

## Hfst 28      Magnetische inductie

Michael Faraday (Engeland), Joseph Henry (VS) :

verandering van magneetveld veroorzaakt een veranderende magnetische flux doorheen een oppervlak dat wordt omsloten door een geleider. Deze fluxverandering veroorzaakt een emf en een stroom in de geleider !

emf's en stromen die op deze wijze tot stand komen noemt men geïnduceerde emf's en stromen.

Het verschijnsel op zich noemt men INDUCTIE.

Zij ontdekten ook dat hetzelfde fenomeen zich voordeed indien het magnetisch veld constant was maar de fluxverandering werd veroorzaakt door een beweging van de gesloten lus van de geleider . De aldus geïnduceerde emf noemt men een “bewegings” emf.

voorbeeld : bij uittrekken van stekker uit stopcontact zijn soms kleine vonkjes te zien. Dit komt omdat zolang er stroom door de draad loopt er een magneetveld rond de draad bestaat. Bij het verwijderen van de stekker, vermindert de stroom en dus verandert het magneetveld. Dit veranderend magneetveld induceert een emf in de draad die tracht de oorspronkelijke stroom te behouden.

### Magnetische flux

De flux van een vector veld door een oppervlak wordt op dezelfde manier berekend als de flux van een elektrisch veld door een oppervlak. Stel  $dA$  is een oppervlakte element op het oppervlak  $S$ ,  $\hat{n}$  is een eenheidsnormaal, een eenheidsvector normaal tov het oppervlakte element. Er zijn twee richtingen normaal tov een oppervlakte element, en welke van de twee als richting bepaald wordt voor de richting van  $\hat{n}$  is een keuze. Maar, het teken van de flux hangt van deze keuze af. De magnetische flux door  $S$  is:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA \\ &= BA \cos \theta = B_n A\end{aligned}$$

De eenheid van magnetische flux is die van de magnetische veld intensiteit maal die van oppervlakte =  $T m^2 = Wb$

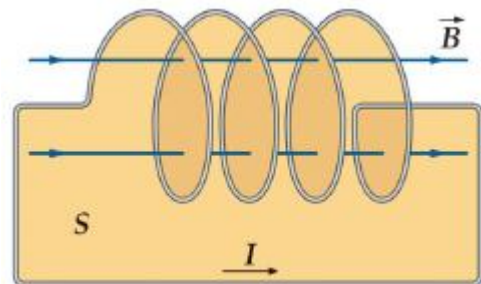
Aangezien  $B$  proportioneel is tov het aantal veldlijnen per eenheid van oppervlakte, is de magnetische flux proportioneel tot het aantal lijnen door een oppervlakte element.

Dikwijls zijn we geïntereesed in een winding met  $N$  lussen.

De flux =  $N \times$  de flux door 1 lus

Totale oppervlak ingesloten door geleider wordt 4 maal gesneden door veldlijnen:

Flux  $\times 4$



### Geïnduceerde EMF's en wet van Faraday

Experimenten van Faraday, Henry en anderen toonden dat als de magnetische flux door een oppervlak bepaald door een circuit op een manier veranderd wordt, dan wordt een emf van gelijke grootte tov de mate waarmee de flux verandert geïnduceerd in het circuit.

Geïnduceerde emf worden meestal gedetecteerd door het meten van de corresponderende stroom in een **gesloten** circuit.

Maar het blijkt dat deze emf steeds aanwezig zijn : ook als het circuit **niet** gesloten is en dus geen stroom ontstaat.

Tot nu toe beschouwden we emfs die gelocaliseerd waren in een bepaald deel van het circuit, zoals tussen de polen van een batterij. Maar geïnduceerde emfs kunnen gedistribueerd zitten doorheen heel het circuit.

magnetische flux doorheen een oppervlak ingesloten door een circuit kan veranderd worden op verschillende manieren :

- de stroom die het B-veld veroorzaakt kan veranderd worden.
- permanente magneten kunnen naar oppervlak toe of van oppervlak weg bewogen worden.
- het circuit kan geroteerd worden in een statisch B-veld
- het circuit kan verplaatst worden in een niet-uniform statisch B-veld.
- de orientatie vh circuit kan veranderd worden
- de oppervlakte die wordt ingesloten door het circuit kan kleiner/groter gemaakt worden in een uniform statisch B-veld.

