Belangrijke continue kansdichtheden

Sandra Van Aert

20 oktober 2011

Continue uniforme dichtheid

- kansdichtheid

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

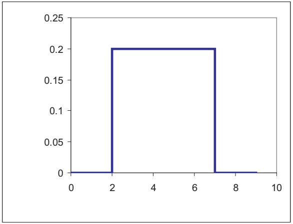
- kengetallen

$$\mu_X = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

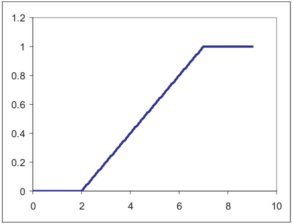
- verdelingsfunctie

$$F_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$

Grafisch



uniforme kansdichtheid met $\alpha = 2$ en $\beta = 7$



cumulatieve verdelingsfunctie met $\alpha = 2$ en $\beta = 7$

Normale dichtheid

1. praktijk: veel processen → normaal verdeelde data
2. functies van normaal verdeelde gegevens ook normaal verdeeld
3. functies van niet-normaal verdeelde gegevens wel normaal

Definitie

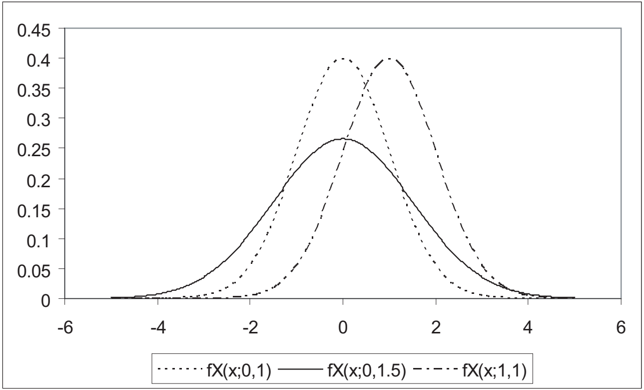
- kansdichtheid

$$f_X(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- kengetallen

$$\mu_X = \mu$$
$$\sigma_X^2 = \sigma^2$$

Enkele normale kansdichtheden



Eigenschappen

- klokvormig
- x kan in theorie waarden aannemen gaande van $-\infty$ tot $+\infty$
- gaat naar nul voor $x \to \pm\infty$
- symmetrisch rond μ

$$f_X(\mu - x; \mu, \sigma^2) = f_X(\mu + x; \mu, \sigma^2)$$

- modus = mediaan = verwachte waarde

Cumulatieve verdelingsfunctie

$$F_X(x;\mu,\sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy$$

geen analytische uitdrukking

$P(X \leq x) = ?$

- software (vb. R of Matlab)
- tabellen bestaan niet voor elke μ en σ^2
- wel tabel voor $\mu = 0$ en $\sigma^2 = 1$

Stelling 8.1

als $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, dan ook $Y = aX + b$ normaal verdeeld met

$$\mu_Y = E(Y) = a\mu_X + b$$
$$\sigma_Y^2 = \mathrm{var}(Y) = a^2\sigma_X^2$$

gevolg: als $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dan $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ normaal verdeeld met

$$\mu_Z = E(Z) = 0$$
$$\sigma_Z^2 = \mathrm{var}(Z) = 1$$

$\rightarrow$ Z is standaardnormaal verdeeld

Standaardnormale verdeling

- normale verdeling met gemiddelde 0 en variantie 1 = Z
- kansdichtheid

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- cumulatieve verdelingsfunctie

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \\ &= \phi(z) \end{aligned}$$

Kansen met standaardnormale verdeling

- tabel appendix A
- $P(Z \geq z)$
  $P(Z \geq 1.65) = 0.04947$

Tabel D: Normale verdeling

Deze tabel geeft de rechteroverschrijdingskansen voor de standaardnormale verdeling. Bijvoorbeeld: $P(Z \geq 1,96) = 0,02500$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	42074	41683	41294	40905	40517	40129	39743	39358	38974	38591
0,3	38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
0,4	34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	18406	18141	17879	17619	17361	17106	16853	16602	16354	16109

