

# Inhoudsopgave

1 Eenparig cirkelvormige bewegingen.....	3
1.1 Periodieke systemen.....	3
1.2 Kinematica van de eenparig cirkelvormige beweging.....	3
1.2.1 Definities.....	3
1.2.2 Vectoranalyse van de cirkelvormige beweging.....	4
1.3 Centripetaalkrachten.....	6
1.4 Energie-aspecten.....	7
1.5 Toepassingen.....	7
1.5.1 Satellietbanen.....	7
1.5.2 Horizontale bocht.....	9
1.5.3 Schuine bocht.....	10
1.5.4 Conische slinger.....	10
1.5.5 Looping.....	11
1.5.6 Beweging van een geladen deeltje in een magnetisch veld.....	12
1.6 Oefeningen.....	14
2 Enkelvoudige harmonische trillingen.....	16
2.1 Definities.....	16
2.1.1 Algemeen.....	16
2.1.2 Harmonische trilling.....	16
2.2 Kinematica van de EHT.....	16
2.2.1 De elongatie.....	16
2.2.2 De snelheid.....	19
2.2.3 De versnelling.....	20
2.3 Dynamica van de EHT.....	21
2.3.1 Krachtwerking.....	21
2.3.2 Energie-aspecten.....	22
2.4 Voorbeelden van harmonische trillingen.....	23
2.4.1 Massa aan een veer.....	23
2.4.2 De wiskundige slinger.....	24
2.5 Gedempte trillingen.....	26
2.5.1 Onderdamping.....	26
2.5.2 Overdamping.....	27
2.5.3 Kritische damping.....	27
2.6 Gedwongen trillingen.....	27
2.7 Oefeningen.....	29
3 Eindimensionale lopende golven.....	30
3.1 Het golfverschijnsel.....	30
3.2 De enkelvoudige harmonische transversale golf.....	31
3.2.1 Golflengte.....	31
3.2.2 De golffunctie.....	32
3.3 De enkelvoudige harmonische longitudinale golf.....	32
3.3.1 De verplaatsing.....	32
3.3.2 De dichtheidsvariatie.....	33
3.3.3 De drukgolf.....	33
3.4 Vermogen getransporteerd door een golf.....	34
3.5 Oefeningen.....	36

4 Tweedimensionale lopende golven.....	37
4.1 Golfstralen en golffronten.....	37
4.1.1 Definities.....	37
4.1.2 Het principe van Huygens.....	37
4.2 Diffractie.....	38
4.3 Reflectie.....	38
4.4 Refractie (breking).....	40
4.5 Doppler effect.....	42
4.5.1 Bron in rust.....	42
4.5.2 Waarnemer in rust.....	43
4.5.3 Schokgolf.....	43
4.6 Oefeningen.....	45
5 Geluidsgolven.....	46
5.1 Toonhoogte.....	46
5.2 Snelheid van geluidsgolven.....	46
5.3 Intensiteit en intensiteitsniveau.....	47
6 Samenstellen van trillingen.....	48
6.1 Het superpositiebeginsel.....	48
6.2 Samenstellen van trillingen in dezelfde richting met gelijke frequentie.....	48
6.2.1 Algemeen.....	48
6.2.2 In fase : versterking.....	49
6.2.3 In tegenfase : afzwakking.....	50
6.3 Zwevingen.....	51
6.4 Fourier analyse van trillingen°.....	52
6.5 Samenstelling van trillingen met verschillende trilrichting°.....	54
6.6 Oefeningen.....	56
7 Samenstellen van golven.....	57
7.1 Interferentie van lopende golven.....	57
7.1.1 Coherentie-voorwaarde.....	57
7.1.2 Berekenen van minima en maxima.....	57
7.2 Staande golven.....	58
7.2.1 Reflectie van een golf.....	58
7.2.2 Staande golven op een oneindig lange snaar met één vast uiteinde.....	59
7.2.3 Staande golven op een begrensde snaar.....	60
7.2.4 Staande golven in een luchtkolom.....	61
7.3 Oefeningen.....	63

# 1 Eenparig cirkelvormige bewegingen

## 1.1 Periodieke systemen

Planeten die rond de zon draaien, massa's die op en neer bewegen aan een veer, heen- en weergaande slingers, op- en neergaande golven aan een wateroppervlak, ... het zijn allemaal voorbeelden van **periodieke systemen**.

**We spreken van een periodiek systeem, als in bepaalde opeenvolgende gelijke tijdsintervallen identieke toestanden worden doorlopen.**

Een reeks van toestanden die zichzelf herhaalt binnen een gelijk tijdsverloop noemen we de **cyclus** van een periodiek systeem.

De duur van één cyclus noemen we de **periode**. Symbool is **T**, eenheid is s.

Het aantal cycli per tijdseenheid is de frequentie van het periodiek systeem. Symbool is **f**, de eenheid is  $s^{-1}$ , ook wel **Hz (Hertz)** genoemd.

## 1.2 Kinematica van de eenparig cirkelvormige beweging

### 1.2.1 Definities

#### a Algemeen

**Een voorwerp beschrijft een eenparig cirkelvormige beweging, als**

- **de baan een cirkel is,**
- **in gelijke tijdsverlopen, gelijke cirkelbogen worden doorlopen.**

Uit de definitie volgt dat

$$\Delta s \sim \Delta t$$

Met andere woorden de baansnelheid  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  is constant.

#### b Hoeksnelheid

Als de straal van de cirkel  $R$  is, en in een tijdsinterval  $\Delta t$  een hoek  $\Delta \alpha$  wordt beschreven, dan kan de afgelegde weg geschreven worden als

$$\Delta s = R \cdot \Delta \alpha$$

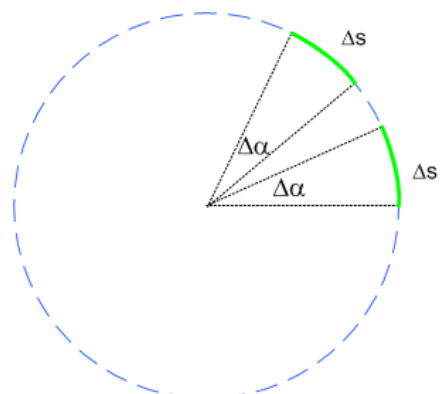
als  $\alpha$  uitgedrukt wordt in radialen.

De snelheid wordt dan

$$v = R \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = R \cdot \omega$$

$\omega$  noemen we de hoeksnelheid. (wat is de eenheid van hoeksnelheid ?)

Bij een eenparig cirkelvormige beweging is de hoeksnelheid constant.



Afbeelding 1: Afgelegde weg en beschreven hoek bij een cirkelvormige beweging.

## Eenparig cirkelvormige bewegingen

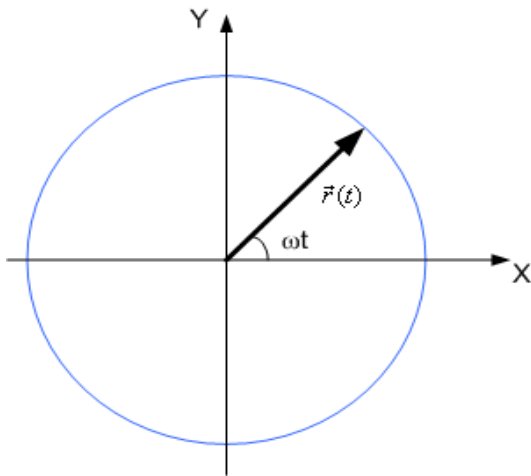
### c Periodiek systeem

Een eenparig cirkelvormige beweging is een periodiek systeem :

- De cyclus is het éénmaal doorlopen van de cirkel.
- De periode van een cirkelvormige beweging met straal  $R$  en snelheid  $v$ , wordt bepaald door  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ .
- De frequentie  $f$  is dan  $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\omega}{2\pi}$

### 1.2.2 Vectoranalyse van de cirkelvormige beweging

#### a Plaatsvector



Afbeelding 2: Plaatsvector op tijdstip  $t$

Beschouwen we een voorwerp dat een eenparige cirkelvormige beweging beschrijft met straal  $R$  en hoeksnelheid  $\omega$ . We kiezen als oorsprong van het assenstelsel het middelpunt van de beschreven cirkel. We kiezen de X-as volgens de richting van de plaatsvector  $\vec{r}_0$ , die de positie geeft van het voorwerp op  $t = 0$ s.

Veronderstel dat op een gegeven tijdstip  $t$ , de plaatsvector  $\vec{r}(t)$  een hoek  $\alpha(t)$  maakt met de X-as (zie figuur). De plaatsvector kan dan

geschreven worden als

$$\vec{r}(t) = R \cos \alpha(t) \vec{e}_x + R \sin \alpha(t) \vec{e}_y$$

of in coördinaten

$$\vec{r}(t) = (R \cos \alpha(t), R \sin \alpha(t))$$

Als het voorwerp beweegt met hoeksnelheid  $\omega$ , dan is

$$\alpha(t) = \omega \cdot t$$

en dan kunnen we de plaatsvector schrijven als

$$\vec{r}(t) = R \cos \omega \cdot t \vec{e}_x + R \sin \omega \cdot t \vec{e}_y$$

of in coördinaten

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega \cdot t, R \sin \omega \cdot t)$$

We kunnen gemakkelijk aantonen dat op elk moment geldt dat

$$\|\vec{r}(t)\| = R$$

en dat de grootte van de plaatsvector bijgevolg een constante is van de beweging.

## Eenparig cirkelvormige bewegingen

### b Snelheidsvector

We bekomen de ogenblikkelijke snelheidsvector  $\vec{v}(t)$  door de plaatsvector af te leiden naar de tijd :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(R \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + R \sin \omega t \cdot \vec{e}_y)$$

$$\vec{v}(t) = -R\omega \sin \omega t \cdot \vec{e}_x + R\omega \cos \omega t \cdot \vec{e}_y$$

of in coördinaten

$$\vec{v}(t) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t)$$

We kunnen gemakkelijk aantonen dat op elk moment geldt dat

$$\|\vec{v}(t)\| = R\omega$$

en dat op elk moment geldt dat

$$\vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$$

*Bewijs deze laatste twee relaties als oefening.*

### c Versnellingsvector

We bekomen de ogenblikkelijke versnellingsvector  $\vec{a}(t)$  door de ogenblikkelijke snelheidsvector  $\vec{v}(t)$  af te leiden naar de tijd :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(-R\omega \sin \omega t \cdot \vec{e}_x + R\omega \cos \omega t \cdot \vec{e}_y)$$

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 \cos \omega t \cdot \vec{e}_x - R\omega^2 \sin \omega t \cdot \vec{e}_y$$

of in coördinaten

$$\vec{a}(t) = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t)$$

We zien ogenblikkelijk dat

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Tevens gelden op elk moment volgende relaties :

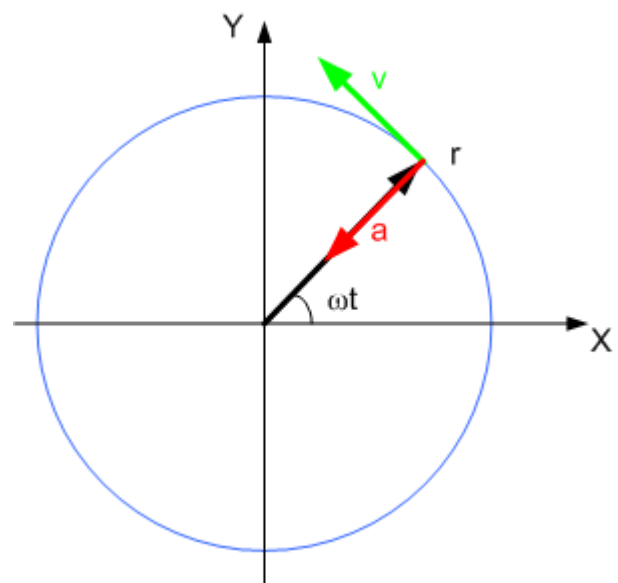
$$\|\vec{a}(t)\| = R\omega^2$$

en

$$\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$$

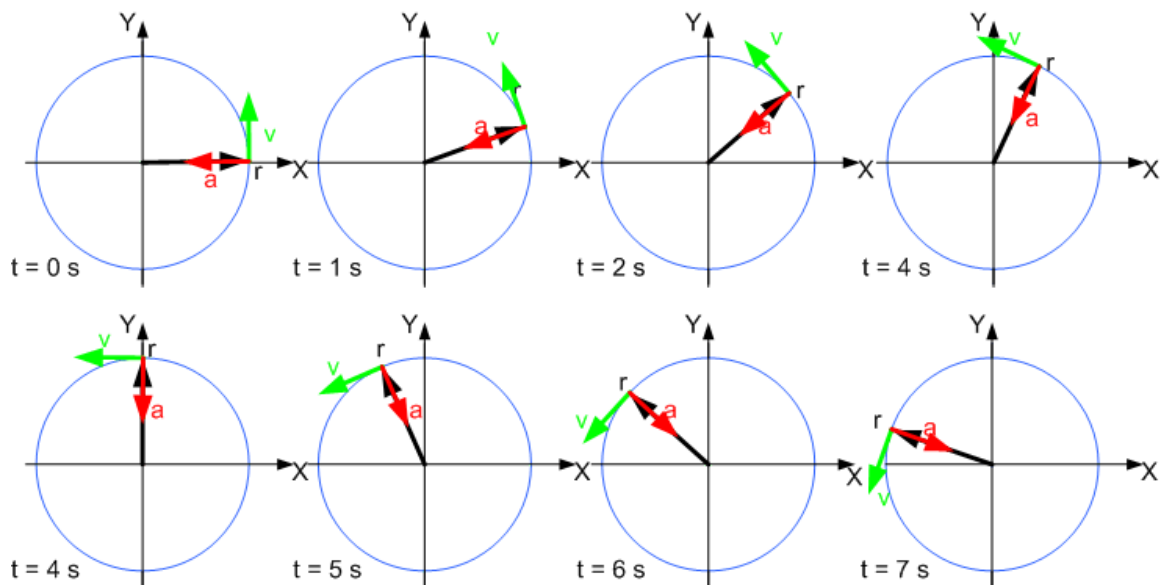
*Bewijs weer deze laatste twee relaties als oefening.*

*Hoe kan er een versnelling zijn als we bij de definitie van een ECB gezegd hebben dat de baansnelheid constant is ?*



Afbeelding 3: Plaats-, snelheids-, en versnellingsvector bij een cirkelvormige beweging

## Eenparig cirkelvormige bewegingen



Afbeelding 4: Plaatsvector, snelheidsvector en versnellingsvector op een aantal verschillende tijdstippen bij een ECB.

### 1.3 Centripetaalkrachten

Volgens de eerste wet van Newton kan een voorwerp geen cirkelvormige beweging beschrijven zonder dat er een netto kracht op inwerkt. Indien dit niet het geval zou zijn, zou het voorwerp of in rust zijn, of bewegen volgens een eenparig rechtlijnige beweging.

Volgens de tweede wet van Newton is  $\vec{F} = m \vec{a}$ .

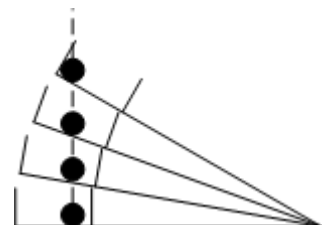
In het geval van een eenparig cirkelvormige beweging wordt dit

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \vec{a} \\ \vec{F} &= -m\omega^2 \vec{r}(t) \\ \|\vec{F}\| &= m\omega^2 R \\ \|\vec{F}\| &= m \frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

De kracht die ervoor zorgt dat een voorwerp een eenparig rechtlijnige beweging beschrijft, is constant in grootte, en is steeds gericht naar het middelpunt toe. We noemen ze de **centripetaal- of middelpuntzoekende kracht**, en noteren met  $\vec{F}_C$ . De centripetaalkracht kan, zoals we zullen zien bij de toepassingen, door een waaijer aan op het voorwerp inwerkende krachten geleverd worden : wrijvingskracht, zwaartekracht, spankracht, normaalkracht, Coulombkracht, Lorentzkracht, ...

Hoe zit dat dan met de zogenaamde **middelpuntvliedende kracht** ? Je weet wel, dat verschijnsel dat je waarneemt als je op de kermis in een snel rondraaiende molen zit, en je door een kracht naar buiten tegen de wand wordt geduwd ?

Wel, eigenlijk bestaat er niet zoiets als een middelpuntvliedende kracht. De "middelpuntvliedende kracht" is geen échte kracht, maar een manifestatie van



Afbeelding 5: De centrifugaalkracht is niks meer dan de neiging tot eenparig rechtlijnig bewegen.

## Eenparig cirkelvormige bewegingen

de eerste wet van Newton. Als je dat van bovenaf bekijkt, zoals op afbeelding 5, zie je dat het eigenlijk het voorwerp is dat een rechtlijnige beweging wil beschrijven. Als je mee in het karretje zit, lijkt het of een kracht het voorwerp naar de kant toe duwt. Vermits deze kracht alleen waarneembaar is als je mee beweegt, noemen we dit een **schijnkracht**.

### 1.4 Energie-aspecten

Bekijken we het vermogen dat geleverd wordt door een centripetaalkracht :

$$P = \vec{F}_c \cdot \vec{v}$$

$$P = m \vec{a} \cdot \vec{v}$$

Vermits  $\vec{a} \perp \vec{v}$  wordt dit

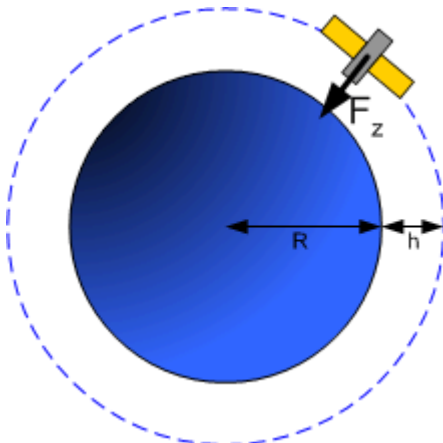
$$P = 0 \text{ W}$$

Een centripetaalkracht levert geen vermogen, met andere woorden, **de energie van een voorwerp dat een eenparig cirkelvormige beweging beschrijft, blijft constant.**

### 1.5 Toepassingen

#### 1.5.1 Satellietbanen

De meeste satellieten volgen een cirkelvormige baan rond de Aarde, en bewegen op die baan, bij goede benadering, eenparig. De enige kracht die inwerkt op de satelliet is de zwaartekracht, en het is de zwaartekracht die de centripetaalkracht levert.



Afbeelding 6: Satelliet op hoogte h boven het aardoppervlak.

De grootte van de zwaartekracht inwerkend op een satelliet met massa m op hoogte h boven het aardoppervlak kan je berekenen via de algemene zwaartekrachtwet van Newton :

$$\|\vec{F}_z\| = G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}$$

met G de universele gravitatieconstante, M de massa van de Aarde en R de straal van de Aarde.

Vermits deze kracht de centripetaalkracht levert, kunnen we zeggen dat

$$\vec{F}_z = \vec{F}_c$$
$$G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} = \frac{m \cdot v^2}{R + h}$$

Hieruit kan je de grootte van de snelheid bepalen van een satelliet rond de aarde op hoogte h boven het aardoppervlak :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

## Eenparig cirkelvormige bewegingen

en de periode van een dergelijke satelliet :

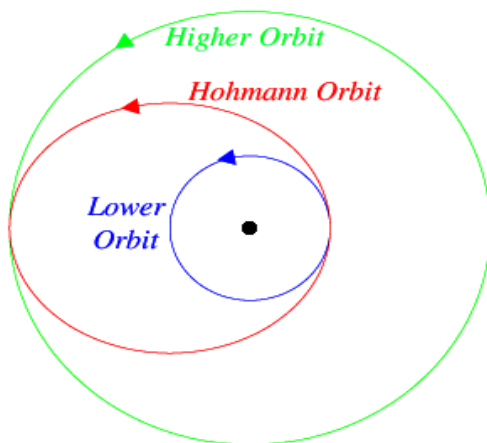
$$T = \left( \frac{2\pi}{\sqrt{G \cdot M}} \right) \cdot (R+h)^{\frac{3}{2}}$$

*Bewijs beide laatste formules als oefening.*

Alleen al over satellietbanen zouden we een hele cursus kunnen vullen, en dan zouden we nog niet verder geraakt dan een inleiding. Hoewel bovenstaande formules een zéér goede benadering vormen, is de realiteit een pak complexer, en moet er rekening mee gehouden worden dat de Aarde niet perfect bolvormig is, dat er storingen zijn door het zwaartekrachtsveld van de maan en van de zon, dat voor lage banen er nog steeds (zij het wel heel kleine) luchtweerstand is, ...

De meest gebruikte satellietbanen zijn :

- LEO (Low Earth Orbit) zijn banen met hoogte tussen de 200 en 2000 km boven het aardoppervlak. Het ISS zit in een LEO. Dit type baan is het gemakkelijkst te bereiken met een minimale energiekost. De meeste artificiële satellieten vinden we dan ook in LEO's.
- MEO (Medium Earth Orbit) zijn banen tussen LEO en GEO, en bevinden zich tussen 2000 km en 35000 km boven het aardoppervlak. GPS-satellieten zitten allemaal in MEO.
- GEO (Geostationary orbit) zijn banen met een omlooptijd gelijk aan de sidereale rotatie-periode van de Aarde (dit is een klein beetje minder dan één zonnedag). Hierdoor lijkt de satelliet altijd boven hetzelfde punt van de aarde te staan. Deze banen worden vooral gebruikt door telecommunicatie-satellieten.
- Polaire banen zijn banen die over de polen passeren. De Aarde draait langzaam onder de baan heen, zodat een satelliet in een dergelijke baan elk punt van de aarde regelmatig onder zich ziet passeren. Dit is zéér nuttig voor spionagesatellieten.



Afbeelding 7: Hohmann baan voor transfer van LEO naar GEO. (bron : <http://www.venusoptics.com> )

- Een Hohman-baan is een elliptische baan met grote eccentriciteit die gebruikt wordt om satellieten of andere ruimtetuigen met een minimum aan energieverbruik in een hogere baan te plaatsen (bvb. vanaf een LEO parkeerbaan naar een GEO operationele baan). De vorm van de baan is zo dat het perigeum raakt aan de laagste baan en het apogeum aan de hoogste baan.

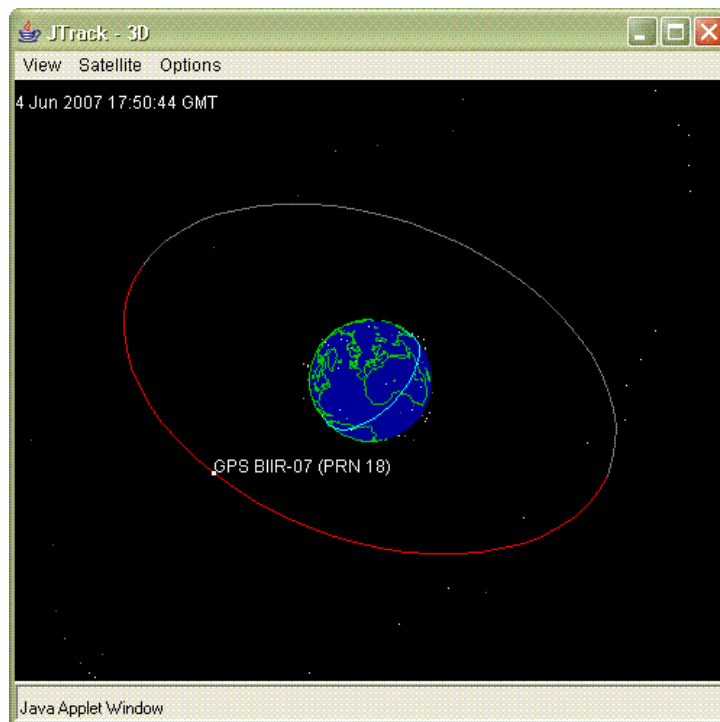
Via de NASA-website kan je de baan van een groot aantal (+900) satellieten visualiseren en hun huidige positie real-time volgen : <http://science.nasa.gov/Realtime/JTrack/3D/JTrack3D.html> .

