Examen Wiskunde Oefeningen — partim juni

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde en biochemie — 2e zittijd 2007–2008

Naam:..
Richting: SCH / BIC
Studentenkaartnr.:...

- Gebruik van een niet-programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Los op:

$$iz^3 + 4z^2 + (-8 + 10i)\,z + (28 + 16i) = 0$$

Hint: geen enkel nulpunt hiervan is reëel!

/6

2. De lineaire transformatie t van $\mathbb{R}'^3$ beeldt de punten $p\,(1, 2, 1)\,,q\,(2, 3, 2)$ en $r\,(3, 1, 4)$ af op de punten $p'\,(3, -2, 1)\,,q'\,(5, 0, 3)$ en $r'\,(2, 19, 9)$

   (a) Zoek de matrix T van t.

/6

(b) Zoek hiervan de eigenwaarden en –ruimten.

/8

3. Bewijs dat $\mathrm{Bgtg}\,\dfrac{1}{10} + \mathrm{Bgtg}\,\dfrac{1}{5} + \mathrm{Bgtg}\,\dfrac{17}{32} = \dfrac{\pi}{4}$

/6

4. Bereken $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{5x-1}}{\sqrt{3x+3} - \sqrt{2x+5}}$ met een methode naar keuze.

/7

5. Onderzoek de asymptoten en de ligging van de functie (boven, onder) hiertegenover voor

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 2x - 3}$$

/8

6. Bereken

(a) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$. Hint: gebruik de formules van Simpson.

/6

(b) $\int x\sqrt{x^2+4x+5}dx$. Hint: gebruik de substitutie $x+2 = \operatorname{sh} t$ (andere substituties zijn mogelijk maar dit is de kortste)

/6

7. Gegeven de poolkromme $r(\theta) = \sin 4\theta + 2\cos 2\theta$

   (a) Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide, plus een tekening.

/8

(b) Bereken de oppervlakte van de alsdus bekomen figuur.

/6

(c) Wat is de minimale straal waarbinnen de gehele figuur past? (Hint: dit zou je moeten weten uit het tekenonderzoek):

/3

8. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y' = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right) y + x^2 y^2$$

Hint: zoek eerst 1 particuliere oplossing en ga deze niet te ver zoeken.

/8

9. Bewijs dat

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n\,(n+1) + n\,(n+2) = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(4n+11)$$

en geef een goede reden waarom deze uitkomst altijd een geheel getal is.

/6

10.

(a) Bewijs dat $\int e^x \cos(nx)\,dx = \frac{1}{1+n^2} e^x \cos nx + \frac{n}{1+n^2} e^x \sin nx + c$

/5

(b) Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$

/6

11. In welk punt van het oppervlak $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 8$ is $x - 2y + 2z$ maximaal?

/5

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/100

*0.7 =

/70

Oplossingen:

1. Los op:
$$iz^3 + 4z^2 + (-8+10i)\, z + (28+16i) = 0$$
Hint: geen enkel nulpunt hiervan is reëel!

$$\begin{array}{c|cccc|c} & i & 4 & -8+10i & 28+16i \\ 2i & & -2 & 4i & -28-16i \\ \hline & i & 2 & -8+14i & 0 \end{array}$$

$(z-2i)\left(iz^2+2z+(-8+14i)\right)=0$
$\Delta = 2^2 - 4\cdot i\cdot(-8+14i) = 60+32i = (x+yi)^2$
$\begin{cases} x^2-y^2=60 \\ xy=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=60 \\ x^2\left(-y^2\right)=-256 \end{cases} \Rightarrow \lambda^2-60\lambda-256=0 \Rightarrow \lambda\in\{-4,64\} \Rightarrow \begin{cases} x^2=64 \\ y^2=4 \end{cases} \Rightarrow$
$x+yi=\pm(8+2i)$
$\Rightarrow z_{2,3} = \dfrac{2\pm(8+2i)}{2i} = \begin{cases} 1-5i \\ -1+3i \end{cases}$
$\Rightarrow$ Oplossingen: $\{2i, 1-5i, -1+3i\}$

2. De lineaire transformatie t van $\mathbb{R}'^3$ beeldt de punten $p\,(1,2,1)\,, q\,(2,3,2)$ en $r\,(3,1,4)$ af op de punten $p'\,(3,-2,1)\,, q'\,(5,0,3)$ en $r'\,(2,19,9)$

   (a) Zoek de matrix T van t
   $T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 19 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 19 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) Zoek hiervan de eigenwaarden en –ruimten
   $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -4-\lambda & 5 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+5\lambda-2=0 \Rightarrow -(\lambda-2)\left(\lambda^2+2\lambda-1\right)=0 \Rightarrow \operatorname{Spec} T = \left\{2, -1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right\}$

