Nuttige uitdrukkingen

- Tweede wet van Newton/differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(x - x_0) \quad \text{waarbij} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{g}{L}} \ldots$$

  met x_0 als evenwichtspositie en als algemene oplossing

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \quad \left(\text{of} \quad x(0)\cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

  De waarde van A en δ (of $x(0)$ en $v(0)$) hangen af van de begincondities van het probleem.

- Frequentie, hoekrequentie en periode

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- Mechanische energie

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

Oefening 1 (14.7)

Grote gebouwen worden ontworpen om mee te bewegen in de wind. In een wind met een snelheid $v = 100\frac{km}{h}$ bijvoorbeeld, beweegt de top van de 110 verdiepingen tellende Sears Tower in horizontale richting met een amplitude van $15cm$. Het gebouw oscilleert aan zijn natuurlijke frequentie, die overeenkomt met een periode $T = 7,0s$.

Als je veronderstelt dat de beweging van het gebouw een harmonische oscillatie is, wat is dan de maximale horizontale snelheid en versnelling die wordt ondervonden door een persoon op de bovenste verdieping? Vergelijk de maximale versnelling (als percentage) met de valversnelling.

Oefening 2 (14.21)

Beschouw twee voorwerpen, A en B, dewelke beide een harmonische beweging ondergaan maar met verschillende frequenties, beschreven door

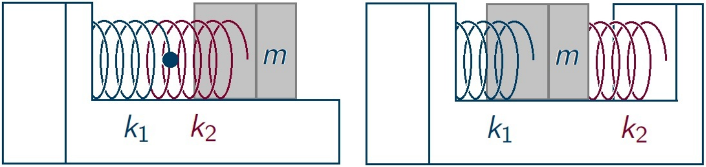
$$x_A(t) = (2,0m)\sin\left(\frac{2,0}{s}t\right) \quad \text{en} \quad x_B(t) = (5,0m)\sin\left(\frac{3,0}{s}t\right).$$

Zoek de eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop de objecten zich beiden in hun evenwichtspositie bevinden.

Oefening 3 (14.25)

Een massa m wordt verbonden met twee veren met veerconstanten k_1 en k_2. Dit gebeurt in twee verschillende manieren zoals getoond in de figuur. Toon aan dat de periodes van de trillingen worden gegeven door

$$\text{a) } T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}; \qquad \text{b) } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}.$$



a) b)

Oefening 4 (14.62)

Een massa $m = 215g$ bevindt zich op een luchtkussen. De massa is bevestigd tussen twee veren (zoals in geval "b)" van de vorige oefening). Beide veren hebben dezelfde veerconstante $k = 125\frac{N}{m}$.

a) Bepaal de frequentie van de oscillatie, in de veronderstelling dat er geen demping plaatsvindt.

b) Men observeert dat na 55 oscillaties, de amplitude is teruggevallen naar 50% van de oorspronkelijke waarde. Schat de waarde van γ, uitgaande van de relatie

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t).$$

Oefening 5 (14.84)

In sommige diatomaire moleculen kan de grootte van de kracht uitgeoefend door het ene atoom op het andere worden beschreven door

$$F = -\frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3},$$

waar r de interatomaire afstand is en C en D positieve constanten.

a) Teken $F(r)$ voor $0,8\frac{D}{C} \leqslant r \leqslant 4\frac{D}{C}$.

b) Toon aan dat het evenwicht optreedt voor $r = r_0 = \frac{D}{C}$.

c) Stel $\Delta r = r - r_0 \ll r_0$ een kleine afwijking ten opzichte van evenwicht. Toon aan dat de beweging voor zulke kleine uitwijkingen benaderend harmonisch is. Maak hiervoor gebruik van

$$(1+x)^m \approx 1 + mx \quad \text{(voor kleine x).}$$

d) Bepaal de krachtsconstante.

e) Wat is de periode van de beweging? Hiervoor kan je veronderstellen dat één van de atomen in rust blijft.

