De assistent

- Ben Anthonis
- Mail: ben.anthonis@ua.ac.be
- Tel.: 03/265.24.76
- Lokaal: N1.03 (Campus Drie Eiken)

Nuttige oefeningenweetjes

- De opgaven worden voor de lessen (normaal gezien minstens een week op voorhand) op Blackboard gezet. De oplossingen worden na de les toegevoegd.
- Het oefeningenexamen bestaat meestal uit een viertal grote vragen die eventueel zijn opgedeeld in een aantal kleinere vraagjes. Je krijgt hiervoor — afhankelijk van de precieze vragen — 3 tot 4 uur de tijd.
- Het oefeningenexamen is open boek. Je mag je handboek gebruiken, cursusnota's, oefeningen uit de les, oplossingen van oefeningen die op Blackboard zijn verschenen en formularia. Je mag ook een rekenmachine gebruiken. Dit mag grafisch zijn maar het is niet nodig.
- Bij het verbeteren is vooral je manier van denken en begrijpen van de cursus belangrijk. Het is niet onbelangrijk je berekeningen correct te doen maar rekenfouten worden niet even zwaar aangerekend als het gebruiken van foute formules.
- Belangrijke formules fout opschrijven (het is een openboekexamen!), vectoriële en scalaire grootheden omwisselen en volkomen onrealistische uitkomsten bekomen worden wel zwaar aangerekend.

Nuttige uitdrukkingen (hoofdstukken 2–3)

- Algemeen verband tussen verplaatsing, snelheid en versnelling

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad \text{en} \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

  of in integraalvorm

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\mathrm{d}t \quad \text{en} \quad \vec{v}(t_2) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\mathrm{d}t.$$

- Snelheden zijn relatief en mogen worden opgeteld

$$\vec{v}_{ac} = \vec{v}_{ab} + \vec{v}_{bc}.$$

- Nog een interessante uitdrukking (enkel geldig bij constante versnelling!)

$$v^2(t_2) - v^2(t_1) = 2a|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|.$$

- De zwaartekracht zorgt (lokaal) voor een constante versnelling, meestal gekozen in de negatieve z-richting:

$$\vec{g} = -9,81\,\frac{m}{s^2}\,\hat{k}.$$

Nuttige uitdrukkingen (speciale gevallen)

Op deze slide enkele speciale gevallen van de nuttige uitdrukkingen die je ook kan gebruiken.

- De gemiddelde snelheid (gemeten over het tijdsinterval $[t_1, t_2]$) is gegeven door
$$\vec{v}_{\text{av}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$
en voor de gemiddelde versnelling
$$\vec{a}_{\text{av}} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}.$$
- Voor een constante snelheid geldt
$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \vec{v}\,(t_2 - t_1).$$
- Voor een constante versnelling wordt dit
$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \vec{v}(t_1)\,(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t_2 - t_1)^2$$
en
$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(t_1) + \vec{a}\,(t_2 - t_1)$$

Oefening 1: Inhalen (2.18)

Een auto, die met een snelheid van $95\frac{km}{h}$ rijdt, haalt een trein met lengte $1,10km$ in. Deze trein rijdt aan een snelheid van $75\frac{km}{h}$ in een richting parallel aan die van de auto.

1. Hoe lang doet de auto er over de trein te passeren?
2. Hoe ver zal de auto hebben gereden in die tijd?
3. Wat zullen deze antwoorden zijn als de auto in de tegenovergestelde richting rijdt?

Oefening 2: Afremmen aan een stoplicht (2.36)

Een autochauffeur nadert een stoplicht met een snelheid van $65\,\frac{km}{h}$. Wanneer hij zich op een afstand van $20m$ van het stoplicht bevindt, springt het licht op rood. Als je weet dat deze chauffeur $0,2s$ nodig heeft om zijn rem in te drukkken en de auto tijdens het remmen maximaal kan vertragen aan $3,65\,\frac{m}{s^2}$, zal de auto dan nog op tijd stilstaan?

Oefening 3: Een steen in vrije val (2.65)

Een steen valt vanuit rust van op een klif in de zee. Een persoon bovenaan de klif hoort het geluid van de plons $3,4s$ later. Als de snelheid van het geluid $340\frac{m}{s}$ is, hoe hoog is de klif dan?

