Examen Toegepaste Wiskunde II Oefeningen

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 2e zittijd 2009–2010

Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/70

1. Gegeven de parabool $x = -4y^2 + 15y - 5$ en de rechte $y = 7 - x$. We wentelen het gemeenschappelijke gebied rond de Y–as. Wat is van die figuur het volume?

/8

2. Bereken $\int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4}\right) e^{-1/4t} dt$. Hint: stel $z = \frac{1}{t}$

/8

3. Los op:

$$(2x - y - 1)\, dx + (-x + 3y - 7)\, dy = 0$$

met $y\,(3) = 2$.

/9

4. Los op:

$$x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 1$$

/9

5. Bepaal de partieelsom

$$2^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 5 + 6^2 \cdot 7 + ... + (2n)^2\,(2n+1)$$

en bewijs dat de uitkomst altijd een geheel getal is.

| /8 |

6. Bewijs dat de Taylorreeks van $f(x) = e^{-x^2/2}$ gelijk is aan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!}$ als volgt:

(a) Bereken $f(0), f'(0), \ldots$ tot en met de zesde afgeleide.

(b) Leid vervolgens de uitdrukking $y' + xy = 0$ met $y = f(x)$ in beide leden $(n-1)$ keer af met de regel van Leibnitz, en zoek daaruit een recursieformule.

(c) Gebruik vervolgens het resultaat om $\lim_{x \to 0} \frac{8e^{-x^2/2} - 8 + 4x^2 - x^4}{x^6}$ uit te rekenen.

/10

7. Ga na of de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6 + y^4} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ in $(0, 0)$ continu, partieel afleidbaar,afleidbaar, differentieerbaar is.

/9

8. Zoek de extrema van $f(x, y) = -x^6 + 2x^4 - x^2 + 2y^2 - 4y + 2$

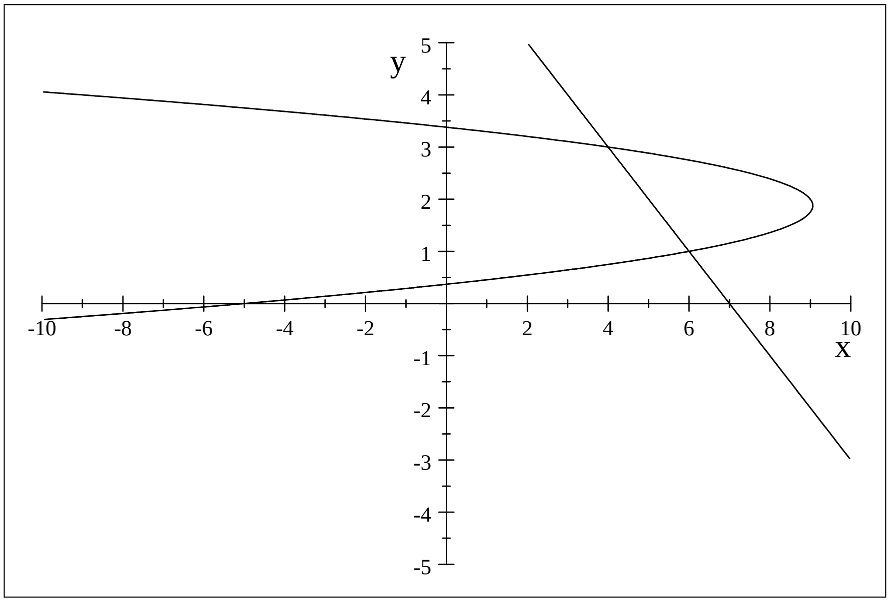
/9

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Gegeven de parabool $x = -4y^2 + 15y - 5$ en de rechte $y = 7 - x$. We wentelen het gemeenschappelijke gebied rond de Y–as. Wat is van die figuur het volume?



