Examenvragen hoofdstuk 9 van de laatste drie jaren

Werner Peeters

1. Beschrijf zo gedetailleerd mogelijk wat je weet over de onderlinge ligging van de volgende twee vlakken:

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } \beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -17 \end{pmatrix}$$

2. Gegeven de lineaire transformatiematrix $T = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ -6 & -2\lambda & \lambda - 1 \\ 9 & 9 & \lambda \end{pmatrix}$. Bereken alle λ waarvoor T singulier is, geef voor elk van die gevallen de kern en het beeld van de lineaire transformatie, en ga voor elk van die gevallen na dat de dimensiestelling klopt.

3. Gegeven de doorsnede van een bol Γ en een vlak α :

$$\begin{cases} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z - 1 = 0 \\ \alpha : 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

   Is dit een cirkel? Zo ja, bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel (niet: van de bol!)

4. Bepaal van de lineaire transformatie met transformatiematrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ de eigenwaarden en de eigenruimten. Geef duidelijk de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van de eigenwaarden aan.

5. Bereken de afstand van het punt $p\,(3, -1, 1)$ tot de rechte $A : \begin{cases} 3x - y - 2z = 4 \\ -6x + 7y + 4z = 7 \end{cases}$

6. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie

$$T = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -18 \\ -12 & 1 & 18 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

7. Zij $A : \begin{cases} 3x - 7y + 6z = 24 \\ x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$ en zij $p\,(1, 3, 4)$. Geef de vergelijking van het vlak Ap. Hint: gebruik een vlakkenbundel.

8. Bereken de eigenwaarde(n) en eigenvectoren van de transformatie $T = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -16 & 14 \end{pmatrix}$

9. Onderzoek het snijgedrag van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : 3x - 13y - 3z = 16 \\ \beta : 27x - 7y + 3z = 34 \end{cases}$$

10. Bepaal kern, beeld, dimensie en nulgetal van de transformatie $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -13 & 13 \end{pmatrix}$. Is deze transformatie regulier of singulier?

11. Wat is de straal van de cirkel $\begin{cases} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 4 = 0 \\ \alpha : 3x - y + \sqrt{6}z + 3\sqrt{6} - 18 = 0 \end{cases}$

12. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Onderzoek het al dan niet snijden van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : 2x + 2y - z = 1 \\ \beta : 3x - 2y + z = 14 \\ \gamma : x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

14. Behoren de volgende drie koppels ja of nee tot een zelfde lineaire transformatie?

$$\left(\overrightarrow{p}\,(3,1)\,,\overrightarrow{p'}\,(10,-1)\right),\left(\overrightarrow{q}\,(1,3)\,,\overrightarrow{q'}\,(6,5)\right)\ \text{en}\ \left(\overrightarrow{r}\,(2,4)\,,\overrightarrow{r'}\,(10,6)\right)$$

Motiveer.

15. Onderzoek het al dan niet snijden van de rechten

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \ \text{en}\ B : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

16. Bereken de straal en het middelpunt van de cirkel, die gegeven wordt door de volgende snijding van een bol en een vlak:

$$\begin{cases} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 163 = 0 \\ \alpha : 3x + 4z - 36 = 0 \end{cases}$$

Oplossingen:

1. Beschrijf zo gedetailleerd mogelijk wat je weet over de onderlinge ligging van de volgende twee vlakken:

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + l_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ en } \beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + l_2 \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 21 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 2y - 3z + 2 = 0$$

$$\beta : \begin{vmatrix} x-1 & y+\frac{1}{2} & z-3 \\ 6 & -8 & 1 \\ 18 & 6 & -17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 13x + 12y + 18z - 61 = 0$$

$$(6,-2,-3)\,(13,12,18) = 0 \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 13 & 12 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{CT} (0,-147,98) \sim (0,-3,2)$$

$$\text{Stel } z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y + 2 = 0 \\ 13x + 12y - 61 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (1,4,0)$$

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Gegeven de lineaire transformatiematrix $T = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ -6 & -2\lambda & \lambda-1 \\ 9 & 9 & \lambda \end{pmatrix}$. Bereken alle λ waarvoor T singulier is, geef voor elk van die gevallen de kern en het beeld van de lineaire transformatie, en ga voor elk van die gevallen na dat de dimensiestelling klopt.

