Matrixrekenen

Werner Peeters

1. Inleidende terminologie

- Wat zijn groepen?
- Wat zijn vectorruimten?
- Wat zijn lineaire combinaties?
- Wat is lineaire afhankelijkheid
- Wat is voortbrengendheid
- Wat is een basis?
- Wat zijn lineaire vergelijkingen?

1.1. Groep

= structuur + optelling

$$
\begin{array}{ll}
(V1) & \forall x, y \in \mathcal{V} : x + y \in \mathcal{V} \\
(V2) & \forall x, y, z \in \mathcal{V} : (x + y) + z = x + (y + z) \\
(V3) & \exists! 0 \in \mathcal{V}, \forall x \in \mathcal{V} : 0 + x = x = x + 0 \\
(V4) & \forall x \in \mathcal{V} : \exists! \, (-x) \in \mathcal{V} : x + (-x) = 0 = (-x) + x
\end{array}
$$

1.1. Groep

= structuur + optelling

$$
\begin{array}{ll}
(V1) & \forall x, y \in \mathcal{V} : x + y \in \mathcal{V} \\
(V2) & \forall x, y, z \in \mathcal{V} : (x + y) + z = x + (y + z) \\
(V3) & \exists ! 0 \in \mathcal{V}, \forall x \in \mathcal{V} : 0 + x = x = x + 0 \\
(V4) & \forall x \in \mathcal{V} : \exists ! \, (-x) \in \mathcal{V} : x + (-x) = 0 = (-x) + x
\end{array}
$$

Voorbeelden:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ wel
2. $(\mathbb{N}, +)$ niet
3. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ook niet

1.2. (reële) Vectorruimte

= structuur + optelling + scalaire vermenigvuldiging

$(V1 - V5)$	$(\mathcal{V}, +)$ is een commutatieve groep
$(V6)$	$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{V} : \lambda x \in \mathcal{V}$
$(V7)$	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{V} : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$
$(V8)$	$\exists! 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{V} : 1x = x = x1$
$(V9a)$	$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{V} : (\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
$(V9b)$	$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{V} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

1.2. (reële) Vectorruimte

= structuur + optelling + scalaire vermenigvuldiging

$$\begin{array}{ll}
(V1-V5) & (\mathcal{V},+) \text{ is een commutatieve groep} \\
(V6) & \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{V}:\lambda x\in\mathcal{V} \\
(V7) & \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{V}:\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \\
(V8) & \exists!1\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{V}:1x=x=x1 \\
(V9a) & \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in\mathcal{V}:(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \\
(V9b) & \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x,y\in\mathcal{V}:\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y
\end{array}$$

Voorbeelden:

1. $\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^2,+\right)$ met $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ en $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$
2. $\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^3,+\right)$ analoog
3. $(\mathbb{R},\mathbb{R}[x],+)$ met

$$\begin{array}{cllllll}
 & (a_nx^n & +a_{n-1}x^{n-1} & +... & +a_1x & +a_0) \\
+ & (b_nx^n & +b_{n-1}x^{n-1} & +... & +b_1x & +b_0) \\
\hline
= & (a_n+b_n)x^n & +(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} & +... & +(a_1+b_1)x & +(a_0+b_0)
\end{array}$$

en

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right) \\
= & (\lambda a_n)x^n+(\lambda a_{n-1})x^{n-1}+...+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)
\end{array}$$

1.3. Lineaire combinaties

= al wat ik een vectorruimte “gegenereerd” kan worden

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{v_n}$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \longrightarrow$ *coëfficiënten* van de lineaire combinatie

1.3. Lineaire combinaties

= al wat ik een vectorruimte “gegenereerd” kan worden

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \longrightarrow$ *coëfficiënten* van de lineaire combinatie

Voorbeelden:

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right)$: $5\,(1,2) + 3\,(-1,6) - 4\,(0,2) = (2,20)$
2. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}\,[x]\,, +)$: $3\left(x^2 - x\right) + 4\left(x - \dfrac{1}{4}\right) - 8\left(x^2 + 1\right) + \dfrac{3}{2}\left(2x^2 - 4x + 1\right) + 0\,(x-1) = -2x^2 - x - \dfrac{15}{2}$

1.4. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair afhankelijk* $\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{v_k} = \sum_{j \neq k = 1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$

  $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, *niet allemaal gelijk aan* $0 : \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{o}$
- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair onafhankelijk* $\Leftrightarrow$ niet lineair afhankelijk

1.4. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair afhankelijk* $\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{v_k} = \sum_{j \neq k = 1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$

  $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, *niet allemaal gelijk aan* $0 : \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{o}$
- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair onafhankelijk* $\Leftrightarrow$ niet lineair afhankelijk

Voorbeelden

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right)$:
   (a) $(1, 0)$ en $(3, 0)$ LA want $(3, 0) = 3\,(1, 0)$

   (b) $(1, 0)$ en $(0, 1)$ LO want $(0, 1) \neq \lambda\,(1, 0)$

1.4. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair afhankelijk* $\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{v_k} = \sum_{j \neq k = 1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$

  $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$*, niet allemaal gelijk aan* $0 : \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{o}$
- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair onafhankelijk* $\Leftrightarrow$ niet lineair afhankelijk

Voorbeelden

1. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +)$:
   (a) $(1,0)$ en $(3,0)$ LA want $(3,0) = 3(1,0)$

   (b) $(1,0)$ en $(0,1)$ LO want $(0,1) \neq \lambda(1,0)$
2. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$:
   (a) $(1,0,0)$, $(0,5,0)$ en $(2,3,0)$ LA want $(2,3,0) = 2(1,0,0) + \frac{3}{5}(0,5,0)$.

   (b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ LO want $(0,0,1) \neq \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$

1.4. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair afhankelijk* $\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{v_k} = \sum\limits_{j \neq k=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$

  $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, *niet allemaal gelijk aan* $0 : \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{o}$
- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair onafhankelijk* $\Leftrightarrow$ niet lineair afhankelijk

Voorbeelden

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right)$:
   (a) $(1,0)$ en $(3,0)$ LA want $(3,0) = 3\,(1,0)$
   (b) $(1,0)$ en $(0,1)$ LO want $(0,1) \neq \lambda\,(1,0)$
2. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +\right)$:
   (a) $(1,0,0)$, $(0,5,0)$ en $(2,3,0)$ LA want $(2,3,0) = 2\,(1,0,0) + \frac{3}{5}\,(0,5,0)$.
   (b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ LO want $(0,0,1) \neq \lambda\,(1,0,0) + \mu\,(0,1,0)$

1.5. Voortbrengendheid

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *voortbrengend* $\Leftrightarrow \forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{V} : \overrightarrow{v}\ LC$ van $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$.
Verzameling van alle LC van $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n} \rangle$

1.4. Lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair afhankelijk* $\Leftrightarrow \exists \overrightarrow{v_k} = \sum_{j \neq k=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}$

  $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, *niet allemaal gelijk aan* $0 : \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{o}$

- $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *lineair onafhankelijk* $\Leftrightarrow$ niet lineair afhankelijk

Voorbeelden

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right)$:
   (a) $(1,0)$ en $(3,0)$ LA want $(3,0) = 3\,(1,0)$

   (b) $(1,0)$ en $(0,1)$ LO want $(0,1) \neq \lambda\,(1,0)$

2. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +\right)$:
   (a) $(1,0,0)$, $(0,5,0)$ en $(2,3,0)$ LA want $(2,3,0) = 2\,(1,0,0) + \frac{3}{5}\,(0,5,0)$.

   (b) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ LO want $(0,0,1) \neq \lambda\,(1,0,0) + \mu\,(0,1,0)$

1.5. Voortbrengendheid

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *voortbrengend* $\Leftrightarrow \forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{V} : \overrightarrow{v}\ LC$ van $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$.
Verzameling van alle LC van $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n} \rangle$
Voorbeeld: $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +\right)$:
$\langle (1,0,0)\,, (0,1,0) \rangle = \{(\lambda, \mu, 0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

1.6. Basis

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *basis* $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}\ LO +$ voortbrengend

Alle basissen tellen even veel elementen, dit noemen we de *dimensie*.

1.6. Basis

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *basis* $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}\ LO +$ voortbrengend

Alle basissen tellen even veel elementen, dit noemen we de *dimensie*.

Voorbeelden

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right):$
   (a) $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ wel voortbrengend, maar niet LO
   (b) $\{(3,2)\}$ wel LO maar niet voortbrengend
   (c) $\{(1,0), (0,1)\}$ basis $\longrightarrow \dim = 2$

1.6. Basis

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ *basis* $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}\ LO +$ voortbrengend

Alle basissen tellen even veel elementen, dit noemen we de *dimensie*.

Voorbeelden

1. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +\right)$:
   (a) $\{(1,0)\,,(0,1)\,,(1,1)\}$ wel voortbrengend, maar niet LO
   (b) $\{(3,2)\}$ wel LO maar niet voortbrengend
   (c) $\{(1,0)\,,(0,1)\}$ basis $\longrightarrow \dim = 2$
2. $\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +\right)$
   (a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ wel voortbrengend, maar niet LO
   (b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ wel LO maar niet voortbrengend
   (c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ basis $\longrightarrow \dim = 4$
   (d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ook basis

1.7. Lineaire vergelijking

= vergelijking van de gedaante $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$
$\{x_i : i \in \{1, ..., n\}\} \longrightarrow$ *onbekenden*. (benaming onbelangrijk)
Als $b = 0 \longrightarrow$ *homogene* vergelijking
Een *oplossing* van een vergelijking = *een* waarde $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt
De *oplossing* van een vergelijking = *alle* waarden $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt

1.7. Lineaire vergelijking

= vergelijking van de gedaante $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$
$\{x_i : i \in \{1, ..., n\}\} \longrightarrow$ *onbekenden*. (benaming onbelangrijk)
Als $b = 0 \longrightarrow$ *homogene* vergelijking
Een *oplossing* van een vergelijking = *een* waarde $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt
De *oplossing* van een vergelijking = *alle* waarden $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt

Voorbeelden

1. $3x + 2y = 6$
   (a) oplossingen o.a.: $(2, 0), (0, 3), (4, -3)\,(-2, 6), ...$
   (b) *de oplossing:* $(x, y) = (2, 0) + \lambda\,(-2, 3)$ met $\lambda \in \mathbb{R}$

1.7. Lineaire vergelijking

= vergelijking van de gedaante $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$
$\{x_i : i \in \{1, ..., n\}\} \longrightarrow$ *onbekenden.* (benaming onbelangrijk)
Als $b = 0 \longrightarrow$ *homogene* vergelijking
Een *oplossing* van een vergelijking = *een* waarde $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt
De *oplossing* van een vergelijking = *alle* waarden $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ zodanig dat de vergelijking klopt

Voorbeelden

1. $3x + 2y = 6$
   (a) oplossingen o.a.: $(2, 0), (0, 3), (4, -3)\,(-2, 6), ...$
   (b) *de oplossing:* $(x, y) = (2, 0) + \lambda(-2, 3)$ met $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $x + 2y - 3z = 0$
   (a) oplossingen o.a.: $(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, -1, 0), (3, 0, 1), ...$
   (b) *de* oplossing: $(x, y, z) = \lambda(2, -1, 0) + \mu(3, 0, 1)$ met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   (bijvoorbeeld: $(1, 1, 1) = (3, 0, 1) - (2, -1, 0)$)

Stelling: *Een lineaire vergelijking heeft nul, één of oneindig veel oplossingen.*
Voorbeelden

1. $5x - 3 = 0$ heeft als enige oplossing $x = \frac{3}{5}$.

