Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 26)

- Kracht op een bewegende lading ten gevolge van een magneetveld

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{en dus} \quad F_x = q(v_y B_z - v_z B_y).$$

op een stroomelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{F} &= \vec{v} \times \vec{B}\,\mathrm{d}q \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}\,\mathrm{d}q \\ &= \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ &= I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \end{aligned}$$

zodat

$$\mathrm{d}F_x = I(\mathrm{d}y\ B_z - \mathrm{d}z\ B_y).$$

- Tweede wet van Newton voor een puntlading

$$ma = m\frac{v_\perp^2}{r} = qv_\perp B = qvB\sin(\vartheta)$$

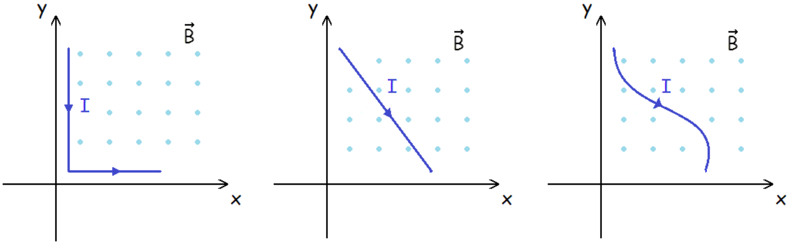
met $\vec{v}_\perp$ het gedeelte van de snelheid loodrecht op het magneetveld $\vec{B}$ en ϑ de hoek tussen $\vec{v}$ en $\vec{B}$.

Oefening 1: Kracht op een draad (26.18, 26.20)

Een draad waarin een stroom van $I = 1,8A$ loopt wordt geplooid zoals in de figuren en wordt geplaatst in een magneetveld

$$\vec{B} = B\hat{k} = 1,2T\ \hat{k}.$$

Elk van de draden overbrugt een verticale afstand van $4cm$ en een horizontale van $3cm$. Toon aan dat de totale kracht op de drie draden dezelfde is als begin- en eindpunten van de draad dezelfden zijn voor de drie gevallen. Dit is makkelijk voor de twee linkse, de rechtse is moeilijker.



Oefening 2: Geladen deeltje in een $\vec{B}$-veld (26.73)

Een deeltje met massa m en lading q bevindt zich in een gebied met een uniform magneetveld $\vec{B} = B\hat{k}$. De snelheid van het deeltje op $t = 0$ is

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\| = v_\perp \hat{\jmath} + v_\| \hat{k},$$

zodat de baan van het deeltje een helix gaat beschrijven.

1. Toon aan dat de straal van de helix wordt gegeven door

$$r = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

2. Toon aan dat het deeltje een tijd

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

nodig heeft om een omwenteling van de helix te beschrijven.

3. Wat is de verplaatsing in de z-richting tijdens dit tijdsinterval?

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 27, deel 1)

- De wet van Biot-Savart: Het magneetveld $\vec{B}(\vec{r})$ ten gevolge van een bewegende lading q met snelheid $\vec{v}$ die zich op plaats $\vec{r}'$ bevindt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\ \vec{v} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3},$$

en ten gevolge van een stroomelementje

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathrm{d}q\ \vec{v} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\vec{\ell} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

- Vergelijk met de wet van Coulomb: Het elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$ voor een puntlading

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

en ten gevolge van een ladingselementje

$$\mathrm{d}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{d}q \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 27, deel 2)

- De carthesische componenten van het magneetveld worden volgens de wet van Biot-Savart gegeven door

$$B_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} q(v_y(z - z') - v_z(y - y'))$$

waarbij

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

en andere componenten kunnen worden bekomen door de permutatie $x \to y \to z \to x$.

- Voor een stroomelementje geldt

$$\mathrm{d}B_x(\vec{r}) = B_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} I \left(\mathrm{d}\ell_y(z - z') - \mathrm{d}\ell_z(y - y')\right))$$

met dezelfde opmerking voor de andere componenten als hierboven.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 27, deel 3)

- De wet van Ampère zegt dat de integraal van de tangentiële component van een magneetveld langs een *gesloten* contour evenredig is met de totale stroom die door het binnenste van het contour loopt

$$\oint_C B_t \, \mathrm{d}\ell = \mu_0 I_{\text{in } C} = \mu_0 \int_S J_n \, \mathrm{d}A.$$

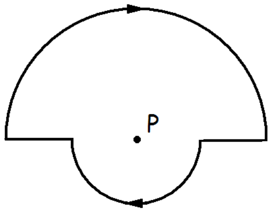
- Vergelijk dit met de wet van Gauss

$$\oint_S E_n \, \mathrm{d}A = \frac{Q_{\text{in } V}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, \mathrm{d}\vec{r}.$$

Beide wetten zeggen dat de integraal van een grootheid over een gebied evenredig is aan de integraal van een andere grootheid op de rand van dat gebied. Elektriciteit en magnetisme zijn twee zijden van dezelfde medaille.