   - Als $\lambda=2 \Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - Als $\lambda = -1+\sqrt{2} \Rightarrow E_{-1+\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} 4-\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 1 & -3-\sqrt{2} & 5 \\ 2 & -1 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
   $E_{-1+\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1+3\sqrt{2} \\ 36-11\sqrt{2} \\ 17 \end{pmatrix}$
   - Als $\lambda = -1+\sqrt{2} \Rightarrow E_{-1-\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 1 & -3+\sqrt{2} & 5 \\ 2 & -1 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
   $E_{-1-\sqrt{2}} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1-3\sqrt{2} \\ 36+11\sqrt{2} \\ 17 \end{pmatrix}$

3. Bewijs dat $\operatorname{Bgtg}\dfrac{1}{10} + \operatorname{Bgtg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Bgtg}\dfrac{17}{32} = \dfrac{\pi}{4}$
Stel $\alpha = \operatorname{Bgtg}\dfrac{1}{10}, \beta = \operatorname{Bgtg}\dfrac{1}{5}, \gamma = \operatorname{Bgtg}\dfrac{17}{32}$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{10}, \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}, \operatorname{tg}\gamma = \frac{17}{32}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}}{1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}} = \frac{\dfrac{1}{10}+\dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{17}{32}}{1-\dfrac{1}{5}\dfrac{17}{32}}}{1-\dfrac{1}{10}\dfrac{\dfrac{1}{5}+\dfrac{17}{32}}{1-\dfrac{1}{5}\dfrac{17}{32}}} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$$

4. Bereken $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{2x+5}}$ met een methode naar keuze.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{3x+3}-\sqrt{2x+5}} = \frac{3-3}{3-3} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{3x+3}-\sqrt{2x+5}\right)\left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+7-5x+1)\left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{5x-1}\right)(3x+3-2x-5)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(-4x+8)\left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{5x-1}\right)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-4\left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+5}\right)}{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{5x-1}\right)} = \frac{-4\cdot(3+3)}{(3+3)} = -4$$

5. Onderzoek de asymptoten en de ligging van de functie (boven, onder) hiertegenover voor $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2-2x-3}$

- VA: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{3}{0} \Rightarrow$

x		-1		3	
N	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow x = 1 \text{ is een VA}$$

- VA: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{31}{0} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \dfrac{3}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -3} f(x) = \dfrac{3}{0^-} = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow x = 3 \text{ is een VA}$$

x		$-\sqrt[3]{-4}$		-1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	⌝∣⌜	$-$	⌝∣⌞	$+$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ Er is geen HA
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ en $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x) = 2 \Rightarrow x+2$ is een SA

Tekenverloop: $f(x) - x - 2 = \dfrac{7x+10}{x^2-2x-3} = 0$

x		$-\frac{10}{7}$		-1		3	
$f(x) - SA$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$

Dus als $x \to +\infty \Rightarrow f$ boven SA, als $x \to -\infty \Rightarrow f$ onder SA

6. Bereken

(a) $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$. Hint: gebruik de formules van Simpson.

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x)\cos 3x dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos 4x \cos 3x + \cos 6x \cos 3x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}(\cos x + \cos 7x) + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 9x)\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int (\cos x + \cos 7x + \cos 3x + \cos 9x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{36}\sin 9x + c
\end{aligned}$$

(b) $\int x\sqrt{x^2+4x+5}dx$. Hint: gebruik de substitutie $x + 2 = \operatorname{sh} t$ (andere substituties zijn mogelijk maar dit is de kortste)

$$\begin{aligned}
I &= \int (x+2)\sqrt{x^2+4x+5}dx - 2\int \sqrt{x^2+4x+5}dx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - 2\int \sqrt{x^2+4x+5}dx \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - 2\int \sqrt{(x+2)^2+1}dx
\end{aligned}$$

Stel $x + 2 = \operatorname{sh} t \Rightarrow \begin{cases} dx = \operatorname{ch} t dt \\ \operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+(x+2)^2} = \sqrt{x^2+4x+5} \end{cases}$

