Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2017–2018

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Zij $z \in \mathbb{C}$ zodanig dat $|z| = 1$ en noem $\arg z = \theta$

   (a) Bewijs dat $|1 + z| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ en $\arg(1 + z) = \dfrac{\theta}{2}$

   (b) Geef een analoog resultaat voor $1 - z$

/6

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{cccccc|ccc} 2z^4 & +(3+i)\,z^3 & +5z^2 & +(12+3i)\,z & +8-10i & & z^2 & +iz & +2+i \\ \cline{7-9} & & & & & & & & \end{array}$$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{32x^3 - 54x - 27}{4x^3 - 27x + 27}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x \right)$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$$

/6

5. Zij

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 3x^2 & \text{als} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{als} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Bepaal a en b zodanig dat f differentieerbaar is in 1.

(b) Is f dan continu differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.

(c) Is f dan tweemaal differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.

(d) Is f dan tweemaal continu differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.

/6

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = \cos^2 2\theta - 2$$

en maak hier een tekening van.

/6

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{8x^3 - 9x^2 - 33x + 120}{x^4 - 5x^2 - 36} dx$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{8dx}{x^2\sqrt{4-x}}$$

/6

9. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-x}}} dx$$

$\boxed{\quad\quad /6}$

10. Bereken het omwentelingsoppervlakte van de figuur die je bekomt door de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)^{3/2}$ op het interval $\left[\sqrt{2}, 4\right]$ te wentelen rond de Y–as (dus NIET rond de X–as!!!)

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

| /60 |

Oplossingen:

1. Zij $z \in \mathbb{C}$ zodanig dat $|z| = 1$ en noem $\arg z = \theta$

   (a) Bewijs dat $|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ en $\arg(1+z) = \frac{\theta}{2}$

   Stel $z = a+bi = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow 1+z = 1+a+bi \Rightarrow |1+z| = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+2a+b^2+1} = \sqrt{2+2a} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2}$

   en stel $\arg(1+z) = \varphi \Rightarrow \begin{cases} r\cos\varphi = 1+a \\ r\sin\varphi = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi = 1+\cos\theta \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\varphi = \sin\frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{2}$

   (b) Geef een analoog resultaat voor $1-z$

   Stel $z = a+bi = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow 1-z = 1-a-bi \Rightarrow |1-z| = \sqrt{(1-a)^2+b^2} = \sqrt{a^2-2a+b^2+1} = \sqrt{2-2a} = \sqrt{2(1-\cos\theta)} = \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}$

   en stel $\arg(1-z) = \varphi \Rightarrow \begin{cases} r\cos\varphi = 1-a \\ r\sin\varphi = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi = 1-\cos\theta \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi = -\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\varphi = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \sin\frac{\theta}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\varphi = -\cos\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\theta - \pi}{2}$

   Feedback: Tal van andere, equivalente redeneringen zijn ook juist. Zo merkten enkelen op dat

   $$\arg\varphi = \frac{b}{1+a} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

   wat ik ook een mooie vond, of anderen hebben gewoon middels goniometrische formules bewezen dat $2\cos\frac{\theta}{2}\cdot \operatorname{cis}\frac{\theta}{2} = 1 + \operatorname{cis}\theta$, wat uiteraard ook juist is.

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{cccccc|ccc} 2z^4 & +(3+i)z^3 & +5z^2 & +(12+3i)z & +8-10i & & z^2 & +iz & +2+i \\ \cline{7-9} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 2z^4 & +(3+i)z^3 & +5z^2 & +(12+3i)z & +8-10i & z^2 & +iz & +2+i \\ -(2z^4 & +2iz^3 & +(4+2i)z^2) & & & 2z^2 & +(3-i)z & -5i \\ \cline{1-3} \cline{6-8} 0 & (3-i)z^3 & (1-2i)z^2 & & & & & \\ & -((3-i)z^3 & +(1+3i) & +(7+i)z) & & & & \\ \cline{2-4} & 0 & -5iz^2 & +(5+2i)z & & & & \\ & & -(-5iz^2 & +5iz & +5-10i) & & & \\ \cline{3-5} & & 0 & (3-3i)z & +3 & & & \end{array}$$

