# Univariate kansvariabelen

Sandra Van Aert

13 oktober 2011

# Definitie

- kansvariabele
  = stochastische variabele
  = toevalsvariabele
- **definitie**: $X(\omega)$
  functie die reëel getal associeert met elke uitkomst van een experiment
- **voorbeeld 1**: testen van een product
  - defect of niet-defect
  - $X(\text{defect}) = 0 \quad \text{en} \quad X(\text{niet-defect}) = 1$
- **voorbeeld 2**: nawegen van flessen in een vulproces
  - elke meting is reëel getal zodat $X(\omega) = \omega$

# Notatie

- kansvariabele → hoofdletter

  $X(\omega)$

  $X$

  $Y, Z, X_1, X_2, \ldots$

  = functies
- realisatie van kansvariabele → kleine letter

  $x, y, z$

  = getallen
- $P(X = x)$

  $P(X < x)$

  $P(x < 10)$ NIET

  $P(X < 10)$ WEL

# Voorbeeld

- experiment = opgooien 2 dobbelstenen
- 36 mogelijke uitkomsten $\omega_{ij}$

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{array}$$

- mogelijke kansvariabelen
  - $X$ = som aantal ogen
    $X(\omega_{13}) = 4 = X(\omega_{22}) = X(\omega_{31})$
  - $Y$ = absolute waarde verschil aantal ogen
    $Y(\omega_{13}) = 2 = Y(\omega_{31}) = Y(\omega_{24}) = \dots$

# Kansen

- experiment: gooien 2 dobbelstenen
- $X$ = som aantal ogen
- $P(X = 7)$

$$= P\big((1,6) \text{ gegooid of } (2,5) \text{ gegooid of } (3,4) \text{ gegooid of } (4,3) \text{ gegooid of } (5,2) \text{ gegooid of } (6,1) \text{ gegooid}\big)$$

$$= P\big((1,6) \text{ gegooid}\big) + P\big((2,5) \text{ gegooid}\big) + \ldots + P\big((6,1) \text{ gegooid}\big)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

# Discrete kansvariabele

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | ... | 1/36 |

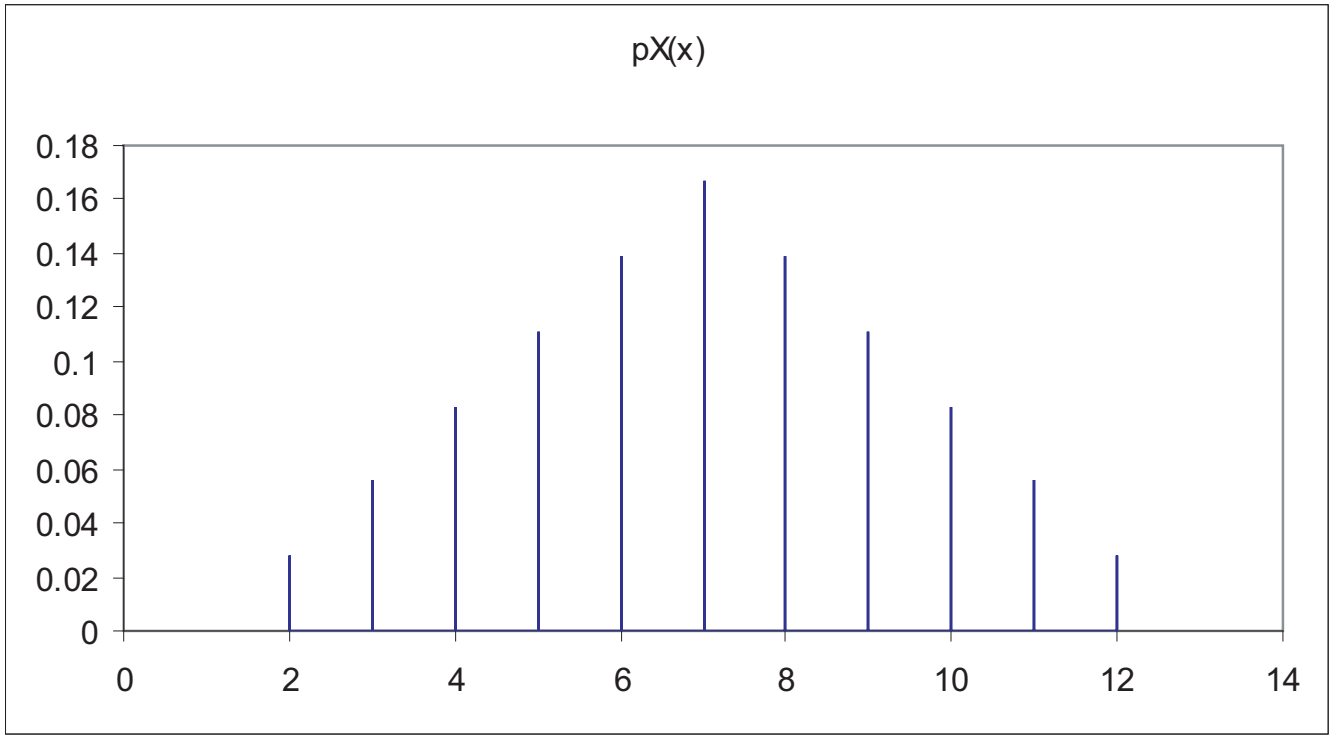
kansverdeling $p_X(x) = P(X = x)$

- $p_X(x) \geq 0$
- $\sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) = 1$

**merk op**: soms $k \to \infty$

# Kansverdeling grafisch

$P(X = x)$



# (Cumulatieve) verdelingsfunctie

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X \leq x)$ | 1/36 | 3/36 | 6/36 | 10/36 | 15/36 | 21/36 | … | 1 |