Stelling: *Een lineaire vergelijking heeft nul, één of oneindig veel oplossingen.*
Voorbeelden

1. $5x - 3 = 0$ heeft als enige oplossing $x = \frac{3}{5}$.
2. $x - \frac{3}{2}(7x - 8) + (2x + 1) = -6(x - 2) - \frac{3}{2}x + 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ heeft als triviale oplossing $x \in \mathbb{R}$.

Stelling: *Een lineaire vergelijking heeft nul, één of oneindig veel oplossingen.*
Voorbeelden

1. $5x - 3 = 0$ heeft als enige oplossing $x = \frac{3}{5}$.
2. $x - \frac{3}{2}(7x - 8) + (2x + 1) = -6(x - 2) - \frac{3}{2}x + 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ heeft als triviale oplossing $x \in \mathbb{R}$.
3. $\frac{3x - 5}{2} + \frac{2(x + 1)}{3} = \frac{5(x + 1)}{4} + \frac{11}{12}x - 3 \Leftrightarrow 0x = 1$ heeft geen oplossingen (vergelijking vals)

2. mxn–stelsels

2.1. Algemene definities

Een *stelsel lineaire vergelijkingen met* m *vergelijkingen en* n *onbekenden* is een stelsel van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{cases}$$

$x_i \longrightarrow$ *onbekenden*

a_i uit de rechterleden $\longrightarrow$ *bekende/constante termen*

2. mxn–stelsels

2.1. Algemene definities

Een *stelsel lineaire vergelijkingen met* m *vergelijkingen en* n *onbekenden* is een stelsel van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{cases}$$

$x_i \longrightarrow$ *onbekenden*

a_i uit de rechterleden $\longrightarrow$ *bekende/constante termen*

2.2. Een oplossing van een stelsel

= een rij $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zodat alle vergelijkingen kloppen

2. mxn–stelsels

2.1. Algemene definities

Een *stelsel lineaire vergelijkingen met* m *vergelijkingen en* n *onbekenden* is een stelsel van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{cases}$$

$x_i \longrightarrow$ *onbekenden*

a_i uit de rechterleden $\longrightarrow$ *bekende/constante termen*

2.2. Een oplossing van een stelsel

= een rij $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zodat alle vergelijkingen kloppen

2.3. De oplossing van een stelsel

= alle mogelijke rijen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zodat alle vergelijkingen kloppen; notatie: Ω

2. mxn–stelsels

2.1. Algemene definities

Een *stelsel lineaire vergelijkingen met* m *vergelijkingen en* n *onbekenden* is een stelsel van de vorm

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & a_m \end{cases}$$

$x_i \longrightarrow$ *onbekenden*

a_i uit de rechterleden $\longrightarrow$ *bekende/constante termen*

2.2. Een oplossing van een stelsel

= een rij $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zodat alle vergelijkingen kloppen

2.3. De oplossing van een stelsel

= alle mogelijke rijen $(x_1, x_2, ..., x_n)$ zodat alle vergelijkingen kloppen; notatie: Ω

Voorbeeld: $\begin{cases} x + 2y + z & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (0, 1, 0)$ is een oplossing

$\Rightarrow (2, 0, 0)$ is géén oplossing

$\Rightarrow$ *de* oplossing Ω = ?

2.4. Bijzondere stelsels

$\forall a_i = 0 \longrightarrow$ *homogeen*

Een homogeen stelsel bevat steelds de nulvector $(0, 0, ..., 0)$ als oplossing. Deze noemt men de *nulo-plossing*.

2.4. Bijzondere stelsels

$\forall a_i = 0 \longrightarrow$ *homogeen*

Een homogeen stelsel bevat steelds de nulvector $(0, 0, ..., 0)$ als oplossing. Deze noemt men de *nuloplossing*.

$\Omega = \mathbb{R}^n \longrightarrow$ triviaal stelsel

$\Omega = \emptyset \longrightarrow$ strijdig stelsel / overbepaald stelsel

2.4. Bijzondere stelsels

$\forall a_i = 0 \longrightarrow$ *homogeen*

Een homogeen stelsel bevat steelds de nulvector $(0, 0, ..., 0)$ als oplossing. Deze noemt men de *nuloplossing*.

$\Omega = \mathbb{R}^n \longrightarrow$ triviaal stelsel

$\Omega = \emptyset \longrightarrow$ strijdig stelsel / overbepaald stelsel

Voorbeeld:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ is vals.

2.4. Bijzondere stelsels

$\forall a_i = 0 \longrightarrow$ *homogeen*

Een homogeen stelsel bevat steelds de nulvector $(0, 0, ..., 0)$ als oplossing. Deze noemt men de *nuloplossing*.

$\Omega = \mathbb{R}^n \longrightarrow$ triviaal stelsel

$\Omega = \emptyset \longrightarrow$ strijdig stelsel / overbepaald stelsel

Voorbeeld:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ is vals.

Ω bevat nog parameters $\longrightarrow$ onderbepaald stelsel

2.4. Bijzondere stelsels

$\forall a_i = 0 \longrightarrow$ *homogeen*

Een homogeen stelsel bevat steelds de nulvector $(0, 0, ..., 0)$ als oplossing. Deze noemt men de *nuloplossing*.

$\Omega = \mathbb{R}^n \longrightarrow$ triviaal stelsel

$\Omega = \emptyset \longrightarrow$ strijdig stelsel / overbepaald stelsel

Voorbeeld:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ is vals.

Ω bevat nog parameters $\longrightarrow$ onderbepaald stelsel

Doel: *stelsel oplossen* = oplossing Ω noteren als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ ... \\ h_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ ... \\ h_{2n} \end{pmatrix} + ... + \lambda_k \begin{pmatrix} h_{k1} \\ h_{k2} \\ ... \\ h_{kn} \end{pmatrix}$$

$(a_1, a_2, ..., a_n) \longrightarrow$ een oplossing van het stelsel is

$\lambda_j \in \mathbb{R}$

$\{(h_{j1}, h_{j2}, ..., h_{jn})\}_{j=1}^{k} \longrightarrow$ LO oplossingen van het geassocieerde homogene stelsel

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x - 3y & = & 2 \\ -2x + 5y & = & -6 \end{cases}$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - 3y & = & 2 \\ -2x + 5y & = & -6 \end{cases} \quad \underset{\Leftrightarrow}{(V_3 = V_1 + V_2)} \quad \begin{cases} x - 3y & = & 2 \\ -2x + 5y & = & -6 \\ -x + 2y & = & -4 \end{cases}$$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - 3y & = & 2 \\ -2x + 5y & = & -6 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 + V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 3y & = & 2 \\ -2x + 5y & = & -6 \\ -x + 2y & = & -4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (8, 2)$$

2. $$\begin{cases} 3x + 4y - z & = & -1 \\ x + y + z & = & 4 \\ x + 2y - 3z & = & -9 \end{cases}$$

2.5. Stelling
Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - 3y &= 2 \\ -2x + 5y &= -6 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 + V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 3y &= 2 \\ -2x + 5y &= -6 \\ -x + 2y &= -4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (8, 2)$$

2. $$\begin{cases} 3x + 4y - z &= -1 \\ x + y + z &= 4 \\ x + 2y - 3z &= -9 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 - 2V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x + 4y - z &= -1 \\ x + y + z &= 4 \end{cases}$$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $\left\{\begin{array}{lcr} x-3y & = & 2 \\ -2x+5y & = & -6 \end{array}\right. \overset{(V_3=V_1+V_2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcr} x-3y & = & 2 \\ -2x+5y & = & -6 \\ -x+2y & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=(8,2)$

2. $\left\{\begin{array}{lcr} 3x+4y-z & = & -1 \\ x+y+z & = & 4 \\ x+2y-3z & = & -9 \end{array}\right. \overset{(V_3=V_1-2V_2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcr} 3x+4y-z & = & -1 \\ x+y+z & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z)=(17,-13,0)+\lambda\,(-5,4,1)$

3. $\left\{\begin{array}{lcr} x+2y+3z & = & 4 \\ x+y+z & = & 2 \\ y+2z & = & 3 \end{array}\right.$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - 3y &= 2 \\ -2x + 5y &= -6 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 + V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - 3y &= 2 \\ -2x + 5y &= -6 \\ -x + 2y &= -4 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (8, 2)$$

2. $$\begin{cases} 3x + 4y - z &= -1 \\ x + y + z &= 4 \\ x + 2y - 3z &= -9 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 - 2V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x + 4y - z &= -1 \\ x + y + z &= 4 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (17, -13, 0) + \lambda\,(-5, 4, 1)$$

3. $$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ x + y + z &= 2 \\ y + 2z &= 3 \end{cases} \overset{V_1 - V_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \\ y + 2z &= 3 \end{cases}$$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x-3y &= 2 \\ -2x+5y &= -6 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 + V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y &= 2 \\ -2x+5y &= -6 \\ -x+2y &= -4 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (8,2)$

2. $\begin{cases} 3x+4y-z &= -1 \\ x+y+z &= 4 \\ x+2y-3z &= -9 \end{cases} \overset{(V_3 = V_1 - 2V_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+4y-z &= -1 \\ x+y+z &= 4 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (17,-13,0) + \lambda\,(-5,4,1)$

3. $\begin{cases} x+2y+3z &= 4 \\ x+y+z &= 2 \\ y+2z &= 3 \end{cases} \overset{V_1 - V_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y+2z &= 2 \\ x+y+z &= 2 \\ y+2z &= 3 \end{cases} \overset{V_3 - V_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y+2z &= 2 \\ x+y+z &= 2 \\ 0y+0z &= 1 \end{cases}$

2.5. Stelling

Het toevoegen of weglaten van een vergelijking aan of van een stelsel die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, verandert de oplossingenverzameling niet. In het bijzonder

- *mag elke triviale vergelijking worden weggelaten.*
- *mag men bij een vergelijking een veelvoud van een willekeurige andere vergelijking bijtellen.*
- *is een stelsel met een valse vergelijking in ineens een vals stelsel.*

Voorbeelden

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x-3y & = & 2 \\ -2x+5y & = & -6 \end{array}\right. \overset{(V_3=V_1+V_2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x-3y & = & 2 \\ -2x+5y & = & -6 \\ -x+2y & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=(8,2)$

2. $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+4y-z & = & -1 \\ x+y+z & = & 4 \\ x+2y-3z & = & -9 \end{array}\right. \overset{(V_3=V_1-2V_2)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} 3x+4y-z & = & -1 \\ x+y+z & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y,z)=(17,-13,0)+\lambda\,(-5,4,1)$

3. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+3z & = & 4 \\ x+y+z & = & 2 \\ y+2z & = & 3 \end{array}\right. \overset{V_1-V_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} y+2z & = & 2 \\ x+y+z & = & 2 \\ y+2z & = & 3 \end{array}\right. \overset{V_3-V_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} y+2z & = & 2 \\ x+y+z & = & 2 \\ 0y+0z & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ vals

3. Matrices

3.1. Algemene definitie

Doel: o.a. representeren van stelsels zonder de onbekende te moeten schrijven

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

3. Matrices

3.1. Algemene definitie

Doel: o.a. representeren van stelsels zonder de onbekende te moeten schrijven

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}, \begin{cases} 7\alpha - 3\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 8 \end{cases}$$

3. Matrices

3.1. Algemene definitie

Doel: o.a. representeren van stelsels zonder de onbekende te moeten schrijven

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}, \begin{cases} 7\alpha - 3\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 8 \end{cases}, \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Matrices

3.1. Algemene definitie

Doel: o.a. representeren van stelsels zonder de onbekende te moeten schrijven

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ x + 3y = 8 \end{cases}, \begin{cases} 7\alpha - 3\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 8 \end{cases}, \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Definitie $m \times n$*–matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i\in\{1,\ldots,m\},j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$m \times n \longrightarrow$ *karakteristiek/orde* van de matrix.

