Universiteit Antwerpen

Fysica I

Oplossingen oefeningen

Academiejaar 2017-2018

Wouter Van Werveke

Campus Drie Eiken, N0.09 (N1.03)

wouter.vanwerveke@uantwerpen.be

Vectoren

Oefening 1

Als $\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}$, dan geldt

$$|\vec{A}||\vec{C}|\cos\alpha = |\vec{B}||\vec{C}|\cos\beta$$
$$|\vec{A}|\cos\alpha = |\vec{B}|\cos\beta$$

met α (resp. β) de hoek tussen $\vec{A}$ (resp. $\vec{B}$) en $\vec{C}$. Voor notationele eenvoud spreken we af dat we de grootte van een vector $\vec{v}$ ook noteren met $v\equiv|\vec{v}|$. Uit de gegeven gelijkheid kunnen we dus enkel besluiten dat de groottes en richtingen van $\vec{A}$ en $\vec{B}$ moeten voldoen aan de voorwaarde

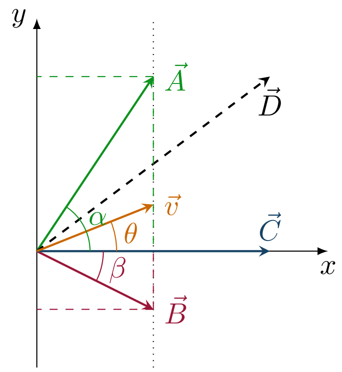
$$A\cos\alpha = B\cos\beta.$$

Dit betekent niet dat de vectoren zelf gelijk zijn aan elkaar. We kunnen immers oneindig veel paren (v,θ) vinden waarvoor geldt dat

$$v\cos\theta = A\cos\alpha. \tag{1}$$

Een andere manier om dit uit te drukken, is door op te merken dat de gelijkheid $\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}$ enkel de grootte van de projectie op $\vec{C}$ vastlegt. De component van $\vec{B}$ in de richting loodrecht op $\vec{C}$ is nog vrij te kiezen en hoeft niet gelijk te zijn aan de component van $\vec{A}$ in die richting.

Visueel kan je dit ook zien. Op de figuur hiernaast zijn vectoren $\vec{A}, \vec{B}$ en $\vec{C}$ getekend waarvoor de gegeven gelijkheid opgaat. Voor het gemak hebben we er een assenstelsel bijgetekend waarvan de x–as samenvalt met $\vec{C}$. Je kan onmiddellijk zien dat de gelijkheid opgaat door de loodrechte projecties van $\vec{A}$ en $\vec{B}$ op $\vec{C}$ te tekenen. Het scalair product $\vec{A}\cdot\vec{C}$ geeft immers de grootte van de projectie van $\vec{A}$ op $\vec{C}$. Nu: we kunnen eender welke vector ontbinden in componenten langs onderling loodrechte richtingen, dus andersom kunnen we ook vectoren definiëren door de componenten te geven langs die richtingen. De vector $\vec{D}$ op de tekening hiernaast is bvb. gedefinieerd door

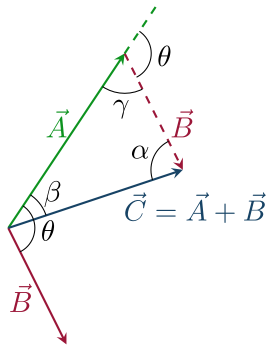


$$(D_x, D_y) = (C_x, A_y),$$

met andere woorden: $\vec{D}$ heeft dezelfde x-component als $\vec{C}$ en dezelfde y-component als $\vec{A}$.

De betekenis van de gegeven gelijkheid is dus dat één van de componenten wordt vastgelegd, maar we kunnen nog altijd spelen met de andere component(en). Aangezien de lengte daarvan eender welke waarde kan aannemen zonder de voorwaarde te schenden, zijn er dus oneindig veel vectoren $\vec{v}$ mogelijk die aan (1) voldoen.

Oefening 2



Je kan je waarschijnlijk grafisch al wel voorstellen dat dit enkel zal opgaan voor vectoren die gelijklopen. Voor twee algemene vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ kan je immers een driehoek vormen met zijden $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\vec{C} \equiv \vec{A}+\vec{B}$. De som van de lengtes van de eerste twee zijden is in het algemeen niet gelijk aan de lengte van de derde zijde.

Inderdaad, als we het scalair product van $\vec{C}$ met zichzelf berekenen (m.a.w. het kwadraat van de lengte $|\vec{C}|$), dan vinden we

$$\begin{aligned} C^2 &= (\vec{A}+\vec{B}) \cdot (\vec{A}+\vec{B}) \\ &= \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} \\ &= A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} \\ &= A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta \\ C^2 &= A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi-\gamma) \\ |\vec{A}+\vec{B}|^2 &= A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \end{aligned} \tag{2}$$

met $\theta = \pi - \gamma$ de hoek tussen $\vec{A}$ en $\vec{B}$ (en γ de hoek tegenover de zijde $\vec{C}$ van de driehoek). De gelijkheid

$$|\vec{A}+\vec{B}| = A + B$$

is dus enkel geldig als het rechterlid van (2) gelijk is aan $(A+B)^2$, ofwel:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta &= A^2 + B^2 + 2AB \\ 2AB\cos\theta &= 2AB \\ \Leftrightarrow \theta &= 0 \quad (+2n\pi) \end{aligned}$$

met andere woorden: als $\vec{A} \parallel \vec{B}$ en $\vec{A}\cdot\vec{B} > 0$. Een andere manier om dit uit te drukken, is:

$$\vec{B} = s\vec{A},$$

met $s > 0$.

Oefening 3

a) We weten dat het scalair product gelijk is aan

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= -1 + 2\cdot(-2) + 2 \\ &= -1 - 4 + 2 \\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= -3. \end{aligned}$$

b) De lengte van een vector is de vierkantswortel van het scalair product van de vector met zichzelf:

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1+4+4} = 3 \\ |\vec{B}| &= \sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

c) We kunnen het scalair product tussen twee vectoren ook berekenen als

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$$

met θ de hoek tussen de vectoren. Aangezien we het scalair product $\vec{A} \cdot \vec{B}$ en de lengtes A en B al uitgerekend hebben in a) en b), kunnen we θ eveneens snel bepalen:

$$\begin{aligned}\theta &= \text{Bgcos}\left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}\right) \\ \theta &= 114.09°.\end{aligned}$$

d) De eenheidsvector loodrecht op $\vec{A}$ en $\vec{B}$ is eenvoudig te vinden als we een vector $\vec{C}$ kennen die loodrecht staat op beide. Als we die vector vervolgens delen door zijn eigen lengte, dan is het resultaat een vector met lengte 1: een eenheidsvector. Gelukkig kunnen we, gegeven twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$, altijd een vector vinden die sowieso loodrecht staat op beiden, namelijk het vectorproduct van $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Je kan dit berekenen met de determinantmethode, maar zoals we hebben gezien, kan je vrij gemakkelijk de x, y en z componenten van het vectorproduct vinden als je cyclisch kan permuteren:

$$\begin{aligned}\vec{C} \equiv \vec{A} \times \vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k} \\ &= (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2))\,\hat{\imath} + (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1)\,\hat{\jmath} + (1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1))\,\hat{k} \\ \vec{C} &= 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}.\end{aligned}$$

De grootte van deze vector is

$$C = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

zodat de eenheidsvector langs de richting gedefinieerd door $\vec{C}$ gelijk is aan

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \frac{\vec{C}}{C} \\ &= \frac{3(2\hat{\imath} - \hat{\jmath})}{3\sqrt{5}} \\ \hat{C} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath}).\end{aligned}$$

Merk op dat we evengoed het vectorproduct $\vec{D} \equiv \vec{B} \times \vec{A}$ hadden kunnen berekenen om een vector loodrecht op $\vec{A}$ en $\vec{B}$ te bekomen. Deze vector loopt langs dezelfde lijn als $\vec{C}$, maar in de tegenovergestelde richting. ($\vec{D} = -\vec{C}$)

Oefening 4

In deze oefening krijgen we te maken met een *vectorfunctie*, d.i. een functie die als output voor een gegeven input geen getal geeft maar een vector. Dit in contrast met een scalaire functie, waar we een scalaire grootheid (een getal) als output krijgen voor een gegeven input. Binnen een orthogonaal assenstelsel (ééntje met onderling loodrechte assen) kan je een vectorfunctie gewoon zien als een verzameling scalaire functies, één voor elke component van de outputvector.

Het afleiden van een vectorfunctie gebeurt dan ook op exact dezelfde manier als het afleiden van een scalaire functie: je leidt gewoon elk van de componenten van de outputvector af. Zo vinden we hier:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}(t) = 2at\,\hat{\imath} + b\,\hat{\jmath} + 3ct^2\,\hat{k}.$$

Dat de gevraagde gelijkheid niet opgaat, kunnen we in het algemeen bewijzen. De tijdsafgeleide van de grootte van een vector $\vec{A}(t)$ is

$$\frac{\mathrm{d}|\vec{A}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

De grootheid onder de wortel $(\vec{A}\cdot\vec{A})$ is een scalair, zodat we gewoon de kettingregel kunnen gebruiken zoals we gewend zijn voor scalaire functies $f(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{f(t)} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}.$$

Hiermee vinden we:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}|\vec{A}|}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) \\
&= \frac{1}{2|\vec{A}|}2\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}|\vec{A}|}{\mathrm{d}t} &= \hat{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

met $\hat{A}$ de eenheidsvector langs de richting gedefinieerd door $\vec{A}$. Het rechterlid is enkel gelijk aan

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|$$

als $\hat{A}$ evenwijdig is met $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t$, immers:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= |\hat{A}|\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|\cos\theta \\
\hat{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right|\cos\theta
\end{aligned}$$

met $|\hat{A}| = 1$ en θ de hoek tussen $\hat{A}$ en $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t$. Dus geldt

$$\frac{\mathrm{d}|\vec{A}|}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{3}$$

als en slechts als $\cos\theta = 1$, ofwel $\theta = 0$. Dit betekent dat de vector $\vec{A}$ evenwijdig is aan zijn tijdsafgeleide. Indien $\vec{A}$ de positie van een puntdeeltje voorstelde, zou dit een rechtlijnige beweging impliceren.

In dit specifieke geval kunnen we het ook expliciet uitrekenen. Je vindt

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2t^4 + b^2t^2 + c^2t^6}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}|\vec{A}|}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2t^3 + b^2t + 2c^2t^5}{\sqrt{a^2t^4 + b^2t^2 + c^2t^6}}$$

en

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{4a^2t^3 + b^2 + 9c^2t^4}$$

wat duidelijk niet gelijk is aan elkaar.

Oefening 5 (♠)

De tijdsafgeleide van

$$\vec{A}(t) = R\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + R\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} + P\,\hat{k}$$

valt ook hier weer te berekenen door eenvoudigweg de verschillende componenten af te leiden:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath}.$$

Het vectorproduct van de vector $\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}$ met $\vec{A}(t)$ is gelijk aan

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \times \vec{A} &= (\omega_y A_z - \omega_z A_y)\,\hat{\imath} + (\omega_z A_x - \omega_x A_z)\,\hat{\jmath} + (\omega_x A_y - \omega_y A_x)\,\hat{k} \\
&= -\omega_z A_y\,\hat{\imath} + \omega_z A_x\,\hat{\jmath} \\
&= -\omega R\sin(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} \\
\vec{\omega} \times \vec{A} &\overset{!}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Extra oefening (♠♠)

In de lessen wiskunde zal je zien dat elke lineaire bewerking op vectoren kan geschreven worden als een matrixbewerking. Kan je, gegeven een vector $\vec{A}$, een matrix $M_{\vec{A}}$ vinden zodat voor elke vector $\vec{B}$ geldt dat

$$\vec{A} \times \vec{B} = M_{\vec{A}}\vec{B}\ ?$$

Wat valt je op aan deze matrix? En aan de determinant ervan?

Oplossing

Om deze vraag op te lossen, gaan we beide leden van de gegeven vergelijking uitschrijven. Daarvoor definiëren we $M_{\vec{A}}$ als een algemene matrix:

$$M_{\vec{A}} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$$

Het linkerlid levert volgende vector op:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{k}.$$

Het rechterlid levert ook een vector op, gegeven door

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx}B_x + M_{xy}B_y + M_{xz}B_z \\ M_{yx}B_x + M_{yy}B_y + M_{yz}B_z \\ M_{zx}B_x + M_{zy}B_y + M_{zz}B_z \end{pmatrix}.$$

De vergelijking klopt alleen als deze twee vectoren gelijk zijn aan elkaar, of met andere woorden als hun componenten gelijk zijn:

$$\begin{cases} M_{xx}B_x + M_{xy}B_y + M_{xz}B_z = A_y B_z - A_z B_y \\ M_{yx}B_x + M_{yy}B_y + M_{yz}B_z = A_z B_x - A_x B_z \\ M_{zx}B_x + M_{zy}B_y + M_{zz}B_z = A_x B_y - A_y B_x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_{xx} = 0, & M_{xy} = -A_z, & M_{xz} = A_y, \\ M_{yx} = A_z, & M_{yy} = 0, & M_{yz} = -A_x, \\ M_{zx} = A_y, & M_{zy} = -A_x, & M_{zz} = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_{\vec{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{pmatrix}.$$

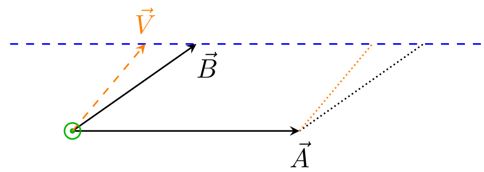
Dit is een antisymmetrische matrix: $M_{ij} = -M_{ji}$. De determinant is gelijk aan

$$\begin{aligned} \det M_{\vec{A}} &= \begin{vmatrix} 0 & -A_z & A_y \\ A_z & 0 & -A_x \\ -A_y & A_x & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-A_z)(-A_x)(-A_y) + (A_y)(A_z)(A_x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dit betekent dat de inverse matrix $M_{\vec{A}}^{-1}$ niet bestaat. Met andere woorden: er bestaat geen matrix $M_{\vec{A}}^{-1}$ waarvoor

$$M_{\vec{A}}^{-1} M_{\vec{A}} = \mathbb{I},$$

met $\mathbb{I}$ de eenheidsmatrix. Er bestaat dus geen bewerking die het effect van het vectorproduct met $\vec{A}$ kan omkeren. Dit is logisch: $\vec{A} \times \vec{B}$ geeft als output een vector $\vec{C}$ loodrecht op $\vec{A}$ en $\vec{B}$, met grootte $AB\sin\theta$, waarbij θ de hoek is tussen $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Gegeven $\vec{A}$ en $\vec{C}$, kan je niet op unieke wijze $\vec{B}$ terugvinden.



Figuur 1: *Alle vectoren $\vec{V}$ met eindpunten op de blauwe stippellijn (evenwijdig met $\vec{A}$) geven hetzelfde resultaat wanneer het vectorproduct met $\vec{A}$ genomen wordt. Grafisch kan je dit snel zien: het resultaat zal uiteraard altijd loodrecht staan op zowel $\vec{A}$ als $\vec{V}$ en de grootte ervan wordt gegeven door de oppervlakte van het parallellogram gedefinieerd door $\vec{A}$ en $\vec{V}$. Deze oppervlakte blijft altijd dezelfde voor vectoren met eindpunten op de blauwe stippellijn. Inderdaad: als je van $\vec{B}$ naar $\vec{V}$ overschakelt, is het stukje oppervlakte dat je rechts verliest exact gelijk aan het stukje oppervlakte dat je links bijkrijgt.*

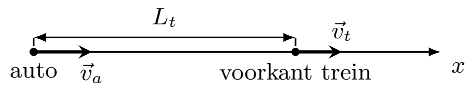
Inderdaad: als je enkel $\vec{A}$ en $\vec{C}$ kent, weet je alleen dat $\vec{B}$ een vector is in het vlak loodrecht op $\vec{C}$. Elk van de vectoren $\vec{V}_{\vec{C}}$ in dat vlak levert immers een vector langs dezelfde richting als $\vec{C}$ wanneer je het vectorproduct met $\vec{A}$ neemt. De grootte van het resultaat kan je ook altijd matchen met $\vec{C}$ door $|\vec{V}_{\vec{C}}|$ en de hoek θ tussen $\vec{A}$ en $\vec{V}_{\vec{C}}$ gepast te kiezen. Figuur 1 toont grafisch hoe dit in z'n werk gaat.

Hoofdstukken 2 & 3 (Kinematica)

Oefening 1 (2.18)

Om de posities van de trein en de auto te vergelijken hebben we een coördinaatas nodig natuurlijk. We kiezen het nulpunt van onze as vast aan de grond en zo dat het samenvalt met de positie van de auto op tijdstip $t = 0$. (Dit is ook de positie van de achterkant van de trein op dat tijdstip.) De tekening hieronder toont een schets van deze beginsituatie.

Situatie op $t = 0$:



a) De posities van de auto en de trein zijn op onze coördinaatas gegeven door

$$\begin{aligned} x_a(t) &= v_a t \\ x_t(t) &= L_t + v_t t. \end{aligned}$$

We weten niet welke afstand de auto in het totaal moet afleggen voor hij de trein heeft ingehaald (zie vraag b)), maar we weten wel dat de posities van auto en trein gelijk zullen zijn op het moment dat de auto de trein inhaalt. Dat moment noemen we $t = T$ en vinden we dus door $x_a(T) = x_t(T)$ te stellen:

$$\begin{aligned} v_a T &= L_t + v_t T \\ (v_a - v_t)T &= L_t \\ T &= \frac{L_t}{v_a - v_t} = 3\,\mathrm{min}\,18\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Een andere manier om hetzelfde te bekomen, is door het nulpunt van je coördinaatas niet vast op de beginpositie van de auto te kiezen, maar het nulpunt te laten meebewegen met de achterkant van de trein. In deze keuze is de snelheid van de auto gelijk aan $v'_a = v_a - v_t$ en die van de trein $v'_t = 0$.[1] In dit assenstelsel is de afstand $\Delta x'_a$ die de auto moet afleggen gewoon gelijk aan L_t, en hij legt die afstand af aan een snelheid v'_a. De tijd T die hij daarvoor nodig heeft, is dus

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x'_a}{v'_a} \\ T &= \frac{L_t}{v_a - v_t}, \end{aligned}$$

wat we inderdaad eerder ook vonden.

b) De afstand die de auto (ten opzichte van de grond) heeft afgelegd tussen $t = 0$ en $t = T$, is in ons eerste assenstelsel eenvoudig te vinden:

$$\begin{aligned} \Delta x_a &= x_a(T) - x_a(0) \\ &= v_a T - 0 \\ \Delta x_a &= 5225\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

[1] Hopelijk toch, anders is er waarschijnlijk één van volgende twee scenario's verwezenlijkt: ofwel zijn 1 of meer wagons afgekoppeld geraakt, ofwel is de trein ergens tegen gereden en staat de voorkant al stil maar heeft de achterkant de informatie over de crash nog niet ontvangen.

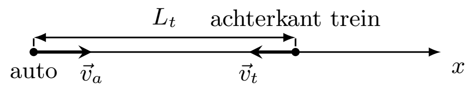
Als we de andere keuze van as hadden gemaakt, hebben we iets meer werk. De afstand die de auto t.o.v. de grond afgelegd heeft, is gelijk aan de afstand die hij heeft afgelegd t.o.v. de voorkant van de trein *plus* de afstand die de voorkant van de trein heeft afgelegd t.o.v. de grond:

$$\begin{aligned}\Delta x_a &= \Delta x'_a + \Delta x_t \\ &= L_t + v_t T \\ \Delta x_a &= 5225\,\text{m}.\end{aligned}$$

We vinden uiteraard opnieuw hetzelfde antwoord.

c) In dit geval verandert onze tekening een beetje. De pijlen die de snelheidsvectoren van auto en trein voorstellen, moeten nu in tegengestelde richtingen wijzen. Bovendien komt de auto nu eerst de voorkant van de trein tegen, en rijdt hij richting de achterkant van de trein. We krijgen dus iets dat er ongeveer als volgt uitziet:

Situatie op $t = 0$:



Het nulpunt van onze coördinaatas kiezen we opnieuw vast aan het aardoppervlak, in de beginpositie van de auto. We hebben dus hetzelfde assenstelsel als voorheen, en wiskundig is het enige dat we dan moeten veranderen het teken van de snelheid van de trein: $\vec{v}_t$ is nu gelijk aan $-v_t\,\hat{\imath}$ in plaats van $+v_t\,\hat{\imath}$. Als we deze tekenverandering doorvoeren in onze eerdere antwoorden, dan vinden we

$$\begin{aligned}T &= \frac{L_t}{v_a + v_t} &&= 23.3\,\text{s} \\ \Delta x_a &= v_a T &&= 615\,\text{m}.\end{aligned}$$

Uiteraard kunnen we ook nu weer het nulpunt van het assenstelsel vast aan de trein kiezen, ditmaal ter hoogte van de voorkant, zodat het net als eerder op $t = 0$ samenvalt met de positie van de auto. Om T te berekenen merken we op dat de af te leggen afstand in dit assenstelsel opnieuw gewoon L_t bedraagt, en dat de auto in dit stelsel een snelheid $v_a + v_t$ heeft:

$$\begin{aligned}T &= \frac{\Delta x'_a}{v'_a} \\ T &= \frac{L_t}{v_a + v_t}.\end{aligned}$$

Om Δx_a te bepalen, gaan we ditmaal gebruiken dat de afgelegde afstand gelijk is aan de afstand die de auto heeft afgelegd min de (grootte van de) afstand die de trein heeft afgelegd ten opzichte van de grond. Een andere manier om dit te zien is dat we nog steeds de afgelegde afstanden optellen, maar dat de afstand die de trein t.o.v. de grond heeft afgelegd negatief is. De trein beweegt immers tegengesteld aan de positieve x-richting.

$$\begin{aligned}\Delta x_a &= \Delta x'_a + \Delta x_t \\ &= L_t - v_t T \\ \Delta x_a &= 615\,\text{m}.\end{aligned}$$

De twee assenstelsels die we hierboven zijn tegengekomen, verhouden zich tot elkaar via een zogenaamde *Galileitransformatie*. Dit betekent dat het ene assenstelsel simpelweg aan een constante snelheid beweegt ten opzichte van het andere assenstelsel. Zulke assenstelsels zijn volkomen equivalent, dus er is geen enkel fysisch verschil tussen berekeningen doen in het ene stelsel tegenover berekeningen doen in het andere stelsel. Dit is ook de oorzaak voor het fenomeen dat je soms meemaakt op de trein, waarbij je niet kan onderscheiden of jouw trein aan het bewegen is of de trein ernaast.

De brave mensen van Mythbusters hebben hier zelfs een experiment mee gedaan, dat je hier kan bekijken. Wat ze doen, is het volgende: bovenop een wagen die in een bepaalde richting rijdt aan een snelheid v ten opzichte van de grond, staat een kanon gemonteerd dat een bal in de tegengestelde richting kan afvuren. Ze stellen het kanon zo in dat de bal een beginsnelheid ten opzichte van de wagen meekrijgt die exact v is. Wanneer ze het kanon dan afvuren terwijl de wagen aan het rijden is, is de snelheid van de bal ten opzichte van de grond $v - v = 0$ en valt hij dus gewoon ter plekke omlaag.

Oefening 2 (2.36)

De tijd tussen het moment waarop het licht op rood springt (noem dit $t = 0$) en het moment waarop de auto stilstaat (noem dit $t = T$), bestaat uit twee fysisch verschillende regimes: de chauffeur heeft immers $0.2\,\mathrm{s}$ nodig om te reageren op het verspringende licht. Tijdens die tijd remt hij nog niet en is dus $a = 0$. Daarna remt hij met constante versnelling $a = 3.65\,\mathrm{m/s}$. Noem het tijdstip waarop de chauffeur begint te remmen $t = t_1$.

We moeten de positie van de auto (ten opzichte van de grond) opvolgen, dus hebben we een assenstelsel nodig (vast aan de grond). De keuze van de oorsprong valt vrij te kiezen, maar ik neem die hier ter hoogte van de positie van de auto op $t = 0$. Ik weet dan dat de eindpositie van de auto in mijn stelsel kleiner dan $20\,\mathrm{m}$ moet zijn als de chauffeur op tijd gestopt wilt geraken. In dit assenstelsel is de positie van de auto tussen $t = 0$ en $t = t_1$ gegeven door

$$x(0 < t < t_1) = v_0 t.$$

Op $t = t_1$ begint de chauffeur te remmen. De auto bevindt zich dan op $x = x_1 = v_0 t_1$ en heeft nog steeds dezelfde snelheid v_0. De positie van de auto wordt in het regime $t > t_1$ dus gegeven door

$$\begin{aligned} x(t > t_1) &= -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_1 \\ &= -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + v_0 t_1 \\ x(t > t_1) &= -\frac{a}{2}t^2 + v_0(t + t_1), \end{aligned}$$

waarbij het minteken voor de versnelling natuurlijk afkomstig is van het feit dat hij aan het remmen is: de versnelling wijst in de richting tegengesteld aan de verplaatsing. De snelheid van de auto is per definitie gelijk aan de tijdsafgeleide van zijn positie en wordt in dit regime dus gegeven door:

$$\begin{aligned} v(t > t_1) &= \frac{\partial x(t > t_1)}{\partial t} \\ v(t > t_1) &= -at + v_0. \end{aligned}$$

De auto staat stil als $v = 0$, dus als

$$\begin{aligned} aT &= v_0 \\ T &= \frac{v_0}{a}. \end{aligned}$$

Op dit moment bevindt de auto zich op

$$\begin{aligned} x(T) &= -\frac{a}{2}T^2 + v_0(T + t_1) \\ &= -\frac{a}{2}\frac{v_0^2}{a^2} + v_0(\frac{v_0}{a} + t_1) \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} + \frac{v_0^2}{a} + v_0 t_1 \\ &= \frac{v_0^2}{2a} + v_0 t_1 \\ x(T) &= 48.5\,\mathrm{m} > 20\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Aangezien dit groter is dan de afstand die de chauffeur nog heeft tot aan het verkeerslicht, zal hij dus niet op tijd gestopt geraken.

