Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 2e zittijd 2018–2019

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Zij $z = e^{\frac{\pi}{11}i}$, schrijf $z^{15} + z^7$ met slechts één sinus–of cosinusfunctie.

/6

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{ccccc|ccc} (3+i)\,z^4 & +(-8+2i)\,z^3 & +(8+5i)\,z^2 & +(4+7i)\,z & -1-2i & z^2 & -iz & -i \\ \cline{6-8} & & & & & & & \end{array}$$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\displaystyle \lim_{x \to -\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{2x^2 + 11x + 15}}{\sqrt[3]{-4x^3 - 16x^2 - 5x + 25}}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos 3x}{2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(1 + \cos\frac{1}{x} - \cos\frac{3}{x}\right)^{x^2}$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\log_3(x+2) - \log_9 x^2 = \log_3(2x-1) - \log_3(x-4) - 1$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

5. Zij

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{als} \quad x \geq 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{als} \quad x < 0 \end{cases}$$

Bepaal a en b zodanig dat f differentieerbaar is in 0.
Voor 5 bonuspunten: is voor de gevonden waarden van a en b de functie ook *continu* differentieerbaar? Motiveer je antwoord.

/6

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 1 + \sin\theta + e^{\sin\theta}$$

en maak hier een tekening van. Bepaal de maximale en minimale afstand tot de oorsprong.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x + 8}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$$

/6

8. Bereken door een goeie substitutie van tweede klasse

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

/6

9. Bereken

$$\int_0^3 \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\left(\lfloor x \rfloor\right)^2 + 1} dx$$

/6

10. Schets de parameterkromme met parametervergelijking

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$$

en bereken (a) de oppervlakte en (b) het omwentelingsvolume van de lus (er is maar één lus, dus het kan niet missen!). Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening, en let op de oriëntatie!

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Zij $z = e^{\frac{\pi}{11}i}$, schrijf $z^{15} + z^7$ met slechts één sinus–of cosinusfunctie.
$\left(e^{\frac{\pi}{11}i}\right)^{15} + \left(e^{\frac{\pi}{11}i}\right)^{7} = \cos\dfrac{15\pi}{11} + i\sin\dfrac{15\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + i\sin\dfrac{7\pi}{11} = -2\cos\dfrac{4\pi}{11}$

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
(3+i)\,z^4 & +(-8+2i)\,z^3 & +(8+5i)\,z^2 & +(4+7i)\,z & -1-2i & z^2 & -iz & -i \\ \cline{6-8}
 & & & & & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
(3+i)\,z^4 & +(-8+2i)\,z^3 & +(8+5i)\,z^2 & +(4+7i)\,z & -1-2i & z^2 & -iz & -i \\ \cline{6-8}
-((3+i)\,z^4 & +(1-3i)\,iz^3 & +(1-3i)\,z^2) & & & (3+i)\,z^2 & +(-9+5i)\,z & +(2-i) \\ \cline{1-3}
0 & (-9+5i)\,z^3 & +(7+8i)\,z^2 & & & & & \\
 & -((-9+5i)\,z^3 & +(5+9i)\,z^2 & +(5+9i)\,z) & & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +(2-i)\,z^2 & +(-1-2i)\,z & & & & \\
 & & -((2-i)\,z^2 & -(1+2i)\,z & -1-2i) & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 & & & \\
\end{array}$$

$Q(z) = (3+i)\,z^2 + (-9+5i)\,z + 2 - i$
$R(z) = 0$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{2x^2+11x+15}}{\sqrt[3]{-4x^3-16x^2-5x+25}}$

$$= \lim_{x\to-\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{(2x+5)(x+3)}}{\sqrt[3]{(2x+5)^2(-x+1)}} = \lim_{x\to-\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt[6]{2x+5}}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{-x+1}} = \lim_{x\to-\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt[6]{2x+5}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{7}{2}}}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{5}{2}+} \frac{1}{\sqrt[6]{2x+5}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{7}{2}}} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt[6]{2x+5}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{7}{2}}}$ bestaat niet

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos 3x}{2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$

Stel $y = x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + y$

$$= \lim_{y\to0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}+3y\right)}{2\sin(\pi-y)} = \lim_{y\to0}\frac{-\sin y - \sin 3y}{2\sin y} = \lim_{y\to0}\frac{-2\sin 2y\cos y}{2\sin y}$$

$$= -2\lim_{y\to0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y = -2$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{3}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}\right)^{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}\right)^{2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}}\cdot x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}\cdot x^2}$
$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2}=e^4$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$\log_3(x+2)-\log_9 x^2=\log_3(2x-1)-\log_3(x-4)-1$$

