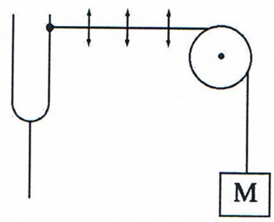
Juni 2011

1. Een snaar wegen met een stemvork



Je hebt een dunne snaar met lengte $2m$ waarvan je de massa m wil bepalen. Je hebt echter geen weegschaal maar wel een stemvork, een katrol, een meetlat van $30cm$ en een nauwkeurig gekende massa $M = 2kg \gg m$. Je bouwt de opstelling zoals in de tekening: de massa M wordt opgehangen aan de snaar, die over een katrol naar de stemvork loopt. Door de stemvork aan te slaan, creëer je lopende golven met een frequentie van $440Hz$ in het touw. Deze lopende golven worden gereflecteerd tegen de katrol. Dit betekent dat er lopende golven met dezelfde golflengte, frequentie en amplitude als de invallende golven worden opgewekt maar die in de andere richting lopen en waarvan de fase zodanig is dat de uitwijking nul is aan de katrol. Wanneer het horizontale stuk snaar een lengte van $23cm$ heeft, vind je dat de snaar trilt in de derde harmoniek.

- Wat is de massa van het touw?
- Schrijf een uitdrukking neer voor zowel de invallende als de gereflecteerde lopende golf in het touw en verifieer dat het resultaat een staande golf is (in de derde harmoniek). De amplitude van de golven mag je gelijk kiezen aan $0,5mm$.

Houd er rekening mee dat het uiteinde van het touw aan de stemvork oscilleert met een maximale uitwijking en dat de amplitude van de oscillatie aan de katrol nul is. De massa van het verticale stuk touw mag je verwaarlozen omdat dit veel kleiner zal zijn dan M. Je mag veronderstellen dat de massadichtheid van het touw overal dezelfde is. Als je ergens een assenstelsel nodig hebt, mag je dat zelf invoeren.

Oplossing

- De snaar heeft één uiteinde met een maximale amplitude en één uiteinde is vast. Voor de derde harmoniek geldt daarom

$$L_h = \frac{3}{4}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}L_h$$

met $L_h = 0,24m$ de lengte van het horizontale stuk van de snaar. Je kent ook de frequentie en dus is de golfsnelheid

$$v = \lambda f = \frac{4}{3}L_h f.$$

De spankracht in het touw is het gewicht van de massa M, dus $F = Mg$. De massadichtheid van het horizontale stuk snaar (en dus van de hele snaar) is daarom

$$\frac{m}{L} = \mu = \frac{F}{v^2} = \frac{Mg}{v^2} = \frac{9}{16}\frac{Mg}{(L_h f)^2}$$

zodat

$$m = \mu L = \frac{9}{16}\frac{MgL}{(L_h f)^2} = 0,0022kg.$$

5

- Er is geen assenstelsel gespecifieerd dus dat mag je zelf kiezen. Het makkelijkst is waarschijnlijk een x-as te kiezen die langs het horizontale stuk van de snaar gespannen is en die nul is op de plaats waar de snaar aan de stemvork is bevestigd. De lopende golven hebben dezelfde frequentie $f = 440Hz$ en golflengte $\lambda = 0,307m$ als de staande golf waarin ze zullen resulteren. Dit betekent

$$y_{\pm}(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \delta_{\pm}) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} \pm 2\pi f t + \delta_{\pm}\right)$$

waarbij de $-$ moet worden gekozen voor de invallende golf aangezien deze naar rechts beweegt en $+$ voor de gereflecteerde golf. Als $x = L_h = \frac{3}{4}\lambda$, worden deze golven

$$y_{\pm}(x,t) = A\cos(\tfrac{3\pi}{2} \pm 2\pi f t + \delta_{\pm})$$

Op deze positie moeten de totale fases $kx \pm \omega t + \delta_{\pm}$ in totaal π verschillen en dus geldt (bijvoorbeeld) $\delta_+ = \pi/2$ en $\delta_- = -\pi/2$. De lopende golven worden daarom gegeven door

$$y_{\pm}(x,t) = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} \pm 2\pi f t \pm \frac{\pi}{2}\right).$$

De totale resulterende golf wordt dan

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_+(x,t) + y_-(x,t) \\ &= A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + 2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) + A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\sin\left(2\pi f t\right). \end{aligned}$$

Varianten hierop met een andere keuze voor δ_+ en δ_- zijn natuurlijk ook juist gegeven dat de berekeningen juist zijn uitgevoerd.