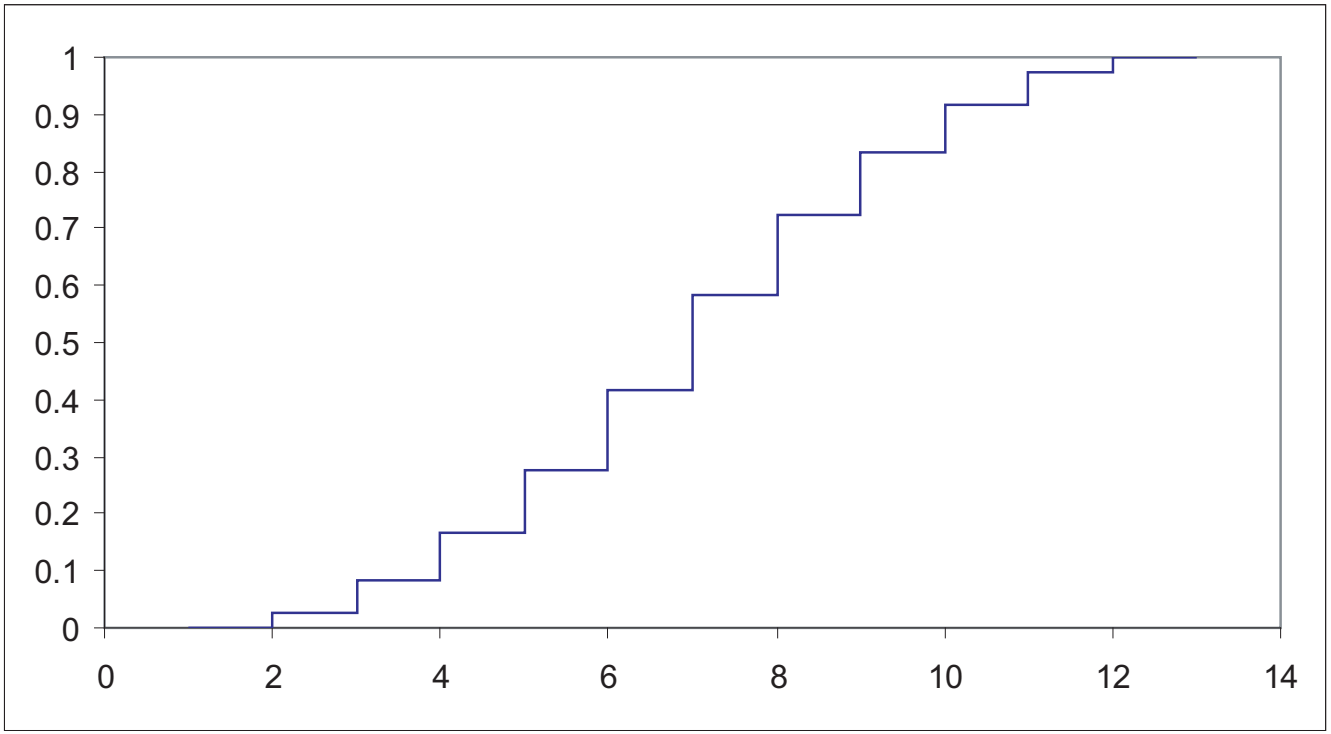
cumulatieve verdelingsfunctie $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i), \qquad \forall x$$

- niet dalend
- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(+\infty) = 1$

