Examen Wiskunde Oefeningen REEKS B

dr Werner Peeters

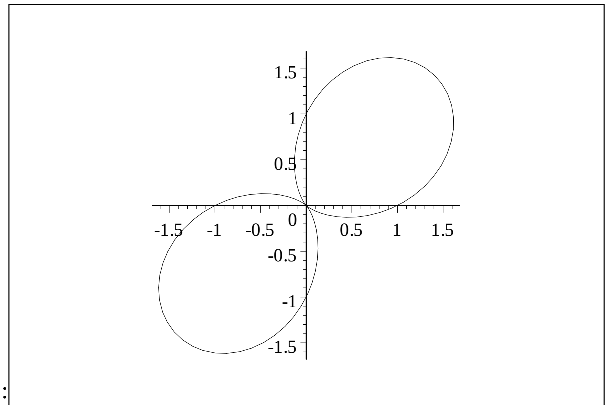
1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2009–2010

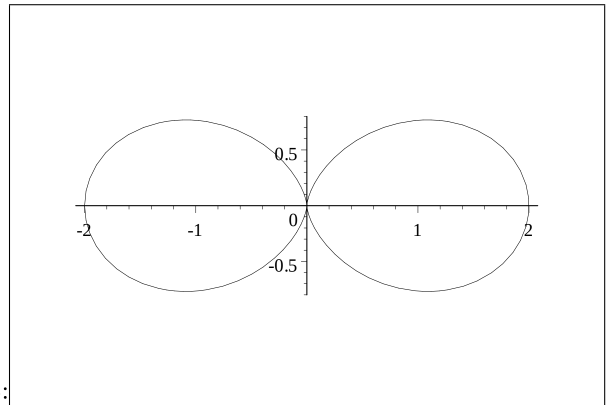
Naam:	....
Richting:	SCH / BIC / BIR
Studentenkaartnr.:	....

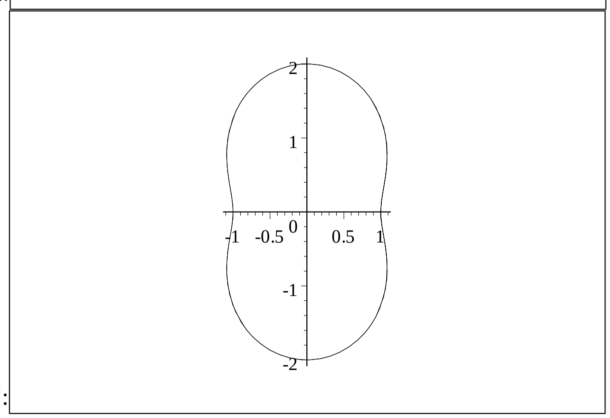
- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

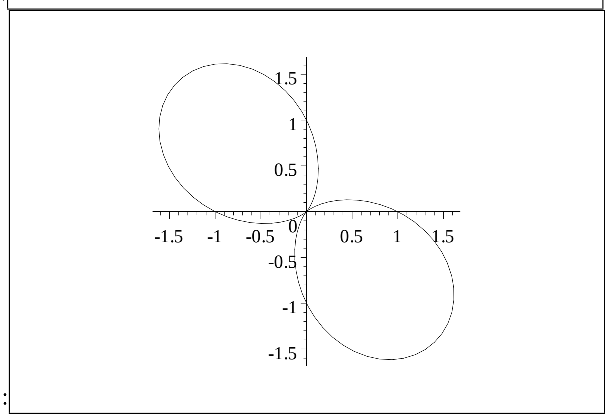
Eindscore:	/70

1. Ga na welke van de vier onderstaande grafieken de grafiek van de poolkromme $r = 1+\sin 2\theta$ is. Bereken van die welbewuste kromme de oppervlakte. Belangrijk: kies je integratiegrenzen juist! (Hint: kijk na wanneer $r = 0$)

A: 

B: 

C: 

D: 

/8

2. Bereken $\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+(\arcsin x)^3}$ op het interval $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ met de methode van Simpson tot op 6 cijfers na de komma (= fout $< 10^{-6}$). Je krijgt cadeau dat $\left\|f^{iv}\right\| \leq 40$. Bepaal eerst middels de fout de optimale n waarvoor de fout klein genoeg wordt. (De werkelijke waarde waarmee je moet vergelijken is $0.484\,153\,667\,1$)