De positie van het ISS kan je volgen via deze link :

<http://spaceflight.nasa.gov/realdata/tracking/index.html>



## Eenparig cirkelvormige bewegingen



Afbeelding 8: Screenshot van JTrack-3D, waarmee je via de NASA-website de banen kan visualiseren en de posities kan volgen van meer dan 900 satellieten.

### 1.5.2 Horizontale bocht

Een auto met massa  $m$  neemt een horizontale, vlakke bocht. De bocht is een cirkelsegment met straal  $R$ . Uit ervaring weten we dat als je de bocht té snel neemt, je de kromming niet kan volgen en “uit de bocht gaat”. We proberen nu te berekenen wat de maximale snelheid is waarmee de auto de bocht kan nemen, zonder uit de bocht te vliegen.

De centripetaalkracht wordt geleverd door de statische wrijving. Zij  $\mu_s$  de statische wrijvingscoëfficiënt tussen banden en wegdek, dan is

$$F_{w,s} = \frac{mv^2}{R}$$

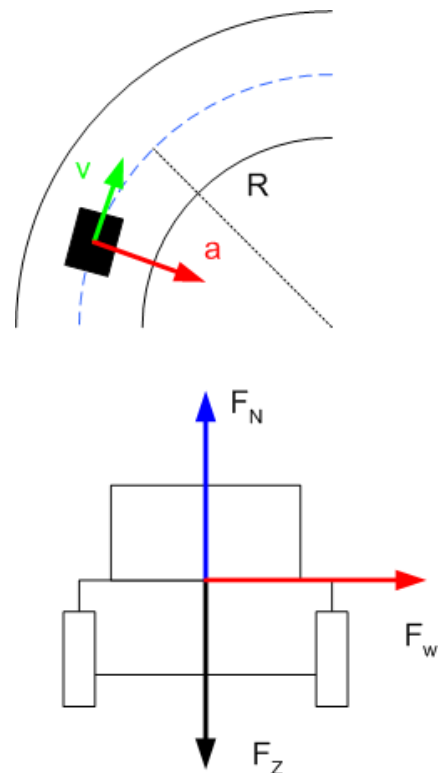
De maximale statische wrijvingskracht is dan

$$\mu_s F_N = \frac{mv_{max}^2}{R}$$

$$\mu_s mg = \frac{mv_{max}^2}{R}$$

of

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s g R}$$



Afbeelding 9: Snelheid, versnelling en krachtwerking op een auto die een horizontale bocht neemt.

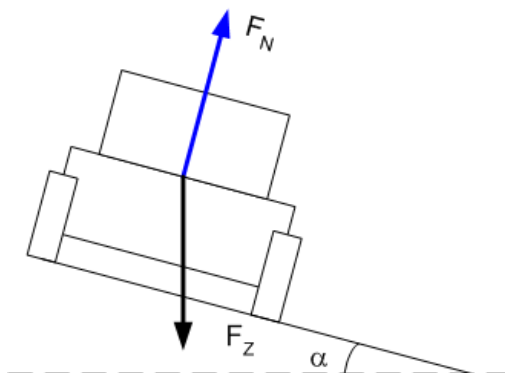
## Eenparig cirkelvormige bewegingen

Opvallend is dat de maximale snelheid waarmee de bocht genomen mag worden blijkbaar onafhankelijk is van de massa van het voertuig. De maximale snelheid voor een twintig-tonner is dezelfde dan voor een lichte personenwagen.

### 1.5.3 Schuine bocht

De maximale snelheid waarmee je een horizontale bocht kan nemen, is afhankelijk van de wrijvingscoëfficiënt tussen banden en wegdek. Omdat deze wrijvingscoëfficiënt zeer afhankelijk is van weersomstandigheden, is het wenselijk bochten zodanig te construeren dat de ideale snelheid waarmee een bocht genomen kan worden, onafhankelijk is van de wrijving. Dit kan door het wegdek een hoek te laten maken met de horizontale.

Beschouw een auto met massa  $m$ , die een bocht neemt met straal  $R$  waarvan het wegdek een hoek  $\alpha$  maakt met de horizontale. We veronderstellen dat er géén wrijving inwerkt op de auto. De enige twee krachten die in het verticale vlak inwerken op de auto zijn de normaalkracht en de zwaartekracht.



Afbeelding 10: Krachten inwerkend op een auto die een schuine bocht neemt.

De centripetaalkracht wordt geleverd door de horizontale component van de normaalkracht :

$$F_N \sin \alpha = \frac{m v^2}{R} \quad (1)$$

Als de auto niet naar boven slipt, is tevens

$$F_N \cos \alpha = m g \quad (2)$$

Delen we (1) door (2), dan krijgen we

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{R g}$$

wat als ideale snelheid (zonder wrijving) om door de bocht te gaan levert :

$$v_{\text{ideaal}} = \sqrt{\tan \alpha \cdot R \cdot g}$$

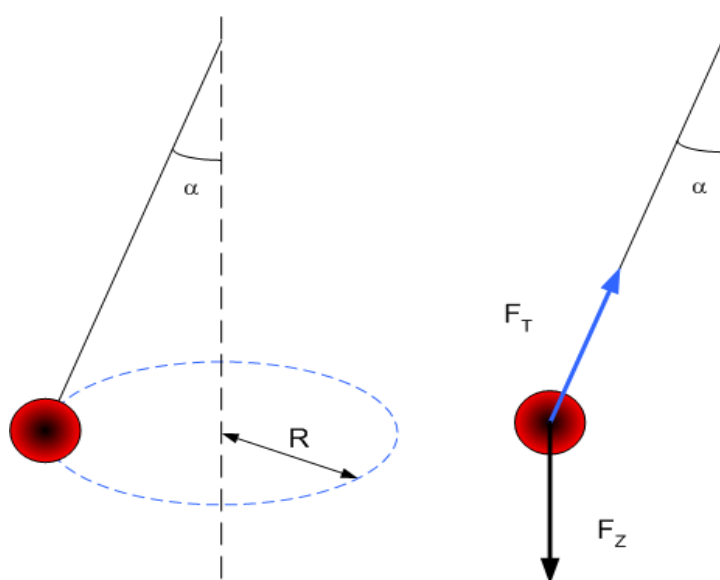
Ook hier valt weer op dat de ideale snelheid onafhankelijk is van de massa van het voertuig.

### 1.5.4 Conische slinger

De conische slinger bestaat uit een massa  $m$ , opgehangen aan een touwtje met lengte  $l$ , die een cirkelvormige beweging beschrijft (zie afbeelding 10) in het horizontale vlak. We nemen waar dat hoe sneller we de massa laten rondslingeren, hoe groter de hoek  $\alpha$  wordt. We proberen nu een relatie af te leiden tussen de snelheid  $v$  waarmee we de massa laten rondslingeren en de hoek  $\alpha$ .

Als we de inwerkende krachten analyseren, zien we dat de centripetaalkracht geleverd wordt door de horizontale component van de spankracht :

## Eenparig cirkelvormige bewegingen



Afbeelding 11: De conische slinger en inwerkende krachten.

$$F_T \sin \alpha = \frac{m v^2}{R} \quad (1)$$

De beweging vindt plaats in een horizontaal vlak, dus

$$F_T \cos \alpha = m g \quad (2)$$

Delen we (1) door (2), en houden we rekening met het feit dat  $R = l \sin \alpha$ , dan krijgen we

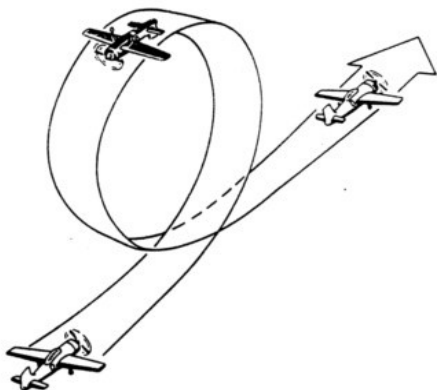
$$v = \sqrt{l g \sin \alpha \tan \alpha}$$

Tevens kan aangetoond worden dat de periode T gegeven wordt door

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

Bewijs deze laatste formule als oefening.

### 1.5.5 Looping



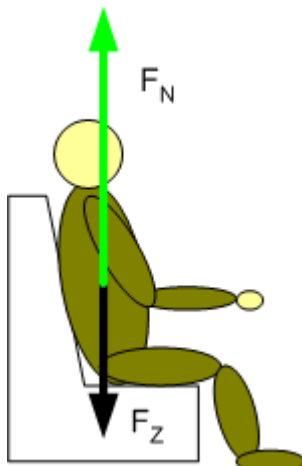
Afbeelding 12: Een vliegtuig dat een looping beschrijft. Bron : <http://www.parkvlieger.de>.

We beschouwen een eenvoudige vorm van een looping, namelijk een vliegtuig dat een eenparig cirkelvormige beweging beschrijft in het verticale vlak. We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in de kracht die een piloot of passagier van het vliegtuig uitoefent op zijn steunvlak (zijn gewicht).

#### a Onderaan de looping

Onderaan de looping wordt de centripetaalkracht die ervoor zorgt dat de piloot mee de cirkelvormige beweging beschrijft gegeven door de samenstelling van normaal en zwaartekracht :

## Eenparig cirkelvormige bewegingen



Afbeelding 13: Krachten inwerkend op piloot onderaan looping.

$$\vec{F}_c = \vec{F}_z + \vec{F}_N$$

Vermits de zwaartekracht en de normaalkracht dezelfde richting hebben, maar tegengestelde zin, geldt dat

$$F_c = F_N - F_z$$

$$F_N = m \frac{v^2}{R} + m g$$

$$F_N = m g \left( 1 + \frac{v^2}{R g} \right)$$

Vermits de normaalkracht en gewicht een actie-reactie paar is, kunnen we besluiten dat het gewicht van de piloot onderaan de looping zal toenemen naarmate de snelheid toeneemt en/of de looping korter (met kleinere straal) wordt genomen.

### b Bovenaan de looping (top)

Bovenaan de looping geldt nog evenzeer dat

$$\vec{F}_c = \vec{F}_z + \vec{F}_N$$

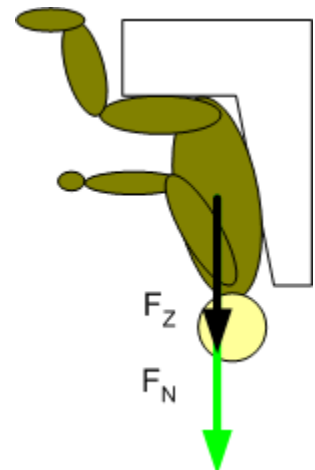
Maar nu hebben de zwaartekracht en de normaalkracht dezelfde zin, dus :

$$F_c = F_N + F_z$$

$$F_N = m \frac{v^2}{R} - m g$$

$$F_N = m g \left( \frac{v^2}{R g} - 1 \right)$$

Ook aan de top van de looping geldt dat het gewicht van de piloot zal toenemen als de looping met grotere snelheid of kleinere straal genomen wordt, maar wat gebeurt er als  $v^2 \leq R g$  ?



Afbeelding 14: Krachten inwerkend op piloot op top van looping.

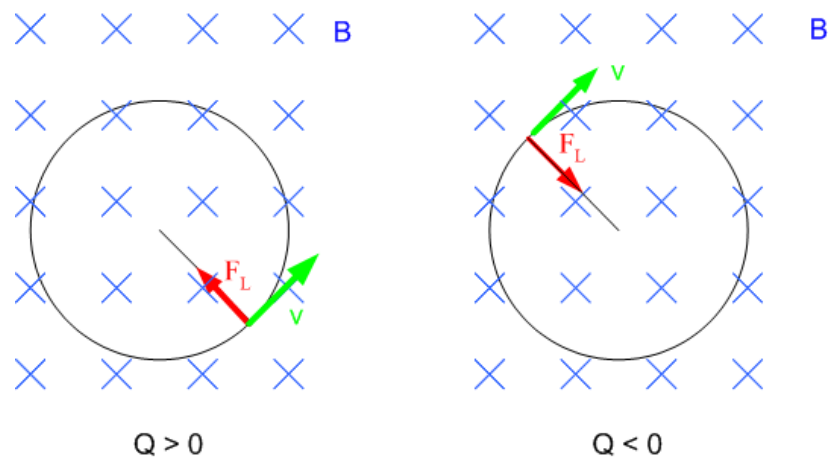
### 1.5.6 Beweging van een geladen deeltje in een magnetisch veld

Beschouw een geladen deeltje (lading  $Q$ ) dat beweegt met snelheid in een homogeen magnetisch veld met veldsterkte  $B$ , zo dat  $\vec{v} \perp \vec{B}$ . We weten uit de cursus elektro-magnetisme dat op een bewegend deeltje in een magnetisch veld een kracht werkt, de Lorentzkracht. We herinneren ons dat de grootte van de Lorentzkracht berekend kan worden met

$$F_L = B \cdot Q \cdot v$$

De zin en richting van de Lorentzkracht kunnen bepaald worden aan de hand van de derde rechterhandregel. In onderstaande figuur is zowel de magnetisch veldsterkte, als de snelheid, als de Lorentzkracht aangeduid, inwerkend op zowel een positieve als een negatieve lading.

## Eenparig cirkelvormige bewegingen



Afbeelding 15: De snelheid, lorentzkracht en baan in geval van een positieve en negatieve bewegende lading in een homogeen magnetisch veld

We zien dat in beide gevallen  $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ , wat tot gevolg heeft dat de grootte van de snelheidsvector ongewijzigd zal blijven (enkel normaalcomponent, enkel richtingswijziging).

Als  $v$  niet wijzigt, en  $B$  wijzigt niet (homogeen veld), dan geldt voor de Lorentzkracht dat deze eveneens constant is, en steeds gericht loodrecht op  $\vec{v}$ .

De Lorentzkracht voldoet aan alle voorwaarden om een centripetaalkracht te zijn, en een deeltje zal onder invloed van de Lorentzkracht dan ook een eenparig cirkelvormige beweging beschrijven.

Met andere woorden :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_c$$

$$|Q| \cdot v \cdot B = m \frac{v^2}{R}$$

Hieruit kunnen we de straal bepalen van de cirkel die het deeltje zal beschrijven

$$R = \frac{m v}{|Q| B}$$

en de periode

$$T = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{2 \pi m}{|Q| B}$$

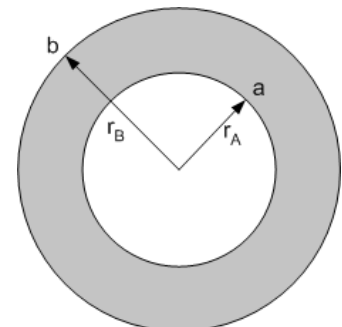
Dit verschijnsel wordt veelvuldig toegepast bij kernfysische instrumentatie als massaspectrometers, snelheidselectoren en deeltjesversnellers, om bundels geladen deeltjes te sturen en te controleren. We zullen dit nog in detail bespreken in het gedeelte "nucleaire fysica".

## 1.6 Oefeningen

1. Bereken de hoeksnelheid van een auto die een bocht neemt met een straal van 8,0m tegen een snelheid van 50,0km/u.
2. Bereken de frequentie van een vliegtuigschroef met een lengte van 1,50m als de tip een snelheid heeft die even groot is als de geluidssnelheid (1220km/u).
3. Bereken de hoeksnelheid van de aarde om haar as. Bereken de snelheid van een punt op het aardoppervlak.:
  - a) Aan de evenaar.
  - b) Op 51° noorderbreedte. Neem voor de straal van de aarde 6400 km.

4. Alle punten van een ring (zie figuur) voeren een eenparig cirkelvormige beweging uit. De grootte van de snelheid in punt a, afstand  $r_a$ , is  $v_a$  en in punt b, afstand  $r_b$ , is  $v_b$ . Welke van onderstaande beweringen zijn juist ? Argumenteer...

- a)  $v_a r_a = v_b r_b$
- b)  $v_a r_b = v_b r_a$
- c)  $v_a v_b = r_a r_b$
- d)  $v_a = v_b$

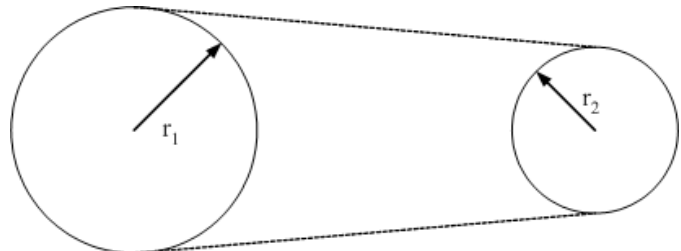


Afbeelding 16: Figuur bij oefening 4

5. Bij een fiets zijn het grootste ( $r_1$ ) en het kleinste ( $r_2$ ) kamwiel door middel van een ketting met elkaar verbonden. Tussen de hoeksnelheid  $\omega_1$  van het grootste kamwiel en  $\omega_2$  van het kleinste kamwiel bestaat de volgende relatie:

- a)  $\omega_1 = \omega_2$
- b)  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$
- c)  $\omega_1 r_2 = \omega_2 r_1$
- d)  $\omega_1 \omega_2 = r_1 r_2$

- e) geen van bovenstaande.



Afbeelding 17: Figuur bij oefening 5

6. Een voorwerp met massa van 5,0 kg is met een touw, waarvan we de massa verwaarlozen, vastgehecht aan een paal. Het beschrijft een eenparige cirkelvormige beweging in een horizontaal vlak met een straal gelijk aan 1,0 m. Op de paal wordt hierdoor een kracht uitgeoefend die een horizontale component heeft van 20 N. Bereken de tijd nodig om één volledige cirkel te doorlopen.
7. Een massa van 3 kg is vastgemaakt aan een draadje en beschrijft een ECB op een horizontale tafel, wrijving is verwaarloosbaar. De straal van de cirkel is 0,8 m, en we weten van het draadje dat het 25 kg kan dragen vooraleer te breken. Wat is de maximum snelheid die de massa kan hebben voor dat het draadje breekt ?

## Eenparig cirkelvormige bewegingen

8. Een geostationaire satelliet is een satelliet die zich continu boven hetzelfde punt op de evenaar bevindt. Bereken de hoogte van een geostationaire baan.
9. Een muntstuk wordt 30 cm van het middelpunt geplaatst op een draaiende draaitafel. We nemen waar dat het muntstuk begint af te glijden als de snelheid 0,5 m/s is.
  - a) Wat zorgt voor de centripetale krachtwerking als de munt stationair is ten opzichte van de draaitafel ?
  - b) Wat is de statische frictie-coëfficiënt tussen de draaitafel en het muntstuk ?
10. Een bocht van een afrit van een autosnelweg heeft een straal van 150 m en is ontworpen voor verkeer met snelheid van 70 km/h.
  - a) Als de curve geen helling vertoont, wat moet dan de minimum wrijvingscoëfficiënt zijn tussen wegdek en auto ?
  - b) Wat moet de hoek zijn met de horizontale, als we niet willen betrouwen op wrijving ?
11. Een ion, lading  $e$ , voltooid vijf omwentelingen in een uniform magnetisch veld met grootte  $5 \cdot 10^{-2}$  T in 1,50 ms. Bereken bij benadering de massa van het ion in kg.
12. Een speelgoedwagentje beweegt in een horizontale cirkel met straal  $2l$  en heeft een tijd  $T$  nodig om een volledige cirkel te beschrijven. Dit kan omdat aan het wagentje een veer is vastgemaakt. Het ander uiteinde van de veer is vastgemaakt in het middelpunt van de cirkel. De lengte van de veer in niet uitgerokken toestand is  $l$ . Het wagentje versnelt waarbij de straal van de beschreven cirkel gelijk wordt aan  $3l$ . De tijd die het wagentje nu nodig heeft om een volledige cirkel te beschrijven is dan gelijk aan:
  - a)  $T$
  - b)  $\frac{3}{4}T$
  - c)  $\sqrt{\frac{3}{4}}T$
  - d)  $\sqrt{\frac{4}{3}}T$
  - e) Geen van bovenstaande

## 2 Enkelvoudige harmonische trillingen

### 2.1 Definities

#### 2.1.1 Algemeen

**Een trilling is een één-en weergaande beweging van een voorwerp rond een evenwichtsstand.**

De stand ten opzichte van de evenwichtsstand noemen we de **elongatie**. We noteren de elongatie op tijdstip  $t$  als  $y(t)$ .

De **amplitude** is de maximale elongatie.

#### 2.1.2 Harmonische trilling

Een trilling is **harmonisch** als de elongatie kan beschreven worden door een **sinusfunctie met een argument dat lineair aangroeit in de tijd**. Met andere woorden, de elongatie wordt gegeven door :

$$y(t) = A \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Hierbij is

- $A$  de amplitude;
- het argument  $\omega \cdot t + \phi_0$  noemen we de **fasehoek** of kortweg **fase**;
- $\omega$  noemen we de **fasesnelheid** of **pulsatie**; (wat is de eenheid hiervan ?)
- $\phi_0$  is de **beginfase**

Een harmonische trilling is een **periodiek systeem**.

