Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 2e zittijd 2015–2016

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Bereken $\frac{1}{(1+2i)^4} + \frac{1}{(1-2i)^4}$.

/6

2. De veelterm $A(z) = 9z^3 + (1+i)z^2 + az + b$ heeft als rest bij deling door $(z - i)$ de waarde $2 - 6i$ en heeft als rest bij deling door $(z - 1)$ de waarde $10 + 2i$. Zoek a en b.

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x - 2}{6x^3 - 15x^2 + 12x - 3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{x - 8}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos x + \cos 3x}$

4. Los op:

$$\frac{2}{\log_{x+1} 2} - \log_2 (44x - 16) + 3 = 0$$

$\boxed{\qquad /6}$

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)\ln x}$.

/6

6. Bestudeer de functie

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}.$$

Onderzoek domein, asymptoten, nulpunten, tekenonderzoek van de eerste twee afgeleiden, en maak een tekening.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{7x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{\sin x + \cos x - 1} dx$$

/6

9. Bereken de integraal $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ met $n = 5$ (voor Simpson $n = 10$) met de middelpuntsmethode en de trapeziummethode met $n = 5$, en de methode van Simpson met $n = 10$, bereken de fout, en vergelijk met de werkelijke waarde. Je krijgt cadeau dat $\|f''\| \leq \frac{3}{2}$ en dat $\left\|f^{iv}\right\| \leq 20$

$\boxed{\qquad /6}$

10. Bepaal de oppervlakte binnen de poolkromme $r_1(\theta) = 1$ en buiten de poolkromme $r_2(\theta) = \cos 2\theta$. Maak een tekening.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Bereken $\dfrac{1}{(1+2i)^4}+\dfrac{1}{(1-2i)^4}$
$= \dfrac{1}{1+8i-24-32i+16}+\dfrac{1}{1-8i-24+32i+16}$
$= \dfrac{1}{-7-24i}+\dfrac{1}{-7+24i}$
$= -\dfrac{7}{625}+\dfrac{24}{625}i-\dfrac{7}{625}-\dfrac{24}{625}i$
$= -\dfrac{14}{625}$

2. De veelterm $A(z)=9z^3+(1+i)z^2+az+b$ heeft als rest bij deling door $(z-i)$ de waarde $2-6i$ en heeft als rest bij deling door $(z-1)$ de waarde $10+2i$. Zoek a en b.
$\begin{cases} A(i)=2-6i \\ A(1)=10+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1+b+i(-10+a)=2-6i \\ 10+i+a+b=10+2i \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} ia+b=3+4i \\ a+b=i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+i)a=3+3i \\ a+b=i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3i \\ b=4i \end{cases}$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+2x^2-2x-2}{6x^3-15x^2+12x-3}=\frac{0}{0}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)^2}{3(x-1)^2(2x-1)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+1)^2}{3(x-1)(2x-1)}=\frac{8}{0}$

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{2(x+1)^2}{3(x-1)(2x-1)}=\frac{8}{0^+}=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{2(x+1)^2}{3(x-1)(2x-1)}=\frac{8}{0^-}=-\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8}=\frac{0}{0}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 8}\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}-4\right)\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+16\right)}{(x-8)\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+16\right)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 8}\frac{(x^2-64)}{(x-8)\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+16\right)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x+8)}{(x-8)\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+16\right)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 8}\frac{x+8}{x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+16}=\frac{4}{4+4+4}=\frac{1}{3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 2x+\sin 6x}{\cos x+\cos 3x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\sin 4x\cos 2x}{2\cos 2x\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 4x}{\cos x}$
Stel $y=\dfrac{\pi}{2}-x$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 4\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin 4y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{-4y\cdot\sin 4y}{4y\cdot\sin y} = -4\lim_{y\to 0} \frac{\sin 4y}{4y}\cdot\frac{y}{\sin y} = -4$$

4. Los op:
$$\frac{2}{\log_{x+1} 2} - \log_2(44x-16) + 3 = 0$$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x+1) - \log_2(44x-16) + 3 = 0$
$\Leftrightarrow 2\log_2(x+1) = \log_2(44x-16) - 3$
$\Leftrightarrow \log_2(x+1)^2 = \log_2(44x-16) - \log_2 8$
$\Leftrightarrow \log_2(x+1)^2 = \log_2 \frac{(44x-16)}{8}$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{11}{2}x - 2$
$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 11x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(2x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x \in \left\{2, \frac{3}{2}\right\}$

5. Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)\ln x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{(x+1)\ln x}\right) = \frac{2x(x+1)\ln x - x^2\frac{d}{dx}((x+1)\ln x)}{(x+1)^2\ln^2 x}$$
$$= \frac{2x^2\ln x + 2x\ln x - x^2\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)}{(x+1)^2\ln^2 x}$$
$$= \frac{2x^2\ln x + 2x\ln x - x^2\ln x - x^2 - x}{(x+1)^2\ln^2 x}$$
$$= \frac{x^2\ln x + 2x\ln x - x^2 - x}{(x+1)^2\ln^2 x}$$

6. Bestudeer de functie
$$f(x) = 1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}.$$

Onderzoek domein, asymptoten, nulpunten, tekenonderzoek van de eerste twee afgeleiden, en maak een tekening.

