Het schatten van populatieparameters

Sandra Van Aert

3 november 2011

III. Steekproefvariantie S^2

- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
- $E(S^2) = \sigma^2$

  $\Rightarrow S^2$ zuivere schatter

Bewijs $E(S^2) = \sigma^2$

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)^2+2(X_i-\mu)(\mu-\overline{X})+(\mu-\overline{X})^2]\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2+2(\mu-\overline{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\mu-\overline{X})^2\right\}
\end{aligned}
$$

Vervolg bewijs

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \overline{X})(n\overline{X} - n\mu) + n(\mu - \overline{X})^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2n(\mu - \overline{X})^2 + n(\mu - \overline{X})^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n-1} E\left\{ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\mu - \overline{X})^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} E\{(X_i - \mu)^2\} - nE\{(\mu - \overline{X})^2\} \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \right) = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \sigma^2
\end{aligned}
$$

III. Steekproefvariantie S^2

- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
- $E(S^2) = \sigma^2$

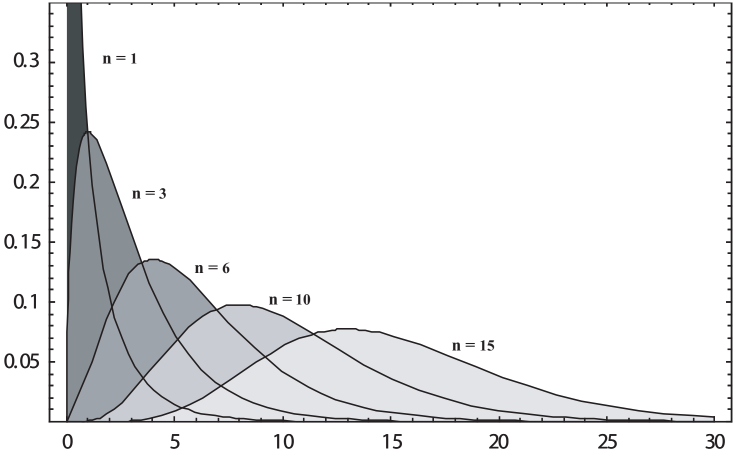
  $\Rightarrow S^2$ zuivere schatter
- var(S^2) ?
- kansdichtheid S^2 ?

χ^2-verdeling

- spreek uit: chi-kwadraat verdeling
- familie van kansdichtheden met één parameter k

  $$\begin{aligned} k &= \#\ \text{vrijheidsgraden} \\ &= \text{degrees of freedom (d.f.)} \end{aligned}$$
- verwachte waarde = k
- variantie = $2k$

χ^2-verdeling: grafisch



Oorsprong χ^2-verdeling

- $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k \sim N(0,1)$ (onafh.)

  kwadrateren: $X_1^2, X_2^2, X_3^2, \ldots, X_k^2$

  optellen

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$$

  $\rightarrow \chi^2$-verdeeld met k vrijheidsgraden

Kansdichtheid S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\Downarrow$$

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

Kansdichtheid S^2 (vervolg)

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)}_{N(0,1) \text{ indien } X_i \sim N(\mu,\sigma^2)}^2$$

d.i. som van gekwadrateerde standaardnormaal verdeelde kansvariabelen

dus $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ is χ^2-verdeelde kansvariabele

met $n-1$ vrijheidsgraden of nog: χ^2_{n-1}-verdeeld

Variantie van S^2

- $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$
- bijgevolg $$\operatorname{var}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right\} = 2(n-1)$$

en dus $$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\operatorname{var}(S^2) = 2(n-1)$$

zodat $$\operatorname{var}(S^2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Intervalschatters

Sandra Van Aert

3 november 2011

Puntschatters

- voorbeeld: steekproefgemiddelde, steekproefproportie, steekproefvariantie
- probleem
  leveren slechts één enkele waarde op
  geven geen indicatie over betrouwbaarheid
- oplossing
  $\begin{cases}\text{intervalschatters} \\ \text{betrouwbaarheidsinterval}\end{cases}$
- doel: rekening houden met
  $\begin{cases}\text{aantal waarnemingen} \\ \text{variantie}\end{cases}$

Betrouwbaarheidsinterval

- $[L, U] \rightarrow \theta$
- 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ?

$$P(L \leq \theta \leq U) = 95\%$$

- algemeen:
  $(1 - \alpha) \times 100\%$ betrouwbaarheidsinterval

$$P(L \leq \theta \leq U) = \underbrace{1 - \alpha}_{\text{betrouwbaarheidscoëfficiënt}}$$

$$1 - \alpha = 0.90; 0.95 \text{ of } 0.99$$

$$\alpha = 10\%; 5\% \text{ of } 1\%$$

- bepaal L en U op basis van steekproefgegevens

Betrouwbaarheidsinterval voor μ

steekproefgemiddelde $\overline{X}$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \cancel{N}(\mu, \sigma^2)$$