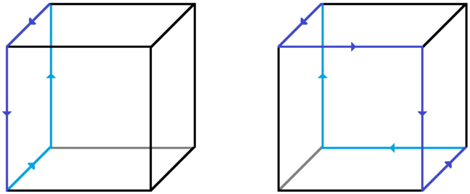
Oefening 3: Magnetisch veld tgv een stroom (27.83)

Een gesloten circuit wordt gevormd door twee geleiders in de vorm van halve cirkels met stralen 40cm en 20cm met eenzelfde middelpunt P. Ze worden verbonden door twee horizontale geleiders. In dit circuit loopt een stroom $I = 3,0A$ in wijzerzin. Wat is het magneetveld in het punt P?



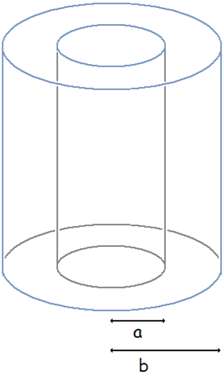
Oefening 4: Magnetisch veld tgv een stroom

Beschouw twee kubussen met ribbes met lengte $a = 1,0m$ waardoor een stroom van $2A$ loopt zoals aangeduid in blauw op de figuren. Wat is het magneetveld in het midden van de kubus?
Je mag kiezen of je gebruik maakt van de uitdrukking voor eindig of oneindig lange draden.



Oefening 5: De wet van Ampère (27.49)

Een lange cylindrische tube heeft een binnenste straal a en een buitenste straal b. De tube draagt een stroom I parallel met de centrale as. Wat is de grootte van het magnetisch veld binnenin als functie van de afstand tot de centrale as? Je mag veronderstellen dat de stroom uniform verdeeld is in de tube en er dus een homogene stroomdichtheid $\vec{J}$ is.

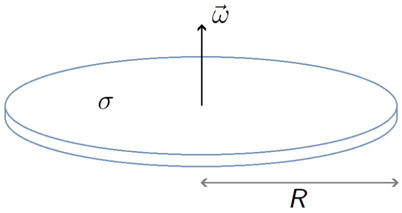


Oefening 6: Een roterende geladen schijf (27.97)

Een isolerende schijf met straal R heeft een uniforme oppervlakteladingsdichtheid σ. Deze schijf draait rond haar symmetrie-as met een constante hoeksnelheid ω. Zoek het magneetveld in het midden van de schijf.

- Zoek eerst een geschikt infinitesimaal ladingselementje dq.
- Bepaal de infinitesimale bijdrage dB ten gevolge van dit ladingselementje.
- Integreer over de schijf.

Wie wil, mag ook een roterende kegel beschouwen ♠.



Nuttige uitdrukkingen (hoofdstuk 28)

- Magnetische flux is de integraal van de normaalcomponent van een magneetveld door een oppervlak, geïntegreerd over dat oppervlak

  $$\phi_m = \int_S B_n \, \mathrm{d}A.$$

  Deze uitdrukking is dezelfde als voor elektrische flux

  $$\phi_e = \int_S E_n \, \mathrm{d}A.$$

- De wet van Faraday zegt dat *emf* kan worden opgewekt in een stroomkring door de magnetische flux door het oppervlak omsloten door de kring te veranderen.

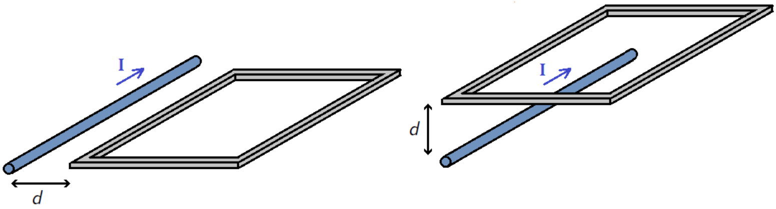
  $$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S B_n \, \mathrm{d}A$$

- De wet van Lenz zegt dat de geinduceerde *emf* zodanig is dat het veranderingen die de *emf* induceren wil tegenwerken.

