# Examen Toegepaste Wiskunde 3 Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 2e zittijd 2016–2017

| | |
|---|---|
| Naam: | ........................................................ |
| Richting: | BIR |
| Studentenkaartnr.: | ........................................................ |

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

| | |
|---|---|
| Eindscore: | /60 |

1. Bereken $\iint\limits_S \left(4x^2 + 9y^2\right) \sin\left(4x^2 + 9y^2\right) dS$ waarbij $S$ het gebied is binnen de ellips $4x^2 + 9y^2 = 1$.
   Zoek hiervoor eerst een goede coördinaattransformatie.

   /10

2. Zij $\Omega$ het gesloten lichaam met als ondervlak het $XY$–vlak en als bovenvlak de halve bol met vergelijking $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ en zij $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)$. Bereken $\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$.

| /10 |
|---|

3. Los op met de methode van Fuchs. Er zijn 2 lineair onafhankelijke oplossingen. Vijf bonuspunten extra als je de *beide* oplossingen ook in de gedaante van gekende functies kan schrijven.

$$x^2y'' + \left(x - x^2\right)y' - y = 0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) + e^{-2t} \\ y'(t) = 6x(t) - 5y(t) - e^{-2t} \end{cases}$$

/10

5. Zoek de elektrostatische potentiaal die ontstaat op een cirkel met straal 1, beschreven door de vergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0$$

met als randvoorwaarde

$$\forall\theta \in [0, 2\pi] : \psi\left(a, \theta\right) = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

/10

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 4y' - 5y = 6\delta_2(t) \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -1$$

| |
|---|
| /10 |

7. Zoek een uitdrukking voor de algemene term van de rij $y(n)$ die voldoet aan de differentievergelijking

$$y(n+1) = \frac{n}{n+2} y(n) + 1 \text{ met } y_1 = 2$$

en bereken $y(100)$ zonder de 99 termen ervoor te berekenen. /10

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\qquad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\qquad /60}$

Oplossingen:

1. Bereken $\iint\limits_S \left(4x^2+9y^2\right)\sin\left(4x^2+9y^2\right)dS$ waarbij $S$ het gebied is binnen de ellips $4x^2+9y^2=1$.
   Zoek hiervoor eerst een goede coördinaattransformatie.
   Stel $\begin{cases} x=\dfrac{r}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{r}{3}\sin\theta \end{cases}$ met $r\in[0,1]$ en $\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\cos\theta & -\dfrac{r}{2}\sin\theta \\ \dfrac{1}{3}\sin\theta & \dfrac{r}{3}\cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{r}{6}$
   $$\Rightarrow I=\iint\limits_T r^2\sin\left(r^2\right)\frac{r}{6}dT=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin\left(r^2\right)drd\theta=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\sin r^2-\frac{1}{2}r^2\cos r^2\right]_0^1\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\frac{\pi(\sin 1-\cos 1)}{6}$$
2. Zij $\Omega$ het gesloten lichaam met als ondervlak het $XY$–vlak en als bovenvlak de halve bol met vergelijking $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ en zij $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^3,y^3,z^3\right)$. Bereken $\iint\limits_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}dS$.
   $\operatorname{div}\mathbf{F}=3\left(x^2+y^2+z^2\right)$
   Wegens Gauss-Ostrogradski is
   $$\iint\limits_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta}dS=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{F}dV=3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$$
   Omzetting naar bolcoördinaten geeft
   $$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=3\cdot\int_0^R\rho^4d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=3\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R\cdot[-\cos\varphi]_0^{\pi/2}\cdot[\theta]_0^{2\pi}=\frac{6}{5}\pi R^5$$
3. Los op met de methode van Fuchs. Er zijn 2 lineair onafhankelijke oplossingen. Vijf bonuspunten extra als je de *beide* oplossingen ook in de gedaante van gekende functies kan schrijven.
   $$x^2y''+\left(x-x^2\right)y'-y=0$$
   Stel $\begin{cases} y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r} \\ y'=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1} \\ y''=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2} \end{cases}$
   $$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0$$
   $$\Rightarrow x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$
   Stel $m=n+1\Rightarrow n=m-1$
   $$\Rightarrow x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n-\sum_{m=1}^{\infty}(m+r-1)c_{m-1}x^m-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$
   $$\Rightarrow x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]=0$$

