Nuttige uitdrukkingen (Hydrostatica)

- Dichtheid (algemeen)

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

(bij constante dichtheid)

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

- Druk (definitie)

$$p = \frac{F}{A}$$

(in een een statisch fluïdum)

$$p = p_0 + \rho g \Delta h$$

- Principe van Archimedes: Een vloeistof oefent een opwaartse kracht uit op een voorwerp met een grootte gegeven door

$$F = mg = \rho_{\mathrm{vl}} g V$$

met m de massa van de verplaatste vloeistof en V het ondergedompelde volume van het voorwerp.

Nuttige uitdrukkingen (Hydrodynamica)

- Massa- en volumedebiet door een oppervlakte A

$$I_m = \rho A v \quad \text{en} \quad I_V = A v$$

met v de snelheid van de vloeistof (loodrecht op het oppervlak).

- Continuïteitsvergelijking

$$\rho A v = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow \quad A v = \mathrm{cte} \quad \text{als} \quad \rho = \mathrm{cte}$$

In dit laatste geval spreekt men van een niet-samendrukbare vloeistof.

- Vergelijking van Bernoulli

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \mathrm{cte}.$$

Hier is p de effectief gemeten druk, niet de p_0 uit de hydrostatische wet. Hoewel vaak bruikbaar is de vergelijking van Bernouilli een vrij ruwe benadering.

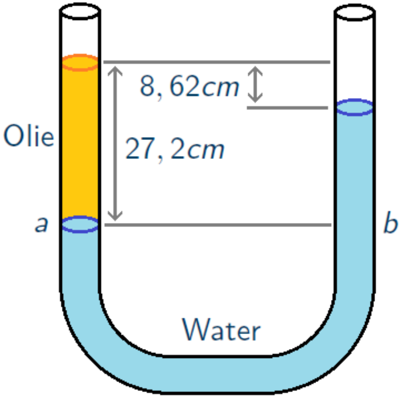
Oefening 1: 13.12

In een film ontwijkt Tarzan zijn achtervolgers door zich onderwater te verstoppen en door een lang, dun rietje te ademen. Veronderstellend dat het maximale drukverschil dat zijn longen aankunnen en waarop hij nog steeds kan ademen $-85 mm\ Hg$ is, bereken de maximale diepte waar hij zich kon hebben verstopt.

Je mag gebruiken dat $1 mm\ Hg = 133,3 Pa$ en dat de massadichtheid van water $1000 \frac{kg}{m^3}$ is. De luchtdruk is onder normale omstandigheden $1013 hPa$.

Oefening 2: 13.17

Water en daarna olie (die niet opmengen) worden in een U-vormige tube gegoten. De vloeistoffen bereiken een evenwicht zoals getoond in de figuur. Wat is de dichtheid van de olie?
Hint: De drukken op punten a en b zijn gelijk. Waarom?



Oefening 3: 13.39

Hoeveel ballonnen gevuld met He-gas zijn er nodig om een persoon van $75 kg$ op te tillen? Veronderstel dat elke ballon sferisch is met een diameter van $33 cm$. Je mag gebruiken dat de dichtheid van He-gas $0,179 \frac{kg}{m^3}$ is en die van lucht is ongeveer $1,29 \frac{kg}{m^3}$.

Oefening 4: 13.42

Een stuk hout met een massa van $3,25 kg$ drijft op water. Welke minimale massa van lood, aan het hout gehangen met een touw, zal het hout doen zinken?

De massadichtheden van lood en hout zijn $11,3 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ en — in dit geval — $500 \frac{kg}{m^3}$ respectievelijk.

Oefening 5: 13.55

Beschouw een langs boven open vat met een gat in de wand. In dit vat zit een hoeveelheid water zodat het vloeistofoppervlak tot op een hoogte h boven het gat in de wand komt. Houd rekening met de snelheid waarmee het vloeistofoppervlak daalt en toon aan dat de snelheid waarmee de vloeistof uit het gat spuit, gegeven is door

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (A_1^2/A_2^2)}},$$

waar A_1 en A_2 de oppervlaktes zijn van de opening in de wand en de bovenste oppervlakte, respectievelijk. Veronderstel dat $A_1 \ll A_2$ zodat de stroom in goede benadering constant en laminair is.

Oefening 6: 13.60

Een venturimeter kan worden voorgesteld als een cilindervormige buis dewelke een versmalling vertoont zodat de buis voor en na de versmalling een oppervlakte A_1 en A_2 heeft en waarin zowel voor als na de versmalling een drukmeter werd geplaatst.