6

2. Voorwerp aan een veer

Een voorwerp met onbekende massa m hangt aan een verticale veer met veerconstante $1600\frac{N}{m}$. Wanneer het voorwerp 2,5cm naar beneden wordt getrokken vanuit evenwicht en vanuit rust in deze positie wordt losgelaten, oscilleert het geheel met een frequentie van $4Hz$.

- Wat is de massa van het voowerp?
- Hoe ver zal de veer (in evenwicht) uitrekken wanneer deze massa aan de veer wordt bevestigd?
- Wat is de amplitude van de oscillatie als het voorwerp tijdens het oscilleren met een snelheid van $1,2\frac{m}{s}$ door zijn evenwichtspositie beweegt?

Oplossing

- De massa van het voorwerp is gegeven door

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{1600\frac{N}{m}}{4\pi^2(4Hz)^2} = 2,53kg.$$

- In de onbelaste toestand heeft de veer een evenwichtslengte ℓ_0. Met de massa bevestigd aan de veer is het systeem in evenwicht wanneer

$$k(\ell - \ell_0) = mg \Rightarrow (\ell - \ell_0) = \frac{mg}{k} = 0,0155m.$$

- De positie van de oscillerende massa wordt gegeven door

$$x(t) = A\sin(\omega t).$$

Je mag hier een faseconstante meenemen maar door een goede keuze van welk ogenblik $t = 0$ is, kan je deze nul stellen. Het nulpunt van de x-as werd zodanig gekozen dat de evenwichtspositie zich op $x = 0$ bevindt. De snelheid is dan

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t).$$

Wanneer het deeltje door de evenwichtspositie beweegt, is de snelheid maximaal. Deze snelheid is gegeven. Dus

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{1,2\frac{m}{s}}{2\pi 4Hz} = 0,048m.$$

7

3. Valse noten

Je staat op straat te wachten om over te steken en er rijdt een auto voorbij waaruit luide muziek klinkt. Je herkent de muziek maar in plaats van een la hoor je een sol kruis wanneer de auto terug van je weg rijdt. (Deze noten hebben frequenties respectievelijk $440Hz$ en $415Hz$.) Als je weet dat er een wind staat van $20\frac{km}{h}$ en dat de auto tegen deze wind in rijdt, hoe snel rijdt de auto dan (ten opzichte van de grond)? De snelheid van het geluid in lucht is $343\frac{m}{s}$.

Oplossing Laat ons alle snelheden uitdrukken ten opzichte van de grond. Dan is $u_r = 0$ want je staat stil te wachten om over te steken. De snelheid van het geluid ten opzichte van de grond is

$$v = 343\frac{m}{s} + \frac{1\frac{m}{s}}{3,6\frac{km}{h}}20\frac{km}{h} = 348,6\frac{m}{s}.$$

De snelheid van de bron u_r is de snelheid van de auto. Deze is gevraagd ten opzichte van de grond dus we hoeven deze niet meer om te rekenen. Aangezien de bron wegbeweegt van de waarnemer, wordt de formule van het dopplereffect in dit geval

$$f_r = \frac{v}{v + u_s}f_s \quad \Rightarrow \quad u_s = v\left(\frac{f_s}{f_r} - 1\right) = 348,6\frac{m}{s}\left(\frac{440Hz}{415Hz} - 1\right) = 21\frac{m}{s}.$$

Dit komt overeen met ongeveer $76\frac{km}{h}$, wat een realistische snelheid is voor een auto.

8

Juni 2012

1. Veren met massa's

Een blok met massa $4,60kg$ wordt aan een veer gehangen, dewelke een onbekende krachtsconstante k heeft. Het geheel wordt opgehangen aan het plafond met het blok in mechanisch evenwicht. Op dat ogenblik is de veer in het geheel $27,6cm$ lang. Er wordt nog $6,32kg$ aan de eerste massa vastgemaakt, waarop de totale lengte van de veer $5,0cm$ groter wordt.

a) Wat is de krachtsconstante van de veer?

b) Wat is de evenwichtslengte van de onbelaste veer, dus wanneer er geen massa aan is bevestigd?

c) Als het systeem met de beide massa's bevestigd uit evenwicht wordt gebracht door de massa's $3,75cm$ naar beneden te duwen en vanuit rust los te laten, wat zal dan de maximale snelheid zijn die de massa's zullen vertonen tijdens het oscilleren?