$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4y^2 + 15y - 5 \\ y = 7 - x \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) = \{(4,3), (6,1)\}$$

$$V = \pi \int_1^3 \left(\left(-4y^2 + 15y - 5\right)^2 - (7-y)^2 \right) dy$$

$$= \pi \int_1^3 \left(16y^4 - 120y^3 + 264y^2 - 136y - 24\right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{16}{5} y^5 - 30y^4 + 88y^3 - 68y^2 - 24y \right]_1^3 = \frac{352}{5}\pi$$

2. Bereken $\int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} \right) e^{-1/4t} dt$. Hint: stel $z = \frac{1}{t}$

$$\begin{array}{rcl} z & = & \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{z} \Rightarrow dt = -\frac{dz}{z^2} \\ t & = & 0 \Rightarrow z = \infty \text{ en } t = \infty \Rightarrow z = 0 \end{array}$$

$$= -\int_\infty^0 \left(z^2 + z^3 + z^4\right) e^{-z/4} \frac{dz}{z^2} = \int_0^\infty \left(z^2 + z^3 + z^4\right) e^{-z/4} \frac{dz}{z^2} = \int_0^\infty \left(1 + z + z^2\right) e^{-z/4} dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 + z + z^2 \\ dv = e^{-z/4} dz \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = (1 + 2z)\, dz \\ v = -4e^{-z/4} \end{array} \right.$$

$$= \left[-4e^{-z/4}\left(1 + z + z^2\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty 4e^{-z/4}(1 + 2z)\, dz = 4 + 4\int_0^\infty e^{-z/4}(1 + 2z)\, dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 2z \\ dv = e^{-z/4} dz \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = 2dz \\ v = -4e^{-z/4} \end{array} \right.$$

$$= 4 + 4\left(\left[-4e^{-z/4}\left(1+2z\right)\right]_0^\infty + 8\int_0^\infty e^{-z/4}dz\right) = 4 + 4\left(4 + 8\int_0^\infty e^{-z/4}dz\right)$$

$$= 4 + 16 + 32\int_0^\infty e^{-z/4}dz = 4 + 16 + 32\left[-4e^{-z/4}\right]_0^\infty = 4 + 16 + 32\cdot 4 = 148$$

3. Los op:

$$\left(2x - y - 1\right)dx + \left(-x + 3y - 7\right)dy = 0$$

met $y\left(3\right) = 2$.

$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x,y\right) = \left(2,3\right)$. Stel $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 3 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(2u - v\right)du + \left(-u + 3v\right)dv = 0$

Stel $v = wu \Rightarrow v' = w'u + w$

$\Leftrightarrow \left(2u - wu\right) + \left(-u + 3wu\right)\left(w'u + w\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 - w\right) + \left(-1 + 3w\right)\left(w'u + w\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 - w\right) + \left(-1 + 3w\right)w'u - w + 3w^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 - 2w + 3w^2\right) + \left(-1 + 3w\right)w'u = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 - 2w + 3w^2\right) + \left(-1 + 3w\right)\dfrac{dw}{du}u = 0$

$\Leftrightarrow \left(2 - 2w + 3w^2\right) = \left(1 - 3w\right)\dfrac{dw}{du}u$

$\Leftrightarrow \dfrac{du}{u} = \dfrac{1 - 3w}{2 - 2w + 3w^2}dw$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int\frac{du}{u} = \int\frac{1 - 3w}{2 - 2w + 3w^2}dw$

$\Leftrightarrow \ln\left|u\right| + c = -\dfrac{1}{2}\ln\left|w^2 - \dfrac{2}{3}w + \dfrac{2}{3}\right|$

$\Leftrightarrow -2\ln\left|u\right| + c = \ln\left|w^2 - \dfrac{2}{3}w + \dfrac{2}{3}\right|$

$\Leftrightarrow \ln\left|u\right|^{-2} + c = \ln\left|w^2 - \dfrac{2}{3}w + \dfrac{2}{3}\right|$

$\Leftrightarrow \ln\left|u^{-2}\right| + c = \ln\left|w^2 - \dfrac{2}{3}w + \dfrac{2}{3}\right|$

$\Leftrightarrow K\cdot\dfrac{1}{u^2} = \left|w^2 - \dfrac{2}{3}w + \dfrac{2}{3}\right|$

$\Leftrightarrow K = \left|w^2u^2 - \dfrac{2}{3}wu^2 + \dfrac{2}{3}u^2\right|$

$\Leftrightarrow c = 3w^2u^2 - 2wu^2 + 2u^2$

$\Leftrightarrow c = 3v^2 - 2vu + 2u^2$

$\Leftrightarrow c = 3\left(y - 3\right)^2 - 2\left(y - 3\right)\left(x - 2\right) + 2\left(x - 2\right)^2$

