda z+\mu = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 10 \\ z = 1 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} x(y+\lambda) = 0 \\ x^2+2\lambda y = 0 \\ x^2y+2\lambda+\mu = 0 \\ x^2+y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$$

   - Als $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda+\mu = 0 \\ y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z,\lambda,\mu) = (0,3,1,0,0)$ of $(0,-3,1,0,0)$

   - Als $\lambda = -y \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ x^2-2y^2 = 0 \\ x^2y-2y+\mu = 0 \\ x^2+y^2 = 9 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ 3x^2 = 18 \\ \mu = -x^2y + 2y \\ y^2 = 9 - x^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ x = \pm\sqrt{6} \\ \mu = -x^2y + 2y \\ y = \pm\sqrt{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, \lambda, \mu) = \left(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3}\right) \text{ of } \left(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right) \text{ of}$$

$\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}, -4\sqrt{3}\right)$ of $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right)$

- In tegenwijzerzin:
  - $f\left(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1\right) = 6\sqrt{3} + 1$ maximum
  - $f(0, 3, 1) = 1$ minimum
  - $f\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1\right) = 6\sqrt{3} + 1$ maximum
  - $f\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1\right) = -6\sqrt{3} + 1$ mininum
  - $f(0, -3, 1) = 1$ maximum
  - $f\left(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1\right) = -6\sqrt{3} + 1$ minimum

    Alternatief: Als men al bij voorbaat de z elimineert, dan krijgen we:
    Bepaal de extreme waarde van de functie $f(x, y) = x^2y + 1$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 9$
    $f(x, y) = x^2y + 1$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 9$
    Eis: rg $\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0)$
    $F(x, y, \lambda) = x^2y + 1 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 9\right)$

    $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

    $$\Rightarrow \begin{cases} 2x(y + \lambda) = 0 \\ x^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

  - Als $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda y = 0 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow (x, y, \lambda) = (0, 3, 0)$ of $(0, -3, 0)$
  - Als $\lambda = -y \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ x^2 - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ 3x^2 = 18 \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases}$

    $$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ x = \pm\sqrt{6} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (x, y, \lambda) = \left(\sqrt{6}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) \text{ of } \left(\sqrt{6}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \text{ of } \left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) \text{ of}$$

    $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$
  - In tegenwijzerzin:
    * $f\left(\sqrt{6}, \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3} + 1$ maximum
    * $f(0, 3) = 1$ minimum
    * $f\left(-\sqrt{6}, \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3} + 1$ maximum
    * $f\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3} + 1$ mininum
    * $f(0, -3) = 1$ maximum
    * $f\left(\sqrt{6}, -\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3} + 1$ minimum

3. Ga na of de volgende functie f in $\overline{0} = (0,0)$ continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - x^2y^3}{x^4 + y^6} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Stel $(x,y) = \left(k^3, k^2\right)$
  $\Rightarrow \lim\limits_{k\to 0} f(x,y)\,|_{(x,y)=(k^3,k^2)} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{k^9k^4 - k^6k^6}{2k^{12}} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{k^{13} - k^{12}}{2k^{12}} = -\dfrac{1}{2} \neq 0$
  $\Rightarrow f$ is niet continu in $(0,0)$
- $D_1 f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda,0) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{0}{\lambda^4\lambda} = 0$
  $D_2 f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(0,\lambda) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{0}{\lambda^6\lambda} = 0$
  $\Rightarrow f$ is partieel afleidbaar in $(0,0)$
- Stel $\overline{h} = (h_1, h_2)\,, h_1 \neq 0 \neq h_2$
  $Df\left(\overline{0}, \overline{h}\right) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0,0)}{\lambda}$
  $= \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\lambda^5 (h_1 - h_2)\left(h_1^2h_2^2\right)}{\lambda^5\left(h_1^4 + \lambda^2 h_2^6\right)} = \dfrac{(h_1 - h_2)\,h_2^2}{h_1^2}$
  $\Rightarrow f$ is afleidbaar in $(0,0)$.
- f is niet differentieerbaar in $(0,0)$, want f is niet continu in $(0,0)$

4. Geef de vergelijking van de raaklijn aan de kromme, die de snijding is van het oppervlak $F(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2xy^3 - 1 = 0$ en het vlak $G(x,y,z) = x + y - z - 1 = 0$, en dit in het punt $(1,1,1)$.

$$\nabla(F,G)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2y^3 & 4y^3 - 6xy^2 & 4z^3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla(F,G)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{CT} (-2,6,4) \sim (-1,3,2)$$

$$\Rightarrow L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto \left(xy, x^2 + 2y^2, 4xy^2\right)$ en $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto xy + yz^2$. Bereken $D(g \circ f)$ zonder $g \circ f$ te bepalen.