$Q(z) = 2z^2 + (3-i)z - 5i$
$R(z) = (3-3i)z + i$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{32x^3 - 54x - 27}{4x^3 - 27x + 27} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{(2x-3)(4x+3)^2}{(2x-3)^2(x+3)} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{(4x+3)^2}{(2x-3)(x+3)}$

   - $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}+} \dfrac{(4x+3)^2}{(2x-3)(x+3)} = \dfrac{81}{0^+\cdot\dfrac{9}{2}} = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}-} \dfrac{(4x+3)^2}{(2x-3)(x+3)} = \dfrac{81}{0^-\cdot\dfrac{9}{2}} = -\infty$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2-2x} - 2x\right)$

   - $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2-2x} - 2x\right) = +\infty + \infty = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2-2x} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-2x-4x^2}{\sqrt{4x^2-2x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{2x+2x} = -\dfrac{1}{2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2\sin^2\dfrac{5x}{2}} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2\sin^2\dfrac{5x}{2}} == \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2} = \dfrac{9}{25}$

4. Los de volgende exponentiële vergelijking op:

$$3^{2x+1} - 28\cdot 3^x + 9 = 0$$

   Stel $y = 3^x \Rightarrow 3^{2x+1} = 3y^2$
   $\Rightarrow 3y^2 - 28y + 9 = 0$
   $\Rightarrow (3y-1)(y-9) = 0$
   $\Rightarrow y \in \left\{\dfrac{1}{3}, 9\right\}$
   $\Rightarrow x \in \{-1, 2\}$

5. Zij

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}3x^2 & \text{als} \quad x\le 1\\ ax+b & \text{als} \quad x>1\end{cases}$$

   (a) Bepaal a en b zodanig dat f differentieerbaar is in 1.
   $f'_l(1) = 6$
   $\Rightarrow f'_r(1) = \lim\limits_{h\to0+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to0+} \dfrac{a(1+h)+b-3}{h} = \lim\limits_{h\to0+} \dfrac{ah+a+b-3}{h} = 6 \Rightarrow$
   $\begin{cases} a+b-3=0\\ a=6\end{cases} \Rightarrow (a,b) = (6,-3)$

   (b) Is f dan continu differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.

$$f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}6x & \text{als} \quad x\le 1\\ 6 & \text{als} \quad x>1\end{cases}$$

   is continu in 1

(c) Is f dan tweemaal differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.
Nee want $f_l''(1) = 6 \neq 0 = f_r''(1)$

(d) Is f dan tweemaal continu differentieerbaar in 1? Motiveer je antwoord.
Nee want f is geen tweemaal differentieerbaar in 1

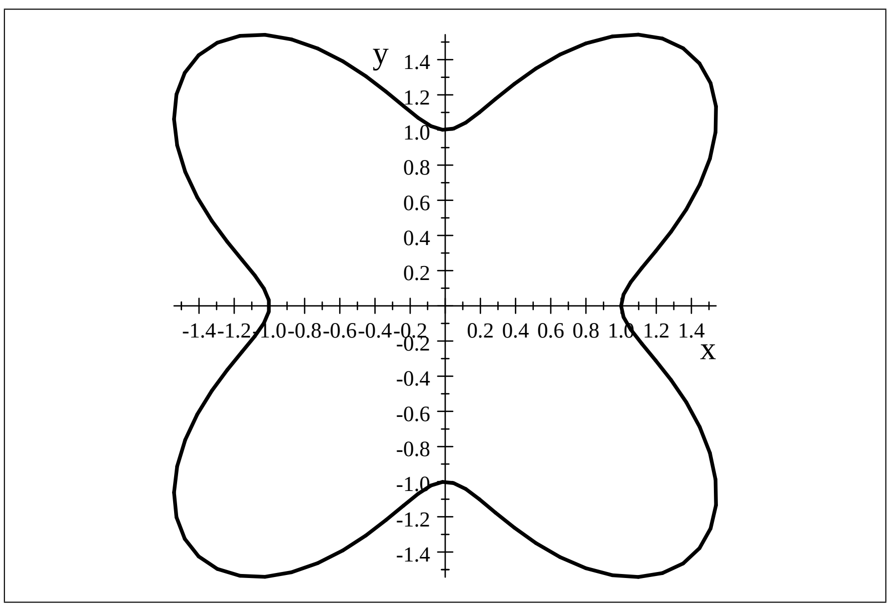
6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = \cos^2 2\theta - 2$$

en maak hier een tekening van.