Oefening 7: Magnetische flux (28.28)

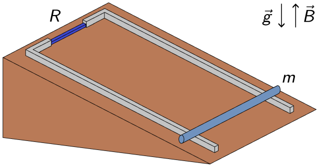
Een rechtoekige lus met afmetingen $a = 5,0cm$ bij $b = 10,0cm$ bevindt zich op $d = 2,0cm$ van een oneindig lange geleider waardoor een stroom $I = 20A$ loopt.

- Bereken de flux door de linkse lus.
- Bereken de flux door de rechtse lus (♠).



Oefening 8: Een rollende staaf (28.43)

Een geleidende staaf bevindt zich op metalen rails zoals in de figuur. De rails liggen op een afstand ℓ van elkaar.



1. Toon aan dat er een terugwerkende kracht werkt op de staaf dewelke is gericht langs de helling een grootte
$$F = \frac{B^2\ell^2 v\cos^2(\vartheta)}{R}$$
heeft met v de snelheid van de staaf en ϑ de hellingshoek.
2. Toon aan dat de uiteindelijke snelheid van de staaf wordt gegeven door
$$v_\infty = \frac{mgR\sin(\vartheta)}{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}.$$
3. Wat is $v(t)$ als $v(0) = 0$? Zal de v_∞ groter of kleiner zijn als je ook rekening houdt met het magneetveld ten gevolge van de geïnduceerde stroom? ♠

Oplossingen

Oefening 1: Oplossing (1)

- De totale kracht $\vec{F}$ op de L-vormige draad is gelijk aan de som van de kracht op het horizontale deel van de draad plus de kracht op het verticale deel:
$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_v.$$
- De kracht op het horizontale stuk van de draad wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
\vec{F}_h &= I\vec{\ell}_h \times \vec{B} \\
&= I\ell_h\hat{\imath} \times B\hat{k} \\
&= I\ell_h B(\hat{\imath} \times \hat{k}) \\
&= -I\ell_h B\hat{\jmath} \\
&= -1,8A \cdot 3,00cm \cdot 1,2T\hat{\jmath} \\
&= -0,0648N\ \hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Oefening 1: Oplossing (2)

- De kracht op het verticale stuk kan op dezelfde manier worden berekend:

$$\begin{aligned} \vec{F}_v &= I\vec{\ell}_v \times \vec{B} \\ &= I\ell_v(-\hat{\jmath}) \times B\hat{k} \\ &= -I\ell_v B\hat{\jmath} \times \hat{k} \\ &= -I\ell_v B\hat{\imath} \\ &= -1,8A \cdot 4,00cm \cdot 1,2T\ \hat{\imath} \\ &= -0,0864N\ \hat{\imath}. \end{aligned}$$

- De totale kracht op de draad wordt bijgevolg gegeven door

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_v = -(0,0864\ \hat{\imath} + 0,0648\ \hat{\jmath})N.$$

Oefening 1: Oplossing (3)

- Voor de draad die de eindpunten van de L verbindt, wordt de kracht ten gevolge van het magneetveld gegeven door

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I\vec{\ell}_d \times \vec{B} \\ &= I(\vec{\ell}_h + \vec{\ell}_v) \times \vec{B} \\ &= \vec{F}_h + \vec{F}_v \\ &= -(0,0864\,\hat{\imath} + 0,0648\,\hat{\jmath})N.\end{aligned}$$

De kracht is dus dezelfde als voor de L-vormige draad.

Oefening 1: Oplossing (4)

- Dat de totale kracht hetzelfde is voor alle draden die eenzelfde stroom I vervoeren van een zelfde punt $\vec{a}$ tot een zelfde punt $\vec{b}$, kan worden bewezen aan de hand van de infinitesimale stroomelementjes.
- De totale kracht op de draad wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} I \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \\
&= I \left(\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \mathrm{d}\vec{\ell} \right) \times \vec{B} \\
&= I \left(\hat{\imath} \int_{a_x}^{b_x} \mathrm{d}x + \hat{\jmath} \int_{a_y}^{b_y} \mathrm{d}y + \hat{k} \int_{a_z}^{b_z} \mathrm{d}z \right) \times \vec{B} \\
&= I \left((b_x - a_x)\hat{\imath} + (b_y - a_y)\hat{\jmath} + (b_z - a_z)\hat{k} \right) \times \vec{B} \\
&= I(\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{B}.
\end{aligned}$$

Wanneer het magneetveld niet homogeen is, mag dit niet buiten de integraal worden gebracht en kan de kracht wel verschillend zijn.