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 4y \\ 4y^2 & 8xy \end{pmatrix}$$

$Dg(a,b) = \begin{pmatrix} b & a + c^2 & 2bc \end{pmatrix}$ met $(a,b,c) = \left(xy, x^2 + 2y^2, 4xy^2\right)$

$$\Rightarrow Dg(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 & xy + \left(4xy^2\right)^2 & 2\left(x^2 + 2y^2\right)\left(4xy^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 & 16x^2y^4 + xy & 8xy^2\left(x^2 + 2y^2\right) \end{pmatrix}$$

$$D(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 & 16x^2y^4 + xy & 8xy^2\left(x^2 + 2y^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 4y \\ 4y^2 & 8xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x\left(16x^2y^4 + xy\right) + y\left(x^2 + 2y^2\right) + 32xy^4\left(x^2 + 2y^2\right) & 4y\left(16x^2y^4 + xy\right) + x\left(x^2 + 2y^2\right) + 64x^2y^3\left(x^2 + 2y^2\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 64x^3y^4 + 3x^2y + 64xy^6 + 2y^3 & 64x^4y^3 + x^3 + 192x^2y^5 + 6xy^2 \end{pmatrix}$$

6. Zoek de punten op de ellips $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ waarvoor het produkt $f(x,y) = xy$ minimaal of maximaal is.

Definieer $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda \dfrac{x}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda \dfrac{2y}{9} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2y}{x} = \frac{-9x}{2y} \Rightarrow -4y^2 = -9x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{9}{4}x^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ en } y^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \left\{\left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$f\left(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$f\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -3 \Rightarrow \text{minimum}$$

7. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x, y, z) = x^2y - yz^3$ in het punt $\mathbf{a}(2, 2, -1)$ in de richting $\mathbf{h}\left(1, \dfrac{1}{2}, 2\right)$

$$f(2, 2, -1) = 10$$

$$Df(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f\left(2 + \lambda, 2 + \frac{1}{2}\lambda, -1 + 2\lambda\right) - f(2, 2, -1)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{(\lambda + 2)^2 \left(\frac{1}{2}\lambda + 2\right) - (2\lambda - 1)^3 \left(\frac{1}{2}\lambda + 2\right) - 10}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{1}{2}\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 8 - 4\lambda^4 - 10\lambda^3 + 21\lambda^2 - \frac{23}{2}\lambda + 2 - 10}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{-4\lambda^4 - \frac{19}{2}\lambda^3 + 25\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left(-4\lambda^3 - \frac{19}{2}\lambda^2 + 25\lambda - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

8. Zoek de kritieke punten van de functie $f(x, y) = -x^3 - x^2 + 2y^2 - 8y + 8$ en ga na of het minima, maxima of zadelpunten zijn.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x(3x + 2) = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \left\{(0, 2), \left(-\frac{2}{3}, 2\right)\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x - 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow H(x,y) = -24x - 8$

- $H\left(-\frac{2}{3},2\right) = 8 > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{2}{3},2\right) = 2 > 0 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3},2\right)$ is een minimum
- $H(0,2) = -8 < 0 \Rightarrow (0,2)$ is een zadelpunt

9. Ga na of de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{cases}$$

in $\overline{0} = (0,0)$ continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is:

- $\forall \varepsilon > 0$, stel $\delta = 2\varepsilon$ en $|x| \vee |y| < \delta$. Vermits $2x^2y^2 \leq x^4 + y^4$, is
$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^2y^2}{2x^2y^2}\right| |x| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$
$\Rightarrow f$ is continu in $(0,0)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda,0) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0}{\lambda^5} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0,\lambda) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0}{\lambda^5} = 0$
$\Rightarrow f$ is partieel afleidbaar in $(0,0)$
- Stel $\overline{h} = (h_1, h_2)$, $h_1 \neq 0 \neq h_2$ en stel zonder verlies van algemeenheid dat $\left\|\overline{h}\right\| = 1$
$Df\left(\overline{0},\overline{h}\right) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0,0)}{\lambda}$
$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda^5\left(h_1^3h_2^2\right)}{\lambda\cdot\lambda^4\left(h_1^4+h_2^4\right)} = \frac{h_1^3h_2^2}{h_1^4+h_2^4}$
- f is niet differentieerbaar in $(0,0)$. Als f namelijk wél differentieerbaar was, dan was
$$Df\left(\overline{0}\right)\overline{h} = Df\left(\overline{0},\overline{h}\right)$$
Echter, $Df\left(\overline{0}\right)\overline{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$
$Df\left(\overline{0},\overline{h}\right) = \frac{h_1^3h_2^2}{h_1^4+h_2^4}$
f is dus niet differentieerbaar in $(0,0)$.