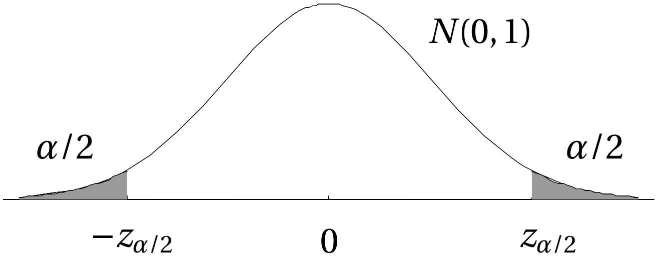
$$\Rightarrow \overline{X} \overset{\text{BEN.}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \text{ voor } n \geq 30$$

Betrouwbaarheidsinterval voor μ

- $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

Percentielen uit de $N(0,1)$-dichtheid

- $z_{\alpha/2}$ is getal waarvoor geldt: $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$



- symmetrie $N(0,1) \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = -z_{\alpha/2}$ en
  $P(Z \leq -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- $-z_{\alpha/2}$ is $\alpha/2 \times 100$ste en $z_{\alpha/2}$ is $(1-\alpha/2) \times 100$ste percentiel $\rightarrow$ kritieke waarden

Betrouwbaarheidsinterval voor μ

- $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- betrouwbaarheidsinterval (B.I.)

$$[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

- breedte B.I.: $2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\text{breedte neemt toe als} \begin{cases} \alpha \searrow \text{ afneemt} \\ \sigma \nearrow \text{ toeneemt} \\ n \searrow \text{ afneemt} \end{cases}$$

Voorbeeld

- 5 melkstalen
- gemiddelde vriestemperatuur van de 5 stalen

$$\overline{x} = -0.535\ °\mathrm{C}$$

- standaarddeviatie $\sigma = 0.008$ °C
- 99% betrouwbaarheidsinterval voor μ ($\Rightarrow \alpha = 0.01$)

$$[\overline{x} - z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$[-0.535 - 2.5758\frac{0.008}{\sqrt{5}}; -0.535 + 2.5758\frac{0.008}{\sqrt{5}}]$$

$$[-0.5442; -0.5258]$$

Bepalen steekproefgrootte n

- kies betrouwbaarheid $1-\alpha$
- kies maximale breedte van B.I. : $2b$
- breedte $= 2z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2b$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{b} \leq \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow z^2_{\alpha/2}\frac{\sigma^2}{b^2} \leq n$$

Betekenis betrouwbaarheidsinterval

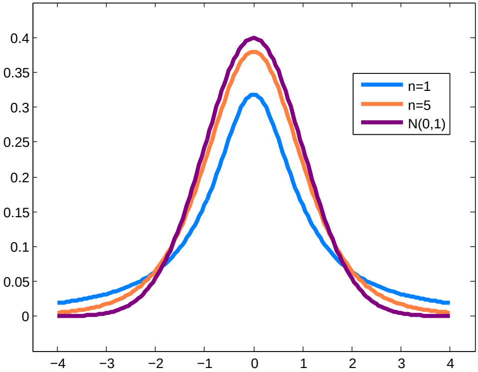
- 95% betrouwbaarheidsinterval
- veronderstel normaal verdeelde populatie
  $\rightarrow \mu = 100$
  $\rightarrow \sigma = 15$
- 1000 onderzoekers
  → steekproef van 5 waarnemingen
  → betrouwbaarheidsinterval voor μ
  $\rightarrow \sigma = 15$ gekend
- (ongeveer) 95% van de onderzoekers vinden een interval dat μ omvat
- zie http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/
  (onder Tests / Confidence interval for mean)

Wat als σ onbekend?

- oplossing: σ schatten m.b.v. S
- maar: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \cancel{\sim} N(0,1)$

  wel: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- t_{n-1} verdeling van Gosset of Student met $n-1$ vrijheidsgraden

t-verdeling: grafisch



kansdichtheid van twee t-verdelingen en van de standaardnormale verdeling

t-verdeling

$$\underbrace{Z \sim N(0,1) \qquad X \sim \chi^2_k}$$

$$\Downarrow$$

$$t_k = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{k}}}$$

Geval σ onbekend

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}$$

teller is standaardnormaal

$$= \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}}$$

met $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Wat als σ onbekend?