$\Rightarrow x^r \left[ \left( r\left(r-1\right)+r-1\right)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r\right)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r-1\right)c_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}c_n x^n \right] =$
$0$
$\Rightarrow x^r \left[ \left( r\left(r-1\right)+r-1\right)c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+\left(n+r\right)-1\right)c_n - \left(n+r-1\right)c_{n-1}\right]x^n \right] = 0$
Indexvergelijking: $\left(r\left(r-1\right)+r-1\right) = r^2-1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$
Recursiebetrekking: $\left(\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)+\left(n+r\right)-1\right)c_n = \left(n+r-1\right)c_{n-1}$
$\Rightarrow \left(\left(n+r\right)\left(n+r-1+1\right)-1\right)c_n = \left(n+r-1\right)c_{n-1}$
$\Rightarrow \left(\left(n+r\right)^2-1\right)c_n = \left(n+r-1\right)c_{n-1}$
$\Rightarrow \left(n+r+1\right)c_n = c_{n-1}$
$\Rightarrow c_n = \dfrac{c_{n-1}}{n+r+1}$

- Als $r = 1 \Rightarrow c_n = \dfrac{c_{n-1}}{n+2}$
  Kies $c_0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{c_0}{3}$
  $\Rightarrow c_2 = \dfrac{c_1}{4} = \dfrac{2c_0}{4!}$
  $\Rightarrow c_3 = \dfrac{c_2}{5} = \dfrac{2c_0}{5!}$
  $\Rightarrow ...$
  $\Rightarrow c_n = \dfrac{2c_0}{\left(n+2\right)!}$
  $\Rightarrow y_1 = c_0 \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2x^{n+1}}{\left(n+2\right)!} = 2c_0 \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!} = 2\dfrac{c_0}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 2\dfrac{c_0}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = 2c_0\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} - 1\right)$
- Als $r = -1 \Rightarrow d_n = \dfrac{d_{n-1}}{n}$
  Kies $d_0 \Rightarrow d_1 = \dfrac{d_0}{1}$
  $\Rightarrow d_2 = \dfrac{d_1}{2} = \dfrac{d_0}{2!}$
  $\Rightarrow d_3 = \dfrac{d_2}{3} = \dfrac{d_0}{3!}$
  $\Rightarrow ...$
  $\Rightarrow d_n = \dfrac{d_0}{n!}$
  $y_2 = d_0 \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!} = \dfrac{d_0}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = d_0\dfrac{e^x}{x}$
  $\Rightarrow y = c_1\dfrac{e^x}{x} + c_2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'\left(t\right) = x\left(t\right) - 3y\left(t\right) + e^{-2t} \\ y'\left(t\right) = 6x\left(t\right) - 5y\left(t\right) - e^{-2t} \end{cases}$$

Homogeen probleem: $\begin{cases} x'\left(t\right) = x\left(t\right) - 3y\left(t\right) \\ y'\left(t\right) = 6x\left(t\right) - 5y\left(t\right) \end{cases}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $\det\left(A - \lambda E\right) = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 6 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 + 4\lambda +$
$13 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm 3i$

Neem $\lambda = -2+3i$

$E_{-2+3i}: \begin{pmatrix} 3-3i & -3 \\ 6 & -3-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-i)\,x - y = 0 \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-2t}\left(\cos 3t + i\sin 3t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} (\cos 3t + i\sin 3t) \\ (1-i)\,(\cos 3t + i\sin 3t) \end{pmatrix} = e^{-2t}\Bigg[\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + i\,\Bigg( -\cos$

$\Rightarrow X_h: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

Fundamentele matrix: $\Phi(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t & -\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t & -\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t) & e^{2t}\sin 3t \\ e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t) & -(\cos 3t)\,e^{2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t)\,F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t) & e^{2t}\sin 3t \\ e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t) & -(\cos 3t)\,e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3t - 2\sin 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W = \int \Phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt = \int \begin{pmatrix} \cos 3t - 2\sin 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t \\ \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{3}\cos 3t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi W = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ \cos 3t + \sin 3t & -\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t \\ \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{3}\cos 3t \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t}\left(C_1\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

5. Zoek de elektrostatische potentiaal die ontstaat op een cirkel met straal 1, beschreven door de vergelijking

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0$$

met als randvoorwaarde

$$\forall\theta \in [0, 2\pi] : \psi(a,\theta) = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