In alle gevallen wordt een emf geïnduceerd in het circuit die even groot is dan de mate waarin de magnetische flux verandert door ( een oppervlak bepaald door) het circuit. Deze emf is :

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

Dit resultaat staat bekend als de wet van Faraday.

Het minteken in de wet heeft te maken met richting van de geïnduceerde emf, dit bespreken we later.

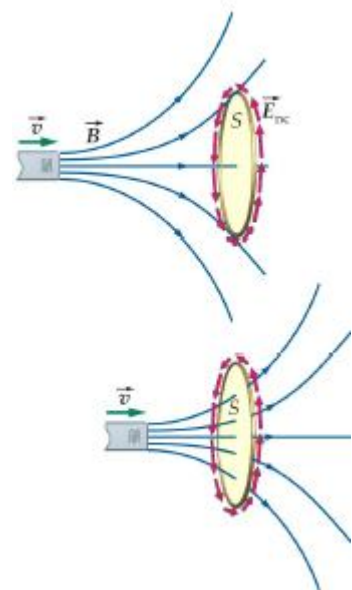
De figuur toont een enkele stationaire cirkelvormige draad in een magnetisch veld.

De flux door de cirkel verandert omdat de magnetische veldsterkte verhoogd wordt, zodat een emf geïnduceerd wordt in de cirkel.

Aangezien emf de arbeid is die gedaan wordt per eenheid van lading, weten we dat er krachten moeten inwerken op de bewegende ladingen en arbeid op hen verrichten.

Magnetische krachten kunnen geen arbeid verrichten, dus, we kunnen de emf niet toeschrijven aan de arbeid verricht door magnetische krachten. Het zijn elektrische krachten, geassocieerd met een niet-conservatief elektrisch veld  $\vec{E}_{nc}$  die arbeid verrichten op de bewegende ladingen.

De lijnintegraal van dit elektrische veld over een gesloten circuit = de arbeid verricht per eenheid van lading, welke de geïnduceerde emf in het circuit is.



De elektrische velden die we bestudeerd hebben in de vorige hoofdstukken kwamen voort uit een statische elektrische lading. Zulke elektrische velden zijn conservatief, wat betekent dat hun kringintegraal over een gesloten curve C nul is.

Daarentegen, het elektrische veld dat geassocieerd is met een veranderende magnetische flux is niet conservatief. Zijn kringintegraal over C is een emf, gelijk aan de negatieve mate van verandering van de magnetische flux door een oppervlak S vastgelegd door C:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA$$

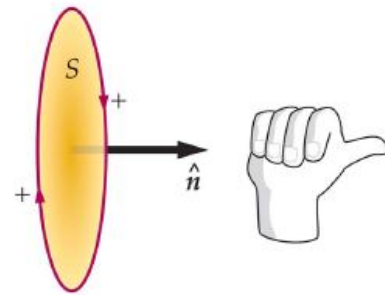
geleverde arbeid/lading door E-veld bij doorlopen van gesloten lus = emf.

De wet van Faraday legt een verband tussen magnetische en elektrisch velden.

- Teken conventie : de positieve tangentiële richting langs het integratiepad C is verbonden met de normaal op het oppervlak S dat ingesloten wordt door C zoals weergegeven op de figuur.

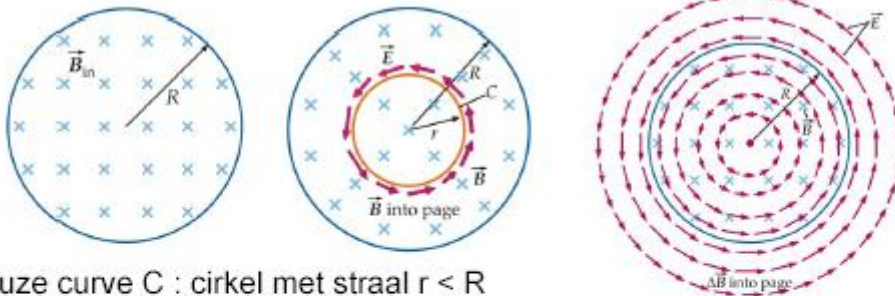
We kunnen hiervoor de rechterhandregel gebruiken : duim wijst in richting van normaal, dan geeft gekromde hand de pos.

tangentiële richting. Als  $d\Phi_m/dt > 0$  dan (Faraday) zijn  $E_{nc}$  en  $\varepsilon$  in de negatieve tangentiële richting.