- oplossing: σ schatten m.b.v. S
- maar: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \not\sim N(0,1)$

  wel: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- t_{n-1} verdeling van Gosset of Student met $n-1$ vrijheidsgraden
- betrouwbaarheidsinterval

$$[\overline{X} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Voorbeeld

- $n = 60$
  $\overline{x} = 53.77$
  $s^2 = (63.39)^2$
- 95% B.I. voor μ
  $\rightarrow 1 - \alpha = 0.95$
  $\rightarrow \alpha = 0.05$
  $\rightarrow \alpha/2 = 0.025$
- $t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.025;59} = 2.000995$
- R:"=qt(1-$\alpha/2$;$n-1$)" voor $t_{\alpha/2,n-1}$
  Matlab:"=tinv(1-$\alpha/2$;$n-1$)" voor $t_{\alpha/2,n-1}$
- ondergrens: $53.77 - 2.000995\frac{63.39}{\sqrt{60}} = 37.39$
- bovengrens:$53.77 + 2.000995\frac{63.39}{\sqrt{60}} = 70.14$

Betrouwbaarheidsinterval voor σ^2

- $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2;n-1} \leq \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha$

$$\Downarrow$$

$$P\Big(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}\Big) = 1-\alpha$$

Betrouwbaarheidsinterval voor π

- $\hat{P} \sim N(\pi, \dfrac{\pi(1-\pi)}{n})$
- $\dfrac{\hat{P}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1)$
- $P(-z_{\alpha/2} \leq \dfrac{\hat{P}-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

$$\Downarrow$$

$$P\Big(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \leq \pi \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\Big) = 1-\alpha$$

Het toetsen van hypothesen

Sandra Van Aert

3 november 2011

Inleiding

- hypothese = uitspraak, bewering
- waarover?
  → populatieparameter(s)
  → kansverdeling
  → kansdichtheid

Voorbeelden

- het gemiddelde vriespunt van geleverde melk is −0.545 °C
  $H_0 : \mu = -0.545\ °C$ $\qquad$ $H_a : \mu > -0.545\ °C$
- 2 vulmachines leveren gemiddeld hetzelfde vulgewicht
  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $\qquad$ $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$
- 2 vulmachines hebben dezelfde variantie
  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad$ $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Nulhypothese H_0 versus alternatieve hypothese H_a

- alternatieve hypothese
  = onderzoekshypothese
  "iets nieuws", "iets controversieels"
- beslissing?
  $\rightarrow$ aanvaard H_0, en dus verwerp H_a
  $\rightarrow$ verwerp H_0, en dus aanvaard H_a
- kan goede of foute beslissing zijn

Overzichtstabel

beslissing o.b.v. steekproef	werkelijke situatie H_0 is waar	H_a is waar
H_0 aanvaarden	juiste beslissing kans $1-\alpha$	type II fout kans β
H_a aanvaarden	type I fout kans α	juiste beslissing kans $1-\beta$

Samenvatting

- $\alpha = P(H_a \text{ aanvaarden} \mid H_0 \text{ waar})$
  $= \text{significantieniveau of onbetrouwbaarheid}$
  $= \text{kans op type I fout}$
- $1 - \alpha = P(H_0 \text{ aanvaarden} \mid H_0 \text{ waar})$
  $= \text{betrouwbaarheid}$
- $\beta = P(H_0 \text{ aanvaarden} \mid H_a \text{ waar})$
  $= \text{kans op type II fout}$
- $1 - \beta = P(H_a \text{ aanvaarden} \mid H_a \text{ waar})$
  $= \text{onderscheidingsvermogen of power}$

Overzichtstabel voor rechtspraak

beslissing o.b.v. steekproef	werkelijke situatie: onschuldig	werkelijke situatie: schuldig
niet veroordeeld	juiste beslissing kans $1 - \alpha$	type II fout kans β
veroordeeld	type I fout kans α	juiste beslissing kans $1 - \beta$

"iemand onterecht beschuldigen is niet wenselijk"

Soorten alternatieve hypothesen

- voorbeeld: $H_0 : \mu = -0.545\,°\mathrm{C}$
  $\rightarrow H_a : \mu > -0.545\,°\mathrm{C}$ rechts eenzijdig
  $\rightarrow H_a : \mu < -0.545\,°\mathrm{C}$ links eenzijdig
  $\rightarrow H_a : \mu \neq -0.545\,°\mathrm{C}$ tweezijdig