- $f(x) = 1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} = \frac{x^2+6x+8}{x^2} = \frac{(x+4)(x+2)}{x^2}$
  dom $f = \mathbb{R}_0$
- Asymptoten
  - Verticale asymptoot:
    $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$
    $\Rightarrow x = 0$ is een verticale asymptoot
  - Horizontale asymptoot
    $f(x) = 1 + \frac{6x+8}{x^2} \Rightarrow y = 1$ is een horizontale asymptoot

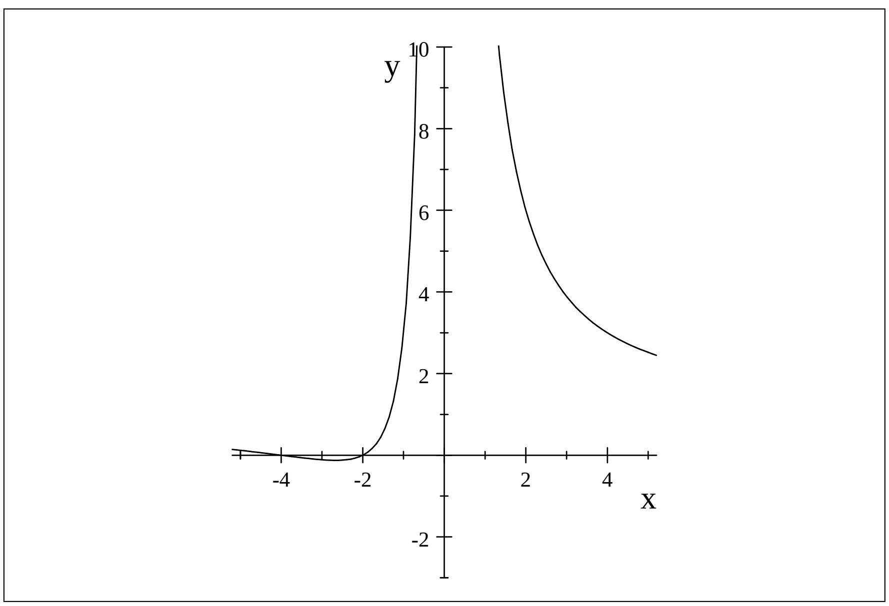
x		$-\frac{4}{3}$		0	
$f - A = \frac{6x+8}{x^2}$	$-$	0	$+$	$\vert^{(2)}$	$+$

Als $x \to +\infty$, dan ligt f boven A; als $x \to -\infty$, dan ligt f onder A

- Nulpunten: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+2) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -2\}$
  Polen: $N = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x \in \left\{0^{(2)}\right\}$
- $f'(x) = \dfrac{-6x-16}{x^3}$
  Nulpunten: $x = -\dfrac{8}{3}$
  Polen: $x \in \left\{0^{(3)}\right\}$
- $f''(x) = \dfrac{12x+48}{x^4}$
  Nulpunten: $x = -4$
  Polen: $x \in \left\{0^{(4)}\right\}$

x		-4		$-\frac{8}{3}$		-2		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\vert^{(2)}$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\vert^{(3)}$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\vert^{(4)}$	$+$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$
	$\frown$	B	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\smile$		$\smile$
		0		$-\frac{1}{8}$					

- Tekening:



7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss:

$$\int \frac{7x^2+8x+4}{x^3+3x^2+4x+2}\,dx$$

$$\frac{7x^2+8x+4}{x^3+3x^2+4x+2} = \frac{7x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} A(-1+i)+B &= \frac{7x^2+8x+4}{x+1}\Big|_{x=-1+i} = -6+4i \\ &\Rightarrow \begin{cases} -A+B=-6 \\ Ai=4i \end{cases} \Rightarrow (A,B)=(4,-2) \\ C &= \frac{7x^2+8x+4}{x^2+2x+2}\Big|_{x=-1} = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{4x-2}{x^2+2x+2} + \frac{3}{x+1}\right) dx = \int \frac{(4x-2)\,dx}{x^2+2x+2} + \int \frac{3dx}{x+1}$$
$$= 2\int \frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2} - 6\int \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int \frac{3dx}{x+1}$$
$$= 2\ln\left|x^2+2x+2\right| - 6\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} + 3\ln|x+1|$$
$$= 2\ln\left|x^2+2x+2\right| - 6\,\mathrm{Bgtan}\,(x+1) + 3\ln|x+1| + c$$

8. Bereken
$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{\sin x + \cos x - 1} dx$$

$$\begin{aligned} t = \tan\frac{x}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = 2\,\mathrm{Bgtan}\,t \\ &\qquad\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ &\Rightarrow \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \\ &\Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ &\Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{3-3t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$= \int \frac{2t+3-3t^2}{2t+1-t^2-1-t^2} \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$= \int \frac{3t^2-2t-3}{(t^2-t)(t^2+1)} dt$$
$$= \int \frac{3t^2-2t-3}{t(t-1)(t^2+1)} dt$$