Oefening 1: Oplossing (4 bis)

- Wie liever met componenten werkt, kan het gevraagde bewijzen als volgt.

$$
\begin{aligned}
F_x &= \int \mathrm{d}F_x \\
&= I \int (B_z \mathrm{d}y - B_y \mathrm{d}z) \\
&= I B_z \int_{a_y}^{b_y} \mathrm{d}y - I B_y \int_{a_z}^{b_z} \mathrm{d}z \\
&= I(b_y - a_y)B_z - I(b_z - a_z)B_y
\end{aligned}
$$

en analoog voor F_y en F_z. Je ziet dat deze componenten ook enkel afhangen van de begin- en eindposities.

Oefening 2: Oplossing (1)

- De tweede wet van Newton zegt

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Aangezien de beweging in het vlak loodrecht op het magneetveld cirkelvormig is, geldt

$$ma = m\frac{v_\perp^2}{r} = qv_\perp B,$$

zodat

$$r = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

Oefening 2: Oplossing (2)

- De tijd die nodig is om een cirkelbeweging met een straal r te maken wanneer de baansnelheid v, is

  $$T = \frac{2\pi r}{v},$$

  zodat in dit geval

  $$T = \frac{2\pi \frac{mv_\perp}{qB}}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

- In de z-richting is de beweging eenparig rechtlijnig met snelheid $v_\parallel$ en dus geldt

  $$\Delta z = z(T) - z(0) = v_\parallel T = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB}.$$

Oefening 2: Opmerking

- Waarom wordt er gebruik gemaakt van

$$ma = m\frac{v_\perp^2}{r} \quad \text{ipv} \quad ma = m\frac{v^2}{r}?$$

- De reden hiervoor moet je zoeken in de tweede wet van Newton. Uitgeschreven in componenten levert dit

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} & = & qv_yB_z \\ m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} & = & -qv_xB_z \\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} & = & 0. \end{cases}$$

  De twee eerste vergelijkingen zijn wiskundig volkomen equivalent aan de vergelijkingen voor een cirkelvormige beweging in twee dimensies. Deze beweging is in alle opzichten onafhankelijk van de beweging in de z-richting. Je zou de afleiding van de centripetaalkracht (zie hoofdstuk 5) dus helemaal opnieuw kunnen doen in dit geval en je zou vinden dat je inderdaad $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ moet invullen in de centripetale versnelling.

Oefening 3: Oplossing (1)

- Kies een coördinaatstelsel in cilindercoördinaten met het punt P in de oorsprong en de z-as uit het blad. Kies $\varphi = 0$ naar rechts.
- De infinitesimale bijdrage aan het magneetveld op een bepaald punt ten gevolge van een stroom, wordt gegeven door de wet van Biot-Savart:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

- Voor beide horizontale stukken is duidelijk dat

$$-\mathrm{d}\vec{\ell} \times (-\hat{r}) = \mathrm{d}\ell\ \hat{r} \times \hat{r} = 0.$$

  De stroom in deze stukken zal dus niet bijdragen aan het magneetveld in het punt P.
- Voor de andere stukken geldt in elk punt van de draad.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\ell\ \hat{\varphi} \times \frac{-\hat{r}}{r^2} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} r \mathrm{d}\varphi\ \hat{z}. \end{aligned}$$

Oefening 3: Oplossing (2)

- Om het magneetveld ten gevolge van heel de keten te berekenen, dient deze bijdrage te worden geïntegreerd over de twee halve cirkels. Dus

$$
\begin{aligned}
B_z &= \int \mathrm{d}B_z \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r_1}\mathrm{d}\varphi - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{r_2}\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4}\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \\
&= -\frac{1}{4}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2}\cdot 3,0A\cdot\frac{0,4m + 0,2m}{0,4m\cdot 0,2m} \\
&= -7,1\cdot 10^{-6}\,T.
\end{aligned}
$$

Oefening 4: Oplossing (1)