Oplossing

a) Het blok ondervindt twee krachten wanneer het in evenwicht aan de veer hangt: de veerkracht, die opwaarts gericht is en de zwaartekracht die neerwaarts gericht is. Als de onbelaste veer evenwichtslengte ℓ_0 en totale lengte ℓ heeft, kan dit nul zijn van de netto kracht worden uitgedrukt als

$$k(\ell - \ell_0) = mg \quad ??$$

zodat

$$\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

Dit geldt in zowel in de situatie waarin de kleinere als waarin de grotere massa aan de veer is bevestigd. Je kan deze relatie dus in beide gevallen opschrijven en ze van elkaar aftrekken. Zo vind je

$$\begin{aligned} \ell_2 - \ell_1 &= \ell_0 + \frac{m_2 g}{k} - \ell_0 - \frac{m_1 g}{k} \\ &= \frac{(m_2 - m_1)g}{k}. \end{aligned}$$

Dit omschrijven levert je

$$k = \frac{(m_2 - m_1)g}{(\ell_2 - \ell_1)} = \frac{6,32kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}{0,05m} = 1240\frac{N}{m}.$$

b) Met de veerconstante gekend, kan de evenwichtslengte worden berekend uit de relatie die hierboven ook werd gebruikt, in het bijzonder

$$\ell_0 = \ell_1 - \frac{m_1 g}{k} = 0,276 - \frac{4,60kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}{1240\frac{N}{m}} = 0,240m.$$

c) De maximale snelheid van de oscillatie wordt gegeven door

$$v_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,0375m \cdot \sqrt{\frac{1240\frac{N}{kg}}{10,92kg}} = 0,4\frac{m}{s},$$

aangezien de beginuitwijking ook de maximale uitwijking (= de amplitude) is daar de massa's uit rust vertrekken.

1

2. Geluidsgolven in een buis...

Tijdens een experiment waarbij geluidsgolven worden bestudeerd, worden staande golven gecreëerd in een tube die langs één kant afgesloten is en langs de andere kant open. Bij een bepaalde resonantiefrequentie bevinden de knopen zich op een afstand van $7,56cm$ van elkaar. Bij de daaropvolgende (hogere) resonantiefrequentie is deze afstand verminderd tot $5,4cm$.

a) Wat zijn de resonatiefrequenties?

b) Welke harmonieken zijn dit?

c) Wat is de fundamentele frequentie?

De snelheid van geluid in lucht is ongeveer $343m/s$.

Oplossing

a) De afstand tussen twee knopen is de helft van de golflengte. Dit betekent dat de beschouwde golflengtes gelijk zijn aan $\lambda = 15,12cm$ en $\lambda' = 10,8cm$. De frequenties worden gegeven door

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\frac{m}{s}}{15,12cm} = 2269Hz \quad \text{en} \quad f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{343\frac{m}{s}}{10,8cm} = 3176Hz.$$

b) Voor de n^e harmoniek geldt

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_n}{\lambda_m} = \frac{m}{n}$$

met n en m beide oneven aangezien één van de uiteinden van de buis open is. Daarom geldt

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_n} = \frac{15,12cm}{10,8cm} \approx \frac{7}{5}.$$

Dit betekent dat het om de 5^e en 7^e harmonieken gaat. Je zou deze verhouding ook kunnen krijgen met 10 en 14, maar dit zijn geen oneven getallen en corresponderen niet met harmonieken van een halfopen buis, of met 15 en 21 maar deze zijn geen opeenvolgende harmonieken meer, enzoverder.

c) Gebruikmakend van de oplossing van de vorige deelvragen vinden we

$$f_n = n\frac{v}{4L} = nf_1 \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{n}f_n = \frac{v}{n\lambda_n} = \frac{343\frac{m}{s}}{\cancel{5} \cdot 0,108m} = 453,7Hz$$

$$\overset{\text{of}}{=} \frac{343\frac{m}{s}}{\cancel{7} \cdot 0,1512m} = \cancel{453,7}Hz.$$

7

5

~~635,2Hz~~?