Luchtweerstand mag je verwaarlozen.

Oefening 4: Een sprinkhaan (3.40)

Een sprinkhaan beweegt over een vlakke straat. Bij elke sprong springt hij 45° en bereikt telkens een afstand van $1,0m$. Wat is de gemiddelde horizontale snelheid die de sprinkhaan haalt als je veronderstelt dat de tijd tussen twee sprongen verwaarloosbaar is?

Oefening 5: Een slecht idee (3.49)

Een jongen hangt in een boom op een hoogte h. Een andere jongen richt zijn waterballonkatapult recht op de jongen in de boom. Deze tweede jongen bevindt zich op een afstand d van de boom en op een hoogte $h' \leqslant h$ ten opzichte van de wortels van de boom.
Toon aan dat het een slecht idee is van de eerste jongen om de tak van de boom los te laten op het ogenblik dat de waterballon wordt afgeschoten.

Oefening 6: De juiste richting (3.71)

Een vliegtuig dat een snelheid van $580 \frac{km}{h}$ haalt ten opzichte van de lucht, vliegt tussen twee luchthavens die zo liggen dat de richting van het vliegtuig een hoek van 38° met de oostwaards gerichte coordinaatas maakt. Een wind met snelheid $72 \frac{km}{h}$ blaast uit het noorden.

1. In welke richting moet het vliegtuig zijn neus keren om in een rechte lijn en aan maximale snelheid naar zijn bestemming te vliegen?
2. Wat zal de grootte van de snelheid van het vliegtuig zijn ten opzichte van de grond als de piloot rekening houdt met de richtlijnen uit deel 1?

Oefening 7: Scoren in basketbal (3.93)

Een basketbal wordt naar de ring gegooid van een initiële hoogte van $2,4m$ met een beginsnelheid $v(0) = 12\frac{m}{s}$ onder een hoek van 35° met de horizontale. De ring bevindt zich op een hoogte van $3,05m$.

1. Op welke afstand van de ring stond de speler als hij scoort?
2. Onder welke hoek met de verticale komt de bal in de ring?

Oplossingen

Oplossing 1.1

- Zoals vaak het geval is, bestaan er een aantal manieren om deze oefening op te lossen. Hier wordt de methode getoond die — waarschijnlijk — het makkelijkst is.
- Deze methode bestaat er in alle snelheden te bekijken ten opzichte van de trein. Dit mag omdat snelheden relatief zijn en (vectorieel) mogen worden opgeteld. In het bijzonder volstaat het om van alle snelheidsvectoren de snelheidsvector van de trein af te trekken:

  $$\vec{v}_{\text{tov trein}} = \vec{v}_{\text{tov grond}} - \vec{v}_{\text{trein tov grond}}.$$

  Dit mag natuurlijk alleen op deze manier als zowel de oude snelheid $\vec{v}$ als de snelheid $\vec{v}_{\text{trein}}$ gegeven of gekend zijn ten opzichte van hetzelfde object — hier de grond.
- Omdat dit een ééndimensionaal probleem is, volstaat het om de beschouwing te beperken tot de component van de snelheid in de bewegingsrichting. De trein haalt bijgevolg een snelheid van $v_{\text{trein},x} = 75\frac{km}{h} - 75\frac{km}{h} = 0\frac{km}{h}$ en de auto haalt $v_{\text{auto},x} = 95\frac{km}{h} - 75\frac{km}{h} = 20\frac{km}{h}$.

Oplossing 1.2

- De auto rijdt dus

$$20\frac{km}{h} = 20\frac{km}{h} \cdot \frac{1\frac{m}{s}}{3,6\frac{km}{h}} = 5,56\frac{m}{s}.$$

  Om de 1120m van de lengte van de trein af te leggen tegen deze constante snelheid, heeft de auto een tijd nodig van

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1100m}{5,56\frac{m}{s}} = 198s.$$