3.2 Enkele bijzondere matrices

- $m = 1 \longrightarrow$ rijmatrices
- $n = 1 \longrightarrow$ kolommatrices
- Nulmatrix $O_{m\times n}$, vb. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
  = neutraal element voor de optelling

3.2 Enkele bijzondere matrices

- $m = 1 \longrightarrow$ rijmatrices
- $n = 1 \longrightarrow$ kolommatrices
- Nulmatrix $O_{m\times n}$, vb. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
  = neutraal element voor de optelling
-

$$\begin{tikzcd}
 & m = n \longrightarrow \text{vierkante matrices} & \\
\text{bovendriehoeksmatrices} \arrow[ur] & & \text{onderdriehoeksmatrices} \arrow[ul] \\
 & \text{diagonaalmatrices} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \text{scalaire matrices} \arrow[u] & \\
 & \text{eenheidsmatrices} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

  – $\forall i \in \{1, ...n\} : \begin{cases} a_{ii} \longrightarrow \textit{hoofddiagonaal} \\ a_{i(n-i+1)} \longrightarrow \textit{nevendiagonaal} \end{cases}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ldots \right\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ldots \right\} & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
\left\{ \begin{pmatrix} 8 & -9 & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} & & \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & \pi & 2 \end{pmatrix} \right\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ldots \right\} & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
\left\{ \begin{pmatrix} 8 & -9 & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} & & & & \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & \pi & 2 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ldots \right\} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}, \ldots \right\} & \\
\nearrow & & \nwarrow \\
\left\{\begin{pmatrix}8&-9&\sqrt{3}\\0&5&-\sqrt{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\} & & \left\{\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&6&0\\5&\pi&2\end{pmatrix}\right\}\\
\nwarrow & & \nearrow \\
 & \left\{ \begin{pmatrix}-2&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&-2\end{pmatrix}, \ldots\right\} & \\
 & \uparrow & \\
 & \left\{ \begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \ldots\right\} &
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \ldots \right\} & \\
\left\{ \begin{pmatrix} 8 & -9 & \sqrt{3} \\ 0 & 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \arrow[ur] & & \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 5 & \pi & 2 \end{pmatrix} \right\} \arrow[ul] \\
 & \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ldots \right\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ldots \right\} \arrow[u] & \\
 & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

3.2 Enkele bijzondere matrices (cont 'd)

- $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow$ getransponeerde $A^\tau = (a_{ij})_{ji} \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$\text{vb. } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\tau = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- $A^\tau = A \longrightarrow$ symmetrisch, vb. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^\tau = -A \longrightarrow$ antisymmetrisch, vb.$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte..

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte...

$\forall A = (a_{ij})_{ij}\,, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Gelijkheid:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\}\,, \forall j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte...

$\forall A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Gelijkheid:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

- Som:

$$\forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte...

$\forall A = (a_{ij})_{ij}\,, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Gelijkheid:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\}\,, \forall j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

- Som:

$$\forall i \in \{1, ..., m\}\,, \forall j \in \{1, ..., n\} : (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Scalaire vermenigvuldiging:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, ..., m\}\,, \forall j \in \{1, ..., n\} : (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ **is een vectorruimte...**

$\forall A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Gelijkheid:

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = b_{ij}$$

- Som:

$$\forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Scalaire vermenigvuldiging:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\} : (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Matrices van een verschillende karakteristiek kunnen nooit aan elkaar gelijk zijn!

$$\dim\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +\right) = m \cdot n$$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. Tegengestelde matrix van $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

5. $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. $(-2) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ kan niet

4. Tegengestelde matrix van $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ is $-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

6. $(-2) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte...

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ is een vectorruimte...
... maar ook meer!

3.3. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m\times n}, +)$ **is een vectorruimte...**

... maar ook meer!

3.4. (inwendige) Matrixvermenigvuldiging

$\forall A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B = (b_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \exists C = (c_{ik})_{ik} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ als volgt:

$$\forall i \in \{1, ..., m\}, \forall k \in \{1, ..., p\} : c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$\Rightarrow$ Het element op de i–de rij en de k–de kolom

= de som van de produkten van de j elementen op de i–de rij van A en de j–de kolom van B.

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \cdot ... + \mathbf{3} \cdot ... & \mathbf{2} \cdot ... + \mathbf{3} \cdot ... \\ \mathbf{1} \cdot ... + \mathbf{2} \cdot ... & \mathbf{1} \cdot ... + \mathbf{2} \cdot ... \end{pmatrix}$$

Voorbeelden:

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{4} + 3 \cdot \mathbf{6} & 2 \cdot \mathbf{5} + 3 \cdot (-\mathbf{1}) \\ 1 \cdot \mathbf{4} + 2 \cdot \mathbf{6} & 1 \cdot \mathbf{5} + 2 \cdot (-\mathbf{1}) \end{pmatrix}$$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 6 & 2\cdot 5 + 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 4 + 2\cdot 6 & 1\cdot 5 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot 5 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + (-1)\cdot 5 \\ 0\cdot 4 + 6\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 6\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 6\cdot 0 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bestaat niet

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Voorbeelden:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -5 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bestaat niet

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (9)$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ De matrixvermenigvuldiging is dus *niet commutatief*.

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging

1. Inwendig

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p} : A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging

1. Inwendig

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p} : A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

2. Associatief

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \forall C \in \mathbb{R}^{p\times q} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging

1. Inwendig

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p} : A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

2. Associatief

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \forall C \in \mathbb{R}^{p\times q} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Distributief t.o.v. +

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B, C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \; A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (2) & \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \; (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{array}$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging

1. Inwendig

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p} : A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

2. Associatief

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \forall C \in \mathbb{R}^{p\times q} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Distributief t.o.v. +

$$\begin{aligned} &(1)\ \ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B, C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \ \ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ &(2)\ \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \ \ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{aligned}$$

4. Eenheidsmatrix = neutraal element *(per karakteristiek!)*

$$\exists! I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging

1. Inwendig

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p} : A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

2. Associatief

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \forall C \in \mathbb{R}^{p\times q} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Distributief t.o.v. +

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall B, C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \; A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (2) & \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \forall C \in \mathbb{R}^{n\times p} : \; (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{array}$$

4. Eenheidsmatrix = neutraal element *(per karakteristiek!)*

$$\exists! I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

... maar $AB \neq BA$ (of toch niet altijd...)

$\Rightarrow$ $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ is een niet–commutatieve ring

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging (cont 'd)

5. Nulmatrix = opslorpend element

$$\exists! O_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot O_{n\times n} = O_{n\times n} = O_{n\times n} \cdot A$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging (cont 'd)

5. Nulmatrix = opslorpend element

$$\exists! O_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot O_{n\times n} = O_{n\times n} = O_{n\times n} \cdot A$$

6. Gemengde associativiteit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

3.5. Eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging (cont ’d)

5. Nulmatrix = opslorpend element

$$\exists! O_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot O_{n\times n} = O_{n\times n} = O_{n\times n} \cdot A$$

6. Gemengde associativiteit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$$

7. Transpositiewet

$$(A \cdot B)^{\tau} = B^{\tau} \cdot A^{\tau}$$

3.6. Nuldelers

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *nuldelers* $\Leftrightarrow A \cdot B = O$ maar $A \neq O$ en $B \neq O$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3.6. Nuldelers

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *nuldelers* $\Leftrightarrow A \cdot B = O$ maar $A \neq O$ en $B \neq O$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

maar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Gevolg: de schrapwet:

$$AB = AC \Rightarrow A = O \text{ of } B = C$$

geldt NIET!

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.7. Macht van een matrix

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ factoren}}$$

Voorbeeld

Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix} \\ A^4 = \begin{pmatrix} -16 & 55 \\ -55 & 39 \end{pmatrix} \\ \quad ... \end{cases}$

3.7. Macht van een matrix

$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall n \in \mathbb{N}_0 :$

$$A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ factoren}}$$

Voorbeeld

$$\text{Stel } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix} \\ A^4 = \begin{pmatrix} -16 & 55 \\ -55 & 39 \end{pmatrix} \\ \quad ... \end{cases}$$

A *nilpotent* $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}_0 : A^p = 0$ (*index*)

Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A is dus nilpotent met index 2.

Is er zoiets als een symmetrisch element
voor matrixvermenigvuldiging?

Is er zoiets als een symmetrisch element
voor matrixvermenigvuldiging?

$\Rightarrow$ Antwoord: soms wel, soms niet!

Is er zoiets als een symmetrisch element voor matrixvermenigvuldiging?

$\Rightarrow$ Antwoord: soms wel, soms niet!

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, want

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Is er zoiets als een symmetrisch element voor matrixvermenigvuldiging?

$\Rightarrow$ Antwoord: soms wel, soms niet!

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, want

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, want

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Is er zoiets als een symmetrisch element voor matrixvermenigvuldiging?

$\Rightarrow$ Antwoord: soms wel, soms niet!
Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, want

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, want

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. De nulmatrix $O_{n\times n}$ heeft geen inverse want is opslorpend.

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n \times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lineair stelsel met 4 onbekenden en 4 vergelijkingen.

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lineair stelsel met 4 onbekenden en 4 vergelijkingen.

$\Rightarrow$ Oplossing $(a, b, c, d) = (2, -3, -1, 2)$ (maar die komt niet uit de lucht vallen!)

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lineair stelsel met 4 onbekenden en 4 vergelijkingen.
$\Rightarrow$ Oplossing $(a, b, c, d) = (2, -3, -1, 2)$ (maar die komt niet uit de lucht vallen!)

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : B \cdot B^{-1} = I_2$

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lineair stelsel met 4 onbekenden en 4 vergelijkingen.
$\Rightarrow$ Oplossing $(a, b, c, d) = (2, -3, -1, 2)$ (maar die komt niet uit de lucht vallen!)

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : B \cdot B^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4c & = & 1 \\ 2b+4d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

Voorlopig enkel een lange methode...

1. Stel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \cdot A^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3c & = & 1 \\ 2b+3d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lineair stelsel met 4 onbekenden en 4 vergelijkingen.
$\Rightarrow$ Oplossing $(a, b, c, d) = (2, -3, -1, 2)$ (maar die komt niet uit de lucht vallen!)

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\exists B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : B \cdot B^{-1} = I_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4c & = & 1 \\ 2b+4d & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Strijdig stelsel
$\Rightarrow$ B is dus singulier.

