Nuttige uitdrukkingen

- Verband tussen frequentie en golflengte

$$v = f\lambda \quad \text{of} \quad \omega = vk \quad \text{met} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{en} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Golfsnelheid (afhankelijk van soort golf)

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{of} \quad v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{of} \ldots$$

- Alle golven die hier worden behandeld zijn een oplossing van

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

  en zijn bijgevolg van de vorm

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

- Intensiteit van een golf

$$I = \frac{P_{\text{av}}}{A}$$

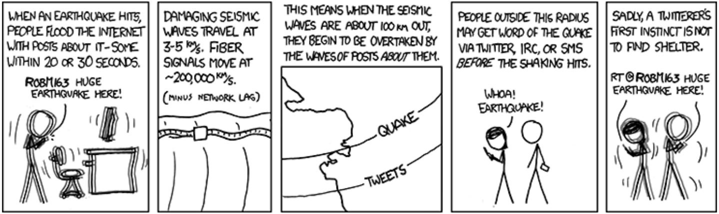
  met A het eenheidsoppervlak loodrecht op de propagatierichting van de golf.

Oefening 1 (15.10)

P- en S-golven van een aardbeving propageren aan verschillende snelheden en dit verschil kan worden gebruikt om het epicentrum van een aardbeving te lokaliseren.

a) Als je snelheden van $8,5\,\frac{km}{s}$ en $5,5\,\frac{km}{s}$ veronderstelt voor P- en S-golven, hoe ver weg gebeurde de aardbeving van een seismograaf die beide golven oppikt met een tijdsverschil van $1,7$ minuten?

b) Is één seismisch station voldoende om de positie van het epicentrum te bepalen? Verklaar.



Bron: xkcd.com

Oefening 2 (15.18)

De intensiteit van een aardbevingsgolf dewelke door de Aarde passeerde, werd gemeten gelijk te zijn aan

$$I(r) = 3,0 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

op een afstand $r = 48,0 km$ van het epicentrum.

a) Wat was de intensiteit op $1,0 km$ van de bron?

b) Wat was de hoeveelheid energie per eenheid van tijd die door een oppervlak van $2,0 m^2$ passeerde op een afstand van $1,0 km$ van de bron?

Oefening 3 (15.37)

Een touw heeft twee secties met lineaire dichtheden $0,10\frac{kg}{m}$ en $0,20\frac{kg}{m}$. Een invallende golf, beschreven door[1]

$$y(x,t) = 0,050m \cdot \sin(7,5x - 12,0t),$$

waarbij x wordt uitgedruk in m en t in seconden, propageert over het lichtere stuk van het touw.

a) Wat is de golflengte in het lichtere stuk van het touw?

b) Wat is de spankracht in het touw?

c) Wat is de golflengte wanneer de golf in het zwaardere stuk propageert?

---

[1] Deze manier van schrijven, zonder eenheden voor k en ω maar met vermelding van de eenheden van x en t is niet helemaal correct maar je komt het wel vaak tegen. De eenheden van k en ω zijn dan de inverses van deze eenheden. Bijvoorbeeld: als x werd uitgedrukt in cm zou het golfgetal gelijk zijn aan $7,5/cm = 750/m$.

Oefening 4 (15.50)

Een gitaarsnaar is in totaal $90,0cm$ lang en heeft een massa van $3,16g$. De lengte ℓ van het stuk snaar dat bespeeld wordt is $60,0cm$ en de snaar staat onder een spanning van $520N$. Wat zijn de frequenties van de grondtoon en van de eerste twee overtonen?

Oefening 5 (15.64)

Een draad bestaat uit aluminium met lengte $\ell_1 = 0,60m$ en een massa per eenheid van lengte van $\mu_1 = 2,70\frac{g}{m}$. Deze draad wordt verbonden met een stalen sectie met $\ell_2 = 0,882m$ en een lengtemassadichtheid $\mu_2 = 7,80\frac{g}{m}$. De samengestelde draad wordt aan beide uiteinden vast gehouden en er wordt een uniforme spankracht van $135N$ aangebracht.

a) Wat is de laagste staande golf-frequentie die kan bestaan in deze draad, in de veronderstelling dat er een knoop optreedt op de plaats waar de beide materialen aan elkaar zijn bevestigd?

b) Hoeveel knopen (inclusief de twee aan de uiteinden) heeft deze staande golf?