- De cyclus is één heen en weergaande beweging.
- De periode kan bepaald worden als volgt : we weten uit de wiskunde dat de sinusfunctie is periodiek met periode  $2\pi$  . Als de fasehoek met  $2\pi$  is aangegroeid, zijn we één periode verder. Hieruit volgt dat  $\omega \cdot T = 2\pi$  waaruit volgt dat de periode  $T$  gegeven is door  $T = 2\frac{\pi}{\omega}$
- Uit bovenstaande volgt dat de frequentie gegeven is door  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

### 2.2 Kinematica van de EHT

#### 2.2.1 De elongatie

##### a De elongatievergelijking

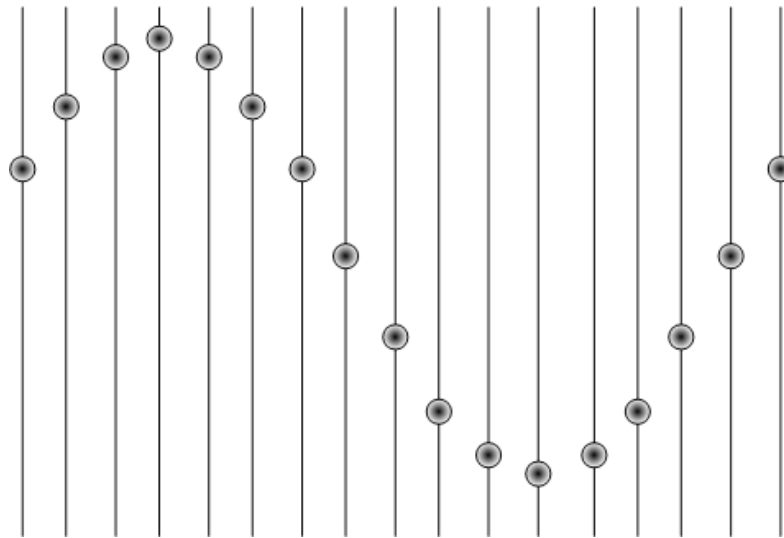
De stand of positie op een willekeurig tijdstip  $t$  van een voorwerp dat een EHT beschrijft wordt gegeven door de definitie :



## Enkelvoudige harmonische trillingen

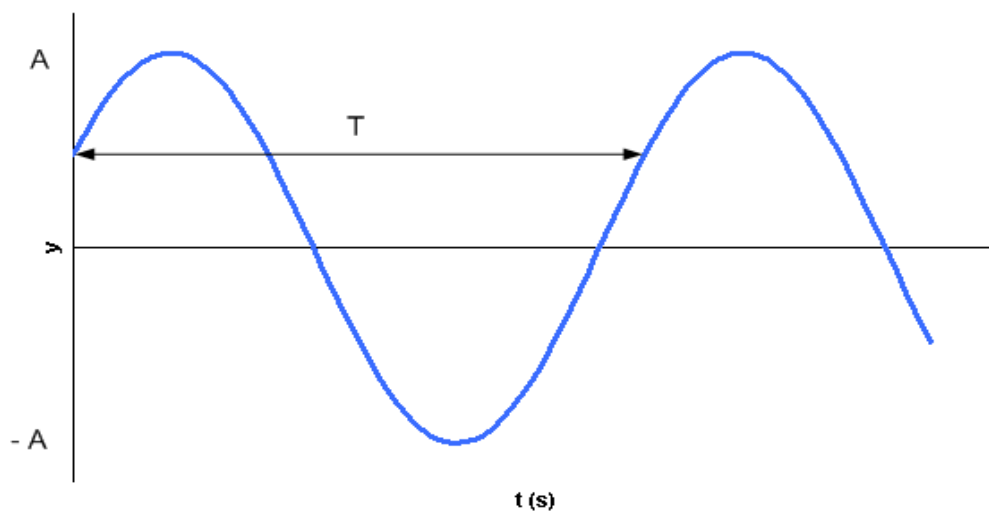
$$y(t) = A \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Hoe zo een beweging eruitziet zien we op bijstaande figuur, die de positie weergeeft van een voorwerp dat een EHT beschrijft op verschillende tijdstippen gescheiden door een gelijk tijdsinterval.



Afbeelding 18: Verschillende posities na gelijke tijdsintervallen van een voorwerp dat een EHT beschrijft. Je vindt een animatie van deze beweging op de website.

De grafiek van de elongatie in functie van de tijd ziet er bijgevolg als volgt uit :



Afbeelding 19: Elongatie als functie van de tijd.

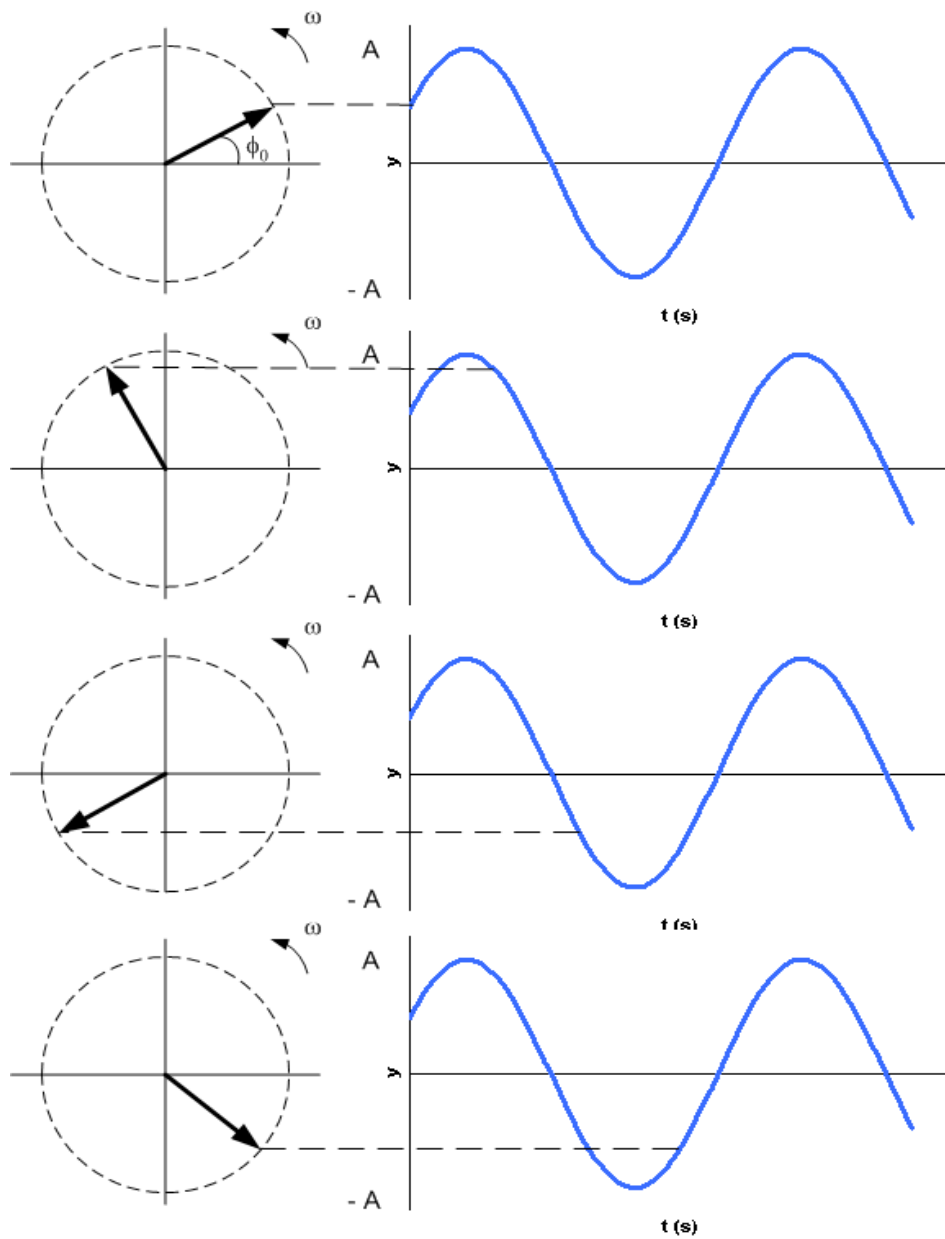
### *b Fasorvoorstelling*

De stand van een EHT kan ook voorgesteld worden als de **projectie op de Y-as** van een vector met norm  $A$  (de amplitude), die een eenparig cirkelvormige beweging uitvoert met hoeksnelheid  $\omega$ . Een dergelijke vector noemen we een

## Enkelvoudige harmonische trillingen

### fasor.

Op onderstaande figuur is de fasor voorgesteld van de trilling beschreven door vergelijking  $y(t) = A \sin(\omega \cdot t + \phi_0)$  op  $t = 0$ s, en na een kwart, halve en driekwart periode.



Afbeelding 20: De fasor van een trilling op vier verschillende tijdstippen.

Op de website vindt je ook een applet die de fasor weergeeft van een massa aan een veer die een EHT uitvoert.

## 2.2.2 De snelheid

### a Berekening

De snelheid op een willekeurig tijdstip  $t$  van een object dat een EHT uitvoert kan bepaald worden door de afgeleide te nemen van de functie die de elongatie beschrijft :

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

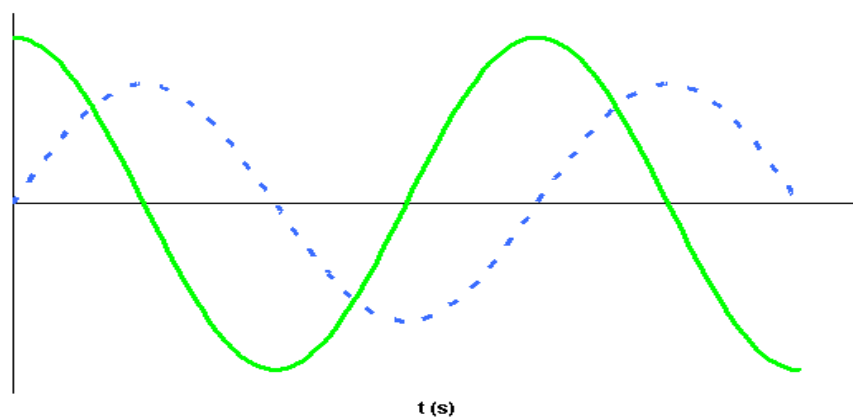
$$v_y(t) = \frac{d}{dt} (A \sin(\omega \cdot t + \phi_0))$$

$$v_y(t) = A \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$$

$$v_y(t) = A \omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

De snelheid van een object dat een EHT uitvoert, **varieert bijgevolg eveneens harmonisch**, met **dezelfde frequente**, met amplitude  $A \cdot \omega$  (wat is de eenheid hiervan ?) en loopt  $\frac{\pi}{2}$  vóór op de elongatie.

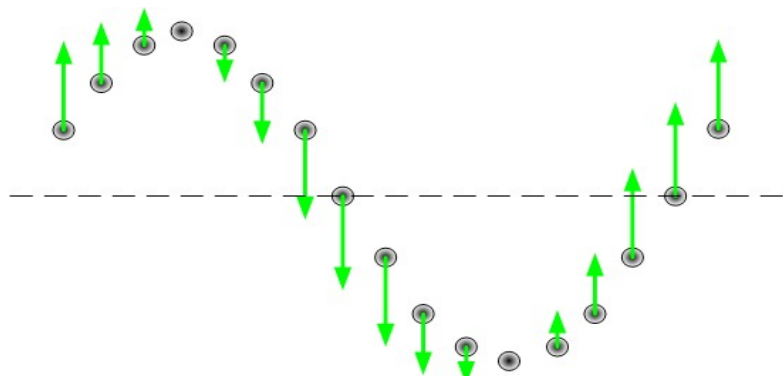
Op onderstaande grafiek staan zowel de elongatie als de snelheid van een object dat een EHT uitvoert in functie van de tijd.



Afbeelding 21: Elongatie (stippellijn) en snelheid (volle lijn) van een EHT. Voor de duidelijkheid hebben we beginfase nul gekozen.

In nevenstaande figuur is de snelheidsvector voorgesteld bij een aantal verschillende elongaties.

We zien dat de **snelheid maximaal is als de evenwichtsstand gepasseerd wordt**, en nul wordt als de elongatie maximaal is



Afbeelding 22: Snelheidsvector en positie van een voorwerp dat EHT beschrijft.

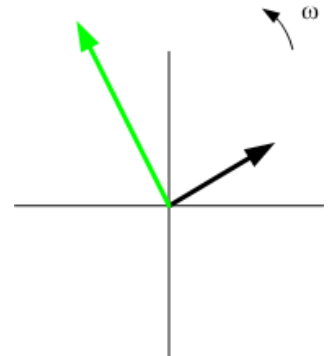
## Enkelvoudige harmonische trillingen

(amplitude).

Oefening : bewijs dat de grootte van de snelheid bij een gegeven elongatie  $y$  gegeven wordt door  $v_y = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$

### b Fasorvoorstelling

Ook de snelheid kan voorgesteld worden met behulp van een fasor. De grootte van de fasor is  $A \cdot \omega$ , en de snelheidsfasor staat **loodrecht** op de fasor die de elongatie beschrijft.



Afbeelding 23: Fasoren die elongatie en snelheid beschrijven. De onderlinge hoek is  $90^\circ$ .

## 2.2.3 De versnelling

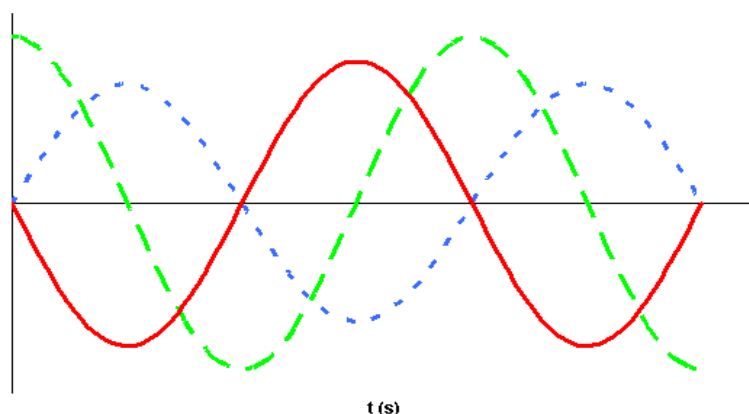
### a Berekening

De versnelling op een willekeurig tijdstip  $t$  van een object dat een EHT uitvoert kan bepaald worden door de afgeleide te nemen van de functie die de snelheid beschrijft, of door de tweede afgeleide te nemen van de functie die de elongatie beschrijft :

$$\begin{aligned}a_y(t) &= \frac{dv_y}{dt} \\a_y(t) &= \frac{d}{dt}(A\omega \cos(\omega \cdot t + \phi_0)) \\a_y(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega \cdot t + \phi_0) \\a_y(t) &= -\omega^2 y(t)\end{aligned}$$

De versnelling van een object dat een EHT uitvoert, varieert bijgevolg **eveneens harmonisch**, met **dezelfde frequentie** als de elongatie en snelheid, maar met amplitude  $A \cdot \omega^2$  (wat is de eenheid hiervan ?).

Op onderstaande grafiek staan zowel de elongatie, de snelheid als de versnelling van een object dat een EHT uitvoert in functie van de tijd.

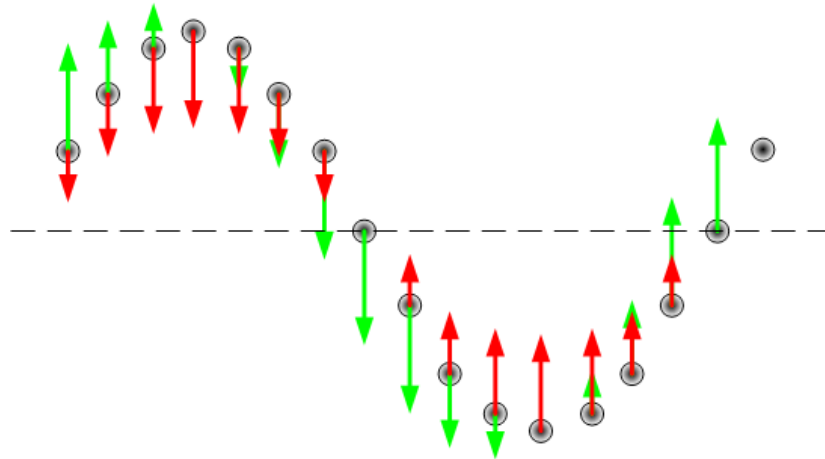


Afbeelding 24: Elongatie (stippellijn), snelheid (streepjes) en versnelling (volle lijn) van een EHT. Voor de duidelijkheid is ook nu de beginfase weer nul gekozen.

## Enkelvoudige harmonische trillingen

We zien dat de versnelling het grootst is bij maximale elongatie, en nul wordt bij doorgang door de evenwichtstand.

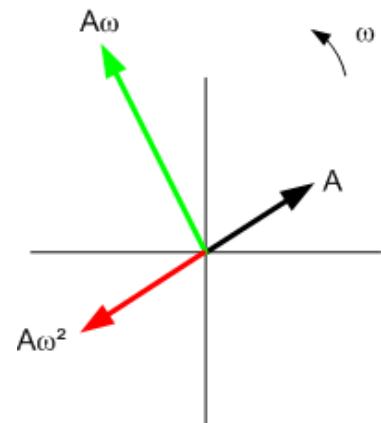
In onderstaande figuur is de versnellingsvector, samen met de snelheidsvector, voorgesteld bij een aantal verschillende elongaties. We zien dat de versnellingsvector altijd tegengesteld gericht is aan de elongatie.



Afbeelding 25: Snelheids- en versnellingsvectoren bij verschillende elongaties.

### b Fasorvoorstelling

Ook de versnelling kan voorgesteld worden met behulp van een fasor. De grootte van de fasor is  $A \cdot \omega^2$ , de richting is dezelfde als de richting van de fasor die de elongatie beschrijft, maar de zin is tegengesteld, en de versnellingsfasor staat loodrecht op de fasor die de snelheid beschrijft.



Afbeelding 26: Fasoren die elongatie, snelheid, versnelling beschrijven.

## 2.3 Dynamica van de EHT

### 2.3.1 Krachtwerking

Uit de **eerste wet van Newton** volgt dat de resulterende inwerkende kracht op een lichaam dat een EHT beschrijft niet constant nul kan zijn (*waarom niet*?).

Uit de **tweede wet van Newton** en uit bovenstaande beschouwingen over de kinematica van de EHT, kunnen we de voorwaarden afleiden waaraan de resulterende kracht die de beweging rond de evenwichtsstand veroorzaakt, moet voldoen wil ze een EHT veroorzaken.

Uit de tweede wet van Newton  $\vec{F} = m \vec{a}$  volgt

$$\begin{aligned} F_y &= m a_y \\ F_y &= -m \omega^2 y \\ F_y &= -k y \end{aligned}$$

De resulterende inwerkende kracht moet dus

## Enkelvoudige harmonische trillingen

- **recht evenredig zijn met de elongatie.** De evenredigheidsfactor  $k = m\omega^2$  wordt ook wel de trillingsfactor genoemd.
- **Tegengesteld gericht zijn aan de uitwijking (terugroepend).**

De bovenstaande voorwaarden zijn de nodige en voldoende voorwaarden om een EHT op te wekken. Ze kunnen ook gebruikt worden als definitie van een EHT.

Uit de trillingsfactor en massa kan direct de frequentie bepaald worden :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Deze frequentie wordt ook wel de eigenfrequentie van het systeem genoemd.

De periode wordt dan :

$$T = f^{-1} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

### 2.3.2 Energie-aspecten

#### a Kinetische energie

De kinetische energie op een willekeurig tijdstip van een voorwerp dat een EHT beschrijft kan eenvoudig berekend worden :

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

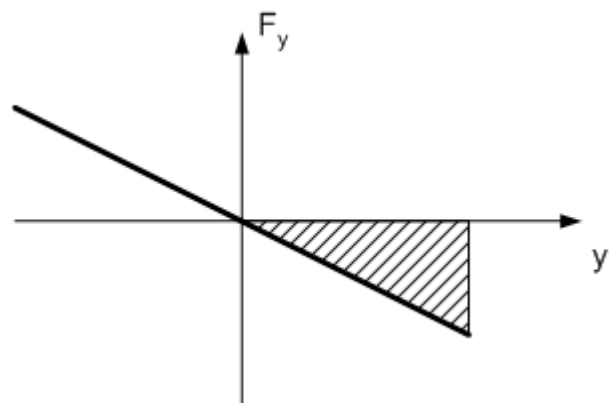
$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - y^2)$$

#### b Potentiële energie

De potentiële energie bij elongatie  $y$  is bij definitie de arbeid die op het voorwerp uitgeoefend wordt bij verplaatsing van  $y$  naar de evenwichtsstand 0.

Deze arbeid is gelijk aan het gearceerde oppervlak onder de grafiek die de grootte van de kracht geeft in functie van de plaats (zie cursus mechanica 5e jaar).



Afbeelding 27: De kracht in functie van de elongatie. Het gearceerde deel is de arbeid die geleverd wordt door de kracht bij verplaatsing van 0 naar  $y$ .

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot F(y) \cdot y$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k y \cdot y$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

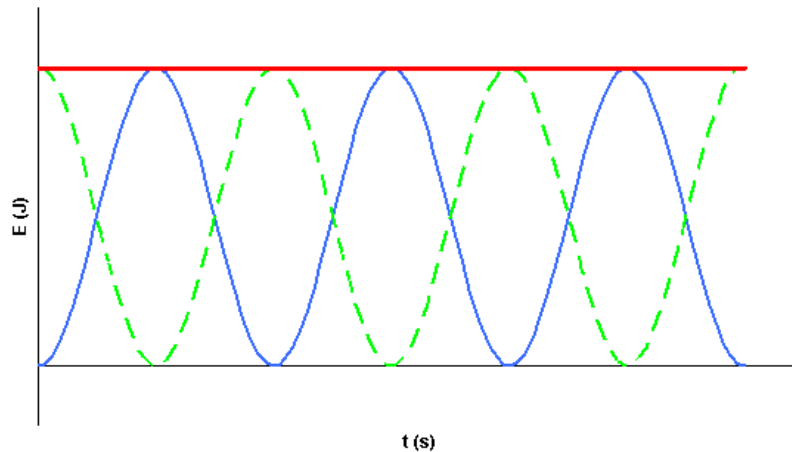
## Enkelvoudige harmonische trillingen

### c Totale energie

Uit bovenstaande resultaten volgt dat de totale energie  $E$  gegeven wordt door :

$$\begin{aligned}E &= E_p + E_k \\E &= \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - y^2) \\E &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \\E &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \\E &= \frac{1}{2} k A^2\end{aligned}$$

De totale energie van een voorwerp dat een EHT beschrijft is constant, en is recht evenredig met het kwadraat van de amplitude.



Afbeelding 28: Kinetische (stippellijn), potentiële (volle lijn) en totale energie (dikke volle lijn) als functie van de tijd.

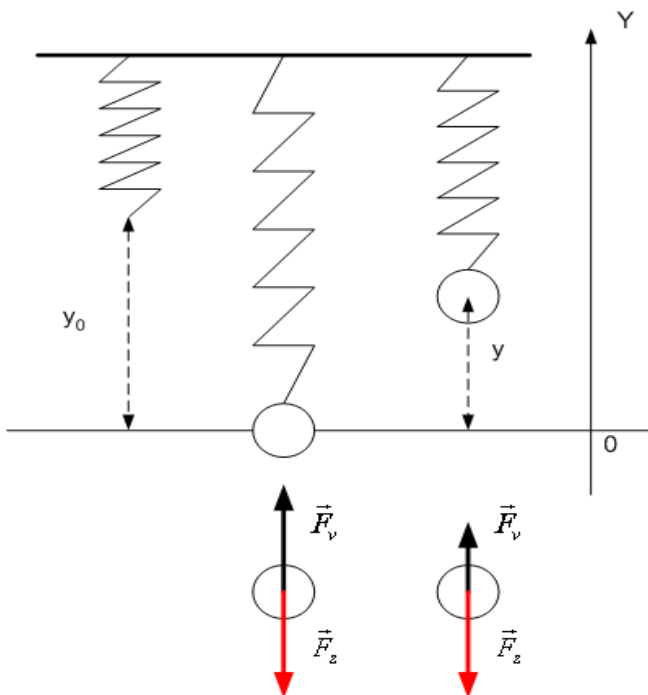
## 2.4 Voorbeelden van harmonische trillingen

We bekijken nu twee voorbeelden van systemen die een EHT beschrijven. In beide gevallen zullen we de inwerkende krachten analyseren en aantonen dat de resulterende kracht verantwoordelijk voor de één-en weergaande beweging voldoet aan de bovenvermelde voorwaarden om een harmonische trilling te veroorzaken.

### 2.4.1 Massa aan een veer

Beschouw een onbelaste veer met veerconstante  $k_v$  aan een ophangpunt (zie figuur).

## Enkelvoudige harmonische trillingen



Afbeelding 29: Krachtwerking bij onbelaste veer, evenwichtsstand en elongatie  $y$ . Hoe is de krachtwerking bij elongatie  $-y$ ?