PO: $c = 3\left(2 - 3\right)^2 - 2\left(2 - 3\right)\left(3 - 2\right) + 2\left(3 - 2\right)^2 = 7$

$\Rightarrow 3\left(y - 3\right)^2 - 2\left(y - 3\right)\left(x - 2\right) + 2\left(x - 2\right)^2 = 7$

4. Los op:

$$x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 1$$

Homogene vergelijking: $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right) + 3\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) - 2\dot{y} + 2y = 0$

$\Leftrightarrow \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} + 3\ddot{y} - 3\dot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$

$\Leftrightarrow \dddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

Karakteristieke vergelijking: $t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + 2\right)\left(t - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{1, -2^{(2)}\right\}$

$\Rightarrow y_h = c_1e^z + c_2ze^z + c_3e^{-2z}$

$y_h = c_1x + c_2x\ln x + \dfrac{c_3}{x^2}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x\ln x & \dfrac{1}{x^2} \\ 1 & \ln x + 1 & -\dfrac{2}{x^3} \\ 0 & \dfrac{1}{x} & \dfrac{6}{x^4} \end{vmatrix} = \frac{9}{x^3} \neq 0$$

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x & \dfrac{1}{x^2} \\ 0 & \ln x + 1 & -\dfrac{2}{x^3} \\ \dfrac{1}{x^3} & \dfrac{1}{x} & \dfrac{6}{x^4} \end{vmatrix}}{\dfrac{9}{x^3}} = \frac{-\dfrac{1}{x^5}(3\ln x + 1)}{\dfrac{9}{x^3}} = -\frac{1}{9x^2}(3\ln x + 1) \Rightarrow z_1 = \int -\frac{1}{9x^2}(3\ln x + 1)\,dx =$$

$$\frac{1}{9x}(3\ln x + 4)$$

$$z_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & \dfrac{1}{x^2} \\ 1 & 0 & -\dfrac{2}{x^3} \\ 0 & \dfrac{1}{x^3} & \dfrac{6}{x^4} \end{vmatrix}}{\dfrac{9}{x^3}} = \frac{\dfrac{3}{x^5}}{\dfrac{9}{x^3}} = \frac{1}{3x^2} \Rightarrow z_2 = \int \frac{1}{3x^2}dx = -\frac{1}{3x}$$

$$z_3' = \frac{\begin{vmatrix} x & x\ln x & 0 \\ 1 & \ln x + 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{x^3} \end{vmatrix}}{\dfrac{9}{x^3}} = \frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{9}{x^3}} = \frac{1}{9}x \Rightarrow z_3 = \int \frac{1}{9}x dx = \frac{1}{18}x^2$$

$$\Rightarrow y_p = x\frac{1}{9x}(3\ln x + 4) - \frac{1}{3x}x\ln x + \frac{1}{x^2}\frac{1}{18}x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = c_1 x + c_2 x\ln x + \frac{c_3}{x^2} + \frac{1}{2}$$

5. Bepaal de partieelsom

$$2^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 5 + 6^2 \cdot 7 + ... + (2n)^2(2n+1)$$

en bewijs dat de uitkomst altijd een geheel getal is.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(2k)^2(2k+1) &= \sum_{k=1}^{n} 8k^3 + 4k^2 = 8S_3(n) + 4S_2(n) \\ &= 8 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 2n^2(n+1)^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{2}{3}n(n+1)[3n(n+1) + (2n+1)] \\ &= \frac{2}{3}n(n+1)\left(3n^2 + 5n + 1\right) \end{aligned}$$

Dit is altijd een geheel getal:

- ofwel is de rest bij deling van n door 3 gelijk aan 0, en dan is $\dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$
- ofwel is de rest bij deling van n door 3 gelijk aan 2, en dan is $\dfrac{n+1}{3} \in \mathbb{N}$

- ofwel is de rest bij deling van n door 3 gelijk aan 1, en dan is $\dfrac{3n^2+5n+1}{3} \in \mathbb{N}$
De andere factoren zijn telkens natuurlijk.

