

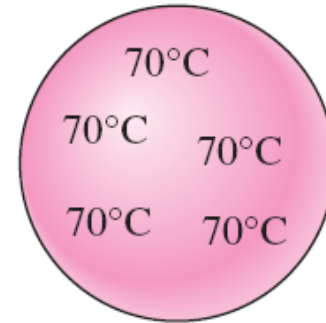
Hfdst 10: Transiënte warmtegeleiding

1. Lumpinganalyse
2. Transiënte warmtegeleiding in grote vlakke wanden, lange cilinders en bollen met ruimtelijke effecten
3. Transiënte warmtegeleiding in semi-oneindige vaste materialen
4. Transiënte warmtegeleiding in multidimensionale systemen

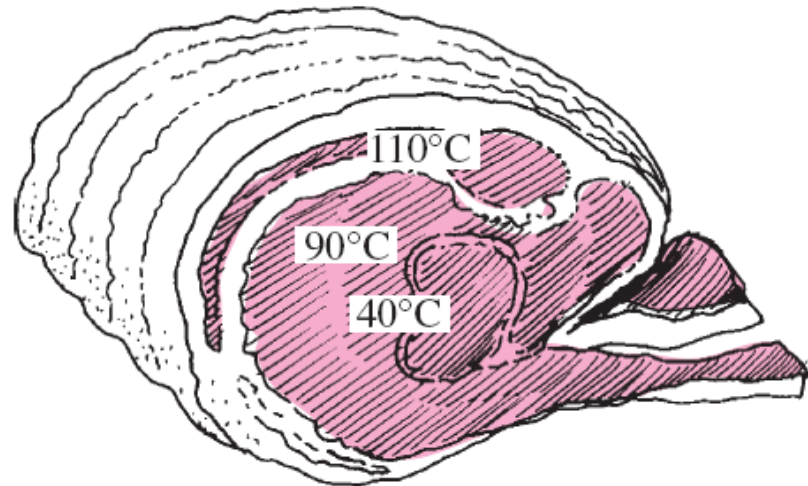
1. Lumpinganalyse

- **Lumpingprincipe**

- *Koperen bal*: weinig verandering van de temperatuur met de afstand => lumping is toepasbaar
- *Stuk vlees*: significante variatie van de temperatuur met de afstand => lumping is niet toepasbaar



(a) Copper ball



(b) Roast beef

- Lumpingbalans

(warmteoverdracht in lichaam [J/s]) = (energietoename in lichaam [J/s])

$$hA_s(T_\infty - T) dt = mc_p dT$$

$$m = \rho V \quad dT = d(T - T_\infty)$$

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} dt$$

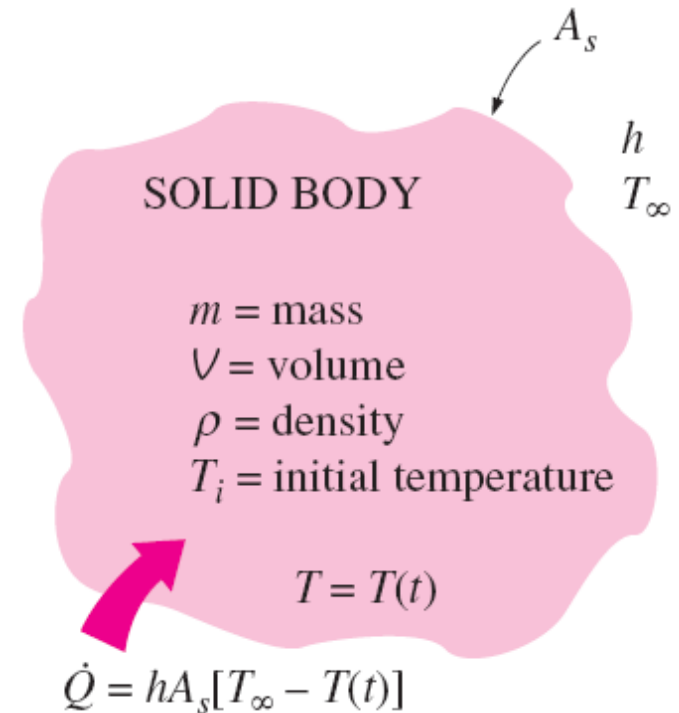
Integreren met

$T = T_i$ at $t = 0$

$T = T(t)$ at $t = t$

$$\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{hA_s}{\rho V c_p} t$$

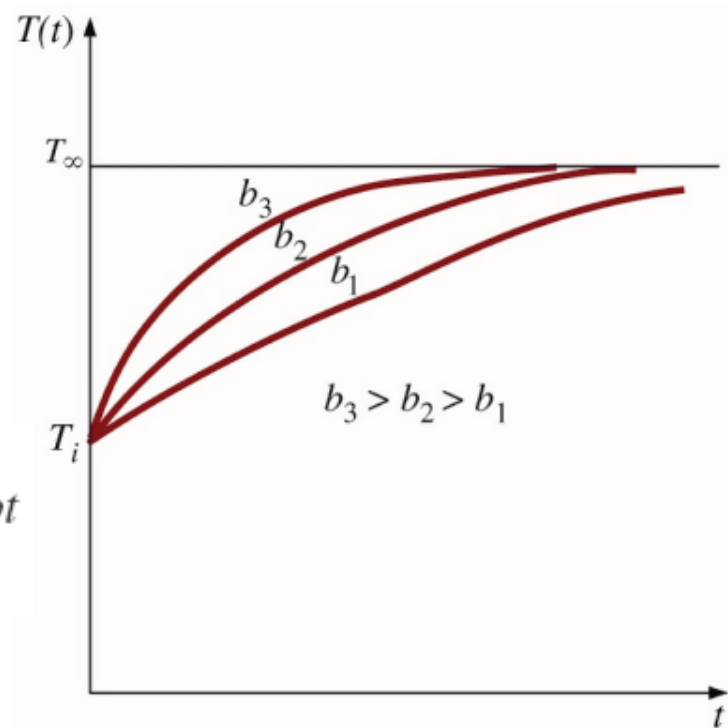
$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \quad b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \quad (1/s)$$



● Lumpingbalans

b in s^{-1}
 $\tau = 1/b$
time constant

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-bt}$$



- Deze vergelijking laat toe om de temperatuur $T(t)$ van een lichaam op tijdstip t te bepalen of de tijd t die nodig is opdat de temperatuur een bepaalde waarde bereikt.
- De temperatuur van een lichaam benadert de omgevingstemperatuur T_{∞} exponentieel.
- De temperatuur van een lichaam verandert snel in het begin en later langzamer. Een grote waarde van b geeft aan dat het lichaam snel de omgevingstemperatuur aanneemt.

- Warmteoverdracht van of naar een lichaam bereikt zijn maximale waarde wanneer het lichaam de omgevingstemperatuur aanneemt.

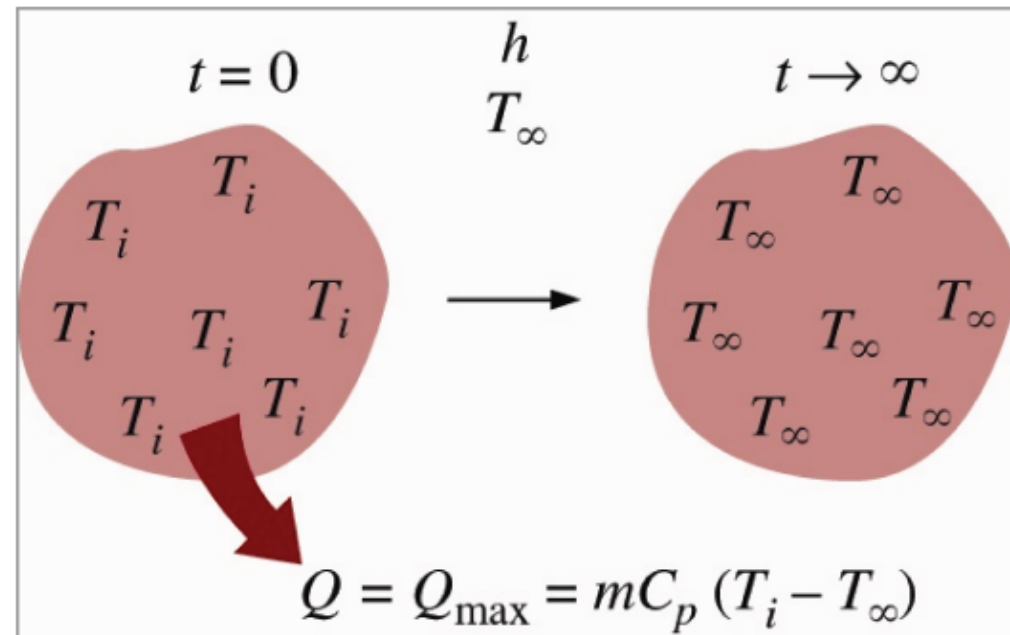
De totale warmtehoeveelheid overgedragen tussen lichaam en omgeving = verandering van de energie-inhoud van een lichaam:

$$Q = mc_p[T(t) - T_i] \quad (\text{kJ})$$

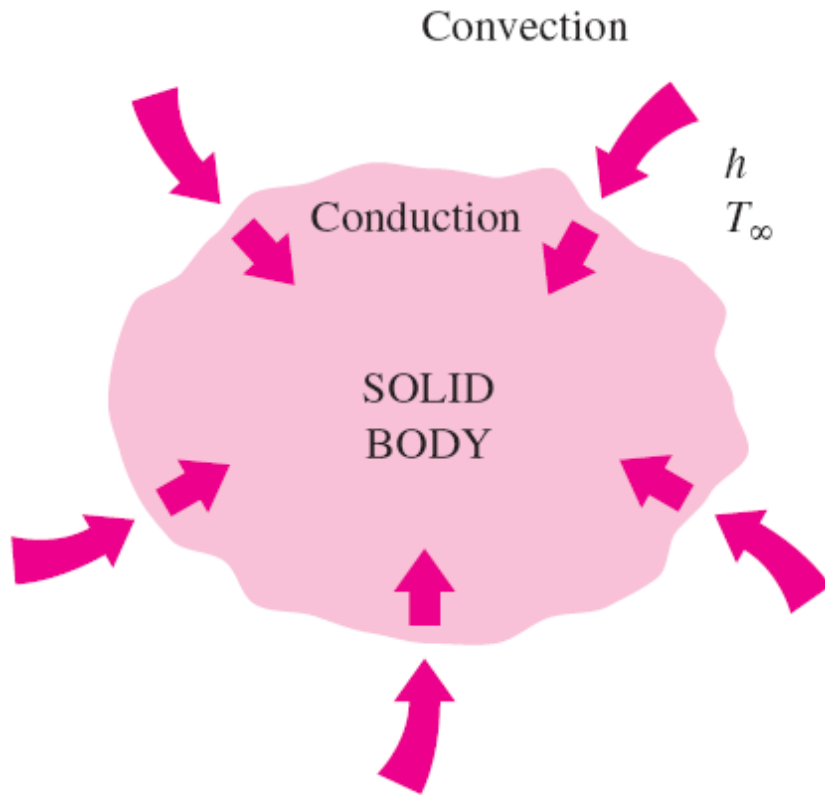
De *totale warmtehoeveelheid* overgedragen tussen een lichaam en het omgevend medium over een tijdsinterval $t = 0$ tot t .

$$Q_{\max} = mc_p(T_{\infty} - T_i) \quad (\text{kJ})$$

De **maximale** warmtehoeveelheid overgedragen tussen lichaam en omgeving.



