Hoofdstuk 10: Nuttige uitdrukkingen

- Hoeksnelheid en -versnelling

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

- Verband met lineaire snelheid en -versnelling

$$v = r\omega, \qquad a_t = r\alpha, \qquad a_c = \omega^2 r.$$

- Rotationele kinetische energie is

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Totale kinetische energie

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Hoofdstuk 11: Nuttige uitdrukkingen

- Het impulsmoment van een puntdeeltje op positie $\vec{r}$ ten opzichte een punt $\vec{r}'$ is

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{p}.$$

- Het krachtmoment $\vec{\tau}$ ten gevolge van een kracht $\vec{F}$ met aangrijpingspunt $\vec{r}$ ten opzichte van een punt $\vec{r}'$ is

$$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{F}.$$

  Je mag het totale krachtmoment berekenen ten opzichte van een vast punt in een inertieel referentiestelsel of ten opzichte van het massamiddelpunt van een voorwerp of systeem.

- Het netto krachtmoment rondom een punt $\vec{r}'$ is de som van alle krachtmomenten om dat punt en is gerelateerd aan $\vec{L}$ door

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Translatie en rotatie: verband

Translatie	Rotatie
$\vec{x}$	θ
$\vec{v}$	ω
$\vec{a}$	α
m	I
$\vec{p}$	$\vec{L}$
$\vec{F}$	$\vec{\tau}$
$\frac{1}{2}m\vec{v}^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
$\int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$	$\int_a^b \tau \ \mathrm{d}\theta$

Elke relatie tussen grootheden in de ene kolom heeft een analogon door de grootheden te vervangen door de overeenkomstige grootheden in de andere kolom. (Voor de volledigheid dient vermeld te worden dat deze correspondenties niet gelden in meer dan drie dimensies.)

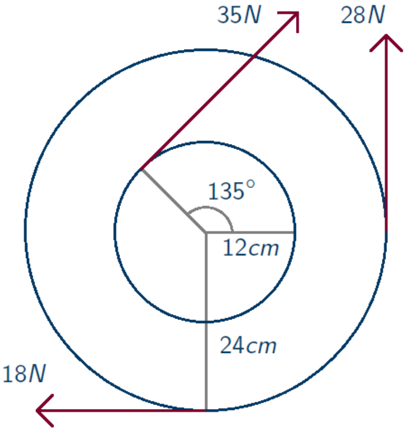
Oefening 1 (10.19)

Een ventilator wordt uitgezet wanneer deze 850 omwentelingen per minuut aflegt en doet nog eens 1350 omwentelingen alvorens tot stilstand te komen.

1. Wat was de hoekversnelling van de ventilator in de veronderstelling dat deze constant was?
2. Hoe lang heeft het geduurd alvorens de ventilator tot stilstand kwam?

Oefening 2 (10.25)

Op een wiel werken drie krachten zoals weergegeven in de figuur.
Bereken het netto krachtmoment rond de rotatie-as.



Oefening 3 (10.51)

En machine van Atwood bestaat uit twee massa's, m_A en m_B, die zijn verbonden door een massaloos inelastisch touw dat over een katrol hangt. Als de katrol een straal R heeft en een traagheidsmoment I rond de rotatie-as, bepaal dan de versnelling van de massa's m_A en m_B.
Vergelijk dit met de situatie waar de inertie van de katrol werd genegeerd.

Hint: de spankracht in het touw is niet langer gelijk in heel het touw wanneer $I \neq 0$.

Oefening 4 (10.69)

Een $2,3m$ lange staaf wordt verticaal geplaatst. Deze begint te vallen maar het onderste uiteinde blijft contact maken met hetzelfde punt op de grond. Wat zal de snelheid van het andere uiteinde zijn net voordat dit de grond raakt?

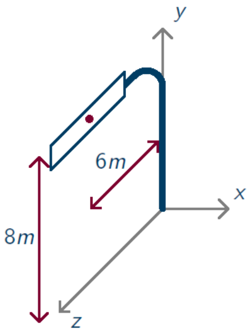
Hint: gebruik behoud van energie.