Voorbeeld:

- veranderend uniform magneetveld binnen cirkelvormig gebied. Zoek geïnduceerd elektrisch veld.



keuze curve C : cirkel met straal  $r < R$

keuze van positieve normaal op oppervlak : in de richting van B

$\Rightarrow$  positieve tangentiële richting is in wijzerszin.

$$r < R: \quad E_t = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$r > R: \quad E_t = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

wanneer B toeneemt :  $E_t$  negatief i.e. in tegenwijzerszin

merk op : (1) E wordt hier geproduceerd door een veranderend B-veld eerder dan door ladingen, (2) E bestaat ook in een gebied waar  $B = 0$ .

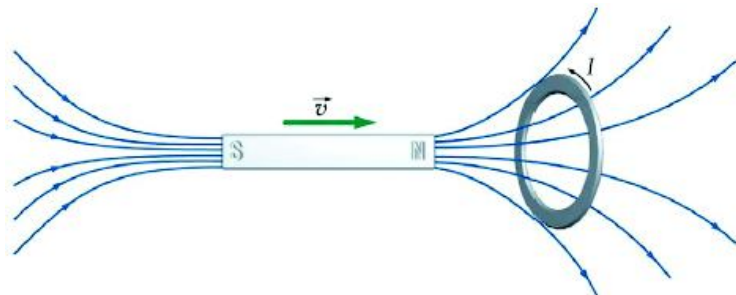
### Wet van Lenz

Het minteken in de wet van Faraday heeft te maken met de richting van de geïnduceerde emf. Deze kan bepaald worden adhv de tekenconventie beschreven in de vorige paragraaf, of adhv een algemeen fysisch principe gekend als de wet van Lenz:

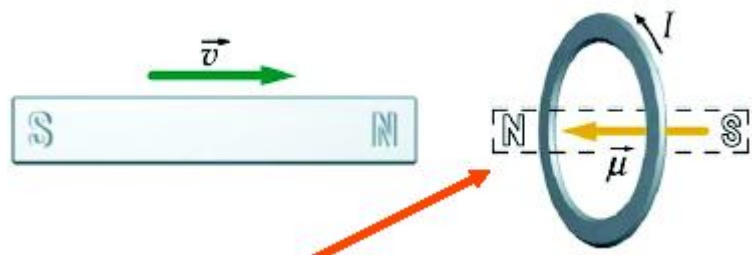
**De geïnduceerde emf is zodanig gericht dat hij de oorzaak van zijn ontstaan tracht tegen te werken.**

Merk op dat de wet van Lenz niet specificeert welke verandering de geïnduceerde emf en stroom veroorzaakt. De verwoording van de wet van Lenz is opzettelijk vaag gehouden zodat verschillende condities onder de wet vallen. We zullen nu enkele van deze condities illustreren.

De figuur toont een staafmagneet die naar een lus met weerstand  $R$  toe beweegt. Het is de beweging van de staafmagneet naar rechts dat de emf en stroom induceert in de lus. De wet van Lenz vertelt ons dat deze geïnduceerde emf en stroom in de richting moeten zijn zodat ze de beweging van de staafmagneet tegenwerken. Dat is, de stroom die geïnduceerd wordt in de lus produceert een eigen magnetisch veld en dit magneet veld moet een kracht uitoefenen naar links op de naderende staafmagneet.



Deze figuur toont het geïnduceerde magnetisch moment van de stroomlus wanneer de magneet ernaartoe beweegt. De lus gedraagt zich dan als een kleinen magneet met zijn



noordelijke pool naar links en zijn zuidelijke pool naar rechts. Aangezien gelijke polen elkaar afstoten, werkt het geïnduceerde magnetisch moment van de lus de staafmagneet tegen. Dat is, het werkt zijn beweging naar de lus toe tegen. Dit betekent dat de richting van de geïnduceerde stroom moet zijn zoals aangegeven op de figuur.