# Verdelingsfunctie grafisch

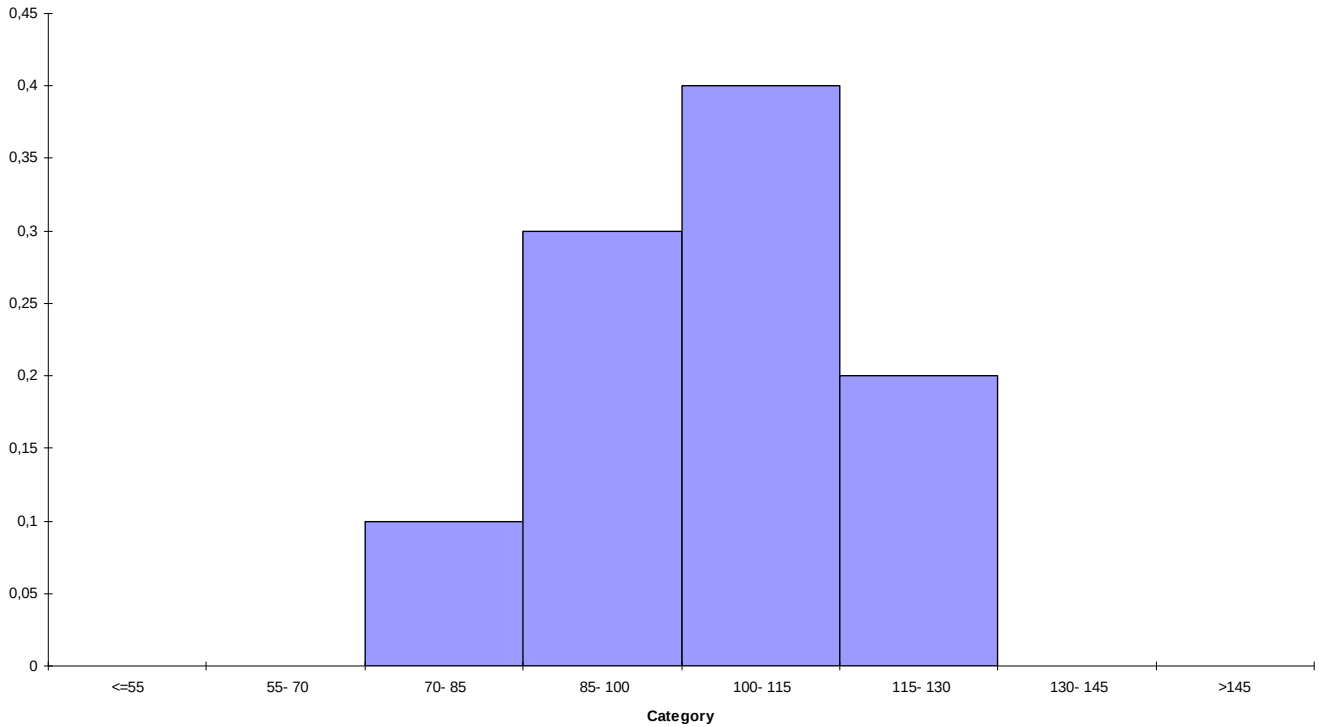
$P(X \leq x)$



# Continue kansvariabele

Histogram met relatieve frequenties

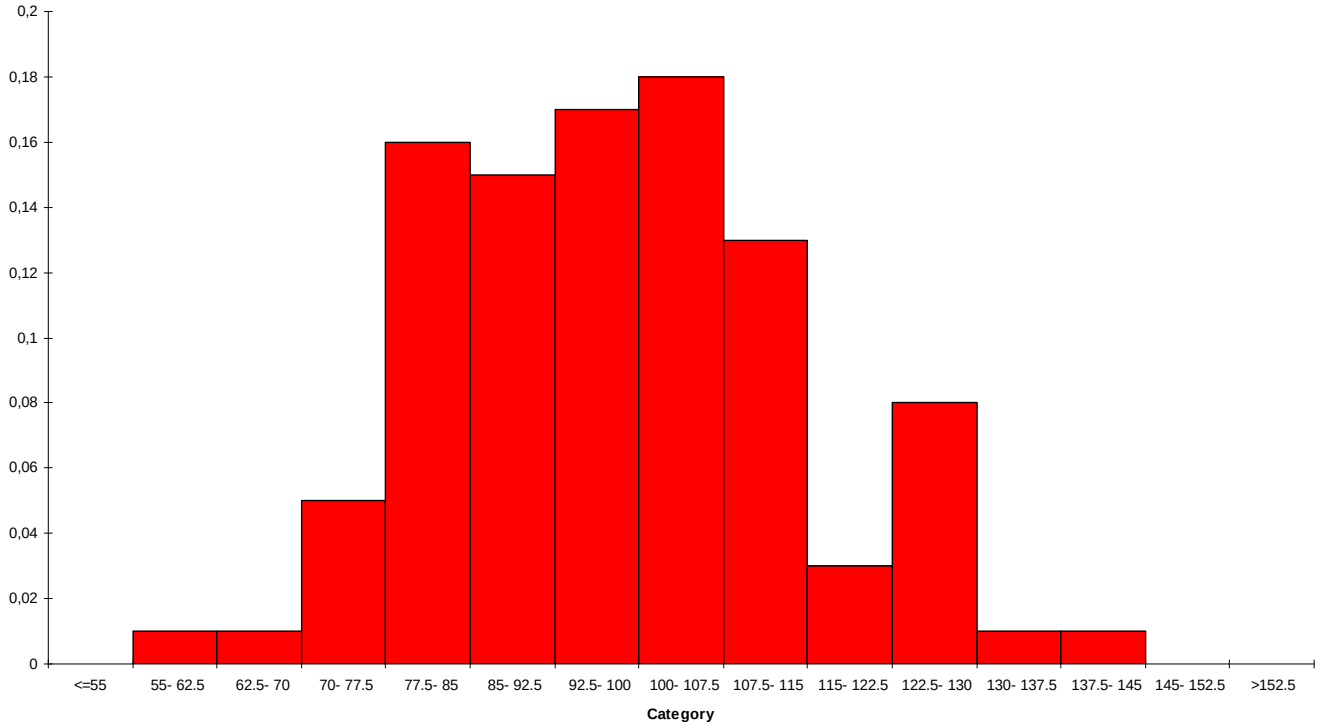
10 observaties



# Continue kansvariabele

Histogram met relatieve frequenties

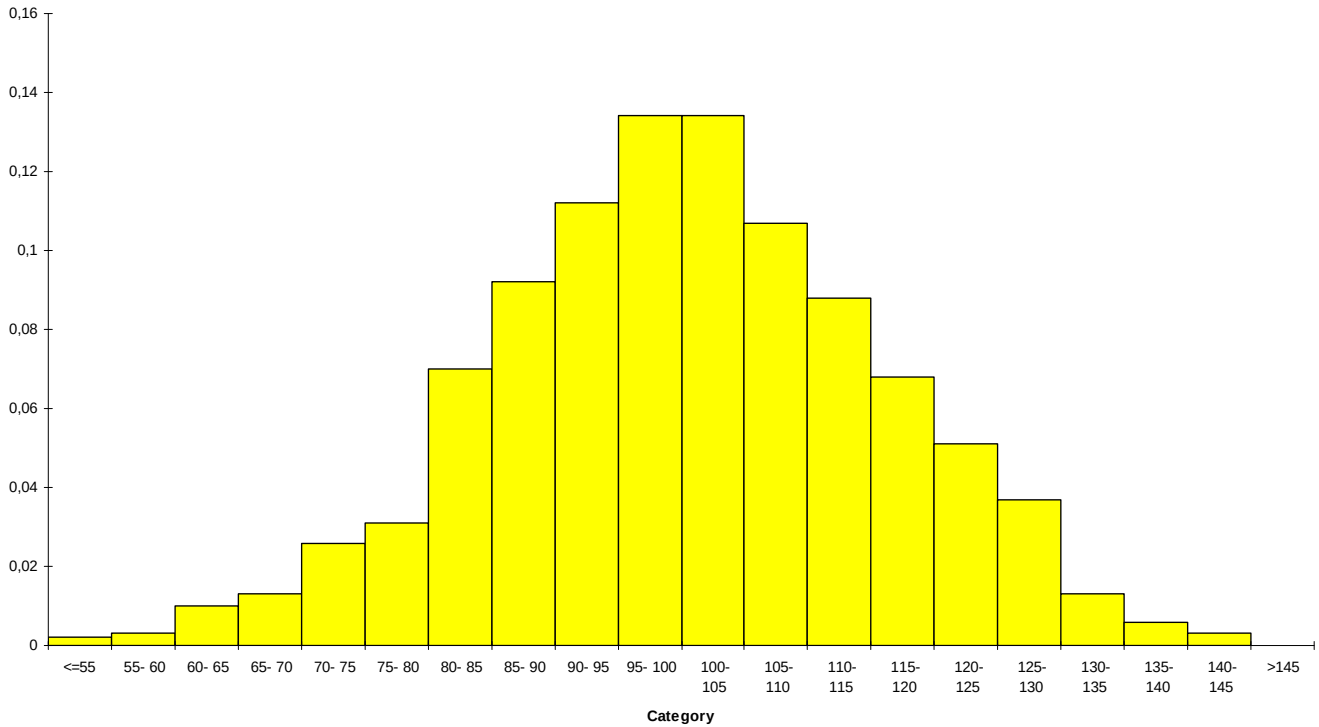
100 observaties



# Continue kansvariabele

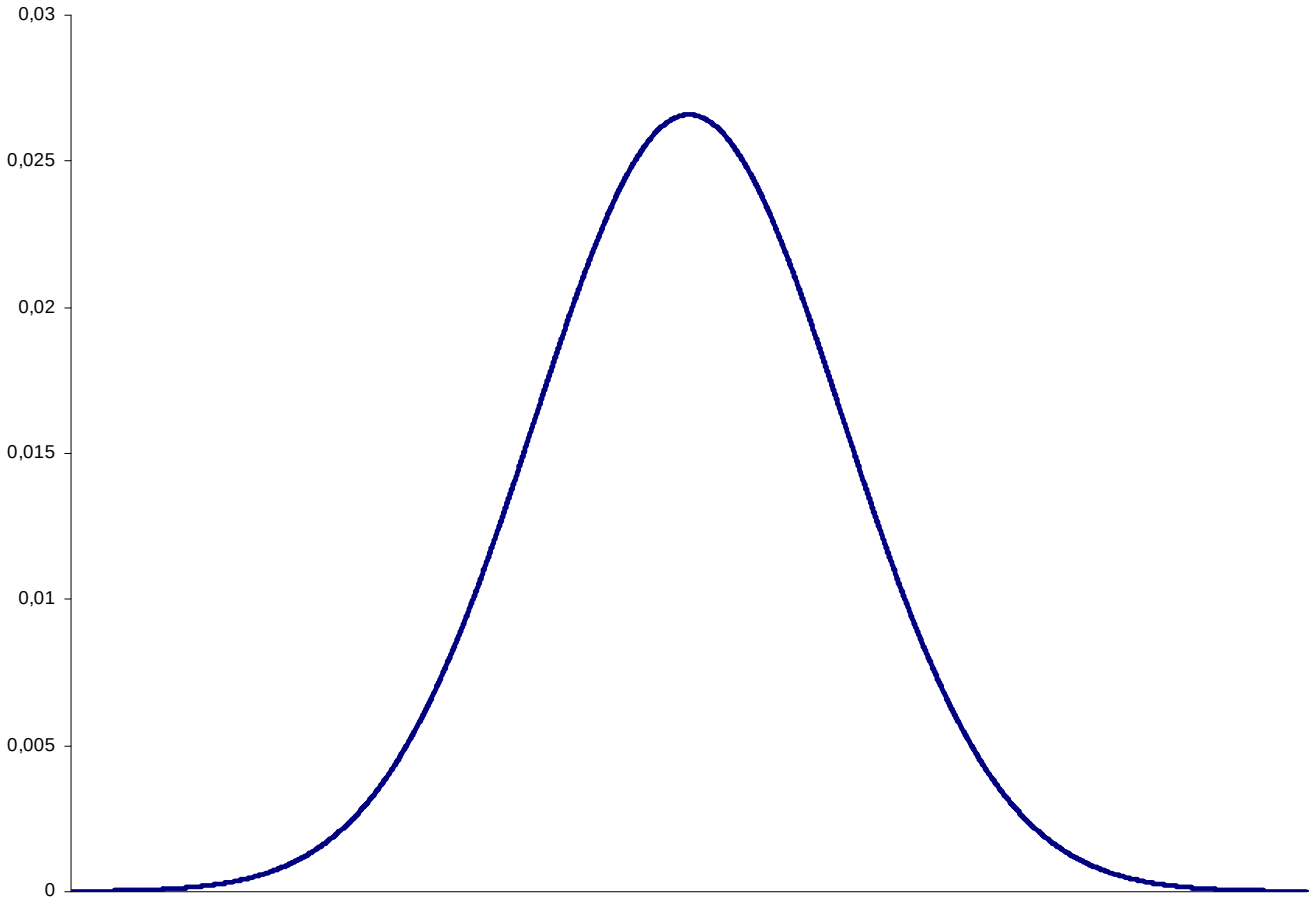
Histogram met relatieve frequenties

1000 observaties



# Continue kansvariabele

## Kansdichtheid



# Kansdichtheid

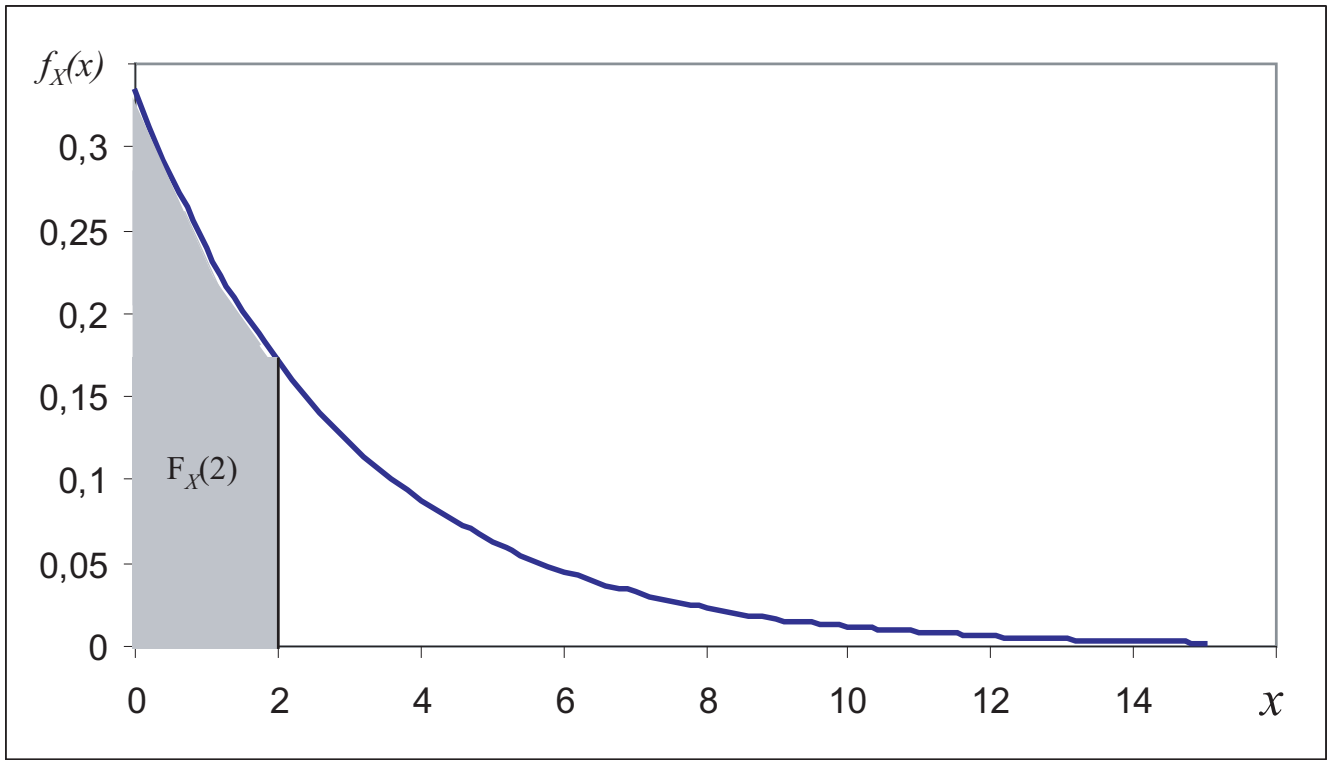
- a.h.w. polygoon
- functie $f_X(x)$