- Om te weten hoe ver de auto in die tijd gereden heeft, moet diens snelheid ten opzichte van de grond gekend zijn. Deze is gekend uit de opgave maar je kan, gebruikmakend van de transformatieregel vermeld op de vorige slide, deze ook opnieuw berekenen. Opnieuw de constante snelheid van de auto benuttend is het resultaat

$$\Delta x = v_{\text{auto},x}\Delta t = \left(95\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3,6}\frac{m/s}{km/h}\right)\Delta t = 26,39\frac{m}{s} \cdot 198s = 5225m.$$

Oplossing 1.3

- Als de auto de andere kant oprijdt, verandert er niet veel aan de werkwijze. De getallen worden natuurlijk wel anders. Opnieuw de snelheid van de auto uitdrukkend ten opzichte van de trein, wordt bekomen dat

$$v_{\text{auto tov trein},x} = -95\frac{km}{h} - 75\frac{km}{h} = -170\frac{km}{h} = -47,2\frac{m}{s}.$$

  Het minteken is hier afkomstig van de keuze om de auto in de negative x-richting te laten rijden en de trein in de positive richting. Door de keuze andersom te maken, bekom je hier een plusteken.

- De tijd die de auto nu nodig heeft om de $1100m$ af te leggen is nu

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{-1100m}{-47,2\frac{m}{s}} = 23,3s.$$

  Het minteken in deze teller is afkomstig van de keuze om de auto in negatieve x-richting te laten rijden zodat ook Δx negatief is. Het uiteindelijke resultaat blijft dus consistent.

Oplossing 2.1

- Laat ons de bewegingsrichting van de auto opnieuw de x-richting noemen.
- Het afremmen bestaat in twee fases: de eerste $0,2s$ blijft de auto aan een constante snelheid rijden en daarna is er een constante versnelling

$$a_x = -3,65\frac{m}{s^2} \quad (\text{en } a_y = a_z = 0).$$

- In de eerste $0,2s$ legt de auto een afstand af van

$$\Delta x = v\Delta = \left(65\frac{km}{h} \cdot \frac{1\frac{m}{s}}{3,6\frac{km}{h}}\right) 0,2s = 18\frac{m}{s} \cdot 0,2s = 3,6m.$$

De auto mag dus niet meer dan $20m - 3,6m = 16,4m$ afleggen alvorens tot stilstand te komen.

Oplossing 2.2

- Bij een constante versnelling is er een makkelijke manier om de afgelegde weg te relateren aan het verschil in (kwadraten van) snelheden. In het bijzonder geldt

$$v_x^2(t_2) - v_x^2(t_1) = 2a_x|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| = 2a_x\Delta x.$$

  Voor deze opgave geeft dit aanleiding tot

$$\Delta x = \frac{0^2 - v_x^2}{2a_x} = \frac{0^2 - (18m/s)^2}{2 \cdot \left(-3,65\,\frac{m}{s^2}\right)} = 44,4m.$$

  De auto kan dus niet tijdig stopppen.

Oplossing 3.1

- Laat ons de verticale richting benoemen met z en de positieve richting van de z-as naar boven, zodat $\vec{g} = -g\hat{k}$. Het nulpunt van de z-as werd op zeeniveau gekozen — al is dat natuurlijk geen verplichting.
- De totale tijd tussen het laten vallen van de steen en het horen van de plons is de som van t_v, de valtijd van de steen, en t_g, de tijd die het geluid nodig heeft om terug tot boven op de klif te geraken.
- De tweede van deze tijden, t_g, is gegeven door

$$t_g = \frac{h}{v_g}.$$

- De eerste tijd is de oplossing van

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_v^2 \quad \left(\text{herken } z(t) = z(0) + v_z(0)t + \frac{1}{2} a_z t^2\right)$$

en is dus gelijk aan

$$t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Oplossing 3.2

- Een andere uitdrukking voor t_v is
$$t_v = t_{\text{tot}} - t_g = t_{\text{tot}} - \frac{h}{v_g}.$$
- Deze twee uitdrukkingen voor t_v kan je gelijkstellen aan elkaar, met andere woorden
$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_{\text{tot}} - \frac{h}{v_g}.$$
Dit kan je herschrijven tot een tweedegraadsvergelijking in h, namelijk
$$\frac{1}{2}h^2 - \left(v_g t_{\text{tot}} + \frac{v_g^2}{g}\right) h + \frac{1}{2} v_g^2 t_{\text{tot}}^2 = 0.$$
Deze vergelijking heeft als oplossingen
$$h_\pm = \left(v_g t_{\text{tot}} + \frac{v_g^2}{g}\right) \pm \sqrt{\left(v_g t_{\text{tot}} + \frac{v_g^2}{g}\right)^2 - v_g^2 t_{\text{tot}}^2}.$$