3.9. Eigenschappen van reguliere matrices

1. Inwendigheid

$$\forall A, B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

3.9. Eigenschappen van reguliere matrices

1. Inwendigheid

$$\forall A, B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

2. Associativiteit

$$\forall A, B, C \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3.9. Eigenschappen van reguliere matrices

1. Inwendigheid

$$\forall A, B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

2. Associativiteit

$$\forall A, B, C \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Neutraal element

$$\exists I_n \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*, \forall A \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

3.9. Eigenschappen van reguliere matrices

1. Inwendigheid

$$\forall A, B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

2. Associativiteit

$$\forall A, B, C \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Neutraal element

$$\exists I_n \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*, \forall A \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

4. Inverse element

$$\forall A \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A^{-1} \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

3.9. Eigenschappen van reguliere matrices

1. Inwendigheid

$$\forall A, B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot B \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

2. Associativiteit

$$\forall A, B, C \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Neutraal element

$$\exists I_n \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*, \forall A \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

4. Inverse element

$$\forall A \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^* : A^{-1} \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*$$

$\Rightarrow \left(\left(\mathbb{R}^{n\times n}\right)^*, \cdot\right)$ is een (niet–commutatieve) groep
$\Rightarrow (\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ is een *scheef lichaam*

4.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!
Hint: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverteerbaar, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ niet

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!
Hint: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverteerbaar, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ niet
$\Rightarrow$ Blijkbaar heeft dat iets te maken LA rijen/kolommen

3.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...

... maar er is er ook een kortere!

Hint: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverteerbaar, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ niet

$\Rightarrow$ Blijkbaar heeft dat iets te maken LA rijen/kolommen

$\Rightarrow$ Zoek naar een “maat voor (on)afhankelijkheid”

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Voorbeelden:

1. $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\det I_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix}$

5. $\det \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Voorbeelden:

1. $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

3. $\det I_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

4. $\det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

5. $\det \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ -2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = \left(-\sqrt{6}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) - \left(-\sqrt{3}\right) \cdot (-2) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $3 \times 3, 4 \times 4, ...?$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $3 \times 3, 4 \times 4, ...?$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $1 \times 1?$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $3 \times 3, 4 \times 4, ...?$
$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $1 \times 1?$

3.2. Determinanten van 1×1–matrices

$A = (a)$

$$\det A = \det (a) = |a|$$

Dit is niet de absolute waarde!

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $3 \times 3, 4 \times 4, ...?$

$\Rightarrow$ Hoe uitbreiden naar $1 \times 1?$

4.2. Determinanten van 1×1–matrices

$A = (a)$

$$\det A = \det(a) = |a|$$

Dit is niet de absolute waarde!

Voorbeelden

1. $\det(3) = |3| = 3$
2. $\det(-5) = |-5| = -5$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.2. Determinanten van 1×1–matrices

$A = (a)$

$$\det A = \det (a) = |a|$$

4. Determinanten

4.1. Determinanten van 2×2–matrices

Definitie: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.2. Determinanten van 1×1–matrices

$A = (a)$

$$\det A = \det (a) = |a|$$

We zouden uiteindelijk willen komen tot de definitie van de determinant van een matrix als een afbeelding

$$\begin{aligned} \det : \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ A \quad &\mapsto \det A \end{aligned}$$

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rang}(5) = 1+1 = 2 \\ \operatorname{rang}(6) = \operatorname{rang}(-3) = 1+2 = 3 \\ \operatorname{rang}(2) = 2+2 = 4 \end{cases}$

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rang}(5) = 1 + 1 = 2 \\ \operatorname{rang}(6) = \operatorname{rang}(-3) = 1 + 2 = 3 \\ \operatorname{rang}(2) = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

$A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: *minor* van a_{ij} = determinant die men bekomt door in $\det A$ de i–de rij en de j–de kolom te schrappen $\times (-1)^{i+j}$.

Reciproke matrix $A^{rec} =$ matrix met daarin de minoren

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}\,(5) = 1+1 = 2 \\ \text{rang}\,(6) = \text{rang}\,(-3) = 1+2 = 3 \\ \text{rang}\,(2) = 2+2 = 4 \end{cases}$

$A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: *minor* van a_{ij} = determinant die men bekomt door in $\det A$ de i–de rij en de j–de kolom te schrappen $\times\,(-1)^{i+j}$.

Reciproke matrix $A^{rec} =$ matrix met daarin de minoren

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot|4| & (-1)^{1+2}\cdot|3| \\ (-1)^{2+1}\cdot|2| & (-1)^{2+2}\cdot|-1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}\,(5) = 1+1 = 2 \\ \text{rang}\,(6) = \text{rang}\,(-3) = 1+2 = 3 \\ \text{rang}\,(2) = 2+2 = 4 \end{cases}$

$A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: *minor* van a_{ij} = determinant die men bekomt door in $\det A$ de i–de rij en de j–de kolom te schrappen $\times\,(-1)^{i+j}$.

Reciproke matrix $A^{rec} =$ matrix met daarin de minoren

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot|4| & (-1)^{1+2}\cdot|3| \\ (-1)^{2+1}\cdot|2| & (-1)^{2+2}\cdot|-1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

4.3. Minor van een element

Rang van een element = rij–index + kolomindex.

Voorbeeld: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rang}\,(5) = 1+1 = 2 \\ \text{rang}\,(6) = \text{rang}\,(-3) = 1+2 = 3 \\ \text{rang}\,(2) = 2+2 = 4 \end{cases}$

$A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: *minor* van a_{ij} = determinant die men bekomt door in $\det A$ de i–de rij en de j–de kolom te schrappen $\times\,(-1)^{i+j}$.

Reciproke matrix A^{rec} = matrix met daarin de minoren

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot|4| & (-1)^{1+2}\cdot|3| \\ (-1)^{2+1}\cdot|2| & (-1)^{2+2}\cdot|-1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{rec} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -8 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!

4.8. Reguliere en singuliere matrices

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is *regulier* $\Leftrightarrow$

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is *singulier* $\Leftrightarrow$ A is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n \times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!

ONTWIKKELING

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(45 - 48) + 2\,(-36 + 42) + 3\,(32 - 35) = 0$$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(45-48) + 2\,(-36+42) + 3\,(32-35) = 0$$

   Anderzijds is $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{r} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(45-48) + 2\,(-36+42) + 3\,(32-35) = 0$$

   Anderzijds is $$\begin{array}{r} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4\,(18-24) + 5\,(9-21) - 6\,(8-14) = 0$$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(45-48) + 2\,(-36+42) + 3\,(32-35) = 0$$

Anderzijds is $$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4\,(18-24) + 5\,(9-21) - 6\,(8-14) = 0$$

Anderzijds is $$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ \end{array}$$ $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(45-48) + 2\,(-36+42) + 3\,(32-35) = 0$$

   Anderzijds is $$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4\,(18-24) + 5\,(9-21) - 6\,(8-14) = 0$$

   Anderzijds is $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = 3\,(32-35) - 6\,(8-14) + 9\,(5-8) = 0$$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{array}{r} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(-2-8) + 3\,(4-2) + 5\,(8+1) = 41$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2. $$\begin{array}{cl} \rightarrow & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(-2-8) + 3\,(4-2) + 5\,(8+1) = 41 \\ & \qquad\qquad\quad \downarrow \end{array}$$

Anderzijds is $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

4.4. Ontwikkeling van determinanten

Belangrijke Stelling:

De som van de produkten van de elementen van een vast gekozen rij of kolom van een vierkante matrix met hun respectievelijke minoren is onafhankelijk van de gekozen rij of kolom, en is gelijk aan de determinant van deze matrix.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\,(-2-8) + 3\,(4-2) + 5\,(8+1) = 41$

   Anderzijds is $\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = 1\,(-2-8) - 2\,(-6-20) - (6-5) = 41$

Belangrijke hints:

- Gebruik nullen!

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3\,(24+1) = -75$

Belangrijke hints:

- Gebruik nullen!

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3\,(24+1) = -75$

- Zijn alle elementen van een bepaalde rij of kolom gelijk aan nul, dan is de determinant zelf ook gelijk aan nul.

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Belangrijke hints:

- Gebruik nullen!

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3\,(24+1) = -75$

- Zijn alle elementen van een bepaalde rij of kolom gelijk aan nul, dan is de determinant zelf ook gelijk aan nul.

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

- Gebruik boven– of onderdriehoeksmatrix

  Voorbeeld: $\rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix} = a\,(bc - 0) = abc$

4.5. Eigenschappen van determinanten

Doel:

- een determinant ontbinden in factoren.
- bewijzen dat een determinant gelijk is aan nul.

4.5. Eigenschappen van determinanten

Doel:

- een determinant ontbinden in factoren.
- bewijzen dat een determinant gelijk is aan nul.

We zullen de eigenschappen tonen voor een 3×3–determinant

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

4.5. Eigenschappen van determinanten

1. Transpositie-eigenschap

De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van de getransponeerde matrix.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = \det\left(A^\tau\right)$$

4.5. Eigenschappen van determinanten

1. Transpositie-eigenschap

De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van de getransponeerde matrix.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = \det\left(A^\tau\right)$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

4.5. Eigenschappen van determinanten

1. Transpositie-eigenschap

De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van de getransponeerde matrix.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = \det\left(A^{T}\right)$$

2. Antisymmetrie

Als men twee kolommen (rijen) van een determinant verwisselt, dan verandert de determinant van teken.

$$\begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \underline{b} & \underline{a} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

4.5. Eigenschappen van determinanten

1. Transpositie-eigenschap

De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van de getransponeerde matrix.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = \det\left(A^{\tau}\right)$$

2. Antisymmetrie

Als men twee kolommen (rijen) van een determinant verwisselt, dan verandert de determinant van teken.

$$\left|\begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{ccc} \underline{b} & \underline{a} & \underline{c} \end{array}\right|$$

Voorbeeld

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11$ en $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 11$

4.5. Eigenschappen van determinanten

1. Transpositie-eigenschap

De determinant van een vierkante matrix is gelijk aan de determinant van de getransponeerde matrix.

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = \det\left(A^{\tau}\right)$$

2. Antisymmetrie

Als men twee kolommen (rijen) van een determinant verwisselt, dan verandert de determinant van teken.

$$\left| \begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{array} \right| = -\left| \begin{array}{ccc} \underline{b} & \underline{a} & \underline{c} \end{array} \right|$$

2a. Gevolg

Een determinant met twee gelijke kolommen (rijen) is gelijk aan nul.

$$\left| \begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{b} \end{array} \right| = 0$$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = \left| \, \lambda\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-11) = -55$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = \left| \, \lambda\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-11) = -55$

2. $\begin{vmatrix} 12 & 16 & -20 \\ 27 & 6 & 15 \\ 12 & 4 & -20 \end{vmatrix}$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = \left| \, \lambda\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-11) = -55$

2. $\begin{vmatrix} 12 & 16 & -20 \\ 27 & 6 & 15 \\ 12 & 4 & -20 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1/4 \\ R_2/3 \\ R_3/4}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 9 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-11) = -55$

2. $\begin{vmatrix} 12 & 16 & -20 \\ 27 & 6 & 15 \\ 12 & 4 & -20 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1/4 \\ R_2/3 \\ R_3/4}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 9 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_1/3 \\ K_3/5}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = \left| \, \lambda\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-11) = -55$

2. $\begin{vmatrix} 12 & 16 & -20 \\ 27 & 6 & 15 \\ 12 & 4 & -20 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1/4 \\ R_2/3 \\ R_3/4}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 9 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_1/3 \\ K_3/5}}{=} 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 720 \cdot 12 = 8640$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

3. Sesquilineariteit I

Om een determinant met een reëel getal λ te vermenigvuldigen, volstaat het om al de elementen van één kolom (rij) — en dus niet allemaal! — met datzelfde getal λ te vermenigvuldigen.

$$\lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = \left| \, \lambda\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

3a. Gevolgen:

