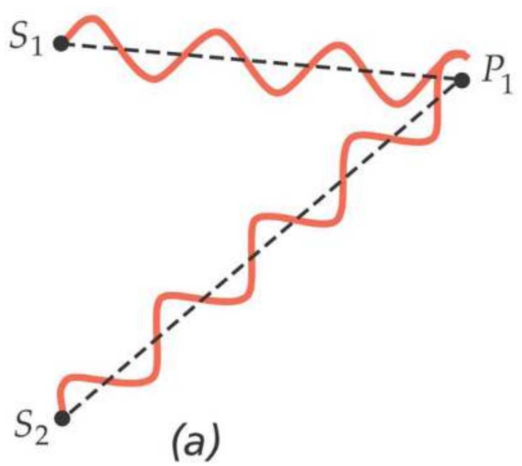
Hoofdstuk 33: Interferentie en Diffractie

1. Hoe geeft een weglengteverschil aanleiding tot een faseverschil?

Beschouw twee identieke golven die respectievelijk worden uitgezonden door bronnen S_1 en S_2.
$y_1 = A\sin(kx_1 - \omega t)$; $y_2 = A\sin(kx_2 - \omega t)$
Een waarnemer in P_1 observeert de superpositie van de twee golven. Door het feit dat deze golven een verschillende weg hebben moeten afleggen om tot bij P_1 te geraken kan er een faseverschil ontstaan tussen beide golven op de plaats P_1. Het weglengteverschil $\Delta x = x_2 - x_1$ is het verschil tussen de afstand afgelegd door de 2de golf en de afstand afgelegd door de 1ste golf bij het bereiken van het punt P_1. De resulterende golf in P_1 wordt gegeven door
$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx_1 - \omega t) + A\sin(kx_2 - \omega t) = 2A\cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{k(x_1+x_2)}{2} - \omega t\right)$.
De intensiteit van een golf is evenredig met de amplitude². Voor de intensiteit van de golf in P_1 geldt dan $I \sim \cos^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$. Afhankelijk van het weglengteverschil kunnen we constructieve of destructieve interferentie krijgen. Het faseverschil t.o.v. het weglengteverschil is
$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k\Delta x \rightarrow \delta = k\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \rightarrow I \sim \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$
Constructieve interferentie: Intensiteit zal maximaal zijn. $I \sim \cos^2(n\pi) = 1$
$\Delta x = n\pi \rightarrow \delta = n2\pi$ met n een geheel getal = 0, ± 1, ± 2, …
Destructieve interferentie: Intensiteit wordt nul. $I \sim \cos^2\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$
$\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \delta = (2n+1)\pi$ met n een geheel getal = 0, ± 1, ± 2, …
We zien dus dat er plaatsen P_1 zijn waar de lichtintensiteit maximaal is (constructieve interferentie) en plaatsen P_1 waar de lichtintensiteit nul is (destructieve interferentie).

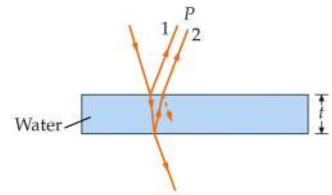


2. Wat verstaat men onder coherent licht?

Wanneer twee golven een constant faseverschil hebben, m.a.w. het faseverschil verandert niet in de tijd, noemen we dit coherente golven. Golven waarvan het faseverschil onderling verschilt op willekeurige wijze noemen we incoherent. Om coherent ligt te krijgen gebruikt men meestal één lichtbron en wordt de lichtbundel gesplitst in verschillende bundels die elk een verschillende weg volgen om daarna terug samen te komen.

3. Hoe ontstaat het interferentiepatroon op het oppervlak van een dunne zeepbel?

De interferentiepatronen zijn het gevolg van interferentie tussen stralen die gereflecteerd worden aan beide zijden van de film. Straal 1 heeft een fasesprong van 180° ondergaan. Bij kleine invalshoeken liggen stralen 1 en 2 dicht bij elkaar en worden beide waargenomen door het oog. We zien dus de interferentie van beide golven.



