Examen Toegepaste Wiskunde II Oefeningen

dr Werner Peeters

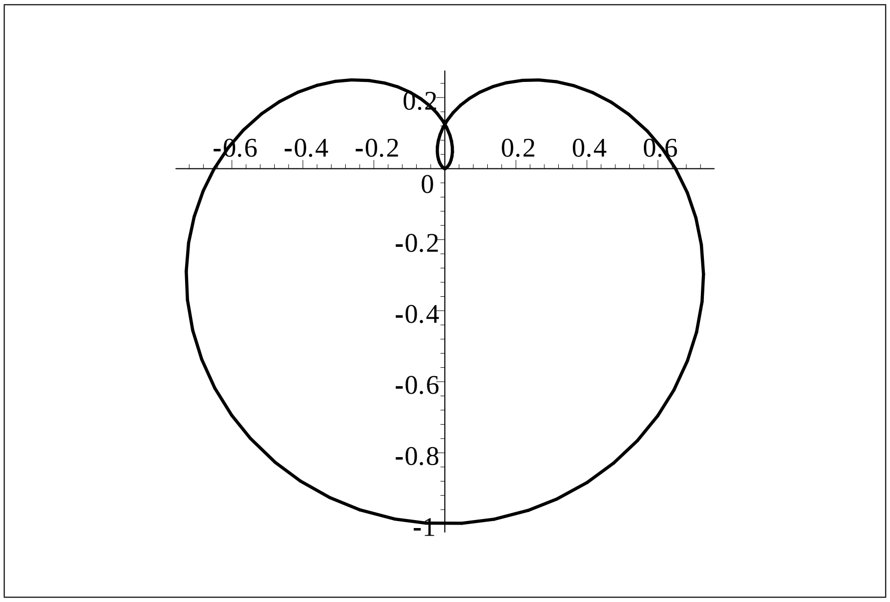
1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2008–2009

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Gegeven de poolkromme met vergelijking $r = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$. Deze ziet er ongeveer als volgt uit:



(a) Bepaal een domein zodanig dat alle punten van deze kromme precies één keer worden doorlopen (behalve eventueel het begin–en eindpunt). (Hint: bepaal de nulpunten van de kromme.)

(b) Bereken de booglengte van deze kromme over het in (a) gevonden interval.

/7

2. Beschouw de functie $f(x) = x^4$ op het interval $[0, 1]$.

   (a) Bereken de exacte waarde I van de oppervlakte tussen $f(x)$ en de X–as op $[0, 1]$.

   (b) Bereken de numerieke benadering S_2 van de integraal door de regel van Simpson voor $n = 2$.

   (c) Bereken de maximale fout E die je hierop maakt.

   (d) We weten dat in het algemeen $|I - S_2| \leq E$. Bewijs dat de ongelijkheid in dit geval een gelijkheid is.

   (e) Kan je een andere functie vinden waarbij hetzelfde geldt maar dan voor de trapeziumregel? Verklaar.

   (f) Welke n moet je minimaal in het geval van $f(x) = x^4$ op $[0, 1]$ nemen om bij de Simpsonsbenadering minstens een nauwkeurigheid te hebben van vier cijfers na de komma?

/7

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op door het vinden van een geschikte integrerende factor:

$$\frac{\cos 2y}{x} - 2\sin y = (2\sin 2y + x\cos y)\, y'$$

/9

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''' - 3y' + 2y = xe^x$$

/9

5. Een meetkundige rij bestaat uit vier termen met als som 30. Als we de tweede term wegnemen en bij de derde term 1 optellen wordt de rij rekenkundig. Wat is de eerste term en de reden van de rij? Er zijn drie oplossingen, waarvan één uitkomst voor de hand ligt, de andere twee niet.

/9

6. Bereken de fouriercoëfficiënten van de functie

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x + \pi & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \pi - x & \text{als} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$

en schrijf zijn fourierreeks uit.

/10

7. Zij

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : (x, y) \mapsto (\sin x \cos y, \cos x \sin y, \cos x \cos y, \sin x \sin y) \\ g &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (w, x, y, z) \mapsto (w + x, y - z) \\ h &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Bereken $D(h \circ g \circ f)$ *zonder* $h \circ g \circ f$ uit te rekenen. Gebruik goniometrische formules om je resultaat zo eenvoudig mogelijk te maken. De einduitkomst levert een merkwaardig resultaat op. Kan je dat verklaren?