(a) *Zijn alle elementen op één kolom (rij) van een determinant nul, dan is de determinant zelf gelijk aan nul.*

$$\left| \, \underline{o} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = 0$$

(b) *Verandert men alle elementen van één kolom (rij) van de determinant van teken, dan verandert de determinant zelf van teken.*

$$\left| \, -\underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = - \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

(c) *Als in een determinant één kolom (rij) lineair afhankelijk is van een andere, dan is de determinant gelijk aan nul.*

$$\left| \, \lambda\underline{b} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| = 0$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \\ -8 & 12 & 9 \end{vmatrix} \quad K_2 = -\frac{3}{2}K_1. \quad = 0$$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

4. Sesquilineariteit II

Als $n-1$ kolommen (rijen) van twee $n \times n$–determinanten gelijk zijn, dan is de som van die determinanten de determinanten die men bekomt door de overblijvende kolom (rij) op te tellen.

$$\left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \right| + \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{d} \right| = \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} + \underline{d} \right|$$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

4. Sesquilineariteit II

Als $n-1$ kolommen (rijen) van twee $n \times n$–determinanten gelijk zijn, dan is de som van die determinanten de determinanten die men bekomt door de overblijvende kolom (rij) op te tellen.

$$\left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \right| + \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{d} \right| = \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} + \underline{d} \right|$$

Sesquilineariteit I + II:

$$\left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \lambda\underline{c} + \mu\underline{d} \right| = \lambda \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \right| + \mu \left| \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{d} \right|$$

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

Anderzijds is

$$3 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

Anderzijds is

$$3 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

2. $$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 2 \cdot 15 - 3 = -15$$

Voorbeelden

1. $$\begin{array}{r} \downarrow\;\; \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

Anderzijds is

$$3 \begin{array}{r} \downarrow\;\; \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{r} \downarrow\;\; \\ \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 + 16 = 28$$

2. $$\begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 18 - 2 \cdot 15 - 3 = -15$$

Anderzijds is

$$\begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{matrix} \longrightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right) + \left(- \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (18 - 15) + (-15 - 3) = 3 - 18 = -15$$

4.5. Eigenschappen van determinanten (cont'd)

4. Sesquilineariteit II

Als $n-1$ *kolommen (rijen) van twee* $n \times n$*–determinanten gelijk zijn, dan is de som van die determinanten de determinanten die men bekomt door de overblijvende kolom (rij) op te tellen.*

$$\left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| + \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{d} \, \right| = \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} + \underline{d} \, \right|$$

Sesquilineariteit I + II:

$$\left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \lambda\underline{c} + \mu\underline{d} \, \right| = \lambda \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right| + \mu \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{d} \, \right|$$

4a. Gevolgen

(a) *Als in een determinant één kolom (rij) lineair afhankelijk is van de andere kolommen (rijen), dan is de determinant gelijk aan nul.*

$$\left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \lambda\underline{a} + \mu\underline{b} \, \right| = 0$$

(b) *Als men bij een kolom (rij) van een determinant een veelvoud van een andere kolom (rij) optelt, dan blijft de determinant ongewijzigd.*

$$\left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} + \lambda\underline{a} \, \right| = \left| \, \underline{a} \;\; \underline{b} \;\; \underline{c} \, \right|$$

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

4.6. Methode: determinanten bereken door ordeverlaging

Regels:

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

4.6. Methode: determinanten bereken door ordeverlaging

Regels:

- Vooropzetten van gemeenschappelijke factoren van een vaste rij of kolom.

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

4.6. Methode: determinanten bereken door ordeverlaging

Regels:

- Vooropzetten van gemeenschappelijke factoren van een vaste rij of kolom.
- Door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen een gemeenschappelijke factor doen verschijnen.

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

4.6. Methode: determinanten bereken door ordeverlaging

Regels:

- Vooropzetten van gemeenschappelijke factoren van een vaste rij of kolom.
- Door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen een gemeenschappelijke factor doen verschijnen.
- De determinant herleiden tot een determinant van een lagere orde.

Voorbeeld:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Anderzijds is

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 + 2K_1}{=} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

4.6. Methode: determinanten bereken door ordeverlaging

Regels:

- Vooropzetten van gemeenschappelijke factoren van een vaste rij of kolom.
- Door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen een gemeenschappelijke factor doen verschijnen.
- De determinant herleiden tot een determinant van een lagere orde.
- Ontwikkelen.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Voorbeelden

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3 - R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_1 - R_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Voorbeelden

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

2. $$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_1 - R_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_3 - 2R_2}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&1\\2&5&2\end{vmatrix}=1$

2. $$\begin{vmatrix}6&9&2\\2&3&1\\3&5&2\end{vmatrix} \overset{R_1-R_3}{=} \begin{vmatrix}3&4&0\\2&3&1\\3&5&2\end{vmatrix} \overset{R_3-2R_2}{=} \begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ \end{array} \begin{vmatrix}3&4&0\\2&3&1\\-1&-1&0\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}3&4\\-1&-1\end{vmatrix} = -1$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

3. $\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix}$

Voorbeelden

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

2. $$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

3. $$\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \overset{K_1 + (K_2 + K_3)}{=} \begin{vmatrix} 2a+3 & 3 & a \\ 2a+3 & a & a \\ 2a+3 & a & 3 \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

3. $\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \underset{=}{K_1 + (K_2 + K_3)} \begin{vmatrix} 2a+3 & 3 & a \\ 2a+3 & a & a \\ 2a+3 & a & 3 \end{vmatrix} = (2a+3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix}$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

3. $$\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \overset{K_1+(K_2+K_3)}{=} \begin{vmatrix} 2a+3 & 3 & a \\ 2a+3 & a & a \\ 2a+3 & a & 3 \end{vmatrix} = (2a+3)\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} (2a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 0 & a-3 & 3-a \end{vmatrix}$$

$\downarrow$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

3. $$\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \overset{K_1+(K_2+K_3)}{=} \begin{vmatrix} 2a+3 & 3 & a \\ 2a+3 & a & a \\ 2a+3 & a & 3 \end{vmatrix} = (2a+3)\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} (2a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 0 & a-3 & 3-a \end{vmatrix}$$

$$= (2a+3)\begin{vmatrix} a-3 & 0 \\ a-3 & 3-a \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

3. $\begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 3 & a & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \overset{K_1+(K_2+K_3)}{=} \begin{vmatrix} 2a+3 & 3 & a \\ 2a+3 & a & a \\ 2a+3 & a & 3 \end{vmatrix} = (2a+3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}{=} (2a+3) \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 0 & a-3 & 3-a \end{vmatrix} \end{array}$

$= (2a+3) \begin{vmatrix} a-3 & 0 \\ a-3 & 3-a \end{vmatrix} = (2a+3)\,(a-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3-a \end{vmatrix} = -\,(2a+3)\,(a-3)^2$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix}$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} \overset{K_1 - K_3}{=} \begin{vmatrix} b & 1 & 2b \\ b^2 & b & a^2 \\ ab & a & ab \end{vmatrix}$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} \overset{K_1 - K_3}{=} \begin{vmatrix} b & 1 & 2b \\ b^2 & b & a^2 \\ ab & a & ab \end{vmatrix} \overset{K_1 = bK_2}{=} 0.$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} \dfrac{3a+4b}{a+2b} & 1 & \dfrac{a+4b}{a+2b} \\ 2 & 1 & \dfrac{a+2b}{a+b} \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix}$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} \dfrac{3a+4b}{a+2b} & 1 & \dfrac{a+4b}{a+2b} \\ 2 & 1 & \dfrac{a+2b}{a+b} \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1 * (a+2b) \\ R_2 * (a+b)}}{=} \dfrac{1}{(a+2b)\,(a+b)} \begin{vmatrix} 3a+4b & a+2b & a+4b \\ 2a+2b & a+b & a+2b \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix}$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} \dfrac{3a+4b}{a+2b} & 1 & \dfrac{a+4b}{a+2b} \\ 2 & 1 & \dfrac{a+2b}{a+b} \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1*(a+2b)\\ R_2*(a+b)}}{=} \dfrac{1}{(a+2b)(a+b)} \begin{vmatrix} 3a+4b & a+2b & a+4b \\ 2a+2b & a+b & a+2b \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix}$

$$\overset{R_2+R_3}{=} \frac{1}{(a+2b)(a+b)} \begin{vmatrix} 3a+4b & a+2b & a+4b \\ 3a+4b & a+2b & a+4b \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix}$$

In het bijzonder om te bewijzen dat $\det = 0$:

- Zoeken naar twee evenredige of gelijke rijen of kolommen.
- Zoeken naar een rij of kolom met allemaal nullen.
- Eén van deze twee vorige zaken bekomen door bij een rij of kolom een veelvoud van een andere rij of kolom op te tellen.
- Als deze methoden niet werken, is men aangewezen op het gewoon uitrekenen van de determinant.

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 3b & 1 & 2b \\ a^2+b^2 & b & a^2 \\ 2ab & a & ab \end{vmatrix} = 0.$

2. $\begin{vmatrix} \dfrac{3a+4b}{a+2b} & 1 & \dfrac{a+4b}{a+2b} \\ 2 & 1 & \dfrac{a+2b}{a+b} \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{R_1 * (a+2b)}{R_2 * (a+b)}} \dfrac{1}{(a+2b)(a+b)} \begin{vmatrix} 3a+4b & a+2b & a+4b \\ 2a+2b & a+b & a+2b \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix}$

$$\overset{R_2+R_3}{=} \frac{1}{(a+2b)(a+b)} \begin{vmatrix} 3a+4b & a+2b & a+4b \\ 3a+4b & a+2b & a+4b \\ a+2b & b & 2b \end{vmatrix} \overset{R_1=R_2}{=} 0$$

4.7. Produktregel

De determinant van het produkt van twee matrices is gelijk aan het produkt van de determinanten van die matrices.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det{(A \cdot B)} = (\det A) \cdot (\det B)$$

4.7. Produktregel

De determinant van het produkt van twee matrices is gelijk aan het produkt van de determinanten van die matrices.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Voorbeeld

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

4.7. Produktregel

De determinant van het produkt van twee matrices is gelijk aan het produkt van de determinanten van die matrices.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Voorbeeld

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

4.7. Produktregel

De determinant van het produkt van twee matrices is gelijk aan het produkt van de determinanten van die matrices.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Voorbeeld

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

en

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix},$$

4.7. Produktregel

De determinant van het produkt van twee matrices is gelijk aan het produkt van de determinanten van die matrices.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

Voorbeeld

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

en

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix},$$

dus

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} = 8 = 2 \cdot 4 = \det A \cdot \det B.$$

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van* A *zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van* A *zijn lineair afhankelijk.*

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van A zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van A zijn lineair afhankelijk.*

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van A zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van A zijn lineair afhankelijk.*

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, want $K_2 = 2K_1$

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van A zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van A zijn lineair afhankelijk.*

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, want $K_2 = 2K_1$ maar ook $10R_1 - 16R_2 + 3R_3 = 0$

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van A zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van A zijn lineair afhankelijk.*

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, want $K_2 = 2K_1$ maar ook $10R_1 - 16R_2 + 3R_3 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0$

4.8. Determinanten en lineaire afhankelijkheid

Stelling: *De volgende eigenschappen zijn equivalent:*

(i) $\det A = 0$

(ii) *De kolommen van* A *zijn lineair afhankelijk.*

(iii) *De rijen van* A *zijn lineair afhankelijk.*

Voorbeelden

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, want $K_2 = 2K_1$ maar ook $10R_1 - 16R_2 + 3R_3 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0$, want $K_1 = K_2 + K_3$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

• *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, ...