Oefening 5 (11.27)

Een ingenieur schat dat onder de slechtst mogelijke weersomstandigheden de totale kracht op het verkeersbord (zie tekening) wordt gegeven door

$$\vec{F} = (\pm 2,4\hat{\imath} - 4,1\hat{\jmath})kN,$$

met als aangrijpingspunt het massamiddelpunt (rode dot). Welk krachtmoment veroorzaakt deze kracht om de voet van het bord in de oorsprong?



Oefening 6 (11.48)

Een homogene stok is $1,0m$ lang en heeft een totale massa $m_s = 270g$. Door het massamiddelpunt van de stok is een rotatie-as bevestigd. Een kogel met massa $m_k = 3,0g$ wordt door de stok geschoten door een punt halverwege tussen de rotatie-as en het uiteinde. De kogel nadert met een snelheid van $250\frac{m}{s}$ en verlaat de stok met een snelheid van $140\frac{m}{s}$. Met welke hoeksnelheid draait de stok rond na de botsing?

Oefening 7 (11.76)

Een projectiel met massa m wordt gelanceerd vanaf de grond en volgt een traject gegeven door

$$\vec{r} = (v_{x,0}t)\hat{\imath} + \left(v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\jmath}$$

met $v_{x,0}$ en $v_{y,0}$ de componenten van de beginsnelheid in de x- en y-richtingen en g is de valversnelling. Neem als oorsprong de lanceerpositie. Bepaal het krachtmoment om de oorsprong uitgeoefend door de zwaartekracht op het projectiel, gebruikmakend van

1. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
2. $\vec{\tau} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$.

Oplossingen

Oplossing 1

- Dit is een probleem met een constante hoekversnelling, we mogen dus gebruikmaken van

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha\Delta\theta,$$

wat na omschrijven en $\omega_2 = 0$ stellen levert

$$\alpha = \frac{-\omega_1^2}{2\Delta\theta} = -\frac{-(2\pi\frac{850}{60s})^2}{4\pi \cdot 1350} = -0,47\frac{\text{rad}}{s^2}.$$

- Dit volgt uit

$$\omega(t_2) - \omega(t_1) = \alpha(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{-\omega(t_1)}{\alpha} = \frac{-\frac{850}{60s}}{-2,14s^{-2}} = 191s.$$

Oplossing 2.1

- Kies het blad het (x, y)-vlak. De drie krachten die inwerken op het wiel hebben alleen x- en y-componenten. Hetzelfde geldt voor de vectoren die het rotatiemiddelpunt verbinden met de aangrijpingspunten van de krachten.
- In principe moet je een rechtshandig assenstelsel kiezen om je berekeningen in te doen. Het volstaat hier echter een keuze te maken over welke rotatiezin (in of tegen wijzerzin) een positieve rotatie is, met andere woorden voor welke rotatiezin de z-component van $\vec{L}$ positief is. Je kan dan altijd een bijhorende x- en y-as kiezen zodat dit voldaan is en het assenstelsel rechtshandig is. Kies hier dat rotatie in tegenwijzerzin positief is.
- Het krachtmoment ten gevolge van een enkele kracht wordt gegeven door

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = rF\sin(\theta).$$

  In deze oefening is θ in deze uitdrukking steeds gelijk aan 90° omdat $\vec{r}$ en $\vec{F}$ loodrecht op elkaar staan.

Oplossing 2.2

- De drie krachtmomenten hebben als grootte — en omdat ze allen langs de z-as gericht zijn is deze grootte gelijk aan de absolute waarde van τ_z voor elk van de krachtmomenten —

$$\tau_1 = 35N \cdot 0,12m = 4,2N \cdot m;$$
$$\tau_2 = 28N \cdot 0,24m = 6,72N \cdot m;$$
$$\tau_3 = 18N \cdot 0,24m = 4,32N \cdot m.$$

- Met de keuze eerder gemaakt zal het tweede moment een positieve bijdrage hebben en de andere twee een negatieve bijdrage, zodat

$$\tau_{\text{net},z} = (-4,2 + 6,72 - 4,32)N \cdot m = -1,8N \cdot m.$$

- Het krachtmoment is een vector en het antwoord op deze vraag moet dus een vector zijn. Met de keuze die gemaakt werd over rotatiezin komt een z-as overeen die uit het blad wijst, zodat