- Criteria voor lumpinganalyse



$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad \text{Karakteristieke lengte}$$

$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} \quad \text{Getal van Biot}$$

Lumping toepassen $\longrightarrow \text{Bi} \leq 0.1$

Als $\text{Bi} \leq 0.1$, dan blijven de temperaturen in het lichaam t.o.v; de omgevingstemperatuur ($T - T_{\infty}$) binnen de 5%.

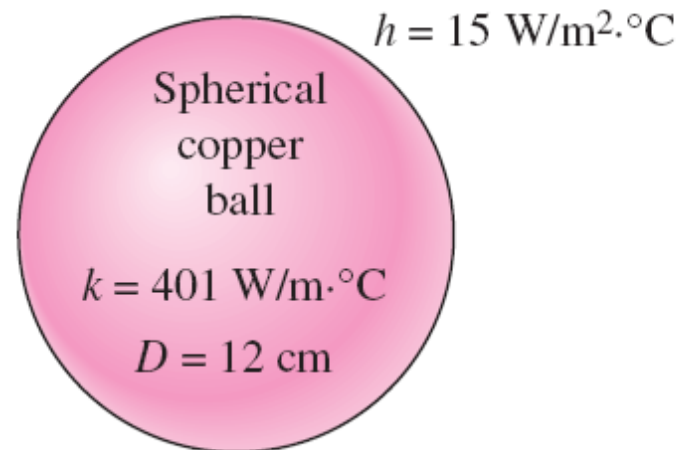
$$\text{Bi} = \frac{\text{heat convection}}{\text{heat conduction}}$$

$$\text{Bi} = \frac{h}{k/L_c} \frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convection at the surface of the body}}{\text{Conduction within the body}}$$

$$\text{Bi} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Conduction resistance within the body}}{\text{Convection resistance at the surface of the body}}$$

- Lumpinganalyse toepassen:

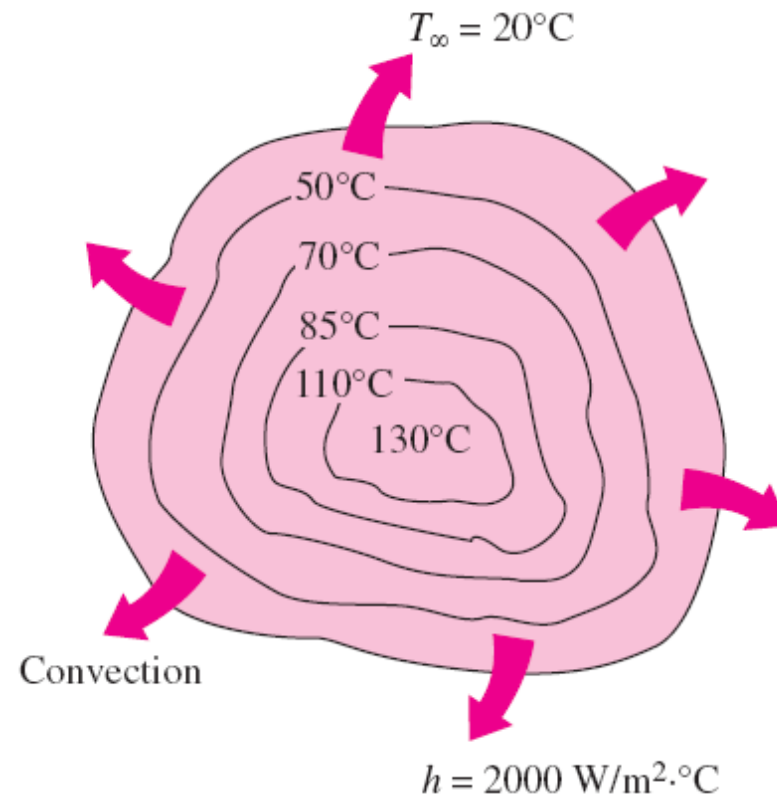
- een klein (L_c is klein) voorwerp dat
- goed geleidend (k is groot) is,
- in een medium dat een slechte warmtegeleider is (lucht of een ander gas) en bewegingsloos (h is klein): grote externe weerstand



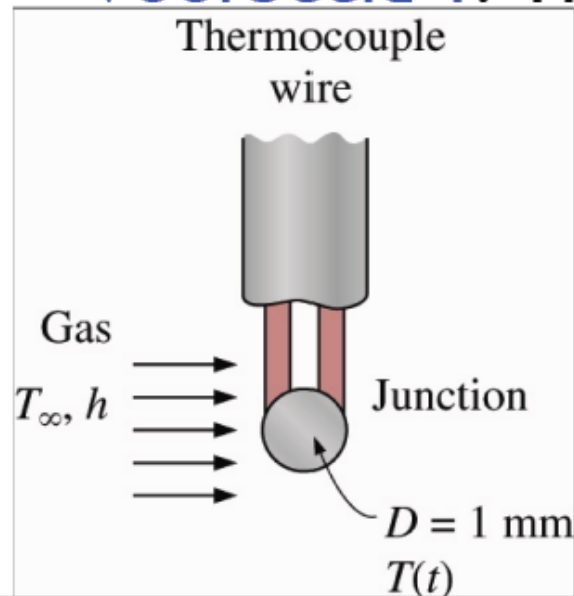
$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6} \pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6} D = 0.02 \text{ m}$$

$$\text{Bi} = \frac{h L_c}{k} = \frac{15 \times 0.02}{401} = 0.00075 < 0.1$$

- Lumpinganalyse **niet** toepassen:
 - slecht geleidend voorwerp (k is klein) \Rightarrow grote interne weerstand
 - h is groot \Rightarrow kleine externe weerstand



• Voorbeeld 1: Thermokoppel



$$\begin{aligned} k &= 35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \\ \rho &= 8500 \text{ kg/m}^3 \\ C_p &= 320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C} \\ h &= 210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Bepaal de tijd die nodig is om 99% van het initiële temperatuursverschil $T_i - T_\infty$ tussen de junctie en het gas af te lezen.

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6} D = \frac{1}{6}(0.001 \text{ m}) = 1.67 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} = \frac{(210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})}{35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.001 < 0.1$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.01 \quad b = \frac{hA_s}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{(8500 \text{ kg/m}^3)(320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})} = 0.462 \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow 0.01 = e^{-(0.462 \text{ s}^{-1})t} \Rightarrow t = 10 \text{ s} \quad 99\% \text{ van temperatuursevolutie in 10 s}$$

• Voorbeeld 2: Tijdstip van overlijden



Dode persoon aangetroffen om 17u00.

Lichaamstemperatuur = 25°C

$h = 8 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$

Stel het lichaam voor als een cilinder met een diameter van 30 cm en een lengte van 1,7 m.

Vermits het menselijk lichaam voor 72% uit water bestaat, mag men veronderstellen dat het lichaam de eigenschappen van water heeft bij een gemiddelde temperatuur van $(37+25)/2 = 31^\circ\text{C}$:

$k = 0,617 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$; $c_p = 4178 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$; $\rho = 996 \text{ kg/m}^3$

Bepaal het tijdstip van overlijden.

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2} = \frac{\pi (0.15 \text{ m})^2 (1.7 \text{ m})}{2\pi (0.15 \text{ m}) (1.7 \text{ m}) + 2\pi (0.15 \text{ m})^2} = 0.0689 \text{ m}$$

$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} = \frac{(8 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.0689 \text{ m})}{0.617 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.89 > 0.1$$

$$b = \frac{hA_s}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{8 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{(996 \text{ kg/m}^3)(4178 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(0.0689 \text{ m})} \\ = 2.79 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{25 - 20}{37 - 20} = e^{-(2.79 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})t}$$

=> lumpinganalyse is niet toe te passen, maar men kan wel een ruwe schatting bekomen.

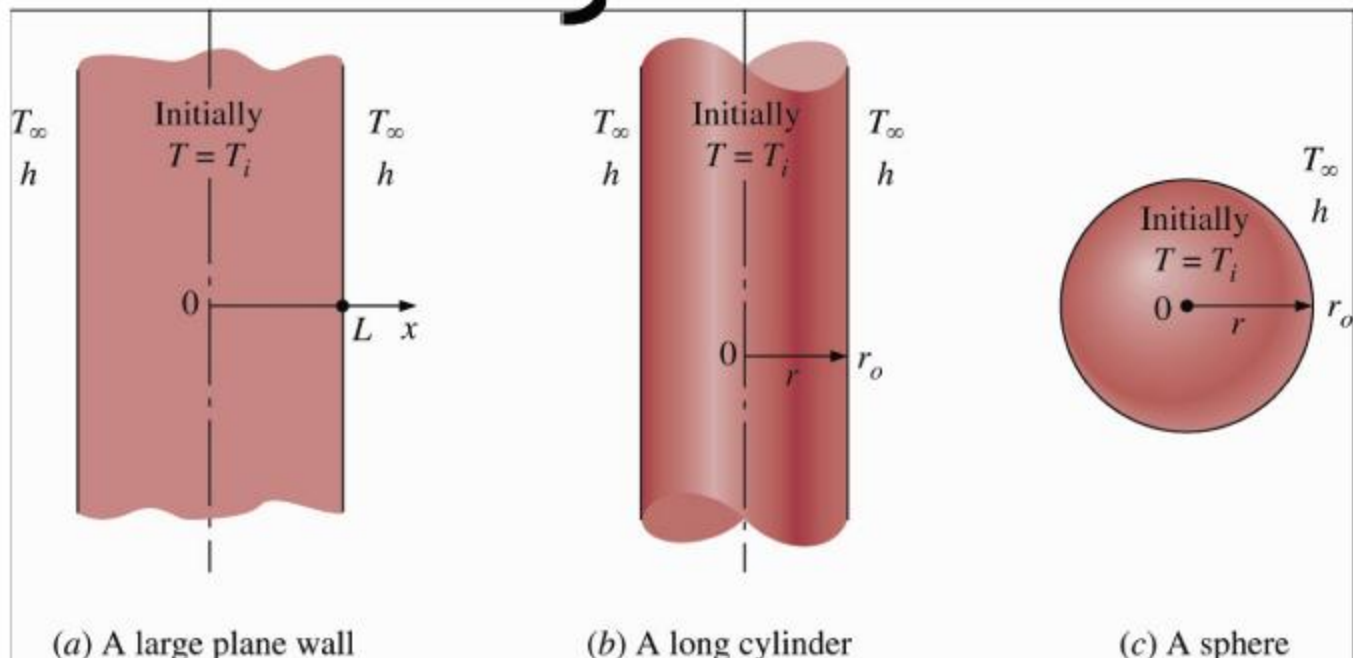
$$t = 43,860 \text{ s} = \mathbf{12.2 \text{ h}}$$

