Examen Wiskunde Oefeningen

dr Werner Peeters

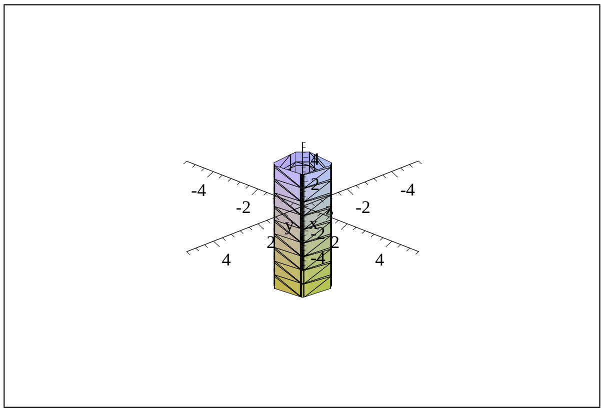
2e bachelor scheikunde & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2009–2010

Naam:	....
Richting:	SCH / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

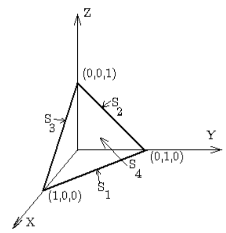
1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de cylinder met als z–onafhankelijke vergelijking $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$, en het vlak $z = 5 + 3x + 4y$. Het volume V is het inwendige van de cylinder, met het XY–vlak $z = 0$ als bodem en het vlak $z = 5 + 3x + 4y$ als bovenvlak.



Bereken het ingesloten volume. Hint: je zal (minstens één coördinaattransformatie nodig hebben).

/10

2. We beschouwen het viervlak Ω met als hoekpunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$. We noemen de vier rechtopstaande zijvlakken respectievelijk S_1, S_2, S_3 en het schuine zijvlak, door de punten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ S_4. Hierbij een tekening



Zij een vectorveld gegeven door $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$. Gevraagd wordt om de integraal $\iint\limits_{S_4} \mathbf{F} \cdot \eta dS$ (over het schuine zijvlak, dus) te berekenen. Rechtstreeks is dit nogal moeilijk, dus ga als volgt te werk: bereken eerst $\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ en trek daarvan $\iint\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot \eta dS$ t/m $\iint\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot \eta dS$ af, gebruik makend van zoveel mogelijk symmetrie–eigenschappen van het vectorveld en de figuur.

/10

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$4xy'' + 2y' - y = 0,$$

(a) Schrijf de oplossing als een lineaire combinatie van twee reeksen.

(b) Ga na dat twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vergelijking ook geschreven kunnen worden als $\cosh\sqrt{x}$ en $\sinh\sqrt{x}$. Betekent dat automatisch dat één van de bovenstaande reeksen cosinus hyperbolicus en de andere sinus hyperbolicus van de wortelfunctie is? Verklaar.

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) + 4t \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + 4t \end{cases}$$

/10

5. Los op door gebruik te maken van Laplace–transformaties:

$$y'' - 2y' - 8y = 12\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 6$$

/10

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y\,(n+2) - 6y\,(n+1) + 5y\,(n) = 32n$$

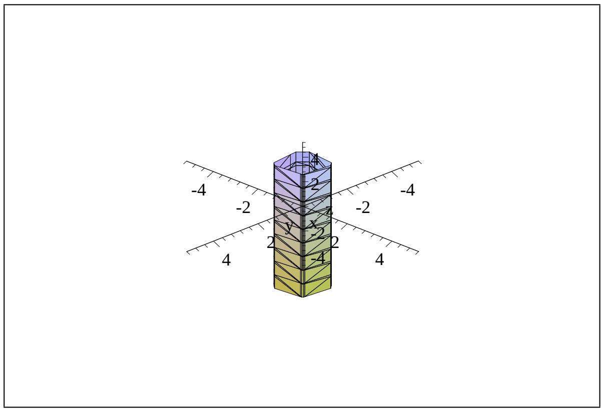
/10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de cylinder met als z–onafhankelijke vergelijking $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$, en het vlak $z = 5 + 3x + 4y$. Het volume V is het inwendige van de cylinder, met het XY–vlak $z = 0$ als bodem en het vlak $z = 5 + 3x + 4y$ als bovenvlak.



Bereken het ingesloten volume. Hint: je zal (minstens één coördinaattransformatie nodig hebben).

