Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2018–2019

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Bereken alle vierdewortels van $-128 + 128\sqrt{3}i$.

/6

2. Zoek alle complexe nulpunten en de ontbinding in factoren van de veelterm

$$A\left(z\right) = 2z^3 - \left(4 - 7i\right) z^2 + \left(4 - 14i\right) z - 8$$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt{x}-3}$

(b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + 1}{\cos^2 3x}$

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)^{4x+5}$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 72$$

/6

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{(x+2)^{3\ln x}}{\sqrt{1+x^2}}$

/6

6. Zoek de extrema en de buigpunten van de functie $f(x) = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$.

   Heb je in het punt $(0,0)$ een buigpunt? Waarom (niet)?

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{-3x^2 - 24x - 18}{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2} dx$$

/6

8. Bereken door een goeie substitutie van derde klasse

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x-8}}$$

Vijf bonuspunten extra als je de einduitkomst kan schrijven met slechts één enkel wortelteken.

/6

9. Bewijs dat

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$$

Hint: vermenigvuldig het integrandum van deze oneigenlijke integraal zowel in noemer als teller met x en voer dan een goeie substitutie uit.

/6

10. Schets de poolkromme met parametervergelijking

$$r(\theta) = 4 + \cos 16\theta$$

en bereken de oppervlakte van de gegeven figuur. Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Bereken alle vierdewortels van $-128+128\sqrt{3}i$.
   $z^4 = -128+128\sqrt{3}i = 256\,\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)$
   $\Rightarrow z_k = 4\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)$
   $$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}+2i \\ z_1 = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3} = -2+2i\sqrt{3} \\ z_2 = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{6} = -2\sqrt{3}-2i \\ z_3 = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{3} = 2-2i\sqrt{3} \end{cases}$$
   Feedback: Alternatief (maar veel langer):
   $(x+yi)^2 = x^2-y^2+2ixy = -128+128\sqrt{3}i. \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-128 \\ xy = 64\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-128 \\ x^2\left(-y^2\right) = -12\,288 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow$
   $\lambda^2+128\lambda-12\,288=0 \Rightarrow \lambda\in\{64,-192\}$
   $\Rightarrow x+yi \in \left\{8+8\sqrt{3}i, -8-8\sqrt{3}i\right\}$
   Stel nu $(x+yi)^2 = x^2-y^2+2ixy = 8+8\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x^2\left(-y^2\right)=-48 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2-8\lambda-48=0 \Rightarrow \lambda\in\{12,-4\} \Rightarrow x+yi\in\left\{2\sqrt{3}+2i, -2\sqrt{3}-2i\right\}$
   Stel $(x+yi)^2 = x^2-y^2+2ixy = -8-8\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ xy=-4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ x^2\left(-y^2\right)=-48 \\ xy<0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2+8\lambda-48=0 \Rightarrow \lambda\in\{4,-12\} \Rightarrow x+yi\in\left\{2-2\sqrt{3}i, -2+2\sqrt{3}i\right\}$
   Nogal wat studenten zijn gestopt bij $\left\{8+8\sqrt{3}i, -8-8\sqrt{3}i\right\}$; maar dat zijn niet de vierdewortels maar de tweedewortels.

2. Zoek alle complexe nulpunten en de ontbinding in factoren van de veelterm $A(z) = 2z^3-(4-7i)z^2+(4-14i)z-8$

	2	$-4+7i$	$4-14i$	-8
2		4	$14i$	8
	2	$7i$	4	0

   $\Rightarrow A(z) = (z-2)\left(2z^2+7iz+4\right)$
   $\Delta = (7i)^2-4\cdot2\cdot4 = -81$
   $\Rightarrow z_{2,3} = \frac{-7i\pm9i}{4} = \frac{i}{2}$ of $\frac{-7i-9i}{4} = -4i$
   $\Rightarrow A(z) = (z-2)\,2\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+4i) = (z-2)(2z-i)(z+4i)$
   Feedback: Ik zou bijna zeggen, naar jaarlijkse gewoonte, vergeet een tiental studenten de KOPCOËFFICIËNT. Het antwoord is dus NIET $(z-2)\left(z-\frac{i}{2}\right)(z+4i)$! Enkelen schrijven zelfs de ontbinding in factoren gewoon niét. Leuk geprobeerd...

