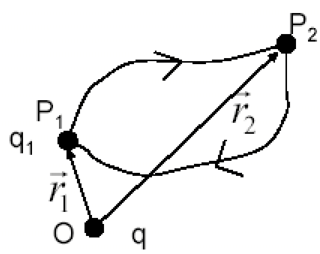
HFST 23 ELEKTRISCHE POTENTIAAL

• De **elektrostatische** kracht is een **conservatieve** kracht.
• Ter herinnering : een kracht is conservatief indien de arbeid geleverd door die kracht om een deeltje van plaats P1 naar P2 te brengen onafhankelijk is van de gevolgde weg, maar enkel afhangt van begin- en eindpunt.
• beschouw de kracht op een lading q1 tgv. een puntlading q in de oorsprong en bereken de arbeid om van P1 naar P2 te gaan.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = k\, q q_1 \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = k\, q q_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$W = k\, q q_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

+ later: potentiaal door verschillende puntladingen

conservatief elektrostatisch veld
• Niet enkel de kracht tgv. een puntlading is conservatief, maar ook deze tgv. willekeurige ladingsverdeling.
• Het elektrostatisch veld dat bij deze conservatieve kracht hoort noemen we een **conservatief veld**.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1}$$

De potentiele NRG verandering wordt dan gegeven door (cfr vorig jaar):

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -q_1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Het potentiaalverschil dV wordt dan gedefiniëerd als het verschil in potentiele NRG per ladingseenheid:

$$dV = \frac{dU}{q_1} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Voor een eindige verplaatsing van een punt a naar een punt b wordt het potentiaalverschil dan:

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_1} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Het potentiaal verschil V_b-V_a is het negatieve van de arbeid per ladingseenheid gedaan door het elektrische veld op een kleine positieve testlading wanneer de testlading beweegt van een punt a naar een punt b. (tijdens deze berekening, bleven alle andere ladingen op hun positie)
De functie V wordt de ELEKTRISCHE POTENTIAAL genoemd.
Zoals het elektrische veld is ook de potentiaal V een plaatsfunctie. In tegenstelling tot het elektrische veld is V een scalaire functie, waar E een vectorfunctie is. Zoals bij potentiele NRG U , zijn alleen potentiaal VERSCHILLEN belangrijk. We kunnen een potentiaal vrij gelijk aan nul kiezen op een gegeven punt, zoals we dat ook met potentiele NRG kunnen

doen. Gemakkelijkheidshalve worden V en U van een test lading gekozen nul te zijn bij een zelfde gegeven punt. Onder deze omstandigheden zijn ze gerelateerd door:
$U = q_0 V$

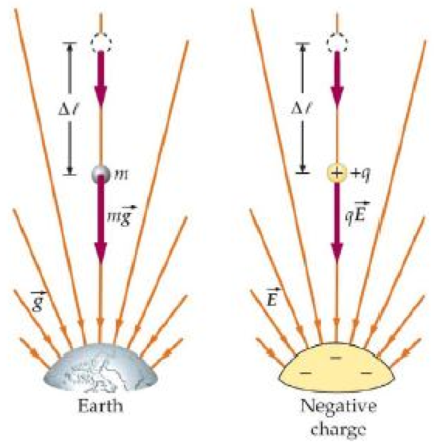
We hebben gezien dat het Eveld soms discontinu kan zijn. De potentiaal functie is overal continu, behalve in die punten waar het elektrische veld oneindig wordt (de punten waar een puntlading of lijnlading is).
Dit kunnen we afleiden van de definitie van V.

Omdat de elektrische potentiaal de potentiele NRG per eenheid van lading is, si de SI eenheid van V [J/C], men noemt deze eenheid ook de Volt V:
1 V = 1 J / C
Het potentieel verschil tussen twee punten (gemeten in volt) noemt men de spanning (voltage).
In een 12V batterij heeft de plus pool een potentiaal die 12 V hoger is dan de negatieve pool.
De eenheid van elektrische veld = N/C of meer gebruikelijk: V/m

In atomaire en nucleaire fysica hebben we vaak elementaire deeltjes met ladingen van grootte e, zoals e- en p+, die door potentiaalverschillen bewegen van duizenden zelfs miljoenen volt. Omdat NRG de dimensie heeft van elektrsche lading maal elektrische potentiaal, kunnen we het product van de eenheden van deze twee als nieuwe eenheid nemen: eV = elektron volt.
= de energie die het e- krijgt wanneer het een potentiaal verschil van 1V doorloopt.

$$1\ \text{eV} = 1.60\ \ 10^{-19}\ \text{C V} = 1.60\ \ 10^{-19}\ \text{J}$$

Er is een grote analogie tussen elektrostatische kracht en gravitatiekracht.
Als we een positieve testlading q in een elektrisch veld E plaatsen en loslaten, dan verstelt ze in de richting van E. als de kinetische NRG van de lading toeneemt, neemt zijn potentiele NRG af. De lading versnelt dus in de richting van lagere potentiele NRG, net zoals een massa versnelt in de richting van lagere potentiele gravitatie NRG.
→ Het Eveld wijst in de richting waarin V het snelst afneemt.