Stel $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (u+1)^2 - 2(u+1) + (v+1)^2 - 2(v+1) + 1 = u^2 + v^2 - 1 = 0 \\ z = 5 + 3(u+1) + 4(v+1) = 12 + 3u + 4v \end{cases}$$

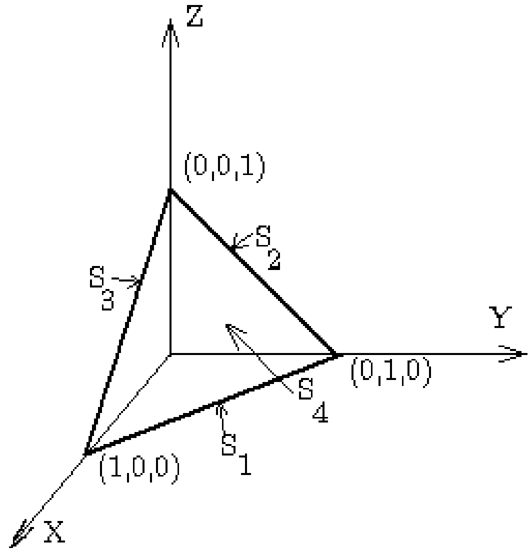
$$I = \int\int_{u^2+v^2\leq 1} \int_0^{12+3u+4v} dz dS = \int\int_{u^2+v^2\leq 1} (12 + 3u + 4v)\, dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (12 + 3r\cos\theta + 4r\sin\theta)\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(3\cos\theta + 4\sin\theta)\, r^3 + 6r^2\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + \frac{4}{3}\sin\theta + 6\right) d\theta = \left[\sin\theta - \frac{4}{3}\cos\theta + 6\theta\right]_0^{2\pi} = 12\pi$$

2. We beschouwen het viervlak Ω met als hoekpunten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$. We noemen de vier rechtopstaande zijvlakken respectievelijk S_1, S_2, S_3 en het schuine zijvlak, door de punten

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ S_4. Hierbij een tekening



Zij een vectorveld gegeven door $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$. Gevraagd wordt om de integraal $\iint\limits_{S_4} \mathbf{F}\cdot \eta dS$ (over het schuine zijvlak, dus) te berekenen. Rechtstreeks is dit nogal moeilijk, dus ga als volgt te werk: bereken eerst $\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F} dV$ en trek daarvan $\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot \eta dS$ t/m $\iint\limits_{S_3} \mathbf{F}\cdot \eta dS$ af, gebruik makend van zoveel mogelijk symmetrie–eigenschappen van het vectorveld en de figuur.

$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot \eta dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} F dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 3dzdydx = \frac{1}{2}$$

Stel $\varphi : S_1 \to \mathbb{R}^2 : (u,v) \mapsto (u,v,0)$ met $S_1 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1-u\right\}$

$\Rightarrow F(\varphi(u,v)) = (u+v, v, u)$ en $\eta(0,0,-1) \Rightarrow \mathbf{F}\cdot\eta = (u+v,v,u)\cdot(0,0,-1) = -u$

$\Rightarrow \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot \eta dS = \int_0^1 \int_0^{1-u} -udvdu = -\frac{1}{6}$. Analoog is omwille van symmetrie $\iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot \eta dS = \iint\limits_{S_3} \mathbf{F}\cdot \eta dS = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_4} \mathbf{F}\cdot \eta dS = \frac{1}{2} - 3\left(-\frac{1}{6}\right) = 1$$

3. Los op met de methode van Fuchs:

$$4xy'' + 2y' - y = 0,$$

(a) Schrijf de oplossing als een lineaire combinatie van twee reeksen.

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

$x = 0$ is een regulier singulier punt van de differentiaalvergelijking

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

We gaan daarom op zoek naar een oplossing van de vorm

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

waarbij nu zowel r als de coëfficiënten c_n moeten bepaald worden. Omdat

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

vinden we voor de vergelijking

$$\begin{aligned} 4xy'' + 2y' - y &= 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(4n+4r-2) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= x^r \left[r(4r-2) c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(4n+4r-2) c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \\ &\overset{m=n-1}{=} x^r \left[r(4r-2) c_0 x^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1+r)(4(m+1)+4r-2) c_{m+1} x^m - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \\ &= x^r \left[r(4r-2) c_0 x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)(4n+4r+2) c_{n+1} - c_n] x^n \right] \end{aligned}$$

Opdat dit gelijk zou zijn aan nul, moet

$$\begin{aligned} r(4r-2)c_0 &= 0 \\ \forall n &\in \mathbb{N} : (n+r+1)(4n+4r+2) c_{n+1} = c_n \end{aligned}$$

Omdat we met $c_0 = 0$ toch maar alleen de nuloplossing krijgen, kunnen we de relaties herleiden tot

$$\begin{aligned} r(4r-2) &= 0 \\ \forall n &\in \mathbb{N} : c_{n+1} = \frac{c_n}{(n+r+1)(4n+4r+2)} \end{aligned}$$

Uit de eerste vergelijking halen we twee mogelijkheden voor r welke aanleiding geven tot twee verschillende recurrentiebetrekkingen:

$$r_1 = \frac{1}{2} \text{ met } \forall n \in \mathbb{N} : c_{n+1} = \frac{c_n}{2(n+1)(2n+3)} = \frac{c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

en

$$r_2 = 0 \text{ met } \forall n \in \mathbb{N} : d_{n+1} = \frac{d_n}{(n+1)(4n+2)} = \frac{d_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

