Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 2e zittijd 2017–2018

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

---

1. Bepaal alle nulpunten van de volgende complexe veelterm:

$$(6-12i)\,z^3+(27+31i)\,z^2-(34+32i)\,z+15+15i$$

Hint: één van de nulpunten is zuiver imaginair.

/6

2. De rest van een deling van een veelterm door $z - i$ resp. $z + i$ zijn elkaars tegengestelden, en de rest bij deling door $z - i$ is -4. Wat is de rest bij deling door $z^2 + 1$?

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-20x^3 + 28x^2 - 13x + 2}{4x^3 - 3x + 1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x-3} - 1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)^{x^2}$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$3\log_3 x - 11\log_x 3 = 4$$

/6

5. Bereken de tweede afgeleide van $x^{\left(x^2\right)}$

$\boxed{\quad\quad /6}$

6. Zoek de asymptoten van de functie

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)}$$

en ga hun ligging na.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{45x^2 - 11}{27x^3 - 9x - 2}dx$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{\tan x + 1}{\tan x + 2} dx$$

/6

9. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+\mathrm{Bgtan}^2\, x\right)} dx$$

/6

10. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 2 + \cos 8\theta$$

en maak hier een tekening van; bereken daarna de oppervlakte door zo veel mogelijk de symmetrie te gebruiken.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

| /60 |

Oplossingen:

1. Bepaal alle nulpunten van de volgende complexe veelterm:

$$(6-12i)\,z^3+(27+31i)\,z^2-(34+32i)\,z+15+15i$$

Hint: één van de nulpunten is zuiver imaginair.

$$\begin{array}{r|lll|l} & 6-12i & 27+31i & -34-32i & 15+15i \\ -3i & & -36-18i & 39+27i & -15+15i \\ \hline & 6-12i & -9+13i & 5-5i & 0 \end{array}$$

$z_1=-3i$
$\Rightarrow A\,(z)=(z+3i)\,\big((6-12i)\,z^2+(-9+13i)\,z+5-5i\big)$
$\Delta=(-9+13i)^2-4\,(6-12i)\,(5-5i)=32+126i=(x+yi)^2$
$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=32 \\ xy=63 \end{array}\right. \Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=32 \\ x^2\left(-y^2\right)=-3969 \\ xy>0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda^2-32\lambda-3969=0 \Rightarrow \lambda\in\{81,-49\}$
$\Rightarrow x+yi\in\{9+7i,-9-7i\}$
$\Rightarrow z_{2,3}=\dfrac{9-13i\pm(9+7i)}{12-24i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ of $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i$

2. De rest van een deling van een veelterm door $z-i$ resp. $z+i$ zijn elkaars tegengestelden, en de rest bij deling door $z-i$ is -4. Wat is de rest bij deling door z^2+1?
Stel $A\,(z)=\left(z^2+1\right)Q\,(z)+az+b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\,(i)=ai+b=-4 \\ A\,(-i)=-ai+b=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=4i \\ b=0 \end{array}\right.$
$\Rightarrow R\,(z)=4iz$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{-20x^3+28x^2-13x+2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2\,(2-5x)}{(2x-1)^2\,(x+1)}=-\dfrac{1}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x-3}-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt[3]{(x-3)^2}+1\,\sqrt[3]{(x-3)}+1\right)}{(x-3-1)\,(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}+1\,\sqrt[3]{(x-3)}+1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{3}{4}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x^2}{x^4+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x^2}{x^4+1}\right)^{\frac{x^4+1}{3x^2}\cdot\frac{3x^2}{x^4+1}\cdot x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4}{x^4+1}}=e^3$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$3\log_3 x-11\log_x 3=4$$

$\Rightarrow 3\log_3 x-\dfrac{11}{\log_3 x}=4$
$\Rightarrow 3\left(\log_3 x\right)^2-11-4\log_3 x=0$

Stel $y = \log_3 x$

$\Rightarrow 3y^2 - 4y - 11 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot \dot{3} \cdot (-11) = 148$
$\Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{148}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{37}}{3}$
$\Rightarrow x = 3^{\frac{2+\sqrt{37}}{3}}$ of $x = 3^{\frac{2-\sqrt{37}}{3}}$

