Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2015–2016

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Los de volgende complexe vierkantsvergelijking op:

$$(2-2i)\,z^2 + (7+11i)\,z + (-12+6i) = 0$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

2. Zij $A(z) = iz^3 + (3+2i)z^2 + 9z + 1 - 4i$ en $B(z) = iz^2 + 2iz + 1$. Bereken quotiënt en rest van de deling $\dfrac{A(z)}{B(z)}$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 4} - \sqrt{x^2 + 5x + 2}\right)$

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2x + 4}\right)^x$

4. Los op:

$$2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} + 8 = 17 \cdot 2^{x+1}$$

/6

5. Zoek de lokale extrema van de functie

$$f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$$

/6

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 1 + \cos^2 2\theta$$

en maak hier een tekening van.

| /6 |

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{8x^2 - 6x - 7}{4x^3 - 7x + 3} dx$$

/6

8. Bereken

$$\int xe^{x^2} \sin x^2 dx$$

$\boxed{\quad /6}$

9. Bereken $\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^3 x dx$

/6

10. Bereken het volume dat men bekomt door het gebied tussen de parabolen $f(x) = -2x^2 + 10x - 5$ en $g(x) = x^2 - 2x + 4$ te wentelen rond de X–as.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Los de volgende complexe vierkantsvergelijking op:

$$(2-2i)\,z^2+(7+11i)\,z+(-12+6i)=0$$

$\Delta=(7+11i)^2-4\,(2-2i)\,(-12+6i)=-24+10i$

Stel $\begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ 2xy=10 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ xy=5 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ x^2\left(-y^2\right)=-25 \\ xy>0 \end{cases}$

Resolvente vergelijking: $\lambda^2+24\lambda-25=0 \Rightarrow \lambda\in\{1,-25\}$

$\Rightarrow x^2=1$ en $y^2=25$ en $xy>0$

$\Rightarrow x+yi\in\{1+5i,-1-5i\}$

$\Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{-7-11i\pm(1+5i)}{2\,(2-2i)}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{-7-11i+(1+5i)}{2\,(2-2i)}=\dfrac{-6-6i}{2\,(2-2i)}=\dfrac{-3-3i}{2-2i}=\dfrac{(-3-3i)\,(2+2i)}{8}=-\dfrac{3}{2}i \\ z_2=\dfrac{-7-11i-(1+5i)}{2\,(2-2i)}=\dfrac{-8-16i}{2\,(2-2i)}=\dfrac{-2-4i}{1-i}=\dfrac{(-2-4i)\,(1+i)}{2}=1-3i \end{cases}$

2. Zij $A(z)=iz^3+(3+2i)\,z^2+9z+1-4i$ en $B(z)=iz^2+2iz+1$. Bereken quotiënt en rest van de deling $\dfrac{A(z)}{B(z)}$

$$\begin{array}{rllll|lll} & iz^3 & +(3+2i)\,z^2 & +9z & +1-4i & iz^2 & +2iz & +1 \\ \cline{6-8} -(& iz^3 & +2iz^2 & +z) & & z & -3i & \\ \cline{2-4} & & 3z^2 & +8z & & & & \\ & -(& 3z^2 & +6z & -3i) & & & \\ \cline{3-5} & & & 2z & +1-i & & & \end{array}$$

$\Rightarrow \begin{cases} Q(z)=z-3i \\ R(z)=2z+1-i \end{cases}$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

   (a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^3+4x^2+5x+2}=\dfrac{0}{0}$

   $=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(2x-1)\,(x+2)}{(x+1)^2\,(x+2)}$

   $=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}=-5$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+5x+2}\right)$

   $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\left(x^2-3x+4\right)-\left(x^2+5x+2\right)}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+5x+2}}\right)$

   $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+4-x^2-5x-2}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+5x+2}}\right)$

   $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-3x+4-5x-2}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+5x+2}}\right)$

   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x-5x}{x+x}\right)=-4$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3x-5x}{-x-x}\right)=4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2\,(x+2)}\right)^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2\,(x+2)}\right)^{\left(-\frac{2(x+2)}{3}\right)\left(-\frac{3}{2(x+2)}\right)x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{2(x+2)}\right)x}=e^{-\frac{3}{2}}$