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = -1,8N \cdot m\ \hat{k}.$$

Oplossing 3.1

- Kies een assenstelsel met de y-as positief naar boven.
- De tweede wet van Newton (geprojecteerd op de y-as) luidt voor de twee massa's

  $$m_A a_A = F_{s,A} - m_A g \quad \text{en} \quad m_B a_B = F_{s,B} - m_B g.$$

  Omdat beide massa's verboden zijn met een touw zijn hun versnellingen gelijk in grootte maar tegengesteld gericht, dus $a_A = -a_B \equiv a$.
- Voor de katrol geldt de analoge wet

  $$I\alpha = RF_{s,A} - RF_{s,B}.$$

  De keuze van de tekens in dit rechterlid hangt af van je keuze van z-as en welke massa links of rechts hangt. Deze keuze komt overeen met een z-as uit het blad en massa A de linkse massa — of andersom. De andere twee keuzes zullen het teken van het rechterlid omkeren. Het uiteindelijke resultaat zal echter niet veranderen als je alle tekens consistent plaatst.

Oplossing 3.2

- Omdat het touw verondersteld worden niet over de katrol te glijden, dient
$$a = -R\alpha.$$
Dit schijnbaar extra minteken is een gevolg van de voorheen gemaakte keuzes: als $a > 0$, betekent dit dat m_A opwaarts beweegt, wat impliceert dat de katrol sneller gaat draaien in de zin die we eerder hebben gekozen als overeenkomend met een negatieve z-component van $\vec{L}$.
- Uit de vier vergelijkingen die we nu hebben kan a worden berekend. De drie overige vergelijkingen in de derde levert
$$-I\frac{a}{R} = R(m_A a + m_A g) - R(-m_B a + m_B g).$$
Omschrijven levert
$$a = \frac{(m_B - m_A)gR^2}{I + (m_A + m_B)R^2}.$$
Dit resultaat is wat je verwacht: als $m_B > m_A$ zal $a > 0$, dus m_A zal opwaarts bewegen. Je berekent een vectorcomponent en je kan dus een minteken verschil uitkomen afhankelijk van je assen maar "$m_B > m_A \Rightarrow m_A$ beweegt opwaarts" moet blijven gelden.

Oplossing 4.1

- Behoud van energie zegt dat de potentiële energie in de staaf zal worden omgezet naar kinetische energie tijdens het vallen.
- Kies een x-as langs de paal met de oorsprong in het onderste punt van de paal. Dan is de potentiële energie in de paal tussen een positie x en $x + \mathrm{d}x$ gegeven door

$$\mathrm{d}U = gx\mathrm{d}m = gx\frac{m}{L}\mathrm{d}x,$$

zodat

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_0^L \frac{m}{L} gx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} mgL.$$

Hierin werd gebruik gemaakt van de aanname dat de massa uniform verdeeld is in de staaf.

Oplossing 4.2

- Voor de kinetische energie kan een gelijkaardige redenering worden gemaakt. Wanneer de paal horizontaal is, zal een stukje paal tussen x en $x + \mathrm{d}x$ een kinetische energie hebben van
$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)(x\omega)^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2 x^2 \mathrm{d}x.$$
De totale kinetische energie van de paal is daarom
$$K = \int \mathrm{d}K = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2 \int_0^L x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2.$$
In het stuk tussen haken herken je het traagheidsmoment van een homogene staaf die rond een eindpunt draait. Je mag deze grootheid ook opzoeken.
- Behoud van energie zegt
$$\frac{1}{2}mgL = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$
- De snelheid van het eindpunt is daarom gegeven door
$$v(L) = \omega L = \sqrt{3gL} = 8,22\,\frac{m}{s}.$$

Oplossing 5

- Het krachtmoment om de oorsprong, veroorzaakt door de gegeven kracht wordt gegeven door

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

  met

$$\vec{r} = (8m)\hat{\jmath} + (6m)\hat{k} \quad \text{en} \quad \vec{F} = (\pm 2,4kN)\hat{\imath} + (-4kN)\hat{\jmath}.$$