Potentiaal tgv puntlading.

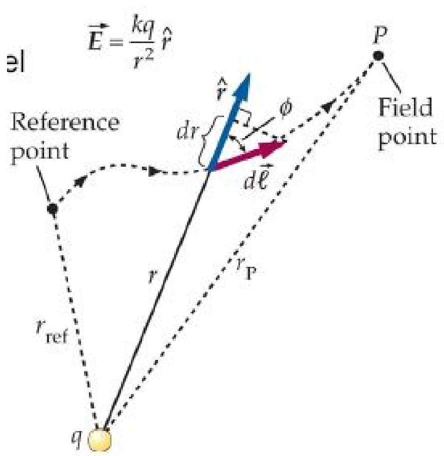
De elektrische potentiaal op een afstand r vn een puntlading q in de oorsprong kan berekend worden van het Eveld:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

Voor een infinitesimale verplaatsing dℓ waar we r_p vervangen hebben door r, is de verandering in V
dV= - E dℓ = - (kq/r²)^r . dℓ = -(kq/r²) dr
na integratie krijgt men dan:

$$\Delta V = V_P - V_{ref} = \frac{kq}{r_P} - \frac{kq}{r_{ref}}$$

= potentiaal tgv een puntlading!



We kunnen het referentiepunt vrij kiezen, dus kiezen we zo dat de potentiaal de algebraisch eenvoudigst vorm krijgt, we kiezen het referentiepunt oneindig ver weg van de puntlading.
$r_{ref} = \infty$
dan krijgen we:

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \rightarrow \text{ coulomb potentiaal!}$$

Deze coulomb potentiaal kan positief of negatief zijn, naargelang q positief of negatief is.

De potentiele NRG van een testlading q_0 geplaatst op een afstand r van de puntlading q is:
$U = q_0 V = (kq_0 q)/r$
Dit is de elektrische potentiele NRG van een twee-ladingen systeem relatief tot U=0 bij oneindige afstand. Als we de testlading q_0 loslaten op een afstand r van q(q blijft op zijn plaats) dan zal de testlading versneld worden weg van q (als gelijk teken q en q_0) op zeer grote afstand van q zal zijn potentiele NRG 0 zijn en zal zijn kinetische NRG dus $(kq_0q)/r$ zijn.
Alternatief, als we een testlading q_0 die oorspronkelijk in rust was op een afstand r tot op een oneindige afstand van q willen brengen dan moeten we $(kq_0q)/r$ arbeid verrichten.
Als twee ladingen op oneindige afstand van elkaar zijn dan beschouwen we U als nul.

Potentiaal tgv een systeem van puntladigen.

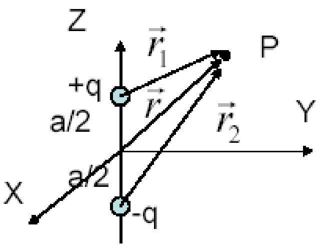
• De potentiaal tgv. meerdere puntladingen is de som van de potentialen. Maw. de potentiaal is additief. Dit volgt onmiddellijk uit de superpositie van elektrische velden.
V is een scalair dus som is eenvoudiger dan voor E-velden (vectoren)

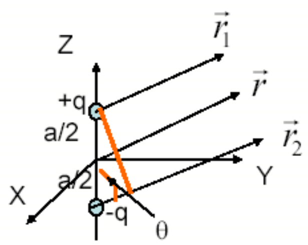
$$V = \sum_i \frac{kq_i}{r_i}$$

bv. potentiaal tgv. een dipool (**niet in boek**)

we zullen onderstellen dat punt P ver weg ligt van de dipool : r >> a

We kunnen dan in goede benadering stellen dat $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ parallel zijn.