We hangen nu een massa  $m$  aan de veer. Deze massa zal in rust (evenwichtstand) een uitwijking  $-y_0$  veroorzaken. In deze toestand werkt op de massa zowel de zwaartekracht als de veerkracht. Vermits de massa in rust is, geldt er :

$$\begin{aligned}\vec{F}_z + \vec{F}_v &= \vec{0} \\ F_v - F_z &= 0 \\ k_v \cdot y_0 - m \cdot g &= 0\end{aligned}$$

We kiezen nu in de evenwichtstand de oorsprong, en laten de massa trillen. Bij een willekeurige elongatie  $y$  ten opzichte van de evenwichtstand, zal de

resulterende kracht de samenstelling zijn van de veerkracht en de zwaartekracht. We moeten nu bewijzen dat deze resultante voldoet aan de voorwaarden om een harmonische trilling te veroorzaken.

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_z + \vec{F}_v \\ F_r &= k_v \cdot (y_0 - y) - mg \\ F_r &= -k_v \cdot y + k_v \cdot y_0 - mg\end{aligned}$$

De som van de laatste twee termen is nul, dus is bijgevolg

$$F_r = -k_v \cdot y$$

De resulterende kracht is

- recht evenredig met de elongatie
- tegengesteld gericht aan de elongatie

De voorwaarde is voldaan, een massa die op-en neer beweegt aan een veer voert bijgevolg een harmonische trilling uit.

De trillingsconstante van dit systeem is de veerconstante van de veer waar de massa aan opgehangen is.

We kunnen de periode en frequentie berekenen waarmee de massa trilt :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_v}{m}} \quad \text{en} \quad T = f^{-1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_v}}$$

Merk op, dat de periode en frequentie enkel afhangen van de massa en de veerconstante, en onafhankelijk zijn van de amplitude.

### 2.4.2 De wiskundige slinger

De wiskundige slinger is een idealisatie van een reële slinger, maar het biedt ons een relatief eenvoudig model dat zeer goed overeenstemt met de werkelijkheid,



## Enkelvoudige harmonische trillingen

zolang we grote hoeken of massa's vermijden.

Beschouw een puntmassa  $m$ , opgehangen aan een massaloos en onuitrekbaar touw met lengte  $l$ .

De massa is in evenwicht als ze loodrecht omlaag aan het touw hangt. Deze positie noemen we de evenwichtsstand  $O$ .

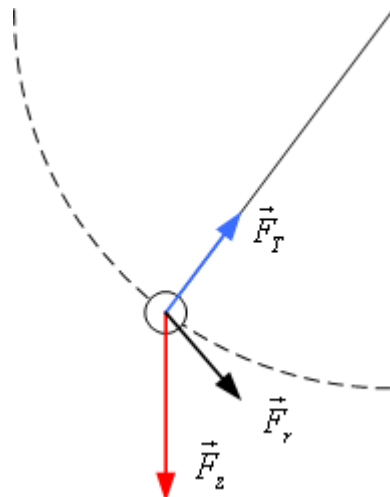
De puntmassa zal één-en weerslingeren op een boog van een cirkel met middelpunt in het ophangpunt en straal  $l$ . We nemen als elongatie de afstand  $\Delta s$  langs de cirkelboog tot het evenwichtspunt  $O$ . Bij conventie nemen we  $\Delta s$  positief rechts van  $O$ , en negatief links van  $O$ .

De krachten die inwerken op de massa bij zekere elongatie  $\Delta s$  zijn de zwaartekracht en de spankracht. De resulterende kracht is bijgevolg :

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_T$$

We kunnen deze resulterende kracht ontbinden in twee componenten :

- Een normaalcomponent die ervoor zorgt dat de massa op de cirkelboog blijft ;
- een tangentiële component die ervoor zorgt dat de massa langs de cirkelboog een één-en weergaande beweging uitvoert.



Afbeelding 30: Inwerkende krachten op een slingerende puntmassa.

We moeten bijgevolg

bewijzen dat de tangentiële component voldoet aan de voorwaarden om een EHT te veroorzaken.

$$\vec{F}_{r,t} = \vec{F}_{z,t} + \vec{F}_{T,t}$$

De spankracht is steeds gericht loodrecht op de raaklijn aan de baan, en heeft bijgevolg geen tangentiële component. Dus krijgen we :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{r,t} &= \vec{F}_{z,t} \\ F_{r,t} &= m g \sin \alpha \end{aligned}$$

Voor kleine hoeken kunnen we gebruik maken van de eigenschap dat  $\sin \alpha = \alpha$ , welke volgt uit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

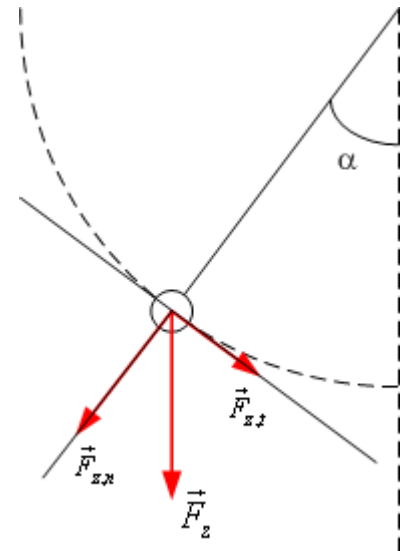
Dus :

$$F_{r,t} = m g \alpha$$

De elongatie  $\Delta s$  is een segment van een cirkel met straal  $l$  dat een hoek  $\alpha$  insluit, bijgevolg is

$$\Delta s = l \alpha$$

De resulterende tangentiële component wordt bijgevolg



Afbeelding 31: Ontbinden van zwaartekracht in tangentiële en normaalcomponent.

## Enkelvoudige harmonische trillingen

$$F_{r,t} = -\frac{mg}{l} \Delta s$$

De kracht verantwoordelijk voor de één- en weergaande beweging is bijgevolg

- recht evenredig met de elongatie, met evenredigheidsconstante

$$k = \frac{mg}{l}$$

- steeds tegengesteld gericht aan de elongatie, terugroepend naar de evenwichtsstand,

en voldoet bijgevolg aan alle voorwaarden om een EHT te veroorzaken.

De periode en frequentie kunnen we bepalen door :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = f^{-1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Aan het aardoppervlak is de periode van een slinger bijgevolg alleen afhankelijk van de lengte van de slinger.

## 2.5 Gedempte trillingen

In de systemen die we tot nu besproken hebben, is er nergens rekening gehouden met wrijving. Wrijving (luchtweerstand, wrijving aan ophangpunt, ...) zal ervoor zorgen dat het systeem energie zal verliezen aan de omgeving. De amplitude van de trilling zal afnemen (*waarom ?*), we spreken van een gedempte trilling.

We onderscheiden drie gevallen :

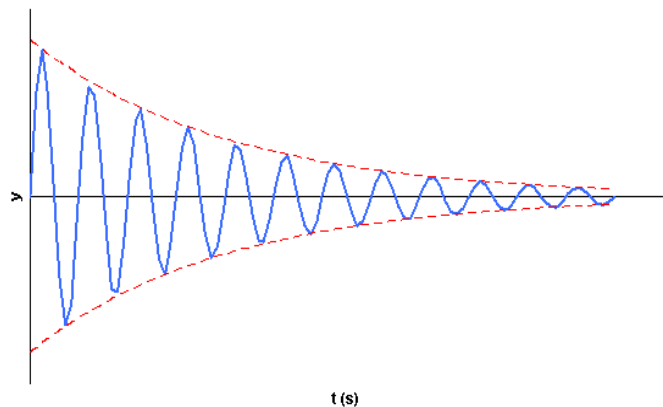
### 2.5.1 Onderdamping

Als de wrijvingskracht klein is vergeleken met de terugroepende kracht, dan spreken we van onderdamping. Men kan aantonen dat de amplitude van de trilling exponentieel afneemt in de tijd :

$$y(t) = A(t) \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$y(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi_0)$$

De grafiek van de elongatie in functie van de tijd ziet er dan uit zoals op figuur hiernaast.



Afbeelding 32: Elongatie in functie van de tijd bij een (onder)gedempte trilling

### 2.5.2 Overdamping

Is de wrijvingskracht véél groter dan de terugroepende kracht, dan zal er geen trilling meer optreden, maar zal het systeem naar de evenwichtsstand terugkeren na een zekere tijd.

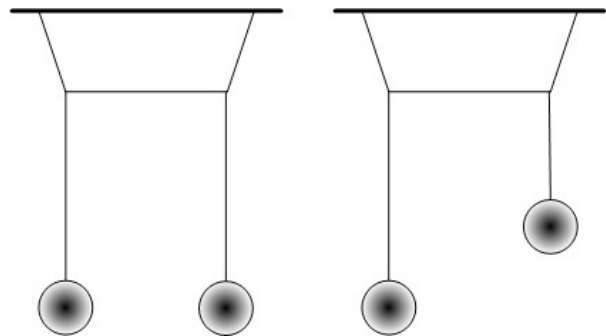
### 2.5.3 Kritische damping

Kritische damping is de overgang tussen onderdamping en overdamping. Dit gebeurt als de wrijvingskracht quasi gelijk in grootte is aan de terugroepende kracht. Er zal geen trilling zijn, het systeem keert zonder te oscilleren op de snelste wijze naar zijn evenwichtsstand terug.

In alle drie de gevallen zal het systeem uiteindelijk in de evenwichtsstand tot stilstand komen. De energie van het systeem zal volledig afgestaan zijn aan de omgeving.

## 2.6 Gedwongen trillingen

Beschouw twee slingers. Tussen de twee slingers maken we een koppeling. Als we nu één van beide slingers heen- en weer laten gaan, dan zal door de koppeling de andere slinger gedwongen worden mee te oscilleren. Wat neem je waar als de lengte van beide slingers gelijk is? Wat gebeurt er als we de lengte van één van de slingers wijzigen?



Afbeelding 33: Gekoppelde slingers met gelijke eigenfrequenties en met verschillende eigenfrequenties.

We plaatsen nu twee gelijke stemvorken vlak bij elkaar. We slaan één van beide stemvorken aan, en brengen hem even later weer tot stilte door hem met de hand vast te houden. Wat neem je waar? Wat neem je waar als we één van beide stemvorken lichtjes ontstemmen door er een klemmetje aan te draaien?

Bovenstaande verschijnselen zijn voorbeelden van **resonantie**.

Resonantie treedt op onder volgende voorwaarden:

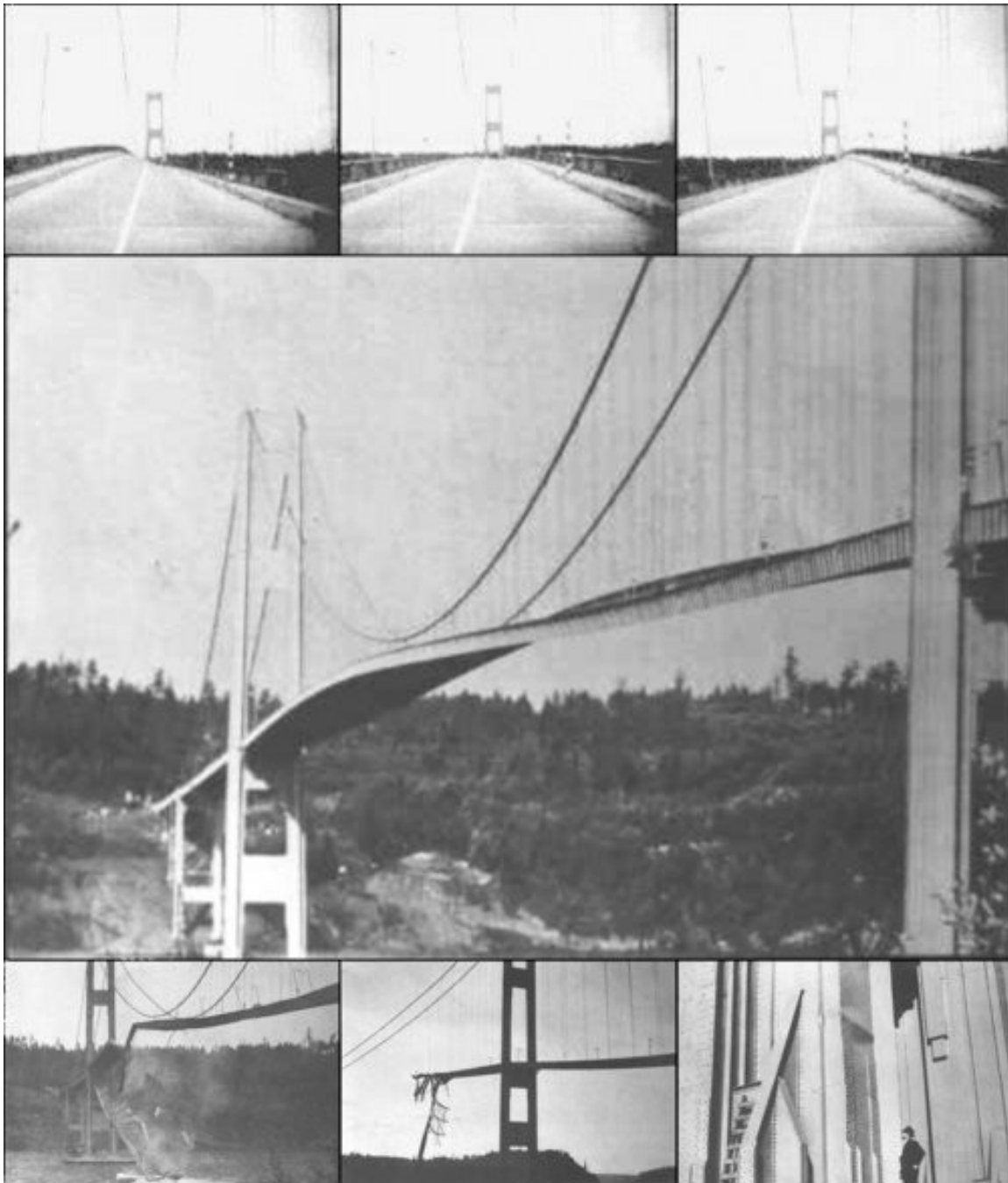
- Je hebt een systeem (de resonator) dat **harmonisch** kan trillen, met eigenfrequentie  $f_r$ .
- Op dat systeem wordt een **periodieke kracht** uitgeoefend (door een andere oscillator, de emitter), met een frequentie  $f_e$ .
- **Als de frequentie van de resonator en die van periodieke kracht quasi gelijk zijn**, dan is de **energie-overdracht** tussen emitter en resonator **maximaal**. De frequentie waarbij de energie maximaal wordt overgedragen, wordt de **resonantie-frequentie** genoemd.

In het geval van zwakke damping, kan de amplitude van de resonator zeer groot worden. We spreken dan van **amplitude-resonantie**.

In extreme gevallen kan de amplitude zo groot worden, dat de elasticiteitsgrens overschreden wordt, en er permanente vervormingen of breuken optreden bij de resonator. Bekend voorbeeld is de tenor die met zijn stem een glas kan laten

## Enkelvoudige harmonische trillingen

springen, en een dramatisch geval van resonantie is het ineenstorten van de Tacoma Narrows Bridge in 1940.



*Afbeelding 34: Beelden van de ineenstorting van de Tacoma Narrows Bridge, op 7 november 1940. (bron : [www.lightandmatter.com](http://www.lightandmatter.com))*

## 2.7 Oefeningen

1. Na één derde van een periode  $T$  is de elongatie van een trilling 4 cm en de versnelling  $-40 \text{ cm/s}^2$ . De beginfase is nul.
  - Zoek de periode en de vergelijking voor de elongatie.
  - Zoek een paar tijdstippen waarvoor de snelheid  $10 \text{ cm/s}$  bedraagt.
2. De maximale snelheid van een trilling is  $12 \text{ m/s}$ . Na  $5T/8$  is de versnelling  $25 \text{ m/s}^2$ .
  - Stel de vergelijking op voor de trilling.
  - Bereken op welke tijdstippen de snelheid nul is.
3. Voor een trilling is de snelheid  $-15 \text{ cm/s}$  na een tijd van  $2T/5$ . De maximale versnelling bedraagt  $35 \text{ cm/s}^2$ .
  - Bereken de amplitude en de frequentie.
  - Stel de vergelijking voor de elongatie op.
4. In rust, wordt een veer door een massa van  $10,0 \text{ kg}$  over  $10 \text{ cm}$  uitgerokken. Bereken de frequentie van de trilling die dit systeem kan uitvoeren om de evenwichtsstand.
5. Een massapunt van  $1,0 \text{ kg}$  doet een veer verlengen over een  $1,0 \text{ cm}$ . Met welke periode zal een massapunt van  $5 \text{ kg}$  trillen als ze aan diezelfde veer wordt opgehangen ?
6. Aan twee verschillende veren hangt men een gelijke massa. Deze veroorzaakt bij de tweede veer een uitrekking die tweemaal zo groot is als bij de eerste veer.
  - Hoe verhouden zich de perioden van de enkelvoudige harmonische trillingen van de twee massa's ?
  - Als de twee massa's trillen met dezelfde amplitude, hoe verhouden zich dan de maximale snelheden ? En de maximale versnellingen ?
7. Een massa van  $100,0 \text{ g}$  geeft aan een veer een verlenging van  $38,4 \text{ cm}$ . Als een massa van  $250,0 \text{ g}$  aan diezelfde veer harmonisch trilt met een amplitude van  $15,0 \text{ cm}$ , wat is dan de snelheid van dit lichaam halverwege tussen de evenwichtsstand en de uiterste stand ?
8. In een hoge toren is aan het plafond een lange slinger vastgemaakt die praktisch tot op de grond reikt. De periode van de slingerbeweging bedraagt  $12,2 \text{ s}$ . Hoe hoog is de toren ?
9. Een slinger heeft een slingerperiode van  $0,250 \text{ s}$ . Wat wordt de frequentie van de slinger wanneer hij opgehangen is in een lift die naar beneden versnelt met een versnelling van  $4,90 \text{ m/s}^2$  ?
10. Een blok rust op een vlakke plaat die een verticale harmonische trilling uitvoert met periode van  $1,2 \text{ s}$ . Wat is de maximale amplitude waarbij het blok niet loskomt van de plaat ?
11. Een trillend voorwerp  $5 \text{ (m = 50g)}$  doorloopt twee opeenvolgende uiterste standen in  $0,6 \text{ s}$ . Hierbij is  $8 \text{ cm}$  afgelegd.
  - Geef de vergelijking voor deze trilling.
  - Zoek een tijdstip waarvoor de versnelling de helft van haar maximale waarde bereikt.
  - Bereken de kinetische en potentiële energie op dat tijdstip.

### 3 Eendimensionale lopende golven

#### 3.1 Het golfverschijnsel

*Bewegen we een touw aan één uiteinde snel op en neer. Wat neem je waar ?*

*Nemen we aan één uiteinde van een veer een aantal windingen samen en laten we los. Wat neem je waar ?*

In beide gevallen plant de **storing** zich voort doorheen het medium. Alle punten van het medium ontvangen de storing op een verschillend moment. Hoewel de storing zich door het hele medium verplaatst, wordt er **geen netto materie verplaatst doorheen het medium**.

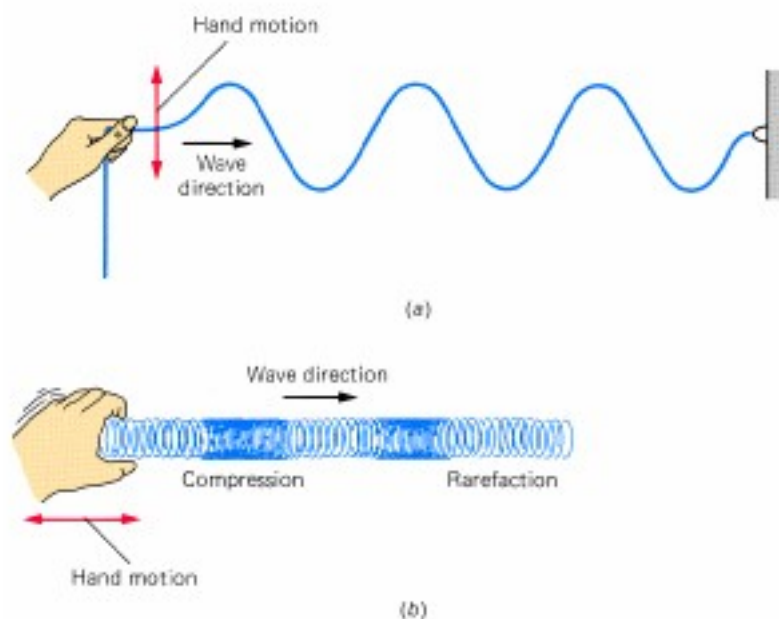
We noemen een storing die zich door een medium voortplant zonder netto materie te verplaatsen, **een lopende golf**.

Een golf is een vorm van **netto energie-overdracht zonder netto verplaatsing van materie**

We definiëren de golfsnelheid  $v_g$  als de snelheid waarmee de storing zich in het medium voortplant.

We onderscheiden twee soorten golven:

- Bij **transversale golven** staat de richting waarin de storing wordt veroorzaakt **loodrecht** op de bewegingsrichting (vb. snaar). Transversale golven worden voornamelijk veroorzaakt door de cohesie tussen moleculen in elastische media. Hoe sterker de cohesie, hoe groter  $v_g$ .
- Bij **longitudinale golven** is de trilrichting waarin de storing wordt veroorzaakt **evenwijdig** aan de bewegingsrichting (vb. Veer). In dit geval zorgen botsingen tussen moleculen voor de voortplanting van de golf in het medium. Hoe groter de dichtheid, hoe groter  $v_g$ .



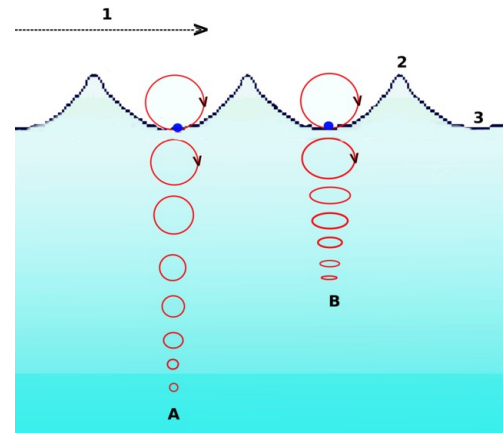
*Afbeelding 35: Longitudinale (boven) en transversale (onder) golven.  
In welke aggregatietoestanden kunnen transversale golven voorkomen ?*

## Eendimensionale lopende golven

*En in welke aggregatietoestanden kunnen longitudinale golven voorkomen ?*

De meeste in realiteit voorkomende golven bestaan uit de samenstelling van een longitudinale en transversale component. Een voorbeeld hiervan is een watergolf, die veroorzaakt wordt door de cirkelvormige beweging van watermoleculen (combinatie van op- en neergaande en heen- en weergaande beweging, een zogenaamde Rayleigh-golf). In ondiep water evolueert de beweging van cirkelvorming naar elliptisch.

Ook de golven in de aardkorst (aardbevingen) zijn een combinatie van transversale en longitudinale golven.



Afbeelding 36: Watergolven hebben zowel een longitudinale als transversale component.