/10

8. Zoek de extrema van de functie

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - 3x^2 + 4xy^2 - 4x + y^2 - 1$$

Hint: zowel $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ als $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ zijn makkelijk te ontbinden in factoren.

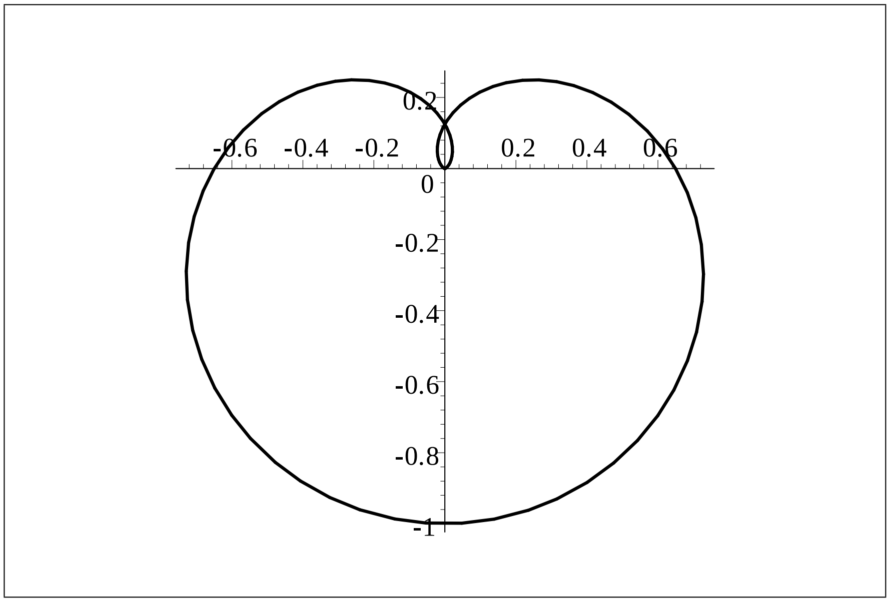
/9

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Gegeven de poolkromme met vergelijking $r = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$. Deze ziet er ongeveer als volgt uit:



   (a) Bepaal een domein zodanig dat alle punten van deze kromme precies één keer worden doorlopen (behalve eventueel het begin–en eindpunt). (Hint: bepaal de nulpunten van de kromme.)
   $[0, 3\pi]$

   (b) Bereken de booglengte van deze kromme over het in (a) gevonden interval.
   $\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin^3 \dfrac{\theta}{3}\right) = \cos\dfrac{\theta}{3} - \cos^3\dfrac{\theta}{3}$
   $\Rightarrow \left(\cos\dfrac{\theta}{3} - \cos^3\dfrac{\theta}{3}\right)^2 + \left(\sin^3\dfrac{\theta}{3}\right)^2 = 1 - 2\cos^2\dfrac{\theta}{3} + \cos^4\dfrac{\theta}{3} = \left(1 - \cos^2\dfrac{\theta}{3}\right)^2$
   $\Rightarrow \sqrt{r^2 + (r')^2}d\theta = \left(1 - \cos^2\dfrac{\theta}{3}\right)d\theta$
   $\Rightarrow L = \displaystyle\int_0^{3\pi}\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{3}\right)d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\cos\frac{\theta}{3}\sin\frac{\theta}{3}\right]_0^{3\pi} = \frac{3}{2}\pi$

2. Beschouw de functie $f(x) = x^4$ op het interval $[0, 1]$.

   (a) Bereken de exacte waarde I van de oppervlakte tussen $f(x)$ en de X–as op $[0, 1]$.
   $I = \displaystyle\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$

   (b) Bereken de numerieke benadering S_2 van de integraal door de regel van Simpson voor $n = 2$.
   $S_2 = \dfrac{0^4 + 4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + 1^4}{3\cdot 2} = \dfrac{5}{24}$

   (c) Bereken de maximale fout E die je hierop maakt.
   $\dfrac{d^4}{dx^4}\left(x^4\right) = 24$
   $\Rightarrow E = \dfrac{24\cdot 1^5}{180\cdot 2^4} = \dfrac{1}{120}$

(d) We weten dat in het algemeen $|I - S_2| \leq E$. Bewijs dat de ongelijkheid in dit geval een gelijkheid is.