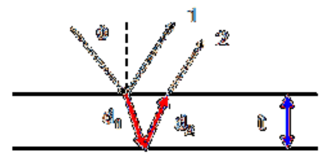
Het weglengteverschil tussen stralen 1 en 2 wordt weergeven door de som van de afstanden d_1 en d_2. Indien de fasehoek θ klein is, dan geldt dat $d_1 \approx t$ en dat $d_2 \approx t$. Het weglengteverschil ≈ 2t.

Dit leidt dan tot een faseverschil $\left(\frac{2t}{\lambda'}\right)360^{\circ}$ met $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$.

Het totale faseverschil wordt dan $\delta = \left(\frac{2t}{\lambda'}\right)360^{\circ} + 180^{\circ}$

Destructieve interferentie treedt op voor 2t = mλ' (m = 1, 2, …)

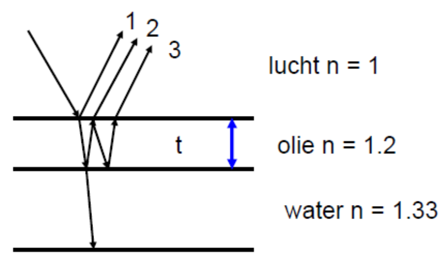
Constructieve interferentie treedt op voor 2t = (2m+1)λ'/2 (m = 0, 1, 2, …)



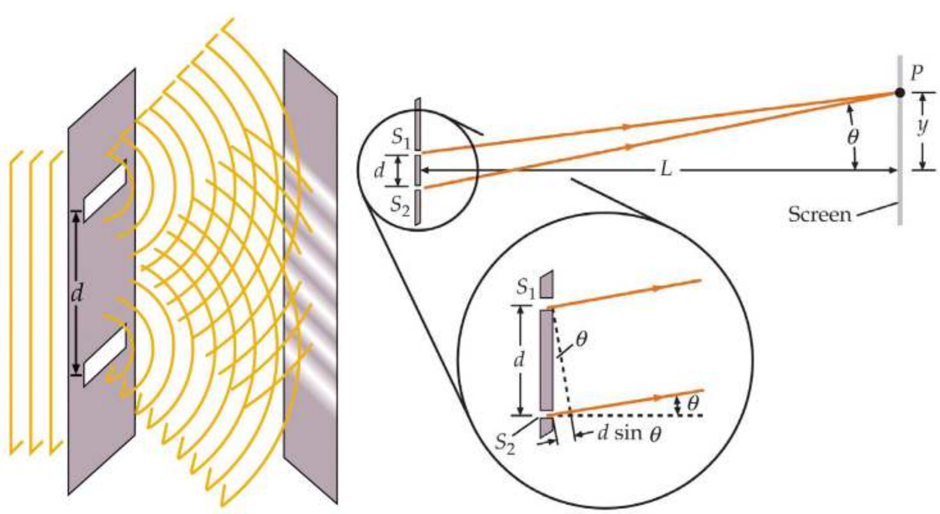
4. Hoe ontstaat het interferentiepatroon voor een oliefilm op water?

Straal 1 en 2 hebben geen fasesprong van 180° ondergaan ten opzichte van elkaar. (Waarom?) Het faseverschil tussen straal 1 en 2 t.o.v. het weglengteverschil is $\left(\frac{2t}{\lambda_{oli}}\right)360^{\circ}$.

De oliefilm is echter niet overal even dik. Wanneer beschenen met chromatisch (wit) licht, welke een combinatie is van verschillende kleuren, dan is de voorwaarde voor constructieve interferentie voor verschillende golflengtes voldaan op verschillende plaatsen. Dit geeft aanleiding tot kleurenbanden.



5. Verklaar het interferentiepatroon verkregen wanneer monochromatisch licht door 2 spleten wordt gestuurd (Proef van Young). Geeft een expliciete uitdrukking voor de positie van de maxima/minima. Bereken ook de intensiteitverdeling van het interferentiepatroon en maak een tekening.