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, ...

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

• *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

Voorbeelden:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, ...

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (1), (4), (0), (6), \ldots$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *rang* van A

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

Voorbeelden

1. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

Voorbeelden

1. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
2. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 \end{pmatrix} = 1$
3. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$
4. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \mathbf{2} & 6 \end{pmatrix} = 1$
5. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 0 \end{pmatrix} = 2$
6. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A
- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A
- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A
- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Voorbeeld

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ hoofdkolommen} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ hoofdrijen.} \end{cases}$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.
- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A
- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en* i*edere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en* i*edere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en iedere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang*

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en* i*edere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang = rang*

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en* i*edere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang = rang*

Voorbeeld

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
$\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en* i*edere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang = rang*

Voorbeeld

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1 - 2R_3 \\ R_2 + 3R_3 \\ R_4 - 3R_3}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & 11 & 10 \\ 0 & 8 & 14 & -13 & -11 \\ \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & -2 & \boxed{-2} & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
$\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en iedere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang = rang*

Voorbeeld

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 - 2R_3 \\ R_2 + 3R_3 \\ R_4 - 3R_3 \\ = \end{array} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & 11 & 10 \\ 0 & 8 & 14 & -13 & -11 \\ \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & -2 & \boxed{-2} & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 - 4R_4 \\ R_2 + 7R_4 \\ = \end{array} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & \boxed{-25} & -26 \\ 0 & -6 & 0 & 50 & 52 \\ \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & * & \boxed{-2} & * & * \end{pmatrix}$$

4.9. Deelmatrices, hoofddeterminant en rang

- *Deelmatrix* van A = matrix die uit A ontstaat door schrappen van rijen/kolommen.

- *Hoofddeterminant* van (eventueel niet–vierkante) matrix A = determinant van een zo groot mogelijke orde die niet nul is en deelmatrix van A
  $\longrightarrow$ orde hiervan is de *(determinant)rang* van A

- *Hoofdkolommen (-rijen)* = kolommen (rijen) van A die in een hoofddeterminant

Stelling: *Hoofdkolommen en hoofdrijen zijn altijd lineair onafhankelijk, en iedere andere kolom of rij is lineair afhankelijk van de hoofdkolommen of hoofdrijen van een matrix.*

- *(Rij)rang* van A = aantal LO hoofdrijen

- *(Kolom)rang* van A = aantal LO hoofdkolommen

Belangrijke Stelling: *Rijrang = kolomrang = determinantrang = rang*

Voorbeeld

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-2R_3\\ R_2+3R_3\\ R_4-3R_3}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & 11 & 10 \\ 0 & 8 & 14 & -13 & -11 \\ \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & -2 & \boxed{-2} & 9 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-4R_4\\ R_2+7R_4}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & \boxed{-25} & -26 \\ 0 & -6 & 0 & 50 & 52 \\ \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & * & \boxed{-2} & * & * \end{pmatrix}$$

$= 3$

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *regulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is *singulier*
$\Leftrightarrow A$ is niet regulier

Verzameling van alle reguliere matrices met karakteristiek $n \times n$ als $(\mathbb{R}^{n\times n})^*$.

MAAR HOE VINDEN WE A^{-1}???

... er is een lange methode...
... maar er is er ook een kortere!

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\operatorname{rg} A = n$	$\operatorname{rg} A < n$

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\operatorname{rg} A = n$	$\operatorname{rg} A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\operatorname{rg} A = n$	$\operatorname{rg} A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

DUS: HOE VINDEN WE A^{-1}???

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\mathrm{rg}\, A = n$	$\mathrm{rg}\, A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

DUS: HOE VINDEN WE A^{-1}???

- Bereken $\det A$; als deze 0 is, dan heeft de matrix geen inverse.

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\operatorname{rg} A = n$	$\operatorname{rg} A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

DUS: HOE VINDEN WE A^{-1}???

- Bereken $\det A$; als deze 0 is, dan heeft de matrix geen inverse.
- Transponeer de matrix.

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\mathrm{rg}\, A = n$	$\mathrm{rg}\, A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

DUS: HOE VINDEN WE A^{-1}???

- Bereken $\det A$; als deze 0 is, dan heeft de matrix geen inverse.
- Transponeer de matrix.
- Bepaal de *geadjungeerde matrix* = de reciproke matrix van de getransponeerde matrix.

$$A^{ad} = (A^{\tau})^{rec}$$

4.8. Reguliere en singuliere matrices revisited

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

is *regulier*	is *singulier*
$\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$	A is niet regulier
$\operatorname{rg} A = n$	$\operatorname{rg} A < n$
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$

DUS: HOE VINDEN WE A^{-1}???

- Bereken $\det A$; als deze 0 is, dan heeft de matrix geen inverse.
- Transponeer de matrix.
- Bepaal de *geadjungeerde matrix* = de reciproke matrix van de getransponeerde matrix.

$$A^{ad} = (A^{\tau})^{rec}$$

- $A^{-1} = \dfrac{A^{ad}}{\det A}$; deel alle elementen door de (niet–nulle) determinant.

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

   $\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \neq 0$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -33 \\ 4 & 5 & -23 \end{pmatrix}$$

Voorbeelden

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ -2 & 15 & -10 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \neq 0$

$$\Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -33 \\ 4 & 5 & -23 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -33 \\ 4 & 5 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{7}{2} & -\frac{33}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

5. De methode van Gauss

6.1. Matrixnotatie van een stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

5. De methode van Gauss

5.1. Matrixnotatie van een stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ = *matrix van het stelsel*

5. De methode van Gauss

5.1. Matrixnotatie van een stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ = *matrix van het stelsel*

$\Rightarrow A^+ = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & a_m \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ = *aangevulde matrix van het stelsel*

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ en $A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -7 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ en } A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -7 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ en } A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -7 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } A^+ = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^{+}$

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^{+}$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+}$

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^+$
Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

- *een vergelijking schrapt die LA is van andere vergelijkingen van het stelsel; i.h.b. de triviale vergelijking*

$$0x + 0y + ... = 0$$

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

- *een vergelijking schrapt die LA is van andere vergelijkingen van het stelsel; i.h.b. de triviale vergelijking*

$$0x + 0y + ... = 0$$

- *twee vergelijkingen verwisselt.*

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

- *een vergelijking schrapt die LA is van andere vergelijkingen van het stelsel; i.h.b. de triviale vergelijking*

$$0x + 0y + ... = 0$$

- *twee vergelijkingen verwisselt.*
- *de twee leden van één vergelijking met een zelfde getal, verschillend van nul, vermenigvuldigt.*

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

- *een vergelijking schrapt die LA is van andere vergelijkingen van het stelsel; i.h.b. de triviale vergelijking*

$$0x + 0y + ... = 0$$

- *twee vergelijkingen verwisselt.*
- *de twee leden van één vergelijking met een zelfde getal, verschillend van nul, vermenigvuldigt.*
- *bij de twee leden van één vergelijking de overeenkomstige leden van een andere vergelijking, eventueel vermenigvuldigd met een zelfde getal, optelt.*

5.2. Rang–eigenschappen van Gaussische stelsels

Eigenschap: $\text{rg}\, A \leq \text{rg}\, A^+$

Stelling: Een stelsel is oplosbaar $\Leftrightarrow \text{rg}\, A = \text{rg}\, A^+$

Definitie: $\lambda L_1 + \mu L_2 = 0$ is een *lineaire combinatie* van $L_1 = 0$ en $L_2 = 0$

Stelling: *De oplossingenverzameling van een stelsel verandert niet als men*

- *een vergelijking schrapt die LA is van andere vergelijkingen van het stelsel; i.h.b. de triviale vergelijking*

$$0x + 0y + ... = 0$$

- *twee vergelijkingen verwisselt.*
- *de twee leden van één vergelijking met een zelfde getal, verschillend van nul, vermenigvuldigt.*
- *bij de twee leden van één vergelijking de overeenkomstige leden van een andere vergelijking, eventueel vermenigvuldigd met een zelfde getal, optelt.*

$\Rightarrow$ enkel rijbewerkingen en geen kolombewerkingen!

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y + 6z &= 9 \end{cases}$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x + 2y + z & = & 3 \\ 2x + 3y + 4z & = & 5 \\ 4x + 7y + 6z & = & 9 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ 4x+7y+6z &= 9 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ 4x+7y+6z &= 9 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y + 6z &= 9 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\mathrm{rg}\, A = 2$ en $\mathrm{rg}\, A^+ = 3$

Voorbeelden

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 3 \\ 2x+3y+4z &=& 5 \\ 4x+7y+6z &=& 9 \end{array}\right.$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\operatorname{rg} A = 2$ en $\operatorname{rg} A^+ = 3$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 3 \\ 2x+y-4z &=& 5 \\ 4x-y-2z &=& 11 \\ 5x+y-7z &=& 13 \end{array}\right.$

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ 4x+7y+6z &= 9 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\operatorname{rg} A = 2$ en $\operatorname{rg} A^+ = 3$

2. $$\begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 2x+y-4z &= 5 \\ 4x-y-2z &= 11 \\ 5x+y-7z &= 13 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ 4x+7y+6z &= 9 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1\\ R_3-4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\operatorname{rg} A = 2$ en $\operatorname{rg} A^+ = 3$

2. $\begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 2x+y-4z &= 5 \\ 4x-y-2z &= 11 \\ 5x+y-7z &= 13 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1\\ R_3-4R_1\\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -12 & -2 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 4x + 7y + 6z &= 9 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\operatorname{rg} A = 2$ en $\operatorname{rg} A^+ = 3$

2. $$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \\ R_4 - 5R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -12 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y+z & = & 3 \\ 2x+3y+4z & = & 5 \\ 4x+7y+6z & = & 9 \end{array}\right.$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\text{rg}\,A = 2$ en $\text{rg}\,A^+ = 3$

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & 3 \\ 2x+y-4z & = & 5 \\ 4x-y-2z & = & 11 \\ 5x+y-7z & = & 13 \end{array}\right.$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -12 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ 2x+3y+4z &= 5 \\ 4x+7y+6z &= 9 \end{cases}$$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel vals, want $\text{rg}\, A = 2$ en $\text{rg}\, A^+ = 3$

2. $$\begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 2x+y-4z &= 5 \\ 4x-y-2z &= 11 \\ 5x+y-7z &= 13 \end{cases}$$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -12 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ stelsel oplosbaar, want $\text{rg}\, A = \text{rg}\, A^+ = 2$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $$\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het <u>aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang</u>

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het <u>aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang</u>

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ -5y + 3z &= -1 \\ -z &= -3 \end{cases}$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"
$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd
$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& 2 \\ 2x - y + z &=& 3 \\ 3x + y - z &=& 2 \end{array} \right.$

$$\mathrm{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array} \right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar
$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y - z &=& 2 \\ -5y + 3z &=& -1 \\ z &=& 3 \end{array} \right.$

$\Rightarrow z = 3$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \text{rg}\, A = \text{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2y - 3 &= 2 \\ -5y + 3 \cdot 3 &= -1 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 3$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2y - 3 &= 2 \\ -5y + 9 &= -1 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 3$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^{+} = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2y &= 5 \\ -5y &= -10 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 3$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \text{rg}\, A = \text{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2y &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 2, z = 3$

5.3. De methode van Gauss

"Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat"

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 2 \cdot 2 &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 2, z = 3$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x + 4 &= 5 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow y = 2, z = 3$

5.3. De methode van Gauss

“Manipuleer het stelsel tot er een boven– of onderdriehoeksmatrix staat”

$\Rightarrow$ het stelsel is gediagonaliseerd

$\Rightarrow$ sla een aantal variabelen om in functie van het aantal vrijheidsgraden = # onbekenden - rang

$$\dim \Omega = n - r$$

Voorbeeld

1. $\begin{cases} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \text{rg}\, A = \text{rg}\, A^{+} = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ geen parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x + 2y - z + 3u &= 0 \\ 2x + y + z - u &= 0 \\ 4x + 5y - z + 5u &= 0 \\ 5x + 4y + z + u &= 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - z + 3u &= 0 \\ 2x + y + z - u &= 0 \\ 4x + 5y - z + 5u &= 0 \\ 5x + 4y + z + u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^+$ (homogeen!)