Uit de theorie weten we dat, als we de veranderlijken scheiden door te stellen dat

$$\psi(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta)$$

de oplossing gelijk is aan

$$\psi(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\right)$$

Nu moeten we op zoek naar de coëfficiënten $(a_n, b_n)_n$ zodanig dat $\psi$ ook voldoet aan de inhomogene randvoorwaarde. We willen dus dat

$$\psi(1,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) = f(\theta) = \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ is even, dus alle $b_n$ zijn nul. We vinden dan dat

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{2}{\pi}\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{\pi}$$

en dus voor $n \neq 0$ wegens de fourier cosinusregel

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\theta\right)+\sin\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)\theta\right)\right]d\theta \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\theta\right)}{\frac{1}{2}+n}+\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)\theta\right)}{\frac{1}{2}-n}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+n}+\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\right)-\left(\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)2\pi\right)}{\frac{1}{2}+n}+\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)2\pi\right)}{\frac{1}{2}-n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+n}+\frac{1}{\frac{1}{2}-n}\right)-\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}+n}+\frac{-1}{\frac{1}{2}-n}\right)\right) \\
&= \frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}
\end{aligned}$$

De oplossing is dus

$$\psi(r,\theta) = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos(n\theta)}{(1-4n^2)}$$

6. Los de volgende differentiaalvergelijking op door gebruik te maken van de Laplace–transformatie:

$$y''+4y'-5y = 6\delta_2(t) \text{ met } y(0)=1 \text{ en } y'(0)=-1$$

$\mathcal{L}[y'']+4\mathcal{L}[y']-5\mathcal{L}[y] = 6\mathcal{L}[\delta(t-2)]$
$\Rightarrow \left(z^2Y(z)-zy(0)-y'(0)\right)+4\left(zY(z)-y(0)\right)-5Y(z) = 6e^{-2z}$
$\Rightarrow \left(z^2Y(z)-z+1\right)+4\left(zY(z)-1\right)-5Y(z) = 6e^{-2z}$
$\Rightarrow \left(z^2+4z-5\right)Y(z)-z+1-4 = 6e^{-2z}$
$\Rightarrow \left(z^2+4z-5\right)Y(z) = z+3+6e^{-2z}$
$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{z+3-e^{-2z}}{z^2+4z-5} = \dfrac{z+3}{z^2+4z-5}+e^{-2z}\dfrac{6}{z^2+4z-5}$
$\Rightarrow Y(z) = \dfrac{2}{3(z-1)}+\dfrac{1}{3(z+5)}+e^{-2z}\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+5}\right)$
$\Rightarrow y(t) = \dfrac{2}{3}e^t+\dfrac{1}{3}e^{-5t}+\left(e^{10-5t}-e^{t-2}\right)\cdot H(t-2)$

7. Zoek een uitdrukking voor de algemene term van de rij $y(n)$ die voldoet aan de differentievergelijking

$$y(n+1) = \frac{n}{n+2}y(n)+1 \text{ met } y_1 = 2$$

en bereken $y(100)$ zonder de 99 termen ervoor te berekenen.
$y(n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}a(i)\right)y(1)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\prod_{i=j+1}^{n-1}a(i)\right)g(j)$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+2}\right) 2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} \frac{i}{i+2}\right) 1 \\
&= 4\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+2}}{\prod_{i=1}^{j} \frac{i}{i+2}} \\
&= \frac{4}{n\left(n+1\right)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!\,(j+2)!}{(n+1)!j!} \\
&= \frac{4}{n\left(n+1\right)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left(j^2+3j+2\right)}{n^2+n} \\
&= \frac{4}{n\left(n+1\right)} + \frac{1}{n\left(n+1\right)} \sum_{j=1}^{n-1} \left(j^2+3j+2\right) \\
&= \frac{4}{n\left(n+1\right)} + \frac{1}{n\left(n+1\right)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 3\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} 2\right) \\
&= \frac{4}{n\left(n+1\right)} + \frac{1}{n\left(n+1\right)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 3\sum_{j=1}^{n-1} j + \sum_{j=1}^{n-1} 2\right) \\
&= \frac{1}{n\left(n+1\right)} \left(4 + \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + 3\frac{(n-1)\,n}{2} + 2\left(n-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{n\left(n+1\right)} \left(\frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n + 2\right) \\
&= \frac{(n+3)\left(n^2+2\right)}{3n\left(n+1\right)} \\
&\Rightarrow y\left(100\right) = \frac{171\,701}{5050}
\end{aligned}
$$