Als je de dingen liever opsplitst, kan je deze oefening ook oplossen door eerst de afstand te berekenen die de auto aflegt terwijl de chauffeur nog niet remt, $\Delta x_1 = v_0 t_1 = 3.62\,\mathrm{m}$. Vervolgens kan je gebruikmaken van volgende formule voor constante versnellingen om te berekenen welke afstand de auto nog aflegt terwijl de chauffeur remt:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x_2,$$

waarbij $a_x = -a$, $v = 0$ en dus

$$\Delta x_2 = \frac{v_0^2}{2a} = 44.88$$

De twee afstanden optellen geeft dan uiteraard opnieuw

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{v_0^2}{2a} + v_0 t_1 = 48.5\,\mathrm{m}$$

met dezelfde conclusie.

Oefening 3 (2.65)

De tijd $t = 3.4\,\mathrm{s}$ tussen het loslaten van de steen en het horen van het plonsgeluid, bestaat uit twee stukken: de steen doet er een tijd t_1 over om van boven tot helemaal beneden te vallen en daarna doet het geluid van de plons er een tijd t_2 over om van beneden terug tot boven te reizen. De snelheid van het geluid noteren we met $v_g = 343\,\mathrm{m/s}$.

We kiezen een verticale coördinaatas met nulpunt ter hoogte van het zeeniveau. De posities van de steen en van het golffront zijn dan gegeven door

$$\begin{aligned} z_s(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + h \\ z_g(t) &= v_g t, \end{aligned}$$

waarbij $t = 0$ voor de steen overeenkomt met het moment dat de steen wordt losgelaten en voor het golffront met het moment dat het geluid aan zijn reis omhoog begint. Door $z_s(t_1) = 0$ te stellen, vinden we t_1:

$$t_1^2 = \frac{2h}{g}.$$

Door $z_g(t_2) = h$ te stellen, vinden we t_2:

$$t_2 = \frac{h}{v_g}.$$

We kennen de totale tijd $t = t_1 + t_2$, maar om h te vinden, is het gemakkelijker om t_1 te beschouwen:

$$\begin{aligned}
t_1 &= t - t_2 \\
t_1^2 &= (t - t_2)^2 \\
\frac{2h}{g} &= \left(t - \frac{h}{v_g}\right)^2 \\
\frac{2h}{g} &= t^2 + \left(\frac{h}{v_g}\right)^2 - \frac{2h}{v_g}t \\
0 &= \frac{h^2}{v_g^2} - \frac{2t}{v_g}h - \frac{2h}{g} + t^2 \\
0 &= h^2 - v_g\left(2t + \frac{2v_g}{g}\right)h + v_g^2 t^2.
\end{aligned}$$

Dit is een kwadratische vergelijking in h met als discriminant

$$\begin{aligned}
D &= 4t^2 v_g^2 + \frac{4v_g^4}{g^2} + \frac{8v_g^3 t}{g} - 4v_g^2 t^2 \\
&= \frac{4v_g^4}{g^2} + \frac{8v_g^3 t}{g} \\
&= \frac{4v_g^2}{g^2}\left(v_g^2 + 2g v_g t\right) \\
&= \frac{4v_g^2}{g^2}\left[(v_g + gt)^2 - g^2 t^2\right].
\end{aligned}$$

De hoogte van de klif is dus gelijk aan

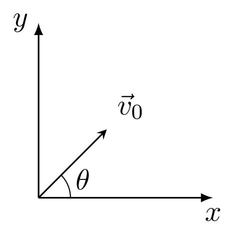
$$\begin{aligned}
h &= \frac{\frac{2v_g}{g}(gt + v_g) \pm \sqrt{D}}{2} \\
&= \frac{\frac{2v_g}{g}(gt + v_g) \pm \frac{2v_g}{g}\sqrt{(v_g + gt)^2 - g^2t^2}}{2} \\
h &= \frac{v_g(gt + v_g) \pm v_g\sqrt{(v_g + gt)^2 - g^2t^2}}{g} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} h = \cancel{25\,828}\,\mathrm{m} \\ \text{OF} \\ h = 51.7\,\mathrm{m}. \end{cases}
\end{aligned}$$

De grootste van de twee oplossingen kunnen we verwerpen, daarvoor geeft

$$t_1 = t - t_2$$
$$t_1 = t - \frac{h}{v_g}$$

immers een negatief getal voor de valtijd van de steen, hetgeen uiteraard onfysisch is. De klif is dus 51.7 m hoog.

Oefening 4 (3.40)



De sprinkhaan voert een tweedimensionale beweging uit. Om die beweging te kunnen beschrijven, hebben we opnieuw een assenstelsel nodig. We kiezen de oorsprong van onze assen in de beginpositie van de sprinkhaan, vóór zijn sprong. De x-as kiezen we horizontaal en de y-as verticaal omhoog, zoals op de tekening hiernaast, waarbij $\theta = 45°$. De sprinkhaan ondervindt een constante versnelling $\vec{a} = \vec{g}$, dus de positie van de sprinkhaan wordt ten alle tijden gegeven door

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

waarbij $\vec{v}_0$ en $\vec{r}_0$ respectievelijk de beginsnelheid en de beginpositie van de sprinkhaan zijn. De snelheid van de sprinkhaan als functie van de tijd wordt bovendien gegeven door

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0.$$

We kunnen deze twee vectorvergelijkingen omzetten in vier scalaire vergelijkingen door de vectoren te ontbinden in hun componenten langs x en y. De versnelling $\vec{g} = -g\hat{\jmath}$ heeft enkel een y-component, de beginsnelheid heeft zowel een x- als een y-component en $\vec{r}_0 = \vec{0}$, dus we hebben volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta \, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \, t \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta. \end{cases}$$

Door op te merken dat de verticale snelheid van de sprinkhaan halverwege zijn sprong (op het hoogtepunt van zijn paraboolbaan) nul is, kunnen we bepalen hoelang zijn sprong duurt:

$$v_y(t) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t = \frac{v_0}{g}\sin\theta \equiv T/2.$$

De duur van zijn sprong bedraagt dus $T = (v_0/g)\sin\theta$. De horizontale afstand die hij op die tijd heeft afgelegd, is $R = 1.0$ m. Door R en T in te vullen in de vergelijking voor $x(t)$, vinden we v_0:

$$\begin{aligned}
R &= v_0 \cos\theta\, T \\
R &= v_0 \cos\theta \, \frac{2v_0}{g} \sin\theta \\
v_0^2 &= \frac{gR}{2\sin\theta\cos\theta} \\
v_0 &= \sqrt{\frac{gR}{2\sin\theta\cos\theta}}.
\end{aligned}$$

De horizontale snelheid van de sprinkhaan is dan

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\
&= \cos\theta \sqrt{\frac{gR}{2\sin\theta\cos\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{gR\cos\theta}{2\sin\theta}} \\
v_x &= \sqrt{\frac{gR}{2\tan\theta}} = 2.21\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Je kan deze oefening ook sneller oplossen door rechtstreeks gebruik te maken van de formule voor de reikwijdte R die in de theorie werd afgeleid:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \\
R &= \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta\cos\theta \\
v_0 &= \sqrt{\frac{gR}{2\sin\theta\cos\theta}}.
\end{aligned}$$

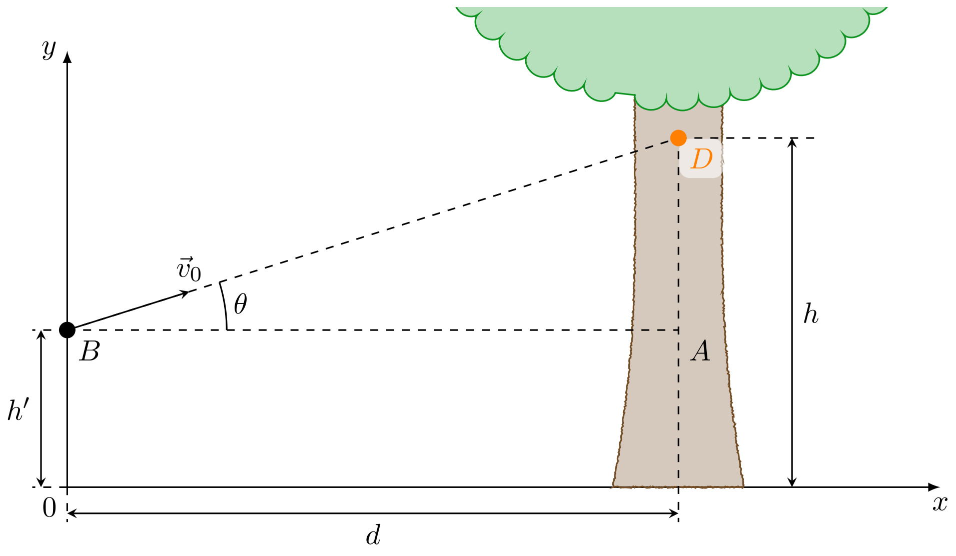
Als je dit dan zoals hierboven in de uitdrukking voor $v_x(t)$ invult, vind je hetzelfde antwoord terug. Het is hier wel belangrijk om op te merken dat deze aanpak alleen gerechtigd is voor projectielbeweging waarbij de startpositie en de eindpositie zich op dezelfde hoogte bevinden (hetzelfde y-coördinaat). Als dit niet het geval is, kan je de bovenstaande uitdrukking voor de reikwijdte niet gebruiken en moet je de algemenere aanpak hanteren.

Oefening 5 (3.49)

Figuur 2 toont de situatie. Laten we de jongen met de katapult Barack noemen, en de jongen in de boom Donald. Donald ziet Barack aanleggen en wilt vermijden dat het water van de waterballon zijn oranje spraytan oplost: als hij zich laat vallen, zo denkt hij, zal de waterballon hem niet raken maar over hem heen vliegen. We zullen zien dat Donald zich daar danig in vergist.

Donald wordt door de ballon geraakt indien er een tijdstip bestaat waarop zijn positie en die van de ballon gelijk zijn. We kiezen ons assenstelsel zoals getekend in de figuur en laten $t = 0$ samenvallen met het moment waarop de ballon wordt afgevuurd en Donald zich laat vallen uit de boom. De positie van de ballon wordt in dit stelsel gegeven door

$$\begin{aligned}
x_B(t) &= v_0 \cos\theta\, t \\
y_B(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + h'.
\end{aligned}$$



Figuur 2: *Situatieschets. Barack staat op het punt zijn waterballon richting Donald af te schieten.*

De positie van Donald wordt gegeven door

$$x_D(t) = d$$
$$y_D(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Noem het tijdstip waarop de ballon Donald bereikt $t = t_1$:

$$x_B(t_1) = v_0 \cos\theta \, t_1 = d$$
$$t_1 = \frac{d}{v_0 \cos\theta}.$$

Op dat moment is de hoogte van de ballon gelijk aan

$$y_B(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \sin\theta \, t_1 + h'$$
$$y_B(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2 + d\tan\theta + h'.$$

De hoogte van Donald is op datzelfde moment gelijk aan

$$y_D(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + h$$
$$y_D(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2 + h.$$

Deze twee zijn aan elkaar gelijk, onafhankelijk van de precieze waarden van elke parameter. Inderdaad:

$$\cancel{-\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2} + d\tan\theta + h' \stackrel{?}{=} \cancel{-\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2} + h$$
$$d\tan\theta + h' \stackrel{?}{=} h$$

Uit de figuur wordt duidelijk dat dit inderdaad een gelijkheid is: de eerste term in het linkerlid is gelijk aan de rechthoekszijde tegenover de hoek θ in de driehoek gevormd door de punten B, D en A. Samen met h' is dit inderdaad gelijk aan h.

Oefening 6 (3.71)

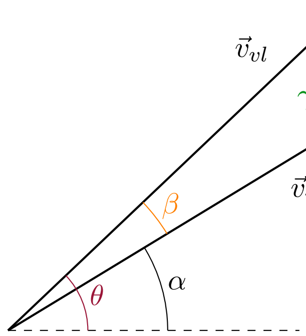
We kiezen een assenstelsel met de eerste luchthaven in het nulpunt, een x-as die naar het oosten wijst en een y-as die naar het noorden wijst. Dan weten we dat de verbindingslijn tussen de twee luchthavens een hoek $\alpha = 38°$ maakt met de x-as. We weten ook dat de wind met een snelheid $|\vec{v}_{\ell g}| = 72\,\text{km/h}$ vanuit het noorden waait. Dit is de snelheid van de lucht ten opzichte van de grond, vandaar het subscript. Ten slotte weten we dat de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de lucht een grootte $|\vec{v}_{v\ell}| = 580\,\text{km/h}$ heeft. De snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de grond kunnen we nu vinden door de vectorsom $\vec{v}_{vg} = \vec{v}_{v\ell} + \vec{v}_{\ell g}$ te bepalen.

a) De vraag is hier welke hoek θ met de horizontale $\vec{v}_{v\ell}$ moet maken opdat de snelheid ten opzichte van de grond $\vec{v}_{vg}$ gericht is langs de verbindingslijn tussen de luchthavens, ofwel: opdat $\vec{v}_{vg}$ een hoek α zou maken met de x-as. Laat ons deze vector alvast eens uitschrijven in componenten langs x en y:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{vg} &= \vec{v}_{v\ell} + \vec{v}_{\ell g}\\
\vec{v}_{vg} &= v_{v\ell}\cos\theta\,\hat{\imath} + v_{v\ell}\sin\theta\,\hat{\jmath} - v_{\ell g}\,\hat{\jmath}\\
\vec{v}_{vg} &= v_{v\ell}\cos\theta\,\hat{\imath} + (v_{v\ell}\sin\theta - v_{\ell g})\,\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Er zijn twee manieren om deze vraag op te lossen: een brute kracht benadering en een geometrische benadering. De brute kracht benadering heeft als voordeel dat ze simpel is qua inzicht, maar als nadeel dat ze lange, ingewikkelde berekeningen inhoudt. De geometrische benadering vereist een zeker geometrisch inzicht, maar is dan weer bijzonder eenvoudig wat de berekeningen betreft.

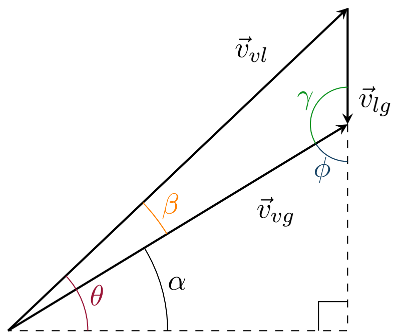
Geometrische benadering Een tekening maken is bij dit soort vragen heel nuttig. Als we de hoek tussen $\vec{v}_{vg}$ en $\vec{v}_{vl}$ met β benoemen, is dit de situatie:



We kennen hierin α, v_{vl} en v_{lg}, en als we β kunnen vinden, kennen we ook θ. Laat ons dus de sinusregel gebruiken in deze driehoek:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\beta}{v_{lg}} &= \frac{\sin\gamma}{v_{vl}}\\
\beta &= \operatorname{Bgsin}\left[\frac{v_{lg}}{v_{vl}}\sin\gamma\right].
\end{aligned}$$

De enige onbekende in het rechterlid is γ. Maar als we $\vec{v}_{lg}$ doortrekken tot aan de horizontale (zie figuur hieronder), dan zien we een rechthoekige driehoek verschijnen.



Aangezien de som van de hoeken in die driehoek π rad moet bedragen, betekent dit dat de hoek ϕ gelijk is aan $\pi/2 - \alpha$. Hieruit volgt dat

$$\gamma = \pi - \phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

en dus

$$\beta = \text{Bgsin}\left[\frac{v_{lg}}{v_{vl}} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 5.6^\circ$$
$$\Rightarrow \theta = 43.6^\circ.$$

Brute kracht benadering We eisen dat $\vec{v}_{vg}$ een hoek α maakt met de x-as, dus:

$$\tan\alpha = \frac{v_{vg,y}}{v_{vg,x}}$$
$$\tan\alpha = \frac{v_{v\ell}\sin\theta - v_{\ell g}}{v_{v\ell}\cos\theta}$$
$$\tan\alpha\cos\theta = \sin\theta - \frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}$$
$$\left(\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)^2 = \left(\sin\theta - \frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2$$
$$\tan^2\alpha\left(1-\sin^2\theta\right) = \sin^2\theta - 2\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\sin\theta + \left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2.$$

Als we eventjes $u \equiv \sin\theta$ invoeren om de notatie wat te verlichten, kunnen we de bovenstaande vierkantsvergelijking in u oplossen:

$$0 = \left(1+\tan^2\alpha\right)u^2 - 2\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}u + \left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 - \tan^2\alpha.$$

De discriminant van deze vergelijking is

$$\begin{aligned} D &= 4\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 - 4\left(1+\tan^2\alpha\right)\left[\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 - \tan^2\alpha\right] \\ &= \cancel{4\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2} - 4\left[\cancel{\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2} - \tan^2\alpha\right] - 4\tan^2\alpha\left[\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 - \tan^2\alpha\right] \\ &= 4\tan^2\alpha - 4\tan^2\alpha\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 + 4\tan^4\alpha \\ D &= 4\tan^2\alpha\left[1 - \left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2 + \tan^2\alpha\right]. \end{aligned}$$

Dit geeft voor u:

$$
\begin{aligned}
u_\pm &= \frac{2\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}} \pm 2\tan\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2+\tan^2\alpha}}{2\left(1+\tan^2\alpha\right)} \\
u_\pm &= \frac{\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}} \pm \tan\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2+\tan^2\alpha}}{1+\tan^2\alpha}.
\end{aligned}
$$

Gebruikmakend van

$$
\begin{aligned}
1+\tan^2\alpha &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
&= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
1+\tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha}
\end{aligned}
$$

wordt dit

$$
\begin{aligned}
&u_\pm = \frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\cos^2\alpha \pm \sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v_{\ell g}}{v_{v\ell}}\right)^2+\tan^2\alpha} \\
&u_+ = 0.69 \Rightarrow \theta_+ = 43.6^\circ \\
&u_- = -0.54 \Rightarrow \theta_- = -32.4^\circ.
\end{aligned}
$$

De tweede oplossing kunnen we verwerpen, aangezien dit zou betekenen dat het vliegtuig in een zuidoostelijke richting vliegt. Inderdaad, de θ_- oplossing komt overeen met de situatie waarbij $\vec{v}_{vg}$ een hoek $-\alpha$ maakt met de horizontale (oostelijke) richting. De richting waarin de piloot de neus van het vliegtuig moet keren om in een rechte lijn tussen de twee luchthavens te vliegen, is dus

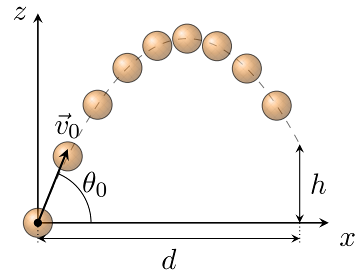
$$\theta = 43.6^\circ.$$

Uiteraard vinden we hetzelfde antwoord als in de geometrische benadering, maar het mag duidelijk zijn dat deze brute kracht benadering langer is en de kans op een reken– of schrijffoutje dus ook groter.

b) Deze vraag is nu erg eenvoudig:

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}_{vg}| &= \vec{v}_{vg}\cdot\vec{v}_{vg} \\
&= \sqrt{(\vec{v}_{v\ell}+\vec{v}_{\ell g})\cdot(\vec{v}_{v\ell}+\vec{v}_{\ell g})} \\
&= \sqrt{v_{v\ell}^2+v_{\ell g}^2+2\vec{v}_{v\ell}\cdot\vec{v}_{\ell g}} \\
&= \sqrt{v_{v\ell}^2+v_{\ell g}^2+2v_{v\ell}v_{\ell g}\cos\beta} \\
|\vec{v}_{vg}| &= 148\,\mathrm{m/s} \approx 533\,\mathrm{km/h}.
\end{aligned}
$$

Oefening 7 (3.93)



Om het onszelf een klein beetje gemakkelijker te maken, kiezen we een assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met de vertrekpositie van de bal (zie de figuur hiernaast). Het z-coördinaat van de ring is in dit assenstelsel dan gelijk aan $h \equiv h_{\text{ring}} - h_0 = 0.65\,\text{m}$. Het x-coördinaat van de ring is d, het gevraagde in deelvraag a).

a) De basketbal beschrijft een paraboolbaan, gegeven door

$$z(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0 + z_0.$$

Aangezien $z_0 = 0$ in ons assenstelsel en we weten dat de bal passeert door het punt (d, h) – de speler scoort immers, krijgen we volgende tweedegraadsvergelijking in d:

$$h = -\frac{g}{2}\frac{d^2}{v_0^2\cos^2\theta_0} + d\tan\theta_0$$
$$0 = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}d^2 - \tan\theta_0\,d + h.$$

De discriminant hiervan is

$$D = \tan^2\theta_0 - \frac{4gh}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$
$$D = \tan^2\theta_0 - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

zodat

$$d_\pm = \left(\tan\theta_0 \pm \sqrt{\tan^2\theta_0 - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}}\right)\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$$
$$d_\pm = \begin{cases} 12.8\,\text{m} \\ 1.0\,\text{m}. \end{cases}$$

De kleinste van deze twee oplossingen kunnen we negeren, waarom?[2] Het antwoord op de vraag is dus $d = 12.8\,\text{m}$.

b) We kunnen deze hoek ook weer op verschillende manieren bepalen: je kan $\vec{v}$ bepalen op het moment dat de bal door de ring gaat en dan de hoek berekenen die deze vector met de verticale maakt. Daarvoor heb je echter de tijd t_1 nodig waarop de bal door de ring gaat en die hebben we niet. Dat zou wel het geval zijn als je deelvraag a) had opgelost door $x(t)$ en $z(t)$ op te schrijven, t_1 te bepalen uit $z(t_1) = h$ en vervolgens $x(t_1)$ te berekenen.

Wij gaan deze deelvraag dus op een manier oplossen die op het eerste zicht anders is, maar eigenlijk op exact hetzelfde neerkomt. De richting waarin de bal beweegt op het moment dat hij door de ring gaat, is gegeven door de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan zijn baan. Maar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan een curve

[2] Hint: de tweedegraadsvergelijking die we hebben opgelost stelt in feite de vraag 'op welk punt in zijn paraboolbaan bevindt de bal zich op hoogte h?'

is gewoon de afgeleide van de curve! En aangezien de richtingscoëfficiënt van een rechte ook gelijk is aan de tangens van de hoek die de rechte met de horizontale maakt, kunnen we schrijven:

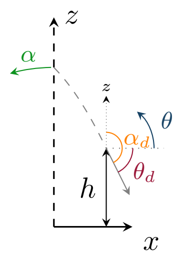
$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\\ &= -\frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0\\ \theta &= \mathrm{Bgtan}\left[-\frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0\right].\end{aligned}$$

Merk op dat we met deze formule nu de hoek ten opzichte van de horizontale (dus de richting van de snelheidsvector) kunnen bepalen voor elk punt in de baan van de bal. Door $x = d_+$ in te vullen vinden we de hoek op het moment dat de bal door de ring gaat:

$$\begin{aligned}\theta_d &= \mathrm{Bgtan}\left[-\frac{gd_+}{v_0^2\cos^2\theta_0} + \tan\theta_0\right]\\ &= \mathrm{Bgtan}\left[-\cancel{\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta_0}}\left(\tan\theta_0 + \sqrt{\tan^2\theta_0 - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}}\right)\cancel{\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}} + \tan\theta_0\right]\\ &= \mathrm{Bgtan}\left[-\left(\cancel{\tan\theta_0} + \sqrt{\tan^2\theta_0 - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}}\right) + \cancel{\tan\theta_0}\right]\\ &= -\,\mathrm{Bgtan}\left(\sqrt{\tan^2\theta_0 - \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}}\right)\\ \theta_d &= -30.9^\circ.\end{aligned}$$

Dit is de hoek met de horizontale. Hieruit kan je de hoek ten opzichte van de verticale bepalen. Als je positieve hoeken α meet in tegenwijzerzin ten opzichte van de positieve z-as (zie tekening), dan is de gezochte hoek

$$\alpha_d = -90^\circ + \theta_d = -120.9^\circ.$$



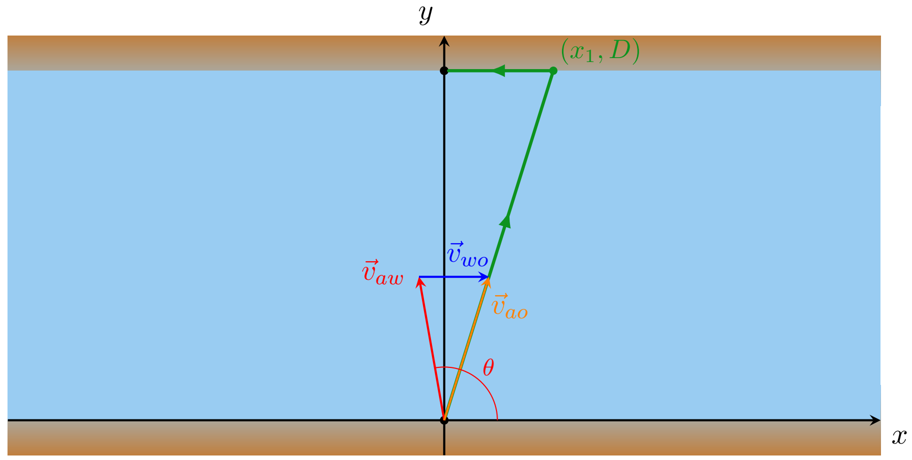
Oefening 8 (3.89 ♠)

Dit is echt een oefening voor de sterkste studenten. Maak je dus geen zorgen als je ze niet zelf gemaakt krijgt. De basis is eenvoudig, niet anders dan bij de vorige oefeningen. De moeilijkheid zit hem in het feit dat dit een optimalisatieprobleem is. Maar laten we beginnen bij het begin.