Oefening 6 (14.87)

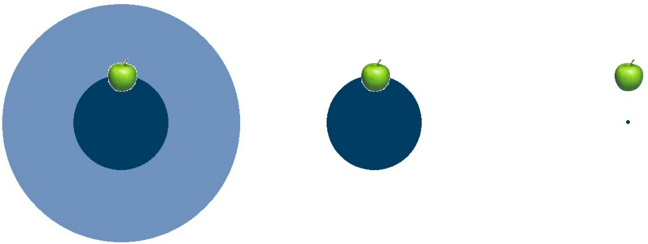
Beeld je in dat er een tunnel door de Aarde is gegraven. Deze tunnel heeft een diameter van $10cm$ en loopt recht door het midden van de aarde. Aan één uiteinde gooi je een appel in de tunnel.

a) Toon aan dat als de Aarde een homogene massadichtheid heeft, de appel een harmonische beweging zal beschrijven.

b) Hoe lang zal de appel er over doen om zijn vertrekpunt opnieuw te bereiken?

Je mag alle vormen van wrijving verwaarlozen. Verder mag je er ook gebruik van maken dat de appel op elk ogenblik enkel de zwaartekracht voelt die wordt veroorzaakt door de massa die zich bevindt dichter dan een afstand r van het middelpunt van de Aarde, waarbij r de afstand van de appel tot dit middelpunt is. Ten slotte kan je gebruiken dat een sferisch symmetrische ladingverdeling zich gedraagt als een puntmassa in het zwaartepunt (met dezelfde totale massa).

Illustratie



Figuur: De appel valt door de Aarde (links), maar zal enkel de zwaartekracht voelen van het donkerblauwe gedeelte (midden). Deze kracht gedraagt zich alsof alle donkerblauwe massa zich in het massamiddelpunt bevindt (rechts).

Oplossingen

Oplossing 1

Een harmonische beweging komt overeen met een verplaatsing van de vorm

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta).$$

De snelheid en versnelling zijn daarom gegeven door

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \delta); \quad a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \delta).$$

Deze grootheden zijn maximaal als respectievelijk $\cos(\omega t + \delta)$ en $-\sin(\omega t + \delta)$ gelijk zijn aan hun maximale waarde, namelijk 1. Hieruit volgt

$$v_{\max} = A\omega = \frac{2\pi A}{T} = \frac{2\pi \cdot 0,15m}{7,0s} = 0,13\frac{m}{s}$$

en

$$a_{\max} = A\omega^2 = \frac{(2\pi^2)A}{T^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot 0,15m}{(7,0s)^2} = 0,12\frac{m}{s^2}.$$

Deze waarde komt overeen met 1,2% van de valversnelling.

Oplossing 2

De voorwerpen zullen zich elk in hun evenwichtspositie bevinden wanneer $x_i(t) = 0$. Dit zal het geval zijn als

$$x_A(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2,0}{s} t = n\pi \Leftrightarrow t = \frac{n\pi}{2} s \quad n \in \{1, 2, 3 \ldots\}$$
$$x_B(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3,0}{s} t = l\pi \Leftrightarrow t = \frac{l\pi}{3} s \quad l \in \{1, 2, 3 \ldots\}$$

De voorwerpen zullen zich tesamen in hun evenwichtspositie bevinden op tijden

$$t = \pi s, \quad t = 2\pi s, \quad t = 3\pi s \ldots$$

Dit zijn de gemeenschappelijke gehele veelvouden van $\pi/2$ en $\pi/3$.

Oplossing 3.1

a) Een manier om de periode van een dergelijk systeem te vinden is om de tweede wet van Newton neer te schrijven in de harmonische vorm. Hieruit kan ω en dus T worden bepaald.
Kies de x-as positief naar rechts met als nulpunt de wand, zodat de positie gegeven is door de som van de totale lengtes van de veren:

$$x = x_1 + x_2.$$

De tweede wet van Newton opschrijven voor de massa levert je

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1 + x_2) = -k_2(x_2 - x_{2,0}),$$

waarbij $x_{2,0}$ de evenwichtslengte van de tweede veer voorstelt. Merk op dat enkel de veer die de massa effectief raakt een kracht uitoefent.