$\boxed{\quad\quad /8}$

3. Los op:

$$y' + 3xy = xy^{3/2}$$

met als randvoorwaarde $y(0) = 1$

/9

4. Los op:

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$$

/9

5. Kabouter Wesley heeft in zijn paddestoel een illegale witloofplantage. De eerste van elke maand zaait hij plantjes, de laatste van de maand oogst en verkoopt hij. De zaken gaan goed en hij kan elke maand zijn aantal plantjes met een vast percentage opdrijven zodat het vier maanden na elkaar een meetkundige rij wordt. Op 1 januari begint hij te planten, op 31 januari kan hij dan oogsten en verkopen, en op 1 februari opnieuw planten, enzovoort. Op 30 april staan er 2160 plantjes in zijn paddestoel en op 1 mei heeft de kabouter in totaal al 6710 plantjes verkocht op de illegale kaboutermarkt. Hoeveel plantjes plant hij per maand méér dan de vorige maand, en met hoeveel plantjes is hij begonnen? Kabouter Wesley geeft ook nog als hint: als je van een bepaalde derdegraadsvergelijking de nulpunten moet zoeken, mag je dat doen met Newton–Raphson (maar als het lukt met Horner wordt dat zeker niet als fout aanzien!)

/8

6. Bereken $\operatorname{ch}\frac{1}{4}$ tot op 8 cijfers na de komma via de Taylorreeksen (die je moet opstellen!). Je mag gebruiken dat $\operatorname{sh}\frac{1}{4} \leq 0.3$.

/10

7. Zij $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^3 + 3y^2 + z}$, zij $a = (1, 1, 0)$ en zij $h = (2, 1, 3)$. Bereken $Df\,(a, h)$

/9

8. Zoek de extrema van de functie $f\,(x, y) = 1 + xy$ die boven de ellips $x^2 + 4y^2 = 1$ in het XY–vlak liggen.

$$F\,(x, y, \lambda) = \left(1 + xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)\right)$$

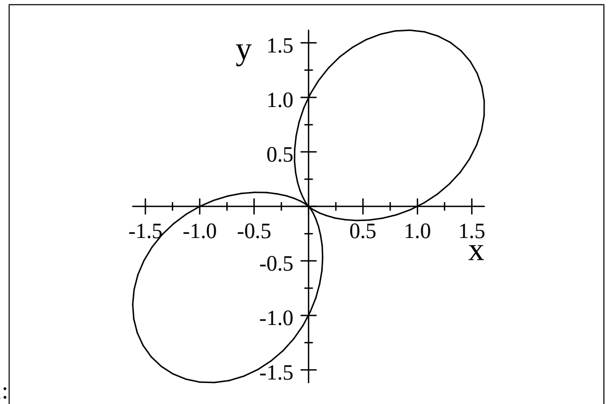
/9

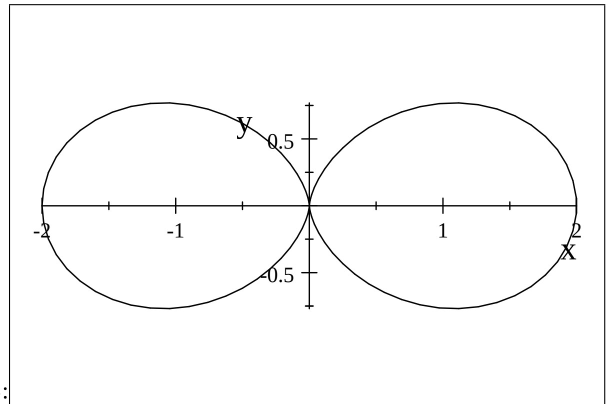
En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