Stel dat de geïnduceerde stroom in de lus in de andere richting zou geweest zijn. Dan zou er een magnetische kracht zijn op de naderende staafmagneet naar rechts, waardoor de snelheid van de magneet verhoogt wordt. Deze verhoging van de snelheid zou een toename in de geïnduceerde stroom veroorzaken, welke op zijn beurt een toename van de kracht op de magneet zou veroorzaken, en zo verder. Dit is te mooi om waar te zijn. Elke keer we een staafmagneet naar een geleidende lus toe zouden laten bewegen, zou deze naar de lus toe bewegen met een alsmaar groter wordende snelheid en zonder enige inspanning van onszelf. Als dit zou gebeuren, dan zou het een overtreding zijn van de wet van behoud van energie. Dus in de realiteit wordt energie behouden en is de wet van Lenz consistent met deze realiteit.

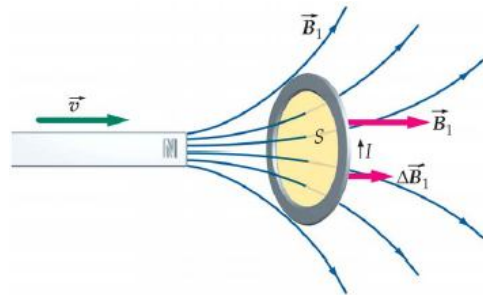
Men gebruikt vaak een alternatieve formulering van de wet van Lenz in termen van de magnetische flux:

**Wanneer de magnetische flux doorheen een oppervlak verandert, dan produceert het magnetisch veld dat geïnduceerd wordt door de geïnduceerde stroom zelf ook een flux doorheen hetzelfde oppervlak maar in tegengestelde richting.**

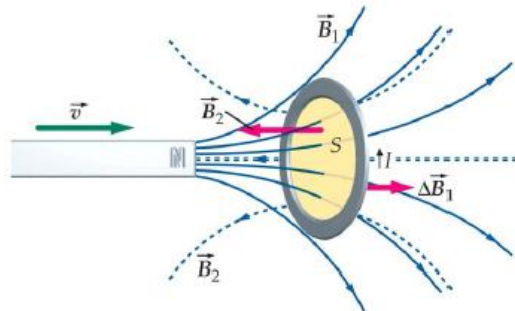
Een voorbeeld van hoe deze alternatieve formulering gebruikt wordt:

We moeten de alternatieve formulering gebruiken om de richting van het magnetische veld tgv de geïnduceerde stroom in de lus te bepalen. Daarna gebruiken we de rechter-hand-regel om de richting van de geïnduceerde stroom te controleren.

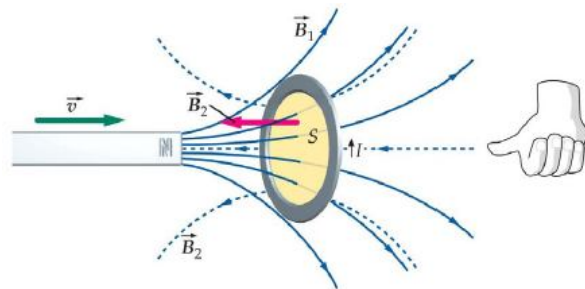
1. we tekenen een schema van de lus die een plat oppervlak  $S$  afbakt. Op dit oppervlak  $S$  tekenen we de vector  $\Delta \vec{B}_1$ , welke de verandering in het magnetische veld  $B_1$  is van de naderende staafmagneet



2. we tekenen de vector  $B_2$ , welke het magnetische veld van de geïnduceerde stroom in de lus is. We gebruiken de alternatieve formulering om de richting van  $B_2$  te bepalen.