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

# Kansdichtheid

- voorbeeld: $P(0 \leq X \leq 2)$



# Kansen

- kans = oppervlakte onder curve $f_X(x)$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

- speciaal geval

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f_X(x)\, dx = 0$$

# Continu versus discreet

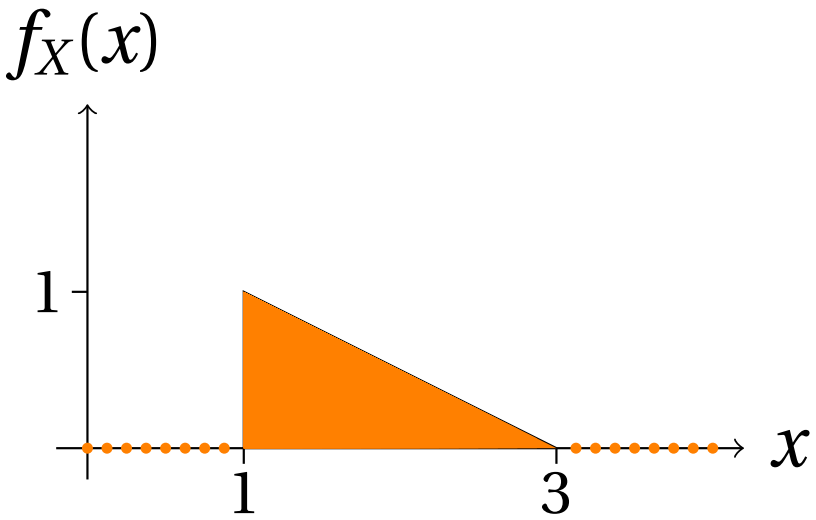
- kansdichtheid i.p.v. kansverdeling
- $f_X(x)$ i.p.v. $p_X(x)$
- $f_X(x) \geq 0 \leftrightarrow p_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) = 1$
- $f_X(x)$ soms $\geq 1 \quad \leftrightarrow \quad p_X(x)$ nooit $> 1$