- Veel studenten zijn geneigd τ en $\hat{\tau}$ afzonderlijk te bereken. In dit geval is het echter veel makkelijker gewoon het vectorproduct uit te rekenen.
- Toepassen van de definitie van het vectorproduct levert

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{F} &= [(8m)\hat{\jmath} + (6m)\hat{k}] \times [(\pm 2,4kN)\hat{\imath} + (-4,1kN)\hat{\jmath}] \\ &= (24,6kN \cdot m)\hat{\imath} + (\pm 14,4kN \cdot m)\hat{\jmath} + (\mp 19,2kN \cdot m)\hat{k}\end{aligned}$$

Oplossing 6.1

- In deze oefening kan je gebruik maken van behoud van impulsmoment.
- Kies de x-as zodat de initiële snelheid van de kogel parallel met de positieve x-richting is en kies de y-as positief naar boven. Het zal makkelijk blijken de oorsprong van het coördinaatstselsel op de rotatie-as van de staaf te kiezen.
- Voor de botsing is het impulsmoment van het systeem

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{voor}} &= \vec{r} \times \vec{p}_{\text{k}} \\ &= m_{\text{k}}[x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}] \times [v_x\hat{\imath}] \\ &= m_{\text{k}} y v_x (\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) \\ &= -m_{\text{k}} y v_x \hat{k}.\end{aligned}$$

Het minteken is ook hier afkomstig van de keuze van het coördinaatstelsel: de gekozen x- en y-assen impliceren een z-as die uit het blad naar je toe komt en rotaties met de klok mee zullen een dus een negatieve L_z krijgen. Merk op dat de kogel een impulsmoment heeft ten opzichte van de oorsprong, ook al gaat deze in een rechte baan.

Oplossing 6.2

- Na de impact is het totale impulsmoment nog steeds dezelfde maar dit is nu van de vorm

  $$\vec{L}_{\text{na}} = -m_{\text{k}} y v'_x \hat{k} + I\vec{\omega}.$$

  De gezochte hoeksnelheid is de grootte van de vector $\vec{\omega}$.

- Het traagheidsmoment van een staaf met homogene massadichtheid en totale lengte L kan je opzoeken en deze is gelijk aan

  $$I = \frac{1}{12} m_{\text{s}} L^2.$$

- De relaties hierboven combinerend, vind je

  $$\omega = \left| \frac{12 y m_{\text{k}} (v'_x - v_x)}{m_{\text{s}} L^2} \right| = \left| \frac{12 \cdot 0,25m \cdot 0,003kg \cdot (140\frac{m}{s} - 250\frac{m}{s})}{0,27kg \cdot (1m)^2} \right| = 3,67\frac{\text{rad}}{s}.$$

  Het minteken dat wordt weggewerkt door de absolute waardestrepen wijst op een rotatie-zin die overeenkomt met een negatief teken. De grootheid tussen de strepen is dan ook $\omega_z = L_z/I$ en niet L/I.

Oplossing 7.1

- Methode 1. De kracht werkend op het deeltje is gegeven door

$$\vec{F} = \vec{F}_g = -mg\hat{\jmath}.$$

- Het moment van deze kracht is

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \left((v_{x,0}t)\hat{\imath} + \left(v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{\jmath} \right) \times (-mg\hat{\jmath}) \\ &= -mgv_{x,0}t \; \hat{k}.\end{aligned}$$

Oplossing 7.2

- Methode 2. Het impulsmoment om de oorsprong wordt gegeven door

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
&= \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \left((v_{x,0}t)\hat{\imath} + \left(v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{\jmath} \right) \times (mv_{x,0}\ \hat{\imath} + (mv_{y,0} - mgt)\hat{\jmath}) \\
&= m \left(v_{x,0}v_{y,0}t - v_{x,0}gt^2 - v_{x,0}v_{y,0}t + \frac{1}{2}gt^2 v_{x,0} \right) \hat{k} \\
&= -\frac{1}{2}mv_{x,0}gt^2\ \hat{k}
\end{aligned}
$$

- De tijdsafgeleide hiervan is

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = -mv_{x,0}gt\ \hat{k},$$

wat hetzelfde resultaat is als op de vorige slide.