Interferentie van twee of meer lichtbronnen kan men enkel krijgen indien het licht van de bronnen coherent is. Dit verkrijgt men door het licht van één bron langs verschillende paden te laten gaan. Men kan bv. licht van een zelfde lichtbron door twee spleten sturen. Indien de afmetingen van de spleten << λ, dan fungeren ze als puntbronnen. Als we dan kijken naar het interferentiepatroon van monochromatisch licht op een scherm zien we een opeenvolging van lichte en donkere strepen, de zogenaamde franjes. De golven afkomstig uit beide spleten kunnen we voorstellen als $y_1 = A\sin(kx_1 - \omega t)$ en $y_2 = A\sin(kx_2 - \omega t)$. Op het scherm treedt interferentie op in een punt P t.o.v. het weglengteverschil tussen golven afkomstig uit twee spleten S_1 en S_2. Indien het scherm ver genoeg weg is van de spleten, dan zijn de lichtstralen komende uit S_1 en S_2 in goede benadering evenwijdig. Dit is de zogenaamde Fraunhofer benadering. Het weglengteverschil $\Delta x = d\sin\theta$ (d = afstand tussen spleten).

Constructieve interferentie: We krijgen maximale intensiteit voor $d\sin\theta_m = m\lambda$ (m = 0, 1, 2, …)

Destructieve interferentie: We krijgen nul intensiteit voor $d\sin\theta_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$ (m = 1, 2, 3, …)

We noemen m de orde van het interferentie maximum/minimum.

Het faseverschil δ in P tussen de twee golven is $\delta = \frac{(2\pi d\sin\theta)}{\lambda} = \Delta x\frac{2\pi}{\lambda}$.

De afstand y_m gemeten langs het scherm van het centrale maximum tot het m^{de} maximum is $\tan\theta_m = \frac{y_m}{L}\sin\theta_m \approx \tan\theta_m \rightarrow y_m = m\frac{\lambda L}{d}$.

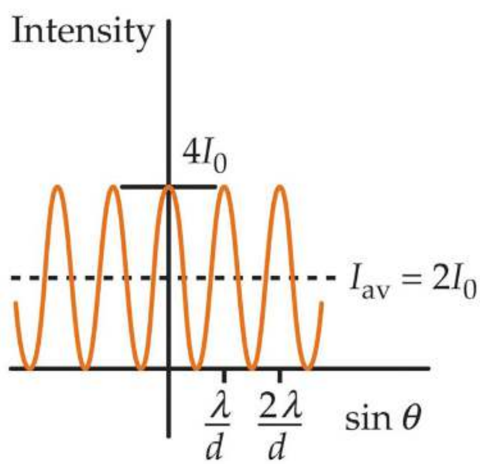
Om de intensiteit te berekenen moeten we kijken naar het resulterende E-veld in het punt P. E_1 is het E-veld in punt P t.o.v. het licht uit spleet S_1, E_2 is het E-veld in punt P t.o.v. het licht uit S_2. We veronderstellen dat de E-velden parallel zijn, dus P oneindig ver. Beide velden oscilleren met dezelfde frequentie want ze zijn afkomstig van dezelfde bron. De amplitudes zijn in benadering gelijk voor beide golven. De intensiteitverdeling op het scherm berekenen we als volgt.

$E_1 = A_0\sin\omega t$; $E_2 = A_0\sin(\omega t + \delta) \rightarrow E = E_1 + E_2 = 2A_0\cos(\frac{\delta}{2})\sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \rightarrow E_1^2 = A_0^2\sin^2\omega t$

δ is het faseverschil tussen beide golven, intensiteit is evenredig met de resulterende amplitude².