2. Transiënte warmtegeleiding in grote vlakke wanden, lange cilinders en bollen met ruimtelijke effecten

- 1-dimensionale geleiding in

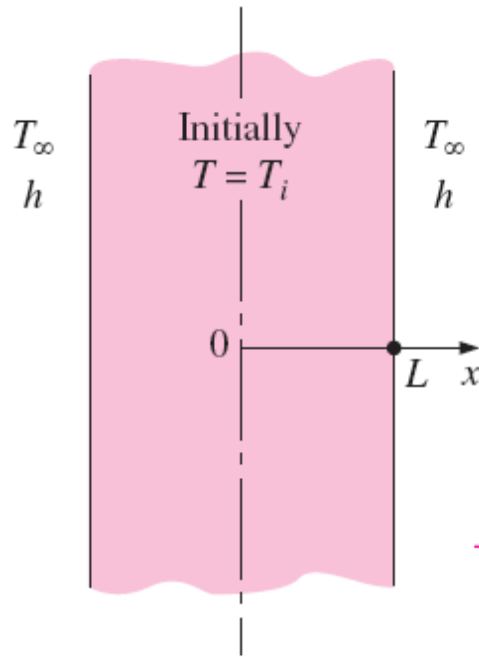
- Een grote vlakke plaat
- Een lange cilinder
- Een bol

Geometrische en thermische symmetrie



- Vlakke wand

- temperatuursprofiel



Differential equation:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = k/\rho c_p$$

Boundary conditions:

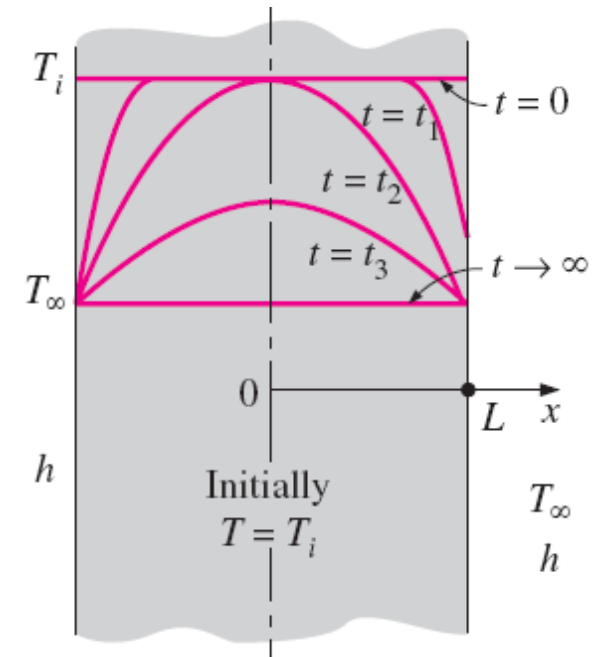
$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{and}$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

Initial condition:

$$T(x, 0) = T_i$$

(a) A large plane wall



(a) Original heat conduction problem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

$$T = F(x, L, t, k, \alpha, h, T_i)$$

$$\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i}$$

Dimensionless temperature

$$X = \frac{x}{L}$$

Dimensionless distance from the center

$$\text{Bi} = \frac{hL}{k}$$

Dimensionless heat transfer coefficient (Biot number)

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \text{Fo}$$

Dimensionless time (Fourier number)

(a) Original heat conduction problem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

$$T = F(x, L, t, k, \alpha, h, T_i)$$

(b) Nondimensionalized problem:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \theta(X, 0) = 1$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -\text{Bi} \theta(1, \tau)$$

$$\theta = f(X, \text{Bi}, \tau)$$

Het dimensieloos maken reduceert het aantal onafhankelijke variabelen van 8 tot 3, wat voordelig is om de resultaten voor te stellen.

$$x, L, t, k, \alpha, h, T_i, T_\infty \longrightarrow X, \text{Bi}, \text{Fo}$$

- Exacte oplossing voor transiënte 1-dimensionale geleiding

TABLE 18–1

Summary of the solutions for one-dimensional transient conduction in a plane wall of thickness $2L$, a cylinder of radius r_o and a sphere of radius r_o subjected to convection from all surfaces.*

Geometry	Solution	λ_n 's are the roots of
Plane wall	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_n}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x / L)$	$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$
Cylinder	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r / r_o)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \text{Bi}$
Sphere	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \sin(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_n x / L)}{\lambda_n x / L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$

*Here $\theta = (T - T_i)/(T_{\infty} - T_i)$ is the dimensionless temperature, $\text{Bi} = hL/k$ or hr_o/k is the Biot number, $\text{Fo} = \tau = \alpha t / L^2$ or $\alpha \tau / r_o^2$ is the Fourier number, and J_0 and J_1 are the Bessel functions of the first kind whose values are given in Table 18–3.

● Benaderende analytische en grafische oplossingen

De termen in de reeksenoplossingen convergeren snel met toenemende tijd en voor $\tau > 0,2$ kan men de eerste term behouden en de volgende verwaarlozen. Dit resulteert in een fout die kleiner is dan 2%.

Oplossingen voor de benadering met 1 term

Plane wall: $\theta_{\text{wall}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2$

Cylinder: $\theta_{\text{cyl}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0.2$

Sphere: $\theta_{\text{sph}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\sin(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0.2$

Center of plane wall ($x = 0$): $\theta_{0, \text{wall}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Center of cylinder ($r = 0$): $\theta_{0, \text{cyl}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

Center of sphere ($r = 0$): $\theta_{0, \text{sph}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$

TABLE 18-2

Coefficients used in the one-term approximate solution of transient one-dimensional heat conduction in plane walls, cylinders, and spheres ($Bi = hL/k$ for a plane wall of thickness $2L$, and $Bi = hr_o/k$ for a cylinder or sphere of radius r_o)

Bi	Plane Wall		Cylinder		Sphere	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

TABLE 18-3

The zeroth- and first-order Bessel functions of the first kind

η	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	-0.0968	-0.4708
2.8	-0.1850	-0.4097
3.0	-0.2601	-0.3391
3.2	-0.3202	-0.2613

- Heisler en Gröber-grafieken
- Vlakke wand

Voor $x=0$:

$$\theta_{0, \text{wall}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

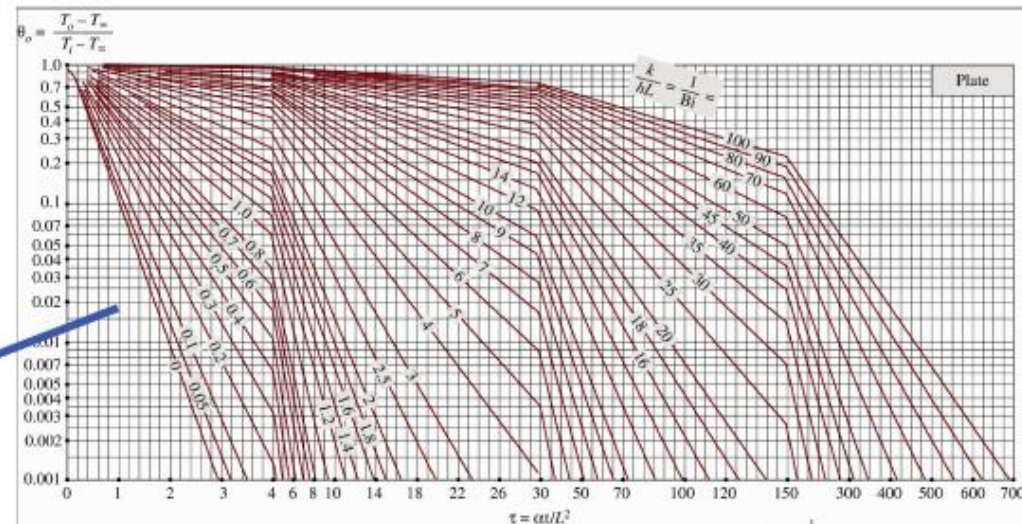
Bepalen van de temperatuur in het centrum

Bepalen van de temperatuur op andere plaats op zelfde tijd als in eerste grafiek

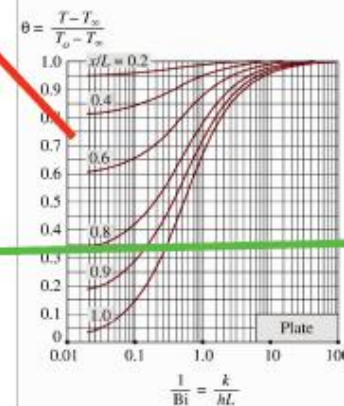
Bepalen van de warmtehoeveelheid tot tijd t

Maximale warmtehoeveelheid:

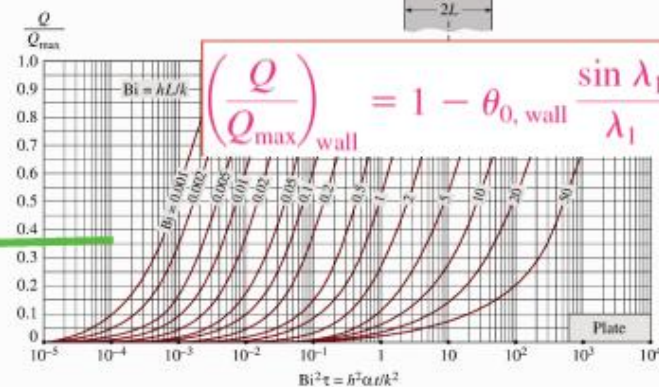
$$Q_{\max} = mc_p (T_\infty - T_i) = \rho V c_p (T_\infty - T_i)$$



(a) Midplane temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)

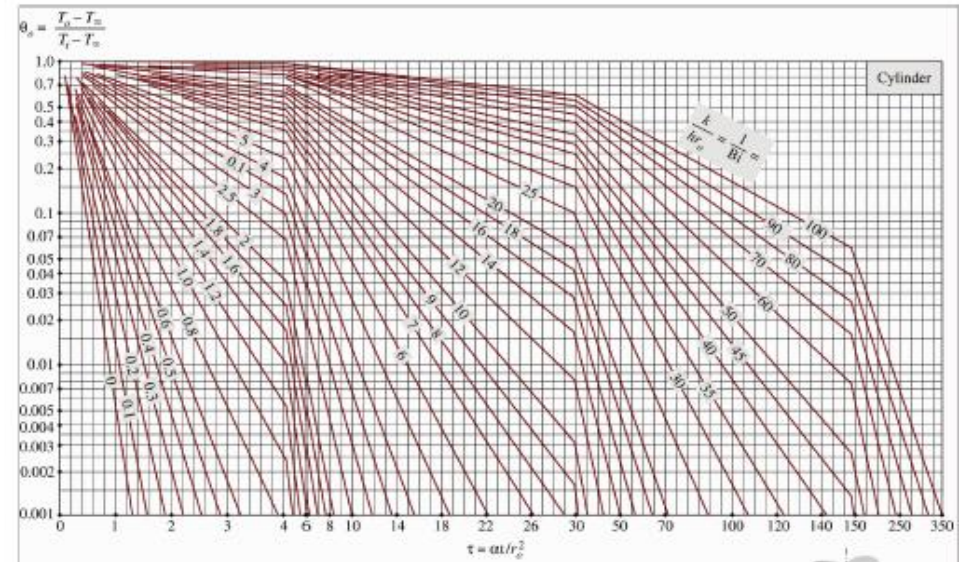


(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

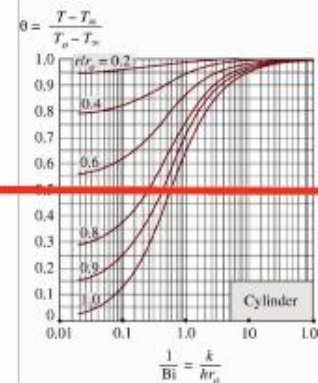
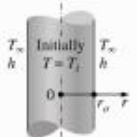
• Cilinder