Definieer een assenstelsel waarbij de positieve x-as langs de stroomrichting loopt (evenwijdig met de oevers) en de y-as loodrecht daarop staat. De oorsprong nemen we in het beginpunt van de FBI-agent. Het pad dat hij volgt ziet er in het algemeen als volgt uit:

I een stuk roeiend over het water, vanuit de oorsprong naar een punt $\vec{r}_1 = (x_1, D)$ met $x_1 = x_\mathrm{I}(t_1)$ en $D = 1200\,\mathrm{m}$ de breedte van de rivier,

II een stuk langs de oever aan de overkant, vanuit $\vec{r}_1$ naar het punt $\vec{r}_2 = (0, D)$.



In principe zou hij ook eerst een stuk kunnen lopen langs de oever waarvan hij vertrekt, maar hij kan dat stuk evengoed afleggen langs de oever aan de overkant. Als je hem eerst nog langs de 'vertrekoever' laat lopen, maak je het alleen maar onnodig ingewikkelder voor jezelf – bovendien staat ook in de vraag dat hij eerst een stuk roeit en daarna een stuk over de oever loopt.

Het pad dat de agent volgt in het eerste stuk ($t < t_1$) is gegeven door

$$x_{\mathrm{I}}(t) = x_0 + v_{ao,x}t$$
$$y_{\mathrm{I}}(t) = y_0 + v_{ao,y}t.$$

Aangezien we de oorsprong van ons assenstelsel in zijn vertrekpunt hebben gelegd, is $x_0 = 0$ en ook $y_0 = 0$. De snelheid $\vec{v}_{ao}$ van de agent ten opzichte van de oever is gelijk aan de vectorsom van de snelheid van de agent ten opzichte van het water ($v_{aw} = 1.60\,\mathrm{m/s}$) en de snelheid van het water ten opzichte van de oever ($v_{wo} = 0.80\,\mathrm{m/s}$):

$$\vec{v}_{ao} = \vec{v}_{aw} + \vec{v}_{wo}.$$

Stel nu dat de agent de boeg van zijn roeiboot in een richting wijst die een hoek θ maakt met de horizontale, dan kunnen we dit componentsgewijs schrijven als

$$\vec{v}_{ao} = (v_{aw}\cos\theta + v_{wo})\,\hat{\imath} + v_{aw}\sin\theta\,\hat{\jmath}.$$

Hiermee worden de bewegingsvergelijkingen voor x en y:

$$x_{\mathrm{I}}(t) = (v_{aw}\cos\theta + v_{wo})\,t$$
$$y_{\mathrm{I}}(t) = v_{aw}\sin\theta\,t.$$

De tijd die de agent nodig heeft om $\vec{r}_1$ te bereiken, vinden we door $y_{\mathrm{I}} = D$ te stellen:

$$D = v_{aw}\sin\theta\,t_1$$
$$t_1 = \frac{D}{v_{aw}\sin\theta}$$

De tijd die hij nodig heeft om het laatste stukje te voet langs de oever af te leggen, hangt af van de afstand die hij moet afleggen. Die afstand is x_1 en we kunnen hem vinden door t_1 in te vullen in de vergelijking voor x_{I}:

$$x_1 = x_{\mathrm{I}}(t_1) = (v_{aw}\cos\theta + v_{wo})\,\frac{D}{v_{aw}\sin\theta}$$
$$x_1 = \left(\frac{1}{\tan\theta} + \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\frac{1}{\sin\theta}\right)D.$$

Als we de snelheid van de agent op het vasteland v_a noemen (geen vector want hij heeft toch enkel een x component), doet hij er een tijd

$$
\begin{aligned}
t_2 &= \frac{x_1}{v_a} \\
t_2 &= \left(\frac{1}{\tan\theta} + \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{D}{v_a}
\end{aligned}
$$

over om deze afstand te leggen.

De totale tijd die de agent nodig heeft om op zijn bestemming aan te komen, is dus

$$
t = t_1 + t_2 = \frac{D}{v_{aw}\sin\theta} + \left(\frac{1}{\tan\theta} + \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{D}{v_a}. \tag{4}
$$

We willen deze tijd minimaliseren. De enige grootheid die we kunnen variëren, is θ. We zoeken dus de optimale hoek waaronder de agent moet roeien om zo snel mogelijk ter plekke te zijn. Dit doen we door het minimum te zoeken van t als functie van θ, wat neerkomt op de afgeleide,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} &= -\frac{D\cos\theta}{v_{aw}\sin^2\theta} + \left(\frac{-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{D}{v_a} \\
&= -\frac{D}{v_{aw}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \left(\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{D}{v_a} \\
&= -\frac{D}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{v_{aw}}\cos\theta + \left(1 + \frac{v_{wo}}{v_{aw}}\cos\theta\right)\frac{1}{v_a}\right] \\
&= -\frac{D}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{v_a} + \left(1 + \frac{v_{wo}}{v_a}\right)\frac{\cos\theta}{v_{aw}}\right],
\end{aligned}
$$

gelijk aan nul te stellen:

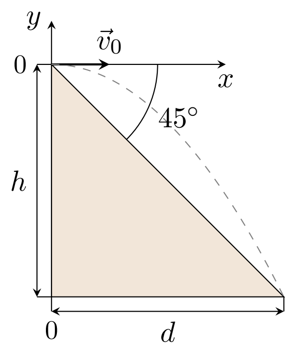
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{v_a} + \left(1 + \frac{v_{wo}}{v_a}\right)\frac{\cos\theta}{v_{aw}} &= 0 \\
\left(1 + \frac{v_{wo}}{v_a}\right)\frac{\cos\theta}{v_{aw}} &= -\frac{1}{v_a} \\
\cos\theta &= -\frac{v_{aw}}{v_a}\frac{1}{1+\frac{v_{wo}}{v_a}} \\
\theta &= \mathrm{Bgcos}\left(\frac{-v_{aw}}{v_a + v_{wo}}\right) \\
\theta &= 114.9^\circ.
\end{aligned}
$$

Om jezelf ervan te verzekeren dat dit een minimum is, moet je in principe nog de tweede afgeleide berekenen voor $\theta = 114.9^\circ$ en bevestigen dat het resultaat positief is. Anderzijds kunnen we dit fysisch beredeneren: als de agent evenwijdig met de oever roeit ($\theta = 0^\circ$ of $\theta = 180^\circ$), haalt hij nooit de overkant en is dus $t = \infty$. Voor alle hoeken tussen 0° en 180° is de tijd sowieso kleiner, dus ergens tussen die twee grenzen is er een hoek waarvoor hij minimaal is. We hebben maar één extremum gevonden tussen 0° en 180°, dus dat moet een minimum zijn.

De tijd die met dit optimale pad overeenkomt vinden we nu natuurlijk door $\theta = 114.9^\circ$ in te vullen in vgl. (4), net als de andere gegevens:

$$
t = 862\,\mathrm{s} = 14\,\mathrm{min}\,22\,\mathrm{s}.
$$

Oefening 9 (3.95 ♠)



Kies een assenstelsel waarin de oorsprong overeenkomt met de beginpositie van de steen. De situatie ziet er dan uit zoals op de figuur hiernaast en de baan die de steen volgt, is een parabool. Aangezien we ons assenstelsel gekozen hebben zodat $x_0 = y_0 = 0$, kunnen we de vergelijking uit de cursus gebruiken voor de projectielbeweging (waar het assenstelsel ook zo gekozen werd). Aangezien $v_{0,x} = v_0$ en $v_{0,y} = 0$, hebben we

$$y_s(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2. \tag{5}$$

De helling kunnen we ook beschrijven met een functie:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= -\tan 45° x \\ y_h(x) &= -x. \end{aligned}$$

Wanneer de steen terug neerkomt, zijn y_s en y_h aan elkaar gelijk:

$$\begin{aligned} -\frac{g}{2v_0^2}x^2 &= -x \\ \frac{g}{2v_0^2}x &= 1 \\ x &= \frac{2v_0^2}{g}. \end{aligned}$$

Merk op dat we in onze eerste stap (van lijn 1 naar lijn 2) de oplossing $x = 0$ hebben genegeerd. Aangezien de steen vanop de helling vertrekt, is zijn beginpositie $(x = 0, y = 0)$ uiteraard ook een oplossing. Maar het is de tweede oplossing die d geeft.

De verstreken tijd t_1 vinden we door gebruik te maken van de kinematische vergelijking voor x als functie van de tijd:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ d &= v_0 t_1 \\ t_1 &= \frac{d}{v_0} \\ t_1 &= \frac{2v_0}{g} = 3.06\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Hoofdstukken 4 & 5 (Wetten van Newton)

Normaalkrachten en wrijvingskrachten

Voordat we aan de oefeningen van dit hoofdstuk beginnen, een woordje over normaalkrachten en wrijvingskrachten, die soms voor verwarring zorgen.

Liefdevol wordt weleens gesproken over *de* normaalkracht, en de liefde is terecht: zonder normaalkrachten zou ons leven één grote puinhoop zijn. Maar er is niet echt zoiets als *de* normaalkracht. Normaalkrachten zijn aanwezig tussen eender welke twee oppervlakken die in contact zijn met elkaar en de enige definiërende eigenschap ervan is dat ze altijd loodrecht staan op het oppervlak dat ze veroorzaakt. Dat is dan ook de reden voor de naam *normaal*kracht: het is een kracht die *normaal* staat op dat oppervlak. De oorsprong van normaalkrachten verklaart waarom ze altijd loodrecht op het oppervlak staan. Een normaalkracht is namelijk per definitie de normale component van de contactkracht tussen twee oppervlakken.

Zo'n contactkracht is het netto effect van meer elementaire krachten die op microscopische schaal werken tussen de moleculen in de rakende oppervlakken van twee objecten. De twee belangrijkste bijdragen hierin zijn afkomstig van enerzijds de elektrostatische afstoting tussen de elektronenwolken rond de moleculen en anderzijds het Pauli exclusieprincipe. Op macroschaal kunnen we al deze microscopische krachten optellen en het netto-effect beschrijven als een *'contactkracht'*. Zoals eender welke kracht is dit een vectorgrootheid die we bijgevolg kunnen ontbinden in componenten. De component van de contactkracht die normaal op het contactoppervlak staat noemen we de normaalkracht ten gevolge van dat oppervlak. De component langsheen het contactoppervlak is dan weer wat we de wrijvingskracht noemen.

Dit geeft meteen iets meer intuïtie over de onderstelling dat de wrijvingskracht evenredig is met de normaalkracht. Immers: als we de contactkracht $\vec{F}_C$ noemen en deze kracht een hoek θ maakt met het contactoppervlak, dan kunnen we die ontbinden in een loodrechte (normale) componente

$$F_{C,\perp} = F_C \sin\theta$$

en een evenwijdige componente

$$F_{C,\parallel} = F_C \cos\theta = \frac{F_{C,\perp}}{\sin\theta}\cos\theta.$$

De loodrechte componente noemen we de normaalkracht F_N en de evenwijdige componente noemen we de wrijvingskracht F_W. Dan volgt uit hun definitie

$$F_W = \frac{F_N}{\sin\theta}\cos\theta = \cot\theta F_N.$$

Aangezien we de hoek θ enkel kunnen vinden door effectief de som van alle microscopische krachten te nemen en dat veel te moeilijk is, werken we in plaats daarvan met het fenomenologische begrip van een wrijvingscoëfficiënt. We doen een hoop experimenten waarin we één object bovenop een vast vlak oppervlak leggen en we vervolgens op dat object een almaar grotere kracht uitoefenen, parallel aan het oppervlak. Op een bepaald moment gaat het object bewegen en de kracht die daarvoor nodig was, noemen we de maximale statische wrijvingskracht en associëren we via de bovenstaande vergelijking met F_N:

$$F^{(s)}_{W,\max} = \mu_s F_N.$$

Merk op dat de statische wrijvingscoëfficiënt dus in feite gedefinieerd wordt als de cotangens van de kleinste mogelijke hoek die de contactkracht tussen twee stilstaande oppervlakken kan maken met hun contactoppervlak.

Wanneer we zeggen dat iets wrijvingsloos is, kunnen we dit dus ook interpreteren in termen van de contactkracht. In dat geval is de contactkracht zelf te allen tijde loodrecht op het contactoppervlak en bestaat ze zuiver uit een normale componente: $\theta = 90°$. Met andere woorden: $\mu_s = \cot 90° = 0$ zodat de maximale statische wrijvingskracht $F^{(s)}_{W,\max} = 0$.

Oefening 1 (4.6)

De gemiddelde kracht $\vec{F}_{\text{gem}}$ op de auto is gerelateerd aan de gemiddelde versnelling $\vec{a}_{\text{gem}}$ van de auto via de tweede wet van Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{gem}} &= m\vec{a}_{\text{gem}} \\ &= m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \\ \vec{F}_{\text{gem}} &= m\frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0}.\end{aligned}$$

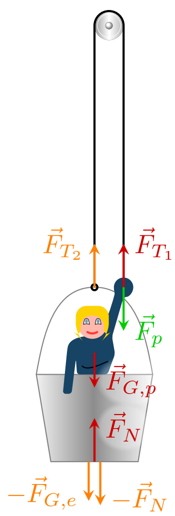
Aangezien de beweging ééndimensionaal is, hebben we maar één coördinaatas nodig. Kies de positieve richting van die as in dezelfde richting als de beginsnelheid. Dan is de component van $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(t_0)$ langs die as (noem het bvb. de x-as) gewoon $v_{0,x} = v_0 = 95\,\text{km/h}$. Als de auto na een tijd t_1 stilstaat — dus $v(t_1) = 0$, dan vinden we

$$\begin{aligned}F_{\text{gem},x} &= m\frac{v(t_1) - v_0}{\Delta t} \\ F_{\text{gem},x} &= -m\frac{v_0}{\Delta t} = -3135\,\text{N}.\end{aligned}$$

De grootte van de gemiddelde kracht die je moet uitoefenen is dus 3135 N en je moet die kracht uitoefenen in de tegenovergestelde richting van de snelheid. Dat laatste is in dit geval natuurlijk vanzelfsprekend, maar door met de componenten te werken (ook al is er maar één as), vinden we het ook uit de vergelijkingen.

Oefening 2 (4.32)

a) De situatie is hiernaast getekend. Op de tekening wordt een kleurcode gebruikt om aan te duiden waarop elke kracht inwerkt: oranje krachten werken in op de emmer, groene krachten werken in op het touw en rode krachten werken in op de ruitenwasser.



Laten we de verschillende krachten die van belang zijn eens overlopen. De ruitenwasser trekt aan het koord met een kracht $\vec{F}_p$, waaruit volgt dat het touw een even grote maar tegengestelde kracht op haar uitoefent (derde wet van Newton), dit is de spankracht $\vec{F}_{T_1}$ in het touw. Met andere woorden: $F_{T_1} = F_p$. Als het touw en de katrol massaloos zijn, is de spankracht bovendien overal in het touw gelijk. De kracht die het touw uitoefent op de emmer, $\vec{F}_{T_2}$, is dus even groot als $\vec{F}_{T_1}$:

$$F_{T_2} = F_{T_1} = F_p.$$

Laten we de emmer nu eens apart beschouwen. Naast de spankracht $\vec{F}_{T_2}$ van het touw en de zwaartekracht $\vec{F}_{G,e}$ werkt er nog een kracht op in, namelijk de reactiekracht van de ruitenwasser op de normaalkracht $\vec{F}_N$ van de emmer. Die is even groot als $\vec{F}_N$ maar tegengesteld gericht, zodat de tweede wet van Newton voor de emmer luidt:

$$F_{T_2} - F_N - F_{G,e} = m_e a_e.$$

De ruitenwasser (en dus ook de emmer) bewegen aan constante snelheid naar boven, zodat $a_{\text{emmer}} = 0$. Hieruit volgt

$$F_N = F_{T_2} - F_{G,e} = F_p - F_{G,e}.$$

Anderzijds luidt de tweede wet van Newton voor de ruitenwasser (die dus ook versnelling nul heeft):

$$\begin{aligned} F_{T_1} + F_N - F_{G,p} &= m_p a_p \\ F_p + F_p - F_{G,e} - F_{G,p} &= 0 \\ F_p &= \frac{F_{G,p} + F_{G,e}}{2}. \end{aligned}$$

Om zichzelf aan een constante snelheid omhoog te trekken, moet de ruitenwasser dus een kracht uitoefenen die half zo groot is als de som van haar eigen gewicht en het gewicht van de emmer.

b) De versnelling van de emmer is nu niet nul maar wel gelijk aan die van de ruitenwasser, laten we $a_e = a_p \equiv a$ noemen. Als we F_p vervangen door $1.15F_p$, dan wordt de tweede wet van Newton voor de emmer:

$$\begin{aligned} F_{T_2} - F_N - F_{G,e} &= m_e a \\ 1.15F_p - F_N - F_{G,e} &= m_e a \\ F_N &= 1.15F_p - F_{G,e} - m_e a. \end{aligned}$$

Die voor de ruitenwasser wordt

$$\begin{aligned} F_{T_1} + F_N - F_{G,p} &= m_p a \\ 1.15F_p + 1.15F_p - F_{G,e} - m_e a - F_{G,p} &= m_p a \\ 2.3F_p - F_{G,e} - F_{G,p} &= (m_p + m_e)\, a \\ a &= \frac{2.3F_p - F_{G,e} - F_{G,p}}{m_p + m_e} \\ &= \frac{2.3\frac{F_{G,p}+F_{G,e}}{2} - F_{G,e} - F_{G,p}}{m_p + m_e} \\ &= \frac{1.15\,(m_p + m_e)\, g - (m_e + m_p)\, g}{m_p + m_e} \\ a &= 0.15g = 1.47\,\text{m/s}^2. \end{aligned}$$

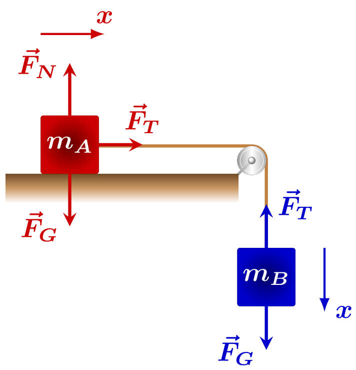
Merk op dat het systeem ‘ruitenwasser’ verbonden is met het systeem ‘emmer’ via de contactkracht tussen beide, zijnde de normaalkracht. Zolang deze normaalkracht eindig blijft (dus niet nul wordt), kunnen we de ruitenwasser en de emmer als één systeem beschouwen.[3] Als we dit hier gedaan hadden, dan hadden we de tweede wet van Newton kunnen opschrijven voor dit systeem, waarbij de totale kracht bestaat uit de som van alle externe krachten op zowel ruitenwasser als emmer:

$$F_{T_1} + F_{T_2} - F_{G,e+p} = (m_e + m_p)a.$$

Voor deelvraag a) hadden we dan $a = 0$ en $F_{T_1} = F_{T_2} = F_p$, terwijl we voor deelvraag b) hadden dat $a \neq 0$ en $F_{T_1} = F_{T_2} = 1.15F_p$. We zouden exact dezelfde oplossing bekomen hebben, omdat de normaalkracht altijd eindig blijft in deze situatie.

Oefening 3 (4.51)

Aangezien ze verbonden zijn via het touw, zal de versnelling van de twee blokken even groot zijn: $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| \equiv a$. Beschouw bijvoorbeeld blok A en kies hiervoor een horizontale coördinaatas met de positieve richting langs de bewegingsrichting van dit blok (zie tekening). Langs de verticale richting werken enkel de zwaartekracht en de normaalkracht op blok A, die elkaar exact opheffen (het blok heeft immers geen netto versnelling langs die richting). Langs de horizontale richting werkt alleen de spankracht van het touw op het blok, zodat



$$\begin{aligned} F_T &= m_A a_{A,x} \\ F_T &= m_A a. \end{aligned} \tag{6}$$

Merk op dat we hier hebben aangenomen dat blok A naar rechts gaat bewegen (en dus blok B naar beneden) door in het rechterlid $a_{A,x} = +a$ te stellen.

Beschouw nu blok B en kies hiervoor een andere, verticale coördinaatas met de positieve richting langs de bewegingsrichting van blok B. Langs deze richting werken enkel de spankracht van het touw en de zwaartekracht. Met $a_{B,x} = +a$ wordt de tweede wet van Newton ditmaal

$$-F_T + m_B g = m_B a. \tag{7}$$

Door de vergelijkingen (6) en (7) voor A en B bij elkaar op te tellen, vinden we voor de versnelling van beide blokken:

$$\begin{aligned} m_B g &= (m_A + m_B)\, a \\ a &= \frac{m_B}{m_A + m_B} g. \end{aligned}$$

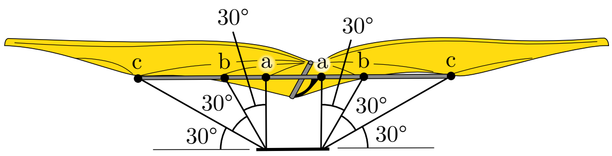
De spankracht vinden we dan door deze versnelling in vergelijking (6) in te vullen:

$$\begin{aligned} F_T &= m_A a \\ F_T &= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g. \end{aligned}$$

[3] Waarom moet de normaalkracht eindig blijven? En wat betekent het als de normaalkracht nul wordt?