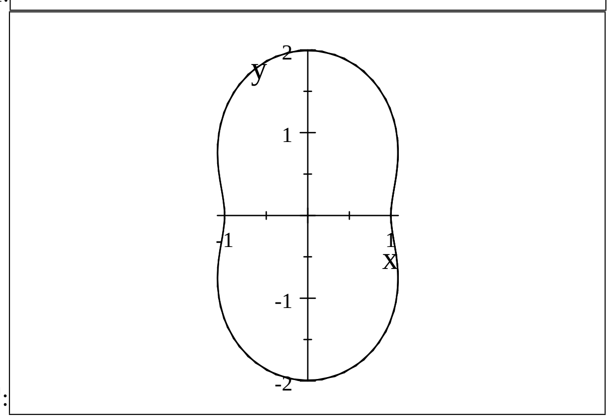
/70

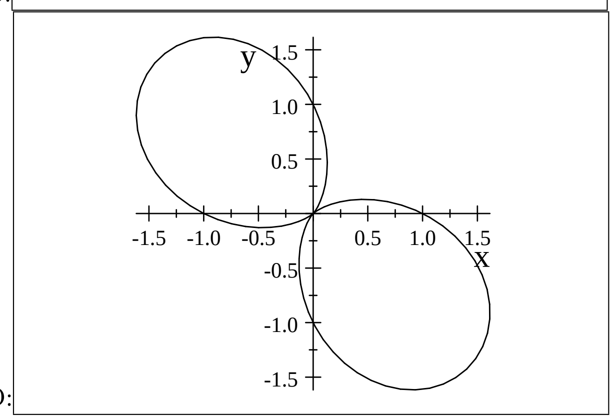
Oplossingen:

1. Ga na welke van de vier onderstaande grafieken de grafiek van de poolkromme $r = 1 + \sin 2\theta$ is. Bereken van die welbewuste kromme de oppervlakte. Belangrijk: kies je integratiegrenzen juist! (Hint: kijk na wanneer $r = 0$)

A: 

B: 

C: 

D: 

$r = 0 \Rightarrow 1 + \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = -1 \Leftrightarrow 2\theta = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$ het is tekening A

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sin 2\theta)^2 \, d\theta = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 + 2\sin 2\theta + \sin^2 2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 + 2\sin 2\theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{3}{2} + 2\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{3}{2}\pi$$

2. Bereken $\displaystyle\int f(x)\, dx = \int \frac{dx}{1 + (\arcsin x)^3}$ op het interval $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ met de methode van Simpson tot op 6 cijfers na de komma (= fout $< 10^{-6}$). Je krijgt cadeau dat $\left\| f^{iv} \right\| \leq 40$. Bepaal eerst middels de fout de optimale n waarvoor de fout klein genoeg wordt. (De werkelijke waarde waarmee je moet vergelijken is $0.484\,153\,667\,1$)

Fout $F(n) = \dfrac{40 \cdot \frac{1}{2}^5}{180n^4} = \dfrac{1}{144n^4}$

n	$F(n)$
2	4.3×10^{-4}
4	2.7×10^{-5}
6	5.4×10^{-6}
8	1.7×10^{-6}
10	6.9×10^{-7}

$\Rightarrow n = 10$

k	x_k	$f(x_k)$	w_k	$w_k f(x_k)$
0	0	1	1	1
1	0.05	0.999 874 859 2	4	3. 999 499 437
2	0.1	0.998 995 978 0	2	1. 997 991 956
3	0.15	0.996 598 108 5	4	3. 986 392 434
4	0.2	0.991 902 052 8	2	1. 983 804 106
5	0.25	0.984 123 185 0	4	3. 936 492 740
6	0.3	0.972 491 200 9	2	1. 944 982 402
7	0.35	0.956 280 754 3	4	3. 825 123 017
8	0.4	0.934 851 350 8	2	1. 869 702 702
9	0.45	0.907 692 971 8	4	3. 630 771 887
10	0.5	0.874 471 705 3	1	0.874 471 705 3
			30	29.049 232 39

$\Rightarrow S_{10} = \dfrac{\left(\sum\limits_{k=0}^{10} w_k f(x_k)\right)(b-a)}{3n} = \dfrac{29.049\,232\,39 \cdot \frac{1}{2}}{30} = 0.484\,153\,873\,2$

Werkelijke waarde $= \int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{1 + (\arcsin x)^3} = 0.484\,153\,667\,1$

Fout: $0.484\,153\,873\,2 - 0.484\,153\,667\,1 = 0.000\,000\,206\,1 = 0.000\,000\,206\,1$

3. Los op:

$$y' + 3xy = xy^{3/2}$$

met als randvoorwaarde $y(0) = 1$

$$\mu(y) = -\frac{1}{2}y^{-3/2}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}y^{-3/2}y' - \frac{3}{2}xy^{-1/2} = -\frac{1}{2}x$; een SO wordt gegeven door $y = 0$

$$u = y^{-1/2} \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}y^{-3/2}y'$$