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{\sqrt{x}-3}$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x-1}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{(x-1-8)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt[3]{x-1}+4} = \dfrac{3+3}{4+4+4} = \dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + 1}{\cos^2 3x}$

Stel $y = x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + y$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+3y\right)+1}{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+3y\right)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1-\cos 3y}{\sin^2 3y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2\sin^2\dfrac{3y}{2}}{\sin^2 3y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2\sin^2\dfrac{3y}{2}}{4\sin^2\dfrac{3y}{2}\cos^2\dfrac{3y}{2}}$

$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{3y}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)^{4x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+3}{x^2}\right)^{4x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+3}{x^2}\right)^{\frac{2x+3}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2x+3}\cdot(4x+5)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)(4x+5)}{x^2}} = e^8$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} + 2\cdot 3^x = 72$$

Stel $y = 3^x$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{3} + 3y + 2y = 72$

$\Rightarrow y^2 + 15y - 216 = 0$

$\Rightarrow (y+24)(y-9)$

$\Rightarrow y \in \{-24, 9\}$

$\Rightarrow 3^x = 9$; de andere oplossing dient te worden verworpen

$\Rightarrow x = 2$

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{(x+2)^{3\ln x}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}\left(\dfrac{3}{x}\left((x+2)^{3\ln x}\right)\ln(x+2) + 3(x+2)^{3\ln x - 1}\ln x\right) - (x+2)^{3\ln x}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{\left(1+x^2\right)\left(\dfrac{3}{x}\left((x+2)^{3\ln x}\right)\ln(x+2) + 3(x+2)^{3\ln x - 1}\ln x\right) - x(x+2)^{3\ln x}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} \end{aligned}$$

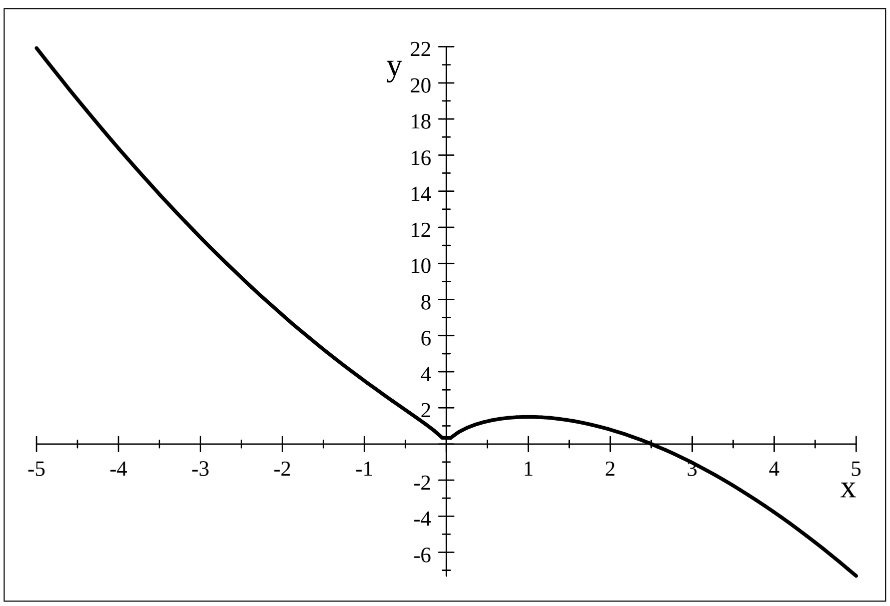
6. Zoek de extrema en de buigpunten van de functie $f(x) = x^{2/3}\left(\dfrac{5}{2} - x\right)$.

   Heb je in het punt $(0, 0)$ een buigpunt? Waarom (niet)?

   $f'(x) = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)$

   $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)\right) = -\dfrac{5(2x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$

x		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{5}{2}$		
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m(0)$	$\nearrow$	$M\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\smile$	$B\left(\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$	$\frown$		$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\frown$	$\frown$



   In 0 is de functie niet differentieerbaar, dus daar heb je zeker geen buigpunt.

   Feedback: "f gaat in 0 niet van convex naar concaaf of omgekeerd" is GEEN goede reden om geen buigpunt te hebben!

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{-3x^2 - 24x - 18}{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2} dx$$

$$\frac{-3x^2-24x-18}{2x^3+3x^2-3x-2} = \frac{-3x^2-24x-18}{(x-1)(x+2)(2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1}$$

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{-3x^2-24x-18}{(x+2)(2x+1)}\right|_{x=1} = -5 \\ B &= \left.\frac{-3x^2-24x-18}{(x-1)(2x+1)}\right|_{x=-2} = 2 \\ C &= \left.\frac{-3x^2-24x-18}{(x-1)(x+2)}\right|_{x=-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{-3x^2-24x-18}{2x^3+3x^2-3x-2} = -\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{2x+1}$
$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{-3x^2-24x-18}{2x^3+3x^2-3x-2}dx = -5\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+2} + 3\int \frac{dx}{2x+1}$
$= -5\ln|x-1| + 2\ln|x+2| + \dfrac{3}{2}\ln|2x+1| + c$

8. Bereken door een goeie substitutie van derde klasse

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x-8}}$$

Vijf bonuspunten extra als je de einduitkomst kan schrijven met slechts één enkel wortelteken.
Stel