$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)$ Intensiteit van één enkele spleet: $I_0 = A_0^2$

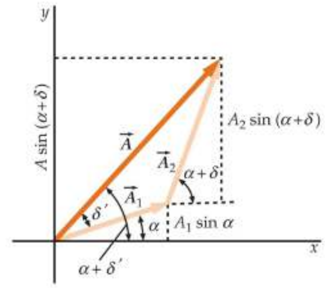
I_{av} is de intensiteit uitgemiddeld over het faseverschil δ. Deze constante intensiteit zou men vinden indien licht uit S_1 en S_2 incoherent zou zijn, er zou dan geen interferentie waarneembaar zijn.



6.

7. <u>Welk interferentiepatroon krijgt men voor 3 spleten ? N spleten ? Op welke plaatsen vindt men minima en maxima ? Maak een tekening van het intensiteitverloop voor interferentie aan 2,3, … spleten.</u>

Onderstel dat we 3 spleten hebben op een afstand d van elkaar, de voorwaarde voor constructieve interferentie blijft dan dezelfde. Maar voor de minima niet, deze kunnen we terugvinden door gebruik te maken van fasoren. We stellen elke golf voor als een vector. Voor 2 openingen geldt dan het volgende.



$\alpha = \omega t$; $E_1 = A_1\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}\, \alpha$; $E_2 = A_2\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}(\alpha + \delta)$

$E_1 \rightarrow \overrightarrow{A_1}$; $E_2 \rightarrow \overrightarrow{A_2}$; …

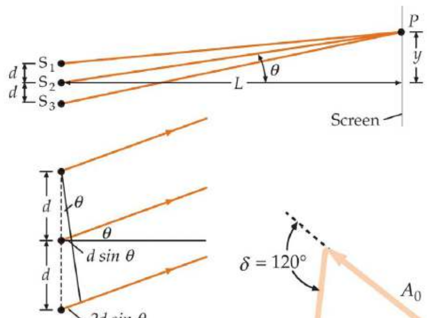
$\vec{A} = \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} \rightarrow A_x = A_{1,x} + A_{2,x}$; $A_y = A_{1,y} + A_{2,y}$

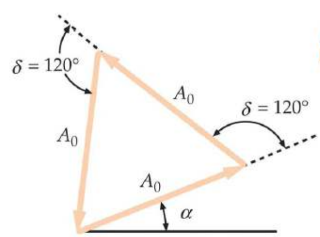
Voor de y-componente geeft dit: $A_1\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}\, \alpha + A_2\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}(\alpha + \delta) = A\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}(\alpha + \delta')$

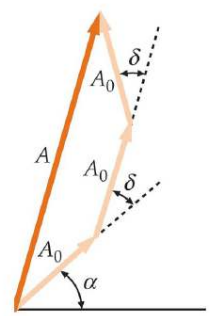
De werkelijke waarde van het E-veld wordt gegeven door de projectie op de Y-as, maar we stellen het E-veld voor als een roterende vector. Dit laat ons toe om gemakkelijk de resulterende amplitude te vinden.

Constructieve interferentie: $\delta = n2\pi \rightarrow |\vec{A}| = ma^{x} \rightarrow I \propto |\vec{A}|^2 = ma^{x}$

Destructieve interferentie: $\delta = n\pi \rightarrow \overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2} = 0 \rightarrow I = 0$

