Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 24)

- De capaciteit van een geleider is de verhouding van de lading die bij een gegeven potentiaalverschil kan worden aangebracht en dat potentiaalverschil
$$C = \frac{Q}{V}.$$
- De energiedichtheid van een elektrisch veld in vacuüm is gegeven door
$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$$
zodat de totale energie in een capaciteit is gegeven door
$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2.$$
- De relatieve permittiviteit κ van een materiaal is gedefinieerd door
$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$
- De grootte van het elektrisch veld tussen twee parallele platen is gegeven door
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Enkele capaciteiten

De capaciteit van

- een geïsoleerde sferische geleider met straal R

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

- een condensator bestaande uit twee parallele platen met oppervlakte A gescheiden door een afstand d

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

- twee parallele cilinders met stralen $R_2 > R_1$ en lengte L

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Merk op dat wanneer er diëlectrica aanwezig zijn, $\varepsilon_0 \to \varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ en dus $C \to \kappa C$.

Oefening 1: Energie opgeslagen in een cond. (24.20)

De ladingen op de platen van een $10\mu F$-condensator zijn $\pm 4\mu C$.

1. Hoeveel energie is er opgeslagen in de condensator?
2. Hoeveel wordt dit als de ladingen worden verlaagd naar $\pm 2\mu C$?

Oefening 2: Geladen bol (24.24)

Een metalen bol met straal $10cm$ draagt een lading van $Q = +5nC$. Rond deze bol bevindt zich een metalen sferische schil met lading $-Q$ en straal $10,5cm$.

1. Schat de energie af die is opgeslagen tussen de twee boloppervlakken. Beschouw hierbij de boloppervlakken als vlakke platen.
2. Bereken het potentiaalverschil tussen de twee boloppervlakken en gebruik dit resultaat om de capaciteit te meten.
3. Gebruik dit resultaat om opnieuw de energie opgeslagen tussen de oppervlakken te berekenen en vergelijk dit antwoord met het eerste deel van deze vraag.

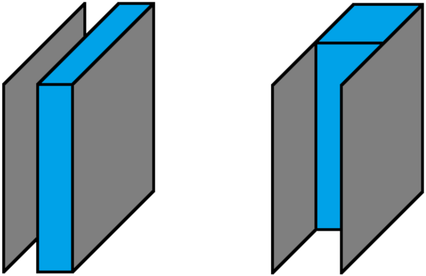
Oefening 3: Condensator met diëlektricum (Vb 24–10)

Een condensator bestaat uit twee vlakke platen met oppervlakte $A = 10cm \times 10cm$ die op een afstand $d = 4mm$ uit elkaar staan. Tussen de platen bevindt zich lucht. Een diëlektricum met $\kappa = 2$ wordt vervolgens tussen de platen gebracht. Dit diëlektricum heeft afmetingen $10cm \times 10cm \times 4mm$.

1. Bereken de capaciteit van de condensator zonder diëlektricum.
2. Bereken de capaciteit van de condensator met diëlektricum.
3. Bereken de capaciteit van de condensator indien het diëlektricum een dikte van slechts $3mm$ had.

Oefening 4: Condensatoren met diëlektrica (24.10)

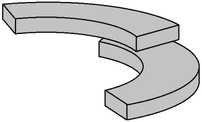
Beschouw twee condensatoren bestaand uit platen met afmetingen $a \times a$ die op een afstand d van elkaar liggen. In één van de condensatoren wordt een diëlektricum geplaatst met afmetingen $a \times a \times (d/2)$. In de andere condensator wordt een ander plaatje uit hetzelfde materiaal met afmetingen $a \times (a/2) \times d$ aangebracht. Welk van beide condensatoren heeft nu de grootste capaciteit?



Figuur: De beide condensatoren met hun diëlektricum.

Oefening 5: Capacitieve goniometer (24.46)

Een capacitieve goniometer is een toestel bestaande uit twee identieke platen in de vorm van een (verdikte) kwart cirkelboog met binnenste stralen R_1 en buitenste stralen R_2. Beide platen hebben dezelfde vorm (en dus ook oppervlakte) en zijn gescheiden door een afstand d. Wanneer op de platen een lading $\pm Q$ wordt aangebracht, kan de hoek $\Delta\vartheta$ waarover deze ten opzichte van elkaar worden geroteerd worden gemeten aan de hand van de capaciteit. Zoek een uitdrukking voor de capaciteit C als functie van R_1, R_2, d en $\Delta\vartheta$.



Figuur: Schets van de goniometer.