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-2x-8} &= \sqrt{(x+2)(x-4)} = (x+2)\,t \Rightarrow x-4 = (x+2)\,t^2 \\ &\Rightarrow x = \frac{2t^2+4}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{12tdt}{(1-t^2)^2} \\ &\Rightarrow x-1 = \frac{2t^2+4}{1-t^2} - 1 = \frac{3(t^2+1)}{1-t^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2-2x-8} = (x+2)\,t = \frac{6t}{1-t^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{\frac{12tdt}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{3(t^2+1)}{1-t^2}\right)^2 \frac{6t}{1-t^2}} = \int \frac{2(1-t^2)}{9(t^2+1)^2}dt = \int \frac{2(2-1-t^2)}{9(t^2+1)^2}dt = \int \frac{4}{9(t^2+1)^2}dt - \int \frac{2}{9(t^2+1)}dt$
$= \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Bgtan} t + \dfrac{t}{2(t^2+1)}\right) - \dfrac{2}{9}\operatorname{Bgtan} t + c = \dfrac{2t}{9(t^2+1)} + c$
$= \dfrac{2\sqrt{\dfrac{x-4}{x+2}}}{9\left(\dfrac{x-4}{x+2}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{(x-4)(x+2)}}{9(x-1)} + c = \dfrac{\sqrt{x^2-2x-8}}{9(x-1)} + c$

9. Bewijs dat

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3}$$

Hint: vermenigvuldig het integrandum van deze oneigenlijke integraal zowel in noemer als teller met x en voer dan een goeie substitutie uit.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

Stel $t^2 = x^2 - 1 \Rightarrow tdt = xdx$ en $x \longrightarrow 1+ \Rightarrow t \longrightarrow 0+$ en $x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow ... = \lim_{b\to 0+} \int_a^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b\to 0+} [\text{Bgtan}\, t]_b^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

10. Schets de poolkromme met parametervergelijking

$$r(\theta) = 4 + \cos 16\theta$$

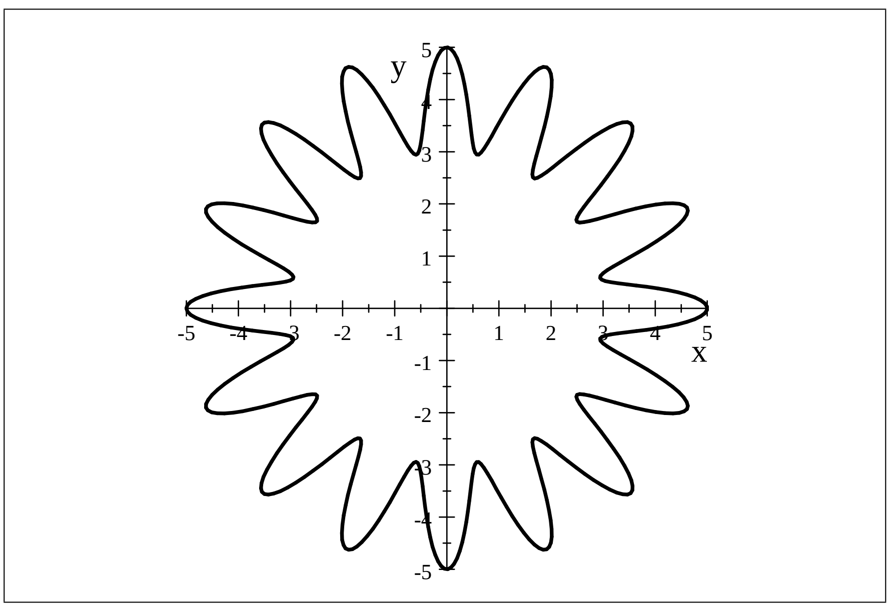
en bereken de oppervlakte van de gegeven figuur. Gebruik zo veel mogelijk de symmetrie van de tekening.

Domein $= \mathbb{R}$, periode $= \frac{\pi}{8} \Rightarrow$ Beperkt domein $= \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$

$r(\theta) = 4 + \cos 16\theta = 0$ kan niet

$r'(\theta) = -\sin 16\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\frac{\pi}{16}$

	0		$\frac{\pi}{16}$		$\frac{\pi}{8}$
r					
r'	0	$-$	0	$+$	0
r	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M
	5		3		5



$$S = 32 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{16}} (4 + \cos 16\theta)^2 \, d\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{16}} (4 + \cos 16\theta)^2 \, d\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{16}} \left(16 + 8\cos 16\theta + \cos^2 16\theta\right) d\theta$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{16}} \left(16 + 8\cos 16\theta + \frac{1+\cos 32\theta}{2}\right) d\theta = 16\int_0^{\frac{\pi}{16}} \left(\frac{33}{2} + 8\cos 16\theta + \frac{\cos 32\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (264 + 128\cos 16\theta + 8\cos 32\theta) = \left[264\theta + 8\sin 16\theta + \frac{1}{4}\sin 32\theta\right]_0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{33\pi}{2}$$