$\Leftrightarrow \log_3(x+2)-\log_3 x=\log_3(2x-1)-\log_3(3x-12)$
$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x+2}{x}\right)=\log_3\left(\frac{2x-1}{3x-12}\right)$
$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x+2}{x}\right)=\log_3\left(\frac{2x-1}{3x-12}\right)$
$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x}=\frac{2x-1}{3x-12}$
$\Leftrightarrow (x+2)(3x-12)=x(2x-1)$
$\Leftrightarrow x^2-5x-24=0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-8)=0$
$\Leftrightarrow x\in\{-3,8\}$, maar de eerste oplossing dient verworpen te worden
$\Rightarrow x=8$

5. Zij

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}x^2+2x+3 & \text{als} \quad x\geq 0\\ a\sin x+b\cos x & \text{als} \quad x<0\end{cases}$$

Bepaal a en b zodanig dat f differentieerbaar is in 0.
Voor 5 bonuspunten: is voor de gevonden waarden van a en b de functie ook *continu* differentieerbaar? Motiveer je antwoord.
$f'_r(0)=2$
$f'_l(0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{a\sin h+b\cos h-b}{h}=a+\lim\limits_{h\to0}\frac{(b\cos h-b)}{h}=a+\lim\limits_{h\to0}\frac{b\cos h-b}{h}\overset{(H)}{=}a+\lim\limits_{h\to0}(-b\sin h)=a$
f moet echter ook continu zijn $\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}(a\sin x+b\cos x)=b=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+2x+3\right)=3$
$\Rightarrow (a,b)=(2,3)$
Voor de rest is

$$f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}2x+2 & \text{als} \quad x\geq 0\\ 2\cos x-3\sin x & \text{als} \quad x<0\end{cases}$$

en zowel $\lim\limits_{x\to0}f'_l(x)=\lim\limits_{x\to0}f'_r(x)=2$. De functie is dus continu differentieerbaar.

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

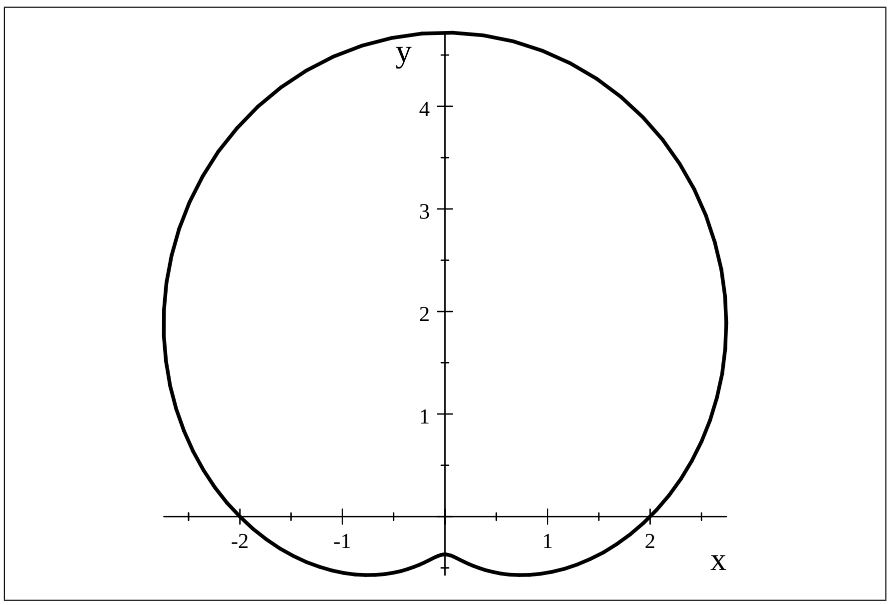
$$r(\theta)=1+\sin\theta+e^{\sin\theta}$$

en maak hier een tekening van. Bepaal de maximale en minimale afstand tot de oorsprong.