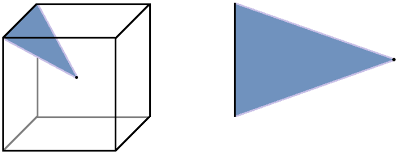
- Kies een (rechtshandig!) carthesisch coördinaatstelsel met het midden van de kubus als oorsprong en de assen loodrecht op één van de zijvlakken.
- Je kan de bijdrage van de stroom van elke ribbe onafhankelijk berekenen. Uit de symmetrie van het probleem kan je zien dat het uiteindelijke magneetveld zal wijzen in een richting die loodrecht staat op het rechterzijvlak, bijvoorbeeld

  $$\vec{B} = B\hat{\jmath}.$$

  De bijdrage van elk van de vier stromen aan de grootte van het magneetveld zal door de symmetrie eveneens dezelfde zijn. Het volstaat dus de grootte van één van de bijdrages uit te rekenen.

Oefening 4: Oplossing (2)

- Om de bijdrage van één ribbe te berekenen, werken we in het vlak bepaald door die ribbe en de oorsprong.



- In je boek vind je een formule voor het magnetisch veld ten gevolge van een stroom door een eindige draad. Deze zegt voor een driehoekje zoals hier afgebeeld

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 2 \sin\left(\text{Bgsin}\left(\frac{a/2}{\sqrt{3}a/2}\right)\right) = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi}.$$

Oefening 4: Oplossing (3)

- De bijdrage aan het magneetveld ten gevolge van één ribbe (oneindig lang) zal een hoek van 45° maken met de y-as, waardoor de bijdrage van één ribbe aan het veld in de y-richting

$$B_y = (B_{z'}\hat{k}') \cdot \hat{\jmath} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{I}}{2\sqrt{3}\pi a}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{I}}{2\sqrt{6}\pi a}.$$

- Het totale magneetveld zal $4\times$ zo groot zijn, en dus

$$\begin{aligned} \vec{B} &= 4\frac{\mu_0 \boldsymbol{I}}{2\sqrt{6}a}\hat{\jmath} \\ &= \frac{8\pi \cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2} \cdot 2A}{\sqrt{6}\pi \cdot 1,0m}\hat{\jmath} \\ &= 1,63 \cdot 10^{-7}T\ \hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Oefening 4: Oplossing (4)

- Voor het tweede geval kan je het resultaat van een enkel driehoekje opnieuw gebruiken. Elk van zes zijdes waar een stroom door loopt zal een bijdrage aan het magneetveld geven die precies die grootte heeft.
- Kies een assenstelsel voor de volledige kubus met de z-as naar boven, de y-as naar rechts en de x-as uit het blad. Dan zullen twee ribben een bijdrage aan $\vec{B}$ hebben in de $(-\hat{\imath}+\hat{k})/\sqrt{2}$-richting, twee in de $(\hat{\jmath}+\hat{k})/\sqrt{2}$-richting en twee in de $(-\hat{\imath}+\hat{\jmath})/\sqrt{2}$-richting.
- Deze zes bijdragen optellen levert

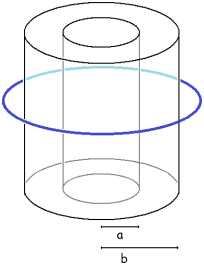
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{6}\pi}(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k})$$

Oefening 5: Oplossing (1)

- Door de symmetrie van het probleem (invariant onder rotaties om de cilinderas en onder translaties langs deze as), zal het elektrisch veld cilindersymmetrisch zijn:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{\varphi}.$$

- Kies een “Ampèrekring” zoals in de figuur. Het spreekt voor zich in cilindercoördinaten te werken.



Oefening 5: Oplossing (2)

- In deze oplossing zal r telkens de straal zijn van de blauwe cirkel op de vorige slide. De radiële variabele in integralen zal telkens r' heten.
- De wet van Ampère zegt

$$\oint_C B_\varphi(r)\,\mathrm{d}\ell = \mu_0 \int_S J_z(r)\,\mathrm{d}A.$$

met C de rand van het oppervlak S.

- De lijnintegraal is eenvoudig, namelijk

$$\begin{aligned} \oint_C B_\varphi(r)\,\mathrm{d}\ell &= B_\varphi(r)\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi r B_\varphi(r) \\ &= 2\pi r B(r) \end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat het magneetveld overal in de φ-richting ligt.