Oefening 4 (4.64)

Laten we de spankrachten labelen volgens hun ophangpunt. De verticale componenten van die verschillende spankrachten zijn allemaal gelijk, dus



$$S_a = S_b \cos 30° = S_c \cos 60°. \tag{8}$$

We weten bovendien dat het gewicht van de persoon volledig gedragen wordt door de zweefvlieger, wat betekent dat de som van de verticale componenten van alle spankrachten even groot moet zijn als de zwaartekracht:

$$2\,(S_a + S_b \cos 30° + S_c \cos 60°) = mg.$$

We gebruiken (8) twee keer om S_b en S_c te elimineren uit deze vergelijking:

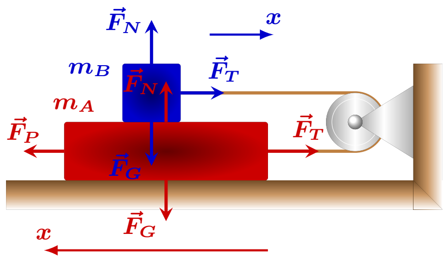
$$\begin{aligned} 2\,(S_a + S_a + S_a) &= mg \\ S_a &= \frac{mg}{6} = 121\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Door dit nu in te vullen in vergelijking (8) kunnen we S_b en S_c uitrekenen:

$$\begin{aligned} S_b &= 140\,\mathrm{N} \\ S_c &= 242\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Oefening 5 (3.49)

Noem de externe kracht die wordt uitgeoefend op het onderste blok $\vec{F}_P$. We gaan beide vragen oplossen door de tweede wet van Newton op te schrijven voor de twee blokken en gebruik te maken van het feit dat de spankracht overal in het touw gelijk is en dat de versnellingen van beide blokken even groot zijn (en tegengesteld gericht). Kies voor het onderste blok een assenstelsel met x-as naar links gericht en y-as naar boven gericht. Kies voor het bovenste blok een assenstelsel met x-as naar rechts gericht en y-as naar boven gericht. Dan geldt:



$$\begin{aligned} a_{x,A} &= a \\ a_{y,A} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{x,B} &= a \\ a_{y,B} &= 0 \end{aligned} \qquad F_{T,A} = F_{T,B}$$

a) Voor het onderste blok wordt hiermee de tweede wet van Newton, langs x- en y-as:

$$F_P - F_T = m_B a \tag{x}$$
$$F_{G,B} - F_{N,B} = 0, \tag{y}$$

en voor het bovenste blok:

$$F_T = m_A a \tag{x}$$
$$F_{G,A} - F_{N,A} = 0. \tag{y}$$

We kunnen uit de twee vergelijkingen voor de x-componenten combineren:

$$\begin{aligned} F_P - m_A a &= m_B a \\ (m_A + m_B)\, a &= F_P \\ a &= \frac{F_P}{m_A + m_B} = 22.5\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) De vergelijking voor de x-component van het bovenste blok geeft:

$$\begin{aligned} F_T &= m_A a \\ F_T &= \frac{m_A}{m_A + m_B} F_P = 3.75\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Oefening 6 (5.47)

a) Om een cirkel met straal R te beschrijven, moet het vliegtuig een centripetale versnelling ondervinden gelijk aan

$$a_{CP} = \frac{v^2}{R}.$$

Als deze versnelling maximaal $6.0g$ mag bedragen, dan moet

$$\begin{aligned} 6.0g &\geq \frac{v^2}{R} \\ R &\geq \frac{v^2}{g} = 1900\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

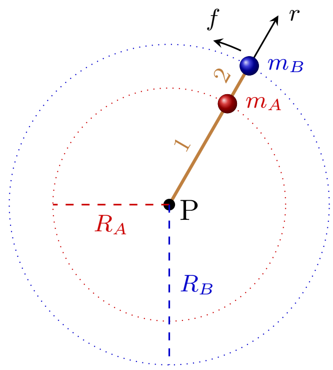
b) De piloot ondervindt twee krachten: de zwaartekracht en de normaalkracht van zijn stoel. Deze laatste is even groot en tegengesteld aan de kracht die de piloot uitoefent op zijn/haar stoel. De normaalkracht is te allen tijde radiaal naar binnen gericht. De zwaartekracht is te allen tijde verticaal omlaag gericht, dus onderaan de loop is ze radiaal naar buiten gericht. De piloot beschrijft bovendien net als het vliegtuig een cirkel met straal R, wat betekent dat zijn versnelling eveneens a_{CP} is, langs de radiale richting. De tweede wet van Newton langs de radiale richting is dan

$$\begin{aligned} F_N - F_G &= m a_{CP} \\ F_N &= m\,(a_{CP} + g) \\ F_N &= 7mg = 5400\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

c) Bovenaan de baan is de zwaartekracht radiaal naar binnen gericht, net als de normaalkracht en de centripetale versnelling. Die laatste is nog steeds dezelfde (anders zou de piloot geen cirkel met straal R beschrijven) zodat de tweede wet van Newton langs de radiale richting nu gegeven is door

$$\begin{aligned} F_N + F_G &= m a_{CP} \\ F_N &= m\,(a_{CP} - g) \\ F_N &= 5mg = 3800\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Oefening 7 (5.54)



De tekening hiernaast toont een bovenaanzicht. De massa's bewegen enkel in een horizontaal vlak, zodat de zwaartekracht en de normaalkracht geen rol spelen (ze heffen elkaar in die situatie immers precies op). Om op hun respectieve cirkelbanen te blijven, moeten de twee massa's echter wel centripetale versnellingen

$$a_A = \frac{v_A^2}{R_A} = \frac{(\omega R_A)^2}{R_A} = (2\pi f)^2 R_A$$
$$a_B = \frac{v_B^2}{R_B} = \frac{(\omega R_B)^2}{R_B} = (2\pi f)^2 R_B$$

ondervinden. Deze versnellingen worden geleverd door de spankrachten in het touw. We schrijven de tweede wet van Newton neer voor massa A langs de radiale richting. Aangezien we de positieve richting naar buiten toe hebben gekozen en de centripetale versnelling naar binnen is gericht, wordt dit

$$-m_A a_A = -F_{T_1,A} + F_{T_2,A},$$

met $F_{T_1,A}$ de (grootte van de) spankracht in het stukje touw tussen P en m_A en $F_{T_2,A}$ de (grootte van de) spankracht in het stukje touw tussen m_A en m_B. Voor massa B hebben we langs de radiale richting:

$$-m_B a_B = -F_{T_2,B}.$$

Hierin is $F_{T_2,B}$ eveneens de grootte van de spankracht in het stukje touw tussen m_A en m_B. We kunnen dus stellen dat

$$F_{T_2,A} = F_{T_2,B} \equiv F_{T_2}$$
$$F_{T_1,A} \equiv F_{T_1}.$$

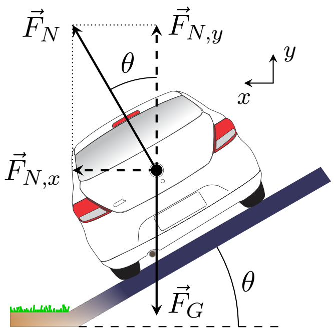
De vergelijking voor B geeft dan simpelweg

$$m_B a_B = F_{T_2}$$
$$F_{T_2} = 4\pi^2 f^2 m_B R_B$$

en als we dit combineren met de vergelijking voor A, vinden we

$$-m_A a_A = -F_{T_1} + F_{T_2}$$
$$-m_A a_A = -F_{T_1} + m_B a_B$$
$$F_{T_1} = m_B a_B + m_A a_A$$
$$F_{T_1} = 4\pi^2 f^2 \left(m_B R_B + m_A R_A\right).$$

Oefening 8 (5.58)



De tekening hiernaast toont een doorsnede van de bocht, waarbij er geen statische wrijving is en de wagen aan een snelheid $v = 65\,\mathrm{km/h}$ rijdt. Hij kan dan net de bocht nemen zonder wrijving: de helling is voldoende steil zodat de radiale component van de normaalkracht de centripetaalversnelling a_{CP} kan leveren. Laten we een assenstelsel kiezen met de x-as radiaal gericht en de y-as verticaal omhoog. De tweede wet van Newton langs beide richtingen, met $a_x = a_{CP} = v^2/r$ en $a_y = 0$, geeft dan:

$$F_N \sin\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad \text{(x)}$$
$$F_N \cos\theta - mg = 0. \qquad \text{(y)}$$
$$\Downarrow$$
$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$
$$\theta = \mathrm{Bgtan}\left(\frac{v^2}{gR}\right) = 21.35°.$$

Als er wel statische wrijving is, kan de auto de bocht sneller nemen. De wrijvingskracht zal elke beweging richting de buitenkant van de bocht immers tegenwerken. Deze kracht $\vec{F}_W$ is dus langs de helling naar beneden gericht, naar de binnenkant van de bocht. In de figuur hiernaast is die extra kracht aangeduid. De tweede wet van Newton krijgt dan extra termen in x en y:

$$F_N \sin\theta + F_W \cos\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad \text{(x)}$$
$$F_N \cos\theta - mg - F_W \sin\theta = 0. \qquad \text{(y)}$$

De statische wrijvingskracht is evenredig met de normaalkracht, $F_W = \mu_s F_N$, zodat we krijgen:

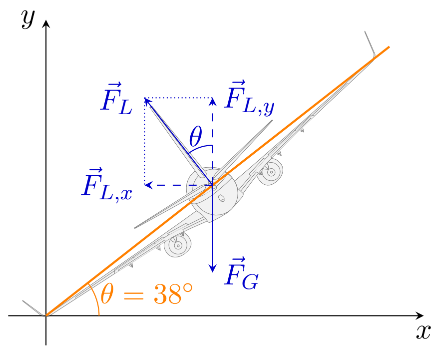
$$\begin{cases} F_N\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right) = m\dfrac{v^2}{R} \\ F_N\left(\cos\theta - \mu_s\sin\theta\right) = mg \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \dfrac{R}{v^2}\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right) = \dfrac{m}{F_N} \\ \dfrac{1}{g}\left(\cos\theta - \mu_s\sin\theta\right) = \dfrac{m}{F_N} \end{cases}$$

We kunnen deze vergelijkingen ten slotte combineren om μ_s te vinden:

$$
\begin{aligned}
\frac{R}{v^2}\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right) &= \frac{1}{g}\left(\cos\theta - \mu_s\sin\theta\right)\\
\left(\frac{R}{v^2}\sin\theta + \mu_s\frac{R}{v^2}\cos\theta\right) &= \left(\frac{1}{g}\cos\theta - \mu_s\frac{1}{g}\sin\theta\right)\\
\mu_s\left(\frac{R}{v^2}\cos\theta + \frac{1}{g}\sin\theta\right) &= \frac{1}{g}\cos\theta - \frac{R}{v^2}\sin\theta\\
\mu_s &= \frac{\frac{1}{g}\cos\theta - \frac{R}{v^2}\sin\theta}{\frac{R}{v^2}\cos\theta + \frac{1}{g}\sin\theta}\\
\mu_s &= \frac{1 - \frac{gR}{v^2}\tan\theta}{\frac{gR}{v^2} + \tan\theta}\\
\mu_s &= 0.33\,.
\end{aligned}
$$

Oefening 9 (5.91)

De tekening hiernaast toont het vliegtuig tijdens het omkeren, met een gepast assenstelsel. De enige krachten die op het vliegtuig inwerken zijn de zwaartekracht, verticaal omlaag, en een liftkracht, loodrecht op de vleugels en omhoog gericht. Doordat het vliegtuig schuin vliegt, heeft de liftkracht een horizontale component. Deze component zorgt voor de centripetale versnelling a_{CP} die nodig is om aan een snelheid v een cirkelvormige bocht te maken met straal $R = v^2/a_{CP}$.



a) We weten hoe snel het vliegtuig vliegt (v), dus als we kunnen vinden welke afstand (Δs) het moet afleggen om de bocht van 180° te maken, is het eenvoudig om te berekenen welke tijd het hiervoor nodig heeft ($\Delta t = \Delta s/v$). De afstand die je moet afleggen om een cirkelvormige bocht van 180° met straal R te maken is gewoon de helft van de omtrek van een cirkel met straal R: $\Delta s = \pi R$.

Ervan uitgaande dat het vliegtuig dezelfde hoogte aanhoudt tijdens het maken van de bocht, is de versnelling langs de y-richting nul. De versnelling langs de x-as is de centripetale versnelling, radiaal naar de binnenkant van de bocht gericht (links op onze tekening). De tweede wet van Newton langs x en y wordt dan:

$$
\begin{cases}
-ma_{CP} = -F_L\sin\theta\\
0 = -mg + F_L\cos\theta.
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
m\dfrac{v^2}{R} = F_L\sin\theta\\
mg = F_L\cos\theta.
\end{cases}
$$

Hiermee vinden we de straal van de bocht:

$$\frac{v^2}{Rg} = \tan\theta$$
$$\Leftrightarrow R = \frac{v^2}{g\tan\theta} = 2320\,\mathrm{m}.$$

Het vliegtuig maakt de bocht van 180° dus op een tijd

$$\Delta t = \frac{\pi R}{v}$$
$$\Delta t = \frac{\pi v}{g\tan\theta} = 54.6\,\mathrm{s}.$$

b) Deze vraag is lichtjes misleidend, aangezien de passagiers op elk moment enkel de volgende twee krachten ondervinden: de zwaartekracht, verticaal omlaag, en de normaalkracht, loodrecht op hun stoel en omhoog gericht. Deze laatste zal echter in grootte veranderen wanneer het vliegtuig schuin vliegt om een bocht te nemen.

Wanneer het vliegtuig gewoon rechtdoor vliegt, zijn beide krachten langs de verticale gericht. Aangezien de versnelling langs die richting nul is (er is geen verticale beweging), is de normaalkracht in dat geval gelijk aan de zwaartekracht:

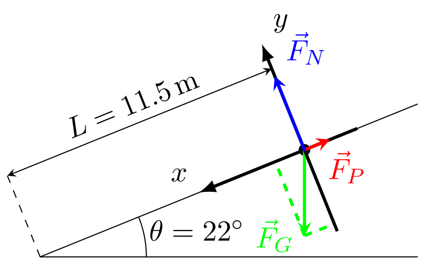
$$F_N^{\text{rechtdoor}} = F_G.$$

Wanneer het vliegtuig de bocht neemt, is de normaalkracht niet meer langs de verticale gericht. Aangezien de versnelling langs de verticale richting wel nog steeds nul is, moet de verticale component van de normaalkracht ditmaal gelijk zijn aan de zwaartekracht. Dit betekent een toename in de normaalkracht die de passagiers ondervinden van hun stoel:

$$F_N^{\text{bocht}}\cos\theta = F_G$$
$$F_N^{\text{bocht}} = \frac{F_G}{\cos\theta} \approx 1.27F_G = 1.27F_N^{\text{rechtdoor}}.$$

De passagiers zullen dus ongeveer 27 % sterker in hun stoel worden gedrukt tijdens het maken van de bocht dan tijdens het rechtdoor vliegen.

Oefening 10 (4.85 ♠)



We kiezen onze x-as langsheen de helling, in de neerwaartse richting, en onze y-as loodrecht daarop, omhoog gericht. De versnelling langs de y-as is dan nul en de versnelling langs de x-as zal ons toelaten de snelheid onderaan de helling bepalen. De tweede wet van Newton langs beide assen:

$$ma_x = -F_P + F_G\sin\theta \quad \text{(x)}$$
$$0 = -F_G\cos\theta + F_N. \quad \text{(y)}$$

In deze vraag hebben we enkel de vergelijking langs x nodig.[4] Met $F_P = 1420\,\mathrm{N}$, $m = 450\,\mathrm{kg}$ en $\theta = 22°$ vinden we

$$a_x = 0.52\,\mathrm{m/s^2}.$$

[4] Kan je een eenvoudige uitbreiding bedenken waarbij je de vergelijking langs y ook nodig zou hebben?

Deze versnelling is constant zodat we de formules voor constante versnelling kunnen aanspreken. De snelheid onderaan de helling vinden we door gebruik te maken van ofwel de kinematische vergelijkingen voor $x(t)$ en $v_x(t)$, ofwel de afgeleide vergelijking

$$v_x^2 = v_{x,0}^2 + 2a_x \Delta x. \tag{9}$$

Aangezien $v_{x,0} = 0$ en $\Delta x = L = 11.5\,\mathrm{m}$, krijgen we via deze vergelijking:

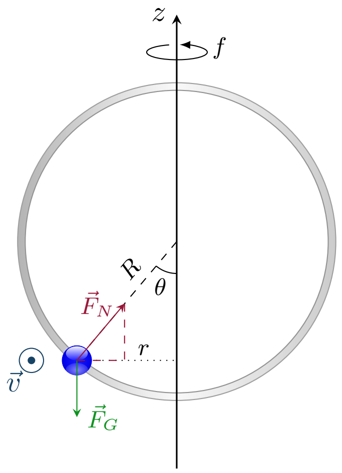
$$v_x = \sqrt{2a_x L} = 3.46\,\mathrm{m/s}.$$

De kinematische vergelijkingen geven uiteraard hetzelfde antwoord, maar leveren ook het tijdstip waarop de piano onderaan de helling aankomt:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x(t) = a_x t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L = \frac{1}{2}a_x t_L^2 & \Rightarrow t_L = 6.65\,\mathrm{s} \\ v_x(t_L) = a_x t_L & \Rightarrow v_x(t_L) = 3.46\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

Oefening 11 (5.93 ♠)

a) De figuur hiernaast toont de situatie. De knikker kan wrijvingsloos langsheen de metalen ring bewegen. Er werken twee krachten op de knikker: de zwaartekracht en de normaalkracht ten gevolge van het contact met de ring. De zwaartekracht is uiteraard verticaal omlaag gericht. De normaalkracht is gericht naar het centrum van de metalen ring en zorgt ervoor dat de knikker op de verticale cirkel blijft.
Door de rotatie met frequentie f beschrijft de knikker bovendien een horizontale cirkel met straal $r = R\sin\theta$. De centripetale versnelling nodig om de knikker op deze cirkelbaan te houden, wordt geleverd door de horizontale componente van de normaalkracht.



De tweede wet van Newton langs de horizontale (x) en de verticale (z) richting is dan:

$$ma_{CP} = F_N \sin\theta \tag{x}$$
$$0 = -F_G + F_N\cos\theta. \tag{z}$$

Aangezien $a_{CP} = v^2/r$, $v = \omega r = 2\pi f r$ en $r = R\sin\theta$, kunnen we beide vergelijkingen als volgt combineren:

$$\begin{aligned} m\frac{(2\pi f r)^2}{r} &= \frac{F_G}{\cos\theta}\sin\theta \\ (2\pi f)^2 R\sin\theta &= \frac{g}{\cos\theta}\sin\theta \\ \cos\theta &= \frac{g}{(2\pi f)^2 R} \\ \theta &= \mathrm{Bgcos}\left(\frac{g}{(2\pi f)^2 R}\right). \end{aligned}$$

b) De gegeven waarden voor f en R invullen geeft $\theta = 1.28\,\mathrm{rad} = 73°35'53''$.

c) Neen. Opdat θ gelijk aan 90° zou zijn, zou ofwel f ofwel R oneindig moeten worden. Dit is logisch: zoals eerder gezegd zorgt de horizontale componente van de normaalkracht voor de centripetale versnelling die de knikker op zijn cirkelbaan houdt. Als $\theta = 90°$, dan is die horizontale componente nul en kan de knikker zijn cirkelbaan dus niet aanhouden. Hij kan wel in de buurt van $\theta = 90°$ komen, maar dan moet je de verticale cirkel met een steeds toenemende frequentie laten roteren.

Oefening 12 (5.89 ♠)

Op het eerste zicht lijkt dit voor sommigen misschien wel een vraag van het genre

> *Een steen met massa* 3.0 kg *valt van een hoogte* 2.0 m *op de grond. Bepaal de straal van de zon.*

Dat is ook de enige reden dat deze vraag een ♠ symbooltje heeft, want ze is noch wiskundig noch geometrisch ingewikkeld. De moeilijkheid zit hem in het verbinden van de gegeven informatie met wat er gevraagd wordt. De kracht die ervoor zorgt dat een auto (vlakke) bochten kan nemen, is de statische wrijvingskracht. De kracht die een rijdende auto tot stilstand brengt, is ook de statische wrijvingskracht.[5]

Om de straal te bepalen van de scherpste bocht die de auto in kwestie kan nemen, hebben we de statische wrijvingscoëfficiënt nodig. Die kunnen we bepalen door gebruik te maken van de gegevens over de remafstand van de auto. De arbeid die geleverd wordt door de wrijvingskracht moet gelijk zijn aan het verschil in kinetische energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^L F_W \,\mathrm{d}x.$$

De statische wrijvingskracht is gegeven door $F_W = \mu_s F_N$ en uit de tweede wet van Newton langs de verticale richting halen we $F_N = F_G$. Met $v = 95\,\mathrm{km/h} = 26.4\,\mathrm{m/s}$ en $L = 66\,\mathrm{m}$ vinden we dan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \int_0^L \mu_s mg \,\mathrm{d}x\\ \frac{v^2}{2} &= \mu_s g L\\ \mu_s &= \frac{v^2}{2gL} = 0.54.\end{aligned}$$

Om de bocht te nemen, moet de auto een centripetale versnelling ondervinden. Die versnelling wordt geleverd door de statische wrijvingskracht. De maximale centripetale versnelling die deze kan leveren is

$$a_{CP}^{(\max)} = \frac{\mu_s F_N}{m}.$$

Opnieuw vinden we dankzij de tweede wet van Newton langs de verticale richting dat $F_N = F_G$. De centripetale versnelling is bovendien gelijk aan v^2/R met R de straal van

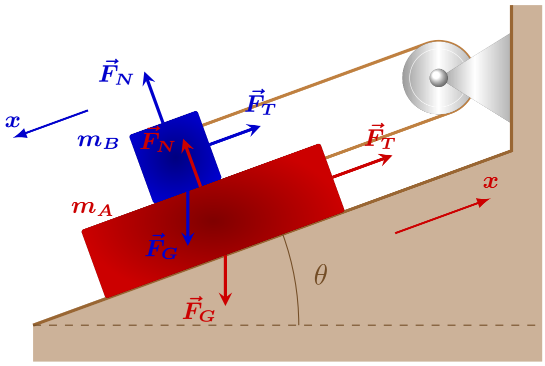
[5] Eigenlijk is dit niet helemaal waar. De statische wrijvingskracht is je remkracht enkel wanneer je remmen vastslaan en je banden niet langer over de baan rollen maar wel glijden. Op deze manier remmen verlengt je remweg, vandaar dat het ABS systeem in je auto er automatisch voor zorgt dat dit niet gebeurt. We gaan er hier echter vanuit dat de gegeven minimale remafstand al slippend wordt afgelegd.

de cirkel (bocht). De kleinste straal die de bocht mag hebben, voldoet dus aan

$$\frac{v^2}{R_{\min}} = \mu_s g$$
$$R_{\min} = \frac{v^2}{g}\frac{2gL}{v^2}$$
$$R_{\min} = 2L = 132\,\mathrm{m}.$$

Oefening 13 (♠)

De tekening hiernaast toont de situatie. In dit soort problemen is het erg belangrijk om een duidelijke en doordachte assenkeuze te maken. Aangezien blok B een grotere massa heeft dan blok A, verwachten we intuïtief dat de versnelling voor blok B omlaag langs de helling gericht zal zijn, en bijgevolg die voor blok A omhoog langs de helling gericht. We kiezen onze x-as voor beide blokken in functie daarvan (zie figuur), maar je kan evengoed met andere assen werken.



In het geval van onze assenkeuze weten we dat[6]

$$a_{x,A} = a_{x,B} \equiv a$$

en verwachten we bovendien dat $a > 0$. De y-as nemen we voor beide blokken dezelfde: omhoog gericht loodrecht op het hellend oppervlak. Beide blokken zijn in rust langs deze richting, dus $a_{y,A} = 0 = a_{y,B}$.

De tweede wet van Newton voor blok A langs x en y:

$$m_A a = F_{T,A} - F_{G,A}\sin\theta \qquad \text{(A,x)}$$
$$0 = F_{N,A} - F_{G,A}\cos\theta. \qquad \text{(A,y)}$$

Voor blok B hebben we

$$m_B a = -F_{T,B} + F_{G,B}\sin\theta \qquad \text{(B,x)}$$
$$0 = F_{N,B} - F_{G,B}\cos\theta. \qquad \text{(B,y)}$$

Gebruikmakend van het feit dat $F_{T,A} = F_{T,B} \equiv F_T$ kunnen we de x-vergelijkingen voor beide blokken bij elkaar optellen om a te vinden:

$$(m_A + m_B)a = (F_{G,B} - F_{G,A})\sin\theta$$
$$a = \frac{m_B - m_a}{m_B + m_A} g\sin\theta = 1.1\,\mathrm{m/s^2}.$$

[6]Dankzij het touw impliceert beweging van één blok ook meteen dezelfde beweging van het andere blok.

De spankracht F_T kunnen we nu vinden door a in één van de x-vergelijkingen in te vullen:

$$\begin{aligned}
m_A a &= F_T - m_A g \sin\theta \\
F_T &= m_A \left[a + g \sin\theta\right] \\
&= m_A \left[\frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} + 1\right] g \sin\theta \\
&= m_A \left[\frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} + \frac{m_B + m_A}{m_B + m_A}\right] g \sin\theta \\
F_T &= \frac{2 m_A m_B}{m_B + m_A} g \sin\theta = 44.7\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Hoofdstuk 7 (Arbeid en energie)

Oefening 1 (7.71)

Om de boeken rechtop in de boekenkast te zetten, moet je de zwaartekracht overwinnen. De kracht die je minstens moet uitoefenen om elk boek op te tillen, is dus mg met m de massa van het boek. De arbeid die je verricht wanneer je een boek in de kast zet, bestaat uit twee bijdragen: het rechtzetten van het boek (ervan uitgaand dat het boek geen dikte heeft) en vervolgens het verplaatsen van het rechtopstaande boek tot op het rek. In beide gevallen modelleren we het boek als een puntdeeltje met al zijn massa verzameld in het midden en in beide gevallen is enkel het hoogteverschil belangrijk. De arbeid verricht door een kracht op een massapunt dat beweegt tussen twee punten $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ is immers algemeen gedefinieerd als

$$W = \int_{\mathcal{C}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

waarbij $\mathcal{C}$ het pad definieert waarlangs het massapunt beweegt en $\mathrm{d}\ell$ een infinitesimaal lijnstukje langs dat pad is. Aangezien de zwaartekracht enkel een component langs de verticale (z) as heeft ($\vec{F}_G = -mg\hat{k}$), geldt daarvoor dat

$$\begin{aligned} W_G &= -\int_{x_1}^{x_2} mg\left(\hat{k}\cdot\hat{\imath}\right)\mathrm{d}x - \int_{y_1}^{y_2} mg\left(\hat{k}\cdot\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}y - \int_{z_1}^{z_2} mg\left(\hat{k}\cdot\hat{k}\right)\mathrm{d}z \\ W_G &= -\int_{z_1}^{z_2} mg\,\mathrm{d}z = -mg(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Dit is de arbeid uitgeoefend door de zwaartekracht. De arbeid die je zelf minimaal moet uitvoeren is dus het tegengestelde hiervan:

$$W = mg(z_2 - z_1) = mg\Delta h.$$

Voor elk boek moet het massamiddelpunt eerst tot op de hoogte $h_{p,i} = h_{p,1} + (i-1)\Delta h_p$ van plank i gebracht worden, met $h_{p,1} = 12\,\mathrm{cm}$ en $\Delta h_p = 33\,\mathrm{cm}$. Vervolgens moet het massamiddelpunt nog een afstand $h = 22\,\mathrm{cm}/2 = 11\,\mathrm{cm}$ hoger gebracht worden, bij het rechtzetten van het boek op de plank. Het hoogteverschil dat een boek vanaf de grond tot op plank i moet overbruggen is dus

$$\Delta h_i = h + h_{p,1} + (i-1)\Delta h_p,$$

met $i = 1, \ldots, 5$.