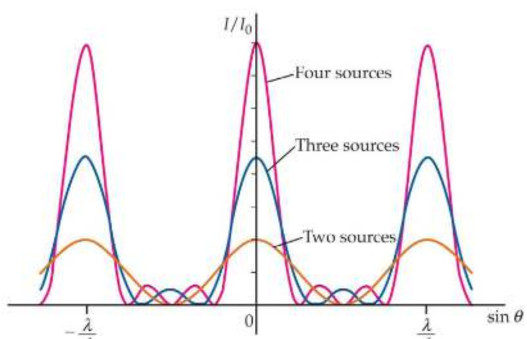






geeft minimum
want resulterende
amplitude is = 0

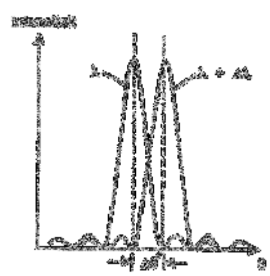
We zien dus dat voor 3 spleten we eerst een minimum krijgen bij een relatief faseverschil van 120° tussen opeenvolgende spleten, dus een lengteverschil van $\frac{\lambda}{3} \rightarrow d\, \mathrm{si}^{\mathrm{n}}\, \theta = \frac{m\lambda}{3}$ (m = 1, 2, …).
Men bewijst verder dat tussen de twee hoofdmaxima er nog een klein secundair maximum is. Voor meerdere spleten vindt men dat de intensiteit tussen de hoofdmaxima meer een meer wordt onderdrukt.



8. <u>Wat is een diffractierooster? Bereken het oplossend vermogen van een diffractierooster. Waarvoor wordt een diffractierooster gebruikt?</u>

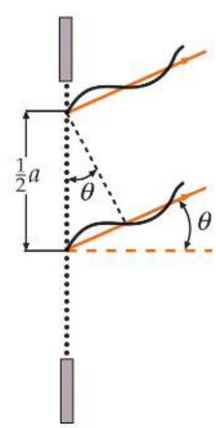
Een diffractierooster is een scherm met N spleten. Hierbij krijgen we N-2 nevenmaxima. De intensiteit van de hoofdmaxima stijgt met toenemende N terwijl de nevenmaxima steeds kleiner wordt. Ook wordt de hoofdmaxima scherper met toenemende N.

Het eerste maximum treedt op voor $m = N \rightarrow d \sin \theta = \lambda$, stel $\theta \ll 1 \rightarrow d\theta \cong \lambda$.
Het meest nabijgelegen minimum is dan $m = N + 1 \rightarrow d \sin(\theta + \Delta\theta) = (N+1)\frac{\lambda}{N}$,
stel $\theta \ll 1 \rightarrow d(\theta + \Delta\theta) \cong (N+1)\frac{\lambda}{N} \rightarrow d\theta + d\Delta\theta \cong \lambda + \frac{\lambda}{N} \rightarrow d\Delta\theta \cong \frac{\lambda}{n} \rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{dN}$
Twee golflengtes die $\Delta\lambda$ van elkaar verschillen hebben hun hoofdmaximum bij een verschillende hoek, we noemen het verschil in hoek $\Delta\theta'$.
Het n^{de} maximum: $d \sin \theta = n\lambda \rightarrow d\theta = n\lambda$
$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$
$\rightarrow d \sin(\theta + \Delta\theta') = n(\lambda + \Delta\lambda) \rightarrow d(\theta + \Delta\theta') \cong n(\lambda + \Delta\lambda) \rightarrow d\Delta\theta' \cong dn\Delta\lambda \rightarrow \Delta\theta' = \dfrac{n\Delta\lambda}{d}$
We gebruiken als criterium dat het interferentiemaximum van de 2de golflengte $\lambda + \Delta\lambda$ ligt op dezelfde plaats als het eerste minimum van de 1ste golflengte λ. M.a.w. $\Delta\theta = \Delta\theta'$ of $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nn}$. Dit is het oplossen vermogen van een rooster. Om kleine $\Delta\lambda$ te kunnen detecteren moet N groot zijn.



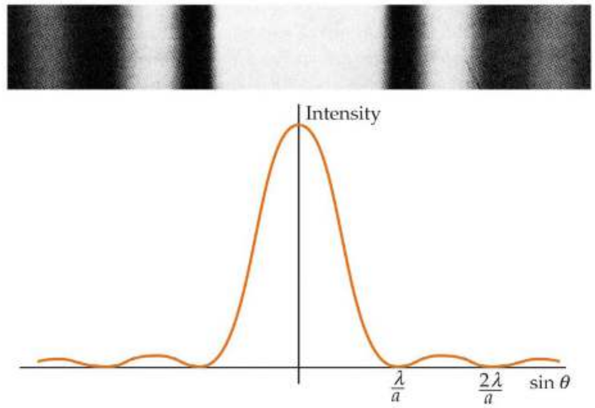
Vb.: 0de , 1ste , 2de en 3de orde spectra van licht uitgezonden door waterstof dat door een diffractierooster is gegaan. Het centrale maximum is hetzelfde voor alle golflengten. Verschillende orden kunnen overlappen, als we N groot kiezen kunnen we wel onderscheid tussen de verschillende kleuren maken.