Oplossing 3.3

- Invullen van de numerieke waarden geeft je

$$h_+ = 25828m \quad \text{en} \quad h_- = 51,7m.$$

  De tweede van deze oplossingen ziet er realistisch uit en je kan verifieren dat een steen in vrije val ongeveer $52m$ valt in ongeveer $3,25s$ en dat het geluid ongeveer $0,15s$ nodig heeft om $52m$ te overbruggen. Dat komt dus allemaal mooi uit. Waar komt de grote waarde dan vandaan?
- Niet zelden wordt de tweede oplossing van een tweedegraadsvergelijking in een dergelijke afgedaan als louter onfysisch. Dit is echter niet helemaal correct; het is een fysische oplossing van je vergelijkingen, alleen in iets andere situaties. Hier betreft het een extreem voorbeeld, maar je kan nakijken dat een steen die je vanop zeeniveau omhoogwerpt met een snelheid van $711\,\frac{m}{s}$ na $72,5s$ de top van een $25828m$ hoge klif zal bereiken (nog steeds luchtweerstand negerend) en daar geen verticale snelheid meer heeft. Het geluid doet over die afstand ongeveer $75,9s$, en komt dus ook hier bovenaan de klif $3,4s$ na de steen. De tweedegraadsvergelijking die je oplost als je deze werkwijze toepast is dezelfde voor beide situatis en dus “weet” de tweedegraadsvergelijking niet welke situatie je beschrijft — ook al kan je het onderscheid maken uit andere vergelijkingen.

Oplossing 3.4

- Een andere manier om deze oefening op te lossen is te zeggen dat

$$h = \Delta s = \frac{1}{2} g t_{\text{val}}^2 = \frac{1}{2} g (t_{\text{tot}} - t_g)^2 = \frac{1}{2} g \left(t_{\text{tot}} - \frac{h}{v_g} \right)^2 .$$

Als je de resulterende vergelijking

$$h = \frac{1}{2} g \left(t_{\text{tot}} - \frac{h}{v_g} \right)^2$$

uitwerkt, bekom je dezelfde tweedegraadsvergelijking als hierboven en dus ook dezelfde oplossingen. Deze methode is waarschijnlijk makkelijker en eenvoudiger te begrijpen.

Oplossing 4.1

- De gemiddelde horizontale snelheid van de sprinkhaan zal gelijk zijn aan de gemiddelde horizontale snelheid in elke sprong. Dit omdat we veronderstellen dat er geen tijd zit tussen de twee sprongen.
- We mogen veronderstellen dat de sprinkhaan een parabolische baan beschrijft tijdens zijn sprong; na het afzetten aan het begin van de sprong werkt alleen de gravitatie nog op de sprinkhaan.
- Kies de beginpositie als nulpunt van het coordinaatstelsel, kies de x-richting positief in de richting waar de sprinkhaan naartoe springt en kies de z-richting positief naar boven.
- De snelheid in de x-richting zal constant zijn want de sprinkhaan versnelt (tijdens zijn sprong) niet in die richting. Deze snelheid is daarom ook de gemiddelde snelheid en de beginsnelheid.

Oplossing 4.2

- De beginsnelheid in de x-richting is onbekend, maar we weten wel dat
$$\vec{v}(0) = v_x(0)\hat{\imath} + v_y(0)\hat{\jmath}$$
waarbij
$$v_x(0) = \vec{v}(0) \cdot \hat{\imath} \quad \text{en} \quad v_z(0) = \vec{v}(0) \cdot \hat{k}.$$
Daarom geldt ook dat
$$v_x(0) = v(0)\cos(45^\circ) \quad \text{en} \quad v_z(0) = v(0)\sin(45^\circ).$$
- Als nu de grootte van de beginsnelheid, $v(0)$, kan worden bepaald, kan dus ook de gevraagde snelheid berekend worden. Om $v(0)$ te bepalen, kan gebruik worden gemaakt van de afstand die de sprinkhaan aflegt in één sprong.