Oefening 5: Oplossing (3)

- De oppervlakte-integraal is analoog aan de volume-integraal uit de oefening op de wet van Gauss, namelijk

$$\begin{aligned}\mu_0 \int_S J_z(\vec{r}') \, \mathrm{d}A &= \mu_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} J(r') \, r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi \\ &= \mu_0 \int_{\min\{a,r\}}^{\min\{b,r\}} \int_0^{2\pi} J \, r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi \\ &= \pi \mu_0 J \left(\min\{b,r\}^2 - \min\{a,r\}^2 \right) .\end{aligned}$$

- Combineren met het vorige resultaat levert

$$B(r) = \frac{\mu_0 J}{2r} \left(\min\{b,r\}^2 - \min\{a,r\}^2 \right) .$$

  Dit is zeer gelijkaardig aan het resultaat van de oefening over de wet van Gauss, waar

$$E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} \left(\min\{b,r\}^2 - \min\{a,r\}^2 \right) .$$

Oefening 6: Oplossing (1)

- Net als bij problemen met ladingsverdelingen in de elektrostatica, is de eerste stap in het oplossen van een dergelijk probleem het zoeken van een infinitesimaal ladingselementje.
- Kies cilindercoördinaten met de z-as de rotatie-as. Een infinitesimaal oppervlakte-elementje bevat dan een infinitesimale lading gegeven door

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}A = \sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi.$$

- De snelheid van dit volume-elementje op positie $(r, \varphi, 0)$ en dus ook van de lading wordt gegeven door

$$\vec{v} = r\omega \, \hat{\varphi}.$$

- De positie van de oorsprong ten opzichte van het ladinkje is gegeven door

$$-r \, \hat{r}.$$

Merk op dat deze laatste twee eeheidsvectoren beiden zijn gedefinieerd in het punt waar de infinitesimale lading zich bevindt.

Oefening 6: Oplossing (2)

- Alle elementen uit de wet van Biot-Savart zijn nu gekend en de wet kan worden ingevuld. Voor de infinitesimale bijdrage geldt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\vec{v} \times (-\hat{r})\mathrm{d}q \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} r\omega(\hat{\varphi} \times (-\hat{r}))\sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\omega\sigma \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \; \hat{z}.
\end{aligned}
$$

- De integraal kan worden uitgevoerd en zo volgt het eindresultaat voor de grootte van het magneetveld

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma\omega \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 R\sigma\omega.
\end{aligned}
$$

Oefening 6: Oplossing (3)

- Voor een kegel met openingshoek ϑ kan een analoge berekening worden gedaan. Je kan deze in cilindercoördinaten doen maar bolcoördinaten zijn iets handiger. Kies de oorsprong in de top van de kegel en kies de $\vartheta = 0$ richting langs de as van de kegel.
- Een infintesimale lading dq bevindt zich op een oppervlakte-elementje dA (in het bijzonder het bovenvlak van het volume-elementje op de slide) zodat

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}A = \sigma r \sin(\vartheta)\, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi.$$

- Dit landinkje beweegt over een cirkel in een vlak loodrecht op de kegelas. De snelheidsvector ligt dus in de $\hat{\varphi}$-richting. De grootte is ω maal de straal van de cirkelbaan. Samengevat:

$$\vec{v} = r \sin(\vartheta)\omega\ \hat{\varphi}.$$

- De vector die van de oorsprong (waar we het magneetveld willen kennen) gaat naar de infinitesimale lading is gegeven door

$$-r\ \hat{r}.$$

Oefening 6: Oplossing (4)

- Door de symmetrie van de kegel zal het netto magneetveld langs de kegelas liggen. Noem deze richting de z-richting. Hier dient natuurlijk rekening mee te worden gehouden.
- Alles samennemen en integreren levert

$$
\begin{aligned}
B_z &= \int \mathrm{d}\vec{B} \cdot \hat{k} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [r \sin(\vartheta) \omega \ \hat{\varphi}] \times [-r \ \hat{r}][\sigma r \sin(\vartheta) \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi] \cdot \hat{k} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma \omega \sin^2(\vartheta) [(\hat{r} \times \hat{\varphi}) \cdot \hat{k}] \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R \sin^3(\vartheta)
\end{aligned}
$$

Oefening 7: Oplossing (1)

- Kies een cilindrisch coördinaatstelsel waarin de hoekpunten van de eerste lus coördinaten $(d, 0, 0)$, $(a + d, 0, 0)$, $(d, 0, b)$ en $(d + a, 0, b)$ hebben. De stroom loopt langs de positieve z-as.
- De flux wordt gegeven door

$$\phi_m = \int_S B_\varphi(r)\,\mathrm{d}A = \int_d^{a+d} B_\varphi(r)\,\mathrm{d}r \int_0^b \mathrm{d}z.$$

- De grootte van het magneetveld ten gevolge van de geleider wordt gegeven door

$$B(r) = B_\varphi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Aangezien $\hat{\varphi}$ loodrecht staat op het oppervlak van de lus is dit ook de normaalcomponent.