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ -6 & -2\lambda & \lambda-1 \\ 9 & 9 & \lambda \end{vmatrix} = -2(\lambda+3)(\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0,3,-3\}$$

- Als $\lambda = 3 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \operatorname{Ker} t : \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -6 & 2 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 3x + 3y - z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \operatorname{Ker} t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \operatorname{ng} t = 1 \\ \operatorname{Im} t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{Im} t : -3x + z = 0 \text{ en } \operatorname{rg} t = 2 \end{cases}$$

- Als $\lambda = -3 \Rightarrow$
$$\begin{cases} \operatorname{Ker} t : \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -6 & 6 & -4 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \operatorname{Ker} t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ en } \operatorname{ng} t = 1 \\ \operatorname{Im} t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} t : 3x + z = 0 \text{ en } \operatorname{rg} t = 2 \end{cases}$$

3. Gegeven de doorsnede van een bol Γ en een vlak α :

$$\begin{cases} \Gamma : x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z-1=0 \\ \alpha : 2x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

Is dit een cirkel? Zo ja, bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel (niet: van de bol!)
$\Gamma : (x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2 = 1+2^2+(-2)^2+4^2 = 25$
$\Rightarrow$ Middelpunt m van de bol is $(2,-2,4)$ en zijn straal is 5

$$d(n,\alpha) = \left| \frac{2\cdot 2 - 2(-2)+4-3}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \right| = 3$$

Straal van de cirkel $= \sqrt{25-3^2} = 4$

Voetpunt: $N : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2(2+2k)-2(-2-2k)+(4+k)-3=0 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow n(0,0,3)$
Controle: $\|mn\| = \|(2,-2,4)-(0,0,3)\| = 3$

4. Bepaal van de lineaire transformatie met transformatiematrix $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ de eigenwaarden en de eigenruimten. Geef duidelijk de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van de eigenwaarden aan.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -6 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda-2 = -(\lambda+2)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Spec} T = \left\{-1^{(2)}, -2\right\}$$

- $E_{-1} : \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y-2z=0$ heeft $MM=2$
- $E_{-2} : \begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ heeft $MM=1$

5. Bereken de afstand van het punt $p(3,-1,1)$ tot de rechte $A : \begin{cases} 3x-y-2z=4 \\ -6x+7y+4z=7 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \overset{CT}{\rightarrow} (10,0,15) \sim (2,0,3)$

Stel $x=1 \Rightarrow \begin{cases} -y-2z=1 \\ 7y+4z=13 \end{cases} \Rightarrow (y,z)=(3,-2)$

$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ap} = p-a = (3,-1,1)-(1,3,-2) = (2,-4,3)$
$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{ap} = (2,0,3)\times(2,-4,3) = (12,0,-8) \Rightarrow \|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{ap}\| = 4\sqrt{13}$
$\|\overrightarrow{u}\| = \|(2,0,3)\| = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow d(p,A) = \frac{\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{ap}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 4$$

6. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie

$$T = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -18 \\ -12 & 1 & 18 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det T - \lambda E = \left| \begin{pmatrix} 13-\lambda & 0 & -18 \\ -12 & 1-\lambda & 18 \\ 6 & 0 & -8-\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

Als $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & -18 \\ -12 & 0 & 18 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x - 3z = 0$

Als $\lambda = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & -18 \\ -12 & -3 & 18 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 6z - y - 4x = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 4x + y - 6z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Zij $A : \begin{cases} 3x - 7y + 6z = 24 \\ x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$ en zij $p(1,3,4)$. Geef de vergelijking van het vlak Ap. Hint: gebruik een vlakkenbundel.
Vlakkenbundel: $\alpha_\lambda : (3x - 7y + 6z - 24) + \lambda(x + 3y + 2z - 8) = 0$
Stel $(1,3,4) \in \alpha_\lambda \Rightarrow (3\cdot 1 - 7\cdot 3 + 6\cdot 4 - 24) + \lambda(1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4 - 8) = 0 \Rightarrow -18 + 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{5}$ $\Rightarrow$Vlakkenbundel: $Ap : 5(3x - 7y + 6z - 24) + 9(x + 3y + 2z - 8) = 0$
$\Rightarrow Ap : 24x - 8y + 48z = 192$
$\Rightarrow Ap : 3x - y + 6z = 24$

8. Bereken de eigenwaarde(n) en eigenvectoren van de transformatie $T = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -16 & 14 \end{pmatrix}$
$\begin{vmatrix} -10-\lambda & 9 \\ -16 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$
$E_2 : \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x - 3y = 0$

9. Onderzoek het snijgedrag van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : 3x - 13y - 3z = 16 \\ \beta : 27x - 7y + 3z = 34 \end{cases}$$