5. Bereken de tweede afgeleide van $x^{\left(x^2\right)}$

$\dfrac{d}{dx}\left(x^{\left(x^2\right)}\right) = \dfrac{d}{dx}e^{x^2 \ln x} = e^{x^2 \ln x}\dfrac{d}{dx}\left(x^2 \ln x\right) = x^{\left(x^2\right)}\left(2x \ln x + x\right) = x^{x^2+1}\left(1 + 2\ln x\right)$

$\Rightarrow \dfrac{d^2}{dx^2}\left(x^{\left(x^2\right)}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(e^{\left(x^2+1\right)\ln x}\left(1 + 2\ln x\right)\right)$

$= \left(e^{\left(x^2+1\right)\ln x}\left(\dfrac{d}{dx}\left(\left(x^2+1\right)\ln x\right)\right)\left(1 + 2\ln x\right)\right) + e^{\left(x^2+1\right)\ln x}\dfrac{d}{dx}\left(1 + 2\ln x\right)$

$= \left(x^{x^2+1}\left(x + 2x\ln x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + 2\ln x\right)\right) + x^{\left(x^2+1\right)}\dfrac{2}{x}$

$= \left(x^{x^2}\left(x^2 + 2x^2\ln x + 1\right)\left(1 + 2\ln x\right)\right) + 2x^{x^2}$

$= x^{x^2}\left(\left(\left(x^2 + 2x^2\ln x + 1\right)\left(1 + 2\ln x\right)\right) + 2\right)$

$= x^{x^2}\left(\left(x^2 + 2x^2\ln x + 1\right) + 2\ln x\left(x^2 + 2x^2\ln x + 1\right) + 2\right)$

$= x^{x^2}\left(x^2 + 2x^2\ln x + 1 + 2x^2\ln x + 4x^2\ln^2 x + 2\ln x + 2\right)$

$= x^{x^2}\left(4x^2\ln^2 x + 4x^2\ln x + x^2 + 2\ln x + 3\right)$

6. Zoek de asymptoten van de functie

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$$

en ga hun ligging na.

- V.A.: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2}{0} = \infty \Rightarrow x = 1$ is een verticale asymptoot
  - $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \dfrac{2}{0^+ \cdot (-1)} = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \dfrac{2}{0^- \cdot (-1)} = +\infty$
- V.A.: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{5}{0} = \infty \Rightarrow x = 2$ is een verticale asymptoot
  - $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) == \dfrac{5}{1 \cdot 0^+} = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \dfrac{5}{1 \cdot 0^-} = -\infty$
- H.A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x \cdot x} = 1 \Rightarrow y = 1$ is een verticale asymptoot
  $f(x) - 1 = \dfrac{3x-1}{x^2-3x+2} \Rightarrow$

x		$\frac{1}{3}$		1		2	
$f(x) - A$	$-$	0	$+$	|	$-$	|	$+$

Als $f \to +\infty$ dan ligt f boven A; als $f \to -\infty$ dan ligt f onder A

- Bijgevolg is er geen S.A.

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{45x^2-11}{27x^3-9x-2}dx$$

$$\frac{45x^2-11}{27x^3-9x-2} = \frac{45x^2-11}{(3x-2)(3x+1)^2} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{(3x+1)^2} + \frac{C}{3x+1}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{45x^2-11}{(3x+1)^2}\right|_{x=\frac{2}{3}} = 1\\
B &= \left.\frac{45x^2-11}{(3x-2)}\right|_{x=-\frac{1}{3}} = 2\\
\frac{45x^2-11}{27x^3-9x-2} - \frac{2}{(3x+1)^2} &= \frac{(15x-7)(3x+1)}{(3x-2)(3x+1)^2} = \frac{15x-7}{(3x-2)(3x+1)}\\
&\Rightarrow\ C = \left.\frac{15x-7}{3x-2}\right|_{x=-\frac{1}{3}} = 4
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{45x^2-11}{27x^3-9x-2} = \dfrac{1}{3x-2} + \dfrac{2}{(3x+1)^2} + \dfrac{4}{3x+1}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{45x^2-11}{27x^3-9x-2}dx = \int \frac{1}{3x-2}dx + \int \frac{2}{(3x+1)^2}dx + \int \frac{4}{3x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{2}{9x+3} + \frac{4}{3}\ln|3x+1| + c$

8. Bereken

$$\int \frac{\tan x+1}{\tan x+2}dx$$

Stel $t = \tan x \Rightarrow x = \operatorname{Bgtan} t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{t+1}{(t+2)(t^2+1)}dt$