Oefening 7: Oplossing (2)

- De gezochte flux kan worden uitgewerkt als

$$
\begin{aligned}
\phi_m &= \int_S B_n(r)\mathrm{d}A \\
&= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\mathrm{d}r \int_0^b \mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) b \\
&= 2\cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2}\cdot 20A \cdot \ln\left(\frac{0,07m}{0,02m}\right)\cdot 0,1m \\
&= 5,0\cdot 10^{-7}\,Wb.
\end{aligned}
$$

Oefening 7: Oplossing (3)

- In het geval van de tweede lus is er meer rekenwerk. Het magneetveld staat niet overal loodrecht op het vlak van de lus.
- Er geldt
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x\hat{\jmath} - y\hat{\imath}}{x^2 + y^2}.$$
- In dit geval geldt $\hat{n} = \hat{\jmath}$. Daarom is
$$B_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x}{x^2 + d^2}$$
waarbij de laatste gelijkheid geldt omdat de lus volledig in het $y = d$-vlak ligt.

Oefening 7: Oplossing (4)

- De oppervlakte-integraal kan nu worden uitgevoerd. In het bijzonder geldt

$$
\begin{aligned}
\phi_m &= \int_0^b \int_0^a \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x}{x^2+d^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} b \int_0^a \frac{x}{x^2+d^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\mu_0 I}{8\pi} b \int_0^{a^2} \frac{1}{x^2+d^2}\, \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{\mu_0 I}{8\pi} b \int_{d^2}^{a^2+d^2} \frac{1}{x^2+d^2}\, \mathrm{d}(x^2+d^2) \\
&= \frac{\mu_0 I}{8\pi} b \ln\left(\frac{a^2+d^2}{d^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot 20A \cdot 0,1m \cdot \ln\left(1 + \frac{(0,05m)^2}{(0,02m)^2}\right) \\
&= 1,98 \cdot 10^{-7}\, Tm^2.
\end{aligned}
$$

Oefening 8: Oplossing (1)

- Kies een coördinaatstelsel waarbij de z-as loodrecht op de helling staat, de x-as langs de rails ligt (positief in de richting dat de helling daalt) en de y-as in het vlak van de helling maar loodrecht op de rails (positief naar achter).
- De (elektromagnetische) kracht op de staaf wordt gegeven door

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

- De stroom I die door de staaf loopt, wordt gegeven door

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

met ε de *emf* opgewekt in de keten door de beweging van de staaf.

Oefening 8: Oplossing (2)

- De *emf* opgewekt in de keten kan worden berekend uit de wet van Faraday:
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = -\vec{B}\cdot\hat{n}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$
Dit minteken betekent dat de stroom van bovenaf gezien in wijzerzin zal lopen.
- Het product $\vec{B}\cdot\hat{n}$ is gegeven door
$$\vec{B}\cdot\hat{n} = B\;\hat{k}\cdot(\cos(\vartheta)\hat{k}+\sin(\vartheta)\hat{\jmath}) = B\cos(\vartheta).$$
- De tijdsafgeleide van de oppervlakte van de kring is
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell s) = \ell\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \ell v.$$
met s de afstand die de staaf heeft afgelegd langs de rails sinds $t=0$ en dus één van de zijden van de rechthoek waar de stroom rond loopt.