### 3.2 De enkelvoudige harmonische transversale golf

We laten één uiteinde van een **ééndimensionaal** medium (een oneindig lange snaar, 1 punt dik) een **enkelvoudige harmonische trilling** beschrijven met amplitude  $A$  en frequentie  $f$ . Deze trilling (storing) zal zich voortplanten in de hele snaar met een snelheid  $v$ .

#### 3.2.1 Golflengte

We definiëren nu de **golflengte** (symbool  $\lambda$ , eenheid m) van een golf als de **afstand die door de storing afgelegd wordt gedurende 1 periode  $T$** .

Uit de definitie volgt :

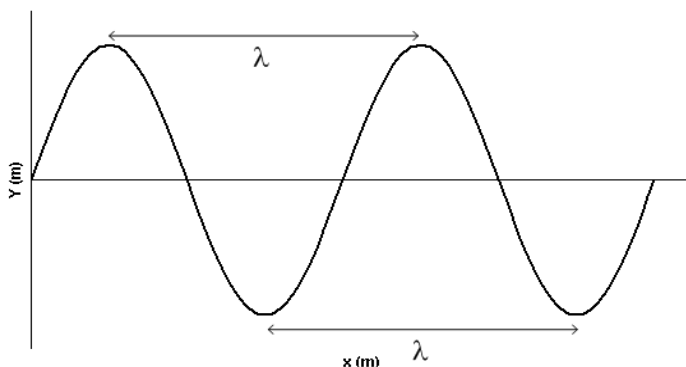
$$\lambda = v_g \cdot T,$$

waaruit, rekening houdend met  $T^{-1} = f$ , volgt dat

$$\lambda \cdot f = v$$

Vermits de golfsnelheid enkel afhankelijk is van het medium, geldt dat een hogere frequentie automatisch een kleinere golflengte tot gevolg heeft (en vice versa).

Op de figuur kunnen we ook zien dat één golflengte de afstand is tussen twee golftoppen.



Afbeelding 37: Eén golflengte is de afstand tussen twee opeenvolgende golftoppen of golfdalen.

### 3.2.2 De golffunctie

We laten de X-as samenvallen met de snaar in rust, en de oorsprong met het uiteinde dat de enkelvoudige harmonische trilling met frequentie  $f$  zal beschrijven. De trilling zal zich over de hele snaar voortplanten met snelheid  $v_g$ .

We gaan nu proberen een functie op te stellen die de **elongatie** geeft in een **willekeurig punt** op de snaar, op **eender welk tijdstip**. Dit zal een functie zijn van **twee variabelen**, enerzijds de **afstand  $x$** , anderzijds het **tijdstip  $t$** .

De elongatie van het punt in de oorsprong ten opzichte van zijn evenwichtstand wordt beschreven door volgende vergelijking :

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Beschouwen we nu een punt P van de snaar op een afstand  $x$  van de oorsprong. De storing zal het punt P bereiken na een zekere tijd  $\Delta t$ . **De elongatie van P zal dezelfde zijn als de elongatie van de oorsprong, maar dan  $\Delta t$  eerder.**

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - \Delta t))$$

$$y(x, t) = A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right)$$

$$y(x, t) = A \cdot \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{\lambda \cdot f}\right)$$

$$y(x, t) = A \cdot \sin 2\pi \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Stellen we  $k = 2\frac{\pi}{\lambda}$ , ook wel het **golfgetal** genoemd, dan kunnen we de golffunctie schrijven als :

$$y(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Deze functie van  $x$  en  $t$ , die de elongatie geeft in een willekeurig punt op eender welk tijdstip, noemen we de **golffunctie** van een enkelvoudige harmonische transversale golf.

*Wat wordt deze uitdrukking als de golf zich voortplant met snelheid  $-v_g$ , met zin tegengesteld aan de zin van de X-as ?*

## 3.3 De enkelvoudige harmonische longitudinale golf

### 3.3.1 De verplaatsing

Veronderstel een ééndimensionaal medium, bestaande uit één oneindig lange rij gelijk gedistribueerde identieke deeltjes. We veronderstellen dat het deeltje aan één uiteinde een harmonische trilling uitvoert, met trilrichting **evenwijdig** met de rij. De uitwijking  $\Delta x$  rond de evenwichtstand op een willekeurig tijdstip  $t$  wordt gegeven door :

$$\Delta x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Deze storing zal zich door middel van interacties (botsingen) met de onmiddellijke naburen verder zetten doorheen het hele medium met een snelheid  $v_g$ . Om de golffunctie op te stellen die de uitwijking in eender welk punt op eender welk tijdstip geeft bij een longitudinale golf kunnen we te werk gaan volgens een analoge methode, en tot volgende golffunctie komen :



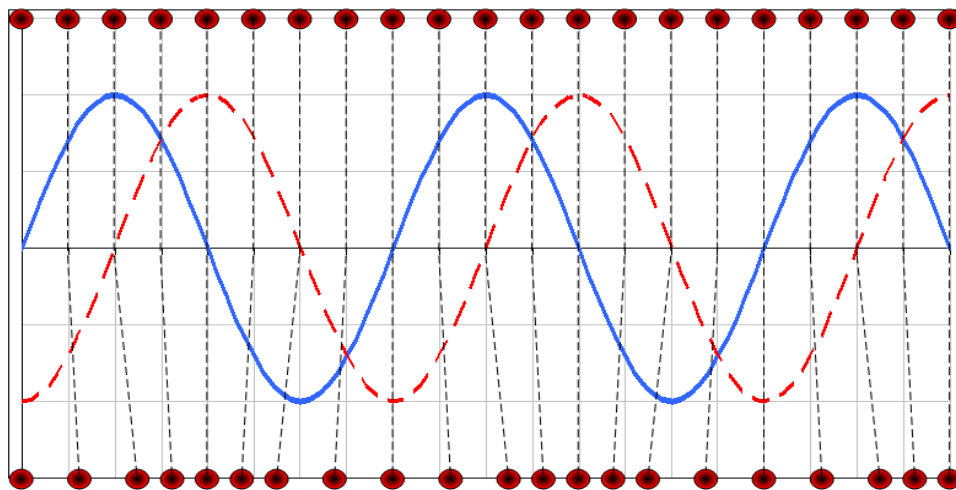
$$\Delta x(x, t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Deze geeft weer hoe ver een deeltje op positie  $x$  verplaatst is van zijn evenwichtstand op een gegeven tijdstip  $t$ .

### 3.3.2 De dichtheidsvariatie

Zonder storing is de dichtheid van het medium constant (deeltjes gelijk gedistribueerd). Noemen we  $\rho_0$  de dichtheid van het ongestoord medium. Als we een storing inbrengen onder de vorm van een longitudinale golf, zullen de deeltjes **niet langer gelijk gedistribueerd** zijn en bijgevolg zal ook de **dichtheid wijzigen als functie van plaats en tijd**.

In een gegeven positie  $x$  op een zeker tijdstip  $t$  zal de dichtheid gewijzigd zijn met  $\Delta\rho(x, t)$ , een wijziging die afhangt van de positie en de tijd.



Afbeelding 38: De bovenste rij punten is het ongestoorde medium. Onderaan zien we het medium waardoor een golf passeert. De grafiek geeft zowel de verplaatsing (volle lijn) als de dichtheidsvariatie (stippellijn) weer op één gegeven tijdstip.

Als de storing harmonisch is, zal ook de dichtheidsvariatie harmonisch zijn. Op de figuur zien we dat de dichtheidsvariatie uit fase is met de verplaatsing. De dichtheidsvariatie loopt  $\pi/2$  voor op de verplaatsing (zie figuur). De dichtheidsgolf kan geschreven worden als :

$$\Delta \rho(x, t) = \Delta \rho_{\max} \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

De dichtheid op een gegeven punt  $x$  op een zeker tijdstip  $t$  kan dan geschreven worden als :

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \Delta \rho(x, t)$$

met  $\rho_0$  de dichtheid van het ongestoord medium en  $\Delta \rho_{\max}$  de maximale dichtheidsvariatie (amplitude).

### 3.3.3 De drukgolf

Indien het medium een ideaal gas is, geldt in het medium de ideale gaswet  $p \cdot V = R \cdot n \cdot T$ .

Vermits in ons geval de totale massa evenredig is met het aantal deeltjes ( $n$  mol), is bijgevolg de dichtheid recht evenredig met de druk.

## Eendimensionale lopende golven

Indien zich in het gas storing voortplant in de vorm van een longitudinale harmonische golf, zal ook de druk variëren doorheen het gas, en de drukvariatie zal recht evenredig zijn met de dichtheidsvariatie, of :

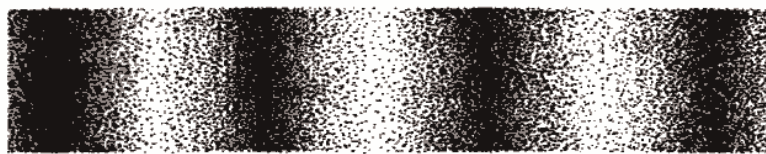
$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{\max} \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

De druk op een gegeven punt  $x$  op een zeker tijdstip  $t$  kan dan geschreven worden als :

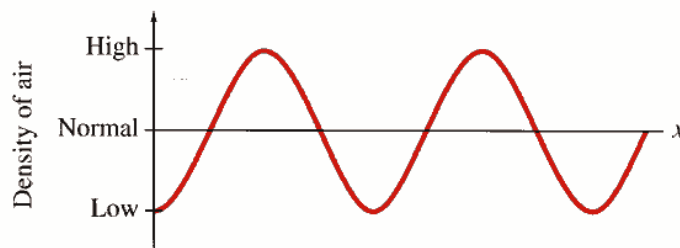
$$p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$$

met  $p_0$  de druk in een ongestoord medium en  $\Delta p_{\max}$  de maximale drukvariatie (amplitude).

A longitudinal wave in air



(a)



(b)

Afbeelding 39: Geluid is een drukgolf in lucht. Je ziet op de afbeelding de gebieden met grote dichtheid/hoge druk en lage dichtheid/lage druk. (bron : <http://courses.dce.harvard.edu>)

### 3.4 Vermogen getransporteerd door een golf

Beschouw een kort stukje ( $\Delta x$ ) van een snaar die waarop een enkelvoudige harmonische transversale golf loopt. De massa van dat stukje is  $\Delta m$ . Deze massa zal een enkelvoudige harmonische trilling beschrijven. De energie  $\Delta E$  van dit stukje massa is bijgevolg :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

Zij  $\rho_l = \frac{\Delta m}{\Delta x}$  de lineaire massadichtheid van de snaar (massa per lengte-eenheid), dan kan de energie  $\Delta E$  geschreven worden als :

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot \Delta x \cdot \omega^2 \cdot A^2$$

Het door de golf gegenereerde vermogen (de energie per tijdseenheid die wordt doorgegeven) is dan

Eendimensionale lopende golven

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \omega^2 \cdot A^2$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho_l \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot v_g$$

Het vermogen is dus

- (a) recht evenredig met de golfsnelheid
- (b) recht evenredig met het kwadraat van de frequentie
- (c) recht evenredig met het kwadraat van de amplitude.

### 3.5 Oefeningen

1. Vanuit een vuurtoren ziet men de golven aankomen met een snelheid van 10 m/s. Er is een afstand van 5,5 m tussen twee opeenvolgende golftoppen. Bereken de frequentie en de periode van deze golfbeweging.
2. De triller in een golfbak brengt per tijdseenheid 12 trillingen voort. De gemeten golflengte is 4,0 cm. Zoek de voortplantingssnelheid van deze golf.
3. Studio Brussel zendt radioprogramma's uit op een frequentie van 94,5 MHz. Als radiogolven zich voortplanten met een snelheid van  $2,99 \cdot 10^8$  m/s, bereken dan de golflengte.
4. Een trilling plant zich voort langs een koord over een afstand van 14,5 golflengten in 29 s. Hoe groot is de golflengte als de voortplantingssnelheid van de golven 6,0 m/s is ?
5. De vergelijking van een lopende golf is  $y(x,t) = 4 \cdot \sin 2\pi \left( \frac{t}{0,2\text{ s}} - \frac{x}{10\text{ m}} \right)$ . Bepaal de golflengte, de frequentie en de voortplantingssnelheid van deze golf.
6. Een sinusoidale golf beweegt langs een koord. Indien een bepaald punt van de koord zich verplaatst van de maximale uitwijking naar uitwijking nul in 0,18 s, zoek dan de periode en de frequentie. Bereken de voortplantingssnelheid van de golf indien de golflengte 1,50 m is.
7. Twee punten, op 30 cm van elkaar gelegen, hebben bij een lopende golf in een koord een faseverschil van  $270^\circ$ . Welke frequentie heeft de trilling die zich het koord voortplant met een snelheid van 3,6 m/s ?
8. Een dobber trilt in stilstaand water. De veroorzaakte golven planten zich voort met een snelheid van 0,80 m/s en de golflengte bedraagt 30 cm. Bereken de frequentie. Geef de trillingsvergelijking van een punt op 2,4 cm van het storingscentrum als de amplitude in dit punt gelijk is aan 3,0 cm. Geef het faseverschil tussen dit punt en de bron.

## 4 Tweedimensionale lopende golven

### 4.1 Golfstralen en golffronten

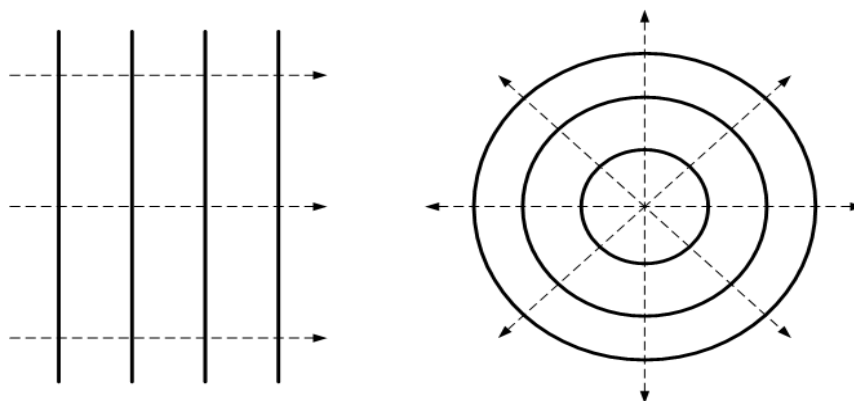
#### 4.1.1 Definities

Beschouwen we nu een storing die zich voortplant in een **vlak** (2D ruimte). De storing zal zich nu verderzetten in meerdere richtingen. We definiëren nu twee begrippen om de beschrijving van een tweedimensionale golf te vergemakkelijken.

Een **golffront** is een verzameling punten in het vlak die op hetzelfde moment door de storing bereikt worden. Al de punten van een golffront beginnen op hetzelfde moment te trillen, en alle punten van het golffront trillen in fase.

Als de golffronten concentrische cirkels vormen, spreken we van een **circulair golffront**, als de golffronten evenwijdige lijnen zijn spreken we van **vlakke of lineaire golffronten**.

Een **golfstraal** is een richting waarin een golffront zich voortbeweegt. Zowel voor circulaire als vlakke golffronten staan de golfstralen **loodrecht** op de golffronten.



Afbeelding 40: lineaire en circulaire golffronten met aantal bijhorende golfstralen (stippellijnen).

#### 4.1.2 Het principe van Huygens

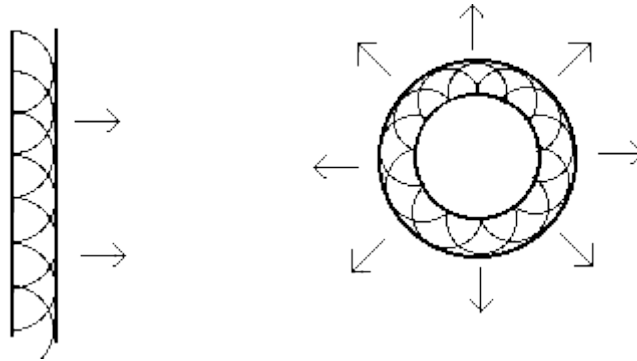
*Als we twaalf puntbronnen in een cirkelvorm plaatsen en die in fase laten trillen, wat neem je dan waar ?*

*Als we twaalf puntbronnen op één lijn plaatsen en die in fase laten trillen, wat neem je dan waar ?*

Bovenstaande experimenten tonen het principe van Huygens :

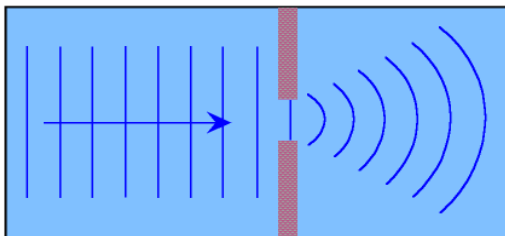
**Elk punt van een golffront kan beschouwd worden als een puntbron waaruit zich trillingen voortplanten. Elk punt van een golffront mag beschouwd worden als een secundaire trillingsbron.**

**Alle secundaire trillingsbronnen horend bij één golffront trillen in fase.**



Afbeelding 41: Het principe van Huygens voor lineair en circulair golffront.

## 4.2 DiffRACTIE



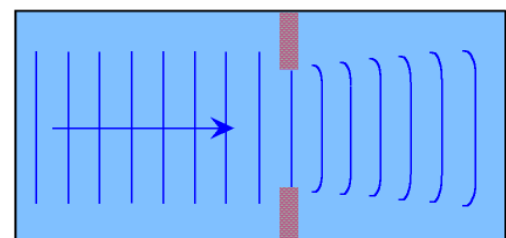
Afbeelding 42: DiffRACTIE van een golf aan een opening. De golffronten worden afgebogen eens de opening voorbij.

Laten we een lineaire golf invallen op een scherm met daarin een kleine opening. Eens de golf de opening gepasseerd is, zijn de golffronten niet langer lineair, maar **afgebogen** achter de opening. De golf beweegt dus ook verder "achter het hoekje". Dit verschijnsel noemen we **diffRACTIE**.

We kunnen dit verschijnsel verklaren aan de hand van het principe van Huygens. Als de golf door de opening passeert, **zal elk punt van het golffront zich gedragen als een secundaire puntbron**. Hoe kleiner de opening van de bron ten opzichte van de golflengte, des te uitgesprokener de afbuiging.

Dit verschijnsel doet zich ook voor als er een obstakel in het pad van een lineaire golf staat. De golf wordt dan achter het obstakel afgebogen.

Ook circulaire golffronten vertonen diffRACTIE aan openingen of obstakels, je kan de diffRACTIEpatronen zelf ontdekken met behulp van de simulaties op de website.



Afbeelding 43: Is de opening groot in vergelijking tot de golflengte, dan is de afbuiging minder uitgesproken.

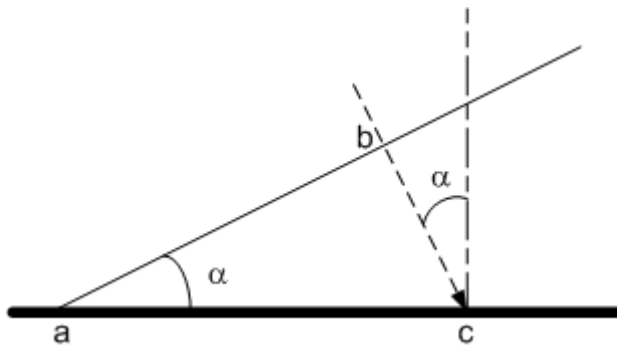
## 4.3 Reflectie

Als een golffront invalt op een vast oppervlak, dan wordt de golf gereflecteerd. De richting van de weerkaatste golf wordt bepaald door volgende wetmatigheid :

**De hoek tussen de invallende golfstraal en de normaal van het oppervlak, is gelijk aan de hoek tussen de normaal en de gereflecteerde golfstraal.**

## Tweedimensionale lopende golven

We kunnen dit als volgt bewijzen :

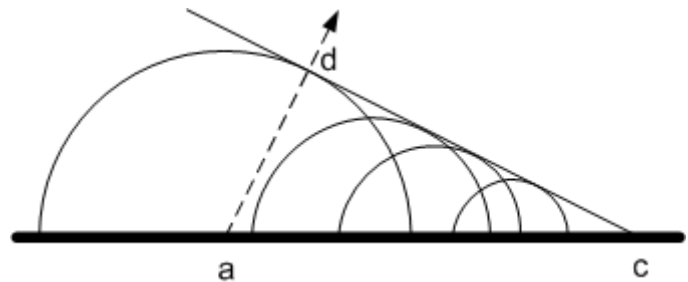


Afbeelding 44: Het invallend golffront  $ab$  (doorlopende lijn) met golfstraal  $bc$  (stippellijn), die een hoek  $\alpha$  maakt met de normaal van het oppervlak.

Beschouw een lineair golffront bepaald door de punten  $a$  en  $b$  dat invalt op een vast oppervlak. De golfsnelheid in het medium is  $v_g$ . Noemen we de hoek tussen de invallende golfstraal en de normaal van het oppervlak  $\alpha$ .

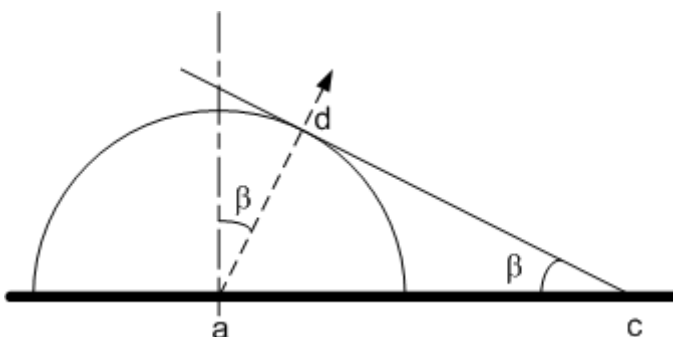
Op het moment dat  $a$  het oppervlak bereikt, moet punt  $b$  nog een afstand  $|bc|$  afleggen vooraleer het oppervlak te bereiken. Dit duurt een tijd  $\Delta t = \frac{|bc|}{v_g}$ .

Gedurende die tijd gedraagt  $a$  zich als een **puntbron** en stuurt circulaire golffronten uit. Intussen zijn alle punten tussen  $a$  en  $c$  zich als puntbronnen beginnen gedragen en hebben zij circulaire golffronten uitgezonden, die tesamen het gereflecteerde golffront vormen (zie afbeelding 11).



Het eerste door  $a$  uitgestuurde golffront heeft na  $\Delta t$  een afstand  $|ad| = v_g \cdot \Delta t$  afgelegd (waarom is de snelheid van de gereflecteerde golf dezelfde als die van invallende golf?).

De lijn tussen  $c$  en  $d$  bepaalt het gereflecteerde golffront, de lijn tussen  $a$  en  $d$  de gereflecteerde golfstraal.



Afbeelding 46: Het gereflecteerde golffront  $cd$  met golfstraal  $ad$ , die een hoek  $\beta$  maakt met de normaal van het oppervlak

of  $\alpha = \beta$ ,

Zij  $\beta$  de hoek tussen de gereflecteerde golfstraal en de normaal van het oppervlak.

In afbeelding 10 zien we dat  $\sin \alpha = \frac{|bc|}{|ac|}$

In afbeelding 12 zien we dat  $\sin \beta = \frac{|ad|}{|ac|}$

Vermits

$$|ad| = |bc| = v_g \cdot \Delta t \text{ is}$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

Q.E.D.