2

3. ... en geluidsgolven in de open lucht

Terwijl je met de wagen rijdt, word je voorbijgestoken door een andere wagen waar luide basmuziek uit te horen is. De muziek heeft een frequentie $f = 0,600kHz$ maar jij hoort deze aan een frequentie $f' = 0,592kHz$ wanneer de andere wagen voor je rijdt (met een hogere snelheid dan jij). Jij rijdt op dat ogenblik aan een snelheid van $72\frac{km}{h}$ en je ondervindt een directe tegenwind van $25\frac{km}{h}$. Wanneer de andere wagen zich tot op $200m$ van jou verwijderd heeft, hoor je nog een geluidsniveau van $44dB$.

a) Hoe snel rijdt de andere wagen?

b) Wat is het vermogen aan geluidsenergie geproduceerd door de luidsprekers in die wagen, in de veronderstelling dat ze het geluid in alle richtingen even sterk uitzenden? (Je zal een erg klein getal vinden in vergelijking met het elektrische vermogen van de meeste luidsprekers, dat meestal rond de $1kW$ ligt.)

De snelheid van geluid in lucht mag je opnieuw $343\frac{m}{s}$ nemen.

Oplossing

a) In dit geval bewegen zowel bron (de andere auto) als de waarnemer (jijzelf). Eén mogelijkheid is om alles te beschrijven in het referentiestelsel van de grond. In dat stelsel rijdt de bron met een onbekende snelheid v_b maar de wind voert het geluid weg met een snelheid van

$$v_g + v_{\text{wind}} = 343\frac{m}{s} + \frac{25\frac{km}{h}}{3,6\frac{km/h}{m/s}} = 350\frac{m}{s}.$$

Een waarnemer die met de wind meebeweegt, hoort daarom een frequentie

$$f_{\text{wind}} = \frac{v_g + v_{\text{wind}}}{(v_g + v_{\text{wind}}) + v_b} f.$$

Als waarnemer beweeg jij echter niet met de wind mee, door een tweede Dopplerverschuiving zal je een andere frequentie horen. Het geluid heeft nog steeds een snelheid $v = 350m/s$ ten opzichte van de grond maar jij beweegt met een snelheid

$$v_w = \frac{72\frac{km}{h}}{3,6\frac{km/h}{m/s}} = 20\frac{m}{s}.$$

Jij hoort daarom een frequentie

bron

$$f' = \frac{(v_g + v_{\text{wind}}) + v_w}{v_g + v_{\text{wind}}} f_{\text{wind}} = \frac{(v_g + v_{\text{wind}}) + v_w}{(v_g + v_{\text{wind}}) + v_b} f.$$

3

Hieruit kan je de snelheid van de bron vinden, namelijk

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{(v_g + v_{\text{wind}} + v_w)f - vf'}{f'} \\ &= (v_g + v_{\text{wind}} + v_w)\frac{f}{f'} - (v_g + v_{\text{wind}}) \\ &= \left(350\frac{m}{s} + 20\frac{m}{s}\right)\frac{600Hz}{592Hz} - 350\frac{m}{s} \\ &= 25,0\frac{m}{s} \\ &= 90,0\frac{km}{h}. \end{aligned}$$

b) Het geluidsniveau van $44dB$ komt overeeen met een intensiteit van

√

$$I = 10^{44dB/10dB} I_0 = 2,511 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2}.$$

Deze intensiteit is gerelateerd aan het vermogen van de geluidsbron — de luidsprekers — door

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Dit omschrijven levert je

√

$$P = 4\pi r^2 I(r) = 4\pi(200m)^2 \cdot 2,511 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2} = 0,0126W.$$

Dit lijkt een erg klein getal te zijn vergeleken met het vermogen van de meeste luidsprekers. Je kan echter verifiëren dat iemand op een afstand van $1m$ van deze luidsprekers een geluidsniveau hoort van

$$L = 10dB \log\left(\frac{P}{(4\pi(1m)^2 \cdot 10^{-12}\frac{W}{m^2}}\right) = 90dB,$$

wat al tamelijk luid is. Als er $1kW$ aan geluidsenergie zou worden geproduceerd, zou dit een pijnlijke $139dB$ worden. Het verschil heeft waarschijnlijk te maken met de efficiëntie van de luidsprekers die rond de 1% zou liggen, en andere effecten waardoor energie gedissipeerd wordt.

4