4. Los op:

$$2^{2x+1}+3\cdot2^{x-1}+8=17\cdot2^{x+1}$$

$$\begin{aligned} y=2^x \quad &\Rightarrow \quad 2y^2=2^{2x+1}\\ &\Rightarrow \quad \frac{y}{2}=2^{x-1}\\ &\Rightarrow \quad 2y=2^{x+1}\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 2y^2+\dfrac{3}{2}\cdot y+8=34y$
$\Leftrightarrow 4y^2+3y+16=68y$
$\Leftrightarrow 4y^2-68y+3y+16=0$
$\Leftrightarrow 4y^2-65y+16=0$
$\Leftrightarrow (4y-1)\,(y-16)=0$
$\Leftrightarrow y\in\left\{16,\dfrac{1}{4}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_2 16=4\\ x=\log_2\dfrac{1}{4}=-2\end{cases}$

5. Zoek de lokale extrema van de functie

$$f\,(x)=2x^5+5x^4-10x^3+3$$

$f'\,(x)=10x^4+20x^3-30x^2=10\,(x+3)\,x^2\,(x-1)$

x		-3		0		1	
$f'\,(x)$	$+$	0	$-$	$0^{(2)}$	$-$	1	$+$
$f\,(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$
		192				0	

Feedback: Nogal wat mensen meenden dat — zonder enige vorm van onderzoek van de tweede afgeleide — men hieruit kan besluiten dat 0 een buigpunt is. Voor deze foutieve conclusie werden punten afgetrokken!

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

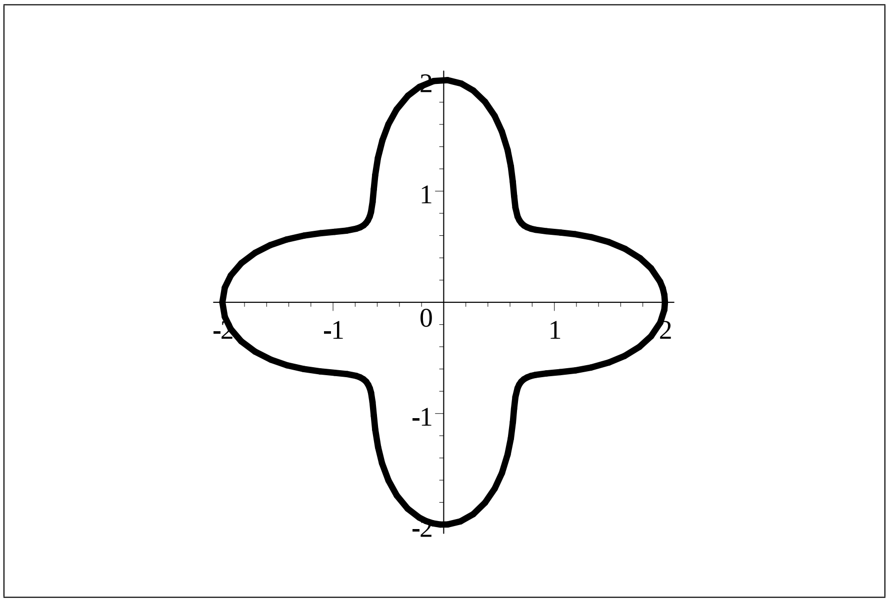
$$r\,(\theta)=1+\cos^2 2\theta$$

en maak hier een tekening van.

- Domein $=\mathbb{R}$
  Periode $=\pi$
  Beperkt domein $=[0,\pi]$
- $r=0$ kan niet

- $r' = -4\cos 2\theta \sin 2\theta = -2\sin 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = k \cdot \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{2} & & \frac{3\pi}{4} & & \pi \\ r & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ r' & 0 & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & 0 \\ & M(2) & \searrow & m(1) & \nearrow & M(2) & \searrow & m(2) & \nearrow & M(2) \end{array}$$



Feedback: Men zou kunnen zeggen dat $1 + \cos^2 2\theta = 1 + \dfrac{1+\cos 4\theta}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 4\theta$ en dat de periode $\dfrac{\pi}{4}$ is. Dit antwoord werd — uiteraard — ook goedgekeurd.

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{8x^2 - 6x - 7}{4x^3 - 7x + 3} dx$$

$$\frac{8x^2 - 6x - 7}{4x^3 - 7x + 3} = \frac{8x^2 - 6x - 7}{(2x-1)(2x+3)(x-1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{x-1}$$

$$A = \frac{8x^2 - 6x - 7}{(2x+3)(x-1)}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 4$$
$$B = \frac{8x^2 - 6x - 7}{(2x-1)(x-1)}\Big|_{x=\frac{-3}{2}} = 2$$
$$C = \frac{8x^2 - 6x - 7}{(2x-1)(2x+3)}\Big|_{x=1} = -1$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{4}{2x-1} + \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = 2\ln|2x-1| + \ln|2x+3| - \ln|x-1| + c$$

Feedback: Al wie in de ontbinding in factoren de kopcoëfficiënt 4 is vergeten, is het merendeel van zijn punten kwijt. Dit is nl. een zéér zware fout.

