Examen Wiskunde Oefeningen REEKS B

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2009–2010

Naam: ....

Richting: SCH / BIC / BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Geef alle (complexe) nulpunten van $z^4 - iz^3 + (6+i)\,z^2 + z + 6i = 0$

/6

2. Bepaal de rest van de deling van $z^5 + i$ door $(z-2)\,(z+1)$ zonder de deling te maken.

/5

3. Los op en bepaal de multipliciteiten van de nulpunten: $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 & 1 \\ x & x & x & 2 & 1 \\ x & x & x & x & 2 \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} = 0.$

/6

4. Los op met de methode van Cramer: $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 4x - 8y + 2z = 3 \end{cases}$

/5

5. Zoek het unieke vlak dat door de rechte $A : \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ gaat en evenwijdig is met de vector $\overrightarrow{v}\,(1, 3, 1)$

/5

6. Zoek de eigenwaarden en eigenvectoren, en bereken een equispectrale Jordanmatrix van $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

/6

7. Bereken voor $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ de limiet naar

(a) $x = 1$

(b) $x = -2$

(c) $x = -3$

(d) $x = +\infty$

/6

8. Los op:

$$2^{2x-1}\left(11-2^{x}\right)=10\cdot 2^{x}+2^{4}$$

/6

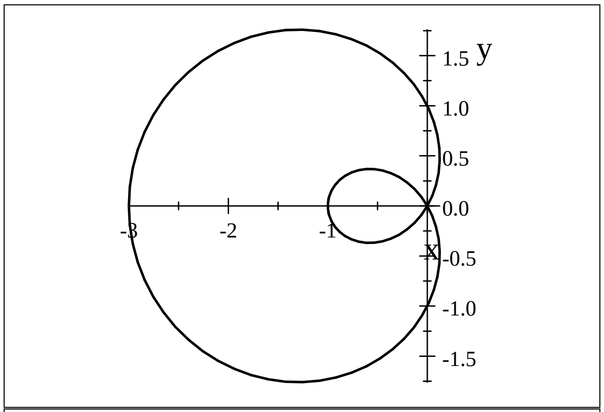
9. Een niet nader genoemd telecommunicatiebedrijf verkocht de afgelopen maand 5000 internet–televisie–telefoonabonnementen tegen 60 euro per maand. Marktonderzoekt wijst uit dat er per eurocent afslag die de firma aanbiedt, er gemiddeld één klant bijkomt. Uiteraard kan de firma niet oneindig haar tarieven laten zakken om klanten bij te winnen, want dan zou ze wel veel klanten hebben, maar uiteindelijk gratis abonnementen moeten weggeven, en zelfs in de telecom zijn ze zo zot niet. Welke prijs moet het bedrijf aanbieden om maximale winst te hebben?

/6

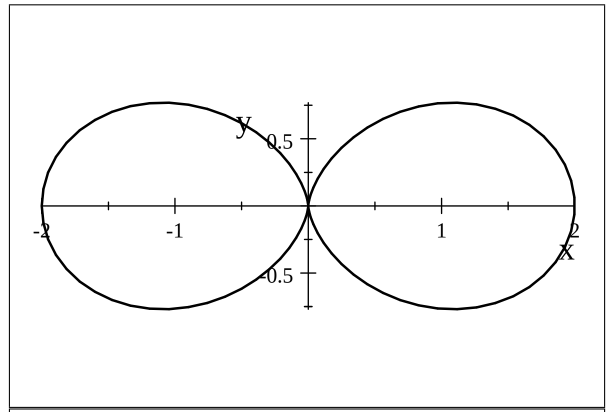
10. Hieronder vind je vier plots van poolvergelijkingen. Zet de juiste vergelijking bij de juiste plot. Let op! Voor alleen de juiste overeenkomsten te vinden kan je maar een deel van de punten verdienen; onder de plots is er plaats om je *redenering* op te schrijven, en daar staat het gros van de punten op.

$$A : r = 1 + \cos 2\theta \quad B : r = 1 - \cos\theta \quad C : r = 1 - 2\cos\theta \quad D : r = 2 + \cos\theta$$