De eerste iteratie levert

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{2 \cdot 3} \\ c_2 &= \frac{c_1}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ c_3 &= \frac{c_2}{6 \cdot 7} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \\ &\dots \\ c_n &= \frac{c_0}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

en de tweede

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{d_0}{1 \cdot 2} \\ d_2 &= \frac{d_1}{3 \cdot 4} = \frac{d_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ d_3 &= \frac{d_2}{5 \cdot 6} = \frac{d_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ &\dots \\ d_n &= \frac{d_0}{(2n)!} \end{aligned}$$

We vinden bijgevolg twee reeksoplossingen

$$y_1(x) = c_0 \sqrt{x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} \right]$$

en

$$y_2(x) = d_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \right]$$

Met de verhoudingstest kan men nagaan dat ze allebei convergeren voor alle eindige waarden van x. Ze zijn ook duidelijk lineair onafhankelijk. Hierdoor weten we dat de algemene oplossing gegeven wordt door alle mogelijke lineaire combinaties d.w.z. $\forall x$ met $|x| \in \mathbb{R}^+$

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2 = k_1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1/2}}{(2n+1)!} \right] + k_2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \right]$$

(b) Ga na dat twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vergelijking ook geschreven kunnen worden als $\cosh \sqrt{x}$ en $\sinh \sqrt{x}$. Betekent dat automatisch dat één van de bovenstaande reeksen cosinus hyperbolicus en de andere sinus hyperbolicus van de wortelfunctie is? Verklaar.
Merk eerst en vooral op dat dit inderdaad klopt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\cosh \sqrt{x} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\cosh \sqrt{x} \right) &= \frac{1}{4} \frac{\left(\cosh \sqrt{x} \right) \sqrt{x} - \sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 4xy'' + 2y' - y = \dfrac{\left(\cosh \sqrt{x} \right) \sqrt{x} - \sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \cosh \sqrt{x} = 0$ en analoog voor sinh.
Dat dit dezelfde oplossing is, is evident, want met $y = \sqrt{x}$ is

$$\sinh y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ en } \cosh y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = -2y(t) + 4t \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + 4t \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$* \ \lambda = 1 \Rightarrow E_1 : \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow V_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$* \ \lambda = 2 \Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow V_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ -e^t & -e^{2t} \end{pmatrix}$ is dus een fundamentele matrix

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ -e^t & -e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W'(t) = \Phi^{-1}(t) F(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8e^{-t}t \\ -12e^{-2t}t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W(t) = \int \begin{pmatrix} 8e^{-t}t \\ -12e^{-2t}t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -8e^{-t}t - 8e^{-t} \\ 6e^{-2t}t + 3e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi(t) W(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ -e^t & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8e^{-t}t - 8e^{-t} \\ 6e^{-2t}t + 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10t - 13 \\ 2t + 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10t - 13 \\ 2t + 5 \end{pmatrix}$

5. Los op door gebruik te maken van Laplace–transformaties:

$$y'' - 2y' - 8y = 12\delta_1(t) \text{ met } y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 6$$

$y'' - 2y' - 8y = 12\delta_1(t)$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 6$

$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] - 8\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[12\delta(t-1)]$

$\Rightarrow \left(z^2 Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) - 2\left(zY(z) - y(0)\right) - 8Y(z) = 12e^{-z}$

$\Rightarrow \left(z^2 Y(z) - 6\right) - 2\left(zY(z)\right) - 8Y(z) = 12e^{-z}$

$\Rightarrow \left(z^2 - 2z - 8\right) Y(z) = 6 + 12e^{-z}$

$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{12}{(z-4)(z+2)} e^{-z} + \dfrac{6}{(z-4)(z+2)}$

$$\begin{aligned} \frac{6}{(z-4)(z+2)} &= \frac{1}{z-4} - \frac{1}{z+2} \\ &\text{en} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(z-4)(z+2)}\right] &= e^{4t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

$\Rightarrow Y(z) = \left(\dfrac{2}{z-4} - \dfrac{2}{z+2}\right) e^{-z} + \left(\dfrac{1}{z-4} - \dfrac{1}{z+2}\right)$

$\Rightarrow y(t) = e^{4t} - e^{-2t} + 2H(t-1)e^{4t-4} - 2H(t-1)e^{-2t+2}$

6. Los de volgende differentievergelijking op

$$y(n+2) - 6y(n+1) + 5y(n) = 32n$$

KV: $t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$

$\Rightarrow y_c(n) = c_1 + c_2 5^n$

$N(E) = (E-1)^2 \Rightarrow (E-1)^3 (E-5) y(n) = 0$

$\Rightarrow E^4 - 8E^3 + 18E^2 - 16E + 5 = 0$

$\Rightarrow y_p(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + b_0 5^n$

$\Rightarrow y_p(n) = a_1 n + a_2 n^2$

$\Rightarrow a_1(n+2) + a_2(n+2)^2 - 6\left(a_1(n+1) + a_2(n+1)^2\right) + 5\left(a_1 n + a_2 n^2\right) = -4a_1 - 8a_2 n - 2a_2 \equiv n$

$\Rightarrow \begin{cases} -4a_1 - 2a_2 = 0 \\ -8a_2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(n) = 2n - 4n^2$

$\Rightarrow y(n) = c_1 + c_2 5^n + 2n - 4n^2$