Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 2e zittijd 2016–2017

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Bereken alle zesdemachtswortels van $w = 729$. De uitkomsten moeten in cartesische vorm staan.

/6

2. De rest bij deling van $A(z)$ door $z - i$, $z - 2i$ en $z - 1 - i$ is respectievelijk $1 + 3i$, $2 - 5i$ en $-4 + 5i$. Bepaal de rest bij deling van $A(z)$ door het produkt $(z - i)(z - 2i)(z - 1 - i)$.

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \left\lfloor \left| x - x^2 \right| + x \right\rfloor$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{6 - 4x + x^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 4} \right)$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2 + x}{2x^2 + 1} \right)^{3x}$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$4^{x-1} - 2^x = 8$$

/6

5. De tweede afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{1+x^2}$ is van de vorm $\dfrac{A(x)\ln x + B(x)}{\left(1+x^2\right)^3}$ met $A(x)$ en $B(x)$ veeltermen. Bepaal deze.

/6

6. Onderzoek de asymptoten van de functie $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$ inclusief hun ligging ten opzichte van de functie.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{(4-2x)\,dx}{(x^2+1)\,(x-1)^2}$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

9. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x + \cot x} dx$$

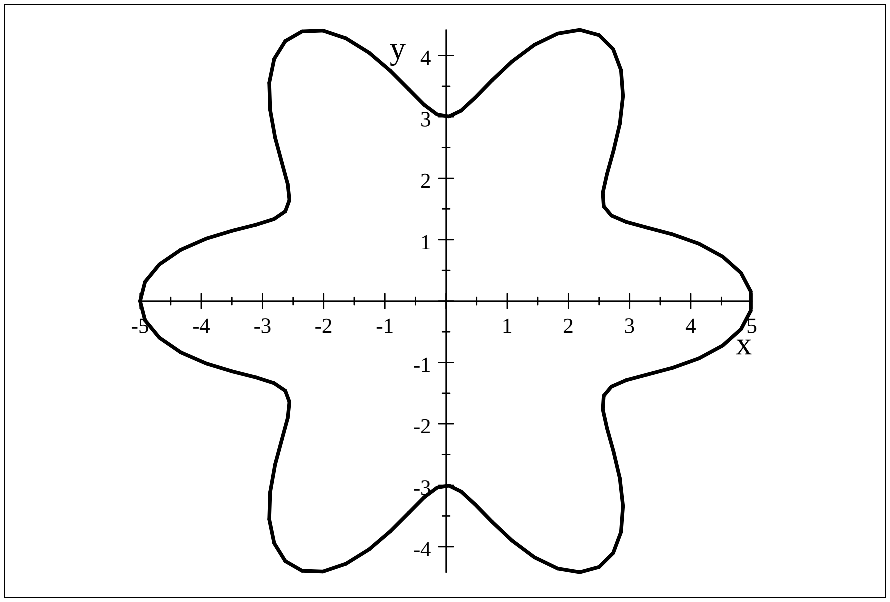
als die bestaat.

$\boxed{\qquad /6}$

10. In de eerste zittijd werd gevraagd naar het tekenonderzoek van de poolkromme

$$r(\theta) = 4 + \cos 6\theta$$

De tekening hiervan ziet er als volgt uit:



Bereken hiervan de oppervlakte door zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening te gebruiken.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Bereken alle zesdemachtswortels van $w = 729$. De uitkomsten moeten in cartesische vorm staan.
   $w = z^6 = 729 = 729 \operatorname{cis}(k2\pi)$
   $\Rightarrow z_k = 3 \operatorname{cis}\left(k\dfrac{\pi}{3}\right)$
   $$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = 3\operatorname{cis} 0 = 3 \\ z_1 = 3\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = 3\operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 = 3\operatorname{cis}\pi = -3 \\ z_4 = 3\operatorname{cis}\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ z_5 = 3\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$
   Feedback: De poolvorm van 729 is niet $729 \operatorname{cis}(\pi + k2\pi)$, noch $729 \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$