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+3u &=& 0\\ 2x+y+z-u &=& 0\\ 4x+5y-z+5u &=& 0\\ 5x+4y+z+u &=& 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 5 & -1 & 5\\ 5 & 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ 2x+y+z-u &=& 0 \\ 4x+5y-z+5u &=& 0 \\ 5x+4y+z+u &=& 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2=2 \Rightarrow$ 2 parameters

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ 2x+y+z-u &=& 0 \\ 4x+5y-z+5u &=& 0 \\ 5x+4y+z+u &=& 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2=2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ -3y+3z-7u &=& 0 \end{array}\right.$

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ 2x+y+z-u &=& 0 \\ 4x+5y-z+5u &=& 0 \\ 5x+4y+z+u &=& 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+}$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ -3y+3z-7u &=& 0 \end{array}\right.$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x+2y &=& \lambda-9\mu \\ -3y &=& -3\lambda+21\mu \end{array}\right.$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim\Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ -3y+3z-7u &= 0 \end{cases}$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \begin{cases} x+2y &= \lambda-9\mu \\ y &= \lambda-7\mu \end{cases}$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ -3y+3z-7u &= 0 \end{cases}$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \begin{cases} x+2(\lambda-7\mu) &= \lambda-9\mu \\ y &= \lambda-7\mu \end{cases}$

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ 2x+y+z-u &=& 0 \\ 4x+5y-z+5u &=& 0 \\ 5x+4y+z+u &=& 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\begin{array}{c} R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1 \end{array}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \underset{\begin{array}{c} R_3-R_2 \\ R_4-2R_2 \end{array}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ -3y+3z-7u &=& 0 \end{array}\right.$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2\lambda-14\mu &=& \lambda-9\mu \\ y &=& \lambda-7\mu \end{array}\right.$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ -3y+3z-7u &= 0 \end{cases}$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \begin{cases} x &= -\lambda+5\mu \\ y &= \lambda-7\mu \end{cases}$

Voorbeeld

2. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ 2x+y+z-u &=& 0 \\ 4x+5y-z+5u &=& 0 \\ 5x+4y+z+u &=& 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+}$ (homogeen!)

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-4R_1 \\ R_4-5R_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & -14 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -7 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim \Omega = 4-2 = 2 \Rightarrow$ 2 parameters

Gediagonaliseerd stelsel: $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+3u &=& 0 \\ -3y+3z-7u &=& 0 \end{array}\right.$

Stel $(z,u) = (\lambda, 3\mu) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\lambda+5\mu \\ y &=& \lambda-7\mu \end{array}\right.$

$\Rightarrow (x,y,z,u) = (-\lambda+5\mu, \lambda-7\mu, \lambda, 3\mu) = \lambda\,(-1,1,1,0) + \mu\,(5,-7,0,3)$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-z+3u &= 0 \\ 2x+y+z-u &= 0 \\ 4x+5y-z+5u &= 0 \\ 5x+4y+z+u &= 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ zeker oplosbaar want $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,A^+$ (homogeen!)

$\Rightarrow (x,y,z,u) = (-\lambda+5\mu, \lambda-7\mu, \lambda, 3\mu) = \lambda\,(-1,1,1,0) + \mu\,(5,-7,0,3) \longrightarrow$ *algemene oplossing*

$\lambda, \mu \longrightarrow$ *parameters*

$\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \exists$ *particuliere oplossing,* bvb.

λ	μ	(x,y,z,u)
1	0	$(-1,1,1,0)$
0	1	$(5,-7,0,3)$
0	0	$(0,0,0,0)$
2	1	$(3,-5,2,3)$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + 2y - z &= 4 \\ x + 3y + z &= 7 \\ 2x + 3y - 4z &= 5 \\ 2x + y - 8z &= -1 \end{cases}$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + 2y - z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 7 \\ 2x + 3y - 4z & = & 5 \\ 2x + y - 8z & = & -1 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + 2y - z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 7 \\ 2x + 3y - 4z & = & 5 \\ 2x + y - 8z & = & -1 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array} \right)$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-R_1\\ R_3-2R_1\\ R_4-2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x + 2y - z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 7 \\ 2x + 3y - 4z & = & 5 \\ 2x + y - 8z & = & -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array} \right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x + 2y - z & = & 4 \\ x + 3y + z & = & 7 \\ 2x + 3y - 4z & = & 5 \\ 2x + y - 8z & = & -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array} \right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array} \right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = 2$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ y+2z &= 3 \end{cases}$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ y+2z &= 3 \end{cases}$

Stel $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x+2y &= 4+\lambda \\ y &= 3-2\lambda \end{cases}$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z & = & 4 \\ x+3y+z & = & 7 \\ 2x+3y-4z & = & 5 \\ 2x+y-8z & = & -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z & = & 4 \\ y+2z & = & 3 \end{cases}$

Stel $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + 2\,(3-2\lambda) & = & 4+\lambda \\ y & = & 3-2\lambda \end{cases}$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ y+2z &= 3 \end{cases}$

Stel $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x+6-4\lambda &= 4+\lambda \\ y &= 3-2\lambda \end{cases}$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-2R_1 \\ R_4-2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3+R_2 \\ R_4+3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ y+2z &= 3 \end{cases}$

Stel $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x &= -2+5\lambda \\ y &= 3-2\lambda \end{cases}$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$$\operatorname{rg} A^{+} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -8 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 2R_1}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right) \overset{\substack{R_3 + R_2 \\ R_4 + 3R_2}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 2 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar

$\Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 parameter

Gediagonaliseerd stelsel: $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ \quad\;\; y+2z &= 3 \end{cases}$

Stel $z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x &= -2+5\lambda \\ y &= 3-2\lambda \end{cases}$

$(x, y, z) = (-2+5\lambda, 3-2\lambda, \lambda) = (-2, 3, 0) + \lambda\,(5, -2, 1)$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+2y-z &= 4 \\ x+3y+z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= 5 \\ 2x+y-8z &= -1 \end{cases}$

$(x,y,z) = (-2+5\lambda, 3-2\lambda, \lambda) = (-2,3,0) + \lambda\,(5,-2,1) \longrightarrow$ *algemene oplossing*

$(-2,3,0) \longrightarrow$ *particuliere oplossing*

$(5,-2,1) \longrightarrow$ *homogene oplossing* (tevens oplossing van het geassocieerde homogene stelsel

$$\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \\ 2x+3y-4z &= 0 \\ 2x+y-8z &= 0 \end{cases}$$

$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \exists$ *particuliere oplossing,* bvb.

λ	(x,y,z)
0	$(-2,3,0)$
1	$(3,1,1)$
2	$(8,-1,2)$
-1	$(-7,5,-1)$

Men vindt al de oplossingen van een niet–homogeen $m \times n$*–stelsel* S *door één particuliere oplossing* $\underline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ *van* S *te bepalen, en er vervolgens alle oplossingen* $\underline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ *van het geassocieerde homogene* $m \times n$*–stelsel* S_h *bij op te tellen.*

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?
“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases}$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?
“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”
Voorbeelden

1. $\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 3y - 6z &= -1 \end{cases}$ (zie eerder)

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?
“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”
Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 3y - 6z &= -1 \end{cases}$$ (zie eerder)

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 2x+y-4z &= 5 \\ 4x-y-2z &= 11 \\ 5x+y-7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 3y-6z &= -1 \end{cases}$ (zie eerder)

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim\Omega = 3-2 = 1$. Kies $z=\lambda$ en sla die om

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?
“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”
Voorbeelden

1. $\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 3 \\ \quad 3y - 6z &= -1 \end{cases}$ (zie eerder)

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim \Omega = 3 - 2 = 1$. Kies $z = \lambda$ en sla die om

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \downarrow z \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array}$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

Voorbeelden

1. $$\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z &=& 3 \\ 2x+y-4z &=& 5 \\ 4x-y-2z &=& 11 \\ 5x+y-7z &=& 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z &=& 3 \\ 3y-6z &=& -1 \end{array}\right.$$ (zie eerder)

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim\Omega = 3-2 = 1$. Kies $z=\lambda$ en sla die om

$$\mathrm{rg}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & \downarrow z \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \overset{R_2/3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 2 \end{array}\right)$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

Voorbeelden

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 3 \\ 2x+y-4z &=& 5 \\ 4x-y-2z &=& 11 \\ 5x+y-7z &=& 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z &=& 3 \\ 3y-6z &=& -1 \end{array}\right.$ (zie eerder)

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim\Omega = 3-2 = 1$. Kies $z=\lambda$ en sla die om

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow z \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \overset{R_2/3}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 2 \end{array}\right)$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?
“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”
Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 3y - 6z &= -1 \end{cases}$$ (zie eerder)

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim \Omega = 3 - 2 = 1$. Kies $z = \lambda$ en sla die om

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \downarrow z \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \overset{R_2/3}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 2 \end{array}\right) \overset{R_1+R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{8}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 2 \end{array}\right)$$

5.4. De methode van Gauss-Jordan

Waarom stoppen bij een boven–of onderdriehoeksmatrix?

