Hoofdstuk 9: Nuttige uitdrukkingen

- De impuls van een voorwerp is gedefinieerd als

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

De tweede wet van Newton kan ook worden geschreven als

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$$

en kinetische energie als

$$K = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 = \frac{1}{2m}p^2.$$

- Het massamiddelpunt van een systeem heeft een snelheid gegeven door

$$\vec{v}_{\mathrm{mmpt}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i}.$$

(Hier lopen de sommen en de indices over verschillende deeltjes en niet over vectorcomponenten, net als bij de wet van Newton eerder.)

Oefening 1: 9.4

De kracht op een deeltje met massa m wordt gegeven door

$$\vec{F} = 26N\hat{\imath} - 12\frac{N}{s^2}t^2\hat{\jmath}.$$

Wat zal het verschil zijn tussen de impuls op $t = 1$ en de impuls op $t = 2$?

Oefening 2: 9.13

Een kind in een roeiboot gooit een pakje met massa $m = 5,7kg$ uit de boot. De beginsnelheid van het pakje was $10\frac{m}{s}$ in horizontale richting. Veronderstel dat de boot, die een massa $m_b = 35kg$ heeft, initieel in rust was. Het kind heeft een massa m_k die gelijk is aan $24kg$.

Wat is de snelheid van de boot nadat het pakje werd weggegooid?

Oefening 3: 9.25

Een tennisbal met masssa $m = 0,06kg$ en snelheid $25\frac{m}{s}$ raakt een muur onder een hoek van 45°. De bal kaatst terug met dezelfde snelheid. Welke impuls werd aan de bal gegeven tijdens de botsing?

Oefening 4: 9.39(a)

Bepaal de fractie van de kinetische energie van een neutron ($m_n = 1,01u$) die verloren gaat wanneer het elastisch botst met een waterstofatoom ($m_H = 1,01u$) dat initieel in rust is. Je mag veronderstellen dat de botsing centraal is.

Oefening 5: 9.46

Een sportwagen met massa $m_s = 920kg$ rijdt in op de achterkant van een terreinwagen met $m_t = 2300kg$ die stilstaat voor een rood licht. De bumpers klampen aan elkaar vast en de remmen van de auto's slaan vast. Beide auto's bewegen nog $2,8m$ naar voor. De politieagent schat dat de coefficiënt van kinetische wrijving tussen de banden en het wegdek gelijk is aan $0,8$ is en berekent de snelheid van de sportwagen vlak voor de botsing. Wat was deze snelheid?

Oefening 6: 9.56

Twee biljartballen van gelijke massa hebben snelheden die loodrecht op elkaar staan. Hun banen kruisen in de oorsprong van een carthesisch assenstelsel. Initieel beweegt bal A langs de y-as met een snelheid van $2,0\frac{m}{s}$ en bal B beweegt langs de x-as met snelheid $3,7\frac{m}{s}$. Na de botsing — die we elastisch veronderstellen — beweegt bal B over de y-as in positieve richting.

Wat is de richting waarin bal A beweegt na de botsing en wat zijn de snelheden van de ballen na de botsing?

Oplossingen

Oplossing 1

- Aangezien

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad \text{volgt} \quad \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t.$$

- Uitwerken van de integraal levert

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{p} &= \int_{1s}^{2s} (26N\hat{\imath} - 12Ns^{-2}t^2\hat{\jmath})\,\mathrm{d}t \\
&= 26N\hat{\imath}(2s - 1s) - 12\frac{N}{s^2}\hat{\jmath}\frac{(2s)^3 - (1s)^3}{3} \\
&= 26\frac{kg \cdot m}{s}\hat{\imath} - 28\frac{kg \cdot m}{s}\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Oplossing 2

- Er werken initieel geen netto externe krachten op het systeem, dat we kiezen als de unie van het kind, de boot en het pakje. Daarom geldt dat de totale impuls (als vectoriële grootheid) behouden blijft. (Er is de zwaartekracht op het pakje die niet meer zal worden gecompenseerd wanneer het pakje wordt weggeworpen maar dat zal geen invloed hebben op het antwoord van deze vraag.)
- Kies de richting waarin het pakje werd gegooid als de positieve x-as.
- De totale impuls van het systeem voor het gooien was nul. Na het gooien geldt daarom

$$m_p v_{p,x} + (m_k + m_b) v_{k+b,x} = (m_p + m_k + m_b)0 = 0 \quad \Rightarrow v_{k+b,x} = -\frac{m_p}{m_k + m_b} v_{p,x}$$

Het minteken duidt er op dat de boot met het kind achteruit zullen bewegen als het pakje vooruit wordt geworpen.