8. Bereken

$$\int x e^{x^2} \sin x^2 dx$$

Stel $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^t \sin t dt$

Stel $\left\{ \begin{array}{l} u = \sin t \\ dv = e^t dt \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \cos t dt \\ v = e^t \end{array} \right.$

$= \dfrac{1}{2}\left(e^t \sin t - \displaystyle\int e^t \cos t dt \right)$

$= \dfrac{1}{2} e^t \sin t - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^t \cos t dt$

Stel $\left\{ \begin{array}{l} u = \cos t \\ dv = e^t dt \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = -\sin t dt \\ v = e^t \end{array} \right.$

$= \dfrac{1}{2} e^t \sin t - \dfrac{1}{2}\left(e^t \cos t dt + \displaystyle\int e^t \sin t dt \right)$

$= \dfrac{1}{2} e^t \sin t - \dfrac{1}{2} e^t \cos t dt - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^t \sin t dt$

$\Rightarrow 2I = \dfrac{1}{2} e^t \left(\sin t - \cos t \right) + c$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{4} e^t \left(\sin t - \cos t \right) + c$

$= \dfrac{1}{4} e^{x^2} \left(\sin\left(x^2\right) - \cos\left(x^2\right) \right) + c$

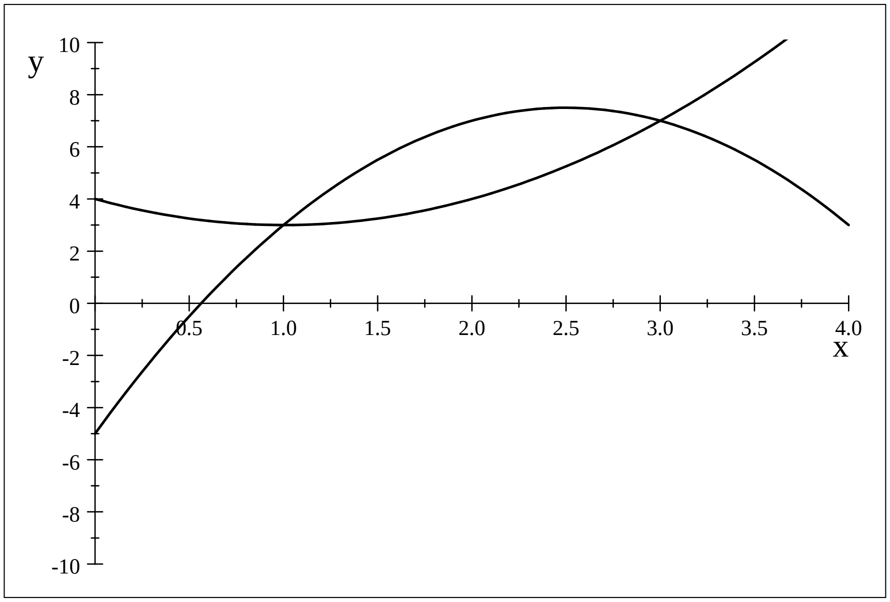
9. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^3 x dx = \int_0^{\pi} \cos^4 x \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x dx$

$$\begin{array}{lll} t = \cos x & \Rightarrow & dt = -\sin x dx \\ x = 0 & \rightarrow & t = 1 \\ x = \pi & \rightarrow & t = -1 \end{array}$$

$$= -\int_1^{-1} t^4 \left(1 - t^2\right) dt = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - t^6\right) dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{35}$$

10. Bereken het volume dat men bekomt door het gebied tussen de parabolen $f(x) = -2x^2 + 10x - 5$ en

$g(x) = x^2 - 2x + 4$ te wentelen rond de X–as.



$f(x) = g(x) \Rightarrow -2x^2 + 10x - 5 = x^2 - 2x + 4$
$\Rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0$
$\Rightarrow x \in \{1, 3\}$
$f(2) = 7$ en $g(2) = 4 \Rightarrow f$ ligt boven g

$$\Rightarrow V = \pi \int_1^3 \left(\left(-2x^2 + 10x - 5\right)^2 - \left(x^2 - 2x + 4\right)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_1^3 \left(\left(4x^4 - 40x^3 + 120x^2 - 100x + 25\right) - \left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 16\right) \right) dx$$

$$= \pi \int_1^3 \left(3x^4 - 36x^3 + 108x^2 - 84x + 9\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{3}{5}x^5 - 9x^4 + 36x^3 - 42x^2 + 9x \right]_1^3 = \frac{216}{5}\pi$$

Feedback: De formule is dus $\pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$ en dus NIET $\pi \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx$!