Examen Toegepaste Wiskunde III Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 2e zittijd 2015–2016

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Bereken het oppervlak in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ tussen de grafieken van $x^2y = 1$ en $x^2y = 8$ en $xy^2 = 1$ en $xy^2 = 27$.

/10

2. Bereken $\oint_{\alpha} \mathbf{F} d\alpha$ met α de ruit, gegeven door de vier lijnstukjes die je in één vergelijking kan schrijven als $|x| + |y| = 1$ en $\mathbf{F}(x, y) = \left(2y, x^3\right)$. Hint: schrijf de vergelijking van de vier zijden van de ruit op. $\boxed{\quad /10}$

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

$\boxed{\quad\quad /10}$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 2y(t) \end{array} \right.$$

/10

5. Gegeven de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

op het vierkant $[0,1] \times [0,1]$ met als randcondities $\begin{cases} \forall y \in [0,1] : \psi\,(0,y) = 0 \\ \forall y \in [0,1] : \psi\,(1,y) = 0 \\ \forall x \in [0,1] : \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\,(x,0) = 0 \\ \forall x \in [0,1] : \psi\,(x,1) = \sin 2\pi x \end{cases}$

Zoek de unieke functie $\psi\,(x,y)$ die hier aan voldoet door gebruik van scheiding van veranderlijken. /10

6. Los op door gebruik van de Laplace–transformatie:

$$y'' + y' = 1 - t \text{ met } y\,(1) = 2 \text{ en } y'\,(1) = -1$$

/10

7. Los de volgende differentievergelijking van orde 2 op:

$$y\,(n+2) - 4y\,(n+1) + 4y\,(n) = 2^{n+4} \text{ met } y\,(0) = 2 \text{ en } y\,(1) = 6$$

| /10 |

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\quad\quad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\quad\quad /60}$

Oplossingen:

1. Bereken het oppervlak in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ tussen de grafieken van $x^2y = 1$ en $x^2y = 8$ en $xy^2 = 1$ en $xy^2 = 27$.

   Stel $\begin{cases} u = x^2y \\ v = xy^2 \end{cases}$

   $\Rightarrow D_{xy}(u,v) = \begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 3x^2y^2$

   $\Rightarrow D_{uv}(x,y) = \dfrac{1}{3x^2y^2} = \dfrac{1}{3(uv)^{2/3}}$

   $S = \iint\limits_G dxdy = \int_1^8\int_1^{27} \dfrac{1}{3(uv)^{2/3}} dvdu = \dfrac{1}{3}\int_1^8 \dfrac{du}{u^{2/3}} \int_1^{27} \dfrac{dv}{v^{2/3}} = \dfrac{1}{3} \cdot 3\left[u^{1/3}\right]_1^8 \cdot 3\left[v^{1/3}\right]_1^{27} = 6$

2. Bereken $\oint\limits_\alpha \mathbf{F} d\alpha$ met α de ruit, gegeven door de vier lijnstukjes die je in één vergelijking kan schrijven als $|x| + |y| = 1$ en $\mathbf{F}(x,y) = \left(2y, x^3\right)$. Hint: schrijf de vergelijking van de vier zijden van de ruit op.

   $\text{rot}\,\mathbf{F} = \dfrac{\partial\left(x^3\right)}{\partial x} - \dfrac{\partial(2y)}{\partial y} = 3x^2 - 2$

   $\oint\limits_\alpha \mathbf{F} d\alpha = \iint\limits_S \text{rot}\,\mathbf{F} dydx = \int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{1+x} \left(3x^2-2\right) dydx + \int_0^1\int_{x-1}^{1-x} \left(3x^2-2\right) dydx$

   $= \int_{-1}^{0} \left[\left(3x^2-2\right) y\right]_{-1-x}^{1+x} dx + \int_0^1 \left[\left(3x^2-2\right) y\right]_{x-1}^{1-x} dx$

   $= \int_{-1}^{0} \left(6x^2 + 6x^3 - 4 - 4x\right) dx + \int_0^1 \left(6x^2 - 6x^3 - 4 + 4x\right) dx$

   $= \left[2x^3 + \dfrac{3}{2}x^4 - 4x - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[2x^3 - \dfrac{3}{2}x^4 - 4x + 2x^2\right]_0^1$

   $= -3$

   Korter is uiteraard de symmetrie van de figuur uit te buiten:

   $... = 4\int_0^1\int_0^{1-x} \left(3x^2-2\right) dydx = 4\int_0^1 \left(3x^2-2\right)(1-x)\, dx$