$\Rightarrow u' - \frac{3}{2}xu = -\frac{1}{2}x$

$$\nu(x) = e^{\int -\frac{3x}{2}dx} = e^{-\frac{3}{4}x^2}$$

$\Rightarrow u'e^{-\frac{3}{4}x^2} - \frac{3}{2}xue^{-\frac{3}{4}x^2} = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{3}{4}x^2}$

$\Rightarrow \left(e^{-\frac{3}{4}x^2}u\right)' = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{3}{4}x^2}$

$\Rightarrow \left(e^{-\frac{3}{4}x^2}u\right) = \int -\frac{1}{2}xe^{-\frac{3}{4}x^2}dx$

$$t = -\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow dt = -\frac{3}{2}xdx$$

$$\Rightarrow \left(e^{-\frac{3}{4}x^2}u\right) = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}x^2} + c$$
$$\Rightarrow u = \frac{1}{3} + ce^{\frac{3}{4}x^2}$$
$$\Rightarrow y^{-1/2} = \frac{1}{3} + ce^{\frac{3}{4}x^2}$$
$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{3} + ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3} + ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)^2} = \frac{9}{\left(1 + ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \text{A.O.: } \begin{cases} y = \dfrac{9}{\left(1 + ce^{\frac{3}{4}x^2}\right)^2} \\ y = 0 \text{ S.O.} \end{cases}$$
$$(0,1) \in \text{opl} \Rightarrow 1 = \frac{9}{\left(1 + ce^{\frac{3}{4}0^2}\right)^2} \Rightarrow c \in \{-4, 2\}$$
$$\Rightarrow \text{P.O.: } y_{P1} = \frac{9}{\left(1 - 4e^{\frac{3}{4}0^2}\right)^2} \text{ en } y_{P1} = \frac{9}{\left(1 + 2e^{\frac{3}{4}0^2}\right)^2}$$

4. Los op:
$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$$
Eerst bekijken we $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}\dot{y} \\ y'' &= \frac{1}{x^2}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \left(\ddot{y} - \dot{y}\right) + 3\dot{y} + y = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$$
$$\text{KV: } t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t \in \left\{-1^{(2)}\right\}$$
$$\Rightarrow y(z) = C_1e^{-z} + C_2ze^{-z}$$
$$\Rightarrow y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}$$
We gebruiken de methode van de variatie van de parameters en stellen $y_p = u_1v_1 + u_2v_2$ met $u_1(x) = \frac{1}{x}$ en $u_2(x) = \frac{\ln x}{x}$
$$\Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{\ln x}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1-\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} \neq 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = x^3 \begin{vmatrix} 0 & \frac{\ln x}{x} \\ \frac{1}{x^3} & \frac{1-\ln x}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}\ln x \\ v_2' = x^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \int -\frac{1}{x}\ln x dx = -\frac{1}{2}\ln^2 x \\ v_2 = \int \frac{1}{x}dx = \ln x \end{cases}$$
$$\Rightarrow y_p = u_1v_1 + u_2v_2 = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x\right) + \frac{\ln x}{x}\ln x = \frac{\ln^2 x}{2x}$$
$$\Rightarrow y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x}$$

5. Kabouter Wesley heeft in zijn paddestoel een illegale witloofplantage. De eerste van elke maand zaait hij plantjes, de laatste van de maand oogst en verkoopt hij. De zaken gaan goed en hij kan elke maand zijn aantal plantjes met een vast percentage opdrijven zodat het vier maanden na elkaar een meetkundige rij wordt. Op 1 januari begint hij te planten, op 31 januari kan hij dan oogsten en verkopen, en op 1 februari opnieuw planten, enzovoort. Op 30 april staan er 2160 plantjes in zijn paddestoel en op 1 mei heeft de kabouter in totaal al 6710 plantjes verkocht op de illegale kaboutermarkt. Hoeveel plantjes plant hij per maand méér dan de vorige maand, en met hoeveel plantjes is hij begonnen? Kabouter Wesley geeft ook nog als hint: als je van een bepaalde derdegraadsvergelijking de nulpunten moet zoeken, mag je dat doen met Newton–Raphson (maar als het lukt met Horner wordt dat zeker niet als fout aanzien!)