$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_2 - r_1 = a\cos\theta; \qquad r_1\, r_2 \approx r^2$$

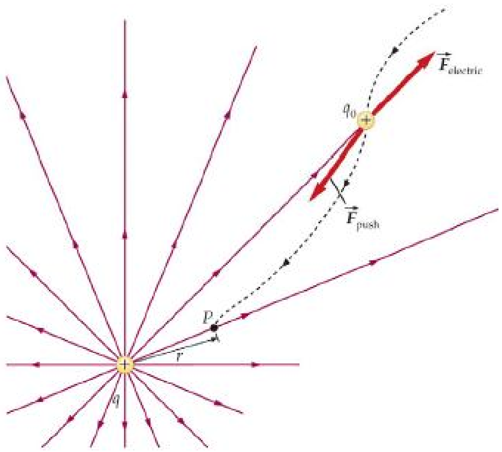
$$\Rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \quad ; p = aq$$

dipoolmoment

resultaat geldig ver weg van dipool : r >> a

8

De potentiele NRG van een testlading q_0 op een afstand van de puntlading q is dan:



$$U = \frac{k\,q\,q_0}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r}$$

Berekenen van het Eveld uitgaande van de Potentiaal

Als we de potentiaal kennen, dan kunnen we deze gebruiken om het Eveld te berekenen. Beschouw een kleine verplaatsing dℓ in een arbitrair Eveld. De verandering in potentiaal is:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E\cos\theta\, d\ell = -E_t d\ell$$

E_t is de componente van E langs de richting van dℓ

$$\Rightarrow E_t = -\frac{dV}{d\ell}$$

Als de verplaatsing dℓ loodrecht is tov het Eveld, dan is dv = 0 (potentiaal verandert niet). Voor een gegeven dℓ, gebeurt de maximum toename van V wanneer de verplaatsing dℓ in dezelfde richting is als –E.

neem nu achtereenvolgens de verplaatsing langs de X,Y en Z as :

$$\ell = x, y, z$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Of we kunnen dit ook op een meer symbolische manier noteren:
Een vector dat in de richting van de grootste verandering va, een scalaire functie wijst en dat een grootte heeft gelijk aan de afgeleide van die functie met respect voor de afstand in die richting noemt men de gradient van de functie.

Vector ∇ met als coordinaten:

$$\nabla \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$ de gradiënt operator

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V \qquad \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Het Eveld wordt gegeven als de gradient van de potentiaal!
Dit is een derde manier om E te berekenen naast coulomb en gauss, men zoekt eerst V dan E!

als de potentiaal V alleen van x afhangt, dan is er geen verandering in V voor de verplaatsingen in de y en z richtingen, dus zijn dan E_y en E_z nul. Voor een verplaatsing in de x richting, dℓ = dx î bekomen we dan:
$dV(x) = -E_x\, dx \rightarrow E_x = -(dV(x))/dx$

idem voor een sferisch symmetrische ladingsverdeling, kan de potentieaal een funcite zijn alleen van de radiale afstand r. verplaatsingen loodrecht to de radiaal richting geven geen verandering in V(r), dus het Eveld moet radiaal zijn. Een verplaatsing in de radiale richiting geeft dan:
$dV(r) = -E_r\, dr \rightarrow E_r = -(dV(r))/dr$

we kunnen dus V of E berekenen als we een van beide gegeven hebben, maar let op! We kunnen E niet berekenen als we V maar in 1 punt kennen, we meoten V over een deel van de ruimte kennen!

Berekening van de potentiaal voor een continue ladingsverdeling.

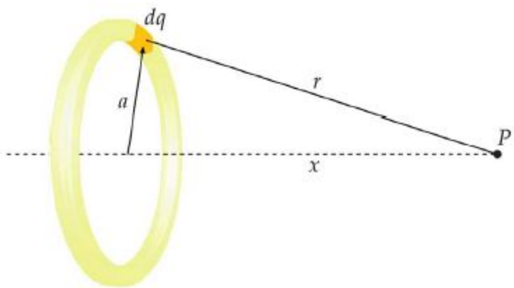
• we gaan de continue ladingsverdeling weer opvatten als een oneindige verzameling van oneindig kleine puntladingen en we berekenen dan de som (i.e. integraal) van de potentialen te wijten aan al deze puntladingen.

$$V = \int \frac{k\, dq}{r}$$

Deze vergelijking neemt aan dat V = 0 op oneindig grote afstand van de ladingen, dus we kunnen deze niet gebruiken wanneer er een lading is op oneindige afstand.