1. Toon aan dat de stroomsnelheid in het dikke deel van een venturimeter wordt gegeven door

$$v = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}},$$

   waar p_1 en p_2 de drukken zijn voor en na de versmalling respectievelijk.

2. Een venturimeter meet de stroomsnelheid van water. De grote diameter is $3cm$ en de kleine $1cm$. Als het drukverschil $18mm\ Hg$ is, wat is dan de snelheid van het water in het dunne deel van de venturimeter?

Oefening 7: 13.84

Giraffen zijn een wonder van cardiovasculaire bouwkunde. Bereken het verschil in druk (uitgedrukt in atmosfeer) dat de bloedvaten in het hoofd van een giraffe moeten kunnen verdragen als het hoofd van een volledig opgerichte positie naar de grond wordt gebracht om te drinken. De hoogte van een gemiddelde giraffe is ongeveer $6m$.

Oefening 8: 13.95

De waterstraal van een kraan verkleint in diameter naarmate het water valt. Wat is de diameter van de straal als functie van de afstand y die het water heeft afgelegd sinds het uit de kraan is gekomen, gegeven dat het water een snelheid v_0 heeft bij het verlaten van de kraan en dat de diameter van de straal ter hoogte van de kraan d is. Je mag eveneens aannemen dat de massadichtheid van het water in de straal overal dezelfde is.

Oplossingen

Oplossing 1

- De druk in Tarzan's longen is gelijk aan de luchtdruk boven het oppervlak; anders zou er lucht in of uit zijn longen stromen, ook als hij zijn adem inhoudt.
- De druk die langs buiten op zijn longen werkt, is de vloeistofdruk. Deze is gegeven door

$$p = p_0 + \rho g h$$

zodat

$$h = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{85 mmHg}{1000 \frac{kg}{m^3} 9,81 \frac{m}{s^2}} \frac{133,3 Pa}{1 mmHg} = 1,15 m.$$

Oplossing 2

- De drukken op punten a en b — die zich op dezelfde hoogte bevinden — zijn gelijk omdat het water anders niet in evenwicht zou zijn.
- De druk op deze twee punten is gegeven door de luchtdruk plus de druk uitgeoefend door de vloeistof erboven.
- Voor het water (rechts) is deze additionele druk

$$\Delta p_w = \rho_w g h_w .$$

- Voor de olie is dit

$$\Delta p_o = \rho_o g h_o .$$

- Beide Δp's zijn gelijk, dus moet

$$\rho_o = \frac{h_w}{h_o}\rho_w = \frac{0,272m - 0,0682m}{0,272m} 1000 \frac{kg}{m^3} = 683 \frac{kg}{m^3} .$$

Oplossing 3

- De grootte van de kracht nodig om een persoon van $75 kg$ op te tillen is deze massa maal g.
- Een heliumballon genereert een netto opwaartse kracht omdat de Archimedeskracht op de ballon (ten gevolge van de lucht) groter is dan het gewicht van de ballon. De opwaartse kracht is dan ook het verschil van deze twee krachten:

$$
\begin{aligned}
F_{\text{net}} &= F_{\text{Arch}} - F_g \\
&= \rho_l g \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right) - \rho_{He} g \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right) \\
&= (\rho_l - \rho_{He}) g \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right).
\end{aligned}
$$

- Het totale aantal ballonnen nodig is daarom

$$
N = \frac{F_{g,\text{mens}}}{F_{\text{net}}} = \frac{m_{\text{mens}} g}{(\rho_l - \rho_{He}) g \left(\frac{4\pi}{3} r^3\right)} = 3588.
$$

Oplossing 4

- Opdat het lood het hout zou doen zinken, dient de massa van het lood groot genoeg te zijn zodat de zwaartekracht op beiden groter is dan de maximale drijfkracht (Archimedeskracht) die kan worden ontwikkeld.
- De maximale opwaartse kracht wordt ontwikkeld wanneer ook het hout volledig ondergedompeld is. Deze heeft een grootte

$$F_{op} = \rho_w g(V_h + V_{Pb}) = \rho_w g\left(\frac{m_h}{\rho_h} + \frac{m_{Pb}}{\rho_{Pb}}\right).$$

- De neerwaartse kracht is de zwaartekracht, de grootte hiervan wordt gegeven door

$$F_{neer} = m_h g + m_{Pb} g.$$

- De kritische massa aan lood zal zodanig zijn dat $F_{op} = F_{neer}$, dus

$$\begin{aligned} m_{Pb} &= m_h\left(\frac{\rho_w}{\rho_h} - 1\right)\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_{Pb}}\right)^{-1} \\ &= 3,25kg\left(\frac{1000}{500} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{11,3}\right)^{-1} = 3,57kg. \end{aligned}$$