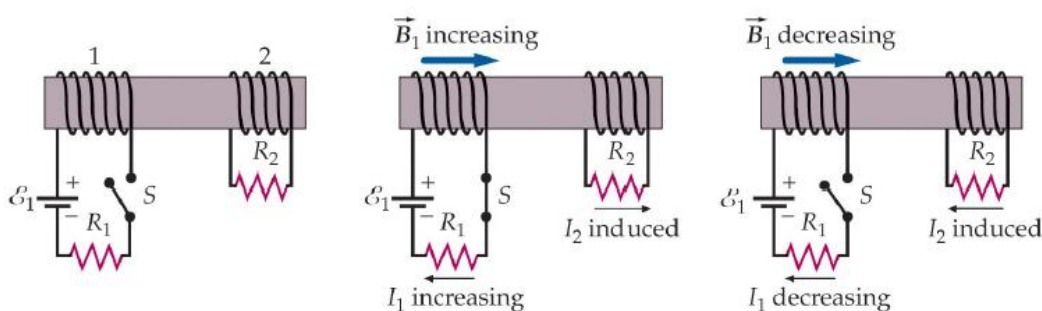


3. we gebruiken de rechter-hand-regel en de richting van  $B_2$  om de richting van de geïnduceerde stroom in de lus te controleren.



Wanneer we stellen dat de staafmagneet in rust is, en de lus van de magneet weg beweegt, dan trekt de staaf de lus aan, en werkt hiermee de beweging van de lus tegen, zoals geëist in de wet van Lenz.

Voorbeeld:





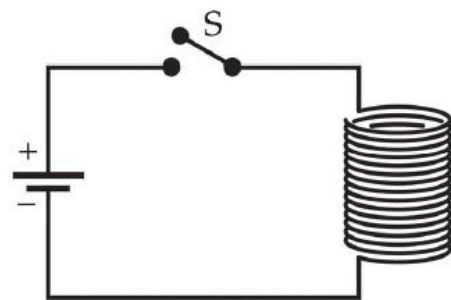
Wanneer de stroom in circuit 1 verandert, is er een verandering in magnetische flux in circuit 2. stel dat de schakelaar S in circuit 1 oorspronkelijk open is zodat er geen stroom is in het circuit. Wanneer we de schakelaar toe doen, dan bereikt de stroom in circuit 1 zijn continue waarde  $\mathcal{E}_1/R_1$  niet onmiddellijk maar duurt het een tijdje voordat de stroom van  $\text{begin} = 0$  deze waarde heeft. Gedurende de tijd dat de stroom toeneemt, verandert de flux door circuit 2 en wordt er een stroom geïnduceerd in circuit 2 in de aangeduide richting. Wanneer de stroom in circuit 1 zijn continue waarde bereikt, verandert de flux in circuit 2 niet meer zodat er niet langer een stroom geïnduceerd wordt in circuit 2.

Een geïnduceerde stroom in circuit 2 in de tegengestelde richting verschijnt ogenblikkelijk zodra de schakelaar in circuit 1 geopend wordt en de stroom afneemt naar 0. het is belangrijk om te begrijpen dat er alleen een geïnduceerde emf is wanneer de flux verandert! De emf hangt niet af van de grootte van de flux zelf, maar alleen van zijn mate van verandering. Als er een grote continue flux is doorheen het circuit, is er geen geïnduceerde emf.

En ander voorbeeld:

Beschouw het enkele geïsoleerde circuit zoals in de figuur.

Als er een stroom in het circuit is, is er een magnetische flux door de winding  $\text{tgv}$  zijn eigen stroom. Als de stroom verandert, verandert ook de flux in de winding en is er een geïnduceerde emf in het circuit zolang de flux verandert. Deze **zelfinducerende** emf werkt de verandering in de stroom tegen.



= ZELFINDUCTIE! Men noemt deze daarom “back emf” of “tegen emf”. Door deze zelfinducerende emf, kan de stroom in het circuit niet onmiddellijk van nul naar een eindige waarde springen of omgekeerd van een eindige waarde naar nul.

De opstelling zoals in de figuur geeft een grote flux door het circuit voor zelfs een kleine stroom. Toen Joseph Henry het circuit wou breken merkte hij vonken op die uit de schakelaar kwamen. Zulke vonken zijn  $\text{tgv}$  de grote geïnduceerde emf die optreedt wanneer de stroom snel verandert, zoals bij het openen van de schakelaar. In dit geval is de geïnduceerde emf zo gericht dat hij de oorspronkelijke stroom wilt behouden. De grote geïnduceerde emf produceert een groot potentiaal verschil over de schakelaar wanneer deze geopend wordt. Het elektrische veld tussen de contacten van de schakelaar is groot genoeg op dielektrische doorslag te produceren in de omringende lucht. Wanneer dielektrische doorslag zich voordoet, geleidt de lucht de elektrische stroom in de vorm van een vonk.