Op elke plank passen $n = 28$ boeken, zodat de arbeid nodig om rek i te vullen gelijk is aan

$$\begin{aligned} W_i &= nmg\Delta h_i \\ W_i &= nmg\left[h + h_{p,1} + (i-1)\Delta h_p\right]. \end{aligned}$$

Alles samentellen geeft:

$$W = \sum_{i=1}^{5} nmg\,[h + h_{p,1} + (i-1)\Delta h_p].$$

Een beetje herschrijven en gebruikmaken van

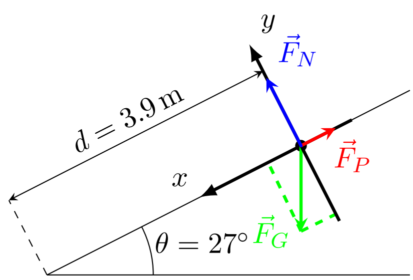
$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$$

levert dan:

$$\begin{aligned}
W &= 5nmg\left(h + h_{p,1}\right) + nmg\Delta h_p \sum_{i=1}^{5} (i-1) \\
&= 5nmg\left(h + h_{p,1}\right) + nmg\Delta h_p \left(\sum_{i=1}^{5} i - 5\right) \\
&= 5nmg\left(h + h_{p,1}\right) + nmg\Delta h_p\,(15-5) \\
&= 5nmg\left(h + h_{p,1} + 2\Delta h_p\right) \\
W &= 1711.26\,\text{J}.
\end{aligned}$$

Oefening 2 (7.11)

De figuur hiernaast toont de situatie, met assenkeuze.



a) Het feit dat de piano met een constante snelheid naar beneden glijdt, betekent dat $a_x = 0$ zodat de tweede wet van Newton langs x geeft:

$$\begin{aligned}
-F_P + mg\sin\theta &= 0 \\
F_P &= mg\sin\theta = 1692\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Deze kracht is langs de negatieve x-as gericht.

b) De kracht die de man levert is constant, zodat we niet hoeven te integreren om de arbeid die hij levert te vinden:

$$\begin{aligned}
W_P &= \vec{F}_P \cdot \vec{d} \\
&= (-F_P\,\hat{\imath}) \cdot (d\,\hat{\imath}) \\
W_P &= -F_P d = -6600\,\text{J}.
\end{aligned}$$

c) De arbeid die de zwaartekracht levert op de piano is ook constant, dus we kunnen deze op dezelfde manier bepalen:

$$\begin{aligned}
W_G &= \vec{F}_G \cdot \vec{d} \\
&= (F_G\sin\theta\,\hat{\imath} - F_G\cos\theta\,\hat{\jmath}) \cdot (d\,\hat{\imath}) \\
W_G &= F_G d\sin\theta = 6600\,\text{J}.
\end{aligned}$$

d) Aangezien $\vec{F}_N \perp \vec{d}$, levert de normaalkracht geen arbeid. De totale (netto) arbeid is dus de som van de bijdragen van de duwkracht en de zwaartekracht:

$$W_{\text{tot}} = W_G + W_M = 0.$$

Je vind hetzelfde resultaat als je

$$W_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{tot}} \cdot \vec{d}$$

expliciet uitrekent[7] of door in te zien dat dit hetzelfde is als

$$W_{\text{tot}} = m\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$$

aangezien $a = 0$.

Oefening 3 (7.80)

De opgave in het boek vermeldt dit niet, maar men gaat ervan uit dat het verfbolletje horizontaal wordt afgevuurd en dat de zwaartekracht geen rol van betekenis speelt in de oplossing. Dit is geen onzinnige aanname, aangezien we van een paintballgeweer wel verwachten dat het zonder enige moeite de zwaartekracht kan overwinnen. Deze verwachting wordt bevestigd wanneer we de grootte van de zwaartekracht op het verfbolletje (slechts $0.32\,\text{N}$) vergelijken met de kracht die we vinden voor het expanderend gas (zo'n $370\,\text{N}$).

a) Noem de lengte van de loop $L = 32\,\text{cm}$ en de snelheid waarmee het verfbolletje de loop verlaat $v_f = 85\,\text{m/s}$. Kies een assenstelsel waarbij de x-as de loop van het geweer volgt, met als nulpunt de beginpositie van het verfbolletje. Het uiteinde van de loop bevindt zich dan op $x = L$. De horizontale versnelling die het verfbolletje ondervindt wanneer het wordt afgeschoten, volgt uit de tweede wet van Newton langs de x-as (waarbij we een mogelijke component van de zwaartekracht zoals gezegd verwaarlozen):

$$\begin{aligned} ma_x &= F \\ a_x &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

waarin m de massa van het verfbolletje is. Aangezien de kracht F en de massa m constant zijn, is de versnelling dit ook en kunnen we gebruikmaken van de kinematische vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_x}{2}t^2 + v_{x,0}t + x_0 \\ v_x(t) &= a_x t + v_{x,0}. \end{aligned}$$

Hierin is x_0 de beginpositie van het verfbolletje en dus door onze keuze van het assenstelsel nul. Verder is ook $v_{x,0}$ nul aangezien het verfbolletje initieel in rust is. De vergelijkingen worden dus

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_x}{2}t^2 \\ v_x(t) &= a_x t. \end{aligned}$$

Deze gelden voor elk gegeven tijdstip. Het tijdstip dat ons nu interesseert is wanneer het bolletje de loop verlaat, aangezien we op dat moment de snelheid kennen. Noem dat tijdstip T, dan kunnen we de bovenstaande vergelijking voor de snelheid omvormen tot

$$\begin{aligned} T &= \frac{v_x(T)}{a_x} \\ T &= \frac{v_f}{a_x}. \end{aligned}$$

[7] Probeer dit!

De vergelijking voor $x(T)$ wordt dan

$$\begin{aligned} x(T) &= \frac{a_x}{2}T^2 \\ &= \frac{a_x}{2}\left(\frac{v_f}{a_x}\right)^2 \\ x(T) &= \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{a_x} \end{aligned}$$

en aangezien $x(T) = L$ kunnen we dit herschrijven als

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{a_x} \\ a_x &= \frac{v_f^2}{2L}. \end{aligned}$$

De kracht is dan ten slotte gelijk aan

$$F = ma_x = \frac{mv_f^2}{2L} = 372.5\,\mathrm{N} \approx 370\,\mathrm{N}.$$

b) Gebruik opnieuw hetzelfde assenstelsel. Het arbeid-energie theorema vertelt ons dat de verandering in kinetische energie van het verfbolletje tussen $t = 0$ en $t = T$ gelijk is aan de arbeid die op het verfbolletje wordt geleverd gedurende datzelfde tijdsinterval. Aangezien het verfbolletje initieel in rust is en de loop verlaat met een snelheid v_f, is het verschil in kinetische energie tussen de twee tijdsstippen

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Er wordt enkel arbeid geleverd op het bolletje door de kracht F die het expanderend gas erop uitoefent over de lengte van de loop (zoals gezegd verwaarlozen we de zwaartekracht). Aangezien $\vec{F}$ constant is en in dezelfde richting als de verplaatsing werkt, is deze arbeid gelijk aan

$$W = FL$$

en als we het arbeid-energie theorema dan toepassen, vinden we

$$\begin{aligned} FL &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ F &= \frac{mv_f^2}{2L} = 372.5\,\mathrm{N} \approx 370\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

De arbeid-energie manier van werken bespaart ons duidelijk veel werk. Dit verschil in rekenwerk wordt wel kleiner indien we de afgeleide kinematische relaties voor constante versnelling gebruiken die in de cursus en in het boek staan, met name

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{x,0}^2}{2(x - x_0)}.$$

Deze manier van werken verhult echter *wat* je nu precies aan het doen bent. Wat betekent de bovenstaande formule? Hoe kan ik ze intuïtief begrijpen? Bij de kinematische vergelijkingen zijn deze vragen makkelijk te beantwoorden, zodat het bijvoorbeeld ook snel duidelijk is wanneer je een fout hebt gemaakt en waarom.

Oefening 4 (7.72)

We gaan ervan uit dat de meteoriet loodrecht op het aardoppervlak inslaat en nemen de positieve x-as zoals in de vraagstelling positief omlaag. De kracht die de modder erop uitoefent is dan

$$\vec{F}(x) = -fx^3\,\hat{\imath}$$

met $f = 640\,\mathrm{N}m^3$. De zwaartekracht is in dit assenstelsel $\vec{F}_G = mg\,\hat{\imath}$, zodat de nettokracht gegeven is door

$$\vec{F}_{\text{tot}}(x) = \left(mg - fx^3\right)\hat{\imath}.$$

De totale arbeid die geleverd wordt op de meteoriet tussen het moment van inslag en het moment dat hij onder de grond tot stilstand komt, moet gelijk zijn aan de verandering in kinetische energie van de meteoriet:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{\text{tot}},$$

met $v_2 = 0$ en $v_1 \equiv v$ de snelheid waarmee de meteoriet insloeg. De totale arbeid valt te berekenen door de individuele bijdragen van $\vec{F}(x)$ en $\vec{F}_G$ te berekenen en op te tellen, of door rechtstreeks de arbeid van de totale kracht te berekenen. Deze methodes zijn triviaal equivalent omwille van de lineariteitseigenschap van integralen ("de integraal van een som is de som van de integralen"). Als we de diepte waar de meteoriet tot stilstand komt $d = 5\,\mathrm{m}$ noemen, is de arbeid dus

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int \vec{F}_{tot} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \\ &= \int_0^d \left(mg - fx^3\right)\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[mgx - f\frac{x^4}{4}\right]_0^d \\ W_{\text{tot}} &= mgd - f\frac{d^4}{4} = -96\,321.25\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}mv^2 &= W_{\text{tot}} \\ v &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgd - \frac{fd^4}{4}\right)} \\ v &= \sqrt{2gd - \frac{fd^4}{2m}} = 50.7\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Oefening 5 (7.49 ♠)

Een stuk van de ketting met lengte x heeft gewicht $F_G(x) = \gamma x$, met $\gamma = 18\,\mathrm{N/m}$ het gegeven gewicht per eenheid van lengte. Aangezien de beweging van het hangende stuk ketting in dezelfde richting is als de zwaartekracht en de beweging van het stuk ketting op de tafel loodrecht daarop, bestaat de arbeid die de zwaartekracht uitoefent op de ketting uitsluitend uit de bijdrage van het hangende stuk:

$$W_G = \int \gamma x \, \mathrm{d}x,$$

met x de lengte van het hangende stuk ketting. De grenzen van de integratie zijn $x_1 = 3\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$ en $x_2 = 3\,\mathrm{m}$.

$$\begin{aligned} W_G &= \int_{1\,\mathrm{m}}^{3\,\mathrm{m}} \gamma x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\gamma}{2} \left[x^2\right]_{1\,\mathrm{m}}^{3\,\mathrm{m}} \\ W_G &= 72\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Oefening 6 (7.87 ♠)

a) Het Arbeid-Energie Theorema zegt dat de passagier een arbeid op de kleuter moet uitoefenen die gelijk is aan de verandering in de kinetische energie van de kleuter:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2,$$

met $m = 18\,\mathrm{kg}$ de massa van de kleuter, $v_2 = 0$ en $v_1 = 25\,\mathrm{m/s}$ de initiële snelheid van de kleuter. Als de passagier tijdens de noodstop een gemiddelde kracht F uitoefent op de kleuter, dan is

$$W = -Fd,$$

met $d = 45\,\mathrm{m}$ de afstand waarover de noodstop plaatsvindt. De gemiddelde kracht die de persoon tijdens de noodstop op de kleuter moet uitoefenen wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} Fd &= \frac{1}{2}mv^2 \\ F &= \frac{mv^2}{2d} = 125\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

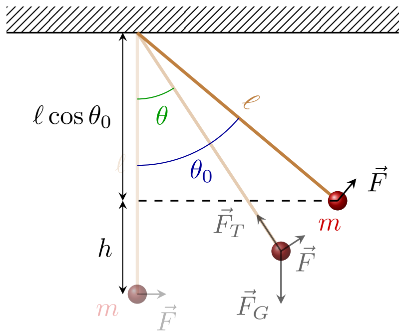
Dit komt overeen met het opheffen van een massa $M = F/g = 12.7\,\mathrm{kg}$. Dat zou moeten lukken, ervan uitgaand dat de kracht constant is en dus gelijk aan de gemiddelde kracht. Als de kracht niet constant was, dan zou je op basis van de gemiddelde kracht nog niet per se kunnen oordelen. Het is dan immers mogelijk dat eerst enorm abrupt geremd wordt tot $1\,\mathrm{m/s}$ en dan heel langzaam tot stilstand wordt gekomen.

b) In dit geval is $d = 12\,\mathrm{m}$ en dus

$$F = \frac{mv^2}{2d} = 468.75\,\mathrm{N}.$$

Dit komt overeen met het opheffen van een massa $M = F/g = 47.8\,\mathrm{kg}$. Dat is al een stuk lastiger, zeker gezien de omstandigheden.

Oefening 7 (7.91 ♠)



Voor een willekeurige hoek θ met de verticale, kunnen we de tweede wet van Newton opschrijven:

$$m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_T + \vec{F},$$

met $\vec{F}_G$ de zwaartekracht op m, $\vec{F}_T$ de spankracht uitgeoefend door het touw op m en $\vec{F}$ de externe kracht uit de opgave. We projecteren deze vergelijking op de radiale en de tangentiële richting, resp.:

$$\begin{aligned} ma_r &= F_{G,r} + F_{T,r} + F_r && \text{(r)} \\ ma_t &= F_{G,t} + F_{T,t} + F_t. && \text{(t)} \end{aligned}$$

Aangezien de massa langsheen een cirkel beweegt, moet $a_t = 0$. Verder is de spankracht altijd langs het touw gericht, dus radiaal: $F_{T,t} = 0$ en $F_{T,r} = -F_T$. In de vraag wordt bovendien gesteld dat de kracht $\vec{F}$ altijd loodrecht op het gestrekte touw werkt en dus enkel een tangentiële componente heeft: $F_r = 0$ en $F_t = F$. Bovendien is de grootte van $\vec{F}$ zodanig dat de snelheid van m constant is: $a_r = 0$. Hiermee krijgen we

$$\begin{aligned} 0 &= F_{G,r} - F_T && \text{(r)} \\ 0 &= F_{G,t} + F && \text{(t)} \end{aligned}$$

of nog, met $F_{G,r} = F_G \cos\theta$ en $F_{G,t} = -F_G \sin\theta$:

$$\begin{aligned} F_T &= mg\cos\theta && \text{(r)} \\ F &= mg\sin\theta. && \text{(t)} \end{aligned}$$

De arbeid uitgeoefend door deze kracht is gegeven door

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

met $\mathrm{d}\vec{s}$ een infinitesimaal stukje langs de cirkel met straal ℓ en $\vec{F}$ ook tangentieel aan die cirkel gericht. Met $\mathrm{d}s = \ell\,\mathrm{d}\theta$ wordt dit:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\theta_0} F(\theta)\ell\,\mathrm{d}\theta \\ &= mg\ell \int_0^{\theta_0} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ W &= mg\ell(1-\cos\theta_0) = mgh. \end{aligned}$$

De laatste stap bestaat eruit om in te zien dat $h = \ell - \ell\cos\theta_0 = \ell(1-\cos\theta_0)$, zoals duidelijk zou moeten zijn op de figuur.

Hoofdstuk 8 (Behoud van energie)

Oefening 1 (8.7)

a) De definiërende eigenschap van een conservatieve kracht is dat ze netto geen arbeid levert langs een gesloten pad. De kracht werkt enkel langs de x-as, zodat de geleverde arbeid tussen twee punten x_1 en x_2 gegeven is door

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aangezien de integraal nul is wanneer bovengrens en ondergrens gelijk zijn ($x_1 = x_2$), kunnen we concluderen dat de arbeid langs een gesloten pad nul is voor deze kracht en ze dus conservatief is. Meer nog: we hebben eigenlijk aangetoond dat elke kracht in 1D conservatief is.

b) De potentiële energiefunctie voor een conservatieve kracht is gedefinieerd als

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}(\vec{r})\,\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}(\vec{r})\,\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}(\vec{r})\,\hat{k}\right).$$

Voor onze ééndimensionale kracht wordt dit

$$F_x(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(\vec{r}).$$

Aangezien F_x enkel van x afhangt, kunnen we ook schrijven dat

$$F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x).$$

Dit betekent dat

$$U(x) = -\int F_x(x)\,\mathrm{d}x$$
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{5}bx^5 + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

De integratieconstante komt overeen met de potentiële energie in de veer wanneer de uitrekking x nul is. Gewoonlijk kiezen we $U = 0$ bij $x = 0$, maar de precieze waarde is niet belangrijk aangezien enkel verschillen in potenële energie een fysische betekenis hebben.

Oefening 2 (8.15)

a) Aangezien het touw zich gedraagt als een Hookse veer met veerconstante k, is de (potentiële) energie geassocieerd met een uitrekking Δx van het touw gegeven door

$$U_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2.$$

De (potentiële) energie geassocieerd met het zwaarteveld waarin de bungeespringer zich bevindt is

$$U_g = mgh,$$

met m de massa van de bungeespringer en h haar hoogte boven een willekeurig gekozen referentiehoogte waar we $U_g = 0$ nemen. Ten slotte heeft de bungeespringer ook een kinetische energie geassocieerd met haar snelheid v:[8]

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Behoud van energie betekent dat de som van al deze bijdragen te allen tijde gelijk moet zijn. Stel nu dat we onze referentiehoogte voor de gravitationele energie kiezen op het laagste punt dat de bungeespringer bereikt tijdens haar sprong, wanneer het touw maximaal is uitgerekt. Dan kunnen we de energie van de bungeespringer voordat ze van de brug springt vergelijken met haar energie op dit moment van maximale uitrekking. Op beide momenten is haar snelheid nul, dus is ook $K_1 = K_2 = 0$. Vóór de sprong is het touw nog niet uitgerekt zodat bovendien $U_{\text{el},1} = 0$. Op het moment van maximale uitrekking ten slotte is $U_g = 0$ vanwege onze keuze van de referentiehoogte voor U_g. We hebben dus:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}k\Delta x_2^2,$$

met $h_1 = 31\,\text{m}$ en $\Delta x_2 = 31\,\text{m} - 12\,\text{m} = 19\,\text{m}$. De veerconstante is dan gelijk aan

$$k = \frac{2mgh_1}{\Delta x^2} = 93\,\text{N/m}.$$

b) Uit de tweede wet van Newton kunnen we concluderen dat de versnelling van de bungeespringer maximaal is wanneer de nettokracht die op haar inwerkt maximaal is. De nettokracht op de bungeespringer is de (vector-)som van de zwaartekracht en de veerkracht uitgeoefend door het bungeekoord. Met de positieve x-as verticaal omlaag gericht, kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= -k\Delta x + mg \\ \Rightarrow a &= \frac{F_{\text{tot}}}{m} \\ a &= -\frac{k\Delta x}{m} + g. \end{aligned}$$

De versnelling is dus maximaal wanneer het rechterlid maximaal is (in absolute waarde). De zwaarteversnelling verandert niet, dus enkel de uitrekking van het touw Δx beïnvloedt de grootte van de versnelling. Aangezien het touw niet kan duwen zoals een veer dat kan, is er enkel een kracht wanneer het touw uitgerekt wordt, wanneer de bungeespringer zich lager dan de evenwichtslengte bevindt. Met de positieve x-as omlaag gekozen, betekent dit dat $\Delta x > 0$. Er zijn nu twee mogelijkheden: ofwel is te allen tijde

$$\frac{k\Delta x}{m} \leq 2g$$

[8]Merk op dat kinetische energie ook referentie-afhankelijk is, zij het op een andere manier dan potentiële energie. Als één waarnemer voor een massa m een kinetische energie K meet, kan terzelfdertijd een andere waarnemer een kinetische energie $K' \neq K$ meten. Immers, de kinetische energie van m hangt af van de snelheid van het massapunt en die is op zijn beurt afhankelijk van de snelheid van de waarnemer. Een korte maar nuttige oefening is om aan te tonen dat de snelheid van de waarnemer niet uitmaakt bij het toepassen van de wet van behoud van energie, zolang die snelheid maar constant is.

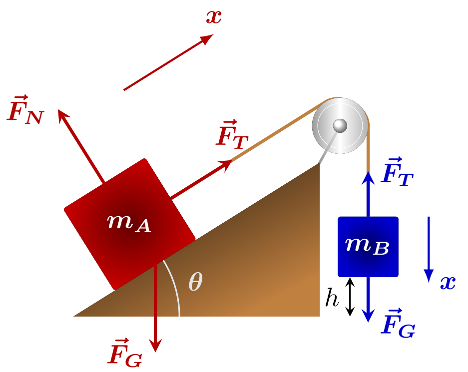
en dan is $a_{\text{max}} = g$, ofwel wordt de elastische term groter dan $2g$. In welk van de twee gevallen we ons bevinden, kunnen we alleen bepalen door de versnelling te bepalen op het moment dat de elastische bijdrage maximaal is en te vergelijken met $g = 9.81\,\text{m/s}^2$. De elastische term is op zijn grootst (in absolute waarde) wanneer Δx maximaal is, dus

$$a_{\text{max}} = -\frac{k\Delta x_{\text{max}}}{m} + g = -21.9\,\text{m/s}^2,$$

met $\Delta x_{\text{max}} = 19\,\text{m}$. De maximale versnelling die de bungeespringer ondervindt, is dus $21.9\,\text{m/s}^2$.

Oefening 3 (8.22)

a) We kiezen onze assen zoals op de tekening: voor massa A nemen we de positieve x-as langs de helling omhoog en voor massa B verticaal omlaag. Voor massa A kiezen we bovendien de y-as loodrecht op het hellend vlak, omhoog gericht (langs $\vec{F}_N$). Met deze assenkeuze geldt $a_{y,A} = 0$ en $a_{x,A} = a_{x,B} \equiv a$. Dit laatste volgt uit het feit dat de twee blokken via een strak gespannen touw met elkaar verbonden zijn, zodat beweging van het ene blok overeenkomt met dezelfde beweging van het tweede blok.



Voor het touw geldt bovendien dat de spankracht erin overal gelijk is, in de aanname dat het zelf massaloos is en ook de katrol massaloos en wrijvingsloos is. Deze aannames worden niet expliciet vermeld, maar tenzij anders vermeld mag je hier altijd vanuit gaan. In dit geval betekent dit dus dat $F_{T,A} = F_{T,B} \equiv F_T$.

De tweede wet van Newton voor blok A geeft dan:

$$m_A a = F_T - m_A g \sin\theta \qquad \text{(x)}$$
$$0 = F_N - m_A g \cos\theta. \qquad \text{(y)}$$

Voor blok B vinden we:

$$m_B a = m_B g - F_T.$$

We tellen deze vergelijking op bij de x-vergelijking voor A:

$$(m_A + m_B)a = (m_B - m_A \sin\theta)g$$
$$a = \frac{m_B - m_A \sin\theta}{m_B + m_A} g = 3.14\,\text{m/s}^2.$$

b) Aangezien hun versnellingen te allen tijde gelijk zijn en hun beginsnelheden dat ook zijn, geldt $v_A(t) = v_B(t)$, voor alle t. We moeten dus slechts van één blok de eindsnelheid bepalen. We kiezen hier voor blok B en nemen de beginpositie van dit blok als nulpunt voor de x-as, zodat geldt:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$
$$v(t) = at.$$

We zoeken nu $v(t_f)$ waarbij $x(t_f) = h$, ofwel

$$h = \frac{1}{2}at_e^2,$$

zodat

$$\begin{aligned} v(t_e) &= a\sqrt{\frac{2h}{a}} \\ &= \sqrt{2ah} \\ v(t_e) &= \sqrt{2gh\frac{m_B - m_A\sin\theta}{m_B + m_A}} = 2.17\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

c) We kunnen ons ditmaal niet zomaar focussen op één van de blokken.[9] Als we ditmaal $h = 0$ nemen ter hoogte van de grond, geeft behoud van energie:

$$\begin{aligned} m_Agh_A + \frac{1}{2}m_Av^2 + m_Bgh_B + \frac{1}{2}m_Bv^2 &= m_Agh'_A + \frac{1}{2}m_A(v')^2 + m_Bgh'_B + \frac{1}{2}m_B(v')^2 \\ m_Agh_A + m_Bgh &= m_Agh'_A + \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v')^2 \\ \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v')^2 &= m_Ag(h_A - h'_A) + m_Bgh. \end{aligned}$$

Het probleem waar we nu nog mee zitten, is de hoogte van blok A. Die kennen we niet, noch h_A noch h'_A. Dit is echter geen probleem, aangezien we niet die specifieke waarden nodig hebben, maar wel hun verschil. Met andere woorden: de verticale afstand die A aflegt. De afgelegde afstand langs de helling kennen we: die is gelijk aan de verticale afstand die B aflegt, namelijk $h'_B - h_B = 0 - h = -h$. De verticale component daarvan is dan

$$\Delta h_A = -h\sin\theta,$$

zodat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v')^2 &= -m_Agh\sin\theta + m_Bgh \\ v' &= \sqrt{2gh\frac{m_B - m_A\sin\theta}{m_B + m_A}} = 2.17\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

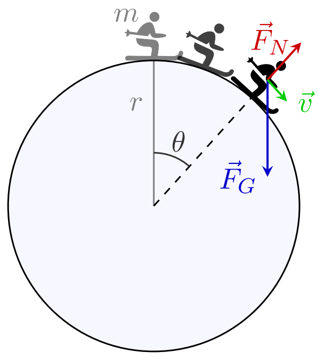
[9] Merk op dat je je wel op één blok kan focussen als je het arbeid-energie theorema gebruikt: de arbeid die de nettokracht m_Ba op massa B uitoefent, wordt omgezet in kinetische energie. Met andere woorden:

$$m_Bah = \frac{1}{2}m_Bv^2.$$

Dit leidt tot exact dezelfde uitdrukking als voorheen. Eigenlijk is het arbeid-energie theorema een algemenere vorm van de wet van behoud van energie. Bedenk je immers hoe we potentiële energie hebben gedefinieerd.

Oefening 4 (8.28)

a) De figuur hiernaast toont de situatie. De baan die de skiër volgt langsheen de sferische helling is een cirkel, tenminste tot aan het moment dat hij loskomt van het oppervlak. We beschrijven de positie van de skiër aan de hand van de hoek θ die zijn positievector met de verticale maakt. Hiermee wordt zijn beginpositie gegeven door $\theta = 0$. Als assenstelsel nemen we eentje dat met de skiër meebeweegt en waarvan één as loodrecht op de cirkelomtrek naar binnen toe wijst (radiaal) en de andere rakend is aan de omtrek (tangentieel).