Oefening 8: Oplossing (3)

- Samennemen van alle uitdrukkingen tot nu toe levert daarom

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I\vec{\ell}\times\vec{B}\\ &= \frac{\varepsilon}{R}\vec{\ell}\times\vec{B}\\ &= -\frac{B\cos(\vartheta)\ell v}{R}\vec{\ell}\times\vec{B}.\end{aligned}$$

- De grootte van deze vector wordt gegeven door

$$F = \frac{B^2\ell^2 v\cos(\vartheta)}{R}.$$

- De uitdrukking op de vorige slide is nog niet het uiteindelijke resultaat. De magnetische kracht op de staaf zal immers niet langs de rails gericht zijn maar zal gericht zijn volgens de horizontale richting. Daarom is de component van de kracht langs de rails een factor $\cos(\vartheta)$ kleiner dan de volledige grootte van de kracht op de staaf en dus geldt

$$F_{\|} = \frac{B^2\ell^2 v\cos^2(\vartheta)}{R}.$$

Oefening 8: Oplossing (4)

- Omdat de kracht ten gevolge van het magneetveld de versnelling van de geleidende staaf zal tegenwerken, komt er een punt waarop de versnelling gelijk zal zijn aan nul. Dit geldt daarom natuurlijk ook voor de component parallel met de rails.
- Voor de elektromagnetische kracht kan het resultaat van het eerste deel worden gebruikt:

$$F_{\parallel,em} = -\frac{B^2 \ell^2 v \cos^2(\vartheta)}{R}.$$

- De component van de zwaartekracht langs de rails wordt gegeven door

$$F_{\parallel,g} = mg \sin(\vartheta).$$

- Opdat de som van beide krachten gelijk zou zijn aan nul, dient te gelden

$$mg \sin(\vartheta) - \frac{B^2 \ell^2 v \cos^2(\vartheta)}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_\infty = \frac{mgR \sin(\vartheta)}{B^2 \ell^2 \cos^2(\vartheta)}.$$

Oefening 8: Oplossing (5)

- De tweede wet van Newton zegt voor de staaf (beschouw de component langs de rails)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\sin(\vartheta) - \frac{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}{R}v(t).$$

- Deze differentiaalvergelijking is van de vorm

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + by.$$

Deze kan je oplossen met de substitutie

$$z(x) = a + by(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = bz.$$

Oefening 8: Oplossing (6)

- De nieuwe differentiaalvergelijking kan je oplossen door gebruik te maken van scheiden van veranderlijken

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = b\mathrm{d}x,$$

en heeft als oplossing

$$z(x) = \mathrm{c}e^{bx}$$

met c een integratieconstante.

- De functie $y(x)$ wordt dan

$$y(x) = \frac{z(x) + a}{b} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{a}{b}\left(1 + b\mathrm{c}e^{bx}\right)$$

- Opnieuw uitgedrukt in $v(t)$ is dit

$$v(t) = \frac{mgR\sin(\vartheta)}{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}\left(1 + \frac{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}{mR}\mathrm{c}\exp\left\{-\frac{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}{mR}t\right\}\right).$$

Oefening 8: Oplossing (6)

- Uit de beginvoorwaarde $v(0) = 0$ volgt

$$\frac{mgR\sin(\vartheta)}{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}\left(1+\frac{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}{mR}\mathrm{c}\right)=0$$

zodat c kan worden bepaald en dus

$$v(t)=\frac{mgR\sin(\vartheta)}{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}\left(1-\exp\left\{-\frac{B^2\ell^2\cos^2(\vartheta)}{mR}t\right\}\right).$$

Oefening 8: Oplossing (7)

- De stroom die door de keten loopt, zal een magneetveld opwekken en dat magneetveld zal ook worden gevoeld door de ladingsdragers in de rollende staaf.
- De bijdrage ten gevolge van de stroom in de rails zal nul zijn: de rails zijn symmetrisch geplaatst maar de stroom loopt in tegengestelde richting zodat de totale kracht daarvan op de rollende staaf nul zal zijn.
- De enige bijdrage die nog overblijft is ten gevolge van de stroom door de weerstand. Tweemaal toepassen van de rechterhandregel leert je dat de stroom de stroom door de rollende staaf zal afstoten. Dit lijkt misschien in tegenspraak met de wet van Lenz. Een afstoting zou de kring immers groter willen maken waardoor de flux nog meer zou toenemen. Deze kracht is echter een tweede orde-effect (in tegenstelling tot de kracht uit deel één, die een eerste orde-effect is). Dergelijke effecten zullen de fluxverandering niet tegenwerken maar zullen deze verandering net willen versterken. Dit is niet in tegenspraak met Lenz omdat zij niet rechtstreeks worden veroorzaakt door de fluxverandering. De orde kan je herkennen als de macht van ε of I die voorkomt in de uitdrukking.