Nuttige uitdrukkingen

- Uit de Maxwellverdeling voor snelheden van N deeltjes met massa m in een gas bij temperatuur T

$$f(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_B T}\right)$$

volgt

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{3\frac{k_B T}{m}}.$$

- De wet van Fick

$$J_x = DA\frac{\partial C}{\partial x} \approx DA\frac{C_1 - C_2}{\Delta x}.$$

Oefening 1 (18.9)

Als de druk in een gas wordt verdrievoudigd terwijl het volume constant blijft, met welke factor stijgt v_{rms} dan?

Oefening 2 (18.21)

Een gas bestaande uit 15200 molecules, elk met eenzelfde massa $m = 2,0 \cdot 10^{-26} kg$, heeft de volgende verdeling, die ruwweg de Maxwellverdeling nabootst,

v $\left(\frac{m}{s}\right)$	N_v
220	1600
440	4100
660	4700
880	3100
1100	1300
1320	400

a) Bepaal v_{rms} voor deze snelheidsverdeling.

b) Gegeven deze waarde voor v_{rms}, welke effectieve temperatuur zou je aan dit gas toekennen?

Oefening 3 (18.55)

Zuurstof diffundeert van het oppervlak van insecten naar het inwendige door kleine tubes die tracheae heten. Een gemiddelde trachea is ongeveer $2mm$ lang en heeft een oppervlaktedoorsnede van $2 \cdot 10^{-9} m^2$. Veronderstel dat de concentratie aan zuurstof in het inwendige van het insect ongeveer de helft is van die in de atmosfeer.

a) Toon aan dat de zuurstofconcentratie in de lucht bij $20^\circ C$ ongeveer $8,7 mol/m^3$ is (21% van de moleculen in de lucht zijn zuurstofmoleculen).

b) Bereken de diffusiesnelheid J. Veronderstel dat de diffusieconstante gelijk is aan $D = 10^{-5} m^2/s$.

c) Schat de gemiddelde tijd die een molecule nodig heeft om naar binnen te diffunderen. Uit het voorbeeld uit het handboek volgt

$$t \approx \frac{\bar{C}}{\Delta C} \frac{(\Delta x)^2}{D},$$

waarbij $\bar{C} = \frac{1}{2}(C_{\text{atm}} + C_{\text{insect}})$.

Oplossingen

Oplossing 1

Wanneer het aantal deeltjes constant is, volgt uit de ideale gaswet dat bij verdrievoudiging van p en constante V

$$T = \frac{pV}{Rn} \to 3\frac{pV}{Rn} = 3T.$$

De temperatuur zal dus eveneens verdrievoudigen. Aangezien

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{3\frac{k_B T}{m}},$$

betekent dit dat v_{rms} zal toenemen met een factor $\sqrt{3}$.

Oplossing 2

a) Voor een discrete verdeling zoals in deze opgave geldt

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\sum_v N_v v^2}{\sum_v N_v}},$$

waarbij wordt gesommeerd over alle snelheden dewelke voorkomen in de verdeling. Na wat rekenwerk volgt daarom

$$v_{\text{rms}} = 706,6 \frac{m}{s}.$$

b) Dit komt overeen met een temperatuur

$$T = \frac{m v_{\text{rms}}^2}{3 k_B} = 241 K = -32^\circ C.$$

Oplossing 3.1

a) De druk ten gevolge de zuurstofmoleculen is 21% van de totale atmosferische druk. Daarom geldt

$$C_{\text{atm}} = \frac{n}{V} = \frac{p}{RT} = \frac{0,21 \cdot 101300 Pa}{8,314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 293,15 K} = 8,732 \frac{mol}{m^3}.$$

b) De diffusiesnelheid J kan worden gevonden als

$$\begin{aligned} J &\approx DA \frac{C_{\text{atm}} - C_{\text{insect}}}{\Delta x} \\ &= DA \frac{C_{\text{atm}}}{2\Delta x} \\ &= 10^5 \frac{m^2}{s} \cdot (2 \cdot 10^{-9} m^2) \frac{8,372 mol/m^3}{2 \cdot 0,002 m} \\ &= 4,37 \cdot 10^{-11} \frac{mol}{s}. \end{aligned}$$

Oplossing 3.2

c) De gemiddelde diffusietijd kan worden afgeschat met

$$
\begin{aligned}
t &\approx \frac{\bar{C}}{\Delta C} \frac{(\Delta x)^2}{D} \\
&= \frac{\frac{3}{4} C_{\text{atm}}}{\frac{1}{2} C_{\text{atm}}} \frac{(\Delta x)^2}{D} \\
&= \frac{3}{2} \frac{(0,002m)^2}{10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 0,6s.
\end{aligned}
$$