$\alpha \cap \beta : \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 27 & -7 & 3 \end{pmatrix} \overset{CT}{\rightarrow} (-60, -90, 330) \sim (2, 3, -11)$
Stel $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 13y = 16 \\ 27x - 7y = 34 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (1,-1,0) \Rightarrow S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

10. Bepaal kern, beeld, dimensie en nulgetal van de transformatie $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -13 & 13 \end{pmatrix}$. Is deze transformatie regulier of singulier?
$\det T = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -13 & 13 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 8 & -9 \\ 0 & -16 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ -16 & 18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ De matrix is singulier
$\Rightarrow \operatorname{rg} T < 3$
Anderzijds is het beeld de matrix voortgebracht door $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$ welke lineair

afhankelijk moeten zijn $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (-24, 16, 8) \sim (3, -2, -1) \Rightarrow \operatorname{Im} T : 3x - 2y - z = 0$ en $\operatorname{rg} T = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -13 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$ en de derde vergelijking is daar lineair afhankelijk van.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{CT}{\to} (-13, 9, 8) \Rightarrow \operatorname{Ker} T : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\operatorname{ng} T = 1$

11. Wat is de straal van de cirkel $\begin{cases} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 4 = 0 \\ \alpha : 3x - y + \sqrt{6}z + 3\sqrt{6} - 18 = 0 \end{cases}$

$\Gamma : (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 25$
$\Rightarrow m\,(2, 4, -3)$ en $R = 5$
$N : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$
$\alpha \cap N : 3\,(3k+2) - (4-k) + \sqrt{6}\left(\sqrt{6}k - 3\right) + 3\sqrt{6} - 18 = 0$
$\Rightarrow 16k - 16 = 0 \Rightarrow k = 1$
$\Rightarrow$ voetpunt $n\left(5, 3, \sqrt{6} - 3\right)$
$\Rightarrow d\,(m, n) = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = 4$
$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - (d\,(m,n))^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

12. Zoek de eigenwaarden en eigenruimten van de volgende lineaire transformatie

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det T - \lambda E = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & -3 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$

Als $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y - z = 0$

Als $\lambda = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 3z - 6y - 3x = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. Onderzoek het al dan niet snijden van de vlakken

$$\begin{cases} \alpha : 2x + 2y - z = 1 \\ \beta : 3x - 2y + z = 14 \\ \gamma : x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

$\alpha \cap \beta :$
$(2, 2, -1) \times (3, -2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim (0, 1, 2)$
Stel $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(3, \dfrac{-5}{2}\right)$

$$\Rightarrow \alpha \cap \beta = S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Stel $S \cap \gamma : 1 \cdot 3 - 2 \cdot \left(k - \frac{5}{2}\right) + 2k = 8 \Leftrightarrow 0k = 0 \Rightarrow S \subseteq \gamma$

$$\Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14. Behoren de volgende drie koppels ja of nee tot een zelfde lineaire transformatie?

$$\left(\overrightarrow{p}\,(3,1)\,,\overrightarrow{p'}\,(10,-1)\right),\left(\overrightarrow{q}\,(1,3)\,,\overrightarrow{q'}\,(6,5)\right) \text{ en } \left(\overrightarrow{r}\,(2,4)\,,\overrightarrow{r'}\,(10,6)\right)$$

Motiveer.

Stel $T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$Tr = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = r' \Rightarrow$ Ja

15. Onderzoek het al dan niet snijden van de rechten

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ en } B : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(1,1,3) \nsim (3,2,2)$, dus de twee zijn niet evenwijdig

$$\begin{vmatrix} 6-3 & 3+1 & 7+9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \lambda + 6 = 3\mu + 3 \\ \lambda + 3 = 2\mu - 1 \\ 3\lambda + 7 = 2\mu - 9 \end{cases} \Rightarrow (\lambda, \mu) = (-6, -1)$$

Dus ze snijden in $(0, -3, -11)$

16. Bereken de straal en het middelpunt van de cirkel, die gegeven wordt door de volgende snijding van een bol en een vlak:

$$\begin{cases} \Gamma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 163 = 0 \\ \alpha : 3x + 4z - 36 = 0 \end{cases}$$

De bol is $\Gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 169$

$\Rightarrow$ Middelpunt van de bol $m = (1,1,2)$ en straal $= 13$

De afstand van $m\,(1,1,2)$ tot α is $\left| \dfrac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 36}{5} \right| = 5$

De rechte door m en loodrecht op α is $A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$n = \alpha \cap A : 3\,(1+3k) + 4\,(2+4k) - 36 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n : (4,1,6)$

$r = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$