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851	08692	08534	08379	08226
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	01390	01355	01321	01287	01254	01222	01190	01160	01130	01101
2,3	01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00509	00494	00480
2,6	00466	00453	00440	00427	00415	00403	00391	00379	00368	00357
2,7	00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00263
2,8	00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,0	00135	00131	00126	00122	00118	00114	00111	00107	00104	00100
3,1	00097	00094	00090	00087	00085	00082	00079	00076	00074	00071
3,2	00069	00066	00064	00062	00060	00058	00056	00054	00052	00050
3,3	00048	00047	00045	00043	00042	00040	00039	00038	00036	00035
3,4	00034	00032	00031	00030	00029	00028	00027	00026	00025	00024
3,5	00023	00022	00022	00021	00020	00019	00019	00018	00017	00017
3,6	00016	00015	00015	00014	00014	00013	00013	00012	00012	00011
3,7	00011	00010	00010	00010	00009	00009	00009	00008	00008	00008
3,8	00007	00007	00007	00006	00006	00006	00006	00005	00005	00005
3,9	00005	00005	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00003

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	00003	00003	00003	00003	00003	00002	00002	00002	00002	00002

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559

Kansen met standaardnormale verdeling

- tabel appendix A
- $P(Z \geq z)$
  $P(Z \geq 1.65) = 0.04947$
- $P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z)$
  $= 1 - P(Z \geq z)$
  $P(Z \leq 1.45) = 1 - P(Z \geq 1.45)$
  $= 1 - 0.07353 = 0.92647$

Tabel D: Normale verdeling

Deze tabel geeft de rechteroverschrijdingskansen voor de standaardnormale verdeling. Bijvoorbeeld: $P(Z \geq 1,96) = 0,02500$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	42074	41683	41294	40905	40517	40129	39743	39358	38974	38591
0,3	38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
0,4	34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	18406	18141	17879	17619	17361	17106	16853	16602	16354	16109

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851	08692	08534	08379	08226
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	01390	01355	01321	01287	01254	01222	01190	01160	01130	01101
2,3	01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00509	00494	00480
2,6	00466	00453	00440	00427	00415	00403	00391	00379	00368	00357
2,7	00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00263
2,8	00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,0	00135	00131	00126	00122	00118	00114	00111	00107	00104	00100
3,1	00097	00094	00090	00087	00085	00082	00079	00076	00074	00071
3,2	00069	00066	00064	00062	00060	00058	00056	00054	00052	00050
3,3	00048	00047	00045	00043	00042	00040	00039	00038	00036	00035
3,4	00034	00032	00031	00030	00029	00028	00027	00026	00025	00024
3,5	00023	00022	00022	00021	00020	00019	00019	00018	00017	00017
3,6	00016	00015	00015	00014	00014	00013	00013	00012	00012	00011
3,7	00011	00010	00010	00010	00009	00009	00009	00008	00008	00008
3,8	00007	00007	00007	00006	00006	00006	00006	00005	00005	00005
3,9	00005	00005	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00003

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	00003	00003	00003	00003	00003	00002	00002	00002	00002	00002

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686	1
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507	1
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565	1
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851	0
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353	0
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057	0
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947	0
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006	0
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216	0
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559	0

Kansen met R en Matlab

- $P(Z \geq 1.65) = 1 - P(Z \leq 1.65)$
  R:"`=1-pnorm(1.65,0,1)`"
  Matlab:"`=1-normcdf(1.65,0,1)`"
  - de waarde van x
  - de parameter μ
  - de parameter σ

  of R:"`=1-pnorm(1.65)`"
  Matlab:"`=1-normcdf(1.65)`"

Kansen algemene normale verdeling

- stel $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $P(X \leq 100) = P(X - \mu \leq 100 - \mu)$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{100-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{100-\mu}{\sigma}\right)$$

- vermits $Z \sim N(0,1)$, d.w.z. standaardnormaal verdeeld is, is deze kans te bepalen m.b.v. tabel in appendix A

Voorbeeld

- $X \sim N(90, 100)$
- $$\begin{aligned} P(X \le 100) &= P\left(\frac{X-90}{10} \le \frac{100-90}{10}\right) \\ &= P(Z \le 1) \\ &= 1 - P(Z \ge 1) \end{aligned}$$