10. Bereken het raakvlak aan het oppervlak $z^2 = 3x^4 - 2y^4$ in het punt $(1,1,1)$
Stel $F(x,y,z) = 3x^4 - 2y^4 - z^2$
$\Rightarrow \nabla F(x,y,z) = \left(12x^3, -8y^3, -2z\right)$
$\Rightarrow \nabla F(1,1,1) = (12,-8,-2) \sim (6,-4,-1)$
$\Rightarrow \alpha : 6(x-1) - 4(y-1) - 1(z-1) = 0$
$\Rightarrow \alpha : 6x - 3y - z = 1$

11. Gegeven de functie $f(x,y) = x^3y + x + y$. Bereken het raakvlak aan zijn grafiek in het punt $(1,1)$
$f(1,1) = 3$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3yx^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 4$
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 2$
$\Rightarrow z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1)$
$\Rightarrow z = 4x + 2y - 3$

12. Bepaal de punten van het oppervlak $x^2+y^2+2y-2z^2=0$ waarvoor de afstand tot de Y–as minimaal is.

Stel $F(x,y,z,\lambda)=x^2+z^2+\lambda\left(x^2+y^2+2y-2z^2\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda(2y+2)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-4\lambda z=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+z^2-y^2+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1+\lambda)x=0 \\ 2\lambda(y+1)=0 \\ 2z(1-2\lambda)=0 \\ x^2+y^2+2y-2z^2=0 \end{cases}$$

- Als $\lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} 2y+2=0 \\ 2z=0 \\ x^2+y^2+2y-2z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)\in\{(1,-1,0),(-1,-1,0)\}$
- Als $\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2z=0 \\ x^2+y^2+2y-2z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y^2+2y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,0),(0,-2,0)\}$
- Als $\lambda=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y+2=0 \\ x^2+y^2+2y-2z^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ 2z^2+1=0 \end{cases}$ heeft geen reële oplossingen
- Stel $f(x,y,z)=x^2+z^2 \Rightarrow \begin{cases} f(1,-1,0)=1 \\ f(-1,-1,0)=1 \\ f(0,0,0)=0 \\ f(0,-2,0)=0 \end{cases}$

  $(1,-1,0)$ en $(-1,-1,0)$ zijn dus maxima, $(0,0,0)$ en $(0,-2,0)$ zijn minima.

13. Ga na of de volgende functie $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ in $\overline{0}=(0,0)$ continu, partieel afleidbaar,afleidbaar, differentieerbaar is:

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^6+y^4} & \text{als } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,|_{y=x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{x^6+x^4}=0$

  $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,|_{y=x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{x^6+x^8}=1$

  $\Rightarrow$ De functie is niet continu in $(0,0)$
- $D_1f(0,0)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{0}{\lambda\cdot\lambda^6}=0$

  $D_2f(0,0)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(0,\lambda)-f(0,0)}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{0}{\lambda\cdot\lambda^4}=0$

  $\Rightarrow f$ is partieel afleidbaar in $(0,0)$
- Stel $\overline{h}=(h_1,h_2), h_1\neq 0\neq h_2$

  $Df\left(\overline{0},\overline{h}\right)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{\lambda^5h_1^4h_2}{\lambda^5\left(\lambda^2h_1^6+h_2^4\right)}=\lim\limits_{\lambda\to 0}\dfrac{h_1^4h_2}{\lambda^2h_1^6+h_2^4}=\dfrac{h_1^4}{h_2^3}$

  $\Rightarrow f$ is afleidbaar in $(0,0)$.

- $\Rightarrow f$ is niet continu dus niet differentieerbaar in $(0,0)$.

14. De oppervlakken $y^3 = x^2 + z^2$ en $(x+y)z - 2z^2 = 0$ gaan beide door het punt $(2,2,2)$ en snijden elkaar in een kromme. Bereken aan die kromme de raaklijn.
$\nabla(F,G) = \begin{pmatrix} 2x & -3y^2 & 2z \\ z & z & x+y-4z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla(F,G)(2,2,2) = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ Als de kromme geparametriseerd wordt als $(f(z), g(z), z)$, dan is

$$\frac{df}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{df}{dz} = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

15. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x,y,z) = \sqrt{1+x+y+z}$ in het punt $(0,0,0)$ in de richting $(2,3,-6)$
$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(2\lambda, 3\lambda, -6\lambda) - f(0,0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\sqrt{1+2\lambda+3\lambda-6\lambda}-1}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\sqrt{1-\lambda}-1}{\lambda} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=} \lim_{\lambda\to 0} -\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} = -\frac{1}{2}$

16. Zoek de lokale extrema van $f(x,y) = -2x^2 + 8xy + 8x - y^4 - 16y - 8$
$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8y - 4x + 8 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 + 8x - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x = \frac{1}{2}y^3 + 2 \end{cases} : x(y) = 2y + 2$
$\Rightarrow 2y + 2 = \frac{1}{2}y^3 + 2 \Rightarrow y \in \{-2, 0, 2\} \Rightarrow (x,y) \in \{(-2,-2), (2,0), (6,2)\}$
$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 \end{cases}$
$\Rightarrow H(x,y) = 48y^2 - 64$

   - $H(-2,-2) = 128 > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0 \Rightarrow (-2,-2)$ is een maximum.
   - $H(2,0) = -64 < 0 \Rightarrow (2,0)$ is een zadelpunt
   - $H(6,2) = 128 > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0 \Rightarrow (6,2)$ is een maximum.