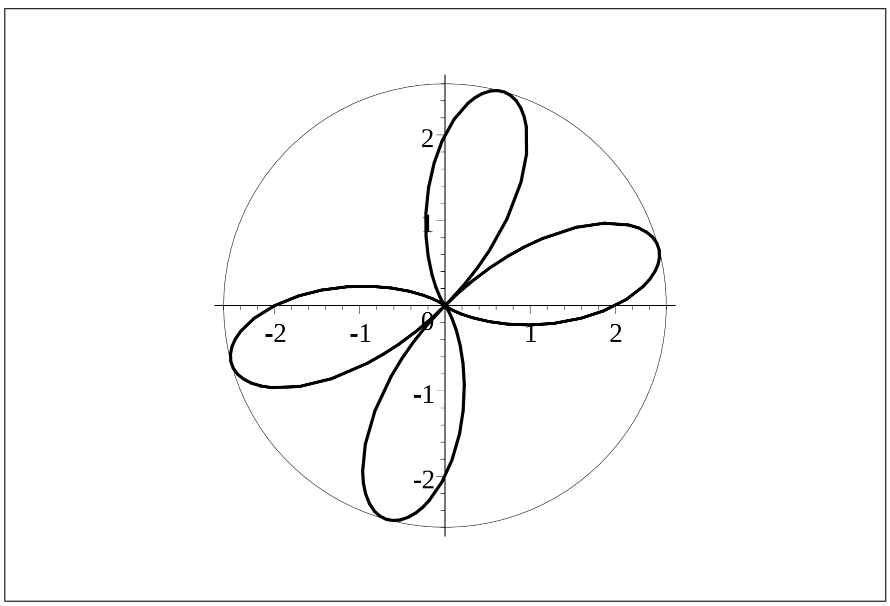
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - 2\int \operatorname{ch}^2 t dt \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - \int (1+\operatorname{ch} 2t)\, dt \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + c \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + c \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - \operatorname{Bgsh}(x+2) - (x+2)\sqrt{x^2+4x+5} + c \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x+5)^3} - (x+2)\sqrt{x^2+4x+5} + c
\end{aligned}$$

7. Gegeven de poolkromme $r(\theta) = \sin 4\theta + 2\cos 2\theta$

(a) Maak hiervan een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide, plus een tekening.

- Periode: π, interval is $[0, \pi]$ bijvoorbeeld.
- $r(\theta) = \sin 4\theta + 2\cos 2\theta = 0$
  $\Leftrightarrow 2\sin 2\theta \cos 2\theta + 2\cos 2\theta = 2\cos 2\theta\,(\sin 2\theta + 1) = 0$
  $\Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$
- $r'(\theta) = 8\cos^2 2\theta - 4 - 4\sin 2\theta = 8\left(1 - \sin^2 2\theta\right) - 4 - 4\sin 2\theta = -8\sin^2 2\theta - 4\sin 2\theta + 4 = 0$
  $\Rightarrow 2\sin^2 2\theta + \sin 2\theta - 1 = 0$
  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$
  $\Rightarrow \sin 2\theta = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin 2\theta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2\theta = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2\theta = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ \theta = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$
-

θ	0		$\dfrac{\pi}{12}$		$\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{5\pi}{12}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		π
$r(\theta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$r'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
$r(\theta)$	$\nearrow$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
			$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$				$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$				



(b) Bereken de oppervlakte van de alsdus bekomen figuur.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin 4\theta + 2\cos 2\theta)^2 \, d\theta = 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sin^2 4\theta + 4\sin 4\theta \cos 2\theta + 4\cos^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1 - \cos 8\theta}{2} + 2\sin 6\theta + 2\sin 2\theta + 4\frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \cos 8\theta + 4\sin 6\theta + 4\sin 2\theta + 4 + 4\cos 4\theta)\, d\theta$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (5 - \cos 8\theta + 4\sin 6\theta + 4\sin 2\theta + 4\cos 4\theta)\, d\theta$$
$$= \left[5\theta - \frac{1}{8}\sin 8\theta - \frac{2}{3}\cos 6\theta - 2\cos 2\theta + \sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{5}{2}\pi$$

(c) Wat is de minimale straal waarbinnen de gehele figuur past? (Hint: dit zou je moeten weten uit het tekenonderzoek):
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

8. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y' = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right) y + x^2y^2$$

Hint: zoek eerst 1 particuliere oplossing en ga deze niet te ver zoeken.
Dit is een differentiaalvergelijkig van Ricatti met als particuliere oplossing $y = x$ We stellen

$$y = x + \frac{1}{u}$$

$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = x^4 + 5 + \left(-\frac{4}{x} - 2x^3\right)\left(x + \frac{1}{u}\right) + x^2\left(x + \frac{1}{u}\right)^2$
$\Rightarrow 1 - \frac{u'}{u^2} = 1 - \frac{4}{ux} + \frac{x^2}{u^2}$
$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{4}{ux} + \frac{x^2}{u^2}$
$\Rightarrow u' - \frac{4}{x}u = -x^2$
Stel $\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = \frac{1}{x^4}$
$\Rightarrow \frac{u'}{x^4} - \frac{4u}{x^5} = -\frac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \left(\frac{u}{x^4}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\Rightarrow \frac{u}{x^4} = \frac{1}{x} + c$
$\Rightarrow u = x^3 + cx^4$
$\Rightarrow y = x + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{x^3 + cx^4}$ met als SO $y = x$