Oefening 6: Kracht op condensatorplaten ♠

Toon aan dat de kracht die de positief geladen uitoefent op de negatief geladen plaat

$$\vec{F} = \frac{1}{2}(-Q)\vec{E}$$

waarbij $-Q$ de lading op de negatief geladen plaat is en $\vec{E}$ het elektrisch veld tussen de platen.

Hint: Deze oefening is perfect op te lossen met wat je tot nu toe weet over elektromagnetisme maar het zou kunnen dat je verder moet nadenken dan wat er in het hoofdstuk over condensatoren staat.

Oefening 7: Condensator en een diëlekt. vloeistof ♠

Een condensator bestaande uit twee parallele vierkante platen met zijden L, gescheiden door een afstand d wordt geladen met een lading $\pm Q$ en wordt vlak boven een bad met een vloeistof geplaatst zodat de onderste randen van de condensator het vloeistofoppervlak net raken. Deze vloeistof heeft een massadichtheid ρ en een relatieve permittiviteit κ. Leid een uitdrukking af waaruit je kan bepalen hoe hoog de vloeistof zal stijgen tussen de condensatorplaten.

Je mag veronderstellen dat het bad met vloeistof oneindig groot is zodanig dat het vloeistofniveau buiten de condensator niet zakt. Houd er rekening mee dat het potentiaalverschil tussen de platen zal veranderen wanneer de vloeistof de condensator binnendringt.

Oplossingen

Oefening 1: Oplossing

- De energie in de condensator is gegeven door

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(4\mu C)^2}{10\mu F} \\ &= 0,8\mu J. \end{aligned}$$

- Wanneer de ladingen gehalveerd worden, zal de totale energie gedeeld worden door 4, zodat

$$U = 0,2\mu J.$$

Oefening 2: Oplossing (1)

- De energie opgeslagen tussen de platen van de condensator is

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2(R_b - R_a)}{\varepsilon_0(4\pi R^2)} \\
&= \frac{(5nC)^2 \cdot (0,105m - 0,1m)}{2 \cdot 8,85\frac{pF}{m} \cdot (4\pi \cdot (0,1025m)^2)} \\
&= 53,5nJ.
\end{aligned}
$$

De R^2 in de derde regel is een beetje arbitrair, al verwacht je dat $R_a < R < R_b$. Deze ambiguïteit heb je ook als je A rechtstreeks wil invullen. Je kan dan namelijk de oppervlakte van de binnenste bolschil kiezen voor de oppervlakte van de condensatorplaten of de oppervlakte van de buitenste bolschil of iets tussenin.

Oefening 2: Oplossing (2)

- De twee concentrische bolschillen hebben we reeds behandeld in een vorig hoofdstuk. Daar vonden we voor het potentiaalverschil

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right).$$

- De capaciteit van de bolschillen is daarom gelijk aan

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_b R_a}{R_b - R_a} \\ &= 4\pi \cdot 8,85 \frac{pF}{m} \frac{0,105m \cdot 0,1m}{0,105m - 0,1m} \\ &= 23,4nF. \end{aligned}$$

Oefening 2: Oplossing (3)

- De energie opgeslagen in de condensator is bijgevolg gegeven door

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2(R_b - R_a)}{4\pi\varepsilon_0 R_b R_a} \\
&= \frac{(5nC)^2(0,105m - 0,1m)}{2 \cdot 4\pi \cdot 8,85\frac{pF}{m} \cdot 0,105m \cdot 0,1m} \\
&= 53,5nJ.
\end{aligned}
$$

Dit is (enkel rekening houdend met de eerste 3 beduidende cijfers) hetzelfde resultaat als eerder werd gevonden. Deze oefening leert ons dat we voor de oppervlakte van de vlakke condensatorplaten $A = 4\pi R_a R_b$ hadden moeten kiezen om exact hetzelfde resultaat te bekomen.

Oefening 3: Oplossing (1)

- De capaciteit van de condensator zonder diëlectricum is gegeven door

$$
\begin{aligned}
C &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
&= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \frac{(0,1m)^2}{0,004m} \\
&= 22pF.
\end{aligned}
$$

- Met diëlectricum wordt ε_0 vervangen door $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$, zodat

$$
\begin{aligned}
C' &= \varepsilon \frac{A}{d} \\
&= \varepsilon_0 \kappa \frac{A}{d} \\
&= \kappa C \\
&= 44pF.
\end{aligned}
$$

Oefening 3: Oplossing (2)