   $= 4\int_0^1 \left(-3x^3 + 3x^2 + 2x - 2\right) dx = 4\left[-\dfrac{3}{4}x^4 + x^3 + x^2 - 2x\right]_0^1 = -3$

3. Los op met de methode van Fuchs:

   $$4xy'' + 2y' + y = 0$$

   Stel

   $$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

Dan is

$$
\begin{aligned}
&4xy'' + 2y' + y \\
&= \quad 4\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= \quad x^r\left(4r(r-1)+2r\right)c_0 x^{-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{m=n-1}{=} \quad x^r\left(4r(r-1)+2r\right)c_0 x^{-1} + 4\sum_{m=0}^{\infty}(m+1+r)(m+r)c_{m+1}x^m + 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+1+r)c_{m+1}x^m + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \quad x^r\left[\left(4r(r-1)+2r\right)c_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1+r)(4r+4n+2)c_{n+1} + c_n\right)x^n\right]
\end{aligned}
$$

Opdat dit gelijk zou zijn aan nul, moet

$$
\begin{aligned}
\left(4r(r-1)+2r\right)c_0 &= 0 \\
\forall n &\in \mathbb{N} : (n+1+r)(4r+4n+2)c_{n+1} = -c_n
\end{aligned}
$$

Omdat we met $c_0 = 0$ toch maar alleen de nuloplossing krijgen, kunnen we de relaties herleiden tot

$$
\begin{aligned}
4r^2 - 2r &= 2r(2r-1) = 0 \\
\forall n &\in \mathbb{N} : c_{n+1} = -\frac{c_n}{(n+1+r)(4r+4n+2)}
\end{aligned}
$$

De indexwortels zijn $r_1 = \frac{1}{2}$ en $r_2 = 0$. Voor $r_1 = \frac{1}{2}$ wordt de recursiebetrekking

$$
c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(2n+3)(n+1)}
$$

zodat

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 1} \\
c_2 &= -\frac{c_1}{2\cdot 5\cdot 2} = \frac{c_0}{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 2!} \\
c_3 &= -\frac{c_2}{2\cdot 7\cdot 3} = -\frac{c_0}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3!} \\
&\dots \\
\forall n &\in \mathbb{N}_0 : c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n\cdot(3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n+1))\cdot n!}
\end{aligned}
$$

Nu is

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^n c_0}{2^n\cdot(3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1))\cdot n!} &= \frac{(-1)^n c_0\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{2^n\cdot(3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1))\cdot n!\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \\
&= \frac{(-1)^n c_0\cdot 2^n\cdot n!}{2^n\cdot(2n+1)!\cdot n!} = (-1)^n\frac{c_0}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Voor $r_2 = 0$ verkrijgen we

$$
d_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)(2n+1)}
$$

waaruit

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{d_0}{2\cdot 1\cdot 1} \\
d_2 &= -\frac{d_1}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{d_0}{2^2\cdot 2\cdot 1\cdot 3} \\
d_3 &= -\frac{d_2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{d_0}{2^3\cdot 3!\cdot 1\cdot 3\cdot 5} \\
&\ldots \\
\forall n &\in \mathbb{N}_0 : d_n = \frac{(-1)^n d_0}{2^n\cdot n!\cdot (3\cdot 5\cdot ..(2n-1))}
\end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n d_0}{2^n\cdot n!\cdot (3\cdot 5\cdot ..(2n-1))} &= \frac{(-1)^n d_0\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots\cdot 2n}{2^n\cdot n!\cdot (3\cdot 5\cdot ..(2n-1))\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \\
&= \frac{(-1)^n d_0\cdot 2^n\cdot n!}{2^n\cdot (2n)!\cdot n!} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Hieruit vinden we de oplossing

$$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} + d_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

Karakteristieke vergelijking: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1+3i, 1-3i\}$

Neem $\lambda = 1+3i$

$\Rightarrow E_{1+3i} : \begin{pmatrix} 4-1-3i & -3 \\ 6 & -2-1-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3i & -3 \\ 6 & -3-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_{1+3i} : x - ix - y = 0$

Kies $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^{(1+3i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^t(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos 3t + i\sin 3t) \\ (1-i)e^t(\cos 3t + i\sin 3t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = C_1 e^t\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix} \sin 3t \\ \sin 3t - \cos 3t \end{pmatrix}$

5. Gegeven de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

op het vierkant $[0,1]\times[0,1]$ met als randcondities $\begin{cases} \forall y \in [0,1] : \psi(0,y) = 0 \\ \forall y \in [0,1] : \psi(1,y) = 0 \\ \forall x \in [0,1] : \dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = 0 \\ \forall x \in [0,1] : \psi(x,1) = \sin 2\pi x \end{cases}$

Zoek de unieke functie $\psi(x,y)$ die hier aan voldoet door gebruik van scheiding van veranderlijken.