Voor $x=0$:

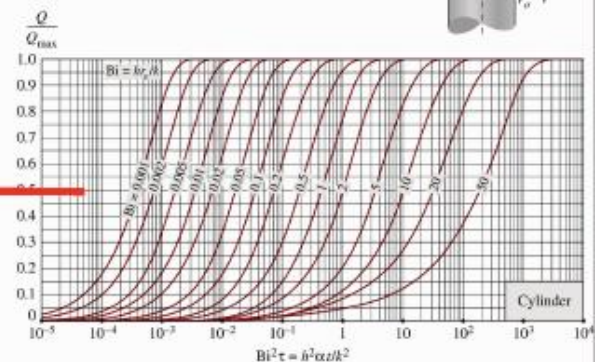
$$\theta_{0, \text{cyl}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$



(a) Centerline temperature (from M. P. Heisler)



(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



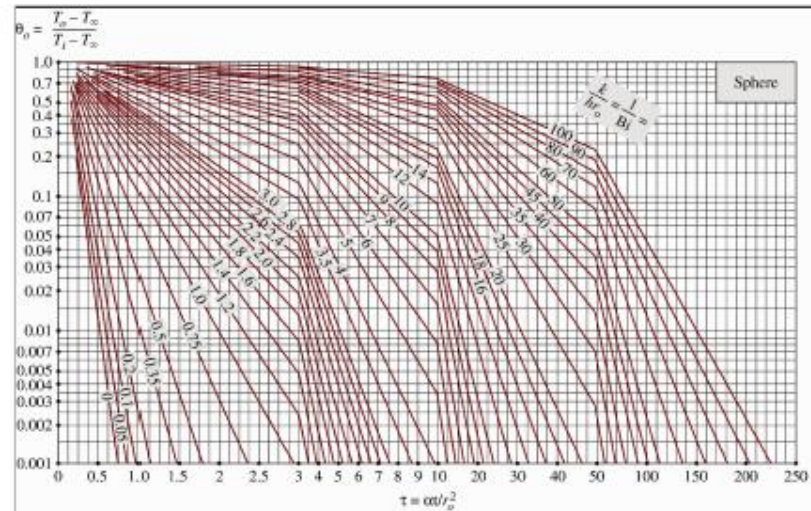
(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{cyl}} = 1 - 2\theta_{0, \text{cyl}} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1}$$

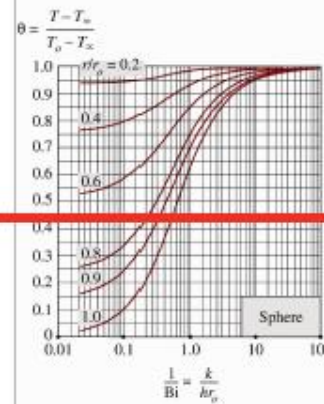
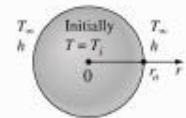
• Bol

Voor $x=0$:

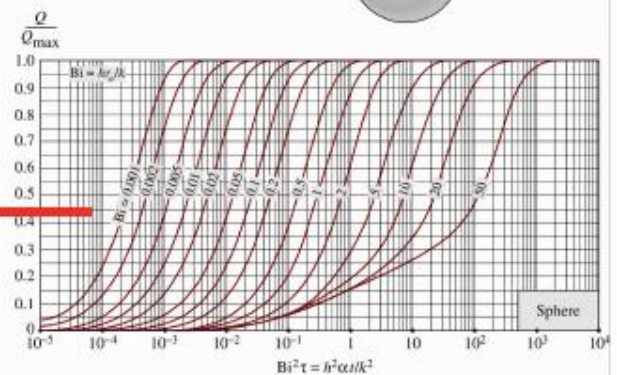
$$\theta_{0, \text{sph}} = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$



(a) Midpoint temperature (from M. P. Heisler)



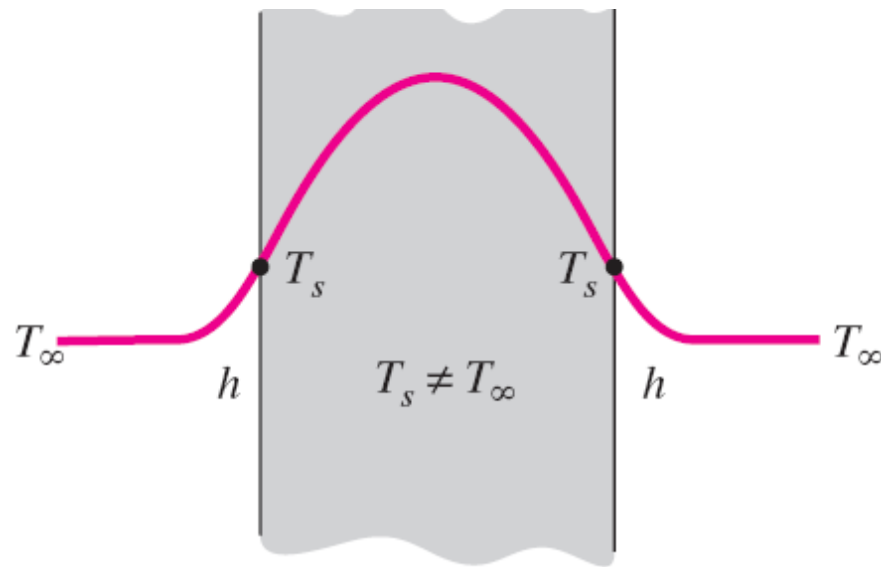
(b) Temperature distribution (from M. P. Heisler)



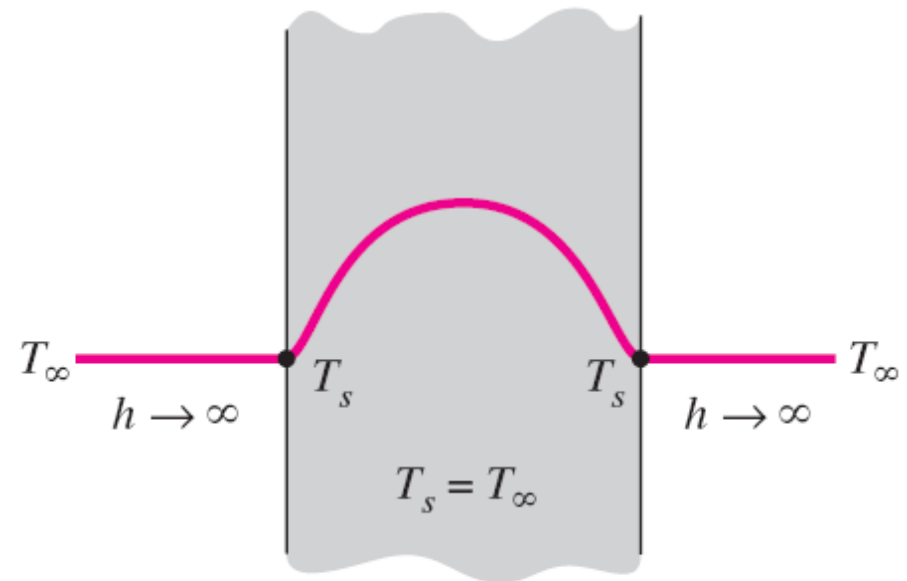
(c) Heat transfer (from H. Gröber et al.)

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{sph}} = 1 - 3\theta_{0, \text{sph}} \frac{\sin \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3}$$

- Opmerking
- De situatie waarvoor de temperatuur aan de wand gelijk is aan de bulktemperatuur komt overeen met het geval waar $h = \text{oneindig}$ ($1/Bi = k/(hL) = 0$)

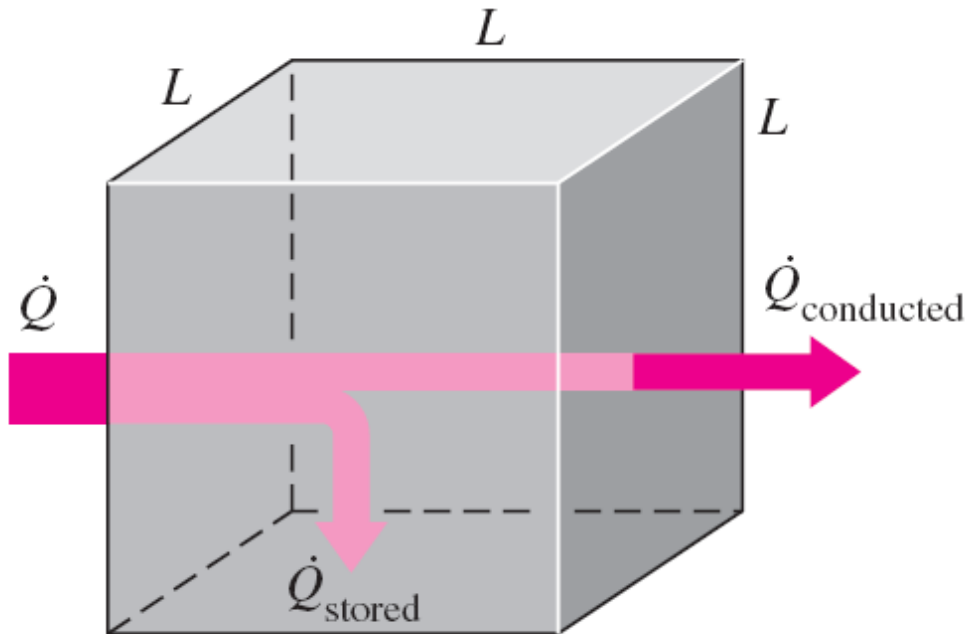


(a) Finite convection coefficient



(b) Infinite convection coefficient 20

- **Het getal van Fourier**

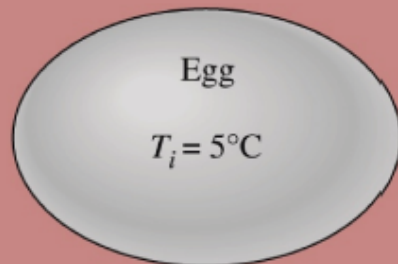


**Hoge waarde van Fo =
snelle propagatie van
warmte door het
lichaam**

Fourier number: $\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conducted}}}{\dot{Q}_{\text{stored}}} = \text{dimensieloze tijd}$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2 (1/L) \Delta T}{\rho c_p L^3/t \Delta T} = \frac{\text{The rate at which heat is conducted across } L \text{ of a body of volume } L^3}{\text{The rate at which heat is stored in a body of volume } L^3}$$

• Voorbeeld 1: koken van een ei



Neem als benadering een bolvorm met een diameter van 5 cm.
De waterinhoud van een ei bedraagt 74%; men mag veronderstellen dat het ei de eigenschappen van water heeft bij een gemiddelde temperatuur van $37,5^{\circ}\text{C} = (5+70)/2$:
 $k = 0,627 \text{ W/m }^{\circ}\text{C}$ en $\alpha = 0,151 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (Tabel A-15)

Bepaal hoelang het duurt totdat het centrum van het ei een temperatuur van 70°C bereikt.

$$\text{Bi} = \frac{hr_0}{k} = \frac{(1200 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.025 \text{ m})}{0.627 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}} = 47.8$$

→ Lumping niet toe te passen

Tabel 18-2: $\lambda_1 = 3.0753$, $A_1 = 1.9958$

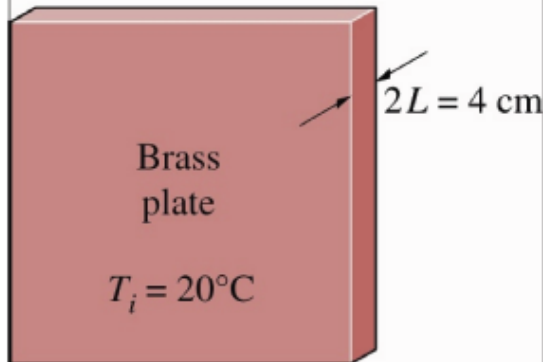
$$\frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \longrightarrow \frac{70 - 95}{5 - 95} = 1.9958 e^{-(3.0753)^2 \tau} \longrightarrow \tau = 0.209$$

$$t = \frac{\tau r_o^2}{\alpha} = \frac{(0.209)(0.025 \text{ m})^2}{0.151 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 865 \text{ s} \approx \mathbf{14.4 \text{ min}}$$

• Voorbeeld 2: verwarmen van een plaat in een oven

$$T_{\infty} = 500^{\circ}\text{C}$$

$$h = 120 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$$



De plaat blijft gedurende een periode van 7 min in de oven.