Na een tijd t bevindt de skiër zich een hoek $\theta(t)$ verder langs de omtrek van de cirkel. De tweede wet van Newton langs de radiale richting (langs de straal naar binnen toe) geeft dan:

$$ma_r = mg\cos\theta - F_N(\theta), \tag{10}$$

waarbij de radiale componente van de zwaartekracht voor de centripetaalversnelling zorgt. De tangentiële componente van de zwaartekracht zorgt ervoor dat de tangentiële snelheid $v(\theta)$ van de skiër almaar toeneemt. Aangezien

$$a_r = \frac{v^2(\theta)}{r}$$

en r constant is, moet het rechterlid van (10) ook almaar toenemen. De cosinus is strikt dalend voor θ tussen 0° en 90°, zodat dit alleen kan als $F_N(\theta)$ afneemt met θ. Meerbepaald is er een hoek θ_0 waarvoor $F_N(\theta_0) = 0$. Op dat punt verlaat de skiër de sfeer en geldt:

$$\begin{aligned} ma_r &= mg\cos\theta_0 \\ \frac{v^2(\theta_0)}{r} &= g\cos\theta_0. \end{aligned} \tag{11}$$

De vraag is nu gereduceerd tot het zoeken van $v(\theta_0)$. Dit kunnen we op twee manieren doen: door de arbeid geleverd door de tangentiële componente van de zwaartekracht te relateren aan de toename in de (tangentiële) snelheid (arbeid-energie theorema), of door gebruik te maken van de wet van behoud van energie. Aangezien dit een hoofdstuk is over behoud van energie, kiezen we ditmaal voor die optie. Probeer gerust zelf eens via het arbeid-energie theorema tot de oplossing te komen!

We kiezen als referentiehoogte het middelpunt van de sfeer. Daar nemen we $h = 0$, zodat de gravitationele potentiële energie van de skiër in zijn startpositie gelijk is aan $mgh_1 = mgr$. Wanneer de skiër zich bij een hoek θ bevindt, is zijn hoogte gelijk aan $h_2 = r\cos\theta$. Zijn snelheid is op dat moment toegenomen van $v_1 = 0$ tot $v_2 = v(\theta)$, zodat behoud van energie geeft:

$$\begin{aligned} mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ gr &= gr\cos\theta + \frac{1}{2}v^2(\theta) \\ v(\theta) &= \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}. \end{aligned}$$

Invullen in (11) levert:

$$\begin{aligned} 2g(1-\cos\theta_0) &= g\cos\theta_0 \\ 2-3\cos\theta_0) &= 0 \\ \cos\theta_0 &= \frac{2}{3} \\ \theta_0 &= \mathrm{Bgcos}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2°. \end{aligned}$$

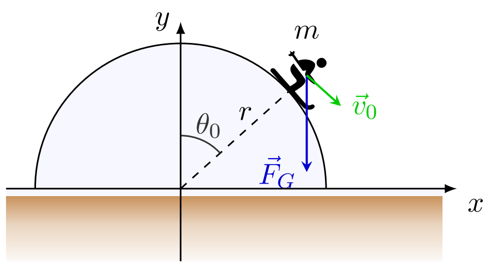
Dit is de hoek met de verticale waarbij de skiër de sfeer verlaat.

b) Als er wrijving is, dan is $v(\theta)$ kleiner dan in het geval zonder wrijving, voor alle θ. De zwaartekracht blijft echter dezelfde, zodat

$$F_N(\theta) = mg\cos\theta - \frac{mv^2(\theta)}{r}$$

voor alle θ groter is in het geval met wrijving dan in het geval zonder wrijving, en dus ook pas later nul wordt. (De bovenstaande vergelijking is gewoon (10) omgevormd, met a_r ingevuld.)

c) We hebben net al de tangentiële componente van zijn snelheid bepaald op het moment dat de skiër loskomt. In het radiaal-tangentieel assenstelsel is dit de enige componente van zijn snelheid, vandaar dat we ze ook steeds genoteerd hebben met v. Laten we nu overgaan op een ander assenstelsel, met als oorsprong het midden van de cirkel, een horizontale x-as en een verticale y-as.



In dit assenstelsel heeft de snelheid van de skiër op het moment dat hij loskomt wel twee componenten: een x-component en een y-component:

$$\begin{aligned} v_{0,x} &= v_0\cos\theta_0 \\ v_{0,y} &= -v_0\sin\theta_0. \end{aligned}$$

De positie van de skiërop het moment dat hij loskomt van de oppervlak, wordt in het (x,y)-stelsel gegeven door

$$\begin{aligned} x_0 &= r\cos\theta_0 \\ y_0 &= r\sin\theta_0. \end{aligned}$$

De beweging van de skiër kan beschreven worden door

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0,x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

We vullen $t = (x-x_0)/v_{0,x}$ in de vergelijking voor $y(t)$ in om een vergelijking $y(x)$ te krijgen die de paraboolbaan van de skiër beschrijft:

$$y(x) = y_0 + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}(x-x_0) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x-x_0}{v_{0,x}}\right)^2.$$

De skiër raakt de grond wanneer $y = 0$, dus als

$$0 = y_0 - \tan\theta_0\, u - \frac{g}{2v_{0,x}^2}\, u^2$$

met $u \equiv x - x_0$. De discriminant van deze vierkantsvergelijking is

$$D = \tan^2\theta_0 + \frac{2gy_0}{v_{0,x}^2} = \tan^2\theta_0 \left(1 + \frac{2gr}{v_0^2\cos\theta_0}\right).$$

Hiermee wordt

$$u = \frac{\tan\theta_0 \pm \tan\theta_0\sqrt{1 + \frac{2gr}{v_0^2\cos\theta_0}}}{-\frac{g}{v_{0,x}^2}}$$
$$u = \frac{v_{0,x}^2}{g}\left[\mp\tan\theta_0\sqrt{1 + \frac{2gr}{v_0^2\cos\theta_0}} - \tan\theta_0\right].$$

De oplossing met het minteken is negatief en kan dus uitgesloten worden. (Dit is het snijpunt van de parabool met de x-as langs de andere kant van de sferische heuvel.) We vinden dan:

$$x - x_0 = \frac{v_0^2}{g}\left[\sin\theta_0\cos\theta_0\sqrt{1 + \frac{2gr}{v_0^2\cos\theta_0}} - \sin\theta_0\cos\theta_0\right]$$
$$x = r\cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{g}\left[\sin\theta_0\cos\theta_0\sqrt{1 + \frac{2gr}{v_0^2\cos\theta_0}} - \sin\theta_0\cos\theta_0\right].$$

Oefening 5 (8.39)

a) Voordat je de bal laat vallen, heeft hij een bepaalde hoeveelheid potentiële energie ten gevolge van het zwaarteveld waarin hij zich bevindt. Als we voor onze referentiehoogte het grondniveau nemen, dan is die gravitationele energie gelijk aan

$$U_{G,1} = mgh_1$$

met $h_1 = 2\,\text{m}$. Verder bezit de bal geen enkele andere vorm van energie, zodat $E_1 = U_{G,1} = mgh_1$.

Op het moment dat de bal zijn hoogste punt na de botsing bereikt, heeft hij een gravitationele energie

$$U_{G,2} = mgh_2$$

met $h_2 = 1.5\,\text{m}$. Opnieuw bezit hij op dat moment geen enkele andere vorm van energie, zodat $E_2 = U_{G,2} = mgh_2$.

De fractie energie die verloren is gegaan in de botsing, is gegeven door het verschil in energie voor de botsing en na de botsing, gedeeld door de oorspronkelijke hoeveelheid energie (voor de botsing):

$$\delta E = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$$
$$\delta E = \frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{1}{4}.$$

b) Vlak voor de botsing is alle gravitationele energie omgezet in kinetische energie:

$$\frac{1}{2}mv_V^2 = mgh_1$$
$$v_V = \sqrt{2gh_1} = 6.26\,\mathrm{m/s}.$$

Vlak na de botsing heeft de bal een bepaalde hoeveelheid kinetische energie die vervolgens volledig wordt omgezet in gravitationele energie:

$$\frac{1}{2}mv_N^2 = mgh_2$$
$$v_N = \sqrt{mgh_2} = 5.42\,\mathrm{m/s}.$$

c) De 'verloren' energie is omgezet in warmte, geluidsenergie en plastische vervorming.

Oefening 6 (8.101 ♠)

De energie van de snoepreep wordt door de man volledig omgezet in gravitationele potentiële energie. Met $h = 0$ op grondniveau geeft dit

$$\Delta E = mgh$$
$$h = \frac{\Delta E}{mg} = 1475\,\mathrm{m}.$$

Als hij naar beneden springt, dan wordt zijn gravitationele potentiële energie omgezet in kinetische energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v = \sqrt{2gh}$$
$$v = 170\,\mathrm{m/s} = 613\,\mathrm{km/h}.$$

Oefening 7 (♠♠)

Dit is een erg moeilijke vraag, dus laat je er niet door ontmoedigen als je ze niet kan beantwoorden. Het is het soort vraag waaruit je alleen maar positieve conclusies kan trekken met het vooruitzicht op het examen: als je ze kan beantwoorden, is dat indrukwekkend en kan je zelfs een overstap naar de fysica overwegen; als je ze niet kan beantwoorden, is dat volkomen normaal.

Laten we nog eens herhalen wat het betekent voor een kracht om conservatief te zijn.

> *Een kracht $\vec{F}(\vec{r})$ is conservatief als en slechts als de arbeid geleverd door die kracht onafhankelijk is van het gekozen pad.*

Met andere woorden: een kracht is conservatief als de arbeid geleverd door die kracht op een voorwerp dat langs een bepaald pad beweegt enkel afhangt van het beginpunt en het eindpunt van dat pad. Indien dat het geval is, dan kunnen we voor $\vec{F}(\vec{r})$ een potentiële energiefunctie $U(\vec{r})$ definiëren zodat

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}).$$

In cartesische coördinaten wordt dit:

$$\vec{F}(x,y,z) = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z)\,\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z)\,\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)\,\hat{k}\right].$$

Een andere manier om dit te schrijven is:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}, \end{cases}$$

waarbij we de afhankelijkheid van $\vec{r}$ (of (x,y,z)) met het oog op beknoptheid weggelaten hebben. Het is duidelijk dat een kracht die hieraan voldoet, (onder andere) ook moet voldoen aan

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

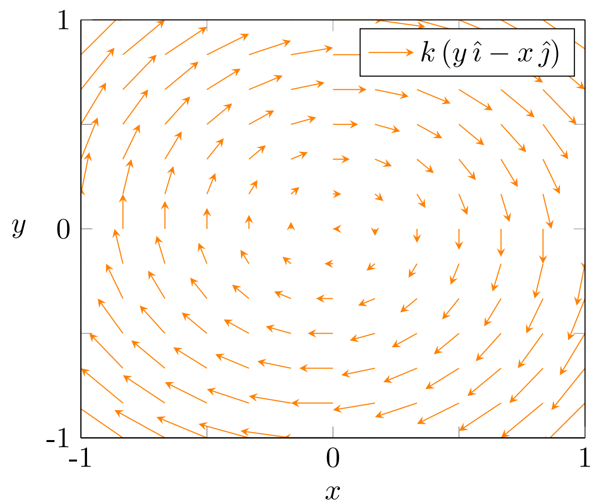
Dus als we een kracht kunnen vinden die hier niet aan voldoet, dan hebben is die kracht niet conservatief. Eén voorbeeld van zo'n kracht is

$$\begin{aligned} F_x &= ky \\ F_y &= -kx \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

Dit is een kracht in drie dimensies, maar je ziet onmiddellijk dat de z-component niet van belang is. In twee dimensies kunnen we deze kracht dus ook als voorbeeld van een niet-conservatieve kracht gebruiken:

$$\begin{aligned} F_x &= ky \\ F_y &= -kx \end{aligned}$$

De figuur hieronder toont een plot van dit krachtveld.



Voor een kracht in één dimensie kunnen we vanzelfsprekend niet opleggen dat

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

aangezien we maar één component hebben om mee te werken, laat ons zeggen $F_x(x)$. We hebben in oefening 1a reeds aangetoond dat het in dat geval onmogelijk is om een niet-conservatieve kracht te vinden, aangezien

$$\int_a^a F_x(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

voor eender welke functie $F_x(x)$.

Hoofdstuk 9 (Lineaire impuls)

Oefening 1 (9.4)

Het verband tussen kracht en impuls is gegeven door

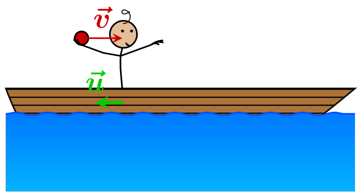
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

We vinden het verschil in impuls door integratie:

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t \\
\vec{p}_2 - \vec{p}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \left(26\,\mathrm{N}\,\hat{\imath} - 12\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}t^2\,\hat{\jmath}\right)\mathrm{d}t \\
\Delta\vec{p} &= \left[26\,\mathrm{N}t\,\hat{\imath} - 12\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}\frac{t^3}{3}\,\hat{\jmath}\right]_{t_1}^{t_2} \\
\Delta\vec{p} &= 26\,\mathrm{N}\,(t_2 - t_1)\,\hat{\imath} - 4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}^2}\left(t_2^3 - t_1^3\right)\hat{\jmath} \\
\Delta\vec{p} &= 26\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\imath} - 28\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

Oefening 2 (9.13)

De tekening hiernaast toont de situatie. Voordat de jongen het pakje weggooit, is het systeem kind+boot in rust, net als de jongen zelf. Bij de worp krijgt het pakje een snelheid $\vec{v} = 10\,\mathrm{m/s}\,\hat{\imath}$ mee en het systeem kind+boot een snelheid $\vec{u} = u_x\,\hat{\imath}$. Behoud van impuls (langs de x-as) geeft dus:



$$\begin{aligned}
p_{x,\mathrm{voor}} &= p_{x,\mathrm{na}} \\
0 &= m_p v_x + (m_b + m_k)u_x \\
u_x &= -\frac{m_p}{m_b + m_k} v_x = -0.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}$$

De snelheid van de boot na de worp is dus $\vec{u} = -0.97\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\imath}$.

Opmerking: waarom kunnen we hier niet gebruikmaken van behoud van energie? *Hint:* de klassieke mechanica is een tijdssymmetrische theorie. M.a.w. er is geen verschil tussen klassieke mechanica waarbij de tijd in de ene richting loopt en klassieke mechanica waarbij de tijd in de omgekeerde richting loopt. Hoe ziet het proces uit deze oefening eruit als je de tijd achterstevoren laat lopen? Kan je voor dat inverse proces behoud van energie gebruiken?

Oefening 3 (9.25)

De krachtstoot ten gevolge van een kracht $\vec{F}(t)$ wordt gedefinieerd als

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Als $\vec{F}$ de totale kracht is, dan kunnen we ook schrijven:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} \mathrm{d}\vec{p} \\ \vec{J} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.\end{aligned}$$

Laat ons nu eens de gegeven situatie bekijken. We kiezen de x-as horizontaal naar rechts gericht en de y-as verticaal omhoog. Aangezien $v_i = v_f$ en $\theta_i = \theta_f$, is $v_{f,x} = -v_{i,x}$ en $v_{f,y} = v_{i,y}$. Toegepast op deze situatie vinden we dus:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i \\ &= m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \\ &= m(v_{f,x}\,\hat{\imath} + v_{f,y}\,\hat{\jmath} - v_{i,x}\,\hat{\imath} - v_{i,y}\,\hat{\jmath}) \\ &= 2mv_{i,x}\,\hat{\imath} \\ \vec{J} &= 2.12\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}\,\hat{\imath}.\end{aligned}$$

Als de botsing elastisch is, dan geldt energiebehoud:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_i^2 &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ \frac{p_i^2}{2m} &= \frac{p_f^2}{2m} \\ |\vec{p}_i| &= |\vec{p}_f|.\end{aligned}$$

Hiermee hebben we dus al aangetoond dat $p_i = p_f$. Bovendien kunnen we impulsbehoud langs de y-as gebruiken. Langs die richting werkt er immers geen kracht op de bal, zodat

$$\begin{aligned}p_{y,i} &= p_{y,f} \\ p_i \sin\theta_i &= p_f \sin\theta_f.\end{aligned}$$

Aangezien $p_i = p_f$ volgt hieruit dat

$$\theta_i = \theta_f\;(+\,2k\pi). \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Een hoek θ_i groter dan 90° of kleiner dan 0° is betekenisloos, dus $k = 0$ en bijgevolg $\theta_i = \theta_f$.

Oefening 4 (9.39a)

Voor een elastische botsing kunnen we bovenop behoud van impuls ook gebruikmaken van behoud van energie. Aangezien de botsing centraal is, is dit een ééndimensionaal probleem. Behoud van impuls langs de bewegingsrichting geeft dus:

$$\begin{aligned}m_n v_{n,i} &= m_n v_{n,f} + m_H v_{H,f} \qquad (m_n = m_H \equiv m) \\ \cancel{m} v_{n,i} &= \cancel{m}\,(v_{n,f} + v_{H,f})\,,\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van het feit dat de massa's van de deeltjes gelijk zijn. Behoud van energie geeft daarmee:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_{n,i}^2 &= \frac{1}{2}mv_{n,f}^2 + \frac{1}{2}mv_{H,f}^2 \\
v_{n,i}^2 &= v_{n,f}^2 + v_{H,f}^2 \\
(v_{n,f} + v_{H,f})^2 &= v_{n,f}^2 + v_{H,f}^2 \\
2v_{n,f}v_{H,f} &= 0
\end{aligned}$$

Aangezien $v_{H,f} > 0$, volgt hieruit dat $v_{n,f} = 0$. De fractie kinetische energie die het neutron verloren heeft, is dus

$$\begin{aligned}
\delta T &= \frac{T_{n,i} - T_{n,f}}{T_{n,i}} \\
\delta T &= \frac{T_{n,i} - 0}{T_{n,i}} = 1.
\end{aligned}$$

Het neutron verliest dus al zijn kinetische energie aan het waterstofatoom. Dit is ook voorbeeld 9-7 zoals gezien in de theorie.

Oefening 5 (9.46)

Aangezien de bumpers aan elkaar vastklampen, concluderen we dat dit een inelastische botsing is. We kunnen dus geen gebruik maken van behoud van energie. Behoud van impuls blijft echter geldig en het probleem is opnieuw ééndimensionaal. Met v_s de snelheid van de sportwagen vlak voor de botsing en v_{st} de snelheid van sportwagen plus terreinwagen, kunnen we dus schrijven:

$$\begin{aligned}
m_s v_s &= (m_s + m_t)v_{st} \\
v_{st} &= \frac{m_s}{m_s + m_t}v_s.
\end{aligned}$$

Na de botsing glijdt het geheel nog een afstand $d = 2.8\,\mathrm{m}$ verder waarna ze door de wrijvingskracht tot stilstand komen. We kunnen de vraag nu op twee verschillende manieren verder oplossen: kunnen ofwel de kinematische vergelijkingen gebruiken en $v = 0$ eisen wanneer $x = d$, ofwel kunnen we het arbeid-energie theorema gebruiken. Hieronder kiezen we voor de tweede methode, maar probeer zelf zeker eens het juiste antwoord te vinden via de andere methode!

Laat ons de x-as langs de bewegingsrichting kiezen en de y-as loodrecht daarop. Het arbeid-energie theorema zegt dat

$$\begin{aligned}
\Delta T &= W \\
&= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \qquad \text{(1D)} \\
\Delta T &= \int_{x_1}^{x_2} F_x \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

met F_x de nettokracht langs de x-richting, de bewegingsrichting. Deze kracht vinden we met behulp van de tweede wet van Newton. Langs de bewegingsrichting werkt in dit geval maar één kracht: de wrijvingskracht $F_W = \mu F_N$. Langs de richting loodrecht daarop (de

y-richting) werken twee krachten: de zwaartekracht F_G en de normaalkracht F_N. Er is geen beweging in de y-richting, zodat $a_y = 0$ en $a_x = a$. We hebben dus:

$$\left.\begin{aligned} ma &= \mu F_N \\ 0 &= F_N - F_G \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{\mu F_G}{m} = \mu g$$

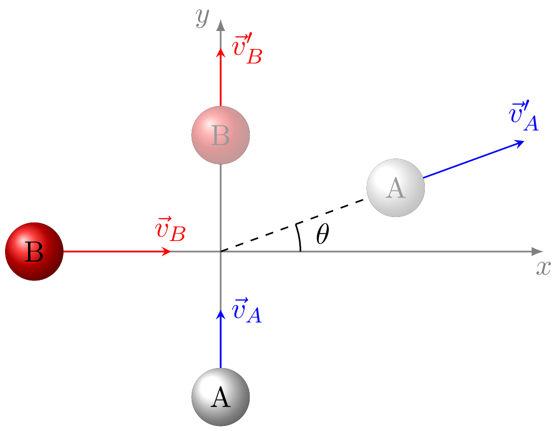
met $m = m_s + m_t$, of nog: $F_x = ma_x = m\mu g$. Het arbeid energie-theorema geeft dan

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_0^d m\mu g \mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}mv_{st}^2 - 0 &= \mu g d \\ v_{st} &= \sqrt{2\mu g d} \\ \frac{m_s}{m_s + m_t}v_s &= \sqrt{2\mu g d} \\ v_s &= \frac{m_s + m_t}{m_s}\sqrt{2\mu g d} \\ v_s &= 23.2\,\mathrm{m/s} \approx 83.5\,\mathrm{km/h}. \end{aligned}$$

Oefening 6 (9.56)

De tekening hiernaast toont de situatie. We kennen de richtingen waarin de ballen bewegen vóór de botsing, hun snelheden op dat moment en de bewegingsrichting van bal B na de botsing. De onbekenden zijn dus nog v'_B, v'_A en θ. De massa's van de ballen zijn identiek zodat behoud van impuls langs x en y geeft:

$$v_B = v'_{A,x} \qquad \text{(x)}$$
$$v_A = v'_{A,y} + v'_B. \qquad \text{(y)}$$



Aangezien de botsing elastisch is, kunnen we bovendien behoud van energie gebruiken:

$$v_A^2 + v_B^2 = \left(v'_A\right)^2 + \left(v'_B\right)^2. \tag{12}$$

We maken nu gebruik van het feit dat

$$\left(v'_A\right)^2 = \left(v'_{A,x}\right)^2 + \left(v'_{A,y}\right)^2$$

en de vergelijkingen voor impulsbehoud langs x en y om vgl. (12) te herschrijven:

$$\begin{aligned} v_A^2 + v_B^2 &= \left(v'_{A,x}\right)^2 + \left(v'_{A,y}\right)^2 + \left(v'_B\right)^2 \\ v_A^2 + v_B^2 &= v_B^2 + \left(v_A - v'_B\right)^2 + \left(v'_B\right)^2 \\ v_A^2 &= v_A^2 + \left(v'_B\right)^2 - 2v_Av'_B + \left(v'_B\right)^2 \\ 2\left(v'_B\right)^2 &= 2v_Av'_B \qquad (v'_B \neq 0) \\ v'_B &= v_A. \end{aligned}$$

Als we dit invullen in de vergelijking voor impulsbehoud langs y, vinden we dat

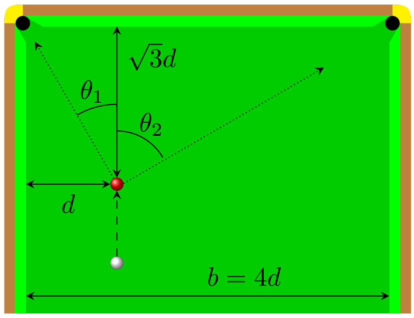
$$\begin{aligned} v_A &= v'_{A,y} + v_A \\ \Leftrightarrow v'_{A,y} &= 0. \end{aligned}$$

Met andere woorden: bal A beweegt na de botsing langs de positieve x-richting. Meer specifiek zijn de snelheden van beide ballen na de botsing:

$$\begin{aligned} \vec{v}'_A &= v_B\,\hat{\imath} \\ \vec{v}'_B &= v_A\,\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Oefening 7 (9.85 ♠)

De tekening hiernaast toont de situatie. We kiezen een assenstelsel met oorsprong in de initiële positie van de rode *object ball*, de positieve x-as horizontaal naar rechts en de positieve y-as verticaal omhoog. Aangezien de botsing volkomen elastisch is, kunnen we zowel behoud van impuls als behoud van energie gebruiken. Zoals gewoonlijk is er meer dan één manier om deze vraag op te lossen. De kortste manier is om een geometrische redenering met de vectorvergelijking voor impulsbehoud te combineren.



Opdat we de object ball zouden potten, moet hij de stippellijn volgen die getekend is op de figuur, waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{d}{\sqrt{3}d} \\ \tan\theta_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \theta_1 &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Opdat de cueball in de andere pocket zou verdwijnen, moet hij de andere stippellijn volgen na de botsing. Daarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \tan\theta_2 &= \frac{b-d}{\sqrt{3}d} \\ &= \frac{3d}{\sqrt{3}d} \\ \tan\theta_2 &= \sqrt{3} = \frac{1}{\tan\theta_1} \\ \Leftrightarrow \theta_2 &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Initieel heeft enkel de witte *cueball* een snelheid, zodat impulsbehoud gegeven is door

$$\vec{p}_{c,i} = \vec{p}_{c,f} + \vec{p}_{o,f}.$$

Gebruikmakend van $mv^2 = p^2/m$ en het feit dat de massa's van de ballen gelijk zijn, kunnen we energiebehoud voor deze situatie schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}^{\,2}_{c,i}}{2m} &= \frac{\vec{p}^{\,2}_{c,f}}{2m} + \frac{\vec{p}^{\,2}_{o,f}}{2m} \\ \vec{p}^{\,2}_{c,i} &= \vec{p}^{\,2}_{c,f} + \vec{p}^{\,2}_{o,f}. \end{aligned}$$

Als we de vectorvergelijking voor impulsbehoud hierin invullen, vinden we

$$\begin{aligned}
(\vec{p}_{c,f}+\vec{p}_{o,f})^2 &= \vec{p}^{\,2}_{c,f}+\vec{p}^{\,2}_{o,f}\\
\vec{p}^{\,2}_{c,f}+\vec{p}^{\,2}_{o,f}+2\vec{p}_{c,f}\vec{p}_{o,f} &= \vec{p}^{\,2}_{c,f}+\vec{p}^{\,2}_{o,f}\\
2\vec{p}_{c,f}\vec{p}_{o,f} &= 0\\
2p_{c,f}p_{o,f}\cos(\theta_1+\theta_2) &= 0\\
\Leftrightarrow \theta_1+\theta_2 &= 90^\circ\\
\Leftrightarrow \theta_2 &= 90^\circ-\theta_1 \overset{!}{=} 60^\circ.
\end{aligned}$$

Met andere woorden: de hoek waaronder de cueball na de botsing verder beweegt is exact gelijk aan de hoek nodig om in de andere pocket terecht te komen.