### Bewegings emf = Motional emf

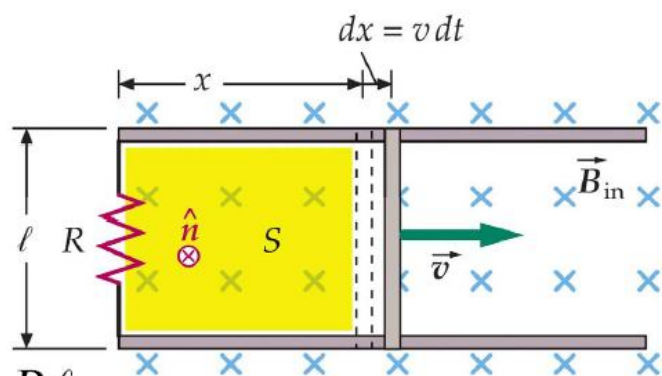
De emf geïnduceerd in een geleider die beweegt in een magnetisch veld = bewegings emf.

Meer algemeen:

Bewegings emf is een emf geïnduceerd door de beweging van een geleider in een magnetisch veld.

Voorbeeld:

De figuur toont een dunne geleidende draad die naar rechts schuift over geleidende rails die verbonden zijn door een weerstand. Een uniform magnetisch veld  $B$  is in het blad gericht.



Beschouw de magn flux door het platte oppervlak S afgebakend door het circuit. Stel  $\hat{n}$  de normaal naar het oppervlak is in het blad. Als de draad naar rechts beweegt, vergroot S, en ook de magn flux door S vergroot.

Dus, een emf wordt geïnduceerd in het circuit.

Stel  $\ell$  is de afstand tussen de rails en  $x$  is de afstand van het linker uiteinde van de rails naar de draad. Het oppervlak S is dan  $\ell x$ , en de magnetische flux door S is:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \hat{n} A = B \ell x$$

De emf geïnduceerd in dit circuit hangt af van de mate van verandering van de flux:

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B \ell \frac{dx}{dt} = -B \ell v$$

Het minteken vertelt ons dat de emf in de negatieve tangentiële richting is.

We kunnen deze richting van de emf controleren met de rechter-hand-regel en de wet van Lenz.

De figuur toont een positieve ladingsdrager in een geleidende draad die met constante snelheid door een uniform magn veld (in het blad gericht) beweegt.

Omdat de ladingsdrager horizontaal mee beweegt met de draad, is er een opwaartse magnetische kracht op deze ladingsdrager met grootte  $qvB$ . Als antwoord op deze kracht, bewegen de ladingsdrager opwaarts in de draad, hierbij een netto positieve lading aan de top van de draad producerend en een netto negatieve lading aan de onderkant van de draad.

De ladingsdrager blijven opwaarts bewegen totdat het elektrische veld  $E_{\parallel}$  geproduceerd door de gescheiden ladingen een neerwaartse kracht van grootte  $qE_{\parallel}$  uitoefend op de gescheiden ladingen, waarbij de opwaartse magnetische kracht  $qvB$  gebalanceerd wordt. In evenwichtstoestand is de grootte van dit elektrisch veld in de draad:

$$qE_{\parallel} = qvB \Rightarrow E_{\parallel} = vB$$

De richting van dit E veld is parallel met de draad, neerwaarts gericht. Het geassocieerde potentiaal verschil over de lengte  $\ell$  vna de draad is:

$$\Delta V = E_{\parallel} \ell = vB \ell$$

Met de hoogste potentiaal bovenaan. Dat is, wanneer er geen stroom is door de draad, is het potentiaalverschil over de draad gelijk aan  $vB\ell$  ( de bewegings emf). Wanneer er een stroom  $I$  door de draad vloeit, is het potentiaal verschil:

$$\Delta V = vB \ell - Ir$$

Waarbij  $r$  de weerstand van de draad is.

De algemene uitdrukking voor de bewegings-emf is

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Waarbij  $v$  de snelheid van de draad is op het element  $d\ell$ .