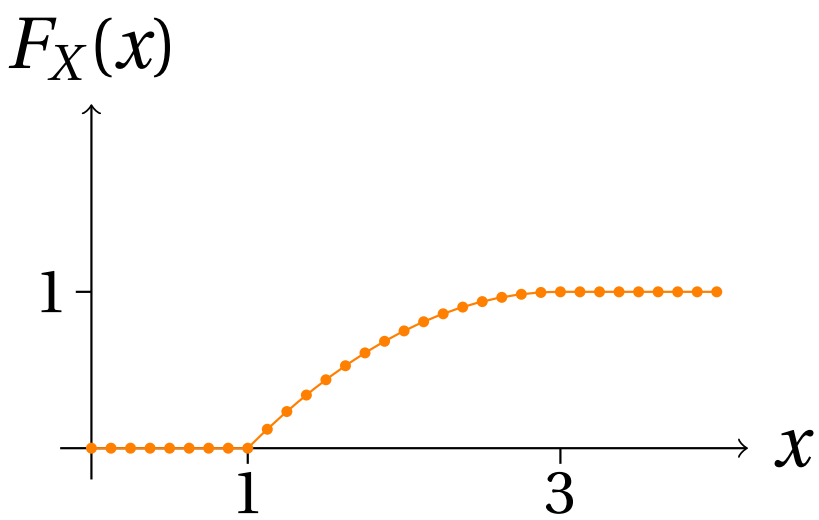
# Cumulatieve verdelingsfunctie

- voor elk reëel getal $x$

$$P(X \leq x)$$
$$= P(-\infty < X \leq x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$
$$= F_X(x) \quad \text{(cumulatieve verdelingsfunctie)}$$

# Cumulatieve verdelingsfunctie grafisch



# Kansen en verdelingsfunctie

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

of

$$P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

# Opmerking

- $F_X(x)$
  $= P(-\infty < X \leq x)$
  $= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$
- $f_X(x)$ kan afgeleid worden uit $F_X(x)$
  $f_X(x)$
  $= \frac{d}{dx} F_X(x)$

# Kengetallen

Sandra Van Aert

13 oktober 2011

# Rekenkundig gemiddelde

- rekenkundig gemiddelde bij gegroepeerde gegevens:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{n}(f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n)$$

- voorbeeld:

| Aantal no-shows | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequentie | 11 | 38 | 32 | 9 | 6 | 3 | 1 |
| Rel. frequentie | 11% | 38% | 32% | 9% | 6% | 3% | 1% |

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{100}(11 \times 0 + 38 \times 1 + 32 \times 2 + 9 \times 3 + 6 \times 4 + 3 \times 5 + 1 \times 6) \\ &= 1.74\end{aligned}$$

# Verwachte waarde of gemiddelde

$$\mu_X = E(X)$$

- discreet: $\sum_{i=1}^{k} x_i p_X(x_i)$

  *analoog aan steekproefgemiddelde gegroepeerde gegevens (hoofdstuk 3)*

- continu: $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$

# Voorbeeld

- meerkeuzevragen
- 4 antwoordmogelijkheden
- slechts 1 van de 4 is juist
- puntenverdeling:
  - juist antwoord: $+1$
  - fout antwoord: $-1/3$
  - geen antwoord: $0$
- heb je er belang bij te gokken als je geen enkel antwoord kunt uitsluiten?
- heb je er belang bij te gokken als je één antwoord kunt uitsluiten?

# Voorbeeld

Kansverdeling bij gokken:

| Antwoord | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Kans | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

$$E(\text{punten}) = 1\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{4} = 0$$

# Voorbeeld

Kansverdeling bij 1 eliminatie:

| Antwoord | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Kans | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 0 |

$$E(\text{punten}) = 1\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{9}$$

# Verwachte waarde van functie $Y = g(X)$

algemeen

- discreet: $\mu_Y = E(Y) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)\, p_X(x_i)$
- continu: $\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$

lineaire functie $Y = aX + b$

- $\mu_Y = a\mu_X + b$
- $E(Y) = E(aX + b)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f_X(x)\, dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx$$

$$= a\mu_X + b$$

# Steekproefvariantie

- steekproefvariantie bij gegroepeerde gegevens:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

- voorbeeld:

| Aantal no-shows | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequentie | 11 | 38 | 32 | 9 | 6 | 3 | 1 |
| Rel. frequentie | 11% | 38% | 32% | 9% | 6% | 3% | 1% |

- $s^2 = \frac{1}{99}(11 \times (0 - 1.74)^2 + 38 \times (1 - 1.74)^2 + \ldots$
$+1 \times (6 - 1.74)^2) = 1.53$

# Variantie

$\sigma_X^2$ of var$(X)$
= verwachte waarde van $Y = g(X) = (X - \mu_X)^2$

- discreet:
$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)\, p_X(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu_X)^2\, p_X(x_i)$$

- Continu:
$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2\, f_X(x)\, dx$$

# Eigenschap

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 = E(Y) &= E\left[(X-\mu_X)^2\right] \\
&= E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\
&= E(X^2) - \mu_X^2
\end{aligned}
$$

# Variantie lineaire functie $Y = aX + b$

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= E\left[(Y - \mu_Y)^2\right] \\
&= E\left[(aX + b - a\mu_X - b)^2\right] \\
&= E\left[(aX - a\mu_X)^2\right] \\
&= E\left[a^2(X - \mu_X)^2\right] \\
&= a^2 E\left[(X - \mu_X)^2\right] \\
&= a^2 \sigma_X^2
\end{aligned}
$$

# Nog meer begrippen

standaarddeviatie

$$\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}$$

gestandaardiseerde kansvariabele

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$$E(Z) = 0 \text{ en } \sigma_Z^2 = \text{var}(Z) = 1$$

modus

$$p_X(x) \text{ of } f_X(x) \text{ maximaal}$$

# Mediaan $\gamma_{0.5}$

- discreet

$$(1) \quad P(X \leq \gamma_{0.5}) \geq \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad P(X \geq \gamma_{0.5}) \geq \frac{1}{2}$$

- continu

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\gamma_{0.5}} f_X(x)\,dx = \int_{\gamma_{0.5}}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

# $(100 \times p)$de percentiel $\gamma_p$

- continu

$$(1) \quad p = \int_{-\infty}^{\gamma_p} f_X(x)\,dx$$

$$(2) \quad 1 - p = \int_{\gamma_p}^{+\infty} f_X(x)\,dx$$

- $\gamma_{0.25}$ = eerste kwartiel
- $\gamma_{0.5}$ = tweede kwartiel = mediaan
- $\gamma_{0.75}$ = derde kwartiel

# Scheefheid

- Pearsons populatiescheefheidscoëfficiënt

$$SP^{pop} = \frac{3(\mu_X - \gamma_{0.5})}{\sigma_X}$$

- $-3 \leq S_P \leq +3$
- symmetrische verdeling : $SP^{pop} = 0$
- rechtsscheve verdeling : $SP^{pop} > 0$
- linksscheve verdeling : $SP^{pop} < 0$

# Scheefheid

- scheefheidscoëfficiënt

$$scheefheidscoëfficiënt = \frac{E\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3}$$

- symmetrische verdeling :
  $scheefheidscoëfficiënt = 0$
- rechtsscheve verdeling :
  $scheefheidscoëfficiënt > 0$
- linksscheve verdeling :
  $scheefheidscoëfficiënt < 0$

# Discrete kansverdelingen

Sandra Van Aert

13 oktober 2011

# Uniforme kansverdeling

alle mogelijke uitkomsten hebben evenveel kans

**voorbeeld**

- $X$ = aantal ogen gegooid met 1 dobbelsteen
- 6 mogelijkheden
- $p_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \ldots, 6$