6. Bewijs dat de Taylorreeks van $f(x) = e^{-x^2/2}$ gelijk is aan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!}$ als volgt:

(a) Bereken $f(0), f'(0), \ldots$ tot en met de zesde afgeleide.
$f(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = \left(x^2-1\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f''(0) = -1$
$f'''(x) = \left(-x^3+3x\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f^{iv}(x) = \left(x^4-6x^2+x^4+3\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{iv}(0) = 3$
$f^{v}(x) = \left(-x^5+10x^3-15x\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{v}(0) = 0$
$f^{vi}(x) = \left(x^6-15x^4+45x^2-15\right)e^{-x^2/2} \Rightarrow f^{vi}(0) = -15$
...
$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$
$f^{(2n+1)}(0) = 0$

(b) Leid vervolgens de uitdrukking $y' + xy = 0$ met $y = f(x)$ in beide leden $(n-1)$ keer af met de regel van Leibnitz, en zoek daaruit een recursieformule.
Zij $y' + xy = 0$
$\Rightarrow (y'+xy)^{(n-1)} = 0$
$\Leftrightarrow y^{(n)} + xy^{(n-1)} + (n-1)\,y^{(n-2)} = 0$
$\Leftrightarrow y^{(n)}(0) + 0 \cdot y^{(n-1)} + (n-1)\,y^{(n-2)} = 0$
$\Leftrightarrow y^{(n)}(0) = -(n-1)\,y^{(n-2)}(0)$
$\Rightarrow y^{(2n+1)}(0) = 0$ voor alle oneven coëfficiënten; daarentegen voor alle even coëfficiënten geldt:
$y^{(2)}(0) = -1$
$y^{(4)}(0) = (-3)(-1) = 3$
$y^{(6)}(0) = (-5)(-3)(-1) = -15$
...
$y^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{2n+1} = 0 \\ c_{2n} = \dfrac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)!} = \dfrac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)!} \\ \quad = \dfrac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)!} = \dfrac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)!} == \dfrac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \end{cases}$$

Dus $\displaystyle e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!}$

(c) Gebruik vervolgens het resultaat om $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{8e^{-x^2/2} - 8 + 4x^2 - x^4}{x^6}$ uit te rekenen.

$$\lim_{x \to 0} \frac{8e^{-x^2/2} - 8 + 4x^2 - x^4}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{8 - 4x^2 + x^4 - \frac{1}{6}x^6 + O\left(x^8\right) - 8 + 4x^2 - x^4}{x^6} = -\frac{1}{6}$$

7. Ga na of de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ in $(0,0)$ continu, partieel afleidbaar,afleidbaar, differentieerbaar is.

- $f|_{\{(x,y)=(k^2,k^3)\}} = \dfrac{k^{12}}{2k^{12}} \Rightarrow \lim\limits_{k\to 0} f|_{\{(x,y)=(k^2,k^3)\}} = \dfrac{1}{2}$
  $\Rightarrow f$ is niet continu in $(0,0)$
- $D_1 f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda,0) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{0}{\lambda^7} = 0$
  $D_2 f(0,0) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(0,\lambda) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{0}{\lambda^5} = 0$
  $\Rightarrow f$ is partieel afleidbaar in $(0,0)$ en zijn afgeleidenmatrix is $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Stel $\overline{h} = (h_1, h_2), h_1 \neq 0 \neq h_2$ en stel zonder verlies van algemeenheid dat $\left\|\overline{h}\right\| = 1$
  $Df\left(\overline{0}, \overline{h}\right) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\lambda^5 h_1^3 h_2^2}{\lambda^5\left(\lambda^2 h_1^6 + h_2^4\right)} = \dfrac{h_1^3}{h_2^2}$
  $\Rightarrow f$ is afleidbaar (in alle richtingen) in $(0,0)$.
- f is niet differentieerbaar in $(0,0)$, want de functie is niet continu, én $Df\left(\overline{0}\right)\overline{h} \neq Df\left(\overline{0}, \overline{h}\right)$

8. Zoek de extrema van $f(x,y) = -x^6 + 2x^4 - x^2 + 2y^2 - 4y + 2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -6x^5 + 8x^3 - 2x = -2x(x-1)(x+1)\left(3x^2 - 1\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4 = 4(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in \left\{(0,1), (1,1), (-1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right\}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x^4 + 24x^2 - 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(x,y) = 4\left(-30x^4 + 24x^2 - 2\right)$$

- $H(0,1) = -8 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H(1,1) = -32 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H(-1,1) = -32 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \dfrac{32}{3} > 0$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0 \Rightarrow$ minimum
- $H\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \dfrac{32}{3} > 0$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0 \Rightarrow$ minimum