Stel $\psi(x,y) = X(x)\,Y(y)$
$\Rightarrow X''Y = XY''$
$\dfrac{X''}{X}(x) = \dfrac{Y''}{Y}(y) = -\lambda^2$
$\underline{X\text{–probleem:}}\begin{cases} X'' = -\lambda^2 X \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$
$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = C_2 \sin\lambda x$
$X(1) = C_2 \sin\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n\pi$
$\Rightarrow X_n(x) = \sin n\pi x$
$\underline{Y\text{–probleem:}}\begin{cases} Y'' = -\lambda^2 Y \\ Y'(0) = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow Y(y) = C_3 \cos\lambda y + C_4 \sin\lambda y$
$\Rightarrow Y'(y) = \lambda(-C_3 \sin\lambda y + C_4 \cos\lambda y)$
$Y'(0) = \lambda C_4 = 0 \Rightarrow Y(y) = C_4 \cos\lambda y$
Superpositie: $\psi(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \cos n\pi y$
Randvoorwaarde: $\psi(x,1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \sin n\pi x = \sin 2x$

$$\Rightarrow \text{Uit de Fourier Sinusregel: } a_n = 2\int_0^1 \sin(2\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \begin{cases} 4\dfrac{\sin n\pi}{\pi(n^2-4)} = 0 & \text{als} \quad n \neq 2 \\ 2\displaystyle\int_0^1 \sin^2 2\pi x dx = 1 & \text{als} \quad n = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \psi(x,y) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$

6. Los op door gebruik van de Laplace–transformatie:

$$y'' + y' = 1 - t \text{ met } y(1) = 2 \text{ en } y'(1) = -1$$

Stel $t = s + 1$
$\Rightarrow w'' + w' = -s$ met $w(0) = 2$ en $w'(0) = -1$
$\Rightarrow \mathcal{L}[w''] + \mathcal{L}[w'] = \mathcal{L}[-s]$
$\Rightarrow \big(k^2 W(k) - kw(0) - w'(0)\big) + kW(k) - w(0) = -\dfrac{1}{k^2}$
$\Rightarrow \big(k^2 W(k) - 2k + 1\big) + kW(k) - 2 = -\dfrac{1}{k^2}$
$\Rightarrow k^2 W(k) + kW(k) - 2k + 1 - 2 = -\dfrac{1}{k^2}$
$\Rightarrow \big(k^2 + k\big) W(k) = 2k + 1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{2k^3 + k^2 - 1}{k^2}$
$\Rightarrow W(k) = \dfrac{2k^3 + k^2 - 1}{k^3(k+1)} = -\dfrac{1}{k^3} + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{2}{k+1}$
$\Rightarrow w(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{k^3}\right] = 2e^{-s} + s - \dfrac{1}{2}s^2$
$\Rightarrow y(t) = 2e^{1-t} + (t-1) - \dfrac{1}{2}(t-1)^2 = 2e^{1-t} - \dfrac{1}{2}t^2 + 2t - \dfrac{3}{2}$

7. Los de volgende differentievergelijking van orde 2 op:

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = 2^{n+4} \text{ met } y(0) = 2 \text{ en } y(1) = 6$$

KV: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
$\Rightarrow y_c(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n$
Annihilator $N(E) = (E - 2)$

Hyperannihilator $p(E)\,N(E) = (E-2)^3$
$\Rightarrow y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n + a_3 n^2 2^n$
Zonder verlies van algemeenheid stellen we $y_p(n) = a_3 n^2 2^n$
Eis: $a_3 (n+2)^2 2^{n+2} - 4a_3 (n+1)^2 2^{n+1} + 4a_3 n^2 2^n = 2^{n+4}$
$\Rightarrow a_3 = 2$
$\Rightarrow y_p(n) = 2n^2 2^n = n^2 2^{n+1}$
$\Rightarrow y(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2 2^{n+1}$
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \\ y(1) = 2c_1 + 2c_2 + 4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$
$\Rightarrow y(n) = 2^{n+1} - n2^n + n^2 2^{n+1} = 2^n \left(2n^2 - n + 2\right)$