Initiële temperatuur van de plaat = 20°C

$$h_{\text{gecombineerd}} = 120 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$$

Tabel A-24:

$k = 110 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$; $\alpha = 33,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $c_p = 380 \text{ J/kg} \cdot ^{\circ}\text{C}$; $\rho = 8530 \text{ kg/m}^3$ (waarden bij 20°C ; nauwkeuriger bij de gemiddelde temperatuur)

Bepaal de oppervlaktetemperatuur als de plaat uit de oven komt.

Heislergrafieken Fig. 18-15 (of 1-term analytische oplossing):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= \frac{100 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}}{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.02 \text{ m})} = 45.8 \\ \tau = \frac{\alpha t}{L^2} &= \frac{(33.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7 \times 60 \text{ s})}{(0.02 \text{ m})^2} = 35.6 \end{aligned} \right\} \frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0.46$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= 45.8 \\ \frac{x}{L} = \frac{L}{L} &= 1 \end{aligned} \right\} \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0.99$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0.46 \times 0.99 = 0.455$$

$$T = T_{\infty} + 0.455(T_i - T_{\infty}) = 500 + 0.455(20 - 500) = \mathbf{282^{\circ}\text{C}}$$

Alternatieve oplossing: *Lumpinganalyse*

$$Bi = 0,02 < 0,1$$

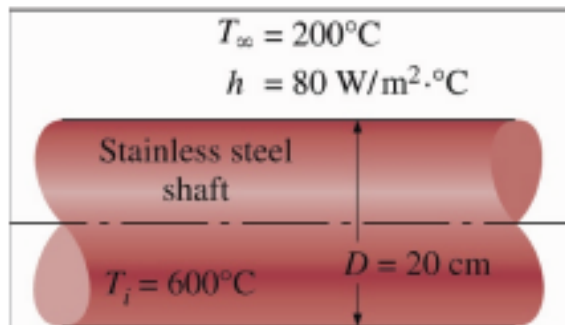
$$\begin{aligned} b &= \frac{hA_s}{\rho C_p V} = \frac{h(2A)}{\rho C_p (2LA)} = \frac{h}{\rho C_p L} \\ &= \frac{120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{(8530 \text{ kg/m}^3)(380 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(0.02 \text{ m})} = 0.00185 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

$$t = 7 \text{ min} = 420 \text{ s}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{T(t) - 500}{20 - 500} = e^{-(0.00185 \text{ s}^{-1})(420 \text{ s})}$$

$$T(t) = 279^\circ\text{C}$$

- Voorbeeld 3:** koelen van een stalen cilindrische as



Cilindrische as is gemaakt uit staal 304.

De cilinder wordt uit een oven van 600°C gehaald en gekoeld in een kamer van 200°C .

Bepaal (a) de temperatuur in het centrum van de as na 45 min, (b) warmtehoeveelheid overgedragen per lengte-eenheid gedurende deze periode.

$$(a) \left. \begin{aligned} \frac{1}{Bi} = \frac{k}{hr_o} &= \frac{14.9 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.1 \text{ m})} = 1.86 \\ \tau = \frac{\alpha t}{r_o^2} &= \frac{(3.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(45 \times 60 \text{ s})}{(0.1 \text{ m})^2} = 1.07 \end{aligned} \right\} \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.40$$

$$T_o = T_\infty + 0.4(T_i - T_\infty) = 200 + 0.4(600 - 200) = \mathbf{360^\circ\text{C}}$$

(b) Gebruik van de Heislergrafiek

$$\begin{aligned} m &= \rho V = \rho \pi r_o^2 L = (7900 \text{ kg/m}^3) \pi (0.1 \text{ m})^2 (1 \text{ m}) = 248.2 \text{ kg} \\ Q_{\max} &= m C_p (T_\infty - T_i) = (248.2 \text{ kg})(0.477 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})(600 - 200)^\circ\text{C} \\ &= 47.354 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{1.86} = 0.537 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} &= \text{Bi}^2 \tau = (0.537)^2 (1.07) = 0.309 \end{aligned} \right\} \frac{Q}{Q_{\max}} = 0.62$$

$$Q = 0.62 Q_{\max} = 0.62 \times (47,354 \text{ kJ}) = \mathbf{29,360 \text{ kJ}}$$

Alternatieve oplossing: gebruik van de I-term analytische oplossing

$$\text{Bi} = \frac{hr_o}{k} = \frac{(80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.1 \text{ m})}{14.9 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.537 \quad \text{Tabel 18-2: } \lambda_1 = 0.970, \quad A_1 = 1.122$$

$$\theta_0 = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.122 e^{-(0.970)^2 (1.07)} = 0.41$$

$$T_o = T_\infty + 0.41(T_i - T_\infty) = 200 + 0.41(600 - 200) = \mathbf{364^\circ\text{C}}$$

$$J_1(\lambda_1) \text{ for } \lambda_1 = 0.970 \longrightarrow \text{Tabel 18-3} \Rightarrow = 0.430$$

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 1 - 2\theta_0 \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} = 1 - 2 \times 0.41 \frac{0.430}{0.970} = 0.636$$

$$Q = 0.636 Q_{\max} = 0.636 \times (47,354 \text{ kJ}) = \mathbf{30,120 \text{ kJ}}$$

3. Transiënte warmtegeleiding in semi-oneindige vaste materialen

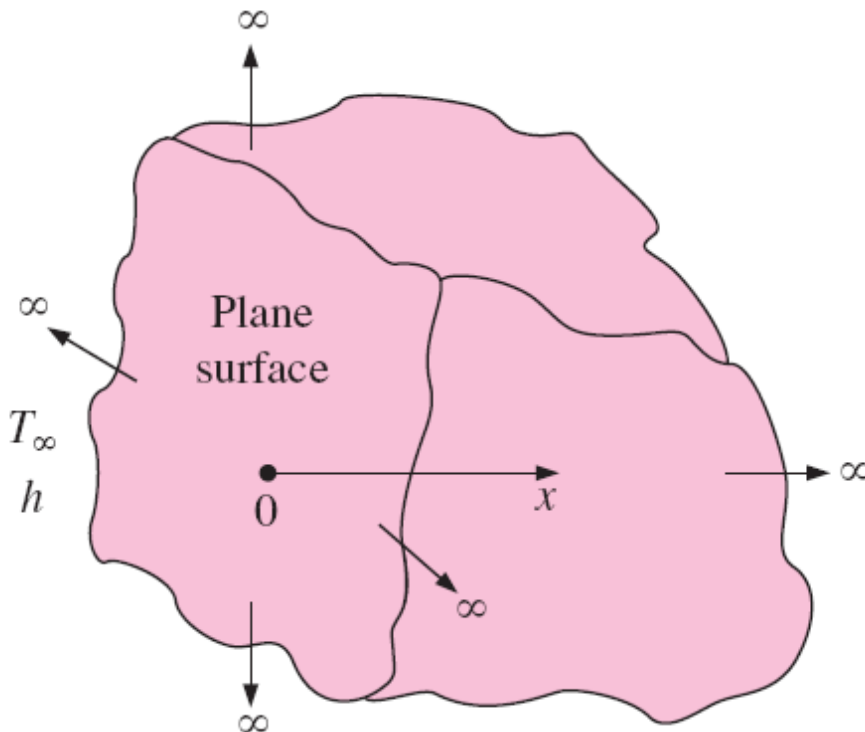
- Semi-oneindig midden
 - 1-dimensionale geleiding

Semi-oneindige vaste stof: een geïdealiseerd lichaam dat 1 vlak oppervlak heeft en zich tot oneindig uitstrekt in alle richtingen.

De aarde kan beschouwd worden als een semi-oneindig medium.

Een dikke wand kan gemodelleerd worden als semi-oneindig als we geïnteresseerd zijn in de verandering van de temperatuur dicht bij 1 van de oppervlakken.

Voor kleine tijdsperioden kan men de meeste lichamen modelleren als semi-oneindig vermits de warmte niet de tijd heeft om diep in te dringen.



- Analytische oplossing voor het geval met een constante wandtemperatuur T_s

Differential equation:
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Boundary conditions: $T(0, t) = T_s$ and $T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$

Initial condition: $T(x, 0) = T_i$

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta}$$

$T(0) = T_s$ and $T(\eta \rightarrow \infty) = T_i$

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du = \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erfc}(\eta)$$

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \quad \text{error-functie}$$

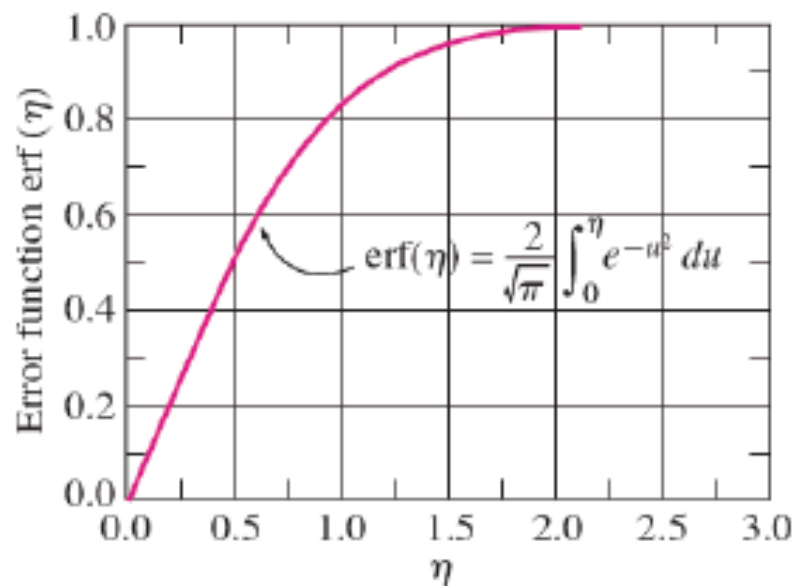
$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \quad \text{complementaire error-functie}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{and} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-x}{2t\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}$$



De error-functie is een standaard wiskundige functie, zoals de sinus- en de cosinus-functie, waarvoor de waarden variëren tussen 0 en 1.