Oplossing 5

- Benoem alle grootheden aan het wateroppervlak met 2 en die aan het gat in de wand met een 1.
- De continuiteitsvergelijking zegt je dat

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

- De vergelijking van Bernouilli zegt

$$p + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

  Deze twee drukken p zijn gelijk aangezien beide punten in aanraking komen met de lucht erbuiten.
- De tweede relatie vereenvoudigen en v_1 elimineren met de continuiteitsvergelijking levert, met $h = h_2 - h_1$,

$$gh = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) v_1^2,$$

  waaruit het gevraagde volgt door v_1 af te zonderen.

Oplossing 6.1

- Benoem alle grootheden voor de versmalling met 1 en na de versmalling met 2, net zoals voor de drukken gedaan werd.
- Opnieuw kan je de continuiteitsvergelijking en de vergelijking van Bernouilli toepassen. Je vindt — met v_2 geëlimineerd

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{A_1^2} v_1^2 .$$

- Ditmaal zal de middelste term in elk lid wegvallen als je punten 1 en 2 op dezelfde hoogte kiest. Herschrijven van de vergelijking levert daarom

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right) = p_2 - p_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\right)}},$$

wat equivalent is met het gevraagde.

Oplossing 6.2

- De snelheid van het water, gegeven de getallen uit de opgave is gegeven door

$$\begin{aligned} v &= A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \\ &= (\pi(0,01m/2)^2) \sqrt{\frac{2(1066,4Pa)}{1000\frac{kg}{m^3}\pi^2((0,03m/2)^4 - (0,01m/2)^4)}} \\ &= 0,24\frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Oplossing 7

- Als je de veronderstelling maakt dat de bloeddruk in de romp van de giraf altijd dezelfde druk $p_0(\neq p_{\text{atm}})$ is — dit is waarschijnlijk een benadering maar gemotiveerd door de ongeveer constante druk die door het hart wordt uitgeoefend — kan je de druk in de opgerichte kop schrijven als

$$p_{\text{op}} = p_0 - \rho g \delta h_1.$$

- Analoog kan de druk in de kop tijdens het drinken worden geschreven als

$$p_{\text{neer}} = p_0 + \rho g \delta h_2.$$

- Het totale drukverschil wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned}
\Delta p &= p_{\text{neer}} - p_{\text{op}} \\
&= \rho g(\delta h_1 + \delta h_2) \\
&= \rho g \delta h \\
&= 1,05 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 6m \\
&= 618 hPa.
\end{aligned}$$

Dit is ongeveer 60% van de luchtdruk.

Oplossing 8.1

- De waterstraal voldoet aan twee eigenschappen: de continuïteitsvergelijking en de vergelijking van Bernouilli.
- De continuïteitsvergelijking zegt dat (met $v(0) = v_0$)

$$A(y)v(y) = A(0)v(0),$$

  waarbij y nog steeds de afgelegde weg vanaf de kraan voorstelt.
- De vergelijking van Bernouilli zegt

$$p(y) - \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2(y) = p(0) - \rho g 0 + \frac{1}{2}\rho v^2(0).$$

  Het minteken in de tweede term is afkomstig van de keuze van y-as, die postief is in neerwaartse richting.

Oplossing 8.2

- De druk in de waterstraal is overal dezelfde, namelijk de atmosferische druk. Gegeven de aanname dat $\rho =$ cte, wordt de vergelijking van Bernouilli dus
$$-gy + \frac{1}{2}v^2(y) = \frac{1}{2}v^2(0),$$
wat zich vereenvoudigt tot
$$v(y) = \sqrt{v^2(0) + 2gy}.$$
Dit zou je ook kunnen halen uit de vrije valbeweging of de kinematische relaties voor constante versnelling.
- Deze laatste uitdrukking invullen in de continuïteitsvergelijking levert
$$A(y) = A(0)\frac{v(0)}{v(y)} = \pi\left(\frac{d(0)}{2}\right)^2 \frac{v(0)}{\sqrt{v^2(0) + 2gy}}.$$
- Hieruit kan je $d(y)$ halen en zo vind je
$$d(y) = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}A(y)} = d(0)\sqrt{\frac{v(0)}{\sqrt{v^2(0) + 2gy}}}.$$