- Wanneer het diëlectricum slechts $3mm$ dik is, zal er nog $1mm$ vacuum aanwezig zijn.
- De capaciteit is de verhouding tussen de aangebrachte lading Q en het potentiaalverschil dat hierdoor wordt veroorzaakt.
- Het totale potentiaalverschil V zal worden verdeeld over het vacuum en het diëlectricum:

$$V = V_v + V_d.$$

- Aangezien in zowel het vacuum als het diëlectricum het elektrisch veld constant is, geldt door de definitie van een potentiaalverschil

$$V = V_v + V_d = \left(\frac{1}{4}d\right) E_v + \left(\frac{3}{4}d\right) E_d.$$

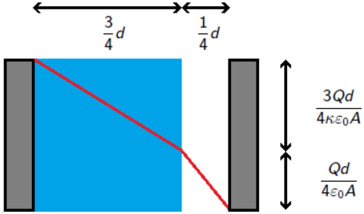
- Het elektrisch veld in het vacuum heeft dezelfde sterkte als het elektrisch veld in een identieke condensator zonder diëlectricum:

$$E_v = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

- In het diëlectricuum zal (de grootte van) het elektrisch veld een waarde hebben die een factor κ kleiner is, immers

$$E_d = \frac{Q}{\varepsilon A} = \frac{Q}{\kappa \varepsilon_0 A} = \frac{E_v}{\kappa}.$$

Oefening 3: Schets



Figuur: De potentiaal als functie van de plaats in de condensator (rode lijn). Het blauwe gebied stelt het diëlektricum voor.

Oefening 3: Oplossing (3)

- Deze uitdrukkingen voor E kunnen worden ingevuld in V en dus

$$V = V_v + V_d = \frac{Qd}{4\varepsilon_0 A} + \frac{3Qd}{4\varepsilon A} = \frac{Qd}{4\varepsilon_0 A} + \frac{3Qd}{4\kappa\varepsilon_0 A} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\frac{\kappa+3}{4\kappa}.$$

- De capaciteit is de verhouding tussen de lading op de platen en het potentiaalverschil tussen die platen, dus

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\frac{\kappa+3}{4\kappa}} \\ &= \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{4\kappa}{\kappa+3} \\ &= 8,85\frac{pF}{m}\frac{(0,1m)^2}{0,004m}\frac{4\cdot 2}{2+3} \\ &= 35pF. \end{aligned}$$

Oefening 4: Oplossing (1)

- In het eerste geval is de oplossing analoog aan de vorige oefening. De condensator kan worden geschouwd als twee condensatoren met elk een lading Q in serie en het spanningsverschil wordt dus verdeeld over beiden. Zo volgt

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Q}{V} \\
&= \frac{Q}{V_v + V_d} \\
&= \frac{Q}{E_v \frac{d}{2} + E_d \frac{d}{2}} \\
&= \frac{Q}{\frac{Qd}{2\varepsilon_0 A} + \frac{Qd}{2\kappa\varepsilon_0 A}} \\
&= \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{-1} \\
&= \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{2\kappa}{\kappa + 1}\right)
\end{aligned}$$

Oefening 4: Oplossing (2)

- In het tweede geval kunnen de stukken condensator met en zonder diëlectricum worden gezien als condensatoren in parallel. De spanning over de twee delen van de condensator is dus dezelfde. (Anders zou er stroom lopen van de ene naar de andere kant tot de spanning wel dezelfde was). De lading Q wordt verdeeld over beide delen.
- De capaciteit van elk is dan de som van de capaciteiten, immers

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2,$$

  waarbij Q_i de lading is die zich bevindt op deel i van de condensatorplaten.
- Dit kan worden uitgewerkt als

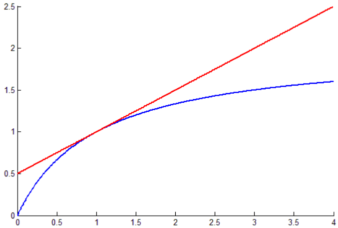
$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} + \kappa\varepsilon_0 \frac{A_2}{d} \\ &= \varepsilon_0 \frac{A}{2d} + \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{2d} \\ &= \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{1+\kappa}{2}\right). \end{aligned}$$

Oefening 4: Oplossing (3)

- De vraag die nog rest is nu welke grootheid het grootst is, namelijk

$$\left(\frac{2\kappa}{\kappa+1}\right) = 2 - \frac{2}{\kappa+1} \quad \text{of} \quad \frac{\kappa+1}{2}$$

- Voor $\kappa \neq 1$ is de tweede waarde, bekomen met de parallelle condensatoren, groter.