TABLE 18-4

The complementary error function*

η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$
0.00	1.00000	0.38	0.5910	0.76	0.2825
0.02	0.9774	0.40	0.5716	0.78	0.2700
0.04	0.9549	0.42	0.5525	0.80	0.2579
0.06	0.9324	0.44	0.5338	0.82	0.2462
0.08	0.9099	0.46	0.5153	0.84	0.2349
0.10	0.8875	0.48	0.4973	0.86	0.2239
0.12	0.8652	0.50	0.4795	0.88	0.2133
0.14	0.8431	0.52	0.4621	0.90	0.2031
0.16	0.8210	0.54	0.4451	0.92	0.1932
0.18	0.7991	0.56	0.4284	0.94	0.1837
0.20	0.7773	0.58	0.4121	0.96	0.1746
0.22	0.7557	0.60	0.3961	0.98	0.1658
0.24	0.7343	0.62	0.3806	1.00	0.1573
0.26	0.7131	0.64	0.3654	1.02	0.1492
0.28	0.6921	0.66	0.3506	1.04	0.1413
0.30	0.6714	0.68	0.3362	1.06	0.1339
0.32	0.6509	0.70	0.3222	1.08	0.1267
0.34	0.6306	0.72	0.3086	1.10	0.1198
0.36	0.6107	0.74	0.2953	1.12	0.1132

Case 1: Specified Surface Temperature, $T_s = \text{constant}$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad \text{and} \quad \dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

Analytische oplossingen voor de verschillende randvoorwaarden op de oppervlakte.

Case 2: Specified Surface Heat Flux, $\dot{q}_s = \text{constant}$.

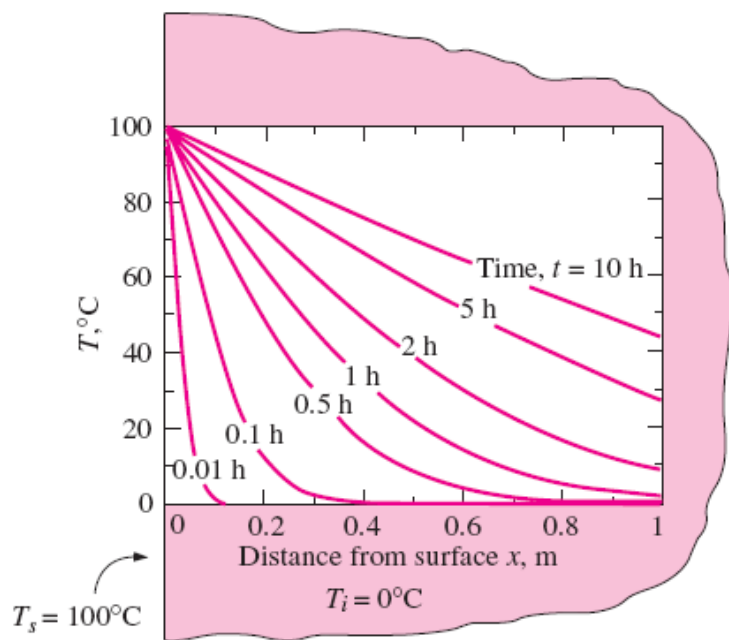
$$T(x, t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k} \left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right]$$

Case 3: Convection on the Surface, $\dot{q}_s(t) = h[T_\infty - T(0, t)]$.

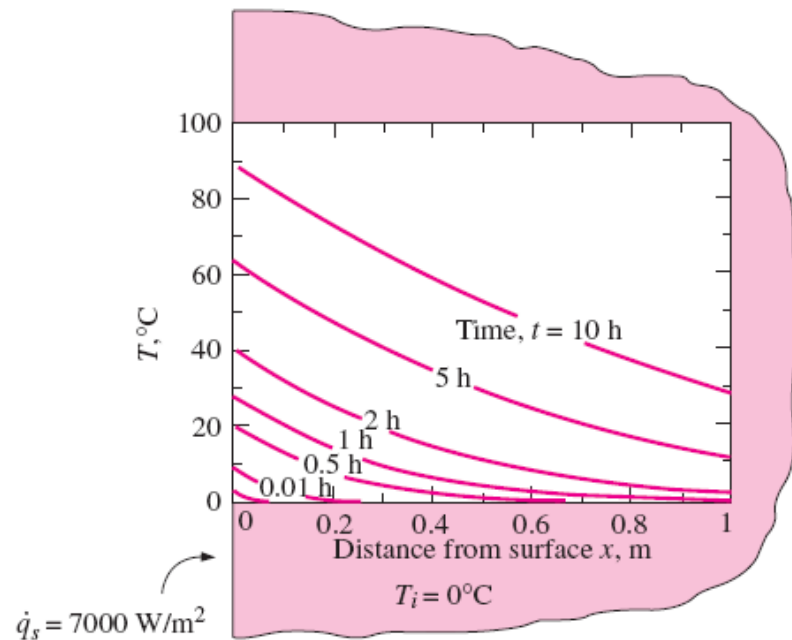
$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)$$

Case 4: Energy Pulse at Surface, $e_s = \text{constant}$.

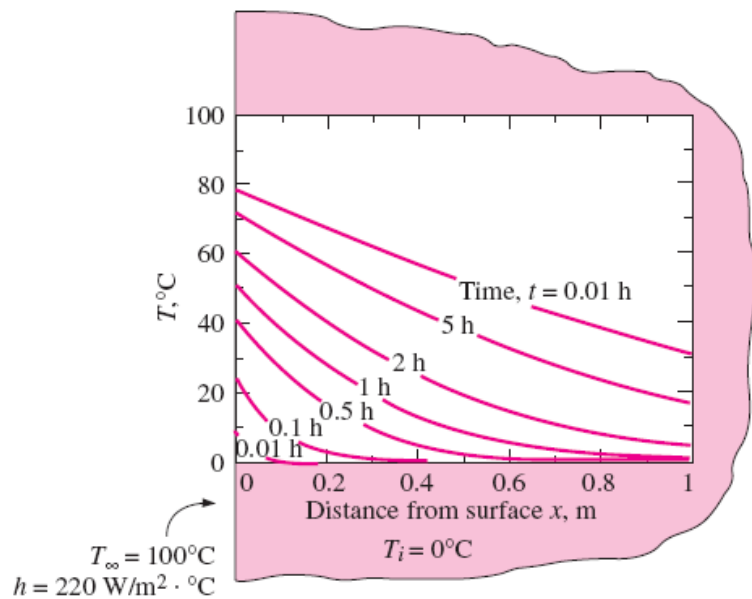
$$T(x, t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$



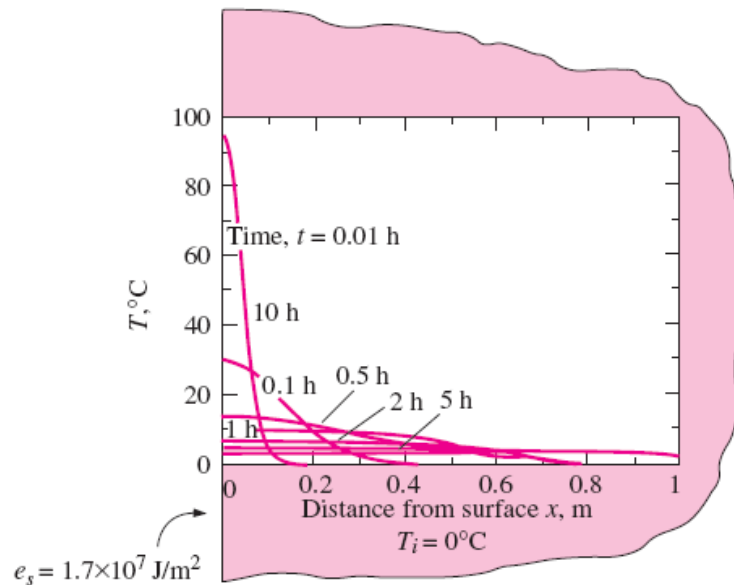
(a) Specified surface temperature, $T_s = \text{constant}$.



(b) Specified surface heat flux, $\dot{q}_s = \text{constant}$.

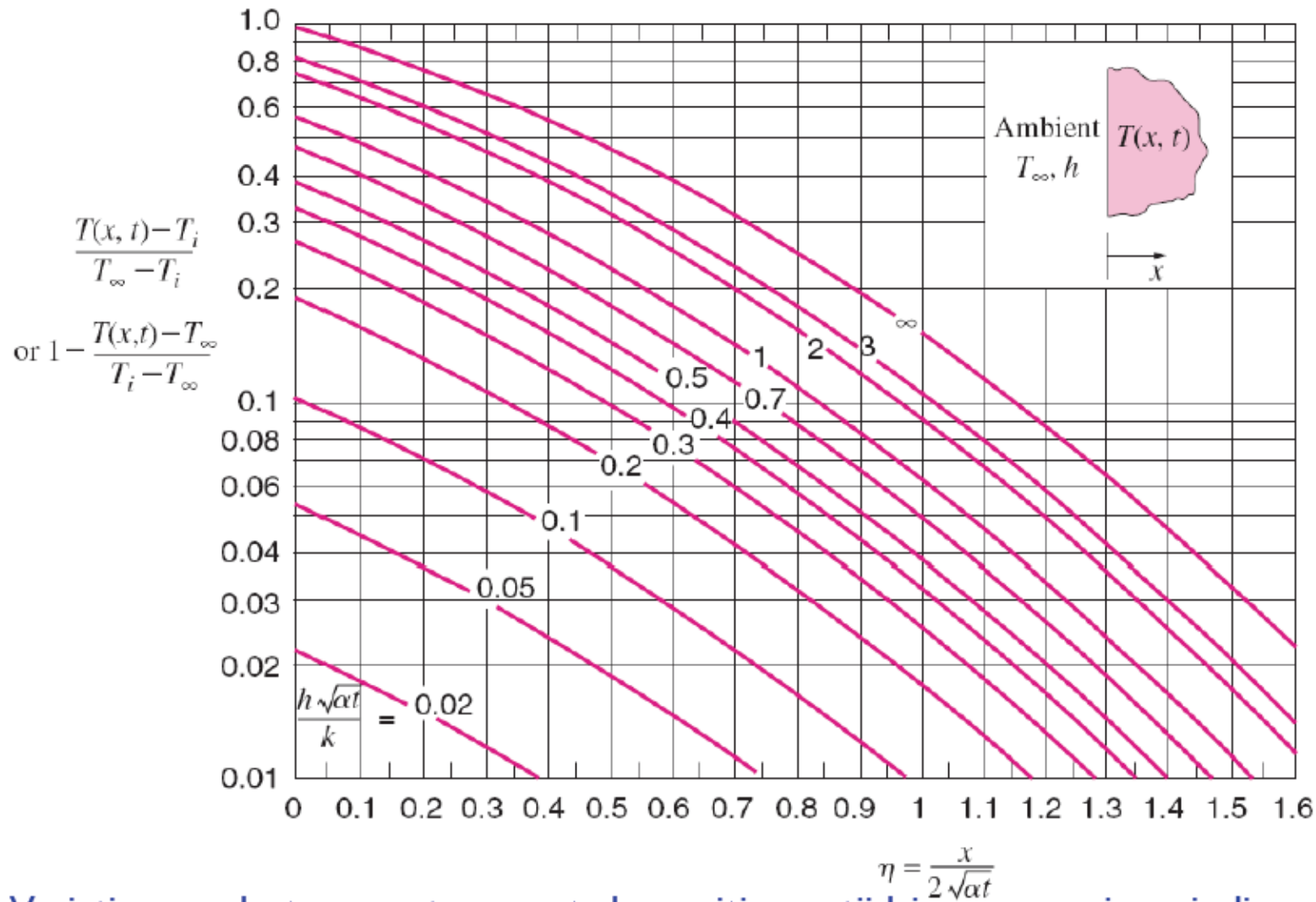


(c) Convection at the surface



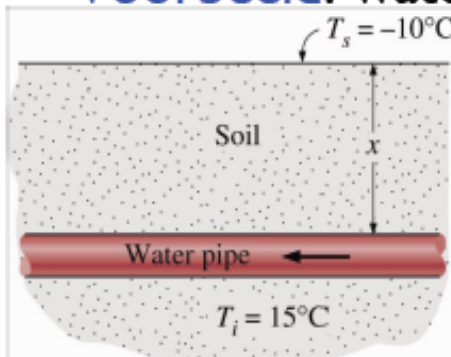
(d) Energy pulse at the surface, $e_s = \text{constant}$