# Algemeen

- stel $X$ neemt gehele waarden aan $1, 2, \ldots, N$
- kansverdeling:

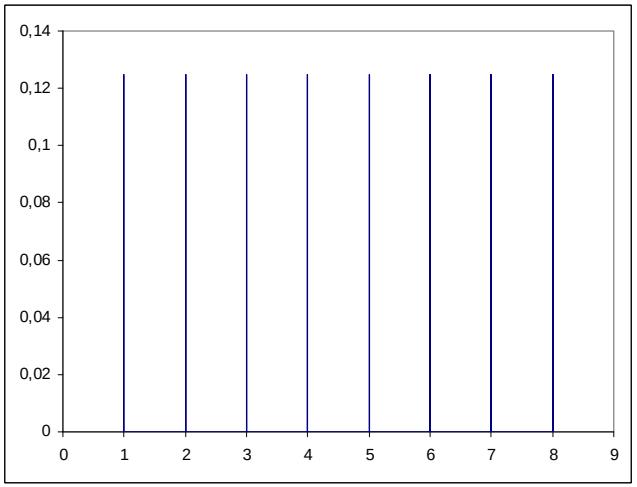
$$p_X(n) = \frac{1}{N}, \qquad n = 1, \ldots, N$$

- cumulatieve verdelingsfunctie:

$$F_X(n) = P(X \leq n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N} = \frac{n}{N}, \qquad n = 1, \ldots, N$$

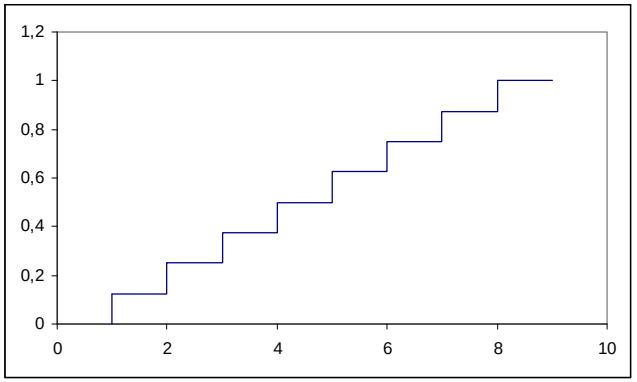
# Grafisch

$P(X = n)$




uniforme kansverdeling met $N = 8$

$P(X \leq n)$




cumulatieve verdelingsfunctie met $N = 8$

# Bernoulli verdeling

kansvariabele kan waarde 0 of 1 aannemen

$$X \to 1 \text{ met kans } \pi$$
$$X \to 0 \text{ met kans } 1-\pi$$

$$p_X(x;\pi) = \pi^x(1-\pi)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

$\pi$ is parameter van Bernoullifamilie $(0 \leq \pi \leq 1)$

# Kansen

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= ? \\
&= p_X(1;\pi) \\
&= \pi^1(1-\pi)^{1-1} \\
&= \pi(1-\pi)^0 \\
&= \pi \\
P(X=0) &= ? \\
&= p_X(0;\pi) \\
&= \pi^0(1-\pi)^{1-0} \\
&= 1-\pi
\end{aligned}
$$

# Kengetallen

$$
\begin{aligned}
\mu_X = E(X) &= \sum_i x_i p_X(x_i;\pi) \\
&= 1 \cdot p_X(1;\pi) + 0 \cdot p_X(0;\pi) \\
&= 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1-\pi) \\
&= \pi \\
\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) &= \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_x(x_i;\pi) \\
&= (1-\pi)^2 \cdot p_X(1;\pi) + (0-\pi)^2 \cdot p_X(0;\pi) \\
&= (1-\pi)^2 \cdot \pi + \pi^2 \cdot (1-\pi) \\
&= \pi(1-\pi)\left[(1-\pi) + \pi\right] \\
&= \pi(1-\pi)
\end{aligned}
$$

# Voorbeeld

- $X \to 1$ indien defect
  $X \to 0$ indien niet-defect

- $X \to 1$ indien geslaagd
  $X \to 0$ indien niet-geslaagd

- $X \to 1$ rode reukerwt
  $X \to 0$ witte reukerwt

- Bernoulli proces/experiment: *kansproces waarbij één element uit een Bernoulli verdeling gegenereerd wordt; successen ("1") en falingen ("0")*

# Binomiale verdeling

- $n$ opeenvolgende Bernoulli experimenten
- tel aantal successen $X$
- $X : 0, 1, 2, \ldots, n$
- alle Bernoulli experimenten zijn onafhankelijk en hebben parameter $\pi$

# Afleiding kansverdeling

- wat is kans op 3 successen en 5 falingen bij $n = 8$?
- stel:

$$\begin{array}{cccccccc} S, & F, & S, & F, & F, & F, & S, & F, \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \pi & 1-\pi & \pi & 1-\pi & 1-\pi & 1-\pi & \pi & 1-\pi \end{array}$$

- vermenigvuldigingsregel:
  kans op deze volgorde =

$$\pi(1-\pi)\pi(1-\pi)(1-\pi)(1-\pi)\pi(1-\pi) = \pi^3(1-\pi)^5$$

# Vervolg afleiding kansverdeling

- er zijn nog andere volgordes met 3 successen:

$$\frac{8!}{3!\,5!} \text{ volgordes met 3 successen}$$

- wegens de optelregel is de kans op 3 successen (en 5 falingen) bij $n = 8$ dan

$$\frac{8!}{3!\,5!}\pi^3(1-\pi)^5 = \binom{8}{3}\pi^3(1-\pi)^5$$

# Definitie

- kans op $x$ successen:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= p_X(x; \pi, n) \\ &= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\pi^x(1-\pi)^{n-x} \\ &= \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} \end{aligned}$$

- parameters: $n$ en $\pi$
- kengetallen:

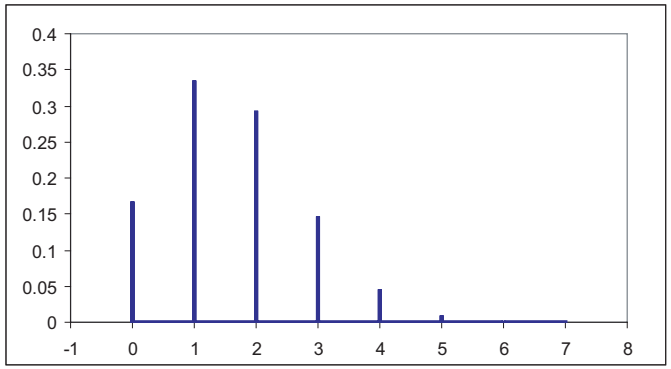
$$\begin{aligned} \mu_X &= n\pi \\ \sigma_X^2 &= n\pi\,(1-\pi) \end{aligned}$$

# Kengetallen

$$
\begin{aligned}
\mu_X = E(X) &= E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \\
&= E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n) \\
&= \pi + \pi + \cdots + \pi \\
&= n\pi \\
\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) &= var(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \\
&= var(Y_1) + var(Y_2) + \cdots + var(Y_n) \\
&= \pi(1-\pi) + \pi(1-\pi) + \cdots + \pi(1-\pi) \\
&= n\pi(1-\pi)
\end{aligned}
$$