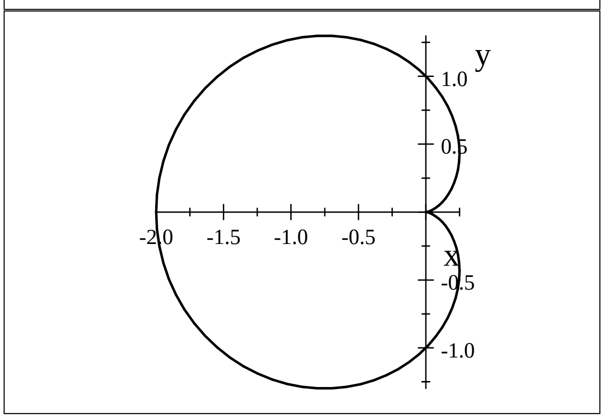
1 :



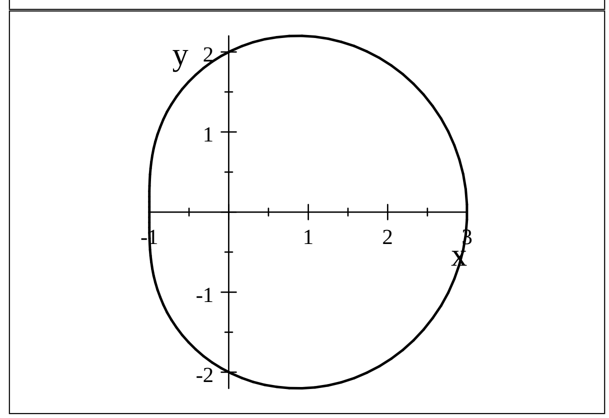
2 :



3 :



4 :



/7

11. Bereken $\int \frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} dx$

/6

12. Bereken $\int \frac{x + 1}{4 - \sqrt{2x + 5}} dx$

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Geef alle (complexe) nulpunten van $z^4 - iz^3 + (6+i)\,z^2 + z + 6i = 0$

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -i & 6+i & 1 & 6i \\
3i & & 3i & -6 & -3 & -6i \\
\hline
 & 1 & 2i & i & -2 & 0 \\
-2i & & -2i & 0 & 2 & \\
 & 1 & 0 & i & 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow z_1 = 3i$ of $z_2 = -2i$ of $z_3^2 + i = 0$

$\Rightarrow z_3^2 = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$

$\Rightarrow z_3 = \operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_3 = \operatorname{cis} -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_3 = \operatorname{cis} \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

2. Bepaal de rest van de deling van $z^5 + i$ door $(z-2)\,(z+1)$ zonder de deling te maken.
$A\,(z) = z^5 + i = (z-2)\,(z+1)\,Q\,(z) + az + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\,(2) = 32 + i = 2a + b \\ A\,(-1) = -1 + i = -a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 10 + i \end{cases}$$

$\Rightarrow R\,(z) = 11z + 10 + i$

3. Los op en bepaal de multipliciteiten van de nulpunten: $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 & 1 \\ x & x & x & 2 & 1 \\ x & x & x & x & 2 \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 & 1 \\ x & x & x & 2 & 1 \\ x & x & x & x & 2 \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 2 & 1 \\ 1 & x & x & x & 2 \\ 1 & x & x & x & x \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1 \\ R_5-R_1}}{=} x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & x-1 & x-1 & 1 \\ 1 & x-2 & x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ x-2 & x-1 & 1 & 0 \\ x-2 & x-1 & x-1 & 1 \\ x-2 & x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = x\,(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & x-1 & 1 \\ 1 & x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}}{=} x\,(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & x-1 & 1 \\ 0 & x-2 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} = x\,(x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ x-2 & x-1 & 1 \\ x-2 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x\,(x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} x\,(x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x\,(x-2)^2 \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x-2 & x-1 \end{vmatrix} = x\,(x-2)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x\,(x-2)^4$$

$\Rightarrow x \in \left\{0, 2^{(4)}\right\}$

4. Los op met de methode van Cramer: $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 4x - 8y + 2z = 3 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8$

Stel $y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 4\lambda + 1 \\ 4x + 2z = 8\lambda + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D_x = \begin{vmatrix} 4\lambda + 1 & 3 \\ 8\lambda + 3 & 2 \end{vmatrix} = -16\lambda - 7 \\ D_z = \begin{vmatrix} 2 & 4\lambda + 1 \\ 4 & 8\lambda + 3 \end{vmatrix} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\dfrac{-16\lambda - 7}{-8}, \lambda, \dfrac{2}{-8} \right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Zoek het unieke vlak dat door de rechte $A : \begin{cases} 2x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ gaat en evenwijdig is met de vector $\overrightarrow{v}\,(1, 3, 1)$