● Semi-oneindig midden



Variatie van de temperatuur met de positie en tijd in een semi-oneindige vaste wand die initieel op een temperatuur T_i is en onderworpen aan een omgevingstemperatuur T_∞ met een warmteoverdrachtscoëfficiënt h .

• Voorbeeld: waterleiding



Gedurende 3 maanden is de grond bedekt met sneeuw van -10°C .

Grond:

$$\alpha = 0,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 0,4 \text{ W/m } ^{\circ}\text{C}$$

Bepaal de minimale diepte om de waterleidingen aan te leggen zonder gevaar voor bevriezen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} &= \infty \quad (\text{since } h \rightarrow \infty) \\ 1 - \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} &= 1 - \frac{0 - (-10)}{15 - (-10)} = 0.6 \end{aligned} \right\} \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.36$$

$$T = T_s \Rightarrow h \rightarrow \infty$$

Figuur 18-29

$$t = (90 \text{ days})(24 \text{ h/day})(3600 \text{ s/h}) = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

$$x = 2\eta\sqrt{\alpha t} = 2 \times 0.36\sqrt{(0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7.78 \times 10^6 \text{ s})} = \mathbf{0.77 \text{ m}}$$

Alternatieve oplossing: gebruik van de analytische oplossing ($T_s = \text{constant}$)

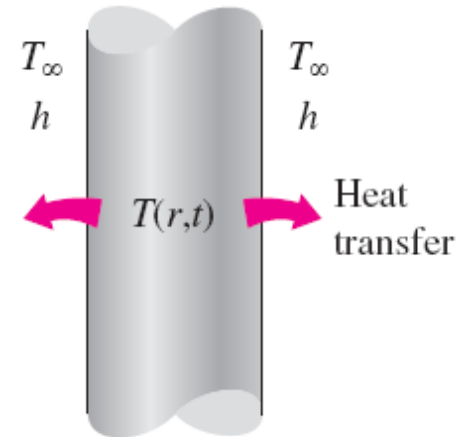
$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \longrightarrow \frac{0 - 15}{-10 - 15} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = 0.60$$

Tabel 18-4

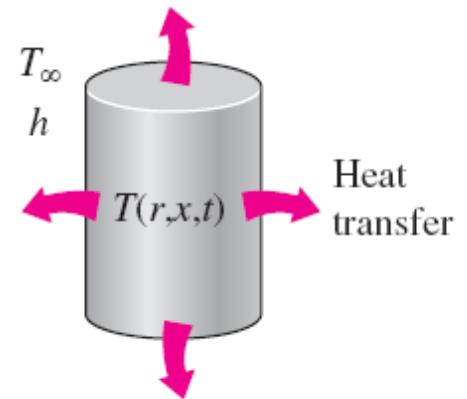
$$x = 2\eta\sqrt{\alpha t} = 2 \times 0.37\sqrt{(0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7.78 \times 10^6 \text{ s})} = \mathbf{0.80 \text{ m}}$$

4. Transiënte warmtegeleiding in multidimensionale systemen

- De temperatuur in een kleine cilinder, die blootgesteld is aan convectie aan alle oppervlakken, varieert zowel in de radiale als de axiale richting; maw. warmte wordt in beide richtingen overgedragen.



(a) Long cylinder



(b) Short cylinder (two-dimensional)

- Productoplossing voor korte cilinder:

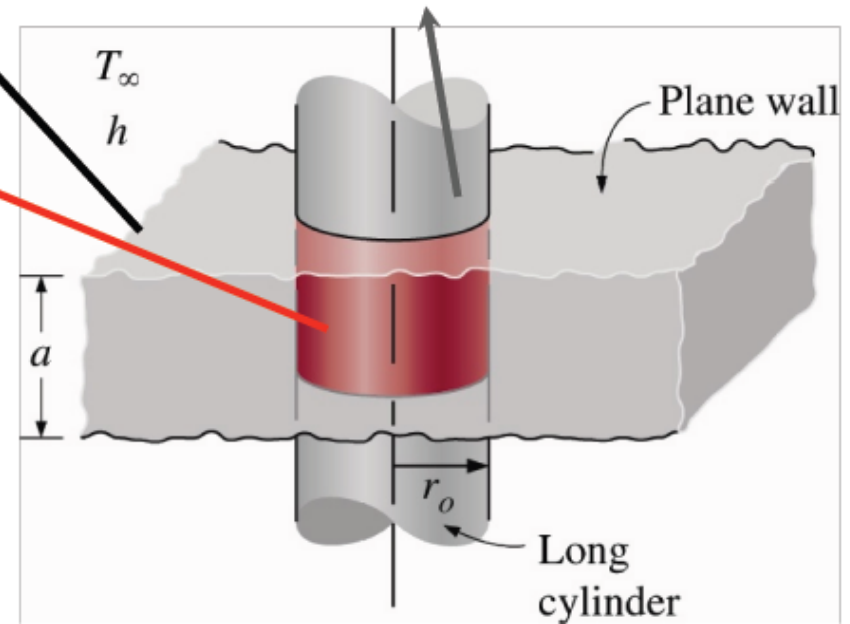
$$\theta_{\text{korte cilinder}} = \theta_{\text{oneindige cilinder}} \times \theta_{\text{vlakke wand}}$$

$$\left(\frac{T(r, x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{short cylinder}} = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{plane wall}} \left(\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{infinite cylinder}}$$

$$\theta_{\text{wall}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{plane wall}}$$

$$\theta_{\text{cyl}}(r, t) = \left(\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{infinite cylinder}}$$

$$\theta_{\text{semi-inf}}(x, t) = \left(\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{semi-infinite solid}}$$

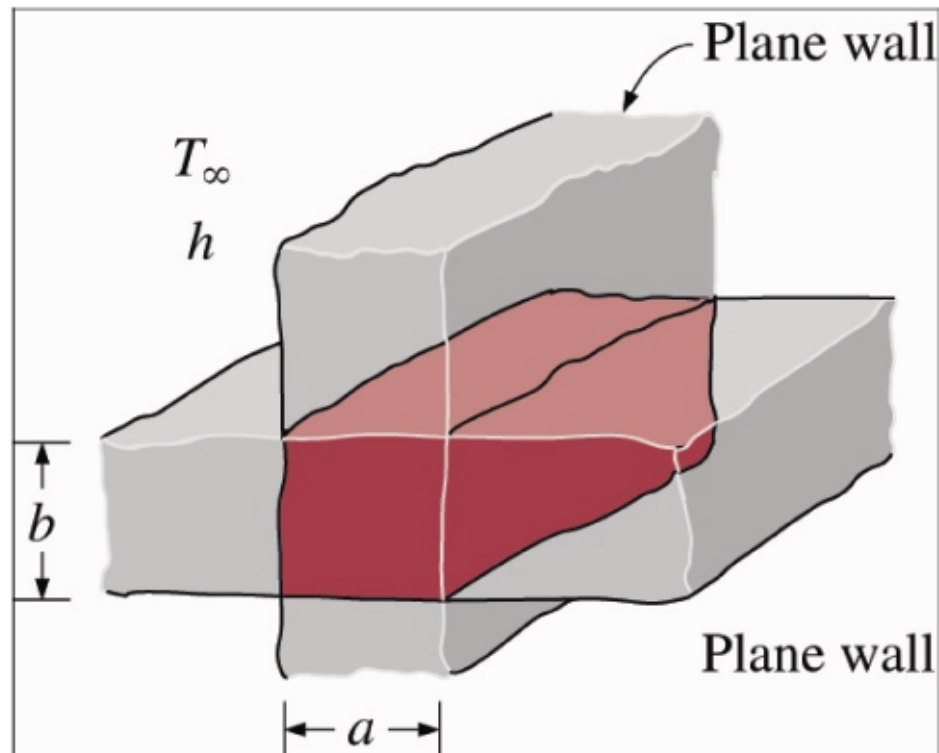


Een korte cilinder met straal r_o en hoogt a is de doorsnede van een lange cilinder met straal r_o en een vlakke wand met dikte a .

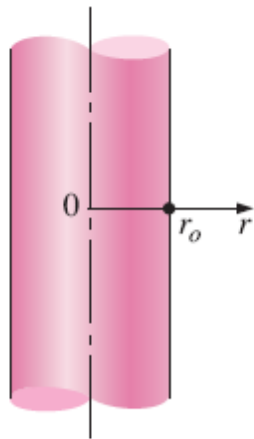
- Productoplossing voor *rechthoekige balk*:

$$\theta_{\text{balk}} = \theta_{\text{vlakke wand}} \times \theta_{\text{vlakke wand}}$$

$$\left(\frac{T(x, y, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{bar}}^{\text{rectangular}} = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{wall}}(y, t)$$

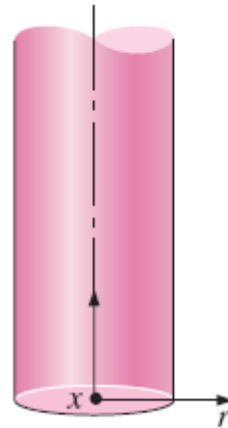


- Andere geometrieën



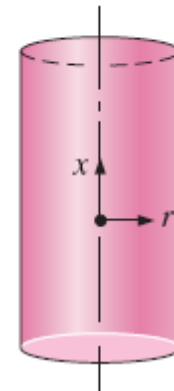
$$\theta(r, t) = \theta_{\text{cyl}}(r, t)$$

Infinite cylinder



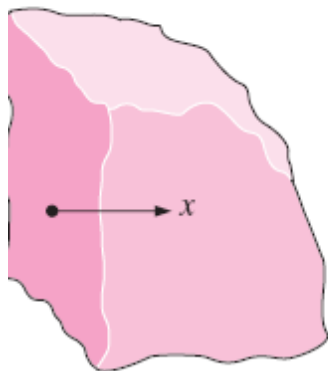
$$\theta(x, r, t) = \theta_{\text{cyl}}(r, t) \theta_{\text{semi-inf}}(x, t)$$