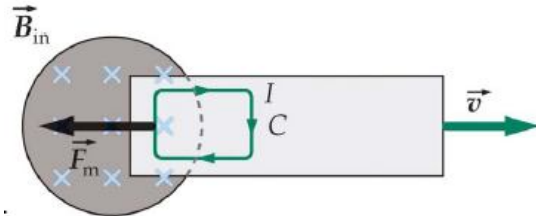
Deze emf wordt gegenereerd wanneer geleider beweegt in een magnetisch veld.

### Eddy currents – wervelstromen

wervelstromen (stromen in gesloten lussen in het materiaal) die ontstaan in stuk (niet enkel dunne draden) metaal wanneer dit beweegt in een magnetenveld of wanneer magnetenveld verandert als functie van de tijd i.e. wanneer er een magnetische flux aanwezig is. Deze wervelstromen veroorzaken energieverliezen bv. In transformatoren tgv “Joule heating”.

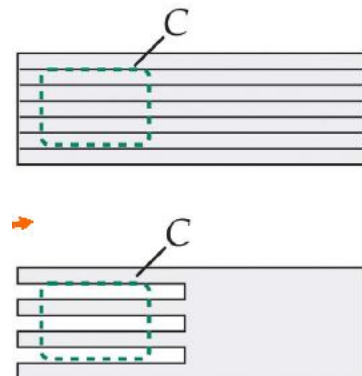
Eddy stromen zijn niet altijd ongewenst. Vb, eddy stromen worden vaak gebruikt om ongewenste oscillaties te dempen.

We kunnen het bestaan van eddy stromen aantonen door een koper of aluminium blad te trekken tussen de polen van een sterke permanente magneet.



Een deel van het opp omsloten door curve C in deze figuur is in het magnetische veld en een deel ervan is buiten het magnetische veld. Als het blad naar rechts getrokken wordt, neemt de flux door deze curve af (aangenomen dat in het papier de de positieve normaal richting is). Een emf met de klok mee is geïnduceerd rond deze curve. Deze emf drijft een stroom die opwaarts gericht is in het gebied tussen de polen en het magnetische veld oefent een kracht uit op deze stroom naar links, waarbij het de beweging van het blad tegen werkt.

Het energieverlies tgv eddy stromen kan gereduceerd worden door de weerstanden van de mogelijk paden die de eddy stromen kunnen volgen te verhogen. Dit wordt getoond in de figuur. Hier is de geleidende onderverdeeld in smalle stroken die aan elkaar gelijmd zijn. Omdat de isolerende lijm de stroken van elkaar scheidt, zijn de eddy stromen beperkt tot de stroken. De grote eddy-stromen lussen zijn dus verbroken en het energieverlies is gereduceerd. Een andere mogelijkheid is om sneden in het blad aan te brengen, hierdoor worden de eddy stromen minder en wordt de magnetische kracht enorm gereduceerd.



### Inductie

#### Zelfinductie

De magnetische flux door een circuit is gerelateerd met de stroom in dat circuit en de stromen in andere, nabije circuits. Beschouw een winding die een stroom  $I$  draagt. De stroom in de winding produceert een magnetisch veld  $B$  dat van punt tot punt afhangt, maar de waarde van  $B$  is in elk punt proportioneel tov  $I$ . de magnetische flux door de winding is dus ook proportioneel tov  $I$ :

$$\phi_m = LI$$

Waar  $L$  de proportionaliteitsconstante is die men de zelf-inductie van de winding noemt. De zelf-inductie hangt af van de geometrische vorm van de winding.

De SI eenheid van zelf-inductie is de henry (H)

$$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ Tm}^2/\text{A}$$

In principe kan de zelf-inductie van een winding of circuit berekend worden door een stroom  $I$  te aanschouwen,  $B$  in elk punt op een oppervlak bepaald door de winding te berekenen, de flux te berekenen en gebruik te maken van bovenstaande vergelijking.



In de praktijk is deze berekening vaak heel moeilijk. Maar, de zelf-inductie van een lange, dicht opgewonden solenoïde kan rechtstreeks berekend worden.

De zelf-inductie van een solenoïde van lengte  $\ell$  en met  $N$  windingen die een stroom  $I$  draagt is:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell \quad n \equiv \frac{N}{\ell}$$

Net als bij de capaciteit van een condensator hangt de zelf-inductie enkel af van geometrische factoren.