#### 4.4 Refractie (breking)

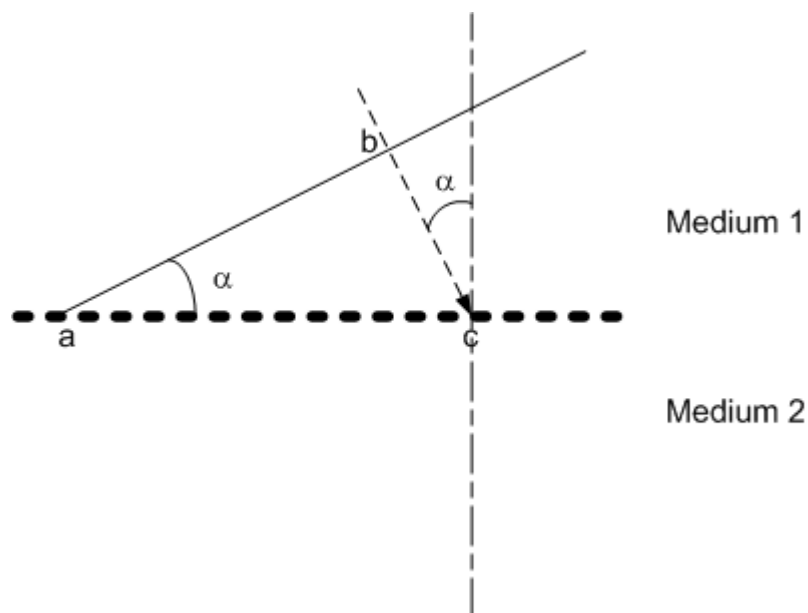
Refractie of breking treedt op als een golf **overgaat naar een medium met een verschillende golfsnelheid dan het oorspronkelijke medium**. Na de overgang zal de golfstraal een **andere richting** hebben. Er bestaat een eenduidige relatie tussen de richting van de golfstraal in het ene medium en de richting van de golfstraal na overgang in het andere medium :

Beschouw twee verschillende media met **verschillende golfsnelheid**, resp.  $v_{g,1}$  En  $v_{g,2}$  . Valt een golffront in op het scheidingsoppervlak onder een hoek  $\alpha$  met de normaal op het scheidingsoppervlak, dan zal het golffront zich verder voortzetten in het tweede medium onder hoek  $\beta$  met het scheidingsoppervlak, op een zodanige manier dat :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{g,1}}{v_{g,2}} = n_{1 \rightarrow 2}$$

Deze uitdrukking noemen we de **brekingswet**, en  $n_{1 \rightarrow 2}$  noemen we de **brekingsindex** bij overgang van medium 1 naar medium 2.

We kunnen de brekingswet bewijzen als volgt :

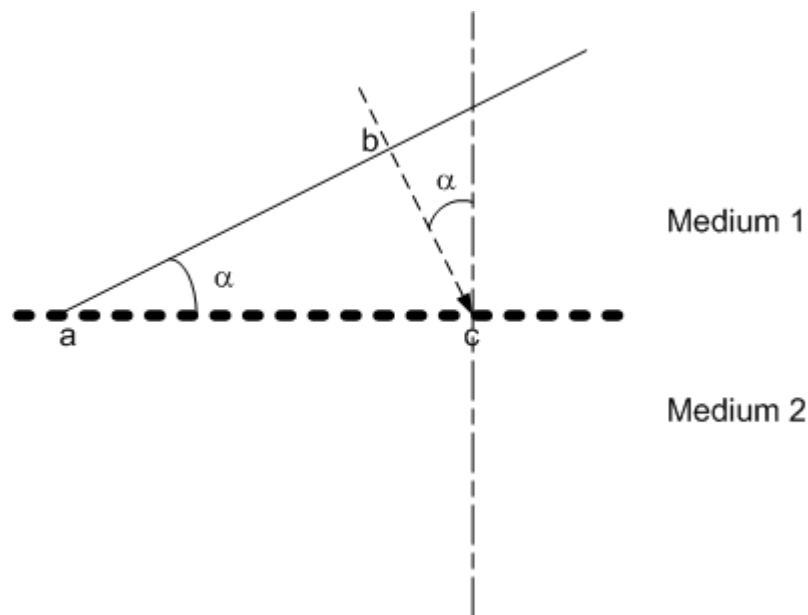


Afbeelding 47: Golffront  $ab$  komt aan op scheidingsoppervlak.

Beschouw een lineair golffront bepaald door de punten  $a$  en  $b$  dat invalt op het scheidingsoppervlak tussen medium 1 en medium 2. Op het moment dat  $a$  het oppervlak bereikt, moet punt  $b$  nog een afstand  $|bc|$  afleggen vooraleer het oppervlak te bereiken. Dit duurt een tijd  $\Delta t = \frac{|bc|}{v_{g,1}}$  .

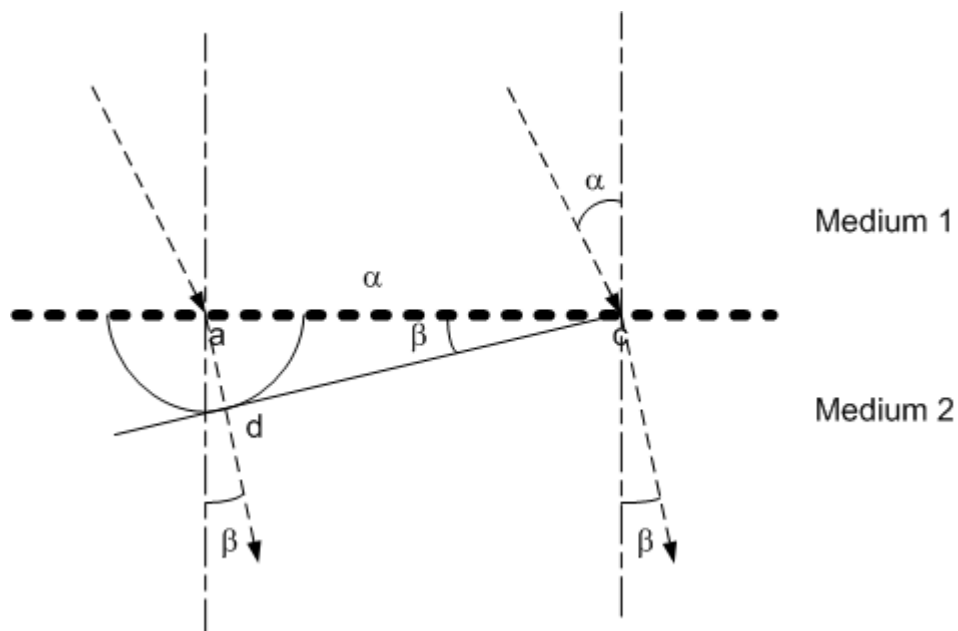


## Tweedimensionale lopende golven



Afbeelding 48: Golffront  $ab$  bereikt scheidingsoppervlak tussen twee verschillende media.

Gedurende die tijd gedraagt  $a$  zich als een puntbron en stuurt circulaire golffronten uit. Intussen zijn alle punten tussen  $a$  en  $c$  zich als puntbronnen beginnen gedragen en hebben zij circulaire golffronten uitgezonden, die tesamen het gereflecteerde golffront vormen (zie afbeelding 11). Het eerste door  $a$  uitgestuurde golffront heeft in medium 2 na  $\Delta t$  een afstand  $|ad| = v_{g,2} \cdot \Delta t$  afgelegd.



Afbeelding 49: Punt  $a$  gedraagt zich als puntbron, golf zet zich verder in medium 2 volgens golfstraal  $ad$ .

In afbeelding 13 zien we dat  $\sin \alpha = \frac{|bc|}{|ac|} = \frac{v_{g,1} \cdot \Delta t}{|ac|}$  (1)

## Tweedimensionale lopende golven

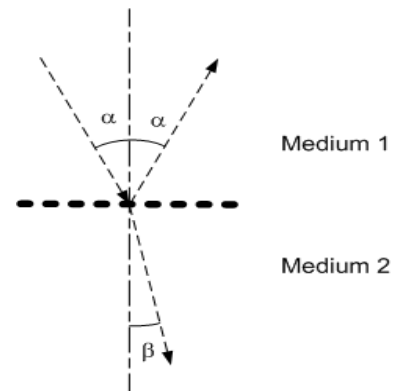
In afbeelding 14 zien we dat  $\sin \beta = \frac{|ad|}{|ac|} = \frac{v_{g,2} \cdot \Delta t}{|ac|}$   
(2)

Delen we (1) door (2), dan volgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{g,1}}{v_{g,2}}$$

QED.

In een reëel geval zien we aan het scheidingsoppervlak tussen twee media zowel reflectie als refractie ontstaan (zie ook applet op de website).



Afbeelding 50: Breking en reflectie aan grensooppervlak tussen twee media.

### 4.5 Doppler effect

Wanneer een brandweerwagen met loeiende sirene nadert heb je de indruk dat de toon van de sirene hoger is terwijl de wagen nadert en dat de toon lager is als de wagen zich verwijderd.

**Als bron en waarnemer ten opzichte van elkaar bewegen, wordt een andere frequentie waargenomen dan deze uitgezonden door de bron. Dit effect is het Doppler-effect.**

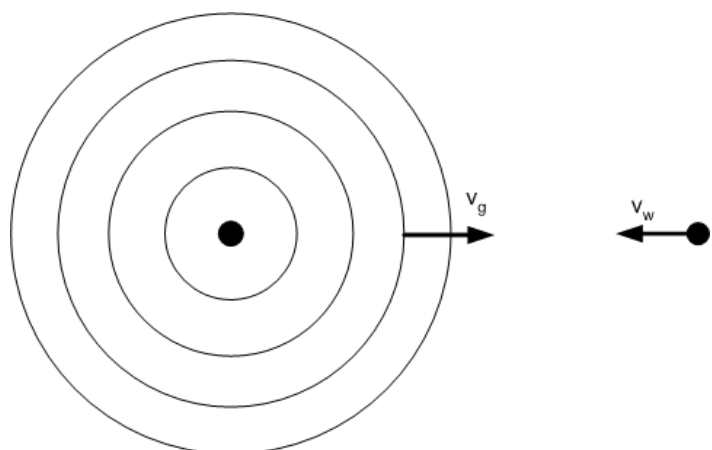
We beschouwen twee gevallen:

- De bron is in rust, maar de waarnemer beweegt ten opzichte van de bron.
- De waarnemer is in rust, maar de bron beweegt ten opzichte van de waarnemer.

#### 4.5.1 Bron in rust

Beschouw een puntbron in rust die circulaire golffronten uitstuurt met frequentie  $f$  in een medium waar de golfsnelheid gelijk is aan  $v_g$ . De golflengte wordt bijgevolg bepaald door  $\lambda \cdot f = v_g$

De waarnemer beweegt naar de bron toe met een snelheid  $v_w$ . De waarnemer zal nog steeds een golflengte  $\lambda$  waarnemen, maar de golffronten komen op hem af met een snelheid  $v_g' = v_g + v_w$ .



Afbeelding 51: Waarnemer beweegt naar bron toe.

De waargenomen frequentie  $f'$  wordt bijgevolg :

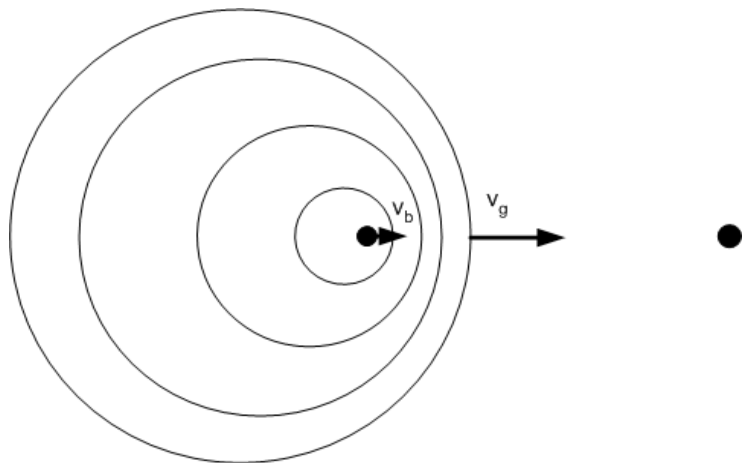
## Tweedimensionale lopende golven

$$f' = \frac{v_g'}{\lambda}$$
$$f' = f \cdot \frac{v_g + v_w}{v_g}$$

Reken nu zelf uit wat de uitdrukking wordt voor de waargenomen frequentie als de waarnemer zich van de bron verwijderd met snelheid  $v_w$ .

### 4.5.2 Waarnemer in rust

Beschouw een puntbron die circulaire golffronten uitstuurt met frequentie  $f$  in een medium waar de golfsnelheid gelijk is aan  $v_g$ . De bron beweegt naar een stilstaande waarnemer toe met een snelheid  $v_b$ .



Mocht de bron in rust zijn, dan zou de golflengte (afstand tussen twee golftoppen) waargenomen door de waarnemer bepaald zijn door  $\lambda \cdot f = v_g$ .

Echter, de bron beweegt naar de waarnemer toe, en heeft in de tijd tussen het uitsturen van twee golftoppen (*hoe groot is die tijd?*) een afstand  $v_b \cdot T$  afgelegd.

De afstand tussen twee golftoppen wordt bijgevolg :

$$\lambda' = \lambda - v_b \cdot T$$
$$\lambda' = \lambda - \frac{v_b}{f}$$
$$\frac{v_g}{f'} = \frac{v_g - v_b}{f}$$
$$f' = f \cdot \frac{v_g}{v_g - v_b}$$

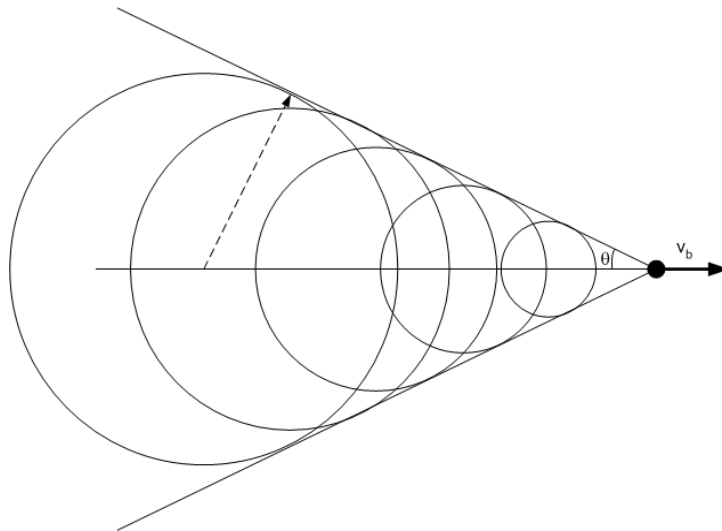
Reken nu zelf uit wat de uitdrukking wordt voor de waargenomen frequentie als de bron zich van de waarnemer verwijderd met snelheid  $v_b$ .

### 4.5.3 Schokgolf

Wat gebeurt er als de bron door de middenstof beweegt met een snelheid

## Tweedimensionale lopende golven

$v_b > v_g$  ? In punt P stuurt de bron een golffront uit. Een  $\Delta t$  later bevindt de bron zich dan  $v_b \cdot \Delta t$  verder, terwijl het golffront ondertussen een straal  $v_g \cdot \Delta t$  heeft. Later uitgezonden trillingen hebben een golffront met kleinere straal ontwikkeld. De verschillende golffronten overlappen elkaar en de omhullende vormt een schokgolf.



Een voorbeeld van dit effect is een vliegtuig dat de geluidsmuur doorbreekt. Waarnemers op de grond zullen het vliegtuig voorbij zien vliegen zonder geluid te horen. Als het vliegtuig hen op enige afstand gepasseerd is zullen zij een luide knal horen op het moment dat de schokgolf hen treft. Eens de schokgolf voorbij, horen zij een zich verwijderende geluidsbron.

Uit de figuur is af te leiden dat

$$\sin \theta = \frac{v_g}{v_b}$$

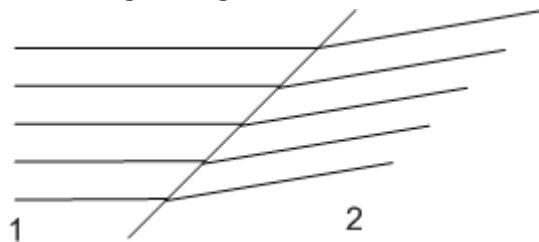
In de aerodynamica staat de verhouding  $\frac{v_b}{v_g}$  bekend als het **Mach-getal**.



Afbeelding 54: Een vliegtuig gaat door de geluidsbarrière waarbij het vocht in de lucht condenseert op de schokgolf.

## 4.6 Oefeningen

1. Wanneer een weerkaatst geluidssignaal niet meer tegelijkertijd weerklinkt met het oorspronkelijke signaal, spreekt men van een **echo**. Bij een echo hoor je dus duidelijk het oorspronkelijke en het weerkaatste geluid gescheiden na elkaar. Wanneer het weerkaatste signaal gelijktijdig weerklinkt met het uitgezonden signaal, spreken we van **nagalm**. Directe en weerkaatste geluiden klinken door elkaar, wat de verstaanbaarheid zal beïnvloeden. Bereken de minimale afstand tussen geluidsbron en weerkaatsende wand om een zuivere echo te horen van een woord dat 0,50 s wordt uitgesproken.
2. Een vlakke golf plant zich voort van medium 1 naar medium 2. Enkel de golftoppen zijn hier getekend op een bepaald tijdstip.
  - Teken in de figuur de golfstralen, de invalshoek en de uitvalshoek.
  - Heeft de golf in medium 2 een grotere of een kleinere voortplantingssnelheid dan in medium 1 ?
  - Wat wijzigt bij overgang van medium 1 naar medium 2 : de frequentie, de golflengte of allebei ? Verklaar !



3. Een geluidsbron zendt golven uit met een frequentie van 440 Hz.
  - Welke frequentie hoort een stilstaande waarnemer ?
  - Welke frequentie hoort een stilstaande waarnemer indient de geluidsbron zich met een snelheid van 90,0 km/h verwijderd ?
  - Welke frequentie wordt door de waarnemer geregistreerd als hij zich met een snelheid van 90,0 km/h naar de geluidsbron toe beweegt ?
4. Een treinreiziger hoort een frequentie van 520 Hz bij het naderen van de bel aan de overweg. Het signaal door de bel uitgezonden heeft een frequentie van 500 Hz. Welke frequentie zal de waarnemer horen onmiddellijk na het passeren van de bel ?
5. Met welke snelheid moet een geluidsbron zich van een stilstaande waarnemer verwijderen om een toonverlaging van  $\frac{1}{5}$  van de voortgebrachte toon te bekomen ?
6. Een waarnemer ziet een brandweerauto naderen met loeiende sirenes. Hij kan de frequentie van de naderende sirene bepalen op 467,50 Hz. Eens de brandweerauto gepasseerd, stelt hij vast dat de frequentie van de sirene nog maar 415,56 Hz is. Bepaal de frequentie van de sirene die de waarnemer zou horen mocht de brandweerwagen stilstaan, en bereken de snelheid van de brandweerwagen.

## 5 Geluidsgolven

### 5.1 Toonhoogte

Geluidsgolven zijn **longitudinale** drie-dimensionale golven die door eender welk materie-medium kunnen bewegen met een snelheid die afhangt van de eigenschappen van het medium.

De geluidsgolven die wij gebruiken om met elkaar te communiceren zijn niks meer dan drukvariaties in de lucht, die wij laten ontstaan door trilling van de stembanden, en die we kunnen waarnemen doordat die drukvariaties het trommelvlies in beweging brengen.

We kunnen geluidsgolven ruwweg indelen in drie categorieën :

- **Hoorbare geluidsgolven** : dit zijn geluidsgolven die binnen het bereik van het menselijk gehoor liggen. Concreet zijn dit geluidsgolven met frequentie tussen 20 Hz en 20 000 HZ.
- **Infrasone geluidsgolven**, met een frequentie die te klein is om door het menselijk gehoor opgepikt te worden. Voorbeelden hiervan zijn golven van een aardbeving.
- **Ultrasonische geluidsgolven**, met een frequentie boven de 20 000 Hz. Deze komen zowel voor in de natuur (o.a. vleermuizen gebruiken dit soort geluidsgolven om prooien te lokaliseren en hun weg te vinden in complete duisternis...) als worden veelvuldig gebruikt in technologische toepassingen (echografie, bodemonderzoek, ...).

De toonhoogte van waargenomen geluid wordt bepaald door de frequentie van de geluidsgolf. Lage tonen (bassen) zijn geluidsgolven met kleine frequentie, en hoe hoger de toon wordt ervaren, hoe groter de frequentie. Het valt buiten deze cursus om effectief muziektheorie te geven, maar ter illustratie geven we hier de frequenties van de tonen in één octaaf, uitgaande van de "kamerton" A (de la) , die gestandariseerd is op 440 Hz.

Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0	392,0	415,3	440,0	466,2	493,9	523,3

### 5.2 Snelheid van geluidsgolven

Geluidsgolven zijn drukgolven die door een samendrukbaar medium bewegen, zoals lucht. De snelheid waarmee dergelijke golven door het medium bewegen hangt af zowel van de **inertie**, als van de **samendrukbaarheid** van het medium. Concreet wordt de golfsnelheid bepaald door

$$v_g = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

waar K de compressiemodulus van het medium is, of de verhouding tussen de drukwijziging  $\Delta p$  en de daaruitvolgende relatieve volumeverandering  $-\Delta V/V$  :

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

## Geluidsgolven

Onderstaande tabel geeft de geluidssnelheid in een aantal verschillende media :

Medium	$v_g$ (m/s)
Lucht (0°C)	331
Lucht (20°C)	343
Waterstof (0°C)	1286
Water (25°C)	1493
Zeewater (25°C)	1533
Aluminium	5100
Koper	3560
Ijzer	5130
Rubber	54

### 5.3 Intensiteit en intensiteitsniveau

Hoe "luid" geluid wordt ervaren, hangt af van de **intensiteit**.

We definiëren de intensiteit van een golf als volgt :

De intensiteit  $I$  van een golf is de **energie** die per tijdseenheid vloeit door een oppervlakte van  $1 \text{ m}^2$ .

Het is met andere woorden het vermogen per oppervlakte-eenheid (eenheid  $\text{W/m}^2$ ).

$$I = \frac{P}{A}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot v_g$$

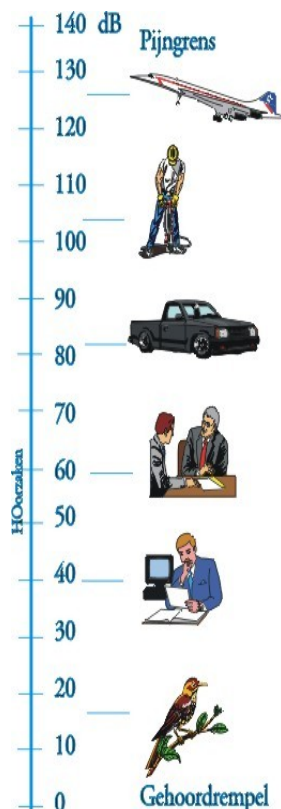
Het menselijk oorkan intensiteiten waarnemen variërend tussen  $10\text{-}12 \text{ W/m}^2$  (de gehoordrempel) en  $1 \text{ W/m}^2$  (de pijngrens). Dit is een zéér wijd bereik, en het is bijgevolg gemakkelijker om met een logaritmische schaal te werken. Hiervoor is het (geluids) intensiteitsniveau  $\beta$  ingevoerd, met als eenheid de decibel (dB).