Oplossing 4.3

- De totale horizontale afstand afgelegd in een paraboolbaan met gegeven beginsnelheid kan vrij eenvoudig worden berekend. Het is namelijk de afstand die kan worden afgelegd in de tijd dat het voorwerp zich in de lucht bevindt. Omdat een parabool symmetrisch is wanneer ze wordt gespiegeld rond een verticale as door het hoogste punt, is deze tijd tweemaal de tijd die nodig is om het hoogste punt te bereiken en, equivalent daarmee, de tijd die nodig is om de verticale snelheid tot nul te herleiden.
- Wanneer de sprinkhaan vertrekt met een verticale beginsnelheid $v(0)\sin(\theta)$, waarbij θ de hoek met de x-as is, zal het een tijd
$$\Delta t = \frac{v(0)\sin(\theta)}{g}$$
duren alvorens de top bereikt wordt. Op tweemaal deze tijd (zie vorige puntje) kan de sprinkhaan een horizontale afstand
$$\Delta x = 2v_x\Delta t = 2\frac{v(0)^2}{g}\cos(\theta)\sin(\theta) \stackrel{\theta=45^\circ}{=} \frac{v(0)^2}{g}$$
afleggen.

Oplossing 4.4

- Omdat Δx hier gelijk is aan $1m$, volgt daar uit

$$v(0) = \sqrt{g\Delta x}$$

zodat

$$v_x = \sqrt{g\Delta x}\cos(\theta) = \sqrt{9,81\frac{m}{s}\cdot 1m}\frac{1}{\sqrt{2}} = 2,21\frac{m}{s}.$$

Oplossing 5.1

- Dat het een slecht idee is de tak op het genoemde ogenblik los te laten, is natuurlijk omdat de jongen precies dan geraakt zal worden door de ballon. De jongen zal geraakt worden als er een tijdstip bestaat zodat zijn positie dezelfde is als die van de waterballon.
- Kies een assenstelsel met de z-as positief naar boven en het nulpunt van de z-as ter hoogte van de wortels van de boom. De (noodzakelijk horizontale) x-as kan je positief kiezen in de richting van de schutter naar de boom. Kies het nulpunt van de tijdsas op het ogenblik dat de jongen loslaat en de ballon wordt afgeschoten.
- De (z-component van de) positie van de vallende jongen, als functie van de tijd, is gegeven door

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Oplossing 5.2

- Voor de hoogte waarop de ballon zich bevindt, geldt de relatie

$$z'(t) = h' + v(0)\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

De hoek θ waaronder de ballon wordt afgeschoten, wordt gegeven door

$$\begin{aligned} & \tan(\theta) = \frac{h-h'}{d} \\ \Rightarrow \quad & \sin(\theta) = \sin\left(\mathrm{Bgtan}\left(\frac{h-h'}{d}\right)\right) = \frac{h-h'}{\sqrt{d^2+(h-h')^2}}. \end{aligned}$$

- De twee z-coordinaten (ballon en jongen) gelijkstellen aan elkaar levert

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = h' + v(0)\frac{h-h'}{\sqrt{d^2+(h-h')^2}}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Merk op dat de termen waar de zwaartekracht in voorkomt, tegen elkaar wegvallen. In principe is dit al voldoende om het gestelde te bewijzen. Zonder zwaartekracht zou de ballon de jongen immers raken en nu blijkt deze geen rol te spelen.

Oplossing 5.3

- Voor de volledigheid vermelden we wel een complicatie. De ballon moet zich wel tot aan de boom verplaatst hebben alvorens de vallende jongen de grond raakt en stopt met vallen. Uit de laatste vergelijking op de vorige slide kan je de minimale $v(0)$ bepalen die hiervoor nodig is, de tijd waarop $x'(t) = d$ moet immers kleiner zijn dan

  $$t_{\mathrm{val}} = \sqrt{\frac{2g}{h}}.$$

  Zo vind je uit genoemde vergelijking

  $$v(0)_{\mathrm{min}} = \frac{\sqrt{d^2 + (h - h')^2}}{t_{\mathrm{val}}}.$$

  Als $v(0)$ kleiner is dan deze waarde, zal de ballon niet tot aan de boom geraken alvorens zelf de grond te raken. De jongen in de boom zal dan sowieso niet geraakt worden. Dat je vergelijkingen je dit niet vertellen, is opnieuw een gevolg van het gebruiken van vergelijkingen die niet altijd geldig zijn, in het bijzonder enkel wanneer $0 \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{val}}$.