Potentiaal tgv een uniform geladen ring met lading Q.

de figuur toont een uniform geladen ring met straal a en lading Q. de afstand van een eenheid van lading tot het vrije punt P op de as van de ring is r = √(a²+x²).



aangezien deze afstand dezelfde is voor alle eenheden van lading de ring kunnen we deze term buiten de integraal plaatsen. De potentiaal op punt P tgv de ring is dan:

$$V = \int_0^Q \frac{k}{r} dq = \frac{k}{r} \int_0^Q dq = \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Potentiaal tgv een uniform geladen schijf

We kunnen ons resultaat voor de potentiaal tgv een uniform geladen ring gebruiken om de potentiaal tgv een uniform geladen schijf te berekenen.
ZIE VB 23-9 IN TIPLER!
De formule:

$$V = 2\pi k\sigma |x| \left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}} - 1 \right)$$ R = straal vd schijf

Potentiaal tgv een uniform geladen oneindig grote plaat.

Als we R heel groot laten worden, dan benaderd onze schijf een oneindige plaat. Als R oneindig groot wordt, dan wordt ook de potentiaal functie oneindig groot. Maar omdat we in het begin aannamen dat V = 0 op oneindig kunnen we dus niet diezelfde potentiaalfunctie gebruiken. Voor oneindige ladingsverdelingen, moeten we V = 0 kiezen in een eindig punt ipv in een oneindig punt. Voor zulke gevallen, zoeken we eerst het Eveld (door directe integratie van wet van Gauss) en berekenen we daarna de potentiaal functie V door gebruik te maken zijn definitie dV = - E dℓ. Voor een oneindige plaat in het yz vlakmet uniforme ladingsdensiteit σ, wordt het Eveld voor positieve x gegeven door:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} = 2\pi k \sigma \hat{i}$$

De potentiaal is dan:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -(2\pi k \sigma \hat{i})\cdot\left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right) = -2\pi k \sigma\, dx$$

We hebben hier gebruik gemaakt van: dℓ = dx î + dy ^j + dz ^k.
Als we deze potentiaaluitdrukking integreren dan krijgen we:

$$\Rightarrow V = -2\pi k \sigma x + V_0$$ integratieconstante V_0 : potentiaal bij x = 0

Merk op dat de potentiaal afneemt met toenemende afstand van de schijf en tot -∞ nadert als x tot + ∞ nadert.
Voor een negatieve x is het elektrisch veld:

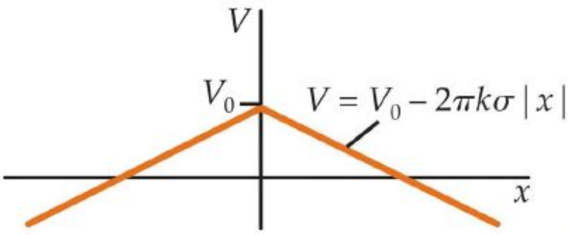
$$\vec{E} = -2\pi k \sigma \hat{i}$$

Dus

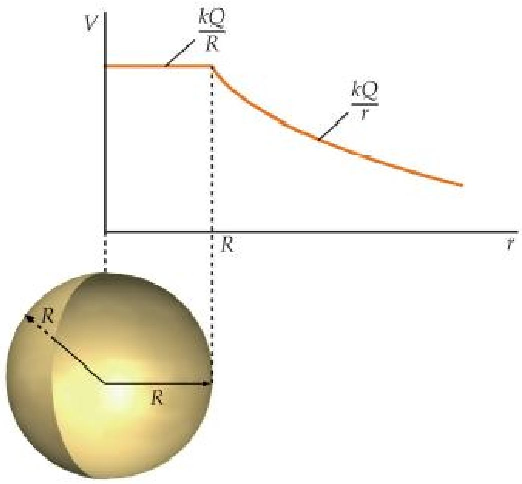
$$\Rightarrow V = V_0 + 2\pi k \sigma x$$

Aangezien x negatief is, neemt de potentiaal opnieuw af met toenemende afstand van de plaat en nadert -∞ als x -∞ nadert.
Voor positieve of negatieve x kan de potentiaal geschreven worden als:

$$V = V_0 - 2\pi k\sigma|x|$$



Potentiaal tgv een geladen bolschil
We zoeken nu de potentiaal tgv een geladen bolschil met straal R en lading Q, welke uniform verdeeld is over het oppervlak. We zijn geintereseerd in de potentiaal in alle mogelijk punten, binnen, buiten en op het oppervlak.
Formules (geen bewijs!:)



$$V = \frac{kQ}{r} \qquad r \geq R$$

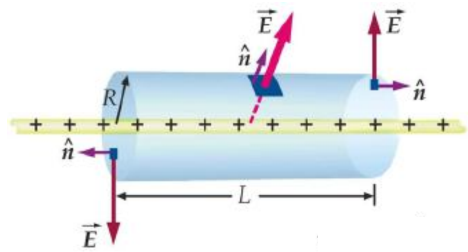
$$V = \frac{kQ}{R} \qquad r \leq R$$

constant maar niet nul !!

