Examen Fysica I, 20 januari 2010

Achternaam:

Voornaam:

Studierichting:

Het definitieve antwoord moet op het opgaveblad worden geschreven. Voor berekeningen en tussenstappen mag je zowel het opgaveblad als het kladpapier gebruiken. Denk er aan dat niet alleen het uiteindelijke antwoord punten waard is: je redenering en berekening kunnen dus ook punten opleveren, ook wanneer de uiteindelijk bekomen waarde of uitdrukking fout is. Als je een tussenresultaat niet vindt, antwoord ook dan op de rest van de vraag en laat het onbekende tussenresultaat staan in je uiteindelijke uitkomst. Denk er aan dat sommige grootheden vectoren zijn!

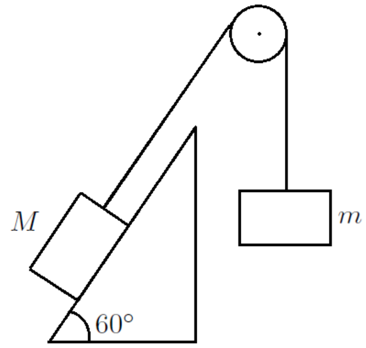
Toegelaten materiaal: Handboek, nota's, oefeningen waarvan de oplossing op BlackBoard is verschenen, rekenmachine (al dan niet grafisch), een zelfgemaakt formularium, kladpapier dat je krijgt bij het examen, iets om te schrijven.

Veel succes!

1. Wetten van Newton

Tijdens een opvoering van Peter Pan moet een actrice met een massa $m = 50kg$ vanuit rust aan een kabel afdalen vanop een hoogte van $6,4m$ boven het podium. Om synchroon te zijn met de muziek, dient zij deze hoogte te overbruggen in een tijd van $8,1s$ en moet zij een constante versnelling aanhouden. Hiervoor hangt zij aan een touw dat over een massaloze katrol loopt en achter de schermen is bevestigd aan een massa M dat dienst doet als tegengewicht. De massa M bevindt zich op een helling met een hellingshoek van 60°.

a) Welke massa M dient er te worden gebruikt?
b) Met welke snelheid raakt de actrice het podium?
c) Wat is de spanning in het touw?



Figuur 1: Schets van het probleem

Oplossing

- De massa M dient zodanig te zijn dat de actrice precies de juiste versnelling meekrijgt. Deze versnelling dient zodanig te zijn dat de actrice de $6,4m$ aflegt in $8,1s$. We vinden voor $v_0 = 0$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{2 \cdot 6,4m}{(8,1s)^2} = 0,195 \frac{m}{s^2}.$$

  Toepassen van de tweede wet van Newton op zowel de actrice als het tegengewicht levert

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = -Mg\sin(60°) + T, \end{cases}$$

  waarbij de grootte van de spankracht gelijk is aan beide kanten van de katrol daar die laatste massaloos is. Gebruikmaken van de eerste vergelijking om T te vervangen in de tweede vergelijking, geeft

$$Ma = -Mg\sin(60°) + m(g - a),$$

  zodat

$$M = m\frac{g - a}{a + g\sin(60°)} = 50kg \cdot \frac{9,81\frac{m}{s^2} - 0,195\frac{m}{s^2}}{0,195\frac{m}{s^2} + 9,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s^2}} = 55,3kg.$$

- De snelheid waarmee de actrice de grond raakt kan worden berekend uit (nog steeds voor $v_0 = 0$)

$$v(t) = a\Delta t \quad \Rightarrow \quad v(8,1s) = 0,195\frac{m}{s^2} \cdot 8,1s = 1,58\frac{m}{s}.$$

- Ook de spankracht is nu eenvoudig te bereken. Immers, uit het reeds gebruikte

$$ma = mg - T$$

halen we

$$T = m(g - a) = 50kg\left(9,81\frac{m}{s^2} - 0,195\frac{m}{s^2}\right) = 480,75N.$$

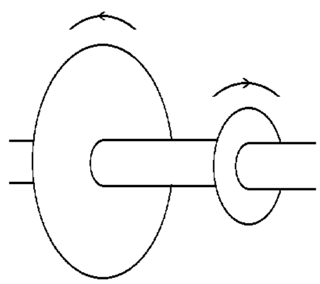
2. Rotatie en draaimoment

Twee schijven met stralen $R_1 = 0,5m$ en $R_2 = 1m$ draaien wrijvingsloos rond een as met hoeksnelheden dewelke eenzelde grootte $\omega_0 = 16\pi\frac{\text{rad}}{s}$ hebben maar de schijven draaien in tegengestelde richting. De twee schijven worden voorzichtig tegen elkaar gebracht zodat hun kinetische energie tijdens het verschuiven niet verandert. Wanneer ze elkaar raken zorgt de wrijving tussen de twee schijven dat beiden (na een tijdje) in dezelfde richting draaien met een nieuwe en gelijke hoeksnelheid. De schijven hebben een traagheidsmoment $I_1 = 0,25kg \cdot m^2$ en $I_2 = 0,5kg \cdot m^2$.

a) Wat is de grootte van die uiteindelijke hoeksnelheid?

b) Zullen de schijven samen draaien in de richting waarin de grote schijf oorspronkelijk draaide of in de richting waarin de kleine schijf oorspronkelijk draaide?

c) Wat is het verschil in rotationele kinetiche energie vóór en na het samenbrengen van de schijven?