Oplossing 6.1

- Het vliegtuig zal op elk ogenblik vliegen in de richting van zijn neus — maar enkel wanneer gezien door een waarnemer die meebeweegt met de lucht. Voor een waarnemer op de grond zal de snelheid van het vliegtuig

  $$\vec{v}_{\text{vl tov grond}} = \vec{v}_{\text{vl tov wind}} + \vec{v}_{\text{wind tov grond}}.$$

  Laat ons deze vectoren in wat volgt kort noteren als $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$.
- Kies de x-as in oostelijke richting en de y-as in noordelijke richting.
- De wind heeft dan een snelheid ten opzichte van

  $$\vec{v}^{(3)} = -20\frac{m}{s}\hat{\imath}.$$

- Noem de hoek die de neus van het vliegtuig maakt met de x-as θ.
- Door wat grafisch en goniometrisch inzicht kan je deze oefening sterk vereenvoudigen. Een tekening maken helpt hierbij.

Oplossing 6.2

- Werk in de driehoek begrensd door de drie snelheidsvectoren.
- De gezochte hoek θ is gelijk aan 38° plus de hoek tussen $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$.
- De hoek tussen $\vec{v}_3$ en $\vec{v}_1$ is gelijk aan $90^\circ + 38^\circ = 128^\circ$.
- Nu kan de sinusregel worden toegepast. Deze zegt

$$\frac{\sin(\theta - 38^\circ)}{v_3} = \frac{\sin(128^\circ)}{v_2}$$

zodat

$$\begin{aligned}
\theta &= \operatorname{Bgsin}\left(\frac{v_3}{v_2}\sin(128^\circ)\right) + 38^\circ \\
&= \operatorname{Bgsin}\left(\frac{72\,\frac{km}{h}}{580\,\frac{km}{h}}\sin(128^\circ)\right) + 38^\circ \\
&= 43,6^\circ.
\end{aligned}$$

Oplossing 6.3

- Het vliegtuig vliegt ten opzichte van de grond met een snelheid

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3.$$

Dit betekent

$$\begin{aligned}
v_1 &= \sqrt{v_2^2 + 2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 + v_3^2} \\
&= \sqrt{v_2^2 + 2v_{2,y}v_{3,y} + v_3^2} \\
&= \sqrt{\left(161,1\frac{m}{s}\right)^2 + 2\left(161,1\frac{m}{s}\right)\sin(43,6^\circ)\left(-20\frac{m}{s}\right) + \left(-20\frac{m}{s}\right)^2} \\
&= 150\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

$$\left(\approx 542\frac{km}{h}\right).$$

Oplossing 6.4

- Een andere methode bestaat er in te werken met de componenten. Er geldt namelijk (met de gegevens reeds ingevuld)

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= v_{2,x} && (1) \\ v_{1,y} &= v_{2,y} - 20\,\frac{m}{s} && (2) \\ \sqrt{v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2} &= 161,1\,\frac{m}{s} && (3) \\ \text{Bgtan}\left(\frac{v_{1,y}}{v_{1,x}}\right) &= 38^\circ && (4) \end{aligned}$$

  waar vergelijkingen (1) en (2) de componentsgewijze vormen van de vectorsom op slide 6.1 is, vergelijkingen (3) en (4) komen uit het gegeven.
- Deze vier vergelijkingen met vier onbekenden kunnen worden opgelost om dezelfde uitkomst te bekomen als met de methode hierboven.
- Een mogelijke oplossingsmethode bestaat er in om (1) en (2) te gebruiken in (4):

$$v_{2,y} - 20\,\frac{m}{s} = v_{2,x}\tan(38^\circ).$$

Oplossing 6.5

- Dit kan je gebruiken in het kwadraat van (3) zodat

$$v_{2,x}^2 + \left(v_{2,x}\tan(38^\circ) + 20\,\frac{m}{s}\right)^2 = \left(161\,\frac{m}{s}\right)^2 .$$

  De positieve oplossing van deze vergelijking kan je invullen in vergelijking (4) om ook $v_{2,y}$ te vinden. Met deze getallen vind je ten slotte ook de componenten van $\vec{v}_1$.