Tabel D: Normale verdeling

Deze tabel geeft de rechteroverschrijdingskansen voor de standaardnormale verdeling. Bijvoorbeeld: $P(Z \geq 1,96) = 0,02500$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	42074	41683	41294	40905	40517	40129	39743	39358	38974	38591
0,3	38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
0,4	34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	18406	18141	17879	17619	17361	17106	16853	16602	16354	16109

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851	08692	08534	08379	08226
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	01390	01355	01321	01287	01254	01222	01190	01160	01130	01101
2,3	01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00509	00494	00480
2,6	00466	00453	00440	00427	00415	00403	00391	00379	00368	00357
2,7	00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00263
2,8	00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,0	00135	00131	00126	00122	00118	00114	00111	00107	00104	00100
3,1	00097	00094	00090	00087	00085	00082	00079	00076	00074	00071
3,2	00069	00066	00064	00062	00060	00058	00056	00054	00052	00050
3,3	00048	00047	00045	00043	00042	00040	00039	00038	00036	00035
3,4	00034	00032	00031	00030	00029	00028	00027	00026	00025	00024
3,5	00023	00022	00022	00021	00020	00019	00019	00018	00017	00017
3,6	00016	00015	00015	00014	00014	00013	00013	00012	00012	00011
3,7	00011	00010	00010	00010	00009	00009	00009	00008	00008	00008
3,8	00007	00007	00007	00006	00006	00006	00006	00005	00005	00005
3,9	00005	00005	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00003

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	00003	00003	00003	00003	00003	00002	00002	00002	00002	00002

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559

Voorbeeld

- $X \sim N(90, 100)$
- $P(X \leq 100) = P\left(\frac{X-90}{10} \leq \frac{100-90}{10}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= P(Z \leq 1) \\
&= 1 - P(Z \geq 1) \\
&= 1 - 0.15866 \\
&= 0.84134
\end{aligned}
$$

- R: `"=pnorm(1)"`
  `"=pnorm(100,90,10)"`
  Matlab: `"=normcdf(100,90,10)"`
  `"=normcdf(1)"`

Theoretisch voorbeeld

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq +1) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\
&= 1 - P(Z \geq 1) - P(Z \geq 1) \\
&= 1 - 2 \times P(Z \geq 1) \\
&= 1 - 2 \times (0.15866) \\
&= 0.68268
\end{aligned}$$

Vervolg theoretisch voorbeeld

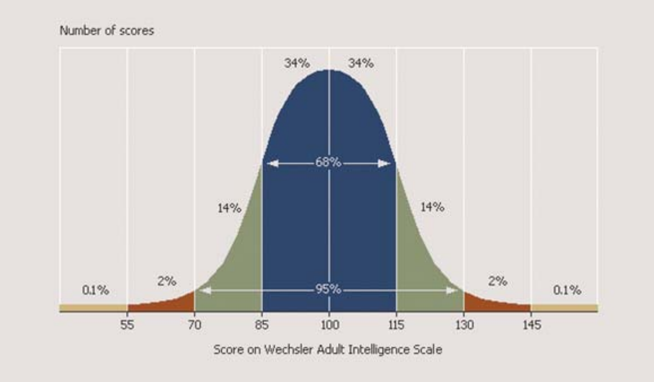
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

Intelligentiecoëfficiënt



$$\text{IQ} \sim N(100, 225) \text{ dus } \mu = 100 \text{ en } \sigma = 15$$

Intervalbepaling

stel $X \sim N(90, 100)$
zoek interval waarbinnen 60% van de populatie ligt

- $P(-a \leq Z \leq a) = 0.6$
  $\Leftrightarrow 1 - 2P(Z \geq a) = 0.6$
  $\Leftrightarrow 2P(Z \geq a) = 0.4$
  $\Leftrightarrow P(Z \geq a) = 0.2$