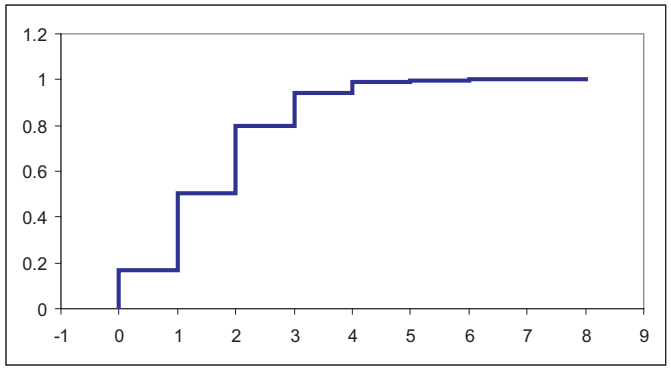
# Grafisch

$P(X = x)$




kansverdeling met $n = 8$ en $\pi = 0.2$

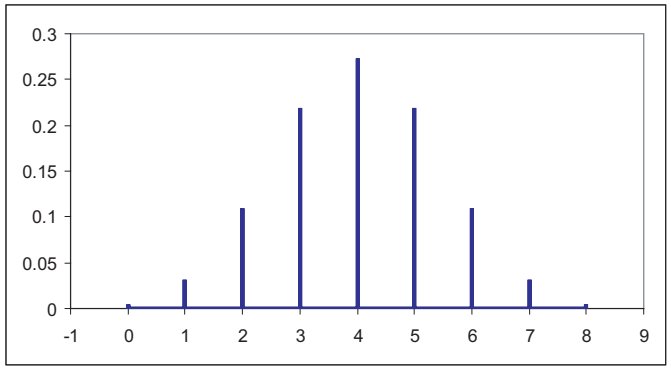
$P(X \leq x)$




cumulatieve verdelingsfunctie met $n = 8$ en $\pi = 0.2$

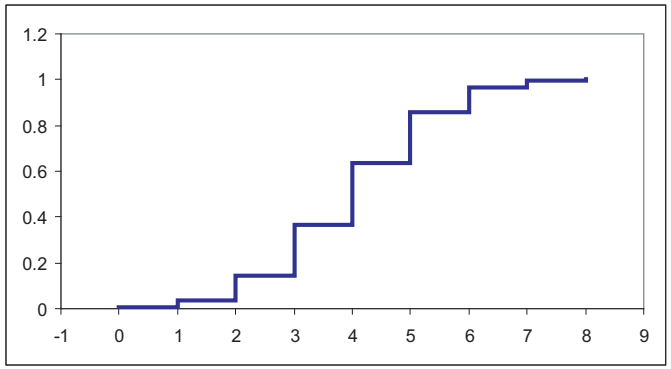
# Grafisch

$P(X = x)$




kansverdeling met $n = 8$ en $\pi = 0.5$

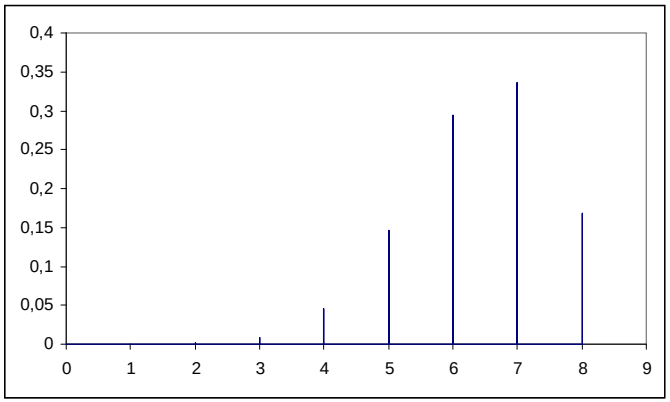
$P(X \leq x)$




cumulatieve verdelingsfunctie met $n = 8$ en $\pi = 0.5$

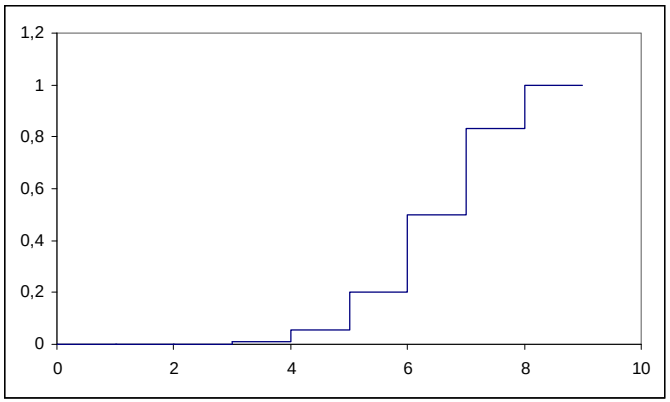
# Grafisch

$P(X = x)$




kansverdeling met $n = 8$ en $\pi = 0.8$

$P(X \leq x)$




cumulatieve verdelingsfunctie met $n = 8$ en $\pi = 0.8$

# Voorbeeld

- $\pi = 0.10$ defectenratio
- $n = 20$ inspecties
- $P(X = 2) = ?$

- R: `dbinom(2,20,0.1)`
  Matlab: `binopdf(2,20,0.1)`
  - de waarde van $x$
  - de parameter $n$
  - de parameter $\pi$

# Vervolg voorbeeld

- $\pi = 0.10$ defectenratio
- $n = 20$ inspecties
- $P(X = 2) = ?$

- rekentoestel:

$$P(X = 2) = \frac{20!}{18!\,2!}(0.1)^2(0.9)^{18} = 0.2852$$

# Vervolg voorbeeld

- $P(X \geq 3) = ?$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$
- R: `"=1-pbinom(2,20,0.1)`
  Matlab: `"=1-binocdf(2,20,0.1)`
- rekentoestel

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

# Poissonverdeling

**voorbeelden**

- aantal defecten / lengte-eenheid
- aantal aardbevingen / tijdseenheid
- aantal bacteriën / volume-eenheid

**voorwaarden Poisson proces**

- gebeurtenissen komen niet in groep voor
- kans op gebeurtenis constant
- onafhankelijk in twee niet-overlappende intervallen

# Poissonverdeling

- $X$: aantal keer dat een gebeurtenis voorkomt in een gegeven tijdsinterval
- tijdsinterval opsplitsen in zeer groot aantal ($n$) kleine deelintervallen
- $n$ opeenvolgende Bernouilli experimenten
- $X$ binomiaal verdeeld
- Poisson verdeling is limiet van de binomiaal verdeling $n \to \infty, \pi \to 0$ en $n\pi \to \lambda$

$$Poisson(\lambda) \approx bin(n, \pi)$$

# Vergelijking Poisson en binomiale verdeling

| | binomiale verdeling | | | | Poisson |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 5 | 20 | 100 | 500 | $\lambda = 1$ |
| $\pi$ | 0.2 | 0.05 | 0.01 | 0.002 | |
| $P(X=0)$ | 0.3277 | 0.3585 | 0.3660 | 0.3675 | 0.3679 |
| $P(X=1)$ | 0.4096 | 0.3774 | 0.3697 | 0.3682 | 0.3679 |
| $P(X=2)$ | 0.2048 | 0.1887 | 0.1849 | 0.1841 | 0.1839 |
| $P(X=3)$ | 0.0512 | 0.0596 | 0.0610 | 0.0613 | 0.0613 |
| $P(X=4)$ | 0.0064 | 0.0133 | 0.0149 | 0.0153 | 0.0153 |

