Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2011–2012

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

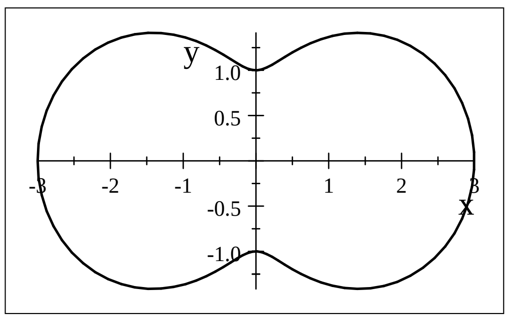
- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Bereken $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$

/9

2. Hierbij vind je de grafiek van de poolkromme $r(\theta) = \cos 2\theta + 2$:



Welke oppervlakte neemt deze figuur in? Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening.

/9

3. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$\left(3y^3x^2 + 2y^2x\right) + \left(y^2x^3 + 3y^4\right) y' = 0$$

/9

4. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de onbepaalde coëfficiënten:

$$y'' - y = e^x + xe^{-x}$$

/9

5. Ned Stark heeft vijf kinderen: van oud naar jong heten ze Robb, Sansa, Bran, Arya en Rickon. Hun leeftijden vormen een rekenkundige rij. De som van hun leeftijden is 50 en de som van de kwadraten van hun leeftijden is 590. Hoe oud is Sansa?

| /8 |

6. Bereken de fourierreeks van de functie $f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & \text{als} \quad x\in\left[-\pi,0\right] \\ 2x & \text{als} \quad x\in\left[0,\pi\right] \end{cases}$

/9

7. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x + y + z}$ in het punt $(0, 0, 0)$ in de richting $(2, 3, -6)$

/9

8. Zoek de lokale extrema van $f(x, y) = -2x^2 + 8xy + 8x - y^4 - 16y - 8$

/8

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Bereken $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$

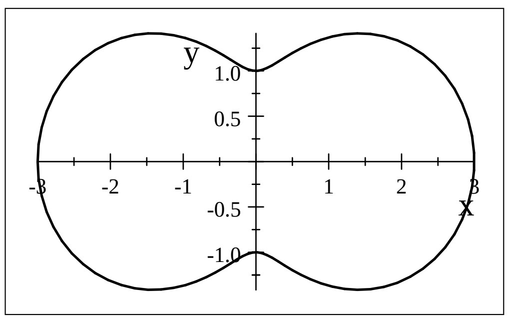
$$y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} dy = 2xdx \\ x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}dy$$

$$y = \sin t \Rightarrow \begin{cases} dy = \cos tdt \\ y = 0 \to t = 0 \\ y = 1 \to t = \pi/2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \left[\frac{t}{4}+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

2. Hierbij vind je de grafiek van de poolkromme $r(\theta) = \cos 2\theta + 2$:



Welke oppervlakte neemt deze figuur in? Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening.

$$S = \frac{1}{2}\cdot 4\int\limits_0^{\pi/2} r^2(\theta)\,d\theta = 2\int\limits_0^{\pi/2} (2+\cos 2\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(4+4\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)d\theta = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(4+4\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (8+8\cos 2\theta+1+\cos 4\theta)\,d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} (9+8\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= \left[9\theta+4\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{2}$$

3. Los de volgende eersteorde differentiaalvergelijking op:

$$\left(3y^3x^2+2y^2x\right)+\left(y^2x^3+3y^4\right)y' = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3y^3x^2+2y^2x\right) = 9y^2x^2+4yx \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^2x^3+3y^4\right) = 3y^2x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{de vergelijking is niet exact}$$

$$\Rightarrow R(x,y) = 9y^2x^2+4yx-3y^2x^2 = 6y^2x^2+4yx$$

$$\Rightarrow \frac{R}{-P} = \frac{6y^2x^2+4yx}{-\left(3y^3x^2+2y^2x\right)} = \frac{6y^2x^2+4yx}{-3y^3x^2-2y^2x} = -\frac{2}{y} \text{ is een functie van } y \text{ alleen}$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2} \text{ is een integrerende factor en } y=0 \text{ is een singuliere oplossing}$$

$$\Rightarrow \left(3yx^2+2x\right) + \left(x^3+3y^2\right)y' = 0 \text{ is wél exact}$$

$$\int \left(3yx^2+2x\right)dx = x^3y+x^2+c_y$$

$$\int \left(x^3+3y^2\right)dy = x^3y+y^3+c_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = x^3y+x^2+y^3+c=0 \\ y=0 \text{ SO} \end{cases}$$