Tabel D: Normale verdeling

Deze tabel geeft de rechteroverschrijdingskansen voor de standaardnormale verdeling. Bijvoorbeeld: $P(Z \geq 1,96) = 0,02500$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	50000	49601	49202	48803	48405	48006	47608	47210	46812	46414
0,1	46017	45620	45224	44828	44433	44038	43644	43251	42858	42465
0,2	42074	41683	41294	40905	40517	40129	39743	39358	38974	38591
0,3	38209	37828	37448	37070	36693	36317	35942	35569	35197	34827
0,4	34458	34090	33724	33360	32997	32636	32276	31918	31561	31207
0,5	30854	30503	30153	29806	29460	29116	28774	28434	28096	27760
0,6	27425	27093	26763	26435	26109	25785	25463	25143	24825	24510
0,7	24196	23885	23576	23270	22965	22663	22363	22065	21770	21476
0,8	21186	20897	20611	20327	20045	19766	19489	19215	18943	18673
0,9	18406	18141	17879	17619	17361	17106	16853	16602	16354	16109

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	15866	15625	15386	15151	14917	14686	14457	14231	14007	13786
1,1	13567	13350	13136	12924	12714	12507	12302	12100	11900	11702
1,2	11507	11314	11123	10935	10749	10565	10383	10204	10027	09853
1,3	09680	09510	09342	09176	09012	08851	08692	08534	08379	08226
1,4	08076	07927	07780	07636	07493	07353	07214	07078	06944	06811
1,5	06681	06552	06426	06301	06178	06057	05938	05821	05705	05592
1,6	05480	05370	05262	05155	05050	04947	04846	04746	04648	04551
1,7	04457	04363	04272	04182	04093	04006	03920	03836	03754	03673
1,8	03593	03515	03438	03362	03288	03216	03144	03074	03005	02938
1,9	02872	02807	02743	02680	02619	02559	02500	02442	02385	02330

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	02275	02222	02169	02118	02068	02018	01970	01923	01876	01831
2,1	01786	01743	01700	01659	01618	01578	01539	01500	01463	01426
2,2	01390	01355	01321	01287	01254	01222	01190	01160	01130	01101
2,3	01072	01044	01017	00990	00964	00939	00914	00889	00866	00842
2,4	00820	00798	00776	00755	00734	00714	00695	00676	00657	00639
2,5	00621	00604	00587	00570	00554	00539	00523	00509	00494	00480
2,6	00466	00453	00440	00427	00415	00403	00391	00379	00368	00357
2,7	00347	00336	00326	00317	00307	00298	00289	00280	00272	00263
2,8	00256	00248	00240	00233	00226	00219	00212	00205	00199	00193
2,9	00187	00181	00175	00169	00164	00159	00154	00149	00144	00139

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,0	00135	00131	00126	00122	00118	00114	00111	00107	00104	00100
3,1	00097	00094	00090	00087	00085	00082	00079	00076	00074	00071
3,2	00069	00066	00064	00062	00060	00058	00056	00054	00052	00050
3,3	00048	00047	00045	00043	00042	00040	00039	00038	00036	00035
3,4	00034	00032	00031	00030	00029	00028	00027	00026	00025	00024
3,5	00023	00022	00022	00021	00020	00019	00019	00018	00017	00017
3,6	00016	00015	00015	00014	00014	00013	00013	00012	00012	00011
3,7	00011	00010	00010	00010	00009	00009	00009	00008	00008	00008
3,8	00007	00007	00007	00006	00006	00006	00006	00005	00005	00005
3,9	00005	00005	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00004	00003

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	00003	00003	00003	00003	00003	00002	00002	00002	00002	00002

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0,0	50000	49601	49202	48803	48405	48006	4
0,1	46017	45620	45224	44828	44433	44038	4
0,2	42074	41683	41294	40905	40517	40129	3
0,3	38209	37828	37448	37070	36693	36317	3
0,4	34458	34090	33724	33360	32997	32636	3
0,5	30854	30503	30153	29806	29460	29116	2
0,6	27425	27093	26763	26435	26109	25785	2
0,7	24196	23885	23576	23270	22965	22663	2
0,8	21186	20897	20611	20327	20045	19766	1
0,9	18406	18141	17879	17619	17361	17106	1