2. De rest bij deling van $A(z)$ door $z - i$, $z - 2i$ en $z - 1 - i$ is respectievelijk $1 + 3i$, $2 - 5i$ en $-4 + 5i$. Bepaal de rest bij deling van $A(z)$ door het produkt $(z - i)(z - 2i)(z - 1 - i)$.
   Stel $A(z) = (z - i)(z - 2i)(z - 1 - i)B(z) + az^2 + bz + c$
   $$\Rightarrow \begin{cases} A(i) = -a + ib + c = 1 + 3i \\ A(2i) = -4a + 2ib + c = 2 - 5i \\ A(1+i) = 2ia + (1+i)b + c = -4 + 5i \end{cases} \begin{array}{c} V_2 - V_1 \\ V_3 - V_1 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} -a + ib + c = 1 + 3i \\ -3a + ib = 1 - 8i \\ (1+2i)a + b = -5 + 2i \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 + 3i + a - ib \\ -3a + i(-5 + 2i - (1+2i)a) = 1 - 8i \\ b = -5 + 2i - (1+2i)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 + 3i + a - ib \\ -(1+i)a - 2 - 5i = 1 - 8i \\ b = -5 + 2i - (1+2i)a \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} c = 1 + 3i + a - ib \\ -(1+i)a = 3 - 3i \\ b = -5 + 2i - (1+2i)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 + 3i + 3i - i(1-i) = 5i \\ a = 3i \\ b = -5 + 2i - (1+2i)3i = 1 - i \end{cases}$$
   $\Rightarrow R(z) = 3iz^2 + (1 - i)z + 5i$
   Feedback: De restterm is van graad 2, niet van graad 1 zoals sommigen verkeerdelijk dachten.

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \left\lfloor \left|x - x^2\right| + x \right\rfloor$

   - $\lim\limits_{x\to 2+} \left\lfloor \left|x - x^2\right| + x \right\rfloor = \lim\limits_{x\to 2+} \lfloor 2 + x \rfloor = 4$
   - $\lim\limits_{x\to 2-} \left\lfloor \left|x - x^2\right| + x \right\rfloor = \lim\limits_{x\to 2-} \lfloor 2 + x \rfloor = 3$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{6 - 4x + x^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) = \infty - \infty$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(6 - 4x + x^2\right) - \left(x^2 + 2x + 4\right)}{\sqrt{6 - 4x + x^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 2}{\sqrt{6 - 4x + x^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x}{2|x|}$$

   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{6 - 4x + x^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6x}{2x} = -3$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{6 - 4x + x^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6x}{-2x} = 3$

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x}{2x^2+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-1+\frac{2x^2+x}{2x^2+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{2x^2+1}\right)^{3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot 3x\cdot\frac{x-1}{2x^2+1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x(x-1)}{2x^2+1}}=e^{3/2}$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$4^{x-1}-2^x=8$$

Stel $y=2^x\Rightarrow\frac{y^2}{4}-y=8\Rightarrow y^2-4y-32=0$
$\Delta=(-4)^2-4\cdot(-32)=144\Rightarrow y_{1,2}=\frac{4\pm 12}{2}=8$ of -4, maar deze laatste oplossing moet worden verworpen
$\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow x=3$

5. De tweede afgeleide van de functie $f(x)=\frac{x^2\ln x}{1+x^2}$ is van de vorm $\frac{A(x)\ln x+B(x)}{(1+x^2)^3}$ met $A(x)$ en $B(x)$ veeltermen. Bepaal deze.
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\right)=\frac{(1+x^2)(2x\ln x+x)-(2x\cdot x^2\ln x)}{(1+x^2)^2}=\frac{x^3+x+2x\ln x}{(x^2+1)^2}$
$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2\ln x}{1+x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+x+2x\ln x}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{(1+x^2)^2(3x^2+3+2\ln x)-(x^3+x+2x\ln x)\cdot 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$
$=\frac{(1+x^2)(3x^2+3+2\ln x)-(x^3+x+2x\ln x)\cdot 4x}{(1+x^2)^3}=\frac{(-6x^2+2)\ln x-x^4+2x^2+3}{(1+x^2)^3}$
$\Rightarrow A(x)=-6x^2+2$ en $B(x)=-x^4+2x^2+3$

6. Onderzoek de asymptoten van de functie $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$ inclusief hun ligging ten opzichte van de functie.

- VA: $\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\infty\Rightarrow x=1$ is een verticale asymptoot
  -
    * $\lim_{x\to1+}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2}{0^+\cdot(-1)}=-\infty$
    * $\lim_{x\to1-}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{2}{0^-\cdot(-1)}=+\infty$
  - $\lim_{x\to2}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\infty\Rightarrow x=2$ is ook een verticale asymptoot
    * $\lim_{x\to2+}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{5}{1\cdot 0^+}=+\infty$
    * $\lim_{x\to2-}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{5}{1\cdot 0^-}=-\infty$
- HA: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\cdot x}=1\Rightarrow y=1$ is een horizontale asymptoot
  $f(x)-A=\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}-1=\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)}$

x		$\frac{1}{3}$		1		2	
$f(x)-A$	$-$	0	$+$	|	$-$	|	$+$

Als $f \to +\infty$, dan ligt f boven A
Als $f \to -\infty$, dan ligt f onder A

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{(4-2x)\,dx}{(x^2+1)\,(x-1)^2}$$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)\,(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

$$\begin{aligned}
Ai + B &= \left.\frac{4-2x}{(x-1)^2}\right|_{x=i} = 1+2i \Rightarrow (A,B) = (2,1) \\
C &= \left.\frac{4-2x}{x^2+1}\right|_{x=1} = 1 \\
\frac{4-2x}{(x^2+1)\,(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} &= \frac{-x-3}{(x-1)\,(x^2+1)} \\
\Rightarrow & \quad D = \left.\frac{-x-3}{x^2+1}\right|_{x=1} = -2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}\right) dx = \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{Bgtan} x - \frac{1}{x-1} - 2\ln|x-1| + c$$