Vlakkenbundel: $(2x - y + 2z - 1) + \lambda\,(x - 3y + 2) = 0$

Eis: $(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + \lambda\,(1 - 3 \cdot 3) = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow 8\,(2x - y + 2z - 1) + (x - 3y + 2) = 0$

$\Rightarrow 17x - 11y + 16z - 6 = 0$

6. Zoek de eigenwaarden en eigenvectoren, en bereken een equispectrale Jordanmatrix van $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

- $\lambda = 1 \Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = -1 \Rightarrow E_{-1} : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 3 \Rightarrow E_3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $T' = S^{-1}TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Bereken voor $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$ de limiet naar

   (a) $x = 1$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 3 - 4)\left(\sqrt{x+8} + 3\right)}{(x + 8 - 9)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+3} + 2} = \dfrac{3}{2}$

   (b) $x = -2$

   $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{\sqrt{-2+3} - 2}{\sqrt{-2+8} - 3} = \dfrac{1}{3 - \sqrt{6}}$

(c) $x = -3$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -3} f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{5}}; \lim_{x \overset{<}{\to} -3} f(x) \text{ bestaat niet}$$

(d) $x = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

8. Los op:

$$2^{2x-1}(11-2^x) = 10 \cdot 2^x + 2^4$$

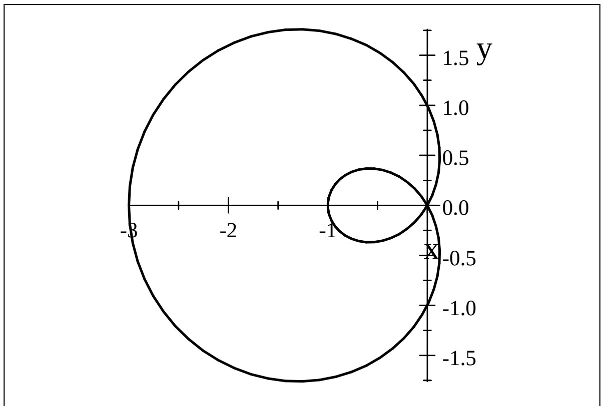
$\Leftrightarrow 2^{2x}(11-2^x) = 2\left(10 \cdot 2^x + 2^4\right)$
$\Leftrightarrow y^2(11-y) = 2\left(10 \cdot y + 2^4\right)$
$\Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + 20y + 32 = 0$
$\Leftrightarrow y \in \{4, 8, -1\}$
$\Rightarrow x \in \{2, 3\}$

9. Een niet nader genoemd telecommunicatiebedrijf verkocht de afgelopen maand 5000 internet–televisie–telefoonabonnementen tegen 60 euro per maand. Marktonderzoekt wijst uit dat er per eurocent afslag die de firma aanbiedt, er gemiddeld één klant bijkomt. Uiteraard kan de firma niet oneindig haar tarieven laten zakken om klanten bij te winnen, want dan zou ze wel veel klanten hebben, maar uiteindelijk gratis abonnementen moeten weggeven, en zelfs in de telecom zijn ze zo zot niet. Welke prijs moet het bedrijf aanbieden om maximale winst te hebben?
$f(x) = (5000 + x)(60 - 0.01x)$
$5500 \cdot 55 - 5000 \cdot 60$
$f'(x) = 10 - 0.02x = 0 \Rightarrow x = 500$
$\Rightarrow f''(x) = -0.02 \Rightarrow f''(500) < 0 \Rightarrow$ het is een maximum
$\Rightarrow$ De ideale prijs is $60 - 0.01 \cdot 500 = 55$ euro