Hetgeen we net bewezen hebben – dat de hoek $\theta=\theta_1+\theta_2$ tussen de snelheden van de ballen na de botsing gelijk is aan 90° – geldt trouwens altijd voor een elastische botsing tussen twee ballen van gelijke massa waarbij één van beide ballen oorspronkelijk stilligt.

Oefening 10 (♠♠)

We kunnen behoud van impuls neerschrijven tussen de tijdstippen t en $t+\mathrm{d}t$. Aangezien we met een ééndimensionale situatie te maken hebben, wordt dit één enkele scalaire vergelijking.

Het systeem dat we beschouwen is de raket plus de brandstof die ze bevat op tijdstip t. Op tijdstip $t+\mathrm{d}t$ is de massa van de raket plus brandstof veranderd met een hoeveelheid $\mathrm{d}m$, zodat $m(t+\mathrm{d}t)=m(t)+\mathrm{d}m$. In dit geval is $\mathrm{d}m$ uiteraard negatief, aangezien er brandstof wordt uitgestoten. Op dat tijdstip is de snelheid van de raket plus brandstof veranderd met een hoeveelheid $\mathrm{d}v$, zodat $v(t+\mathrm{d}t)=v(t)+\mathrm{d}v$. Hier is $\mathrm{d}v$ dan weer positief, aangezien de raket aan snelheid wint.

De massa van de uitgestoten brandstof is $m_g=-\mathrm{d}m$ en de snelheid van deze massa is v_g ten opzichte van de raket. De raket zelf beweegt in de andere richting met een snelheid $v(t)$, ten opzichte van een vast punt ergens. De snelheid van de uitgestoten brandstof ten opzichte van dat vaste punt is dus $v(t)-v_g$. Rekeninghoudend met dit alles is de impuls op tijdstip $t+\mathrm{d}t$ dus gegeven door

$$\begin{aligned}
p(t+\mathrm{d}t) &= m(t+\mathrm{d}t)v(t+\mathrm{d}t)+m_g\,(v(t)-v_g)\\
&= (m(t)+\mathrm{d}m)\,v(t+\mathrm{d}t)-\mathrm{d}m\,(v(t)-v_g)\\
&= (m(t)+\mathrm{d}m)\,(v(t)+\mathrm{d}v)-\mathrm{d}m\,(v(t)-v_g)\\
&= m(t)\,(v(t)+\mathrm{d}v)-\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v+\mathrm{d}m\,v_g\\
p(t+\mathrm{d}t) &= m(t)\,(v(t)+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m\,v_g.
\end{aligned}$$

In de laatste lijn hebben we de term $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ verwaarloosd, aangezien die kwadratisch is in infinitesimaal kleine grootheden.

Wegens behoud van impuls moet $p(t+\mathrm{d}t)$ gelijk zijn aan $p(t)=m(t)v(t)$ zodat

$$\begin{aligned}
m(t)v(t) &= m(t)\,(v(t)+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}mv_g\\
0 &= m(t)\mathrm{d}v+\mathrm{d}mv_g\\
\mathrm{d}v &= -\frac{\mathrm{d}m}{m}v_g.
\end{aligned}$$

Beide leden integreren geeft

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{v_1} \mathrm{d}v &= -\int_{m_0}^{m_1} \frac{\mathrm{d}m}{m} v_g \\ v_1 - v_0 &= v_g \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right).\end{aligned}$$

De toename Δv in de snelheid van de raket bij het uitstoten van 10 % van haar oorspronkelijke massa kunnen we hiermee uitrekenen als zijnde $\Delta v = 0.105 v_g$. Voor meer informatie over dit soort problemen (en deze vraag in het bijzonder) kan je een kijkje nemen naar Sectie 9-10 in Giancoli (en Example 9-20 in het bijzonder).

Hoofdstukken 10 & 11 (Rotatiebeweging)

Oefening 1 (10.19)

a) Voor een constante hoekversnelling α kunnen we gebruikmaken van volgende kinematische vergelijkingen voor rotationele beweging:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2 \tag{13}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \tag{14}$$

met $\theta(t)$ de hoek ten opzichte van de horizontale die de ventilator (bovenop de initiële hoek θ_0) heeft afgelegd na een tijd t en $\omega = 2\pi f$ de angulaire snelheid of hoekfrequentie van de ventilator.

We kunnen t elimineren uit deze vergelijkingen, dit geeft

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta.$$

Wanneer de ventilator stilstaat, is $\omega = 0$. Op het moment dat de ventilator begint te vertragen, is zijn rotatiefrequentie $f_0 = 850\,\frac{\text{omwentelingen}}{\text{min}}$. We zetten dit om naar $\frac{\text{omwentelingen}}{\text{s}}$ door te delen door 60 en vinden hiermee de initiële hoeksnelheid:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 89\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

De afgelegde hoek $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ vinden we uit het feit dat de ventilator nog 1350 omwentelingen doet, aangezien 1 omwenteling overeenkomt met een hoek van 2π rad:

$$\Delta\theta = 1350 \cdot 2\pi\,\text{rad} = 8482\,\text{rad}.$$

Hiermee vinden we

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta}$$

$$\alpha = -0.47\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

b) Hiervoor gebruiken we vergelijking (14):

$$0 = \omega_0 + \alpha t$$

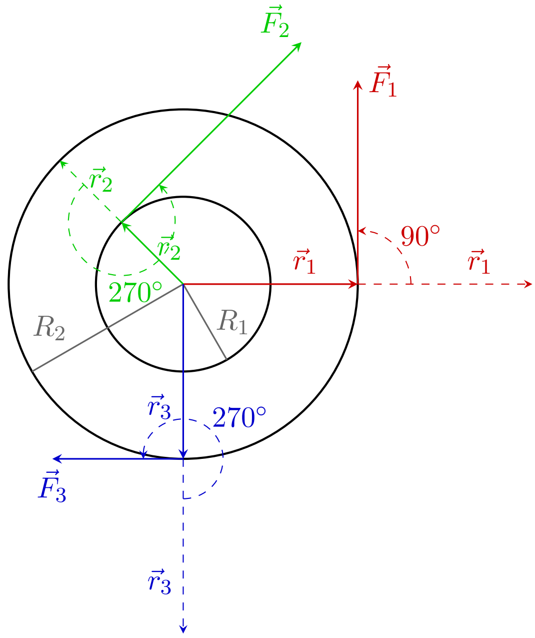
$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = 190.6\,\text{s}.$$

Oefening 2 (10.25)

Het krachtmoment ten opzichte van de oorsprong van een kracht $\vec{F}$ die aangrijpt in een punt $\vec{r}$, is gedefinieerd als

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Deze definitie geldt altijd.

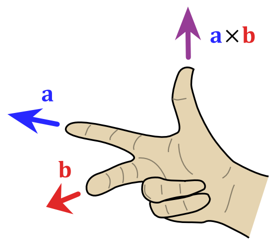


We kiezen de oorsprong van ons assenstelsel in dit geval in het midden van het wiel, waar de rotatie-as doorheen loopt. Elk van de krachten staat dan loodrecht op de vector die naar zijn aangrijpingspunt wijst. De grootte van het krachtmoment is dus in alledrie de gevallen

$$|\vec{\tau}| = rF.$$

Het teken van elke bijdrage kunnen we op verschillende manieren vinden.

Aangezien elk krachtmoment een hoekversnelling veroorzaakt die evenredig is met dat krachtmoment (met een positieve evenredigheidsconstante: het traagheidsmoment I), moet een positief krachtmoment overeenkomen met een positieve hoekversnelling. We hebben hoeken in tegenwijzerzin positief gekozen, zodat een positieve hoekversnelling er eentje is die beweging in tegenwijzerzin bevordert. Met andere woorden: het krachtmoment ten gevolge van $\vec{F}_1$ is positief, maar de krachtmomenten ten gevolge van de andere twee krachten zijn negatief.



Je kan dit ook zien met behulp van de rechterhandregel. Dit werkt voor elk vectorproduct: laat je wijsvinger langs de richting van de eerste vector wijzen (in dit geval $\vec{r}$) en je middelvinger langs de richting van de tweede vector (in dit geval $\vec{F}$). Je duim wijst dan de richting aan van het resultaat van het vectorproduct. Voor $\vec{F}_1$ vind je hiermee dat $\vec{\tau}_1$ uit het blad wijst, in de positieve z-richting. Voor de andere twee krachten vind je dat $\vec{\tau}$ in het blad wijst, in de negatieve z-richting. Als we onze z-as omgekeerd kiezen, geeft dit natuurlijk het omgekeerde resultaat, maar dat komt meteen ook overeen met een andere keuze voor de positieve rotatiezin.

Als we heel het assenstelsel 180° roteren om een as in het xy-vlak, blijft de positieve rotatiezin tegen de wijzers van de klok in, gezien vanuit het standpunt dat van hoge z naar lage z kijkt. Maar gezien vanuit hetzelfde standpunt als eerder, is dit nu tegenwijzerzin. Het teken van het krachtmoment zal dus veranderen, maar de fysische betekenis zal ongewijzigd blijven. (Gelukkig maar!)

Als we enkel de z-as roteren, dan hebben we het assenstelsel veranderd van een *rechtshandig* stelsel naar een *linkshandig* stelsel. In een linkshandig stelsel is de positieve rotatiezin echter wijzerzin. De reden om tegenwijzerzin positief te noemen in een *rechtshandig* stelsel is immers exact omdat dit mooi samenwerkt met de rechterhandregel. Voor een linkshandig stelsel kan je een equivalente regel met je linkerhand gebruiken, waarbij het uitkomt dat de positieve rotatiezin in dat geval wijzerzin is. Nog correcter zeggen we eigenlijk dat voor een rechsthandig assenstelsel $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ terwijl voor een linkshandig assenstelsel $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$.

De grootte van het krachtmoment wordt in het algemeen gegeven door

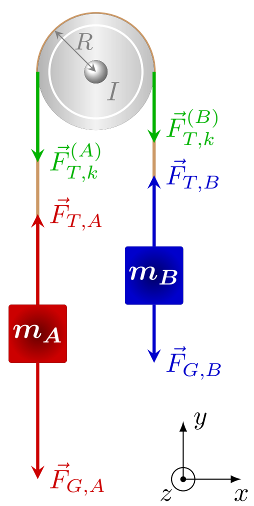
$$|\vec{\tau}| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$$
$$|\vec{\tau}| = rF \sin\theta_{\vec{r},\vec{F}},$$

waarbij $\theta_{\vec{r},\vec{F}}$ de hoek is tussen $\vec{r}$ en $\vec{F}$. Voor die hoek heb je in principe twee mogelijkheden, van de ene vector naar de andere in wijzerzin of in tegenwijzerzin: een hoek $\alpha \leq 180°$ of een hoek $\beta = 360° - \alpha$. Bij het bepalen van de grootte neem je steeds de kleinste van de twee hoeken, de *ingesloten* hoek. Op deze manier moet je echter nog een bijkomende redenering maken om te bepalen in welke richting het krachtmoment (of het resultaat van eender welk vectorproduct) wijst.

Door voor de hoek $\theta_{\vec{r},\vec{F}}$ steeds $\theta_{\vec{r}\to\vec{F}}$ te nemen, krijg je die richting er echter gratis bij. Met die notatie bedoelen we de hoek die $\vec{r}$ in tegenwijzerzin tot op $\vec{F}$ roteert. Voor elk van de krachten is die hoek aangeduid op onze situatieschets van deze oefening. Je kan ook de andere hoek nemen, maar aangezien je dan in de andere richting roteert, is dat een negatieve hoek.

De reden dat dit werkt, is omdat het resultaat van een vectorproduct een rechtshandig stel vectoren vormt met de factoren in het product. Expliciet: als $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, dan is $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ een rechtshandig stel vectoren. Bekijk het als volgt: stel dat je twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebt. Laat ze voor de eenvoud in hetzelfde punt aangrijpen. Je kan dan een assenstelsel definiëren waarin $\vec{a}$ op de x-as ligt en de oorsprong samenvalt met het aangrijpingspunt van $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De y-as kies je zodanig dat $\vec{b}$ in het xy-vlak ligt en zodanig dat de positieve x-richting via een 90° rotatie in tegenwijzerzin op de positieve y-richting wordt getransformeerd. De z-as definieer je ten slotte door $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath}$ te eisen, zodat je een rechtshandig Cartesisch assenstelsel krijgt. Aangezien $|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = 1$ is $|\hat{k}| = \sin\theta_{\hat{\imath}\to\hat{\jmath}}$, wat betekent dat $\theta_{\hat{\imath}\to\hat{\jmath}}$ gelijk moet zijn aan $+90°$, m.a.w. hoeken in tegenwijzerzin moeten positief zijn. We kunnen ook andersom werken en stellen dat tegenwijzerzin de positieve rotatiezin is. De hoek die $\vec{b}$ met $\vec{a}$ maakt is dan gelijk aan de hoek die $\vec{b}$ met de x-as maakt, en $\vec{a} \times \vec{b}$ ligt langs de z-as. Net zoals de positieve richting van de z-as (en dus de *handigheid* van het stelsel) bepaald wordt door onze keuze voor de positieve rotatiezin (tegenwijzerzin voor een rechtshandig assenstelsel en wijzerzin voor een linkshandig stelsel), wordt het teken

Oefening 3 (10.51)



We kiezen een assenstelsel zoals getekend op de figuur hiernaast, maar met de oorsprong in het midden van de katrol, zodat de z-as samenvalt met de rotatie-as. Merk op dat de katrol in deze oefening niet massaloos is, maar een traagheidsmoment I heeft. Dit zorgt ervoor dat de spankracht niet meer overal in het touw gelijk is. In de vrije stukken touw is dit nog wel het geval, maar niet meer in de stukken touw die in contact staan met de katrol. Aan de ene kant van de katrol trekt het touw dus met een kracht

$$|\vec{F}^{(A)}_{T,k}| = |\vec{F}_{T,A}|$$

aan de katrol en aan de andere kant met een kracht

$$|\vec{F}^{(B)}_{T,k}| = |\vec{F}_{T,B}|.$$

Doordat die krachten verschillend zijn, is er een netto krachtmoment op de katrol en zal die gaan roteren met een hoekversnelling $\vec{\alpha}$. De tweede wet van Newton voor rotationele beweging wordt gegeven door

$$I\vec{\alpha} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

met I het traagheidsmoment van de katrol en $\vec{\tau}_i$ de krachtmomenten die op de katrol inwerken. In dit geval zijn dat er twee: één voor de spankracht aan elk van beide kanten. Aangezien de spankracht altijd rakend is aan het touw, kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{T,k}^{(A)} &= \vec{r}_{T,k}^{(A)} \times \vec{F}_{T,k}^{(A)} \\
\vec{\tau}_{T,k}^{(A)} &= (-R\,\hat{\imath}) \times (-F_{T,A}\,\hat{\jmath}) \\
\vec{\tau}_{T,k}^{(A)} &= RF_{T,A}\,\hat{k}.
\end{aligned}$$

En analoog:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{T,k}^{(B)} &= \vec{r}_{T,k}^{(B)} \times \vec{F}_{T,k}^{(B)} \\
\vec{\tau}_{T,k}^{(B)} &= (R\,\hat{\imath}) \times (-F_{T,B}\,\hat{\jmath}) \\
\vec{\tau}_{T,k}^{(B)} &= -RF_{T,B}\,\hat{k}.
\end{aligned}$$

Aangezien dit de enige krachtmomenten op de katrol zijn, kunnen we uitsluitend de z-as beschouwen. Voor de eenvoud gaan we ervan uit dat de katrol in tegenwijzerzin geduwd wordt door deze krachtmomenten, zodat $\alpha_z > 0$ en we $\alpha_z = |\vec{\alpha}| = \alpha$ kunnen schrijven.[10] Dit geeft dan voor de rotationele versie van de tweede wet van Newton:

$$I\alpha = RF_{T,A} - RF_{T,B}.$$

Een punt in het touw, op de rand van de katrol, ondervindt dus een versnelling

$$a = R\alpha = \frac{(F_{T,A} - F_{T,B})R^2}{I}, \tag{15}$$

rakend aan de katrol.

Dit is ook de versnelling die de twee blokken ondervinden, de ene opwaarts en de andere neerwaarts. Aangezien we uitgaan dat de katrol in tegenwijzerzin versneld wordt, wijst $\vec{a}_A$ verticaal omlaag en $\vec{a}_B$ verticaal omhoog, met $a_A = a_B = a$. Voor de tweede wet van Newton langs de y-as krijgen we dan:

$$\begin{aligned}
-m_A a &= F_{T,A} - m_A g \\
m_B a &= F_{T,B} - m_B g.
\end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen gebruiken om de spankrachten uit vgl. (15) te elimineren:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(F_{T,A} - F_{T,B})R^2}{I} \\
a &= \frac{(-m_A a + m_A g - m_B a - m_B g)R^2}{I} \\
Ia + (m_A a + m_B a)R^2 &= (m_A - m_B)gR^2 \\
a &= \frac{(m_A - m_B)gR^2}{I + (m_A + m_B)R^2}.
\end{aligned}$$

[10] We kunnen dit perfect doen zonder verlies van algemeenheid. Om je inzicht in dit soort problemen te verbeteren, kan je misschien eens de omgekeerde aanname maken — nl. dat de katrol in wijzerzin wordt geduwd door $\vec{\tau}_{\text{netto}}$.

We kunnen dit vergelijken met het geval voor een ideale, massaloze katrol. Als je oefening 13 van de reeks over hoofdstukken 4 & 5 hebt gemaakt, kan je vergelijken met het resultaat dat je daar zou krijgen indien $\theta = 90°$. Dat resultaat is

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g.$$

We zien dat ons resultaat voor de huidige oefening inderdaad hiertoe vereenvoudigt indien de katrol massaloos is, d.i. indien $I = 0$.

Oefening 4 (10.65)

Voor een homogene cilinder met massa M en straal R is het traagheidsmoment gegeven door $I = MR^2/2$. De kinetische energie van een roterend star lichaam met traagheidsmoment I is bovendien gegeven door $I\omega^2/2$, als $\omega = 2\pi f$ de hoeksnelheid/hoekfrequentie van de rotatie is.

Om de arbeid te bepalen die nodig is om de paardenmolen vanuit stilstand te versnellen tot een rotatiefrequentie f, kunnen we gebruikmaken van het arbeid-energie theorema:

$$\begin{aligned} W &= \Delta T \\ &= \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} I \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{4} M R^2 (2\pi f_2)^2 \\ W &= M(\pi R f_2)^2. \end{aligned}$$

Een rotatiefrequentie van 1 omwenteling per 8 seconden komt overeen met $f = 0.125\,\mathrm{Hz}$, zodat we vinden:

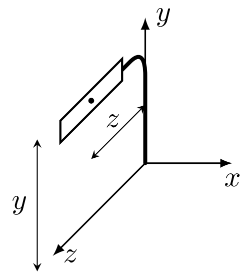
$$W = 14.2\,\mathrm{kJ}.$$

Oefening 5 (11.27)

Je kan deze vraag eenvoudig oplossen door simpelweg de algemene definitie van het krachtmoment te gebruiken:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

waarbij $\vec{r}$ de plaatsvector is, die wijst naar het aangrijpingspunt van de kracht $\vec{F}$. Je kan dit vectorproduct op verschillende manieren uitrekenen, bijvoorbeeld gebruikmakend van de determinantnotatie:



$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= yF_z\,\hat{\imath} + zF_x\,\hat{\jmath} + xF_y\,\hat{k} - \left(zF_y\,\hat{\imath} + xF_z\,\hat{\jmath} + yF_x\,\hat{k} \right) \\ \vec{\tau} &= (yF_z - zF_y)\,\hat{\imath} + (zF_x - xF_z)\,\hat{\jmath} + (xF_y - yF_x)\,\hat{k}. \end{aligned} \tag{16}$$

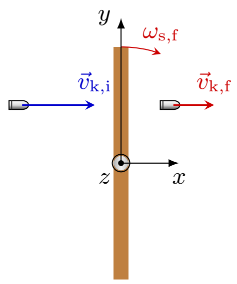
Je kan deze laatste uitdrukking ook meteen neerschrijven door gebruik te maken van cyclische permutatie: de i-component van het vectorproduct bestaat uit een positieve bijdrage en een negatieve bijdrage. De positieve bijdrage is het product van de $(i+1)$–component van de eerste vector en de $(i+2)$–component van de tweede vector, waarbij je van $i = 0$ begint te tellen en modulo 2 werkt. $(i = 0 \leftrightarrow x, i = 1 \leftrightarrow y, i = 2 \leftrightarrow z)$ De negatieve bijdrage is het product van de $(i+2)$-component van de eerste vector en de $(i+1)$–component van de tweede vector. In de praktijk betekent dit dat je enkel de volgorde x, y, z moet onthouden. Om een bepaalde component van het vectorproduct te vinden, begin je gewoon bij die component in de volgorde. De volgende twee in de volgorde zijn dan de componenten van de vectoren die de positieve bijdrage geven, en de negatieve bijdrage bestaat gewoon uit de componenten in de andere volgorde:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_3 &= (\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 - z_1y_2)\\
\boldsymbol{y}_3 &= (\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2 - x_1z_2)\\
\boldsymbol{z}_3 &= (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 - y_1x_2)
\end{aligned}$$

Hoe je het vectorproduct ook uitrekent, door $x = 0$, $y = 8\,\mathrm{m}$, $z = 6\,\mathrm{m}$, $F_x = \pm 2.4\,\mathrm{N}$, $F_y = 4.1\,\mathrm{N}$ en $F_z = 0$ in te vullen in vergelijking (16), vind je:

$$\vec{\tau} = \left(24.6\,\hat{\imath} \pm 14.4\,\hat{\jmath} \mp 19.2\hat{k}\right)\mathrm{kN\,m}.$$

Oefening 6 (11.48)



We kiezen de oorsprong van ons assenstelsel in het massamiddelpunt van de houten stok. Aangezien die plastisch vervormd wordt wanneer de kogel zich er een weg doorheen boort, kunnen we hier niet gebruikmaken van energiebehoud. Het totale impulsmoment is echter wel nog steeds een behouden grootheid:

$$\vec{L}_{\mathrm{k,i}} + \vec{L}_{\mathrm{s,i}} = \vec{L}_{\mathrm{k,f}} + \vec{L}_{\mathrm{s,f}}.$$

Herinner je de definitie van impulsmoment:[11]

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

met $\vec{p}$ het impuls. Initieel is de stok in rust, dus $\vec{L}_{\mathrm{s,i}} = 0$. Voor het impulsbehoud beschouwen we de twee ogenblikken vlak voor en vlak na de impact. De kogel bevindt zich op beide ogenblikken dus in het punt $\vec{r} = (0, \ell/4, 0)$, maar heeft op beide ogenblikken een verschillende snelheid. Initieel hebben we, vlak voor de botsing:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\mathrm{k,i}} &= \vec{r}_{\mathrm{k,i}} \times \vec{p}_{\mathrm{k,i}}\\
&= m_{\mathrm{k}} v_{\mathrm{k,i}} \,(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) \times \hat{\imath}\\
&= -m_{\mathrm{k}} v_{\mathrm{k,i}} y\,\hat{k}\\
\vec{L}_{\mathrm{k,i}} &= -m_{\mathrm{k}} v_{\mathrm{k,i}} \frac{\ell}{4}\,\hat{k}.
\end{aligned}$$

Na de impact is de snelheid van de kogel afgenomen van $v_{\mathrm{k,i}} = 250\,\mathrm{m/s}$ tot $v_{\mathrm{k,f}} = 140\,\mathrm{m/s}$, maar verder is de uitdrukking voor $\vec{L}_{\mathrm{k,f}}$ volkomen identiek. Na de botsing begint de stok

[11] Je kan voor eender welke vector $\vec{a}$ een bijbehorend moment definiëren als $\vec{r} \times \vec{a}$, zie bvb. ook het krachtmoment.

bovendien te roteren met een hoeksnelheid $\omega_{\mathrm{s,f}}$. Het impulsmoment van een star lichaam dat roteert rondom een symmetrie-as wordt gegeven door

$$\vec{L} = I\vec{\omega}.$$

Voor de stok hebben we na de botsing dus

$$\vec{L}_{\mathrm{s,f}} = I_{\mathrm{s}}\omega_{\mathrm{s,f}}\,\hat{k}$$

met I_{s} het traagheidsmoment van een homogene staaf met massa m_s en lengte ℓ die roteert zoals in deze oefening:

$$\vec{L}_{\mathrm{s,f}} = \frac{1}{12}m_s\ell^2\omega_{\mathrm{s,f}}\,\hat{k}.$$

We schrijven het behoud van impulsmoment hiermee nu verder uit. Hierbij beschouwen we enkel de z-as, aangezien er geen andere componenten voorkomen:

$$\begin{aligned}
-m_{\mathrm{k}}v_{\mathrm{k,i}}\frac{\ell}{4} &= -m_{\mathrm{k}}v_{\mathrm{k,f}}\frac{\ell}{4} + \frac{1}{12}m_s\ell^2\omega_{\mathrm{s,f}}\\
\frac{1}{12}m_s\ell^2\omega_{\mathrm{s,f}} &= m_{\mathrm{k}}\frac{\ell}{4}\left(v_{\mathrm{k,f}} - v_{\mathrm{k,i}}\right)\\
\omega_{\mathrm{s,f}} &= \frac{3m_{\mathrm{k}}}{m_{\mathrm{s}}\ell}\left(v_{\mathrm{k,f}} - v_{\mathrm{k,i}}\right)\\
\omega_{\mathrm{s,f}} &= -3.7\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.
\end{aligned}$$

Merk op dat dit alleszins qua teken overeenkomt met onze verwachting op basis van onze tekening: de stok zou met de klok mee moeten beginnen te roteren, wat inderdaad de negatieve rotatiezin is.