Oplossingen

Oplossing 1.1

a) Kies t_0 het ogenblik na de beving waarop de snellere P-golven de seismograaf bereiken en Δs de afstand tussen het epicentrum en de seismograaf. Dan geldt

$$v_P t_0 = \Delta s = v_S(t_0 + \Delta t).$$

Daarom geldt

$$t_0 = \frac{v_S}{v_P - v_S}\Delta t,$$

wat je kan invullen in de uitdrukking voor Δs, namelijk

$$\Delta s = v_P t_0 = \frac{v_P v_S}{v_P - v_S}\Delta t = \frac{8500\frac{m}{s} \cdot 5500\frac{m}{s}}{8500\frac{m}{s} - 5500\frac{m}{s}} \cdot 1,7 \cdot 60s = 1590km.$$

Oplossing 1.2

b) Nee, dit is niet voldoende. Eén seismisch station kan de afstand tot het epicentrum bepalen, wat betekent dat het epicentrum zich ergens in een soort bolschil rond het station bevindt. (Merk op dat deze bol door de inhomogeniteit van de Aarde niet rond hoeft te zijn!) Met een tweede station kan deze bolschil gereduceerd worden tot een cirkel. Een derde station zal deze cirkel kunnen reduceren tot twee punten. Eén van deze punten zal zich boven het oppervlak bevinden en is dus geen kandidaat voor het epicentrum.

Oplossing 2.1

a) De intensiteit van een golf op een afstand r van de bron voldoet aan

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

zodat

$$I_{r'} = \frac{P}{4\pi(r')^2} = \frac{4\pi r^2 I_r}{4\pi(r')^2} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 I_r.$$

Voor het specifieke probleem in deze oefening wordt dit

$$I_{1km} = \left(\frac{48km}{1km}\right)^2 I_{48km} = 6,9 \cdot 10^9 \frac{W}{m^2}.$$

Oplossing 2.2

b) Het vermogen P is de totale energie per eenheid van tijd die vrijkomt uit de bron van de trilling. Deze wordt in principe gelijkmatig verdeeld in alle richtingen. De energie die per eenheid van tijd door een oppervlak van $2,0m^2$ op $1km$ van de bron passeert, verhoudt zich daarom tot de totale energie zoals de $2,0m^2$ zich verhoudt tot het oppervlak van een bol met straal $r = 1km$. Daarom is de gevraagde grootheid gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\frac{2,0m^2}{4\pi(1000m)^2} P \\
&= \frac{2,0m^2}{4\pi(1000m)^2} 4\pi(1km)^2 I_{1km} \\
&= 2,0m^2 I_{1km} \\
&= 13,8kW.
\end{aligned}$$

Oplossing 3

a) De golflengte in het dunnere stuk kan worden berekend uit het golfgetal, dat kan worden afgelezen uit de uitdrukking voor de verplaatsing

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{k_l} = \frac{2\pi}{7,5m^{-1}} = 0,838m.$$

b) De spankracht is gelijk overal in het touw en kan daarom worden bepaald uit

$$F = \mu_l v_l^2 = \mu_l \left(\frac{\omega}{k_l}\right)^2 = 0,10\frac{kg}{m}\left(\frac{12,0s^{-1}}{7,5m^{-1}}\right)^2 = 0,256N.$$

c) De golflengte in het zwaardere stuk van het touw is daarom

$$\lambda_z = \frac{v_z}{f} = \frac{2\pi}{\omega}v_z = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{F}{\mu_z}} = \frac{2\pi}{12s^{-1}}\sqrt{\frac{0,256N}{0,2kg/m}} = 0,59m.$$

Oefening 4

De frequenties van de grondtoon ($n = 1$) en de overtonen ($n = 2, 3 \ldots$) zijn gegeven door

$$f_n = n\frac{v}{2\ell} = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{F\ell}{m}}$$