Feedback: De coëfficiënten kunnen nooit complex zijn. Een onwaarschijnlijk aantal studenten schreef hier de integraal $\int \frac{(1+2i)\,dx}{x^2+1}$ wat klinkklare onzin is.

8. Bereken

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$$

Stel $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{1}{t+1}dt$$

$$= \ln|t+1| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + c$$

9. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x + \cot x}dx$$

als die bestaat.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x + \cot x}dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan x + \cot x}dx + \lim_{b\to \frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{4}}^{b} \frac{1}{\tan x + \cot x}dx$$

Nu is $\int \frac{1}{\tan x+\cot x}dx=\int \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}dx=\int \frac{1}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}}dx=\int \cos x\sin x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x dx=$
$-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

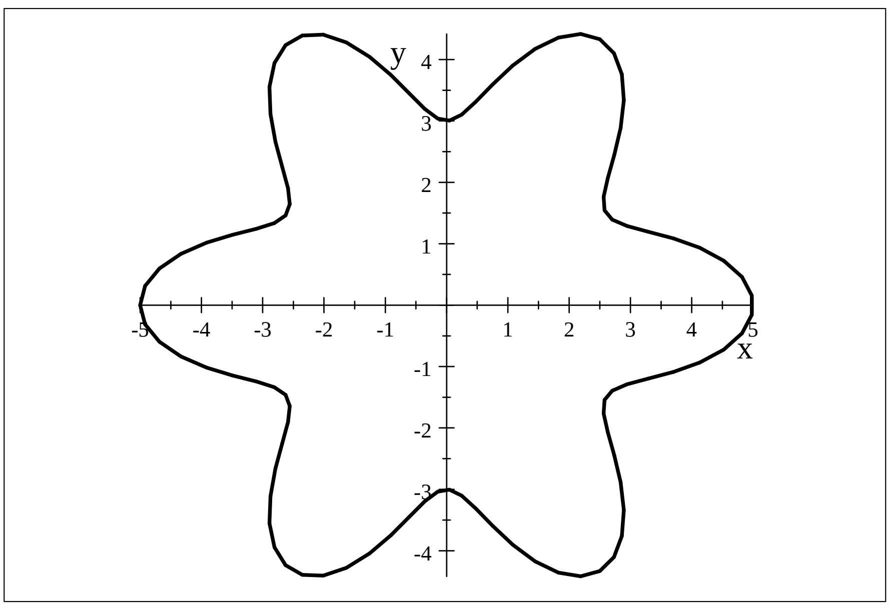
$\Rightarrow I=\lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_a^{\frac{\pi}{4}}+\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-}\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{b}=0+\frac{1}{4}\lim_{a\to 0+}\cos 2a-\frac{1}{4}\lim_{b\to\frac{\pi}{2}-}\cos 2b+0=\frac{1}{2}$

Feedback: In 0 bestaat $\cot x$ niet en in $\frac{\pi}{2}$ bestaat $\tan x$ niet. Het is dus noodzakelijk deze integraal te benaderen als een oneigenlijke van de tweede soort met twee onbepaalde grenzen.

10. In de eerste zittijd werd gevraagd naar het tekenonderzoek van de poolkromme

$$r(\theta)=4+\cos 6\theta$$

De tekening hiervan ziet er als volgt uit:



Bereken hiervan de oppervlakte door zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening te gebruiken.

$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4+\cos 6\theta)^2\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(16+8\cos 6\theta+\cos^2 6\theta\right)d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(16+8\cos 6\theta+\frac{1+\cos 12\theta}{2}\right)d\theta$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{33}{2}+8\cos 6\theta+\frac{\cos 12\theta}{2}\right)d\theta=3\left[\left(\frac{33}{2}\theta+\frac{4}{3}\sin 6\theta+\frac{1}{12}\sin 12\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{33}{2}\pi$

Feedback: De periode is hier $\frac{\pi}{3}$, niet $\frac{\pi}{4}$ of $\frac{\pi}{2}$.