Figuur: De relatieve capaciteit (ten opzichte van een identieke condensator zonder diëlectricum) als functie van de relatieve permittiviteit van het diëlectricum.

Oefening 5: Oplossing

- De twee platen zullen een condensator vormen, waarvan de capaciteit is gegeven door
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$
met A de oppervlakte waar de platen overlappen.
- De oppervlakte tussen de twee platen is gegeven door
$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \Delta\vartheta\right) \cdot \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2)$$
- Dit betekent
$$\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon_0 A}{d} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2d}\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\vartheta\right)(R_2^2 - R_1^2). \end{aligned}$$

Oefening 6: Oplossing

- Noem Q de lading op de positief geladen plaat.
- De potentiële energie opgeslagen in een condensator is

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{A\varepsilon_0} = \frac{1}{2}Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{1}{2}QEd.$$

Je ziet aan deze uitdrukking dat we reeds halverwege het bewijs zijn.

- Dit betekent dat als de negatief geladen plaat een afstand $\mathrm{d}x$ verder van de andere wordt verplaatst (maar de lading op de platen constant wordt gehouden) de potentiële energie opgeslagen in de condensator verhoogt met

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}QE\mathrm{d}x.$$

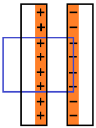
- Je weet ook (zie hoofdstuk 23 of vorig jaar)

$$\mathrm{d}U = -F_x\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}(-Q)E$$

waaruit het gevraagde volgt aangezien $\vec{F}$ en $\vec{E}$ parallel liggen met de x-as.

Oefening 6: Alternatieve oplossing

- Een andere manier om dit op te lossen is te veronderstellen dat de ladingen op een condensatorplaat niet perfect op het oppervlak zitten maar homogeen verdeeld zijn in een dunne laag. In werkelijkheid zal dit ook (bij benadering) het geval zijn. Het elektrisch veld zal dan lineair afnemen in deze dunne laag. Dit kan je bewijzen met de wet van Gauss met het gebied aangeduid in de afbeelding. Je kan dan opmerken dat de ladingen in de plaat gemiddeld slechts de helft van het elektrisch veld tussen de platen voelen, waaruit het gevraagde eveneens volgt. Wiskundig komt deze laatste stap overeen met het toepassen van de middelwaardestelling uit de integraalrekening.



Oefening 7: Oplossing (1)

- Eén manier om dit probleem op te lossen is door de totale energie te minimaliseren.
- De totale energie is de elektrostatische energie opgeslagen in de condensator plus de potentiële energie van de vloeistof in de condensator.
- Kies de z-as naar boven, de x-as loodrecht op de condensatorplaten en de y-as zodanig dat het geheel een rechtshandig assenstelsel vormt.
- Stel dat de vloeistof een hoogte h bereikt ten opzichte van het oude niveau. Dan is de totale energie van de vloeistof in de condensator

$$U_{\mathrm{v}} = \int_V \rho(x, y, z) g z \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = g \int_0^d \mathrm{d}x \int_0^L \mathrm{d}y \int_0^h \rho(z) z \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \rho g L d h^2$$

met $V = L^2 d$ het volume tussen de condensatorplaten.

Oefening 7: Oplossing (2)

- De precieze elektrostatische energie hangt eveneens af van de hoogte h. Je kan de condensator met een "droog" en een "nat" deel beschouwen als twee condensatoren (en dus capaciteiten) dewelke in parallel zijn geschakeld. De equivalente capaciteit is gegeven door

$$C_{\mathrm{eq}} = C_{\mathrm{n}} + C_{\mathrm{d}} = \frac{\kappa\varepsilon L h}{d} + \frac{\varepsilon_0 L(L-h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L}{d}((\kappa-1)h + L).$$

  Dit betekent dat de opgeslagen elektrostatische energie nu gelijk is aan

$$U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 L((\kappa-1)h + L)}.$$

Oefening 7: Oplossing (3)

- De totale energie van het systeem is daarom gegeven door

$$U = \frac{1}{2}\rho g L d h^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 L((\kappa - 1)h + L)}.$$

- Om deze energie te minimaliseren als functie van h dient deze te worden afgeleid naar h en dient deze afgeleide gelijk te zijn aan nul, met andere woorden

$$\rho g L d h - \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 L}\frac{\kappa - 1}{((\kappa - 1)h + L)^2} = 0$$

  of na vereenvoudiging

$$h((\kappa - 1)h + L)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \rho g L^2}(\kappa - 1).$$

  Deze vergelijking kan worden opgelost om h te bepalen. Voor $\kappa = 1$ vind je $h = 0$ zoals verwacht.