Stel $\dfrac{t+1}{(t+2)(t^2+1)} = \dfrac{A}{t+2} + \dfrac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{t+1}{t^2+1}\right|_{t=-2} = -\frac{1}{5}\\
Bi+C &= \left.\frac{t+1}{t+2}\right|_{t=i} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \Rightarrow (B,C) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow I = -\dfrac{1}{5}\displaystyle\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{t+3}{t^2+1}dt = -\frac{1}{5}\ln|t+2| + \frac{1}{10}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{3}{5}\operatorname{Bgtan} t + c$

$= -\dfrac{1}{5}\ln|\tan x+2| + \dfrac{1}{10}\ln\left(\tan^2 x+1\right) + \dfrac{3}{5}x + c$

9. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+\text{Bgtan}^2 x\right)} dx$$

Omwille van symmetrieoverwegingen is $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+\text{Bgtan}^2 x\right)} dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(1+\text{Bgtan}^2 x\right)} dx$

Stel $t = \text{Bgtan}\, x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x = +\infty \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$
$= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left[\text{Bgtan}\, t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,\text{Bgtan}\,\frac{\pi}{2}$

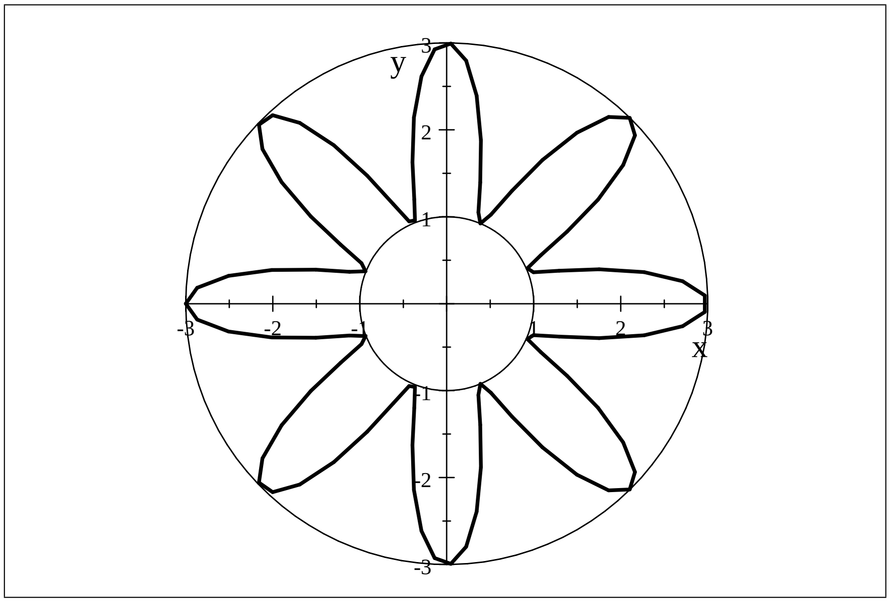
10. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 2 + \cos 8\theta$$

en maak hier een tekening van; bereken daarna de oppervlakte door zo veel mogelijk de symmetrie te gebruiken.

- Domein $= \mathbb{R}$
  Periode $= \dfrac{\pi}{4}$
  Beperkt domein $= \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
- $r = 0 \Rightarrow \cos 8\theta = -2 \Rightarrow$ kan niet
- $r' = -8\sin 8\theta = 0 \Rightarrow 8\theta = k\pi \Rightarrow \theta = k\dfrac{\pi}{8}$

	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$
r	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r'	0	$-$	$-$	$+$	$+$
	$M(3)$	$\searrow$	$m(1)$	$\nearrow$	$M(3)$



- $S = 16 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/8} (2+\cos 8\theta)^2\, d\theta = 8 \int\limits_0^{\pi/8} \left(4 + 4\cos 8\theta + \cos^2 8\theta\right) d\theta = 4 \int\limits_0^{\pi/8} (8 + 8\cos 8\theta + 1 + \cos 16\theta)\, d\theta =$

$4 \int\limits_0^{\pi/8} (9 + 8\cos 8\theta + \cos 16\theta)\, d\theta$

$= 4\left[9\theta - \sin 8\theta + \frac{1}{16}\sin 16\theta\right]_0^{\pi/8} = \frac{9}{2}\pi$