$\left|\frac{1}{5} - \frac{5}{24}\right| = \frac{1}{120}$

(e) Kan je een andere functie vinden waarbij hetzelfde geldt maar dan voor de trapeziumregel? Verklaar.

$f(x) = x^2$ op $[0,1]$

$I = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

$T_2 = \frac{0^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\right) = 2$

$\Rightarrow E = \frac{2 \cdot 1^3}{12 \cdot 2^2} = \frac{1}{24}$

$\left|\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{24}$

(f) Welke n moet je minimaal in het geval van $f(x) = x^4$ op $[0,1]$ nemen om bij de Simpsonsbenadering minstens een nauwkeurigheid te hebben van vier cijfers na de komma?

$E = \frac{24 \cdot 1^5}{180 \cdot n^4} < 10^{-4} \Rightarrow n > \frac{2}{3}\sqrt{15}\sqrt[4]{30} = 6.042\,750\,795$

Echter n moet even zijn, dus n moet minstens 8 zijn.

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op door het vinden van een geschikte integrerende factor:

$$\frac{\cos 2y}{x} - 2\sin y = (2\sin 2y + x\cos y)\, y'$$

$$\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\cos 2y}{x} - 2\sin y \\ Q(x,y) = -(2\sin 2y + x\cos y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\cos 2y}{x} - 2\sin y\right) = -\dfrac{2}{x}\sin 2y - 2\cos y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}\left(-(2\sin 2y + x\cos y)\right) = -\cos y \end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2}{x}\sin 2y - \cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-\frac{2}{x}\sin 2y - \cos y}{-(2\sin 2y + x\cos y)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

$$\Rightarrow \cos 2y - 2x\sin y = \left(2x\sin 2y + x^2\cos y\right) y'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(x,y) = \cos 2y - 2x\sin y \\ Q(x,y) = -\left(2x\sin 2y + x^2\cos y\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int P(x,y)\, dx = \int (\cos 2y - 2x\sin y)\, dx = x\cos 2y - x^2\sin y + c_y \\ \displaystyle\int Q(x,y)\, dx = \int -\left(2x\sin 2y + x^2\cos y\right) dy = x\cos 2yx - x^2\sin y + c_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x\cos 2y - x^2\sin y + c = 0$$

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''' - 3y' + 2y = xe^x$$

KV: $\Theta(t) = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$
Homogene oplossing: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}$
Methode van de onbepaalde coëfficiënten:
$\text{mult}_\Theta(1) = 2$ en $\text{gr}(Q(x)) = 1$
Stel $y_p = \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\right) e^x$ en z.v.v.a. $b_0 = b_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_p = \left(b_2x^2 + b_3x^3\right)e^x \\ y_p' = \left(2b_2x + (3b_3 + b_2)x^2 + b_3x^3\right)e^x \\ y_p'' = \left(2b_2 + (6b_3 + 4b_2)x + (6b_3 + b_2)x^2 + b_3x^3\right)e^x \\ y_p''' = \left(6b_3 + 6b_2 + (18b_3 + 6b_2)x + (9b_3 + b_2)x^2 + b_3x^3\right)e^x \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(6b_3 + 6b_2 + (18b_3 + 6b_2)x + (9b_3 + b_2)x^2 + b_3x^3\right) - 3\left(2b_2x + (3b_3 + b_2)x^2 + b_3x^3\right) + 2\left(b_2x^2 + b_3x^3\right) =$
$6b_3 + 6b_2 + 18xb_3 = x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6b_3 + 6b_2 = 0 \\ 18b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (b_2, b_3) = \left(-\frac{1}{18}, \frac{1}{18}\right)$$

$$\Rightarrow y = \left(C_1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{18}\right)e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}$$