9. Bewijs dat

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + ... + n(n+1) + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)$$

en geef een goede reden waarom deze uitkomst altijd een geheel getal is.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(k(k+1)+k(k+2)) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k+k^2+2k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+3k\right)\\
&= 2S_2(n)+3S_1(n)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\
&= \frac{1}{3}\left(2n^3+3n^2+n\right)+\frac{3}{2}\left(n^2+n\right)=\frac{2}{3}n^3+\frac{5}{2}n^2+\frac{11}{6}n\\
&= \frac{1}{6}\left(15n^2+11n+4n^3\right)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+11)
\end{aligned}$$

n of $n+1$ is even, dus $n(n+1)(4n+11)$ is deelbaar door 2
Als $n\equiv 0 \bmod 3$ dan is n en dus $n(n+1)(4n+11)$ deelbaar door 3
Als $n\equiv 2 \bmod 3$ dan is $n+1$ en dus $n(n+1)(4n+11)$ deelbaar door 3
Als $n\equiv 1 \bmod 3$ dan is $4n+11=15 \bmod 3=0 \bmod 3$ en dus $4n+11$ en dus $n(n+1)(4n+11)$ deelbaar door 3
$n(n+1)(4n+11)$ is dus deelbaar door 6

10.

(a) Bewijs dat $\int e^x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{1+n^2}e^x\cos nx+\frac{n}{1+n^2}e^x\sin nx+c$

Nu is $\int e^x\cos(nx)\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\cos nx\\ dv=e^x dx\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du=-n\sin nx dx\\ v=e^x\end{array}\right.$$

$= e^x\cos nx+n\int e^x\sin nx dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\sin nx\\ dv=e^x dx\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du=n\cos nx dx\\ v=e^x\end{array}\right.$$

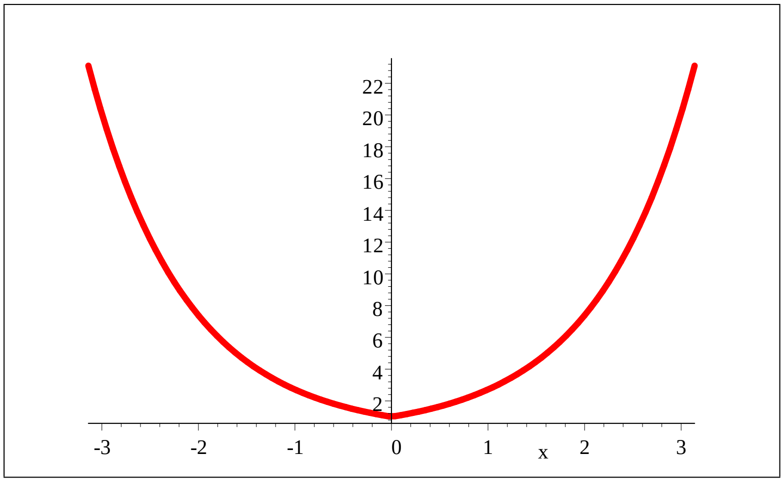
$= e^x\cos nx+n\left(e^x\sin nx-n\int e^x\cos nx dx\right)$

$= e^x\cos nx+ne^x\sin nx-n^2\int e^x\cos nx dx$

$\Rightarrow \left(n^2+1\right)\int e^x\cos(nx)\,dx=e^x\cos nx+ne^x\sin nx+c$

$\Rightarrow \int e^x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n^2+1}e^x\cos nx+\frac{n}{n^2+1}e^x\sin nx+c$

(b) Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = e^{|x|}$ op $[-\pi, \pi]$



Deze functie is duidelijk even.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi}\left[e^x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+n^2}e^x\cos nx + \frac{n}{1+n^2}e^x \sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+n^2}\left(e^{\pi}\cos n\pi - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{2\left(e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)} & \text{als } n \text{ even} \\ \dfrac{2\left(-e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)} & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases} = \frac{2\left((-1)^n e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) \overset{\text{b.o.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right) + \sum_{n=1}^{k}\frac{2\left((-1)^n e^{\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}\cos nx$$

11. In welk punt van het oppervlak $x^2+y^2+z^2+2x=8$ is $x-2y+2z$ maximaal?

$$F(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2+y^2+z^2+2x-8\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2+2x-8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} - 1 \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-1}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2+2x-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} - 1 \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-1}{\lambda} \\ x^2+y^2+z^2+2x-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2\lambda}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2\lambda}-1\right) - 8 = \frac{9}{4\lambda^2} - 9 = 0 \Rightarrow \lambda \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

- Als $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow (x,y,z) = (-2,2,-2) \Rightarrow f(x,y,z) = -2 - 2\cdot 2 + 2\cdot(-2) = -10 \Rightarrow$ minimum
- Als $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-2,2) \Rightarrow f(x,y,z) = 0 + 2\cdot 2 - 2\cdot(-2) = 8 \Rightarrow$ maximum