- Domein $=\mathbb{R}$
  Periode $=2\pi$
  Beperkt domein $=[0,2\pi]$

- $r = 1 + \sin\theta + e^{\sin\theta} = 0$ kan niet want $1 + e^{\sin\theta} > 1$
  $\Rightarrow r$ heeft geen nulpunten
- $r' = \cos\theta\left(e^{\sin\theta} + 1\right) = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
r	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$M\,(e+2)$	$\searrow$	$m\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$



7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x + 8}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}dx$$

$$\frac{x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x + 8}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} = x + \frac{5x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} = x + \frac{5x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{(x+1)\,(x-1)^3} = x + \frac{A}{(x-1)^3} +$$

$\dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{x+1}$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{5x^3-9x^2+2x+8}{x+1}\right|_{x=1} = 3 \\
\frac{5x^3-9x^2+2x+8}{(x+1)(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^3} &= \frac{5x^2-4x-5}{(x+1)(x-1)^2} \\
B &= \left.\frac{5x^2-4x-5}{x+1}\right|_{x=1} = -2 \\
\frac{5x^2-4x-5}{(x+1)(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} &= \frac{5x+3}{(x+1)(x-1)} \\
C &= \left.\frac{5x+3}{x+1}\right|_{x=1} = 4 \\
D &= \left.\frac{5x^3-9x^2+2x+8}{(x-1)^3}\right|_{x=-1} = 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{x^5-2x^4+5x^3-7x^2+x+8}{x^4-2x^3+2x-1} = x + \dfrac{3}{(x-1)^3} - \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$
$\Rightarrow I = \displaystyle\int \left(x + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 4\ln|x-1| +$ $\ln|x+1| + c$

8. Bereken door een goeie substitutie van tweede klasse

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Stel $t = \tan x \Rightarrow x = \operatorname{Bgtan} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ en $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$
$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Bgtan}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Bgtan}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$

9. Bereken

$$\int_0^3 \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{(\lfloor x \rfloor)^2 + 1} dx$$

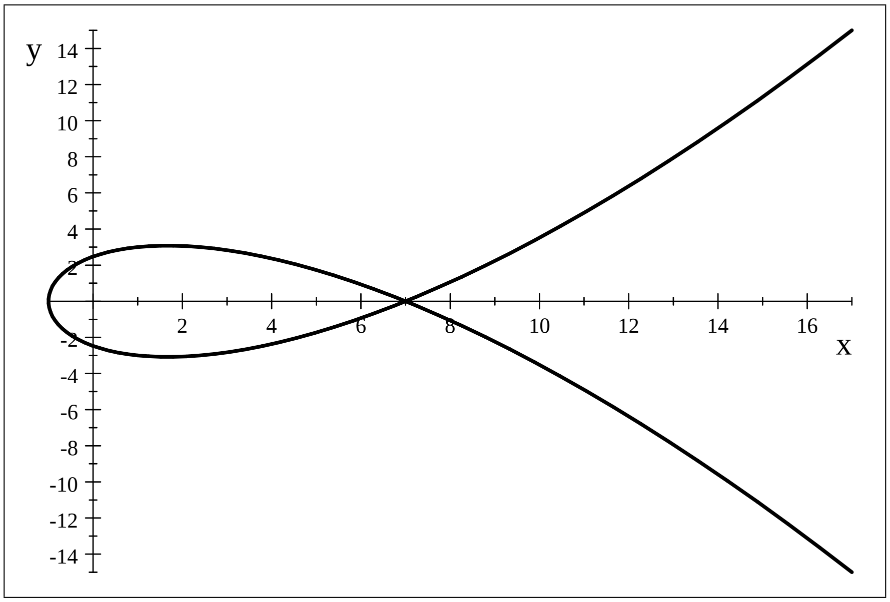
$\displaystyle\int_0^3 \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{(\lfloor x \rfloor)^2 + 1} dx = \int_0^1 1dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^3 \frac{x^2}{5} dx = [x]_0^1 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{15}\right]_2^3 = \frac{181}{60}$

10. Schets de parameterkromme met parametervergelijking

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$$

en bereken (a) de oppervlakte en (b) het omwentelingsvolume van de lus (er is maar één lus, dus het kan niet missen!). Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening, en let op de oriëntatie!

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-15	0	3	0	-3	0	15
y	17	7	1	-1	1	7	17



$$S = 2\int_0^{-2} y(t)\,x'(t)\,dt = 2\int_0^{-2} \left(t^3 - 4t\right)\cdot 4t dt = 2\int_0^{-2} \left(4t^4 - 16t^2\right) dt = 2\left[\frac{4t^5}{5} - \frac{16t^3}{3}\right]_0^{-2} = \frac{512}{15}$$

$$V = \pi\int_0^{-2} \left(y(t)\right)^2 x'(t)\,dt = \pi\int_0^{-2} \left(t^3 - 4t\right)^2 \cdot 4t dt = \pi\int_0^{-2} \left(4t^7 - 32t^5 + 64t^3\right) dt = \pi\left[\frac{1}{2}t^8 - \frac{16}{3}t^6 + 16t^4\right]_0^{-2} = \frac{128\pi}{3}$$