- algemeen: $H_0 : \mu = \mu_0$
  $\rightarrow H_a : \mu > \mu_0$ rechts eenzijdig
  $\rightarrow H_a : \mu < \mu_0$ links eenzijdig
  $\rightarrow H_a : \mu \neq \mu_0$ tweezijdig

Rechts eenzijdige toets

- $H_0 : \mu = -0.545\ °C \qquad H_a : \mu > -0.545\ °C$
- steekproefgemiddelde $\overline{x}$
- H_0 verwerpen en H_a aanvaarden als
  → $\overline{x}$ groot
  → $\overline{x}$ groter dan kritieke waarde c
- kritieke waarde c bepalen zodanig dat we niet te veel fouten maken
  → kleine kans op type I fout (α)
  → kleine kans op type II fout (β)

Kans op type I fout

$$\alpha = P(H_0 \text{ verwerpen} \mid H_0 \text{ is juist})$$

$$= P(\overline{X} > c \mid H_0 \text{ is juist})$$

$$= P(\overline{X} > c \mid \mu = \mu_0)$$

$$\downarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}); \text{indien } \begin{cases} n \geq 30 \\ \text{normaal verdeelde } X_1, \ldots, X_n \end{cases}$$

$$= P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{c - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0)$$

$$= P(Z > \frac{c - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}) \text{ met } Z \sim N(0, 1)$$

Kritieke waarde c voor $\overline{x}$

- $\dfrac{c-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \Leftrightarrow c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- als $\overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, verwerp nulhypothese en aanvaard alternatieve hypothese
- als $\overline{x} \leq \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, aanvaard nulhypothese
- dit is eerste versie beslissingsregel

Beslissingsregel op basis van toetsingsgrootheid

- als $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$, verwerp nulhypothese
- als $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha$, aanvaard nulhypothese
- $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} =$ toetsingsgrootheid z
- dit is tweede versie beslissingsregel

Voorbeeld

- gegeven: $n = 5$
  $\overline{x} = -0.535$ °C
  $\sigma = 0.008$ °C
- $H_0 : \mu = -0.545$ °C
  $H_a : \mu > -0.545$ °C
- significantieniveau $\alpha = 5\%$

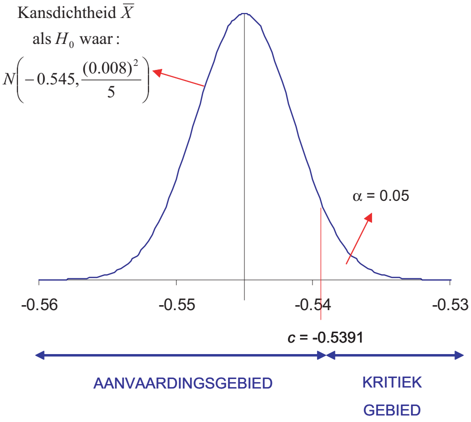
Voorbeeld: benadering 1

- kritieke waarde:

$$\begin{aligned} c &= \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= -0.545 + z_\alpha \frac{0.008}{\sqrt{5}} \\ &= -0.545 + 1.645 \frac{0.008}{\sqrt{5}} = -0.5391 \end{aligned}$$

- $\overline{x} > c$ dus verwerp H_0

Voorbeeld: benadering 1



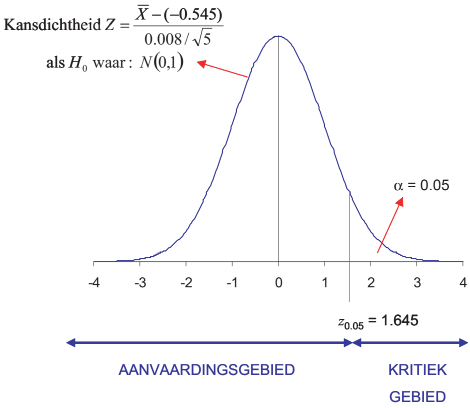
Voorbeeld: benadering 2

- toetsingsgrootheid:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008 / \sqrt{5}} = 2.795$$

- $z > z_\alpha = 1.645$ dus verwerp H_0

Voorbeeld: benadering 2



De p-waarde

- werken met kritieke waarden levert geen informatie over sterkte van bewijs
- p-waarde bij rechtseenzijdige toets
  = kans dat $\overline{x}$ overschreden wordt als H_0 waar

  $$= P(\overline{X} > \overline{x} \mid \mu = \mu_0)$$

  $$= P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0)$$

  $= P(Z > z)$ met z de toetsingsgrootheid
- als $p < \alpha$, verwerp nulhypothese
- als $p \geq \alpha$, aanvaard nulhypothese