z 0,00 0,01 0,02 0,03 0,04 0,05

Intervalbepaling

stel $X \sim N(90, 100)$
zoek interval waarbinnen 60% van de populatie ligt

- $P(-a \leq Z \leq a) = 0.6$
  $\Leftrightarrow 1 - 2P(Z \geq a) = 0.6$
  $\Leftrightarrow 2P(Z \geq a) = 0.4$
  $\Leftrightarrow P(Z \geq a) = 0.2 \qquad \rightarrow a \approx 0.84$
- R: "`=qnorm(0.8,0,1)`" of "`=-qnorm(0.2,0,1)`"
  - de waarde van $P(Z \leq x)$
  - de parameter μ
  - de parameter σ

  of "`=qnorm(0.8)`" of "`=-qnorm(0.2)`"
- $P(-0.84 \leq Z \leq 0.84) = 0.6$

Vervolg intervalbepaling

- $P(-0.84 \leq Z \leq 0.84) = 0.6$
- $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow X = \mu + Z\sigma$
- $P(-0.84\sigma \leq Z\sigma \leq 0.84\sigma) = 0.6$
  $\Leftrightarrow P(-0.84\sigma + \mu \leq Z\sigma + \mu \leq 0.84\sigma + \mu) = 0.6$
  $\Leftrightarrow P(\mu - 0.84\sigma \leq X \leq \mu + 0.84\sigma) = 0.6$
  $\Leftrightarrow P(90 - 0.84 \times 10 \leq X \leq 90 + 0.84 \times 10) = 0.6$
  $\Leftrightarrow P(81.6 \leq X \leq 98.4) = 0.6$
- bemerk dat "`qnorm(0.2,90,10)`"=81.6 en "`qnorm(0.8,90,10)`"=98.4

Speciale gevallen

$$P(\mu - 1.645\sigma \le X \le \mu + 1.645\sigma) = 90\%$$

$$P(\mu - 1.96\sigma \le X \le \mu + 1.96\sigma) = 95\%$$

$$P(\mu - \underbrace{2.576}_{\downarrow}\sigma \le X \le \mu + \underbrace{2.576}_{\downarrow}\sigma) = 99\%$$

kwantielen kwantielen

percentielen percentielen

van de standaardnormale verdeling

5% kwantiel = 5% percentiel = −1.645

95% kwantiel = 95% percentiel = +1.645

Voorbeeld 8.2

- vulmachine
- verpakkingen van 16g NETTO
- standaarddeviatie $\sigma = 0.2$g
- normaal verdeelde gewichten

I. Machine ingesteld op μ=16.32g

% verpakkingen dat te licht is?

$$
\begin{aligned}
P(\text{te licht}) &= P(X < 16) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{16-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{X-16.32}{0.2} < \frac{16-16.32}{0.2}\right) \\
&= P(Z < -1.6) \\
&= 0.0548
\end{aligned}
$$

R:"`=pnorm(-1.6)`" of "`pnorm(16,16.32,0.2)`"
Matlab:"`=normcdf(-1.6)`" of
"`normcdf(16,16.32,0.2)`"
appendix A: $= P(Z \geq 1.6)$

II. Instelwaarde μ zodat 1% te licht?

$$
\begin{aligned}
& P(\text{te licht}) = P(X < 16) = 0.01 \\
& \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{16-\mu}{\sigma}\right) = 0.01 \\
& \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{0.2} < \frac{16-\mu}{0.2}\right) = 0.01 \\
& \Leftrightarrow P\left(Z < \underbrace{\frac{16-\mu}{0.2}}_{\text{bepaal } 0.01\text{-de kwantiel}}\right) = 0.01
\end{aligned}
$$

Vervolg II.

$P(Z \leq -2.33) = 0.01$

$$\Rightarrow \frac{16-\mu}{0.2} = -2.33$$

$$\Rightarrow \mu = 16.466$$

R: `"=qnorm(0.01)"`
Matlab: `"=norminv(0.01)"`

III. Bepaal σ zodat 1% te licht met $\mu = 16.32$

$$
\begin{aligned}
& P(X < 16) = 0.01 \\
& \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 16.32}{\sigma} < \frac{16 - 16.32}{\sigma}\right) = 0.01 \\
& \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{-0.32}{\sigma}\right) = 0.01 \\
& \qquad\qquad \text{bepaal 0.01-de kwantiel}
\end{aligned}
$$

Vervolg III.