Alternatief:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ e^x & e^x + xe^x & -2e^{-2x} \\ e^x & 2e^x + xe^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 9$$

$$z_1' = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-2x} \\ 0 & e^x + xe^x & -2e^{-2x} \\ xe^x & 2e^x + xe^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x$$

$$z_2' = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-2x} \\ e^x & 0 & -2e^{-2x} \\ e^x & xe^x & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x$$

$$z_3' = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x + xe^x & 0 \\ e^x & 2e^x + xe^x & xe^x \end{vmatrix} = \frac{1}{9}e^{3x}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \int \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x\right)dx = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^2 \\ z_2' = \int \frac{1}{3}xdx = \frac{1}{6}x^2 \\ z_3' = \int \frac{1}{9}e^{3x}xdx = \frac{1}{27}e^{3x}x - \frac{1}{81}e^{3x} \end{cases}$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{18}x^2\right)e^x + \left(\frac{1}{6}x^2\right)xe^x + \left(\frac{1}{27}e^{3x}x - \frac{1}{81}e^{3x}\right)e^{-2x} = \frac{1}{18}x^3e^x - \frac{1}{18}e^xx^2 + \frac{1}{27}xe^x - \frac{1}{81}e^x$$

$$\Rightarrow y = \left(C_1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{18}\right)e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x}$$

5. Een meetkundige rij bestaat uit vier termen met als som 30. Als we de tweede term wegnemen en bij de derde term 1 optellen wordt de rij rekenkundig. Wat is de eerste term en de reden van de rij? Er zijn drie oplossingen, waarvan één uitkomst voor de hand ligt, de andere twee niet.
$x_1, qx_1, q^2x_1, q^3x_1$

$$\begin{cases} x_1 + qx_1 + q^2x_1 + q^3x_1 = 30 \\ 2\left(q^2x_1 + 1\right) = x_1 + q^3x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1 + q + q^2 + q^3} \\ 2q^2x_1 + 2 = x_1 + q^3x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1 + q + q^2 + q^3} \\ \left(2q^2 - q^3 - 1\right)x_1 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1+q+q^2+q^3} \\ \left(2q^2-q^3-1\right)\left(\dfrac{30}{1+q+q^2+q^3}\right) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1+q+q^2+q^3} \\ 15\left(2q^2-q^3-1\right) = -\left(1+q+q^2+q^3\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1+q+q^2+q^3} \\ -14q^3+31q^2+q-14 = 0 \end{cases}$$

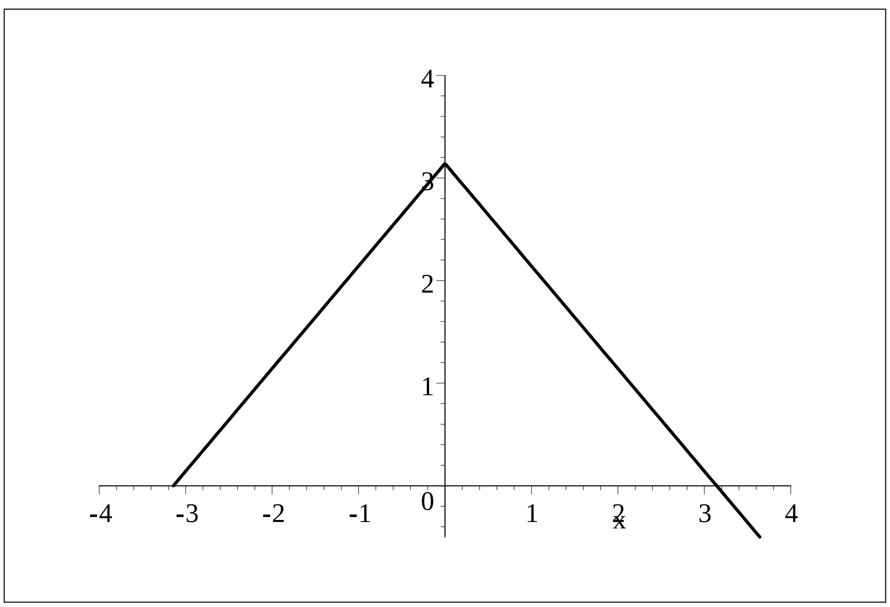
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{1+q+q^2+q^3} \\ (q-2)\left(14q^2-3q-7\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ q = \dfrac{3+\sqrt{401}}{28} \Rightarrow x_1 = \dfrac{657}{20} - \dfrac{23}{20}\sqrt{401} \\ q = \dfrac{3-\sqrt{401}}{28} \Rightarrow x_1 = \dfrac{657}{20} + \dfrac{23}{20}\sqrt{401} \end{cases}$$

6. Bereken de fouriercoëfficiënten van de functie

$$f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x+\pi & \text{als} \quad x \in [-\pi, 0[\\ \pi - x & \text{als} \quad x \in [0,\pi] \end{cases}$$

en schrijf zijn fourierreeks uit.