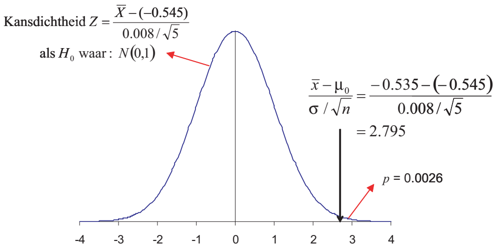
Voorbeeld: benadering 3

- p-waarde:

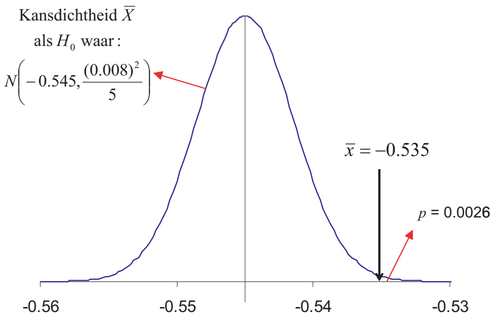
$$
\begin{aligned}
p &= P(\overline{X} > \overline{x} \mid \mu = \mu_0) \\
&= P(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{-0.535 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0) \\
&= P(Z > \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008 / \sqrt{5}}) \\
&= P(Z > 2.795) \qquad z = 2.795 = \text{ toetsingsgrootheid} \\
&= 0.0026
\end{aligned}
$$

- $p < \alpha$ dus verwerp nulhypothese

Voorbeeld: benadering 3



Voorbeeld: benadering 3



Tweezijdige hypothesetoets

- algemeen:
  $H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_a : \mu \neq \mu_0$
- voorbeeld:
  $H_0 : \mu = 34 \text{ cl} \qquad H_a : \mu \neq 34 \text{ cl}$
- H_0 verwerpen bij $\overline{x} \gg 34$ cl of $\overline{x} \ll 34$ cl
- kritieke waarden:

$$c_L = \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$c_U = \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Beslissingsregels

- benadering 1:
  H_0 verwerpen als $\overline{x} < c_L$ of $\overline{x} > c_U$
  H_0 aanvaarden als $c_L \leq \overline{x} \leq c_U$

- benadering 2:

  toetsingsgrootheid $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

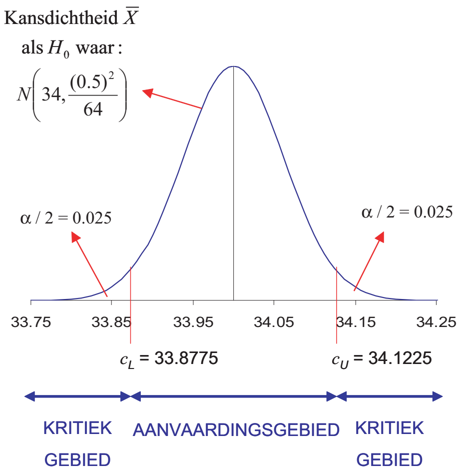
  H_0 verwerpen als $z < -z_{\alpha/2}$ of $z > z_{\alpha/2}$

  H_0 aanvaarden als $-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}$

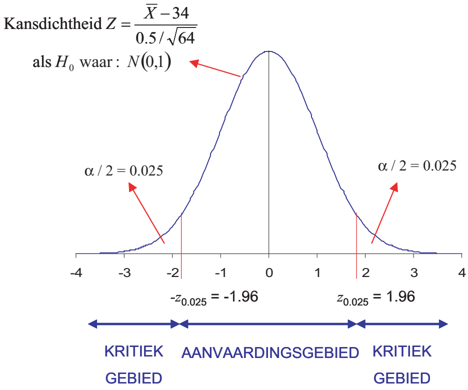
Voorbeeld

- gegeven: $n = 64$
  $\overline{x} = 33.89$ cl
  $\sigma = 0.5$ cl
- $H_0 : \mu = 34$ cl
  $H_a : \mu \neq 34$ cl
- significantieniveau $\alpha = 5\%$

Voorbeeld: benadering 1



Voorbeeld: benadering 2



p-waarde bij tweezijdige toets

- $\overline{x} < \mu_0 : p = 2P(\overline{X} < \overline{x} \mid \mu = \mu_0)$
  $\overline{x} > \mu_0 : p = 2P(\overline{X} > \overline{x} \mid \mu = \mu_0)$
- komt op hetzelfde neer als
  $p = 2P(\overline{Z} > |\overline{z}| \mid \mu = \mu_0)$
- beslissingsregel (benadering 3):
  H_0 verwerpen als $p < \alpha$
  H_0 aanvaarden als $p \geq \alpha$