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

De constante  $I_0$  is de referentie-intensiteit, bepaald op de gehoordrempel ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ). De gehoorsdrempel komt overeen met een intensiteitsniveau van 0 dB. De pijngrens komt overeen met een intensiteitsniveau van

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 120 \text{ dB}$$

Op de afbeelding hiernaast kan je een aantal bronnen zien met bijhorende intensiteitsniveau's.



Afbeelding 55: Enkele bronnen met hun intensiteitsniveau (bron : hoorzaken.nl)

## 6 Samenstellen van trillingen

### 6.1 Het superpositiebeginsel

Een voorwerp kan tegelijkertijd onderworpen zijn aan meerdere trillingen, doordat meerdere trillingsbronnen inwerken op het voorwerp, of omdat twee of meer golven tegelijkertijd toekomen op zijn positie...

Het resultaat zal zijn dat het voorwerp in kwestie een beweging zal uitvoeren die een samenstelling zal zijn, een superpositie van de individuele trillingen. Om die samengestelde trilling te bepalen, kunnen we gebruik maken van het onafhankelijkheids- of superpositiebeginsel :

**Werken er op een massa gelijktijdig twee of meer krachten in, die elk afzonderlijk de massa in trilling brengen, dan behoudt elk van deze krachten haar volle uitwerking.**

Als trilling 1 een elongatie  $y_1$  veroorzaakt, en trilling twee een elongatie  $y_2$ , dan zal de elongatie van de samengestelde trilling gegeven worden door

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Samengevat :

**De samengestelde trilling is som van de individuele trillingen.**

### 6.2 Samenstellen van trillingen in dezelfde richting met gelijke frequentie

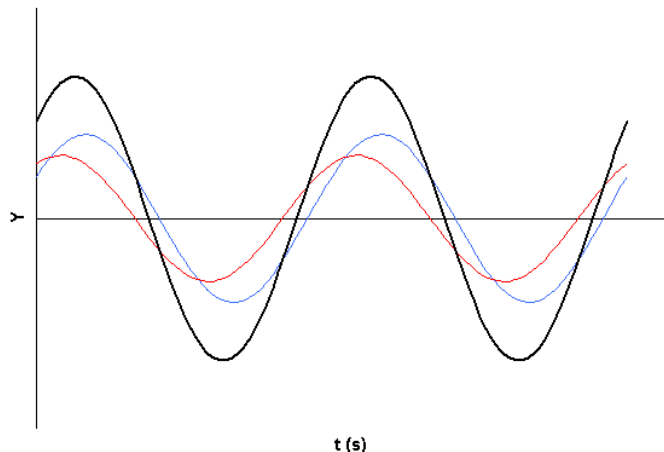
#### 6.2.1 Algemeen

Beschouw een voorwerp, onderworpen aan twee trillingen met zelfde trilrichting en zelfde frequentie, resp. gegeven door :

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_{0,1})$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_{0,2})$$

Gebruik makend van het superpositiebeginsel kunnen we dan de effectieve elongatie bepalen op tijdstip  $t$  :



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_{0,1}) + A_2 \sin(\omega t + \phi_{0,2})$$

Als we dit op grafiek voorstellen (zie afbeelding 56), dan zien we dat de



## Samenstellen van trillingen

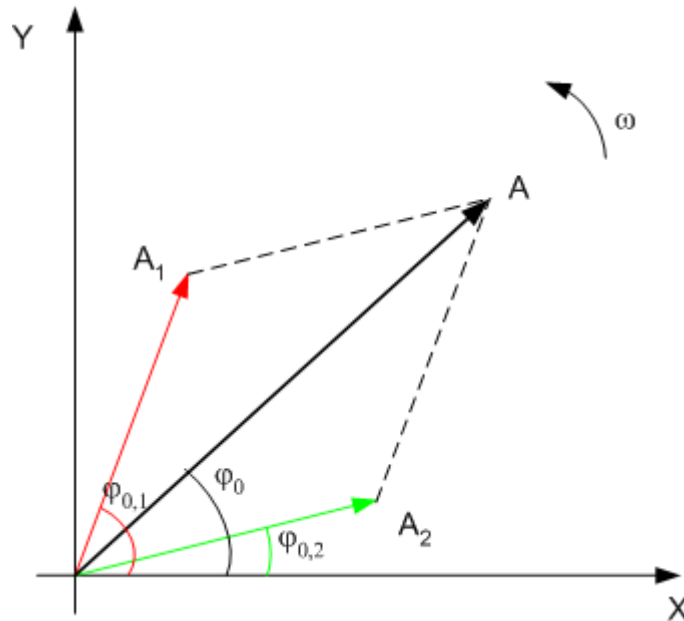
resultante trilling **opnieuw een harmonische trilling is met dezelfde frequentie.**

We kunnen dus stellen dat

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

Het komt er nu alleen op aan om de **amplitude A** en de **beginfase  $\phi_0$**  van de **samengestelde trilling** te bepalen. Via goniometrische weg is dit een hele acrobatentoer, maar door gebruik te maken van **fasoren** kunnen we dit relatief snel bepalen.

In afbeelding 57 staan de fasoren van de individuele trillingen afgebeeld op tijdstip  $t = 0s$ . De hoek die de fasoren op dat tijdstip maken met de X-as is de beginfase van de resp. corresponderende trillingen.



**De fasor van de samengestelde trilling, is de som van de fasoren van de individuele trillingen.** Het probleem is dus herleid tot het optellen van twee vectoren.

De amplitude A kunnen we berekenen met behulp van de cosinus-regel :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A B \cos(\pi - (\phi_{0,1} - \phi_{0,2}))$$

waaruit :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A B \cos(\phi_{0,1} - \phi_{0,2})}$$

De beginfase volgt uit

$$\tan \phi_0 = \frac{A_y}{A_x}$$
$$\tan \phi_0 = \frac{A_1 \sin \phi_{0,1} + A_2 \sin \phi_{0,2}}{A_1 \cos \phi_{0,1} + A_2 \cos \phi_{0,2}}$$

### 6.2.2 In fase : versterking

Beschouw nu het bijzondere geval waar het **faseverschil** tussen beide trillingen **nul** is. We zeggen dat beide trillingen "**in fase**" zijn. Dan geldt er :

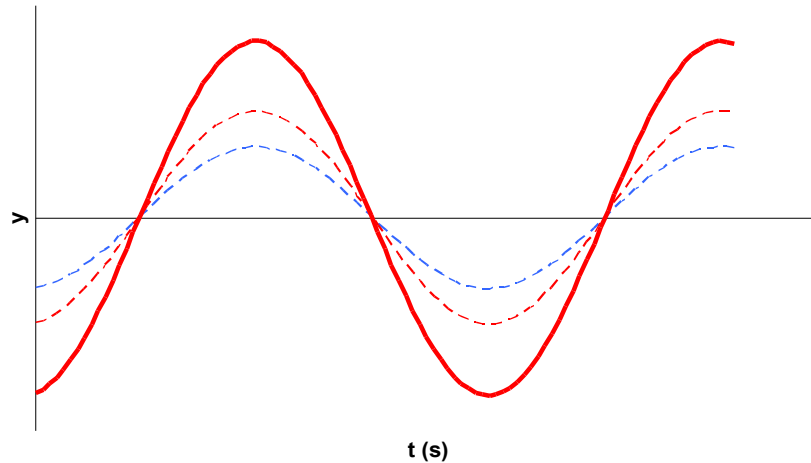
## Samenstellen van trillingen

$$\phi_{0,2} - \phi_{0,1} = 0$$

waaruit volgt dat

$$A = A_1 + A_2$$

De twee trillingen zullen elkaar maximaal versterken.



*Hoe ziet het fasordiagram eruit in dit geval ?*

*Wat is de beginfase van de samengestelde trilling ?*

### 6.2.3 In tegenfase : afzwakking

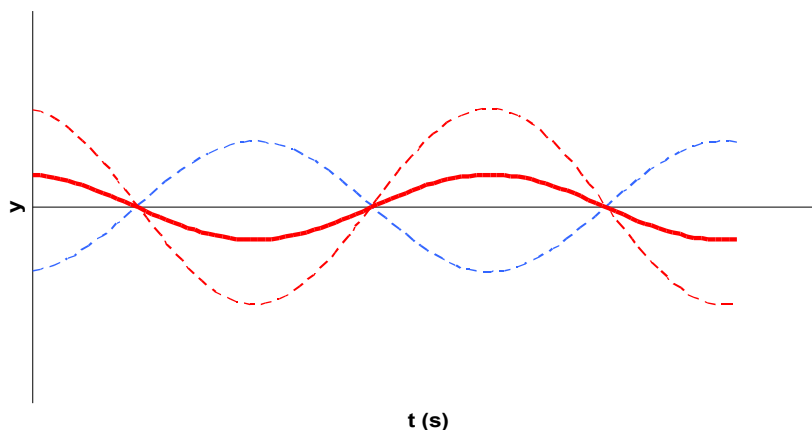
Beschouw nu het bijzondere geval waar het **faseverschil tussen beide trillingen gelijk is aan  $\pi$** . We zeggen dat beide trillingen "**in tegenfase**" zijn. Dan geldt er :

$$\phi_{0,2} - \phi_{0,1} = \pi$$

waaruit volgt dat

$$A = A_1 - A_2$$

De twee trillingen zullen elkaar afzwakken.



Afbeelding 58: Twee trillingen in tegenfase zullen elkaar afzwakken.

## Samenstellen van trillingen

Dit principe kan gebruikt worden om **achtergrondgeluid te filteren** en staat bekend als ANC (Anti Noise Control) of ANR (Anti Noise Reduction) : het achtergrondgeluid wordt gesampled en in tegenfase afgespeeld, waardoor het achtergrondgeluid weggefilterd wordt. Dit heeft vooral zijn toepassingen in omgevingen waar monotone, laag-frequente trillingen overheersend zijn (fabriekshallen, vliegtuigcabines, machinekamers, ....). Hier is **geluid + geluid = stilte !**

*Hoe ziet het fasordiagram eruit in dit geval ?*

*Wat is de beginfase van de samengestelde trilling ?*

### 6.3 Zwevingen

**Zwevingen (ook wel "beats" genoemd) zijn trillingen met een periodiek variabele amplitude.**

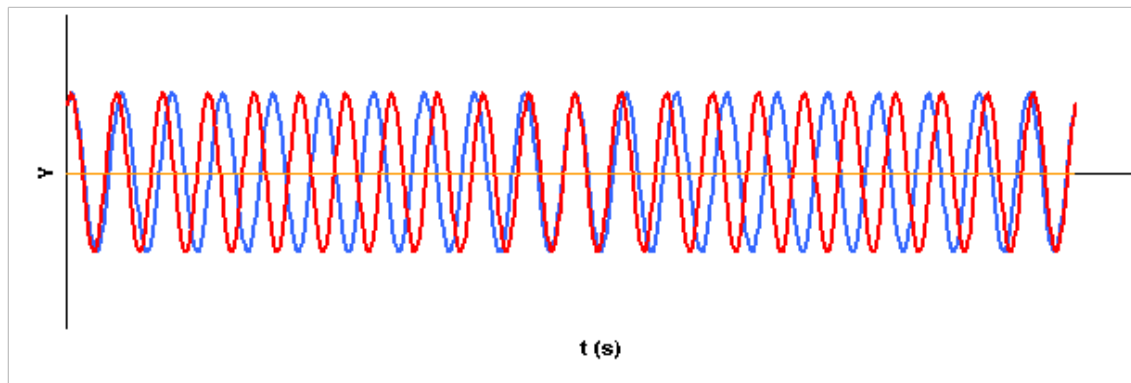
Ze ontstaan door superpositie van twee trillingen met **lichtjes verschillende frequenties**.

Beschouw twee trillingen

$$y_1 = A \sin \omega_1 t$$

$$y_2 = A \sin \omega_2 t$$

waarbij  $\omega_1$  slechts een weinig verschilt van  $\omega_2$ . Voor de eenvoud der berekeningen veronderstellen we tevens dat de amplitude van beide trillingen dezelfde is.



Afbeelding 59: De twee individuele trillingen met lichtjes verschillende frequenties. Merk op hoe de twee trillingen afwisselend in fase en in tegenfase zijn.

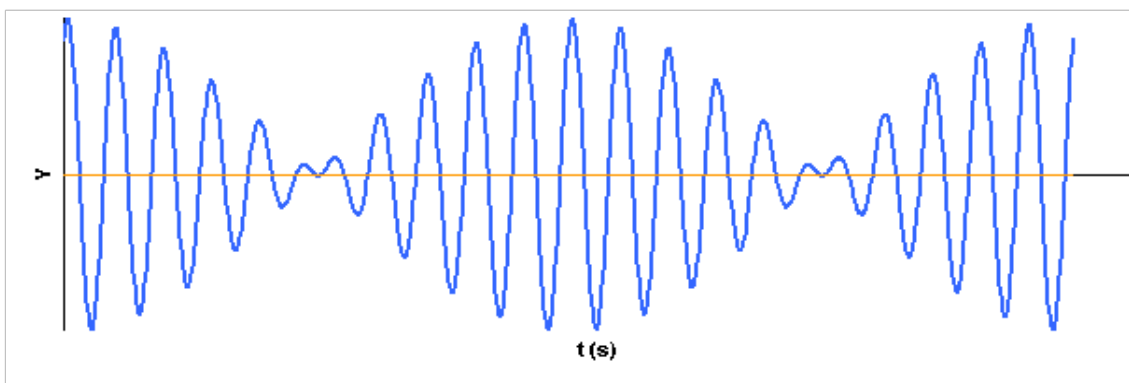
Nemen we de superpositie van beide trillingen :

## Samenstellen van trillingen

$$\begin{aligned}y &= y_1 + y_2 \\y &= A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t \\y &= 2A \sin \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2} \\y &= 2A \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t \\y &= 2A \cos \frac{2\pi(f_1 - f_2)}{2} t \cdot \sin \frac{2\pi(f_1 + f_2)}{2} t\end{aligned}$$

De superpositie van de twee trillingen zal een trilling zijn met frequentie  $\frac{(f_1 + f_2)}{2}$ , waarvan de amplitude varieert met frequentie  $|f_1 - f_2|$ , de **zwevingsfrequentie**. Men zegt dat de trilling **amplitude-gemoduleerd** is.

Waarom is de zwevingsfrequentie niet gelijk aan  $\frac{|f_1 - f_2|}{2}$  ?



Afbeelding 60: De samengestelde trilling met in de tijd variërende amplitude. Vergelijk met bovenstaande figuur en zeg wanneer de amplitude maximaal is en wanneer de amplitude minimaal.

## 6.4 Fourier analyse van trillingen

De harmonische trilling is een bijzonder geval van de veel ruimere klasse van periodieke bewegingen. Een periodieke beweging met periode T in één dimensie kan voorgesteld worden door  $x = f(t)$

waarbij de functie f de eigenschap bezit dat  $f(t+T) = f(t)$

Door Franse wiskundige Fourier werd aangetoond dat **een willekeurige periodieke functie  $f(t)$  met frequentie  $f$  steeds kan ontbonden worden in een reeks van termen waarvan de eerste een harmonische functie is met de dezelfde frequentie (de *grondfrequentie*), gevolgd door een zeker aantal (dit kan een oneindig aantal zijn) harmonische functies van veelvoud van de grondfrequentie (de *harmonieken*).**

Men heeft dus een som over een aantal harmonische functies van de gedaante :

## Samenstellen van trillingen

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

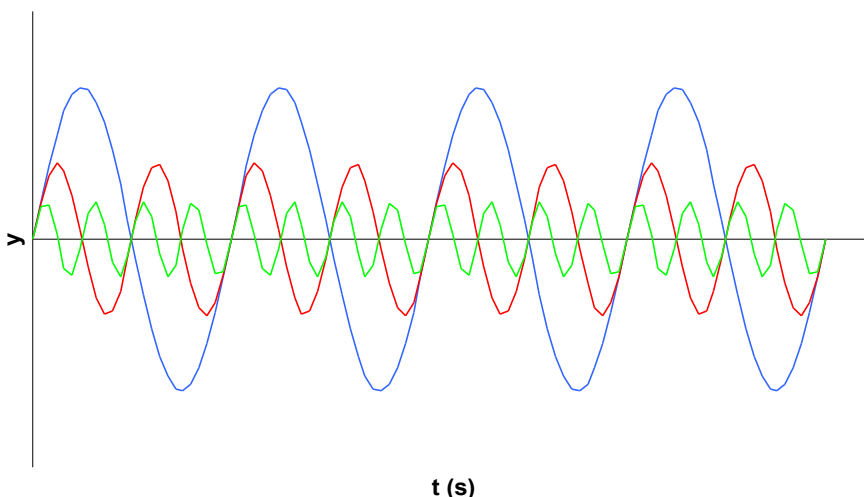
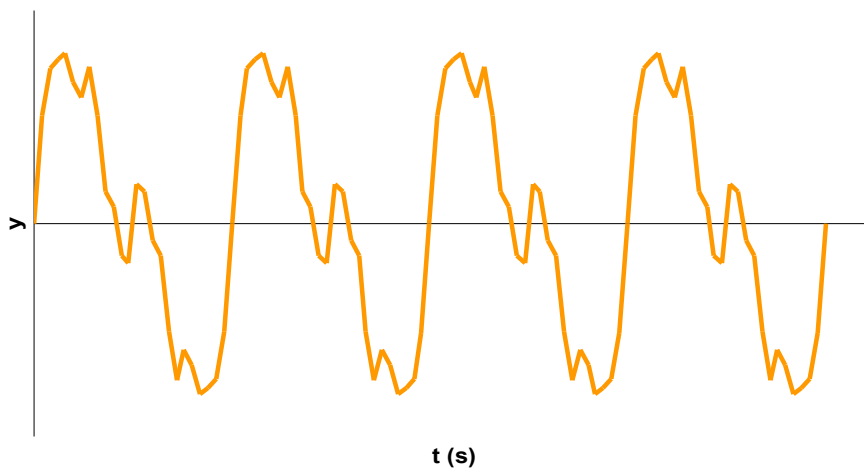
De coëfficiënten zijn éénduidig bepaald en gegeven door :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

Deze stelling geeft ons de reden waarom de harmonische trilling zo fundamenteel is. Als we deze stelling toepassen, kan elke soort periodieke beweging als een superpositie van harmonische trilling beschouwd worden.



*Afbeelding 61: De bovenste grafiek toont een willekeurige periodieke beweging, de onderste grafieken geven de grondtoon en de eerste twee harmonieken van de fourieranalyse.*

De stelling van Fourier geeft een verklaring voor het verschil in klank van het

## Samenstellen van trillingen

geluid voortgebracht door diverse muziekinstrumenten. Dezelfde toonhoogte, voortgebracht door een piano, een viool, een gitaar of een trompet, klinkt totaal verschillend alhoewel dezelfde grondfrequentie aanwezig is. Het verschil ontstaat door de boventonen die met verschillende relatieve amplitudes door elk instrument worden voortgebracht. Het eigen **timbre** van elk instrument vloeit dus voort uit een verschillende Fourieranalyse voor het geluid van elk instrument.

### 6.5 Samenstelling van trillingen met verschillende trilrichting°

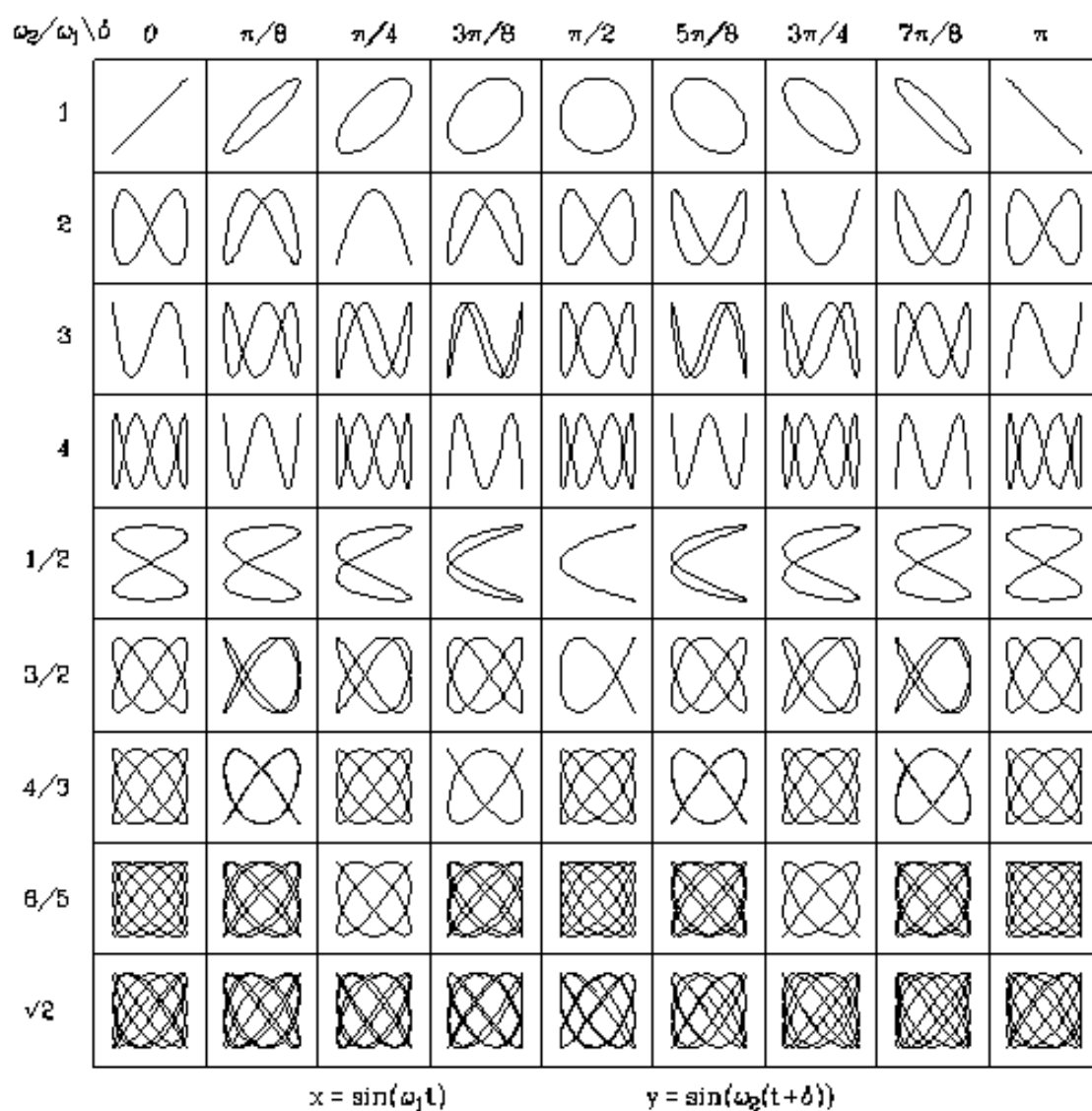
Een deeltje kan gelijktijdig onderworpen zijn aan twee verschillende harmonische bewegingen met **verschillende trilrichtingen**. De plaatsvector van het bewegend deeltje is de **vectoriële som van de uitwijkingen van twee harmonische bewegingen** (superpositie-principe). Verschillende gevallen kunnen voorkomen al naar gelang de trillingsrichtingen en de frequenties al dan niet dezelfde zijn.