Wanneer de stroom in het circuit verandert, verandert ook de magnetische flux tgv de stroom, zodat een emf geïnduceerd wordt. Omdat de zelf-inductie van een circuit constant is, is de verandering in flux gerelateerd tot de verandering in stroom. En de emf in dit circuit is dan:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Dus, de zelfgeïnduceerde emf is proportioneel tov de mate van verandering van de stroom.

Een winding of een solenoïde met veel windingen heeft een grote zelf-inductie en noemt men een inductor of spoel.

Normaal gesproken kunnen we de zelf-inductie van de rest van het circuit negeren vergeleken met de zelf-inductie van een spoel.

Het potentiaal verschil over een spoel wordt gegeven door:

$$\Delta V = \mathcal{E} - I r = -L \frac{dI}{dt} - I r$$

Waarbij  $r$  de interne weerstand van de spoel is. Voor een ideale spoel is  $r = 0$ .

### Wederzijdse inductie

Wanneer twee of meer circuits zich dicht bij elkaar bevinden, zoals op de figuur, dan is de magnetische flux door 1 circuit niet alleen afhankelijk van de stroom in dat circuit maar ook van de stroom in het nabije circuit.

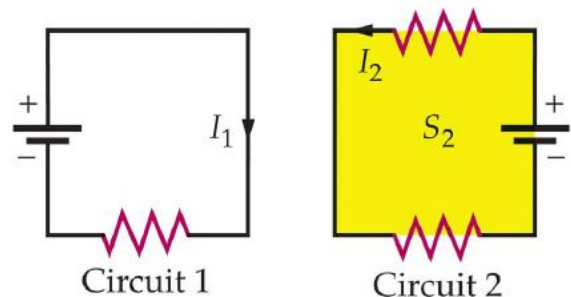
Stel  $I_1$  is de stroom in circuit 1 en  $I_2$  is de stroom in circuit 2. Het magnetische veld  $B$  op oppervlak  $S_2$  is de superpositie van  $B_1$  tgv  $I_1$  en  $B_2$  tgv  $I_2$ , waarbij  $B_1$  proportioneel is tov  $I_1$  (en  $B_2$  is proportioneel tov  $I_2$ ). we kunnen dus de flux van  $B_1$  door het circuit 2 schrijven als:

$$\phi_{m2,1} = M_{21} I_1$$

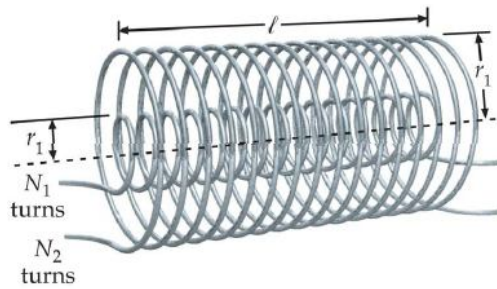
Of de flux van  $B_2$  door circuit 1:

$$\phi_{m1,2} = M_{12} I_2$$

In beide vergelijkingen is  $M$  de wederzijdse inductie van de twee circuits. De wederzijdse inductie hangt af van de geometrische schikking van de twee circuits.



We kunnen de wederzijdse inductie berekenen voor twee dicht gewonden concentrische solenoïdes zoals in de figuur. Stel  $\ell$  is de lengte van beide solenoïdes en de binnenste solenoïde heeft  $N_1$  windingen en straal  $r_1$  en de buitenste solenoïde heeft  $N_2$  windingen en straal  $r_2$ .



Dan is de wederzijdse inductie:

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2,1}}{I_1} = \mu_0 n_2 n_1 \ell \pi r_1^2$$

### Magnetische energie

Een spoel slaat magnetische energie op zoals een condensator elektrische energie opslaat. Deze magnetische energie wordt gegeven door: (geen bewijs)

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

cf. E-veld :

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

De energie per volume eenheid is magnetische energiedichtheid  $u_m$ :

$$u_m = B^2 / 2\mu_0$$

Voor een lange solenoïde is de magnetische energie:

$$u_m = \frac{U_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

energie-dichtheid      volume

deze uitdrukking is algemeen geldig :

ook voor plaats- en tijdsafhankelijke Bvelden. Als er een magnetisch veld is (ook in vacuum) dan is er ook magnetische energie.