Dit is een even functie, dus volgt onmiddellijk dat $\forall n \in \mathbb{N}_0 : b_n = 0$
Verder is

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[2\pi x - x^2\right]_0^\pi = \pi$$

Voor $n \neq 0$ is

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx dx$$

Stel $\left\{ \begin{array}{l} u = \pi - x \\ dv = \cos nx dx \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = -dx \\ v = \dfrac{1}{n} \sin nx \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi} \left[(\pi - x) \sin nx \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = -\frac{2}{n^2\pi} \left[\cos nx \right]_0^\pi = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als} \quad n \text{ even} \\ \dfrac{4}{n^2\pi} & \text{als} \quad n \text{ oneven} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

7. Zij

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : (x,y) \mapsto (\sin x \cos y, \cos x \sin y, \cos x \cos y, \sin x \sin y) \\ g &: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (w,x,y,z) \mapsto (w+x, y-z) \\ h &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Bereken $D(h \circ g \circ f)$ *zonder* $h \circ g \circ f$ uit te rekenen. Gebruik goniometrische formules om je resultaat zo eenvoudig mogelijk te maken. De einduitkomst levert een merkwaardig resultaat op. Kan je dat verklaren?

Stel $\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = (\sin x \cos y, \cos x \sin y, \cos x \cos y, \sin x \sin y) = (a,b,c,d) \\ g(a,b,c,d) = (a+b, c-d) = (u,v) \\ h(u,v) = u^2 + v^2 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Df(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix} \\ Dg(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ Dh(x,y) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow D(h \circ g \circ f) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(a+b) & 2(c-d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(\sin x \cos y + \cos x \sin y) & 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos x \sin y + 2\cos y \sin x & 2\cos x \sin y + 2\cos y \sin x & 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y & 2\sin x \sin y - 2\cos x \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin(x+y) & 2\sin(x+y) & 2\cos(x+y) & -2\cos(x+y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \cos y & -\sin x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin(x+y)(\cos x\cos y - \sin x\sin y) + 2\cos(x+y)(-\sin x\cos y - \cos x\sin y) \\ 2\sin(x+y)(-\sin x\sin y + \cos x\cos y) + 2\cos(x+y)(-\cos x\sin y - \sin x\cos y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\sin(x+y)\cos(x+y) - 2\cos(x+y)\sin(x+y) & 2\sin(x+y)\cos(x+y) - 2\cos(x+y)\sin(x+y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenlijk staan hier de somformules voor cosinus en sinus, gevolgd door de stelling van Pythagoras.

8. Zoek de extrema van de functie

$$f(x,y) = 3x^2y^2 - 3x^2 + 4xy^2 - 4x + y^2 - 1$$

Hint: zowel $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ als $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ zijn makkelijk te ontbinden in factoren.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 - 6x + 4y^2 - 4 = 2(3x+2)\left(y^2-1\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6yx^2 + 8yx + 2y = 2y(x+1)(3x+1) = 0 \end{cases}$$

De kandidaat–extrema zijn dus $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$, $(-1,1)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$, $(-1,-1)$ en $\left(-\dfrac{1}{3}, -1\right)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y^2 - 6$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 + 8x + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8y + 12xy$$
$$\Rightarrow H(x,y) = \left(6y^2 - 6\right)\left(6x^2 + 8x + 2\right) - (8y + 12xy)^2$$

- $H\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right) = 4$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right) = -6 < 0 \Rightarrow$ maximum
- $H(-1,1) = -16 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right) = -16 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H(-1,-1) = -16 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H\left(-\dfrac{1}{3}, -1\right) = -16 \Rightarrow$ zadelpunt