Oplossing 3.2

Hoe komt de andere veer dan kijken bij het verhaal? De tweede wet van Newton kan je ook opschrijven voor het (massaloze) punt dat beide veren verbindt. De positie van dit punt is x_1 en dus luidt de bewegingsvergelijking

$$0\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1(x_1 - x_{1,0}) + k_2(x_2 - x_{2,0}).$$

Deze relatie zegt je dat de uitrekkingen (of inkrimpingen) van de veren omgekeerd evenredig zijn met hun veerconstanten. Hieruit volgt

$$x - x_{1,0} - x_{2,0} = (x_1 - x_{1,0}) + (x_2 - x_{2,0}) = \left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)(x_2 - x_{2,0}).$$

Dit zullen we invullen in de differentiaalvergelijking (tweede wet van Newton) die werd bekomen op de vorige slide.

Oplossing 3.3

Op de vorige slide werd afgeleid dat

$$
\begin{aligned}
k_2(x_2 - x_{2,0}) &= k_2\left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)^{-1}[x - x_{1,0} - x_{2,0}] \\
&= \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}[x - x_{1,0} - x_{2,0}].
\end{aligned}
$$

Dit betekent

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{k_2}{m}(x_2 - x_{2,0}) \\
&= -\underbrace{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}}_{\omega^2}[x - (x_{1,0} + x_{2,0})].
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}.
$$

Oplossing 3.4

b) De tweede situatie is eenvoudiger. Noem x_1 en x_2 opnieuw de totale lengtes van de veren. Dan zal de positie van de massa — gemeten vanaf de linkse wand op de tekening — gelijk zijn aan x_1 en voldoen aan

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k_1(x_1 - x_{1,0}) + k_2(x_2 - x_{2,0}).$$

De opstelling is zodanig dat de som $x_1 + x_2$ een constante is; elke toename in de lengte van de ene veer moet exact worden gecompenseerd door de andere. Noem deze constante lengte ℓ. Dan kan je schrijven

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1(x_1 - x_{1,0}) + k_2((\ell - x_1) - x_{2,0}) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_1 x_{1,0} + k_2\ell - k_2 x_{2,0} \\ &= -(k_1 + k_2)\left(x_1 - \frac{k_1 x_{1,0} + k_2(\ell - x_{2,0})}{k_1 + k_2}\right) \end{aligned}$$

Identificatie met de algemene vorm levert

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Oplossing 4.1

a) Uit de werkwijze toegepast in de vorige oefening volgt dat in afwezigheid van demping

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

zodat

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 125\frac{N}{m}}{0,215kg}} = 5,42Hz.$$

Oplossing 4.2

b) Uit het gegeven dat de amplitude elke 55 oscillaties halveert, volgt

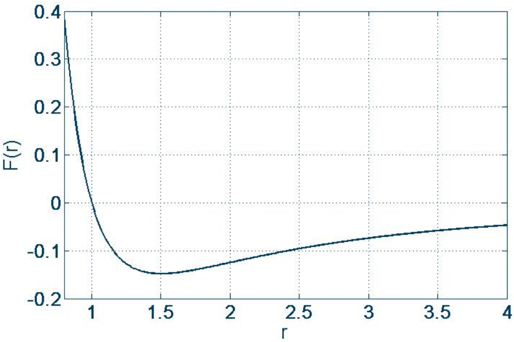
$$\exp\{-\gamma 55T\} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = -\frac{1}{55T}\ln\frac{1}{2} = f\,\frac{\ln 2}{55}.$$

De frequentie die in deel "a" werd gevonden invullen in deze relatie levert als resultaat

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\ln 2}{55} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\cdot 125\frac{N}{m}}{0,215kg}}\frac{\ln 2}{55} = 0,068s^{-1}.$$

Oplossing 5.1

a)



b) Evenwicht treedt op wanneer

$$F(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{D}{C} \stackrel{\text{def.}}{=} r_0 .$$

Oplossing 5.2

c),d) Om de kracht uit te drukken voor kleine uitwijkingen van r_0, kan deze eerst geschreven worden als