$$P(Z \leq -2.33) = 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{-0.32}{\sigma} = -2.33$$

$$\Rightarrow \sigma = 0.1373$$

Theoretisch vraagstuk

Bij vogelpiek (darts) is de waarschijnlijkheid dat een pijltje een concentrisch cirkeloppervlak raakt, bepaald door de stralen r en $r + dr$, gegeven door

$$P(r \leq R \leq r + dr) = C\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) dr$$

De kansvariabele R is de straal gemeten vanaf het middelpunt van het bord tot het pijltje

- Bepaal C (veronderstel dat bord met straal a altijd getroffen wordt)
- Bepaal de kans dat de roos (met straal b) getroffen wordt
- Bepaal de verwachte waarde van R

Permanente evaluatie

- donderdag 10 november
- opdrachten taak 1 in te leveren
- taak beschikbaar op BB op 27 oktober

Permanente evaluatie

- dinsdag 15 november BIR
- woensdag 16 november FYS
- meerkeuzevragen test
- gesloten boek, formularium mag gebruikt worden

Quiz

- een urne bevat k zwarte ballen en één rode
- Mathias en Sofie trekken om beurten een bal (zonder teruglegging)
- diegene die de rode bal trekt, wint
- Mathias is galant en wil Sofie laten beginnen
- is het verstandig voor Sofie om als eerste een bal te trekken?

Productregel

- productregel:

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1 \mid G_2) \cdot P(G_2)$$
$$= P(G_2 \mid G_1) \cdot P(G_1)$$

- veralgemeende productregel

$$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = P(G_3|G_1 \cap G_2)P(G_1 \cap G_2)$$
$$= P(G_3|G_1 \cap G_2)P(G_2|G_1)P(G_1)$$

$$P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) = P(G_k|G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_{k-1})$$
$$\ldots P(G_3|G_1 \cap G_2)P(G_2|G_1)P(G_1)$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

- $k = 0$

$$P(\text{Sofie wint}) = 1$$

- $k = 1$

$$P(\text{Sofie wint}) = \frac{1}{2}$$

- $k = 2$

$$\begin{aligned} P(\text{Sofie wint}) &= P(\text{S. rood } 1 \cup \text{S. rood } 3) \\ &= P(\text{S. rood } 1) + P(\text{S. rood } 3) \end{aligned}$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

$$P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) = P(G_1)P(G_2|G_1)P(G_3|G_1 \cap G_2)\ldots$$
$$P(G_k|G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
P(\text{S. rood } 3) &= P(\text{S. zwart } 1 \cap \text{M. zwart } 2 \cap \text{S. rood } 3) \\
&= P(\text{S. zwart } 1)P(\text{M. zwart } 2|\text{S. zwart } 1) \\
&\quad P(\text{S. rood } 3|\text{S. zwart } 1 \cap \text{M. zwart } 2) \\
&= \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

- $k = 2$

$$\begin{aligned} P(\text{Sofie wint}) &= P(\text{S. rood } 1 \cup \text{S. rood } 3) \\ &= P(\text{S. rood } 1) + P(\text{S. rood } 3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

- $k = 3$

$$\begin{aligned} P(\text{Sofie wint}) &= P(\text{S. rood } 1 \cup \text{S. rood } 3) \\ &= P(\text{S. rood } 1) + P(\text{S. rood } 3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

- k=oneven

$$P(\text{Sofie wint}) = \sum_{i=1}^{\frac{k+1}{2}} P(\text{S. rood}2i-1)$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k-1}$$

$$+ \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k-3}{k-2} \cdot \frac{1}{k-3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \ldots$$

$$= \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Wat is de kans dat Sofie wint?

- k=even

$$
\begin{aligned}
P(\text{Sofie wint}) = \sum_{i=1}^{\frac{k+2}{2}} P(\text{S. rood} 2i-1)
&= \frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1}.\frac{k-1}{k}.\frac{1}{k-1} \\
&\quad + \frac{k}{k+1}.\frac{k-1}{k}.\frac{k-2}{k-1}.\frac{k-3}{k-2}.\frac{1}{k-3} + \ldots \\
&= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \ldots \\
&= \frac{k+2}{2}.\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{k+2}{2k+2} > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$