Oefening 7 (11.76)

a) Uit de vergelijking voor het traject blijkt dat de y-as verticaal omhoog wijst, zodat de zwaartekracht in dit assenstelsel gelijk is aan

$$\vec{F}_G = -mg\,\hat{\jmath}.$$

Aangezien $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ en $\hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \vec{0}$, vinden we voor het krachtmoment om de oorsprong:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_G = -mgv_{x,0}t\,\hat{k}.$$

b) Het impulsmoment om de oorsprong is gegeven door

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p}\\
&= \vec{r}\times\left(m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= m\left[\left(v_{x,0}t\right)\hat{\imath} + \left(v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\jmath}\right]\times\left[v_{x,0}\,\hat{\imath} + \left(v_{y,0} - gt\right)\hat{\jmath}\right]\\
&= m\left[\left(v_{x,0}t\right)\left(v_{y,0} - gt\right)\hat{k} - v_{x,0}\left(v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{k}\right]\\
&= m\left[-gv_{x,0}t^2\,\hat{k} + \frac{1}{2}gt^2\,\hat{k}\right]\\
\vec{L} &= -\frac{mgv_{x,0}t^2}{2}\hat{k}.
\end{aligned}$$

Hierin hebben we opnieuw gebruikt dat $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$ (en dus $\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$) en $\hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \vec{0} = \hat{\imath}\times\hat{\imath}$. De tijdsafgeleide van het impulsmoment geeft het krachtmoment om de oorsprong:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = -mgv_{x,0}t\,\hat{k},$$

wat opnieuw dezelfde uitdrukking is als voorheen.

Merk op dat de tijdsafgeleide van het impulsmoment van een deeltje steeds het totale krachtmoment oplevert. Dat totale krachtmoment is in dit geval gelijk aan het krachtmoment ten gevolge van de zwaartekracht omdat dit de enige kracht is die op het deeltje inwerkt. We hebben in vraag a eigenlijk $\vec{\tau}_G$ uitgerekend, de bijdrage van de zwaartekracht aan het totale krachtmoment. Maar in dit geval is dit de enige bijdrage, zodat $\vec{\tau} = \vec{\tau}_G$. In het algemeen geldt dus niet dat

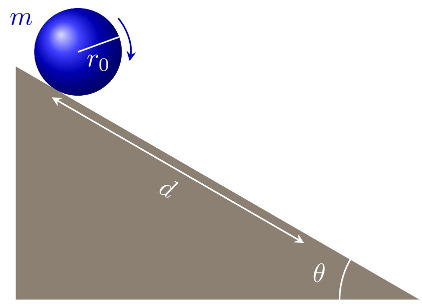
$$\vec{r}\times\vec{F}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},$$

maar met $\vec{F}$ de totale kracht op het deeltje geldt wel in het algemeen dat

$$\vec{r}\times\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}.$$

Dit hebben jullie reeds in de theorielessen gezien.

Oefening 8 (10.73 ♠)



a) Hiervoor gaan we behoud van energie gebruiken: oorspronkelijk is de bal in rust en bezit hij dus enkel (gravitationele) potentiële energie. We nemen het nulpunt voor die gravitationele energie onderaan de helling, zodat alle potentiële energie op dat punt omgezet is in kinetische energie, die we kunnen onderverdelen in translationele kinetische energie en rotationele kinetische energie:

$$K_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}mv^2$$
$$K_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Hierin is $I = \frac{2}{5}mr_0^2$ het traagheidsmoment van de sfeer. Voor rollen zonder glijden is de rotatiesnelheid ω bovendien gerelateerd aan de translatiesnelheid v via $v = r_0\omega$, zodat we de totale kinetische energie onderaan de helling kunnen schrijven als

$$K = \frac{1}{2}m(r_0\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr_0^2\right)\omega^2$$
$$K = \frac{7}{10}mr_0^2\omega^2.$$

Met $h = d\sin\theta$ de oorspronkelijke hoogte van de bal geeft behoud van energie dus:

$$\frac{7}{10}mr_0^2\omega^2 = mgd\sin\theta$$
$$\omega^2 = \frac{10gd\sin\theta}{7r_0^2}.$$

Hiermee vinden we

$$K_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}mr_0^2\frac{10gd}{7r_0^2}\sin\theta = \frac{5}{7}mgd\sin\theta = 42\,\mathrm{J}$$
$$K_{\mathrm{tr}} = \frac{2}{5}K_{\mathrm{tr}} = \frac{2}{7}mgd\sin\theta = 16.8\,\mathrm{J}.$$

b) Dit hebben we hierboven al gebruikt:

$$\frac{K_{\mathrm{rot}}}{K_{\mathrm{tr}}} = \frac{2}{5}.$$

c) De energieën zijn onafhankelijk van de straal, maar hangen wel af van de massa.

De verhouding van beide is een numerieke constante en dus onafhankelijk van zowel de straal als de massa.

Oefening 9 (11.73)

a) Gedurende een tijdsinterval Δt vloeit een massa water m langs het rad. Behoud van impulsmoment zegt dan dat het impulsmoment dat het rad hierbij wint gelijk is aan het impulsmoment dat het water verliest. Het verlies aan impulsmoment van het water dat passeert (omheen de rotatie-as), is gegeven door

$$\Delta\vec{L}_w = m\vec{r}\times\vec{v}_2 - m\vec{r}\times\vec{v}_1.$$

Met de x-as horizontaal in de stroomrichting van het water gericht, de y-as verticaal omhoog en de z loodrecht op beiden, hebben we $\vec{r} = -R\,\hat{\jmath}$ en $\vec{v}_i = v_i\,\hat{\imath}$. Het verlies aan impulsmoment van het water gedurende het tijdsinterval Δt is dan gelijk aan

$$\Delta\vec{L}_w = mR(v_2 - v_1)\,\hat{k}.$$

Het tempo waarmee het rad aan impulsmoment wint is dus

$$\frac{\Delta\vec{L}_r}{\Delta t} = \frac{-\Delta\vec{L}_w}{\Delta t}$$
$$\frac{\Delta\vec{L}_r}{\Delta t} = \frac{m\Delta vR}{\Delta t}\hat{k}.$$

Hierin kennen we noch m noch Δt, maar we weten wel dat

$$\frac{m}{\Delta t} = 85\,\mathrm{kg/s}$$

zodat

$$\frac{\Delta\vec{L}_r}{\Delta t} = 816\,\mathrm{Nm}\,\hat{k}.$$

b) Zolang de toestroom van water constant blijft, is het ogenblikkelijke krachtmoment gelijk aan het gemiddelde krachtmoment:

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\vec{L}_r}{\Delta t} = 816\,\mathrm{Nm}\,\hat{k}.$$

c) Door interne wrijving in het mechanisme is het mogelijk dat de rotatiesnelheid van het rad constant blijft ondanks het feit dat er een eindig krachtmoment wordt op uitgeoefend door het water. In deze vraag blijkt dat het geval te zijn, en de rotatiesnelheid is

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5.5\,\mathrm{s}} = 1.14\,\mathrm{rad/s}.$$

Het vermogen dat zo geleverd wordt aan het rad is gelijk aan de tijdsafgeleide van de arbeid die erop geleverd wordt:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$

Die arbeid is gegeven door

$$W = \int \tau(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

zodat

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int \tau\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int \tau\omega\,\mathrm{d}t\right] \\ P &= \tau\omega = 932\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$

Hoofdstuk 13 (Hydrostatica & -dynamica)

Oefening 1 (13.12)

We maken hier gebruik van de wet van Bernoulli, die zegt dat

$$P + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$$

constant is voor elk punt in een vloeistof, met h de hoogte boven een vast gekozen referentiehoogte. Met andere woorden, voor twee punten in de vloeistof kunnen we steeds schrijven dat

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

In deze oefening beschouwen we stilstaand water, zodat de snelheid van de vloeistof overal nul is. Verder nemen we de positie van Tarzan onder het wateroppervlak als de referentiehoogte, d.i. de oorsprong van de verticale as. Dan bevindt het wateroppervlak zich op een hoogte h, waar de druk bovendien gelijk is aan atmosferische druk. Dit punt vergelijken we in de wet van Bernoulli met een punt ter hoogte van Tarzan:

$$P_{\text{Tarzan}} = P_{\text{atm}} + \rho g h.$$

Hierin zijn nog twee onbekenden: de gezochte afstand tussen Tarzan en wateroppervlak h en de druk ter hoogte van Tarzan. Wat we echter wel kennen, is de overdruk op die hoogte:

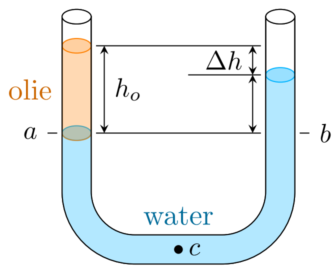
$$\Delta P = P_{\text{Tarzan}} - P_{\text{atm}} = 85\,\text{mmHg} = 11\,330.5\,\text{Pa}.$$

Hiermee vinden we:

$$\rho g h = P_{\text{Tarzan}} - P_{\text{atm}}$$
$$h = \frac{\Delta P}{\rho g} = 1.15\,\text{m}.$$

Oefening 2 (13.17)

De druk in punt a moet gelijk zijn aan de druk in punt b. Anders zou het water immers niet in evenwicht zjn. Als je dit niet meteen inziet, neem dan bvb. punt c en gebruik de wet van Bernoulli om dit punt enerzijds met het punt a en het punt b te vergelijken (met $h_c = 0$):



$$\begin{cases} P_c + \rho g h_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_a + \rho g h_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \\ P_c = P_a + \rho g h_a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_c + \rho g h_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = P_b + \rho g h_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \\ P_c = P_b + \rho g h_b. \end{cases}$$

Aangezien $h_a = h_b$ kunnen we bovenstaande uitdrukkingen voor P_c met elkaar vergelijken, waaruit volgt dat inderdaad $P_a = P_b$.

We kunnen de druk in punt a berekenen door dat punt te vergelijken met een punt bovenaan de oliekolom. Vanaf nu werken we met $h_a = 0 = h_b$, zodat het punt bovenaan de oliekolom zich op een hoogte $h_o = 27.2\,\text{cm}$ bevindt.

$$P_a = P_{\text{atm}} + \rho_o g h_o.$$

De druk in punt b kunnen we dan weer vinden door dat punt te vergelijken met een punt bovenaan de rechtse waterkolom. Dat punt bevindt zich op een hoogte $h_o - \Delta h = 18.58\,\text{cm}$.

$$P_b = P_{\text{atm}} + \rho_w g(h_o - \Delta h).$$

Deze uitdrukkingen moeten dus aan elkaar gelijk zijn:

$$\begin{aligned} P_{\text{atm}} + \rho_o g h_o &= P_{\text{atm}} + \rho_w g(h_o - \Delta h) \\ \rho_o g h_o &= \rho_w g(h_o - \Delta h) \\ \rho_o &= \rho_w \frac{h_o - \Delta h}{h_o} = 683\,\text{kg/m}^3. \end{aligned}$$

Oefening 3 (13.39)

De stuwkracht van één ballon is gelijk aan het gewicht van het verplaatste volume lucht:

$$\begin{aligned} F_{\text{stuw},1} &= m_\ell g \\ &= \frac{4\pi r^3}{3}\rho_\ell g \\ F_{\text{stuw},1} &= \frac{\pi d^3}{6}\rho_\ell g. \end{aligned}$$

Als we N ballonnen hebben, moet N keer die stuwkracht groot genoeg zijn om het gewicht van de persoon en van het helium op te heffen. Voor het gewicht van het helium nemen we N keer de massa van een sferisch volume helium met diameter d:

$$\begin{aligned} N F_{\text{stuw},1} &= (m + m_{\text{He}})g \\ N\frac{\pi d^3}{6}\rho_\ell &= m + m_{\text{He}} \\ N\frac{\pi d^3}{6}\rho_\ell &= m + N\frac{\pi d^3}{6}\rho_{\text{He}} \\ N\frac{\pi d^3}{6}(\rho_\ell - \rho_{\text{He}}) &= m \\ N &= \frac{6m}{\pi d^3(\rho_\ell - \rho_{\text{He}})} = 3587.62 \end{aligned}$$

Aangezien het aantal ballonnen een geheel getal moet zijn, moeten we dit naar boven afronden. Het minimum aantal ballonnen dat nodig is om de persoon op te tillen, is dus 3588. We kunnen hieruit ook besluiten dat de film *Up* fysisch gezien niet correct is.

Oefening 4 (13.42)

Als het hout zinkt, betekent dit dat de totale stuwkracht kleiner is dan het totale gewicht. De totale stuwkracht is gelijk aan het gewicht van het totale volume verplaatst water. Het hout, met massa $m_h = 3.25\,\mathrm{kg}$, verplaatst een volume

$$V_h = \frac{m_h}{\rho_h}$$

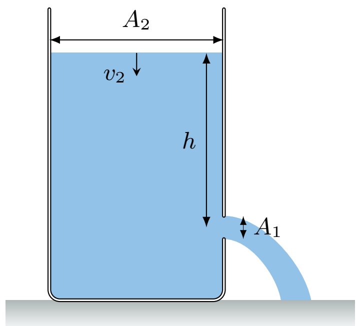
wanneer het volledig ondergedompeld is (wat het geval is indien het gaat zinken). Het lood, met onbekende massa m_ℓ, verplaatst analoog een volume

$$V_\ell = \frac{m_\ell}{\rho_\ell}.$$

We stellen nu het totale gewicht gelijk aan de totale stuwkracht en vinden:

$$\begin{aligned}(m_h + m_\ell)g &= \rho_w(V_h + V_\ell)g \\ m_h + m_\ell &= \rho_w\left(\frac{m_h}{\rho_h} + \frac{m_\ell}{\rho_\ell}\right) \\ m_\ell\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_\ell}\right) &= \left(\frac{\rho_w}{\rho_h} - 1\right) m_h \\ m_\ell \frac{1}{\rho_\ell}(\rho_\ell - \rho_w) &= \frac{1}{\rho_h}(\rho_w - \rho_h)\, m_h \\ m_\ell &= \frac{\rho_\ell(\rho_w - \rho_h)}{\rho_h(\rho_\ell - \rho_w)} m_h = 3.57\,\mathrm{kg}.\end{aligned}$$

Oefening 5 (13.55)



We gaan hier, zoals gewoonlijk, gebruikmaken van de wet van Bernoulli. We vergelijken een punt aan het gat in de wand met een punt aan het wateroppervlak bovenaan. Aangezien beide punten rechtstreeks in contact staan met de buitenlucht, is de druk daar gelijk aan de luchtdruk: $P_1 = P_2 = P_{\mathrm{atm}}$. Bovendien kiezen we als referentiehoogte de positie van het gat zodat $h_1 = 0$ en $h_2 = h$.

$$\begin{aligned}P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ \frac{1}{2}v_1^2 &= gh + \frac{1}{2}v_2^2\end{aligned}$$

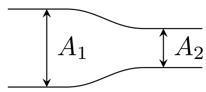
De continuïteitsvergelijking geeft ons ten slotte nog een verband tussen de snelheden in beide punten:

$$\begin{aligned}A_2 v_2 &= A_1 v_1 \\ v_2 &= \frac{A_1}{A_2} v_1.\end{aligned}$$

Hiermee vinden we de gevraagde uitdrukking:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_1^2 &= gh + \frac{1}{2}\frac{A_1^2}{A_2^2}v_1^2 \\ v_1^2\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) &= 2gh \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(A_1^2/A_2^2\right)}}.\end{aligned}$$

Oefening 6 (13.60)



De venturimeter wordt hiernaast getoond. Om deze vraag op te lossen gaan we, zoals gewoonlijk, gebruikmaken van de wet van Bernoulli en van de continuïteitsvergelijking.

a) Als we een punt in het midden van het brede deel van de buis vergelijken met een punt in het midden van het smallere deel, dan kunnen we schrijven:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Beide punten bevinden zich op dezelfde hoogte, dus de $\rho g h$ (potentiële energie) bijdragen in de wet van Bernoulli zijn irrelevant (want gelijk). Door de continuïteitsvergelijking in te vullen in de wet van Bernoulli voor deze twee punten, vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho v_1^2 &= P_2 - P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2 \\
v_1^2 &= \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} + \left(\frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2 \\
v_1^2\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) &= \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \\
v_1^2\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2} &= \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \\
v_1^2 &= \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \\
v_1 &= A_2\sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(A_2^2 - A_1^2)}}.
\end{aligned}$$

b) Gebruikmakend van $A_i = \pi r_i^2$ en $P_1 - P_2 = 18\,\mathrm{mmHg} = 2399.4\,\mathrm{Pa}$, krijgen we

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(A_2^2 - A_1^2)}} = 0.24\,\mathrm{m/s}.$$

Oefening 7 (13.84)

Noem de druk in het hart van de giraf P_0. We gaan ervan uit dat de snelheid van het bloed overal te verwaarlozen valt. Dan kunnen we een punt in het hart vergelijken met een punt in het hoofd van de giraf wanneer dat volledig opgericht is. We nemen $h = 0$ ter hoogte van de grond, zodat het hart zich op een hoogte h_0 bevindt en het hoofd op een hoogte $h_1 = 6\,\mathrm{m}$:

$$\begin{aligned}
P_0 + \rho g h_0 &= P_1 + \rho g h_1 \\
P_1 &= P_0 + \rho g(h_0 - h_1).
\end{aligned}$$

We kunnen ook vergelijken met het hoofd wanneer dat zich ter hoogte van de grond bevindt om te drinken:

$$\begin{aligned} &P_0 + \rho g h_0 = P_2 \\ &\Rightarrow P_2 - P_1 = \rho g h_1 = 61\,803\,\text{Pa}. \end{aligned}$$

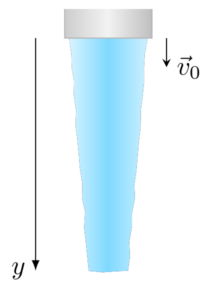
Uitgedrukt in atmosfeer is het drukverschil dat de aders moeten aankunnen dus 0.61 atm.

Opmerking: we hadden ook rechtstreeks het hoofd op hoogte $h = 0$ en hoogte $h_1 = 6\,\text{m}$ kunnen vergelijken, aangezien er verder niets verandert aan het systeem. Dan vinden we meteen

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2.$$

Oefening 8 (13.95)

Kies de y-as verticaal omlaag met het nulpunt ter hoogte van de kraan en noem de diameter van de waterstraal daar h_0. We gaan dit punt vergelijken met een lager punt, op een afstand y van de kraan. Met $A = \pi(d/2)^2$ wordt de continuïteitsvergelijking



$$\begin{aligned} A_0 v_0 &= A(y)v(y) \\ d_0^2 v_0 &= d^2(y)v(y). \end{aligned}$$

Beide punten staan rechtstreeks in contact met de lucht, zodat de druk in beide punten gelijk is aan de luchtdruk. De wet van Bernoulli geeft dan:

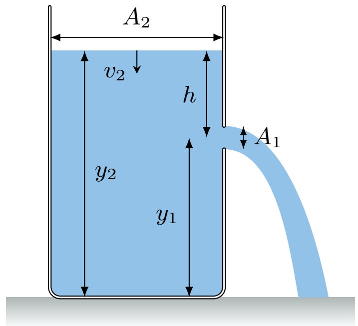
$$\begin{aligned} P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + h_0 &= P(y) + \frac{1}{2}\rho v^2(y) + \rho g h(y) \\ \frac{1}{2}\rho v_0^2 + h_0 &= \frac{1}{2}\rho v^2(y) + \rho g h(y). \end{aligned}$$

We nemen de hoogte van de kraan gelijk aan $h_0 = 0$. De hoogte van het punt met coördinaat y is dan gelijk aan $h_0 - y = -y$. Verder gebruikmakend van ons resultaat voor de continuïteitsvergelijking vinden we hiermee

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho v_0^2 &= \frac{1}{2}\rho v^2(y) - \rho g y \\ v_0^2 &= \left(\frac{d_0^2}{d^2(y)} v_0\right)^2 - 2gy \\ v_0^2 + 2gy &= \frac{d_0^4}{d^4(y)} v_0^2 \\ d^4(y) &= \frac{d_0^4}{v_0^2 + 2gy} v_0^2 \\ d(y) &= d_0 \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy}\right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Interpretatievraagje: stel dat ik de diameter op een bepaalde afstand van de kraan groter wil hebben, moet ik de uitstroomsnelheid van het water dan vergroten of verkleinen?

Oefening 9 (13.59 ♠)



a) De hoogte van het wateroppervlak neemt af met snelheid v_2 zodat

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -v_2.$$

In oefening 5 (13.55) hebben we v_1 bepaald:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(A_1^2/A_2^2\right)}}.$$

Gebruikmakend van de continuïteitsvergelijking geeft dit:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -v_2 \\ &= -\frac{A_1}{A_2}v_1 \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -\sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2-A_1^2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

b) We vinden h als functie van de tijd door de differentiaalvergelijking hierboven op te lossen. Hiertoe gebruiken we scheiding van veranderlijken:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= -\sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2-A_1^2}} \\ \int_{h_0}^{h(t)} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} &= -A_1\sqrt{\frac{2g}{A_2^2-A_1^2}}\int_0^t \mathrm{d}t \\ 2\left(\sqrt{h(t)}-\sqrt{h_0}\right) &= -A_1\sqrt{\frac{2g}{A_2^2-A_1^2}}t \\ h(t) &= \left(\sqrt{h_0}-\frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{2g}{A_2^2-A_1^2}}t\right)^2. \end{aligned}$$

c) Met $h_0 = 10.6\,\mathrm{cm} = 0.106\,\mathrm{m}$ en $V = 1.3\,\mathrm{L} = 1.3\times10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ vinden we $A_2 = V/h_0 = 12.3\times10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Met $d_1 = 0.5\,\mathrm{cm} = 5\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ vinden we $A_1 = 20\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$. Het vat is helemaal leeg wanneer $h(t) = 0$. De tijd die daarvoor nodig is, vinden we door dit alles in te vullen in de vergelijking hierboven:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sqrt{h_0}-\frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{2g}{A_2^2-A_1^2}}t\right)^2 \\ \frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{2g}{A_2^2-A_1^2}}t &= \sqrt{h_0} \\ \frac{2g}{A_2^2-A_1^2}t^2 &= \frac{4h_0}{A_1^2} \\ t &= \sqrt{\frac{2h_0\left(A_2^2-A_1^2\right)}{gA_1^2}} = 90.4\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Oefening 10 (13.99 ♠)

We gaan opnieuw de wet van Bernoulli gebruiken, ditmaal om een punt binnen te vergelijken met een punt buiten, op dezelfde hoogte (zodat de $\rho g h$ termen irrelevant zijn). De druk binnen is P_{atm} en bovendien staat de lucht binnen stil, zodat we krijgen:

$$\begin{aligned} P_{\text{atm}} &= P + \frac{1}{2}\rho v^2 \\ \Delta P = P_{\text{atm}} - P &= \frac{1}{2}\rho v^2 = 1991\,\text{Pa}. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruikgemaakt van de dichtheid van lucht: $\rho = 1.29\,\text{kg/m}^3$. Aangezien dit een positief getal is, is de druk dus het grootst aan de binnenkant. Dit betekent dat de kracht op het raam naar buiten gericht is. De grootte ervan is gegeven door

$$\begin{aligned} F &= A\Delta P \\ F &= \ell b \Delta P = 11.9 \times 10^3\,\text{N}. \end{aligned}$$

Oefening 11 (13.62 ♠)

Het volumedebiet $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 450\,\text{L/min} = 7.5 \times 10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$ is constant doorheen de slang. Dit is de continuïteitsvergelijking voor een onsamendrukbaar fluïdum in woorden:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Noem de doorsnede van de slang A_1 en de snelheid van het water daar v_1, en noem de doorsnede van het uiteinde van de slang A_2 en de snelheid daar v_2. Dan is

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\ v_2 &= \frac{A_1}{A_2} v_1. \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we de toename in snelheid berekenen wanneer het water uit de slang spuit. Met $A_i = \pi(d_i/2)^2$ vinden we:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v_2 - v_1 \\ \Delta v &= v_1 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) = 168\,\text{m/s} \end{aligned}$$

De kracht die een massa water m op de slang uitoefent wanneer haar snelheid toeneemt met Δv op een tijd Δt is dan

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F &= m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Deze massa is gelijk aan de massa van het volume water dat op een tijd Δt doorheen het uiteinde van de slang passeert. Dit is gelijk aan

$$m = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \Delta t.$$

Hiermee krijgen we ten slotte:

$$F = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \Delta t \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$F = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \Delta v = 1259\,\mathrm{N}.$$

Dit is veel, maar realistisch: brandweermannen houden een slang zoals deze met twee vast!