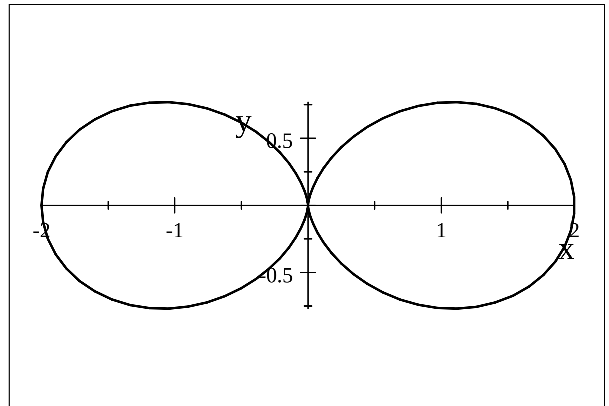
10. Hieronder vind je vier plots van poolvergelijkingen. Zet de juiste vergelijking bij de juiste plot. Let op! Voor alleen de juiste overeenkomsten te vinden kan je maar een deel van de punten verdienen; onder de plots is er plaats om je *redenering* op te schrijven, en daar staat het gros van de punten op.

$$A: r = 1 + \cos 2\theta \quad B: r = 1 - \cos\theta \quad C: r = 1 - 2\cos\theta \quad D: r = 2 + \cos\theta$$

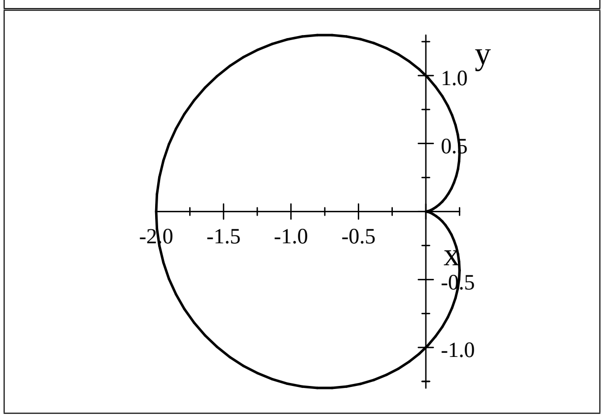
1 :



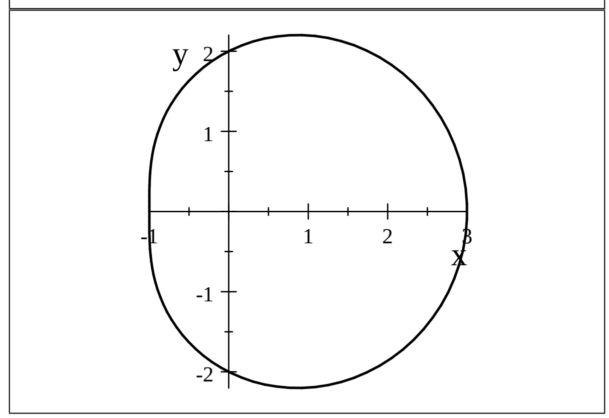
2 :



3 :



4 :



A2, B3, C1, D4
A2 is de enige met periode π
C1 is de enige waarvoor de straal negatief wordt
D4 is de enige waarvoor de straal $r \geq 1$ blijft
B3 blijft over

11. Bereken $\int \frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} dx$

$$\frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{3x^2 - x + 2}{(x-2)^2 (x+2)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x + 2}{x+2} = 3 \\
B &= \lim_{x \to 2} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{(x-2)^2 (x+2)} - \frac{3}{(x-2)^2} \right) (x-2) = \lim_{x \to 2} \frac{3x+2}{x+2} = 2 \\
C &= \lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - x + 2}{(x-2)^2} = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) dx = -\frac{3}{x-2} + 2\ln|x-2| + \ln|x+2| + c$$

12. Bereken $\int \frac{x+1}{4 - \sqrt{2x+5}} dx$

$$
\begin{aligned}
t = \sqrt{2x+5} \Rightarrow \quad t^2 = 2x+5 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{t^2-5}{2} \\
&\Rightarrow \quad dx = tdt \\
&\Rightarrow \quad x+1 = \frac{t^2-3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow I = \int \frac{\frac{t^2-3}{2}}{4-t} tdt = \int -\frac{t^3-3t}{2t-8} dt = \int \left(-\frac{1}{2}t^2 - 2t - \frac{13}{2} - \frac{26}{t-4}\right) dt \\
&= -\frac{1}{6}t^3 - t^2 - \frac{13}{2}t - 26\ln|t-4| + c \\
&= -\frac{1}{6}\left(2x+5\right)^{3/2} - 2x - \frac{13}{2}\sqrt{2x+5} - 26\ln\left|\sqrt{2x+5}-4\right| + c
\end{aligned}
$$