   $x_1, x_1q, x_1q^2, x_1q^3$

   $$\begin{cases} s_4 = x_1 \dfrac{1-q^4}{1-q} \\ x_4 = x_1q^3 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 6710 = x_1 \dfrac{1-q^4}{1-q} \\ 2160 = x_1q^3 \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 6710 = \dfrac{2160}{q^3}\left(1+q+q^2+q^3\right) \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 6710q^3 = 2160\left(1+q+q^2+q^3\right) \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 671q^3 = 216\left(1+q+q^2+q^3\right) \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} 216\left(1+q+q^2+q^3\right) - 671q^3 = 0 \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} -455q^3 + 216q^2 + 216q + 216 = 0 \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} -\left(5q-6\right)\left(91q^2+66q+36\right) \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{6}{5} \\ x_1 = \dfrac{2160}{q^3} \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{6}{5} \\ x_1 = \dfrac{2160}{\left(\dfrac{6}{5}\right)^3} = 1250 \end{cases}$$

   Kabouter Wesley begon dus met 1250 plantjes en heeft elke maand 20 % meer geplant.

6. Bereken $\operatorname{ch}\dfrac{1}{4}$ tot op 8 cijfers na de komma. Je mag gebruiken dat $\operatorname{sh}\dfrac{1}{4} \leq 0.3$.
   De werkelijke waarde die we zoeken is op 15 cijfers na de komma 1.031 413 099 879 573
   $f(x) = \operatorname{ch} x$

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{ch} x \\ f'(x) = \operatorname{sh} x \\ f''(x) = \operatorname{ch} x \\ \ldots \\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{als} & n \text{ even} \\ \operatorname{sh} x & \text{als} & n \text{ oneven} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 1 \\ \ldots \\ f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{als} & n \text{ even} \\ 0 & \text{als} & n \text{ oneven} \end{cases} \end{cases}$$

Neem $x \in \mathbb{R}$ (in een omgeving van $x_0 = 0$, bijvoorbeeld $\mathbb{R}$ zelf)
$\Rightarrow \exists \xi \in]x \wedge 0, x \vee 0[$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$$

met $R_n(x) = \dfrac{\operatorname{sh} \xi x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Zowel in het geval als $x < 0$ dan als $x > 0$ is $|\operatorname{sh} \xi| \leq |\operatorname{sh} x|$

$\Rightarrow |R_n(x)| \leq |\operatorname{sh} x| \left| \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$

Dan geldt dat $\forall x \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. Immers, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ is convergent, dus gaat zijn algemene term naar 0.

n	$\dfrac{0.3 \left\vert \frac{1}{4} \right\vert^{2n+1}}{(2n+1)!}$
1	7.8×10^{-4}
2	2.4×10^{-6}
3	3.6×10^{-9}
4	3.2×10^{-12}

$$\Rightarrow \operatorname{ch} \frac{1}{4} \simeq 1 + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{6!} = 1.031\,413\,100$$

7. Zij $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^3 + 3y^2 + z}$, zij $a = (1, 1, 0)$ en zij $h = (2, 1, 3)$. Bereken $Df(a, h)$

$$Df(a, h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(1 + 2\lambda, 1 + \lambda, 3\lambda) - f(1, 1, 0)}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sqrt{4 + 15\lambda + 15\lambda^2 + 8\lambda^3} - 2}{\lambda}$$
$$\overset{(H)}{=} \lim_{\lambda \to 0} \frac{3\left(5 + 10\lambda + 8\lambda^2\right)}{2\sqrt{4 + 15\lambda + 15\lambda^2 + 8\lambda^3}} = \frac{15}{4}$$

8. Zoek de extrema van de functie $f(x, y) = 1 + xy$ die boven de ellips $x^2 + 4y^2 = 1$ in het XY–vlak liggen.

$$F(x, y, \lambda) = \left(1 + xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 + xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)\right) = y + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1 + xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)\right) = x + 8y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(1 + xy + \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)\right) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 2x\lambda = 0 \\ x + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x\lambda \\ x + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x\lambda \\ x + 8(-2x\lambda)\lambda = 0 \\ x^2 + 4(-2x\lambda)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x\lambda \\ x - 16x\lambda^2 = 0 \\ x^2 + 16x^2\lambda^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x\lambda \\ x\left(1 - 16\lambda^2\right) = 0 \\ x^2 + 16x^2\lambda^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

- $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ ligt niet op de kromme
- $\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right\}$
- $\lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right\}$

  Het gaat bovendien om een gesloten kromme (ellips), waarop een continue functie een minimum en een maximum moet bereiken.

  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ minimum

  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{5}{4} \Rightarrow$ maximum