9. <u>Geef de positie van de minima voor diffractie aan één spleet (rechthoekig).</u>



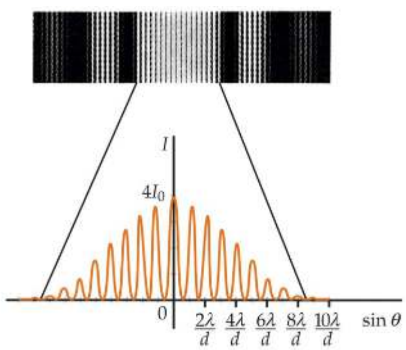
We beschouwen een enkele spleet met apertuur a. Volgens het principe van Huygens kan elk punt waar de golf komt als bron van kleine sferische golfjes worden beschouwd. Dus elk punt van de apertuur is een bron van sferische golfjes. Wat we op het scherm waarnemen is de superpositie van deze golfjes. We onderstellen dat het punt P ver weg is zodat we de golven als evenwijdig kunnen beschouwen. Stel het golffront in de opening voor als 100 puntbronnen, 50 in de eerste helft en 50 in de tweede helft. Dan kunnen we de golven 2 aan 2 beschouwen, 1 met 51, 2 met 52, … Met steeds een afstand $\frac{a}{2}$ tussen de twee punten. Wanneer het weglengteverschil voor zo'n 2 golven $\frac{\lambda}{2}$ is, dan krijgen we destructieve interferentie. We vinden dus diffractieminima voor $a \sin \theta = m\lambda$ (m =1, 2, …)

10. <u>Maak een schets van het intensiteitverloop bij diffractie aan een rechthoekige opening met breedte a.</u>



11. <u>Bespreek hoe diffractie het interferentiepatroon beïnvloedt bij interferentie aan twee spleten, inclusief tekening van de intensiteit.</u>

Bij het experiment van Young vindt er niet enkel interferentie tussen licht uit de verschillende spleten plaats, maar in feite ook diffractie aan iedere spleet. Het resulterende interferentiepatroon op het scherm is een combinatie van diffractie en interferentiepatronen. Het interferentiepatroon wordt gemoduleerd door het diffractiepatroon van één opening.



Vb.: $d = 10a$
Het centraal diffractiemaximum bevat 19 interferentiemaxima (1 centraal, 9 aan iedere zijde). Het 10[de] interferentiemaximum is bij $\sin\theta_{10} = \frac{10\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}$. M.a.w. dit is bij het eerste diffractieminimum. Als $d = ma$, dan is het m[de] interferentiemaximum niet te zien. Dus zijn er m-1 franjes aan iedere zijde in het centrale diffractiemaximum.