Opgelet! Een veelgemaakte fout is dat men denkt dat de potentiaal nul moet zijn binnen een bolschil omdat het elektrische veld nul is in die zone.!!! Maar een zone met E = 0 duid simpelweg aan dat de potentiaal uniform is.

Potentiaal tgv een oneindig lange kabel met uniforme ladingsverdeling.

Stel de lading per lengte eenheid = λ. We berekenen de potentiaal door het Eveld rechtstreeks te integreren. We gaan dus eerst het Eveld van een oneindig lange kabel met uniforme ladingsverdeling bepalen.



Dit doen we door gebruik te maken van de wet van Gauss. Wegens de cilinder symmetrie is het Eveld steeds loodrecht op de as gericht.

De uitwaartse flux door dit soort gauss opp met straal R en lengte L is E_R (2πRL) en de lading binnenin is λL.

Als we deze waarden in de wet van gauss substitueren en oplossen naar E_R dan krijgen we: $E_R = 2k\lambda/R$

$$E_R \times 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}$$

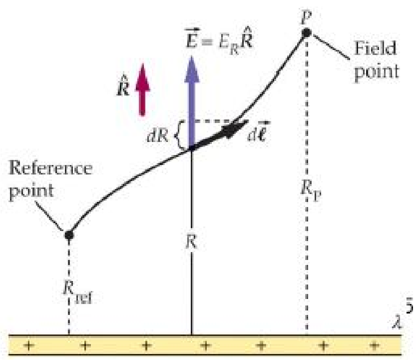
De verandering in V voor een verplaatsing dℓ wordt gegeven door:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -E_R\hat{R}\cdot d\vec{\ell} = -E_R dR$$

(^R . dℓ = dR)

Integreren van een arbitrair referentiepunt tot een arbitrair veldpunt P geeft:

$$\Rightarrow V_P - V_{ref} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_P}{R_{ref}}\right)$$



Rref = de radiale afstand van het referenteipunt tot de kabel. Per conventie kiezen we de potentiaal gelijk aan 0 in het referentie punt (Vref = 0). We kunnen Rref niet nul kiezen omdat ln (0) = - ∞ en we kunnen Rref ook niet ∞ kiezen want ln (∞) = +∞. Elke andere keuze is acceptabel.

Dit is een goed model voor hoogspanningskabels!

Equipotentiaal oppervlakken

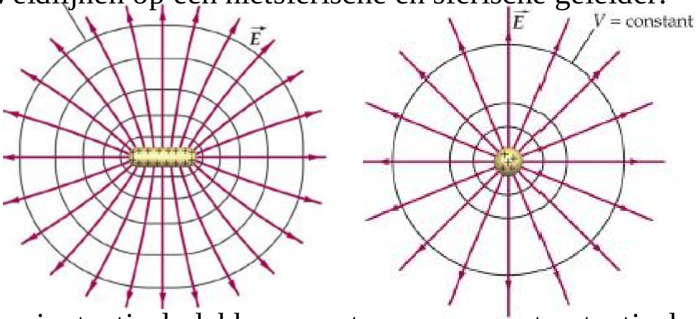
De punten in de ruimte waarvoor V = cst vormen een oppervlak: het equipotentiaal oppervlak. Aangezien er geen Eveld is binnen het materiaal van een geleider die in statisch evenwicht is, is de verandering in V als we door de geleider bewegen nul!. Dus, de V is dezelfde doorheen het materiaal van de geleider. De geleider is een drie-dimensionaal equipotentiaal gebied en zijn opp is een equipotentiaal opp. Als men een testlading op het oppervlak over een kleine afstand verplaatst evenwijdig met het opp dan blijft dV=0,.

Aangezien E. dℓ is nul voor elke dℓ evenwijdig tot het opp, moet E loodrecht staan en moet elke dℓ evenwijdig zijn met het oppervlak. E moet dus normaal staan tov het oppervlak.

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{op equipotentiaaloppervlak}}}{=} 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell} \qquad \forall\, d\vec{\ell}$$

evenwijdig met het equipotentiaaloppervlak.