Bij het invullen van de getallen uit het gegeven moet je oppassen. De waarde voor ℓ die je moet invullen is $0,6m$, niet de $0,9m$ van de totale lengte. Voor het berekenen van $\mu = m/\ell$ kan je ofwel de volledige lengte en massa van de snaar gebruiken ofwel 2/3 van beide grootheden. De benodigde verhouding is natuurlijk dezelfde in beide gevallen. Zo vind je

$$f_1 = 320,7Hz; \quad f_2 = 641,4Hz; \quad f_3 = 962,1Hz.$$

Oplossing 5.1

a) Opdat een staande golf zoals beschreven in de opgave zou bestaan in de draad, dienen elk van de stukken draad een uitwijking te vertonen (als functie van positie en tijd) die op zich een staande golf is waarvan de uiteinden geen uitwijking vertonen. Dit betekent dat — met n_i de harmoniek aanduidend in beide delen van het touw —

$$\ell_i = \frac{n_i}{2}\lambda_i \quad \text{en ook} \quad \lambda_i = \frac{v_i}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{F}{\mu_i}}.$$

Deze uitdrukkingen combineren en herschrijven levert

$$\ell_i = \frac{n_i}{2f}\sqrt{\frac{F}{\mu_i}} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\ell_1 \mu_1^{1/2}}{\ell_2 \mu_2^{1/2}} \approx 0,4.$$

De kleinste getallen die deze verhouding geven, zijn $n_1 = 2$ en $n_2 = 5$. Hierdoor kan worden besloten

$$f = \frac{n_i}{2\ell_i}\sqrt{\frac{F}{\mu_i}} = 373 Hz.$$

Oplossing 5.2

b) Het aluminiumgedeelte van de draad trilt in de eerste overtoon ($n = 2$). Deze heeft drie knopen; één aan elk uiteinde en eentje in het midden. Het stalen gedeelte trilt in de vierde overtoon ($n = 5$), dewelke zes knopen heeft. Eentje is echter gemeenschappelijk met de staande golf in het aluminium, zodat het totale aantal knopen gelijk is aan

$$n_{\text{tot}} = 3 + 6 - 1 = 8.$$

Oplossing 5.3

Extra) In de les werd gevraagd of het nodig is dat het verbindingsstuk tussen beide touwen een knoop vormde opdat er staande golven konden ontstaan in het touw. Dit is niet het geval; staande golven kunnen optreden voor alle dergelijke touwen, ook wanneer het verbindingsstuk geen knoop vormt. De frequenties waarbij dit kan optreden kan je vinden op analoge manier als gebeurde in de oefening. Stel dat $\ell_1 = x\lambda_1$ en $\ell_2 = y\lambda_2$ met λ_i de golflengte van de staande golven in beide stukken van het touw. Deze golflengtes voldoen aan

$$\ell_1 = x\lambda_1 = \frac{x}{f}\sqrt{\frac{F}{\mu_1}} \quad \text{en} \quad \ell_2 = y\lambda_2 = \frac{y}{f}\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}.$$

Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden: x, y en f.

Oplossing 5.4

Opdat beide stukken touw dezelfde uitwijking zouden hebben in het aanhechtingspunt, moeten de fases van beide golven in dat punt op een bepaalde manier aan elkaar gerelateerd zijn. In het bijzonder moet

$$k_1\ell_1 + k_2\ell_2 = \frac{2\pi}{\lambda_1}\ell_1 + \frac{2\pi}{\lambda_2}\ell_2 = 2\pi x + 2\pi y$$

een veelvoud zijn van $\pi/2$. Verder dient ook

$$\frac{x}{y} = \frac{\ell_1\mu_1^{1/2}}{\ell_2\mu_2^{1/2}},$$

dit haal je uit de uitdrukkingen op de vorige slide. Hieruit kan je de mogelijke koppels (x, y) halen en hiermee kan je dan de frequentie bepalen uit de relaties op de vorige slide. Dit zal hetzelfde resultaat geven omdat deze gebruikt werden om de tweede vergelijking voor x en y op te stellen en het antwoord zal dus consistent blijven.