Semi-infinite cylinder



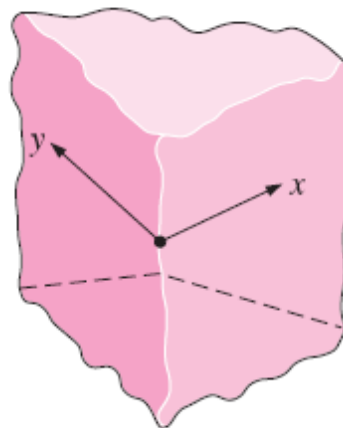
$$\theta(x, r, t) = \theta_{\text{cyl}}(r, t) \theta_{\text{wall}}(x, t)$$

Short cylinder



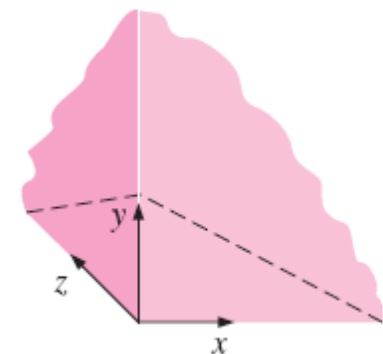
$$\theta(x, t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x, t)$$

Semi-infinite medium



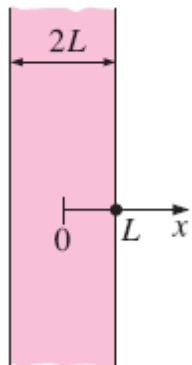
$$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x, t) \theta_{\text{semi-inf}}(y, t)$$

Quarter-infinite medium



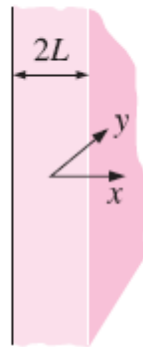
$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{semi-inf}}(x, t) \theta_{\text{semi-inf}}(y, t) \theta_{\text{semi-inf}}(z, t)$$

Corner region of a large medium



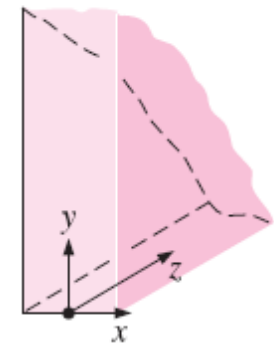
$$\theta(x, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t)$$

Infinite plate (or plane wall)



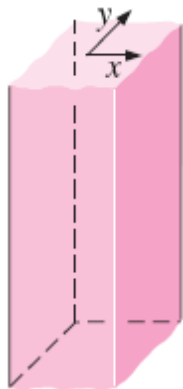
$$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{semi-inf}}(y, t)$$

Semi-infinite plate



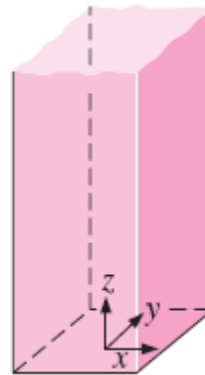
$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{semi-inf}}(y, t) \theta_{\text{semi-inf}}(z, t)$$

Quarter-infinite plate



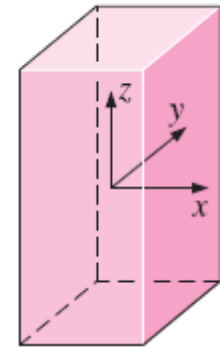
$$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{wall}}(y, t)$$

Infinite rectangular bar



$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{wall}}(y, t) \theta_{\text{semi-inf}}(z, t)$$

Semi-infinite rectangular bar



$$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{wall}}(x, t) \theta_{\text{wall}}(y, t) \theta_{\text{wall}}(z, t)$$

Rectangular parallelepiped

- Totale transiënte warmteoverdracht
 - 2 dimensies:

$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 2D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 \right]$$

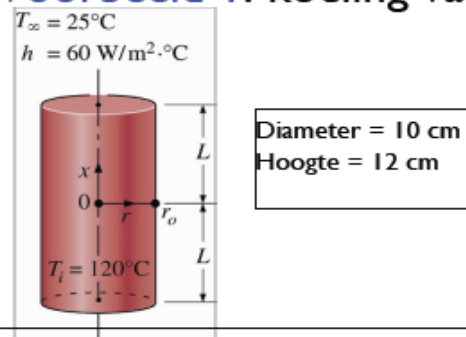
lichaam 1 en 2

- 3 dimensies:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\text{total, 3D}} = & \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 \right] \\ & + \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_1 \right] \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_2 \right] \end{aligned}$$

lichaam 1, 2 en 3

• Voorbeeld 1: koeling van een korte cilinder



Bereken de temperatuur (a) in het centrum van de cilinder en (b) in het centrum van het bovenoppervlak, 15 min na de start van afkoeling.

(a)
$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{(3.39 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(900 \text{ s})}{(0.06 \text{ m})^2} = 8.48 \\ \frac{1}{\text{Bi}} &= \frac{k}{hL} = \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.06 \text{ m})} = 30.6 \end{aligned} \right\} \theta_{\text{wall}}(0, t) = \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0.8 \quad \text{Fig. 18-15a}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha t}{r_o^2} = \frac{(3.39 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(900 \text{ s})}{(0.05 \text{ m})^2} = 12.2 \\ \frac{1}{\text{Bi}} &= \frac{k}{hr_o} = \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.05 \text{ m})} = 36.7 \end{aligned} \right\} \theta_{\text{cyl}}(0, t) = \frac{T(0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0.5 \quad \text{Fig. 18-16a}$$

$$\left(\frac{T(0, 0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{short cylinder}} = \theta_{\text{wall}}(0, t) \times \theta_{\text{cyl}}(0, t) = 0.8 \times 0.5 = 0.4$$

$$T(0, 0, t) = T_{\infty} + 0.4(T_i - T_{\infty}) = 25 + 0.4(120 - 25) = \mathbf{63^{\circ}\text{C}}$$

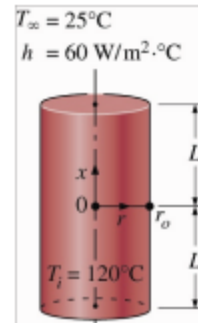
(b)
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{L} &= \frac{0.06 \text{ m}}{0.06 \text{ m}} = 1 \\ \frac{1}{\text{Bi}} &= \frac{k}{hL} = \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(0.06 \text{ m})} = 30.6 \end{aligned} \right\} \frac{T(L, t) - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 0.98 \quad \text{Fig. 18-15b}$$

$$\theta_{\text{wall}}(L, t) = \frac{T(L, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left(\frac{T(L, t) - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right) \left(\frac{T_o - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = 0.98 \times 0.8 = 0.784$$

$$\left(\frac{T(L, 0, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\text{short cylinder}} = \theta_{\text{wall}}(L, t) \theta_{\text{cyl}}(0, t) = 0.784 \times 0.5 = 0.392$$

$$T(L, 0, t) = T_{\infty} + 0.392(T_i - T_{\infty}) = 25 + 0.392(120 - 25) = \mathbf{62.2^{\circ}\text{C}}$$

- Voorbeeld 2: Warmteoverdracht vanaf een korte cilinder**



$$\rho = 8530 \text{ kg/m}^3$$

$$C_p = 0,380 \text{ kJ/kg } ^\circ\text{C}$$

Bepaal de warmtehoeveelheid Q overgedragen vanaf de korte cilinder (zoals in vb.1).

$$m = \rho V = \rho \pi r_o^2 L = (8530 \text{ kg/m}^3) \pi (0.05 \text{ m})^2 (0.06 \text{ m}) = 4.02 \text{ kg}$$

$$Q_{\max} = m C_p (T_i - T_\infty) = (4.02 \text{ kg}) (0.380 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}) (120 - 25) ^\circ\text{C} = 145.1 \text{ kJ}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} = \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{30.6} = 0.0327 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} = \text{Bi}^2 \tau = (0.0327)^2 (8.48) = 0.0091 \end{aligned} \right\} \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{plane wall}} = 0.23$$

Fig. 18-15c

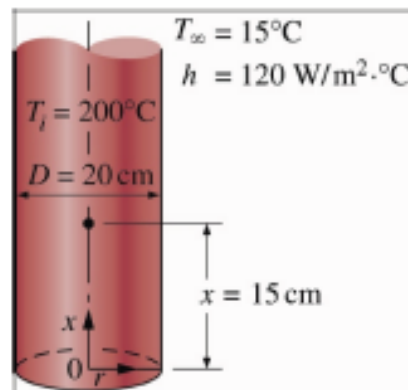
$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} = \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{36.7} = 0.0272 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} = \text{Bi}^2 \tau = (0.0272)^2 (12.2) = 0.0090 \end{aligned} \right\} \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{infinite cylinder}} = 0.47$$

Fig. 18-16c

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_{\text{short cyl}} &= \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)_1 \right] \\ &= 0.23 + 0.47(1 - 0.23) = 0.592 \end{aligned}$$

$$Q = 0.592 Q_{\max} = 0.592 \times (145.1 \text{ kJ}) = \mathbf{85.9 \text{ kJ}}$$

- Voorbeeld 3:** Koeling van een lange cilinder door water



Aluminium (Tabel A-25):

$$\alpha = 9,71 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

Bepaal de temperatuur in het centrum van de cilinder op 15 cm van het uiteinde, 5 min na de start van de afkoeling.

$$\text{Bi} = \frac{hr_o}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.1 \text{ m})}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.05$$

Lange cilinder: analytische 1-term-oplossing

Tabel 18-2: $\lambda_1 = 0.3126$ and $A_1 = 1.0124$

$$\tau = \frac{\alpha t}{r_o^2} = \frac{(9.71 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(5 \times 60 \text{ s})}{(0.1 \text{ m})^2} = 2.91 > 0.2$$

$$\theta_0 = \theta_{\text{cyl}}(0, t) = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.0124 e^{-(0.3126)^2 (2.91)} = 0.762$$

Semi-oneindige vlakke wand: analytische oplossing

$$1 - \theta_{\text{semi-inf}}(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \right]$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.15 \text{ m}}{2\sqrt{(9.71 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(5 \times 60 \text{ s})}} = 0.44$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})\sqrt{(9.71 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(300 \text{ s})}}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.086$$

$$\frac{hx}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.15 \text{ m})}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.0759$$

$$\frac{h^2\alpha t}{k^2} = \left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)^2 = (0.086)^2 = 0.0074$$

$$\begin{aligned}\theta_{\text{semi-inf}}(x, t) &= 1 - \operatorname{erfc}(0.44) + \exp(0.0759 + 0.0074) \operatorname{erfc}(0.44 + 0.086) \\ &= 1 - 0.5338 + \exp(0.0833) \times 0.457 \\ &= 0.963\end{aligned}$$

$$\left(\frac{T(x, 0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{semi-infinite cylinder}} = \theta_{\text{semi-inf}}(x, t) \theta_{\text{cyl}}(0, t) = 0.963 \times 0.762 = 0.734$$

$$T(x, 0, t) = T_\infty + 0.734(T_i - T_\infty) = 15 + 0.734(200 - 15) = \mathbf{151^\circ\text{C}}$$