Dus ook alle Eveldlijnen die in of uit een equipotentiaal opp gaan moeten hier loodrecht op staan.
Veldlijnen op een nietsferische en sferische geleider:



equipotentiaal vlakken waartussen een vast potentiaalverschil is zitten dichter op elkaar daar waar de elektrische veldsterkte groter is.

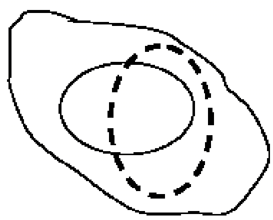
+ lezen in TIPLER: van de Graaff generator

Diëlektrische doorslag

• Vele isolatoren worden geleidend in zeer sterke E-velden. Dit fenomeen heet **diëlektrische doorslag**. In het geval van een vaste stof worden de elektronen losgerukt van de atomen en verplaatsen zich doorheen het ganse materiaal (en zorgen dus voor de geleiding). In gassen zoals lucht worden bij sterke velden moleculen of atomen geïoniseerd. Deze versnellen dan onder invloed van het E-veld en botsen met andere moleculen/atomen die op hun beurt geïoniseerd worden. Er treedt dus een “lawine” effect op. De ionen zorgen hier voor de geleiding van de elektrische stroom.
• Voor lucht gebeurt de diëlektrische doorslag bij E . 3 x 106 V/m. Die waarde van het E-veld waarbij de doorslag plaats vindt, heet de diëlektrische sterkte (“dielectric strength”). De ontlading die dan volgt noemt men boogontlading (“arc discharge”).
• De elektrische schok die men soms krijgt bij het aanraken van de metalen deurknop is een voorbeeld van een boogontlading. Dit fenomeen treedt vooral op bij droog weer omdat vochtigheid de lucht, die van nature een goede isolator is, geleidend maakt wat er voor zorgt dat de lading weg kan alvorens de doorslagspanning bereikt wordt.
• Bliksem is een ander voorbeeld van diël. doorslag.

Afschermen van apparatuur voor elektrische velden (niet in boek)

- We hebben gezien dat in een geleider het elektrische veld steeds nul is.
- Voor een geleider met een caviteit (i.e. holte) waarin zich geen lading bevindt kunnen we bewijzen dat het elektrische veld in de caviteit nul is :



- Onderstel dat dit niet zou zijn. We gaan dan E berekenen langs het gesloten pad zoals aangegeven op de figuur. We hebben dan (E-veld in geleider is 0) :

$$\left.\begin{array}{ll} \int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 & \text{langs stuk in geleider} \\ \int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \neq 0 & \text{in de holte} \end{array}\right\} \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \neq 0 \quad \text{langs gesloten curve}$$

- Dit is echter in tegenspraak met het feit dat E conservatief is :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Onze aanname dat $E \neq 0$ in de holte is dus fout !
- Als we elektronische apparatuur willen afschermen voor elektrische velden dan kunnen we ze in een metalen "kooi" zetten : de Faraday kooi.
- De auto is een bekend voorbeeld van een Faraday kooi : beschermt tegen bliksem.

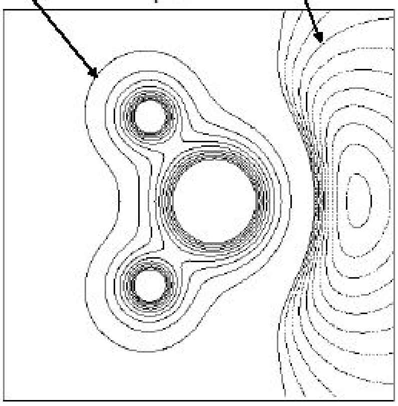
"lone pair" elektronen in water :
http://www.cem.msu.edu/~young/water/lp3.html

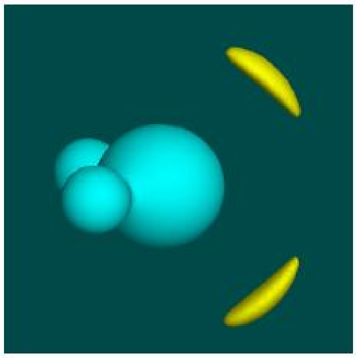
positieve waarde potentiaal : blauw

negatieve waarde potentiaal : geel

pos. waarden potentiaal

neg. waarden pot.





moleculaire elektrostatische potentiaal

(oppervlakken van constante potentiaal)

elektrostatische potentiaal : contouren in vlak molecule.