“Manipuleer het stelsel tot er een *diagonaal*matrix staat”

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 2x + y - 4z &= 5 \\ 4x - y - 2z &= 11 \\ 5x + y - 7z &= 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= 3 \\ 3y - 6z &= -1 \end{cases}$$ (zie eerder)

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 11 \\ 5 & 1 & -7 & 13 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) = 2$$

$\Rightarrow$ oplosbaar met $\dim\Omega = 3 - 2 = 1$. Kies $z = \lambda$ en sla die om

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c} \hphantom{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \end{pmatrix}}\downarrow z \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \overset{R_2/3}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 2 \end{array}\right) \overset{R_1+R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{8}{3} + \lambda, \frac{-1}{3} + 2\lambda, \lambda\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \lambda\,(1, 2, 1)$$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u & = & 6 \\ 2x + 5y + 3z - u & = & 22 \\ y + 4z - 4u & = & 7 \end{cases}$$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u & = & 6 \\ 2x + 5y + 3z - u & = & 22 \\ y + 4z - 4u & = & 7 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 6 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 22 \\ y + 4z - 4u &= 7 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 6 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 22 \\ y + 4z - 4u &= 7 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $$\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u & = & 6 \\ 2x + 5y + 3z - u & = & 22 \\ y + 4z - 4u & = & 7 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4 - 3 = 1$. Stel $u = \lambda$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 6 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 22 \\ y + 4z - 4u &= 7 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4 - 3 = 1$. Stel $u = \lambda$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 6 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 22 \\ y + 4z - 4u &= 7 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A^+ = \mathrm{rg}\, A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4 - 3 = 1$. Stel $u = \lambda$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow u \\ \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4-3=1$. Stel $u=\lambda$

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & & \downarrow u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim\Omega = 4-3 = 1$. Stel $u = \lambda$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & & \downarrow u \\ 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2-7R_3}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u &= 6 \\ 2x + 5y + 3z - u &= 22 \\ y + 4z - 4u &= 7 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2 - 2R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = \operatorname{rg} A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4 - 3 = 1$. Stel $u = \lambda$

$$\operatorname{rg}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & & \downarrow u \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{\substack{R_1 + 2R_3 \\ R_2 - 7R_3}}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3u & = & 6 \\ 2x + 5y + 3z - u & = & 22 \\ y + 4z - 4u & = & 7 \end{cases}$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, A^+ = \mathrm{rg}\, A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim \Omega = 4 - 3 = 1$. Stel $u = \lambda$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & \downarrow u \end{array} \\ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array}\right) \overset{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2-7R_3}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1-2R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

2. $\begin{cases} x+2y-2z+3u &= 6 \\ 2x+5y+3z-u &= 22 \\ y+4z-4u &= 7 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3/(-3)}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = 3$$

$\Rightarrow \text{rg}\,A^+ = \text{rg}\,A = 3 \Rightarrow$ stelsel oplosbaar met $\dim\Omega = 4-3 = 1$. Stel $u=\lambda$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & \downarrow u \end{array} \\ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \end{array}\right) \overset{\substack{R_1+2R_3 \\ R_2-7R_3}}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1-2R_2}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow (x,y,z,u) = (2-\lambda, 3, 1+\lambda, \lambda) = (2,3,1,0) + \lambda\,(-1,0,1,1)$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + y + 2z & = & 9 \\ y + z & = & 5 \\ x + 2y + 3z & = & 8 \end{cases}$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + y + 2z & = & 9 \\ y + z & = & 5 \\ x + 2y + 3z & = & 8 \end{cases}$$

$$\text{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array} \right)$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ y+z &= 5 \\ x+2y+3z &= 8 \end{cases}$$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x + y + 2z & = & 9 \\ y + z & = & 5 \\ x + 2y + 3z & = & 8 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x + y + 2z &= 9 \\ y + z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 8 \end{cases}$

$$\text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_1}{=} \text{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $$\begin{cases} x + y + 2z & = & 9 \\ y + z & = & 5 \\ x + 2y + 3z & = & 8 \end{cases}$$

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3 - R_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Voorbeeld

3. $\begin{cases} x+y+2z &= 9 \\ y+z &= 5 \\ x+2y+3z &= 8 \end{cases}$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \overset{R_3-R_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A^+ = 3 \neq \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow$ Stelsel niet oplosbaar.

5.5. De methode van Cramer

Definitie: *Determinant van een stelsel* $= \det A$.

Voorbeeld

De determinant van het stelsel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

is gelijk aan

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

5.5. De methode van Cramer

Definitie: *Determinant van een stelsel* $= \det A$.

Voorbeeld

De determinant van het stelsel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

is gelijk aan

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix}$$

Stelling (Cramer): *Als voor een $n \times n$–stelsel in de onbekenden $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de determinant niet gelijk is aan nul, dan is het stelsel oplosbaar, en dan is*

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

waarbij D_i de determinant is die men verkrijgt door in de determinant D de i–de kolom te vervangen door de constante termen.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x + y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ 3x - y + 2z & = & 4 \end{cases}$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x + y - z & = \ 2 \\ 2x - y + z & = \ 1 \\ 3x - y + 2z & = \ 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Stelsel is oplosbaar

Voorbeeld

$$\begin{cases} x + y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Stelsel is oplosbaar

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 \\ \mathbf{3} & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & -\mathbf{1} & 1 \\ 3 & -\mathbf{1} & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\mathbf{1} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x + y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ 3x - y + 2z & = & 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Stelsel is oplosbaar

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \\ \mathbf{4} & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & \mathbf{4} & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x + y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 1 \\ 3x - y + 2z & = & 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Stelsel is oplosbaar

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

Voorbeeld

$$\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+z &= 1 \\ 3x-y+2z &= 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Stelsel is oplosbaar

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{-3}{-3}, \frac{-9}{-3}, \frac{-6}{-3}\right) = (1,3,2)$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:
Definitie:
Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z - 2u &= 7 \\ 3x + 6y + 9z - 3u &= 8 \\ x + 2y + 3z - 4u &= 9 \end{cases}$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x+4y+6z-2u &= 7 \\ 3x+6y+9z-3u &= 8 \\ x+2y+3z-4u &= 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & \mathbf{9} & -\mathbf{3} \\ 1 & 2 & \mathbf{3} & -\mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -27$ (geen enkele 3×3–determinant van A is niet nul)

Cramer voor onderbepaalde stelsels:
Definitie:
Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A
$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Cramer voor onderbepaalde stelsels:
Definitie:
Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A
$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte
Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$

Kies $z = \lambda$ (staat niet in de hoofddeterminant)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 4 - \lambda \\ x + 2y &= 3 + \lambda \end{cases}$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ x+2y-z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$$

Kies $z = \lambda$ (staat niet in de hoofddeterminant)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y &= 4-\lambda \\ x+2y &= 3+\lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{3} \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x+3y+z &= 4 \\ x+2y-z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^{+} = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$$

Kies $z = \lambda$ (staat niet in de hoofddeterminant)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y &= 4-\lambda \\ x+2y &= 3+\lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{4}-\boldsymbol{\lambda} & 3 \\ \mathbf{3}+\boldsymbol{\lambda} & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{4}-\boldsymbol{\lambda} \\ 1 & \mathbf{3}+\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix}$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$$

Kies $z = \lambda$ (staat niet in de hoofddeterminant)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 4 - \lambda \\ x + 2y &= 3 + \lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 3 + \lambda & 2 \end{vmatrix} = -1 - 5\lambda$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 - \lambda \\ 1 & 3 + \lambda \end{vmatrix} = 2 + 3\lambda$$

Cramer voor onderbepaalde stelsels:

Definitie:

Hoofddeterminant van een stelsel $=$ hoofddeterminant van A = rang van A

$\Rightarrow$ bepaalt ook dimensie van de oplossingsruimte

Voorbeeld

$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^+ = 2 \Rightarrow \dim \Omega = 3 - 2 = 1$$

Kies $z = \lambda$ (staat niet in de hoofddeterminant)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y &= 4 - \lambda \\ x + 2y &= 3 + \lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 3 + \lambda & 2 \end{vmatrix} = -1 - 5\lambda$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 - \lambda \\ 1 & 3 + \lambda \end{vmatrix} = 2 + 3\lambda$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \lambda \right) = (-1 - 5\lambda, 2 + 3\lambda, \lambda) = (-1, 2, 0) + \lambda\,(-5, 3, 1)$$

5.5. Karakteristieke determinanten van een stelsel

Definitie: *Karakteristieke determinanten* = determinanten K_i die men bekomt door hoofddeterminant D te *randen*, t.t.z. aan te vullen met een rij horend bij een niet–gebruikte vergelijking, en een kolom corresponderende constante termen.

Voorbeeld:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{cases} \text{ met hoofddeterminant } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow K_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} \text{ voor } i \in \{3, 4\}$$

5.5. Karakteristieke determinanten van een stelsel

Definitie: *Karakteristieke determinanten* = determinanten K_i die men bekomt door hoofddeterminant D te *randen*, t.t.z. aan te vullen met een rij horend bij een niet–gebruikte vergelijking, en een kolom corresponderende constante termen.

Voorbeeld:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z &= d_4 \end{cases} \text{ met hoofddeterminant } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow K_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} \text{ voor } i \in \{3, 4\}$$

Stelling (Cramer II): *Een nodige en voldoende voorwaarde opdat een $m \times n$–stelsel met hoofddeterminant D van orde $r < m$ oplosbaar zou zijn, is dat al de bij D horende karakteristieke determinanten nul zijn.*

Voorbeelden

1. $$\begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ 2x + y - z &= 4 \\ 3x + 2y + z &= 5 \end{cases}$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x + y + 2z & = & 3 \\ 2x + y - z & = & 4 \\ 3x + 2y + z & = & 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hoofddeterminant $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Voorbeelden

1. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Hoofddeterminant $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Karakteristieke determinant is $K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$.Stelsel niet oplosbaar

Voorbeelden

2. $$\begin{cases} x + y + 2z & = & 3 \\ 2x + y - z & = & 4 \\ 3x + 2y + z & = & 7 \\ 4x + 3y + 3z & = & 10 \end{cases}$$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\quad \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 2 & 1 & \\ & & \end{vmatrix} \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \\ 2 & 1 & \\ & & \end{vmatrix} \end{cases}$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\text{rg}\, A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ & & \end{vmatrix} \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ & & \end{vmatrix} \end{cases}$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} \end{cases}$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\quad \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \end{cases}$ oplosbaar met $\dim \Omega = 3 - 2 = 1$. Stel $z = \lambda$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \end{cases}$ oplosbaar met $\dim \Omega = 3-2 = 1$. Stel $z = \lambda$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y &= 3-2\lambda \\ 2x+y &= 4+\lambda \end{cases}$

Voorbeelden

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z & = & 3 \\ 2x+y-z & = & 4 \\ 3x+2y+z & = & 7 \\ 4x+3y+3z & = & 10 \end{array}\right.$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$ Stel $z = \lambda$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 3-2\lambda \\ 2x+y & = & 4+\lambda \end{array}\right.$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ Stel $z = \lambda$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y &= 3-2\lambda \\ 2x+y &= 4+\lambda \end{cases}$

$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix}$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ Stel $z = \lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y &= 3-2\lambda \\ 2x+y &= 4+\lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3-2\lambda} & 1 \\ \mathbf{4+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3-2\lambda} \\ 2 & \mathbf{4+\lambda} \end{vmatrix}$$

Voorbeelden

2. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 7 \\ 4x+3y+3z &= 10 \end{cases}$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ Stel $z = \lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y &= 3-2\lambda \\ 2x+y &= 4+\lambda \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3-2\boldsymbol{\lambda}} & 1 \\ \mathbf{4+\boldsymbol{\lambda}} & 1 \end{vmatrix} = -1-3\lambda$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3-2\boldsymbol{\lambda}} \\ 2 & \mathbf{4+\boldsymbol{\lambda}} \end{vmatrix} = -2+5\lambda$$

Voorbeelden

2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z & = & 3 \\ 2x+y-z & = & 4 \\ 3x+2y+z & = & 7 \\ 4x+3y+3z & = & 10 \end{array}\right.$ $\quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, want $\nexists$ niet–nulle 3×3–determinant

Stel $D_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = 0 \\ K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$ Stel $z = \lambda$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 3-2\lambda \\ 2x+y & = & 4+\lambda \end{array}\right.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{3-2\boldsymbol{\lambda}} & 1 \\ \mathbf{4+\boldsymbol{\lambda}} & 1 \end{vmatrix} = -1-3\lambda$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3-2\boldsymbol{\lambda}} \\ 2 & \mathbf{4+\boldsymbol{\lambda}} \end{vmatrix} = -2+5\lambda$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \lambda\right) = \left(\frac{-1-3\lambda}{-1}, \frac{-2+5\lambda}{-1}, \lambda\right) = (1+3\lambda, 2-5\lambda, \lambda) = (1,2,0) + \lambda\,(3,-5,1)$$

EINDE

van deze presentatie