- Met de vier vectorcomponenten gekend kan je de gevraagde grootheden

$$\phi = \text{Bgtan}\left(\frac{v_{2,y}}{v_{2,x}}\right) \quad \text{en} \quad \sqrt{v_{1,x}^2 + v_{1,y}^2}$$

  berekenen. Deze zijn zoals gezegd dezelfde als eerder berekend.

Oplossing 7.1

- De afstand die de speler van de ring afstaat is de afstand die wordt afgelegd op de tijd dat de bal over zijn hoogste positie is gegaan en daarna is gedaald tot op $3,05m$ boven de grond.
- Kies een assenstelsel met de x-as positief in de richting dat de bal gegooid wordt en de z-as positief naar boven.
- De baan van de bal wordt als functie van de tijd gegeven door

$$\begin{cases} x(t) &= x(0) + v(0)\cos(\theta)t \\ z(t) &= z(0) + v(0)\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- Er zijn twee tijdsstippen waarop $z(t) = 3,05m$. We zoeken de grootste van beiden. Deze kan gevonden worden door de vergelijking voor $z(t)$ te gebruiken, zodat

$$\begin{aligned} t_b &= \frac{v(0)}{g}\sin(\theta) + \sqrt{\left(\frac{v(0)}{g}\sin(\theta)\right)^2 - 2\frac{z(t_b) - z(0)}{g}} \\ &= \frac{12\frac{m}{s}}{9,81\frac{m}{s^2}}\sin(35^\circ) + \sqrt{\left(\frac{12\frac{m}{s}}{9,81\frac{m}{s^2}}\sin(35^\circ)\right)^2 - 2\frac{3,05m - 2,4m}{9,81\frac{m}{s^2}}} \\ &= 1,3s. \end{aligned}$$

Oplossing 7.2

- De horizontale snelheid van de bal is gegeven door

$$v_x(t_b) = v_x(0) = \vec{v}(0) \cdot \hat{\imath} = v(0)\cos(\theta) = 12\frac{m}{s}\cos(35^\circ) = 9,83\frac{m}{s}.$$

  Dit betekent dat de bal op een tijd t_b een horizontale afstand

$$\Delta x = v_x t_b = 9,83\frac{m}{s}1,3s = 12,8m$$

  heeft afgelegd. Dit is noodzakelijkerwijs ook de horizontale afstand dat de speler zich van de ring bevond.

- De hoek ϕ waaronder de bal door de ring gaat, is de hoek die de snelheidsvector van de bal maakt met de horizontale op het ogenblik dat de bal door de ring gaat. Deze hoek kan je berekenen uit

$$v_z(t_b) = \vec{v}(t_b) \cdot \hat{k} = v(t_b)\sin(\phi) \quad \text{en} \quad v_x(t_b) = \vec{v}(t_b) \cdot \hat{\imath} = v(t_b)\cos(\phi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \text{Bgtan}\left(\frac{v_z(t_b)}{v_x(t_b)}\right).$$

Oplossing 7.2

- De componenten van de snelheid op tijdstip t_b worden gegeven door

$$v_x(t_b) = v_x(0) = v(0)\cos(\theta)$$

en

$$v_z(t_b) = v_z(0) - gt_b = v(0)\sin(\theta) - gt_b.$$

Dit betekent

$$\begin{aligned}\theta &= 90^\circ - \text{Bgtan}\left(\frac{v(0)\sin(\theta) - gt_b}{v(0)\cos(\theta)}\right)\\ &= 90^\circ \text{Bgtan}\left(\frac{12\,\frac{m}{s}\sin(35^\circ) - 9,81\,\frac{m}{s^2}1,3s}{12\,\frac{m}{s}\cos(35^\circ)}\right)\\ &= 121^\circ.\end{aligned}$$