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} \\
&= -\frac{C}{(r_0 + \Delta r)^2} + \frac{D}{(r_0 + \Delta r)^3} \\
&= -\frac{C}{r_0^2 \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^2} + \frac{D}{r_0^3 \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^3} \\
&= -\frac{C}{r_0^2}\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-2} + \frac{D}{r_0^3}\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-3} .
\end{aligned}
$$

Onder de vermelde benadering wordt dit

$$
F \approx -\frac{C}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0}\right) + \frac{D}{r_0^3}\left(1 - 3\frac{\Delta r}{r_0}\right) .
$$

Oplossing 5.3

Deze uitdrukking kan worden vereenvoudigd, namelijk

$$\begin{aligned} F &\approx -\frac{C}{r_0^2}\left(1-2\frac{\Delta r}{r_0}\right)+\frac{D}{r_0^3}\left(1-3\frac{\Delta r}{r_0}\right) \\ &= \underbrace{-\frac{C}{r_0^2}+\frac{D}{r_0^3}}_{0}+2C\frac{\Delta r}{r_0^3}-3D\frac{\Delta r}{r_0^4} \\ &= +2C\frac{\Delta r}{r_0^3}-3D\frac{\Delta r}{r_0^3(D/C)} \\ &= -\frac{C}{r_0^3}\Delta r. \end{aligned}$$

De kracht F is dus proportioneel met de uitwijking Δr ten opzichte van evenwicht en is terugroepend. De beweging is dus harmonisch met krachtsconstante $C/r_0^3 = C^4/D^3$.

Oplossing 5.4

e) Als één van de atomen in rust blijft, zal het andere atoom een kracht F ondervinden zoals is afgeleid op de vorige slides. Deze beweging is harmonisch met krachtsconstante

$$k = \frac{C}{r_0^3}.$$

Daarom volgt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^3}{C}}.$$

Opm.) In de hoofdstukken over mechanica stond beschreven dat de tweede wet van Newton enkel geldt in inertiële referentiestelsels. Het stelsel dat we net beschouwd hebben is dat niet: op het stilstaande atoom werkt een netto kracht ten gevolge van het andere atoom en toch blijft de versnelling nul — iets wat kan in een niet-inertieel stelsel. Hoewel de afleiding impliciet gebruik maakt van deze wet, is ons resultaat toch geldig. Het is mogelijk de periode te berekenen in een inertieel stelsel en de transformatie tussen de stelsels laat tijdsintervallen — dus ook T — onveranderd.

Oplossing 6.1

a) Opdat de appel de gewenste beweging zou beschrijven, dient de tweede wet van Newton te kunnen worden geschreven in de vorm

$$m_a \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -k(r - r_0),$$

waarbij r de afstand van de appel tot het middelpunt van de Aarde is. Als de Aarde een homogene massadichtheid ρ heeft, zal de appel enkel zwaartekracht ondervinden van dat deel van de massa dat zich even ver van of dichter bij het middelpunt bevindt. Dit omdat de zwaartekracht een zogenaamde $1/r^2$-wet is, net als elektrostatische krachten tussen ladingen. Het zal voor de appel lijken alsof al deze massa zich in het middelpunt van de Aarde bevindt. Daarom is de kracht die inwerkt op de appel op afstand r van de Aarde

$$F_r(r) = -\frac{Gm_a}{r^2}\int_0^r \rho \,\mathrm{d}V = -\frac{Gm_a\rho}{r^2}\frac{4\pi}{3}r^3 = -\frac{4\pi}{3}Gm_a\rho r.$$

Oplossing 6.2

Met de kracht gekend kan de tweede wet van Newton eenvoudig worden uitgedrukt:

$$
\begin{aligned}
m_a \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= F_r(r) \\
&= -\left[\frac{4\pi}{3} G m_a \rho\right] r.
\end{aligned}
$$

Dit is inderdaad de juiste vorm.

b) De gevraagde grootheid is niets anders dan de periode van de oscillatie. De uitdrukking tussen vierkante haakjes op de vorige regel is de krachtsconstante, waaruit volgt dat

$$
T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_a}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.
$$