Figuur 2: Schets van het probleem

Oplossing

- Voor het berekenen van de uiteindelijke hoeksnelheid dien je gebruik te maken van behoud van draaimoment. Behoud van energie geldt niet daar een deel van de energie wordt omgezet in warmte ten gevolge van de wrijving. Behoud van draaimoment kan je uitdrukken als

  $$I_1\vec{\omega}_0 + I_2\vec{\omega}_0 = (I_1 + I_2)\vec{\omega}.$$

  Deze vergelijking heeft slechts componenten parallel met de rotatie-as van de schijven en de projectie op die as levert

  $$-I_1\omega_0 + I_2\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega,$$

  zodat

  $$\omega = \frac{-I_1 + I_2}{I_1 + I_2}\omega_0 = \frac{-0,25kg \cdot m^2 + 0,5kg \cdot m^2}{0,25kg \cdot m^2 + 0,5kg \cdot m^2}16\pi\frac{\text{rad}}{s} = \frac{16}{3}\pi\frac{\text{rad}}{s}$$

  Merk op dat het teken dat je hier zou uitkomen ook negatief kan zijn. Dit hangt er vanaf in welke richting je de positieve draairichting kiest. Wat wel belangrijk is, is dat het teken dat je krijgt, hetzelfde teken is als de draairichting van de tweede (grote) schijf.

- Het geheel draait in de richting van de grote schijf. Dit kan je inzien uit de berekening hierboven.

- De totale kinetische energie voor het samenbrengen van de schijven wordt gegeven door

$$\begin{aligned} E_{k,\mathrm{voor}} &= \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_0^2 \\ &= \frac{1}{2}0,25kg\cdot m^2\left(16\pi\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}0,25kg\cdot m^2\left(16\pi\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)^2 \\ &= 316J + 631J \\ &= 947J \end{aligned}$$

De totale kinetische energie na het samenbrengen is

$$\begin{aligned} E_{k,\mathrm{na}} &= \frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}0,25kg\cdot m^2\left(\frac{16}{3}\pi\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}0,25kg\cdot m^2\left(\frac{16}{3}\pi\frac{\mathrm{rad}}{s}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}E_{k,\mathrm{voor}} \\ &= 105J. \end{aligned}$$

Het verschil tussen beiden is dus

$$\Delta E_k = \pm(E_{k,\mathrm{voor}} - E_{k,\mathrm{na}}) = \pm 842J.$$

De $\pm$ duidt er op dat hier het teken ook niet echt een rol speelt, enkel de absolute waarde van het verschil is relevant voor het antwoord. (Let wel: dit was wel belangrijk geweest als er werd gevraagd hoeveel energie er verloren is gegaan door de wrijving. Dit moet een positieve hoeveelheid zijn!)

- Opmerking. Voor deel (a) werd gebruikt dat het totale traagheidsmoment gelijk is aan de som van de traagheidsmomenten. Er zijn een paar manieren om dit in te zien. De eerste is door de analogie te maken met de rechtlijnige beweging en volledig inelastische botsingen. Daar geldt dat $m_{\mathrm{na}} = m_1 + m_2$ en je kan hier traagheidsmomenten en massa's met elkaar identificeren. Een tweede manier om in te zien dat je traagheidsmomenten mag optellen voor objecten dewelke samen draaien is door in te zien dat

$$E_{k,\mathrm{tot}} = E_{k,1} + E_{k,2} = \frac{1}{2}I_1\omega_2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2$$

maar omdat de objecten zich gedragen als één object geldt ook

$$E_{k,\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{tot}}\omega^2.$$

Vergelijken van beide uitdrukkingen bewijst het gestelde.

3. Hydrostatica

Iets wat men soms op café doet is een leeg jeneverglas in een glas bier laten drijven en het jeneverglas vervolgens vullen met jenever. Stel dat een jeneverglas $4cl$ vloeistof kan bevatten en dat het het glas met de inhoud erbij een volume van $5cl$ inneemt. Hoeveel jenever kan je in het glaasje gieten alvorens het zal zinken, in de veronderstelling dat je traag genoeg giet zodat het deels gevulde jeneverglas altijd in evenwicht is tijdens het gieten?
Gebruik hiervoor dat bier de dichtheid heeft van water, namelijk $1000\frac{kg}{m^3}$, jenever een dichtheid heeft van (ongeveer) $925\frac{kg}{m^3}$ en glas een dichtheid heeft van $2400\frac{kg}{m^3}$.

Oplossing

- Het jeneverglaasje zal zinken wanneer de opwaartse stuwkracht kleiner wordt dan de zwaartekracht die inwerkt op het glaasje plus de jenever die er in is. Beide krachten zijn gelijk wanneer

$$\rho_{\text{water}} V_{\text{onder}} g = \rho_{\text{glas}} V_{\text{glas}} g + \rho_{\text{jen}} V_{\text{jen}} g.$$

  Dit is altijd voldaan in dit probleem (bij gratie van de opgave).

- Wanneer je het glaasje vult, zal het gelijdelijk dieper en dieper zinken tot op het punt waarop het water tot aan de rand van het glaasje komt. Op dit ogenblik is V_{onder} gelijk aan $5cl$. Giet je nog meer in het glaasje, zou het glaasje zinken. Niet alleen omdat het water dan binnenstroomt maar ook omdat je niet meer glaasje kan onderdompelen om genoeg opwaartse kracht te veroorzaken. (Ook wanneer het glaasje van bovenaf zou zijn afgedekt, zou het zinken vanaf dezelfde hoeveelheid jenever.)

- Gebruikmakend van het inzicht van het vorige punt, kan V_{jen} worden berkend. Zo geldt

$$\begin{aligned} V_{\text{jen}} &= \frac{\rho_{\text{water}} V_{\text{onder}} g - \rho_{\text{glas}} V_{\text{glas}} g}{\rho_{\text{jen}} g} \\ &= \frac{1000\frac{kg}{m^3} \cdot 5cl - 2400\frac{kg}{m^3} \cdot 1cl}{925\frac{kg}{m^3}} \\ &= 2,81cl \end{aligned}$$