Stel $\dfrac{3t^2-2t-3}{t(t-1)(t^2+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{Ct+D}{t^2+1}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{3t^2-2t-3}{(t-1)(t^2+1)}\Big|_{t=0} = 3 \\ B &= \frac{3t^2-2t-3}{t(t^2+1)}\Big|_{t=1} = -1 \\ Ci+D &= \frac{3t^2-2t-3}{t(t-1)}\Big|_{t=i} = 4-2i \Rightarrow (C,D) = (-2,4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{-2t+4}{t^2+1}\right) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} + 4\int \frac{dt}{t^2+1} \\
&= 3\ln|t| - \ln|t-1| - \ln\left|t^2+1\right| + 4\,\mathrm{Bgtan}\,t + c \\
&= 3\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\tan\frac{x}{2}-1\right| - \ln\left|\tan^2\frac{x}{2}+1\right| + 2x + c
\end{aligned}
$$

9. Bereken de integraal $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ met $n=5$ (voor Simpson $n=10$) met de middelpuntsmethode en de trapeziummethode met $n=5$, en de methode van Simpson met $n=10$, bereken de fout, en vergelijk met de werkelijke waarde. Je krijgt cadeau dat $\|f''\| \leq \frac{3}{2}$ en dat $\left\|f^{iv}\right\| \leq 20$

- Werkelijke waarde: $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0.3465735903$

  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

x	$f(x)$	M	T	S
0	0		1	1
0.1	0.0990099010	1		4
0.2	0.1923076923		2	2
0.3	0.2752293578	1		4
0.4	0.344827 5862		2	2
0.5	0.4	1		4
0.6	0.4411764706		2	2
0.7	0.4697986577	1		4
0.8	0.4878048780		2	2
0.9	0.4972375691	1		4
1	0.5		1	2

- Middelpuntsbenadering:

$$M_5 = \frac{1}{5}\left(f(0.1)+f(0.3)+f(0.5)+f(0.7)+f(0.9)\right) \simeq 0.3482550971$$

  Fout: $\|f''\| \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx - M_5\right| \leq \frac{\frac{3}{2}\cdot 1^3}{24\cdot 5^2} = \frac{1}{400} = 0.0025$$

- Trapeziumbenadering:

$$T_4 = \frac{1}{10}\left(f(0)+2f(0.2)+2f(0.4)+2f(0.6)+2f(0.8)+f(1)\right) \simeq 0.3432233254$$

  Fout: $\|f''\| \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx - M_5\right| \leq \frac{\frac{3}{2}\cdot 1^3}{12\cdot 5^2} = \frac{1}{200} = 0.005$$

- Simpsonbenadering:

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{1}{30}\left(f(0)+4f(0.1)+2f(0.2)+4f(0.3)+2f(0.4)+4f(0.5)+2f(0.6)+4f(0.7)+2f(0.8)+4f(0.9) \right. \\
&= \frac{26}{3} \simeq 0.3465778399
\end{aligned}
$$

Fout: $\left\| f^{iv} \right\| \leq 20$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx - S_{10} \right| \leq \frac{20 \cdot 1^5}{180 \cdot 10^4} = \frac{1}{90\,000} \simeq 0.00001111111$$

10. Bepaal de oppervlakte binnen de poolkromme $r_1(\theta) = 1$ en buiten de poolkromme $r_2(\theta) = \cos 2\theta$. Maak een tekening.

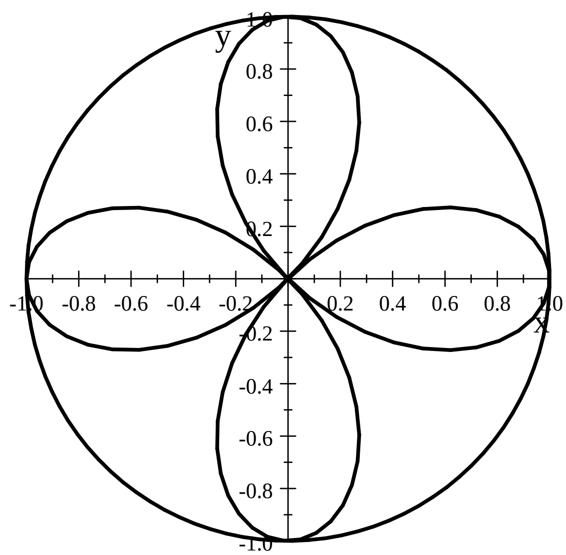
    r_1 is de cirkel met straal 1

    r_2 : Periode: $\pi \Rightarrow$ We onderzoeken de functie op $[0, \pi]$

    $r_2(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

    $r_2'(\theta) = -2\sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = k\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$r_2(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$r_2'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
	$M(1)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m(-1)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$M(1)$



$$S = \pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta = \pi - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 2\theta d\theta = \pi - 4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= \pi - 4 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta = \pi - 2 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \pi - 2 \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$