# Definitie

$$p_X(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

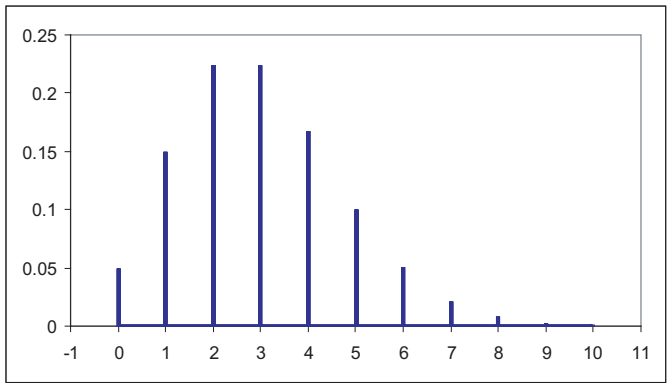
parameter $\lambda > 0$

kengetallen:

$$E(X) = \lambda$$
$$\text{var}(X) = \lambda$$

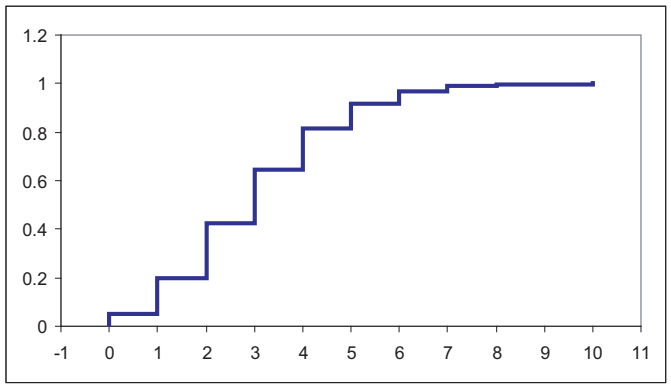
# Grafisch

$P(X = x)$



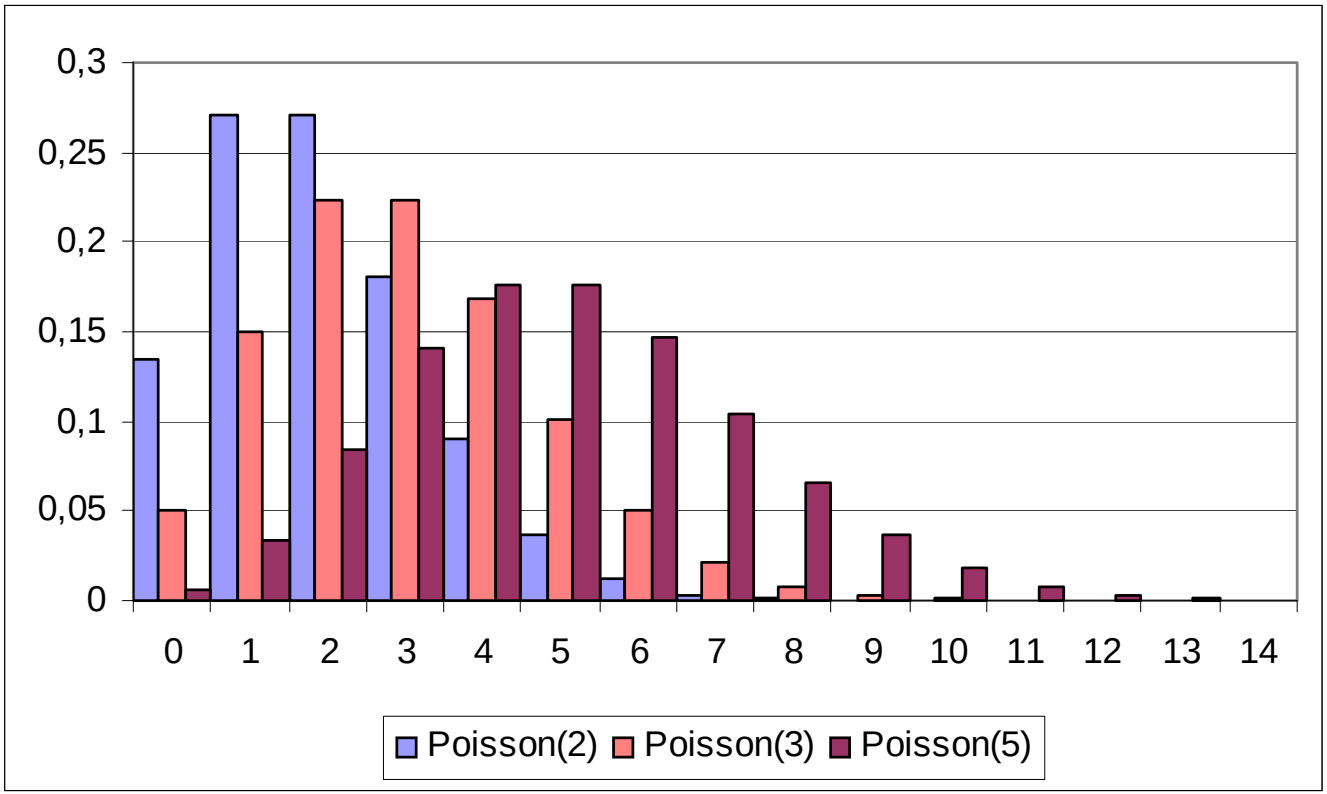

kansverdeling voor $\lambda = 3$

$P(X \leq x)$




cumulatieve verdelingsfunctie voor $\lambda = 3$

# Voorbeeld: Poisson familie



# Voorbeeld

- telefooncentrale
- 30 oproepen per uur
- kans op geen enkele oproep in 3 minuten tijd?
- eerst $\lambda$ bepalen:

$$\begin{aligned} &30 \text{ oproepen per uur} \\ &= 1.5 \text{ oproepen per 3 minuten} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 1.5$

- $P(X = 0) = p_X(0; 1.5) = ?$

# Vervolg voorbeeld

- rekentoestel:

$$P(X=0) = \frac{(1.5)^0 e^{-1.5}}{0!} = 0.223$$

- R: `dpois(0,1.5)`
  Matlab: `poisspdf(0,1.5)`
  - de waarde van $x$
  - de parameter $\lambda$

# Vervolg voorbeeld

- kans op meer dan 5 oproepen in 5 minuten?
  $\Rightarrow \lambda = 2.5$
- $P(X > 5) = P(X \geq 6) = ?$
- $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$
  R: `1 - ppois(5,2.5)`
  Matlab: `1 - poisscdf(5,2.5)`
- rekentoestel:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - \cdots - P(X = 5)$$
$$= 1 - \frac{(2.5)^0 e^{-2.5}}{0!} - \cdots - \frac{(2.5)^5 e^{-2.5}}{5!}$$