4. Los de volgende tweedeorde differentiaalvergelijking op met de methode van de onbepaalde coëfficiënten:

$$y''-y=e^x+xe^{-x}$$

- Homogene vergelijking: $y''-y=0$
  Karakteristieke vergelijking: $t^2-1=0 \Rightarrow t \in \{1,-1\}$
  $\Rightarrow y_H = c_1e^x+c_2e^{-x}$
- $y''-y=e^x$
  Stel $\alpha=1 \Rightarrow \text{mult}_\Phi(\alpha)=1$
  $k=\text{gr}(Q(x))=0$
  $\Rightarrow$ Stel $V(x) := b_0+b_1x$, zonder verlies van algemeenheid is $b_0=0$
  $\Rightarrow$ Stel $V(x) := b_1x$

$$\begin{array}{rcl|l} y_P &=& b_1xe^x & -1 \\ y_P' &=& b_1(1+x)e^x & 0 \\ y_P'' &=& b_1(2+x)e^x & 1 \end{array}$$

  $\Rightarrow (2+x)b_1e^x - b_1xe^x \equiv e^x$
  $\Rightarrow 2b_1e^x \equiv e^x$
  $\Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow y_{P_1} = \frac{1}{2}xe^x$
- $y''-y=xe^{-x}$
  Stel $\alpha=-1 \Rightarrow \text{mult}_\Phi(\alpha)=1$
  $k=\text{gr}(Q(x))=1$
  $\Rightarrow$ Stel $V(x) := d_0+d_1x+d_2x^2$, zonder verlies van algemeenheid is $d_0=0$

$$\begin{array}{rcl|l} y_P &=& \left(d_1x+d_2x^2\right)e^{-x} & -1 \\ y_P' &=& \left(d_1+(2d_2-d_1)x-d_2x^2\right)e^{-x} & 0 \\ y_P'' &=& \left(2d_2-2d_1+(d_1-4d_2)x+d_2x^2\right)e^{-x} & 1 \end{array}$$

  $\Rightarrow \left(2d_2-2d_1+(d_1-4d_2)x+d_2x^2\right)e^{-x} - \left(d_1x+d_2x^2\right)e^{-x} \equiv xe^{-x}$
  $\Rightarrow (2d_2-2d_1-4xd_2)e^{-x} \equiv xe^{-x}$
  $\Rightarrow \begin{cases} 2d_2-2d_1=0 \\ -4d_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -\frac{1}{4} \\ d_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$
  $\Rightarrow y_{P_2} = -\frac{\left(x^2+x\right)}{4}e^{-x}$
- $y = c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x-\frac{\left(x^2+x\right)}{4}e^{-x}$

5. Ned Stark heeft vijf kinderen: van oud naar jong heten ze Robb, Sansa, Bran, Arya en Rickon. Hun leeftijden vormen een rekenkundige rij. De som van hun leeftijden is 50 en de som van de kwadraten van hun leeftijden is 590. Hoe oud is Sansa?
Stel de RR $(x_3+2v, x_3+v, x_3, x_3-v, x_3-2v)$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3+2v+x_3+v+x_3+x_3-v+x_3-2v=50 \\ (x_3+2v)^2+(x_3+v)^2+x_3^2+(x_3-v)^2+(x_3-2v)^2=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} 5x_3=50 \\ 10v^2+5x_3^2=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ 10v^2+500=590 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ 10v^2=90 \end{cases}$
$|\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ v^2=9 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x_3=10 \\ v=-3 \end{cases}$
$\Rightarrow (16,13,10,7,4)$. Sansa is dus 13.

6. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ 2x & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} f_E(x) = |x| \\ f_O(x) = x \end{cases}$

- $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x dx = \pi$
- $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\cos nx dx = \left[\dfrac{2}{\pi n^2}(\cos nx + nx\sin nx)\right]_0^\pi = \dfrac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \\ 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \end{cases}$
- $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{n^2}(\sin nx - nx\cos nx)\right]_0^\pi = -\dfrac{2}{n}(-1)^n = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$
- $\Rightarrow f(x) \overset{b.o.}{=} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

7. Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x,y,z) = \sqrt{1+x+y+z}$ in het punt $(0,0,0)$ in de richting $(2,3,-6)$
$\lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{f(2\lambda,3\lambda,-5\lambda)-f(0,0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\lambda+3\lambda-6\lambda}-1}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to0}\dfrac{\sqrt{1-\lambda}-1}{\lambda} = \dfrac{0}{0} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{\lambda\to0} -\dfrac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} = -\dfrac{1}{2}$

8. Zoek de lokale extrema van $f(x,y) = -2x^2+8xy+8x-y^4-16y-8$
$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8y-4x+8=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y^3+8x-16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+2 \\ x=\dfrac{1}{2}y^3+2 \end{cases} : x(y)=2y+2$
$\Rightarrow 2y+2 = \dfrac{1}{2}y^3+2 \Rightarrow y \in \{-2,0,2\} \Rightarrow (x,y) \in \{(-2,-2),(2,0),(6,2)\}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow H(x, y) = 48y^2 - 64$

$H(-2, -2) = 128 > 0$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0 \Rightarrow (-2, -2)$ is een maximum.

$H(2, 0) = -64 < 0 \Rightarrow (2, 0)$ is een zadelpunt

$H(6, 2) = 128 > 0$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0 \Rightarrow (6, 2)$ is een maximum.