Oplossing 3

- Kies een assenstelsel waarbij de x-richting langs de muur gericht is en de y-as loodrecht staat op de muur, zodanig dat de componenten van de initiële snelheid van de tennisbal beiden positief zijn.
- Voor de botsing heeft de bal een impuls

$$\vec{p} = 0,06kg \left(25\frac{m}{s}\cos(45^\circ)\hat{\imath} + 25\frac{m}{s}\sin(45^\circ)\hat{\jmath} \right).$$

- Na de botsing is het teken van de y-component omgekeerd en geldt

$$\vec{p}' = 0,06kg \left(25\frac{m}{s}\cos(45^\circ)\hat{\imath} - 25\frac{m}{s}\sin(45^\circ)\hat{\jmath} \right).$$

- Dit betekent

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{kg \cdot m}{s}\hat{\jmath}.$$

Oplossing 4

- Een centrale (of frontale) botsing betekent dat het probleem zich essentieel in één dimensie afspeelt. Dat de botsing elastisch is, betekent dat de kinetische energie behouden is.
- Uitdrukken van de behoudswetten van kinetische energie en impuls (in de initiële bewegingsrichting van het neutron) levert

$$\frac{1}{2}m_n v_{n,v}^2 = \frac{1}{2}m_n v_{n,n}^2 + \frac{1}{2}m_H v_{H,n}^2$$
$$m_n v_{n,v} = m_n v_{n,n} + m_H v_{H,n}.$$

- Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kan je oplossen, gebruikmakend dat $m_H = m_n$. De oplossingen zijn

$$v_{n,n} = v_{n,v};\ \ v_{H,n} = 0 \quad \text{en} \quad v_{n,n} = 0;\ \ v_{H,n} = v_{n,v}.$$

  In het algemeen zal één van de oplossingen van een botsingsprobleem altijd zijn dat de deeltjes elkaar niet zien en hun eindsnelheden (of -impulsen) dezelfde waarde hebben als in het begin.

Oplossing 5

- Behoud van impuls vertelt ons dat de impuls van de sportwagen zal worden verdeeld over de beide wagens bij de botsing, dus

$$m_s \vec{v}_v = \vec{p}_v = \vec{p}_n = (m_s + m_t)\vec{v}_n.$$

- De twee wagens samen ondervinden op dat ogenblik enkel een netto-kracht gegeven door de kinetische wrijvingskracht. Aangezien deze net als de som van de massa's constant is, is ook de versnelling constant ($\vec{F} = m\vec{a}$), en dus geldt ook

$$v_n^2 = 2a\Delta s = 2\frac{F}{m}\Delta s = 2\mu_k g \Delta s.$$

- Dit combineren met de relatie hierboven levert

$$v_v = \frac{m_s + m_t}{m_s} v_n = \frac{m_s + m_t}{m_s}\sqrt{2\mu_k g \Delta s} = 23\frac{m}{s}.$$

Oplossing 6

- Bij een elastische botsing zonder uitwendige krachten gelden zowel behoud van kinetische energie als behoud van impuls. Deze wetten uitschrijven in het coördinaatstelsel beschreven in de opgave levert
$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_{A,y}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,x}^2 &= \frac{1}{2}mv_{A,x}'^2 + \frac{1}{2}mv_{A,y}'^2 + \frac{1}{2}mv_{B,y}'^2 \\ mv_{B,x} &= mv'_{A,x} \\ mv_{A,y} &= mv'_{A,y} + mv'_{B,y}. \end{cases}$$
- Deze vergelijkigen kunnen worden opgelost. Het eenvoudigst is waarschijnlijk om de twee laatste vergelijkingen te gebruiken om onbekenden te elimineren uit de eerste vergelijking. Dit levert, gebruikmakend van $v'_{B,y} \neq 0$
$$v'_{B,y} = v_{A,y} \quad \text{en dus ook} \quad v'_{A,x} = v_{B,x}.$$
De twee deeltjes zijn dus net als in de andere oefening van snelheid gewisseld. Bij puntdeeltjes die elastisch en centraal botsen is dat geen onverwacht resultaat. Let echter: dit resultaat hoef je niet te bekomen, als bal B niet over de y-as zou bewogen hebben na de botsing — wat perfect mogelijk is — zou ook bal A ook in een andere richting zijn gegaan.