Beschouw twee onderling loodrechte trillingen. De beweging langs de X- resp. de Y-as wordt dan :

$$x = A_x \sin \omega_1 t$$
$$y = A_y \sin(\omega_2 t + \phi_0)$$

Indien de pulsaties  $\omega_1$  en  $\omega_2$  zich verhouden als **gehele getallen**, dan is de baan een kromme die zich **sluit** na een tijd gelijk aan het kleinste gemeen veelvoud van de perioden  $T_1$  en  $T_2$ . Je krijgt dan de bekende figuren van Lissajous. In onderstaande figuur vind je een aantal figuren terug voor gegeven verhoudingen van pulsaties en faseverschillen.

## Samenstellen van trillingen



Afbeelding 62: Lissajousfiguren voor gegeven verhoudingen van pulsaties en faseverschillen.

## 6.6 Oefeningen

1. Beschouw twee trillingen, beiden met een frequentie van 2 Hz, amplitudes resp. 0,20 m en 0,30 m, en een onderling faseverschil van  $\frac{\pi}{3}$ . Bereken de resulterende amplitude van de samengestelde trilling. Bereken eveneens de faseverschillen tussen samengestelde trilling en oorspronkelijke trillingen.
2. In een punt P op  $x = 5$  m van de oorsprong komen twee harmonische golven toe uit verschillende richting. Bepaal de amplitude in het punt P als de golf functies van beide golven zijn gegeven door :

$$y_1 = 5\text{m} \cdot \sin(\pi(1200\text{ Hz} \cdot t - 4\text{ m}^{-1} \cdot x))$$

$$y_2 = 3\text{m} \cdot \sin(\pi(1200\text{ Hz} \cdot t + 4\text{ m}^{-1} \cdot x + \frac{\pi}{6}))$$

3. Beschouw een trilling met frequentie 2 Hz en amplitude van 1 m. Met welke trilling met dezelfde frequentie en amplitude moeten we de oorspronkelijke trilling samenstellen om een resulterende trilling te krijgen met een amplitude van  $\sqrt{3}$  m ?
4. Een pianostemmer probeert een snaar te stemmen op 523 Hz (Do) met behulp van een stemvork die precies is afgestemd op die frequentie. Als hij tegelijkertijd de snaar en de stemvork aanslaat, hoort hij 3 zwevingen per seconde. Wat zijn de mogelijke frequenties waarmee de snaar trilt ?
5. Een persoon slaat een stemvork aan die trilt bij 256 Hz. Hij wandelt naar een muur toe met een constante snelheid van 1,33 m/s.
  - a) Wat is de zwevingsfrequentie die hij waarneemt voortvloeiend uit de samenstelling van het geluid van de stemvork en zijn echo ?
  - b) Hoe snel moet hij van de muur wegwandelen om een zwevingsfrequentie waar te nemen van 5 Hz ?
6. De stoomfluiten van twee treinen hebben een identieke frequentie van 180 Hz. Eén trein is in rust in het station, terwijl de andere in beweging is. Als ze tegelijkertijd een signaal laten weerklinken, worden twee zwevingen per seconde waargenomen. Wat zijn de mogelijke snelheden van de bewegende trein (en in welke richting beweegt hij) ?



## 7 Samenstellen van golven

### 7.1 Interferentie van lopende golven

#### 7.1.1 Coherentie-voorwaarde

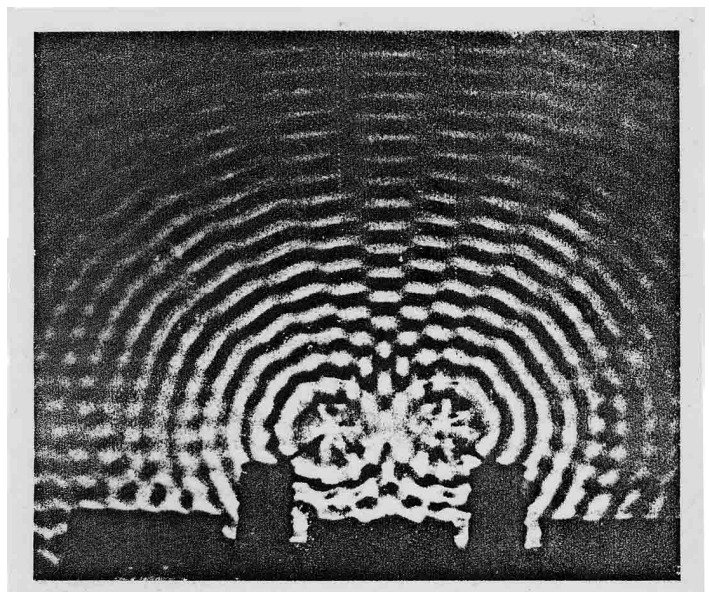
We spreken van **interferentie** als **twee of meer golven in eenzelfde punt toekomen**.

Beide golven zullen in dat punt een trilling veroorzaken, en de effectieve beweging van de massa in dat punt kan beschreven worden door de samenstelling te nemen van de individuele trillingen (het superpositiebeginsel).

Als we in een golftank twee stiften laten trillen met dezelfde frequentie, dan merken we dat er een patroon ontstaat zoals in afbeelding 63. Er zijn plaatsen waar het wateroppervlak maximaal trilt, en andere waar amper een trilling waar te nemen is.

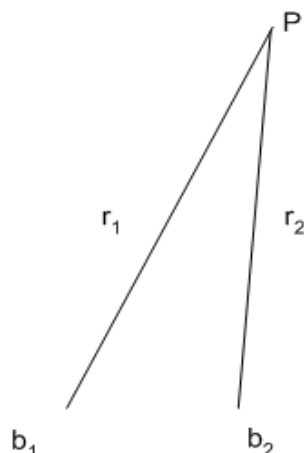
Om een stabiel interferentiepatroon te bekomen, moeten de betrokken voldoen aan de coherentie-voorwaarde :

**Twee bronnen zijn coherent als ze trillen met dezelfde frequentie en met constant faseverschil.**



Afbeelding 63: Interferentiepatroon van twee puntbronnen die trillen in fase. Bron : <http://kmr.nada.kth.se>

#### 7.1.2 Berekenen van minima en maxima



Afbeelding 64: Bron 1, bron 2 en een willekeurig punt p

Beschouw twee bronnen  $b_1$  en  $b_2$  die coherent trillen met dezelfde amplitude in hetzelfde medium. We gaan nu berekenen waar de trilling maximaal is, en waar er amper trilling is (minimum).

Nemen we nu een willekeurig punt P op een afstand  $r_1$  van  $b_1$  en een afstand  $r_2$  van  $b_2$ . (zie figuur)

Bron  $b_1$  veroorzaakt in punt P een trilling die beschreven wordt door

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t - k r_1)$$

Bron  $b_2$  veroorzaakt in punt P een trilling die

## Samenstellen van golven

beschreven wordt door

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t - k r_2) \quad .$$

Beide puntbronnen veroorzaken circulaire golffronten, wat maakt dat de energie steeds wordt overgedragen aan meer en meer punten. Hierdoor zal de amplitude van de golf afnemen met de afstand tot de bron. **De amplitudes van beide trillingen in het punt P zijn dus niet noodzakelijk gelijk.**

Als we echter veronderstellen dat de **afstand tussen beide bronnen klein** is, en **P ver ligt van beide bronnen** (vergeleken met hun onderlinge afstand), dan kunnen we veronderstellen dat

$$A_1 = A_2 = A \quad .$$

Bereken we nu de effectieve trilling van het punt P door de superpositie te nemen van de individuele trillingen.

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ y &= A \sin(\omega t - k r_1) + A \sin(\omega t - k r_2) \\ y &= 2 \cdot A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - k \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}\right) \end{aligned}$$

We krijgen in P een harmonische trilling met amplitude

$$A' = 2 \cdot A \cdot \left| \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \right|$$

De amplitude A' is maximaal als

$$\begin{aligned} \left| \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \right| &= 1 \\ k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} &= n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ r_1 - r_2 &= n \cdot \lambda \end{aligned}$$

De amplitude is **maximaal** als beide golven die toekomen in P **in fase** zijn en elkaar versterken. We noemen dit **constructieve interferentie**.

Analoog is A' minimaal als

$$\begin{aligned} \left| \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \right| &= 0 \\ k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} &= (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ r_1 - r_2 &= (2n + 1) \cdot \lambda \end{aligned}$$

De amplitude is **minimaal** als beide golven die toekomen in P in **tegenfase** zijn. We noemen dit **destructieve interferentie**.

## 7.2 Staande golven

### 7.2.1 Reflectie van een golf

#### a Reflectie aan een vast uiteinde

We klemmen een rubberen darm aan één uiteinde vast. Aan het andere uiteinde

## Samenstellen van golven

geven we een korte puls. De puls plant zich over de darm voort, weerkaatst aan het vaste uiteinde en klapt om.

**Weerkaatsing van een golf aan een vast uiteinde veroorzaakt een fasesprong  $\pi$ .**

Als de aankomende golf in het reflectiepunt van de wand een uitwijking naar boven heeft, oefent deze golf op het reflectiepunt een actiekracht naar boven uit. Het punt is vast, dus wijkt niet uit. De wand oefent op het medium een even grote maar tegengesteld gerichte (naar beneden) actiekracht uit. Er ontstaat op het medium een puls naar beneden. De golf "berg" wordt weerkaatst als een golf "dal".

### *b Reflectie aan een open uiteinde*

We herhalen bovenstaande proef, maar houden het uiteinde beweegbaar. **De puls wordt aan een open uiteinde weerkaatst zonder omkering (geen fasesprong).**

Het beweeglijk uiteinde treedt op als secundaire trillingsbron zodra de golf dit uiteinde bereikt heeft. De trillingen opgewekt door deze secundaire trillingsbron zijn in fase met de aankomende golf (principe van Huygens).

### **7.2.2 Staande golven op een oneindig lange snaar met één vast uiteinde**

Beschouw een oneindig lange snaar met één uiteinde vastgemaakt (vast reflectiepunt). We kiezen de oorsprong in het reflectiepunt. Op deze snaar loopt een golf naar het reflectiepunt toe, waar deze weerkaatst zal worden en een fasesprong zal maken. **De uitwijking van een deeltje op positie  $x$  zal op een willekeurig tijdstip  $t$  gegeven worden door de superpositie van de aankomende en de gereflecteerde golf.**

De aankomende golf wordt gegeven door :

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

De gereflecteerde golf door :

$$y_2(x, t) = A \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi)$$

*(we veronderstellen geen energieverlies bij reflectie, de amplitude blijft behouden...).*

Superpositie van beiden geeft :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ y(x, t) &= A \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + A \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi) \\ y(x, t) &= 2A \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) \\ y(x, t) &= 2A \sin(k \cdot x) \cos(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

In een lopende golf trillen alle deeltjes met dezelfde amplitude en frequentie.

In een staande golf trillen alle deeltjes met dezelfde frequentie, maar de amplitude is afhankelijk van de positie van het deeltje.

De amplitude is maximaal (buik) als

## Samenstellen van golven

$$\begin{aligned} |\sin(k \cdot x)| &= 1 \\ k \cdot x &= (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \\ x &= (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

De amplitude is minimaal (knoop) als

$$\begin{aligned} |\sin(k \cdot x)| &= 0 \\ k \cdot x &= n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N} \\ x &= n \cdot \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Een vast reflectiepunt ( $n=0$ ) is bij definitie altijd een knoop.

*Wat worden deze uitdrukkingen als we een open uiteinde hebben in plaats van een vast ?*

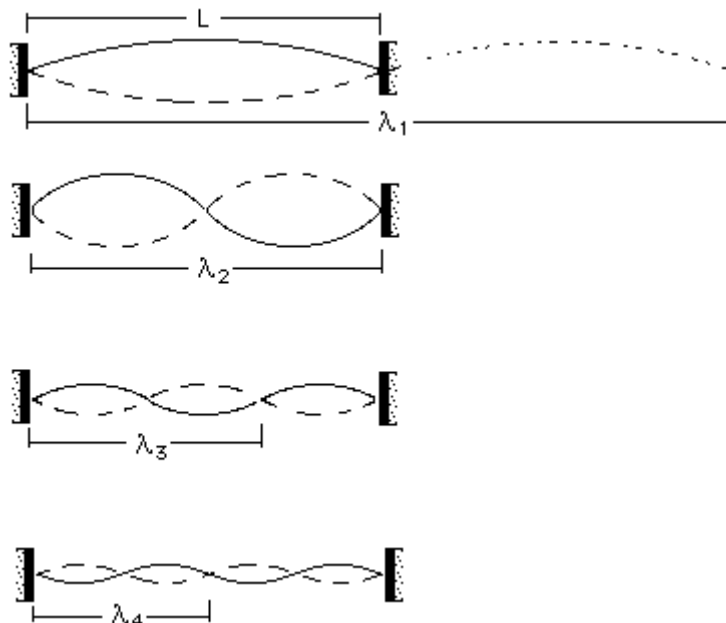
### 7.2.3 Staande golven op een begrensde snaar

Beschouwen we nu een eindige snaar met lengte  $l$ , met twee vaste uiteinden. We kiezen de oorsprong van de X-as in één van de uiteinden, het andere uiteinde heeft dan positie  $x=l$ . Ook hier zullen zich staande golven kunnen vormen, maar nu geldt de voorwaarde dat beide (vaste) reflectiepunten knopen moeten zijn, met andere woorden :

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Er zullen zich enkel staande golven vormen als er aan bovenstaande voorwaarde voldaan is.

Dit zal alleen gebeuren bij welbepaalde frequenties, ook wel eigenfrequenties of harmonieken van de snaar genoemd. De eerste harmoniek wordt ook wel grondtoon genoemd, en de hogere harmonieken boventonen.



Afbeelding 65: Mogelijke golflengtes waarbij staande golven ontstaan.

## Samenstellen van golven

Als de voortplantingssnelheid van de snaar gegeven wordt door  $v_g$ , dan worden de harmonieken bepaald door :

$$f_n = n \cdot \frac{v_g}{2l}$$

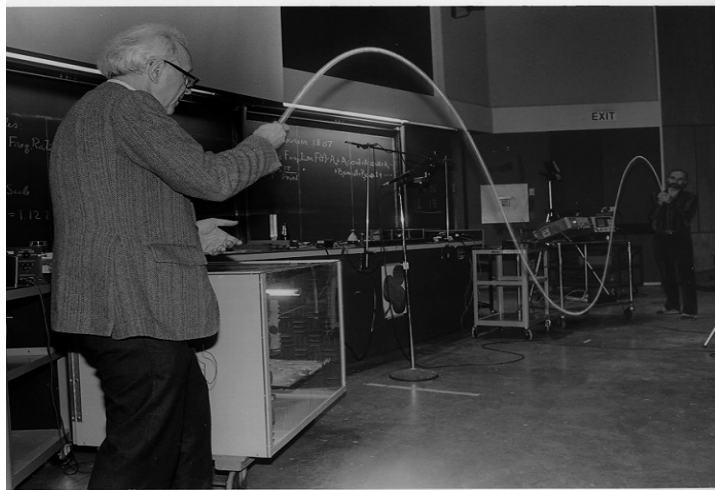
Als je verder weet dat voor een snaar opgespannen met spankracht  $F$  en met lineaire dichtheid  $\rho_l = \frac{m}{l}$  de golfsnelheid bepaald wordt door

$$v_g = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

dan worden de harmonieken bepaald door

$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

*Leid nu zelf de uitdrukking af voor de harmonieken in geval van één open en één vast uiteinde, en twee open uiteinden.*



Afbeelding 66: Demonstratie staande golf met vaste reflectiepunten. Welke harmoniek wordt hier gegenereerd ?

### 7.2.4 Staande golven in een luchtkolom

Staande longitudinale golven kunnen opgewekt worden in een luchtkolom, zoals een orgelpijp, als het resultaat van interferentie tussen longitudinale golven die zich voortplanten in tegengestelde richtingen, zoals een invallende en een gereflecteerde golf. Het faseverschil tussen invallende en gereflecteerde golf is, net zoals bij een snaar, afhankelijk van het reflectiepunt.

Net zoals bij een snaar, is een gesloten uiteinde van een luchtkolom een knoop voor de verplaatsingsgolf. Daardoor is de gereflecteerde golf  $\pi$  uit fase met de invallende golf.

Analoog zal een open uiteinde steeds een buik zijn voor de verplaatsingsgolf. (Strict genomen is het open uiteinde niet echt een buik. Voor een buis met dunne wand met straal  $R$  bevindt de buik zich op ongeveer  $0,6R$  verder dan het open uiteinde. De effectieve lengte is dus iets groter dan de fysische lengte  $l$ . Voor een smalle buis met grote lengte is dit echter verwaarloosbaar.)

## Samenstellen van golven

In het geval van een luchtkolom met lengte  $l$  en 2 open uiteinden worden de harmonieken gegeven door :

$$f_n = n \frac{v_g}{2l}$$

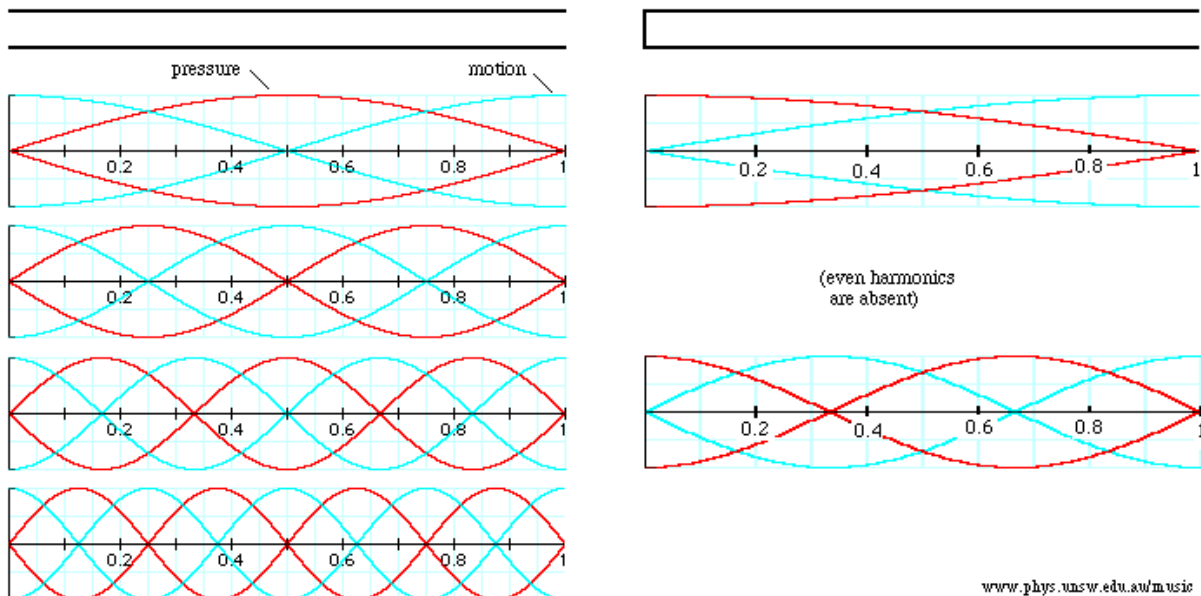
In het geval van een luchtkolom met lengte  $l$  en 1 open en 1 vast uiteinde, worden de harmonieken gegeven door :

$$f_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{v_g}{2l}$$

*Bewijs bovenstaande relaties als oefening.*

Een longitudinale golf veroorzaakt ook een dichtheidsgolf en een drukgolf.

Vermits dichtheids- en drukgolf  $\frac{\pi}{2}$  uit fase zijn, zal de dichtheid en de druk het grootst zijn, daar waar de verplaatsing minimaal is.



Afbeelding 67: Staande golven in luchtkolom die open is aan beide kanten (links) en die slechts open is aan één zijde (rechts). Let op het verschil tussen de verplaatsingsgolf en de druk/dichtheidsgolf.

Bron : [www.phys.unsw.edu.au](http://www.phys.unsw.edu.au).

### 7.3 Oefeningen

1. Twee coherente bronnen trillen in tegenfase (faseoppositie) en veroorzaken in een vlak een interferentiepatroon. Hoe zijn de gebieden waar respectievelijk maximale en minimale amplitude gelokaliseerd in vergelijking met deze afkomstig van twee coherente bronnen in fase ?
2. Twee coherente trillingsbronnen trillen in fase. Aan welke onderstaande betrekking voldoen de plaatsen waar de amplitude van de resulterende trilling gelijk is aan de helft van de maximale amplitude  $2A$  ? Bewijs uw antwoord !
  - a)  $r_2 - r_1 = n \frac{\lambda}{2}$
  - b)  $r_2 - r_1 = (n \pm \frac{1}{6}) \lambda$
  - c)  $r_2 - r_1 = (n \pm \frac{1}{3}) \lambda$
  - d)  $r_2 - r_1 = (n \pm \frac{1}{2}) \lambda$
3. Twee bronnen a en b liggen 90 mm uit elkaar en trillen met dezelfde frequentie en in fase. Het punt p is ergens willekeurig gekozen op de verbindingslijn ab, rechts van a en b.
  - a) Bereken drie verschillende golflengten die in dit punt bestendig zorgen voor een minimale amplitude.
  - b) Idem voor een maximale amplitude.
  - c) Indien de watergolven een voortplantingssnelheid hebben van 0,36 m/s, welke is dan de laagst mogelijke frequentie waarbij de trilling in het punt p een minimale amplitude heeft ?
4. Twee luidsprekers (te beschouwen als puntbronnen), 3 m van elkaar, sturen in fase elk een geluidsgolf uit met dezelfde frequentie. Een waarnemer staat op de middelloodlijn, 8m van het middelpunt tussen de twee luidsprekers. Hij begint te wandelen, loodrecht op de middelloodlijn, en op 0,35 m van zijn vertrekpunt neemt hij een eerste minimum in geluidsintensiteit waar. Bereken de frequentie van de uitgezonden golven.
5. In een gespannen veer worden staande longitudinale golven verwekt door een trillingsbron met frequentie 100 Hz. De afstand tussen twee opeenvolgende knopen is 6,0 cm. Bereken de golflengte en golfsnelheid .
6. Een snaar van 2,0 m lang is aan het ene uiteinde vastgemaakt terwijl het andere uiteinde bevestigd is aan een motortje dat de snaar kan laten trillen met variabele frequentie (kan ook beschouwd worden als vast uiteinde). De snaar is opgespannen met een spankracht van 400 N, en heeft een lineaire massadichtheid van 2,5 g/m.
  - a) Bereken de grondfrequentie van de snaar.
  - b) Bij welke frequentie bekomt men in het touw 3 buiken ? De hoeveelste harmoniek is dit ?
7. Een snaar met een lengte van 0,75 m geeft bij het strijken een grondtoon van 400 Hz.
  - a) Bereken de golfsnelheid.

## Samenstellen van golven

- b) Welke toonhoogte wordt er voortgebracht als de snaar op  $\frac{1}{3}$  van haar lengte wordt ondersteund ?
  - c) Welke harmoniek is dit ?
8. In een veer met lengte 25,0 cm planten zich golven voort met een snelheid van 50,0 m/s. Een einde van de veer is vast, terwijl het andere vrij is. Met welke frequenties, gegeven aan het vrije uiteinde, kan men in de veer een staande golf opwekken ?
9. Men wil een resonantiekastje bouwen voor een stemvork die een frequentie heeft van 440 Hz. Eén van de uiteinden van het kastje is gesloten. Hoe lang moet een kastje zijn als de voortplantingssnelheid van het geluid 340 m/s bedraagt ?