$N = 2(m-1) + 1 = 2m - 1$

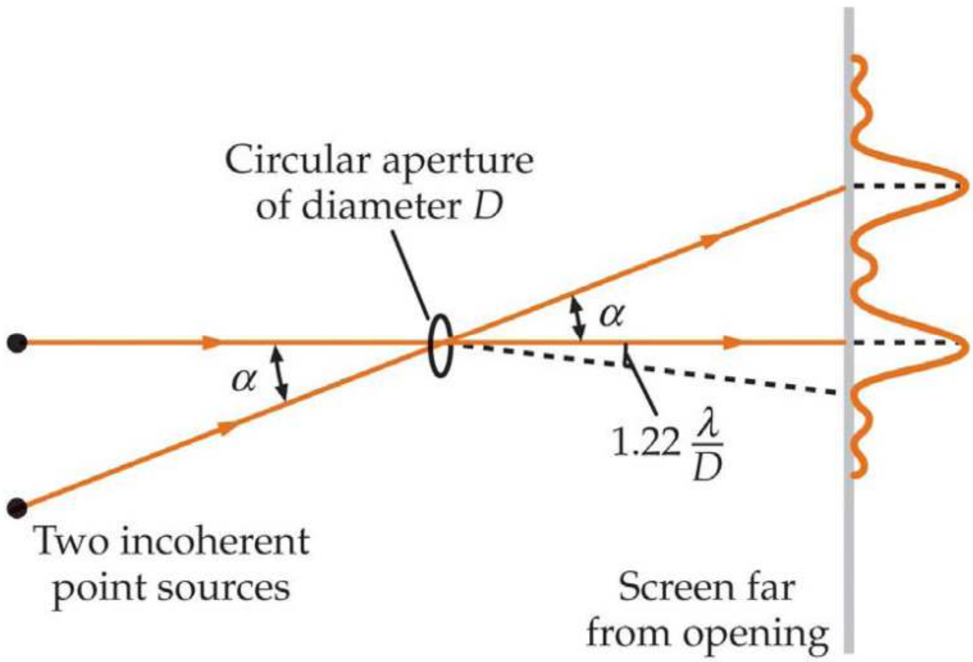
We zien dus dat door de combinatie van diffractie en interferentie de intensiteit van de interferentiemaxima afneemt, sommige interferentiemaxima wegvallen omdat zij samenvallen met een diffractieminimum.

12. <u>In de oorspronkelijke bespreking van de interferentieproef van Young werd diffractie verwaarloosd. Welke aanname werd hier impliciet gemaakt ?</u>

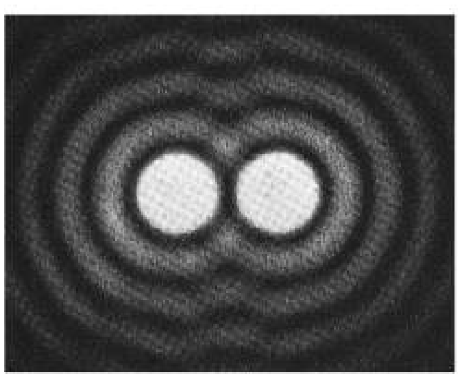
De aanname die gemaakt werd is dat $a \ll \lambda$, dus de spleten functioneerden als één puntbron en niet een verzameling van verschillende puntbronnen.

13. Voor diffractie aan een **circulaire** opening (diameter D) vindt men het eerste minimum terug op sin θ = 1.22 λ/D. Leid hieruit Rayleigh's criterium af voor de resolutie van optische instrumenten.

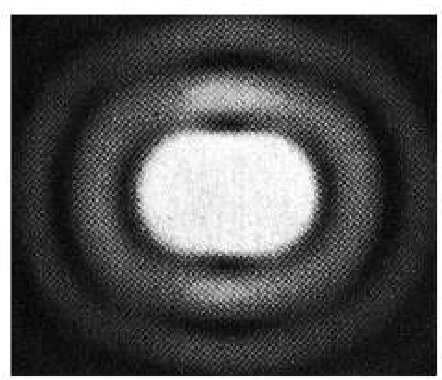
Voor diffractie aan een circulaire apertuur met diameter D kan men bewijzen dat het eerste diffractieminimum gegeven wordt door $\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$ (als $\theta \ll 1 \rightarrow \theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$).
Wanneer licht van 2 lichtbronnen gediffracteerd wordt aan een circulaire apertuur, dan krijgt men het volgende patroon.



Rayleigh's criterium: De 2 lichtbronnen zijn nog te onderscheiden indien de hoek α tussen hun respectievelijke diffractiemaxima niet kleiner wordt dan de kritische hoek $\alpha_c \approx 1{,}22\frac{\lambda}{D}$.
Het centrale maximum van de ene bron valt dan in het eerste minimum van de andere bron.



$\alpha > \alpha_c$



$\alpha = \alpha_c$