- Domein $= \mathbb{R}$
  $\cos^2 2\theta - 2 = 0 = \dfrac{1+\cos 4\theta}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}\cos 4\theta - \dfrac{3}{2}$
  Periode $= \dfrac{\pi}{2}$
  Beperkt domein $= \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
- $r = 0 \Rightarrow \cos^2 2\theta = 2 \Rightarrow r$ heeft geen nulpunten
- $r' = -2\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = k\pi \Rightarrow \theta = k\dfrac{\pi}{4}$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
r'	0	$-$	0	$+$	0
	$M(-1)$	$\searrow$	$m(-2)$	$\nearrow$	$M(-1)$



7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{8x^3 - 9x^2 - 33x + 120}{x^4 - 5x^2 - 36} dx$$

$$\frac{8x^3-9x^2-33x+120}{x^4-5x^2-36}=\frac{8x^3-9x^2-33x+120}{(x^2+4)(x-3)(x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3}$$

$$\begin{aligned}
A(2i)+B &= \left.\frac{8x^3-9x^2-33x+120}{(x-3)(x+3)}\right|_{x=2i}=-12+10i\Rightarrow(A,B)=(5,-12)\\
C &= \left.\frac{8x^3-9x^2-33x+120}{(x^2+4)(x+3)}\right|_{x=3}=2\\
D &= \left.\frac{8x^3-9x^2-33x+120}{(x^2+4)(x-3)}\right|_{x=-3}=1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{8x^3-9x^2-33x+120}{x^4-5x^2-36}=\dfrac{5x-12}{x^2+4}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{8x^3-9x^2-33x+120}{x^4-5x^2-36}dx = \int\frac{5x-12}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x-3}dx+\int\frac{1}{x+3}dx = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+4\right)-6\,\mathrm{Bgtan}\,\frac{x}{2}+2\ln|x-3|+\ln|x+3|+c$

8. Bereken

$$\int\frac{8dx}{x^2\sqrt{4-x}}$$

Stel $t=\sqrt{4-x}\Rightarrow t^2=4-x\Rightarrow x=4-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$

$\Rightarrow I=\displaystyle\int\frac{-16tdt}{\left(4-t^2\right)^2t}=\int\frac{-16dt}{(t-2)^2(t+2)^2}$

Stel $\dfrac{-16}{(t-2)^2(t+2)^2}=\dfrac{A}{(t-2)^2}+\dfrac{B}{t-2}+\dfrac{C}{(t+2)^2}+\dfrac{D}{t+2}$

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{-16}{(t+2)^2}\right|_{t=2}=-1\\
\frac{-16}{(t-2)^2(t+2)^2}+\frac{1}{(t-2)^2} &= \frac{t+6}{(t-2)(t+2)^2}\\
&\Rightarrow B=\left.\frac{t+6}{(t+2)^2}\right|_{t=2}=\frac{1}{2}\\
C &= \left.\frac{-16}{(t-2)^2}\right|_{t=-2}=-1\\
\frac{-16}{(t-2)^2(t+2)^2}+\frac{1}{(t+2)^2} &= \frac{t-6}{(t-2)^2(t+2)}\\
&\Rightarrow D=\left.\frac{t-6}{(t-2)^2}\right|_{t=-2}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow I=-\displaystyle\int\frac{1}{(t-2)^2}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-2}dt-\int\frac{1}{(t+2)^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+2}dt$

$=\dfrac{1}{t-2}+\dfrac{1}{2}\ln|t-2|+\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{2}\ln|t+2|+c$

$=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}-2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{4-x}+2}\right|+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+2}+c$

Feedback: voor de zoveelste keer: $\displaystyle\int \frac{-16dt}{t^4-8t^2+16}$ is NIET gelijk aan $\displaystyle\int \left(-16t^{-4}+2t^{-2}-1\right)dt$. Wie zoiets heeft geschreven, krijgt voor deze vraag gewoon geen enkel punt!

9. Bereken de oneigenlijke integraal
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}dx$$
Stel $t = 1-e^{-x} \Rightarrow dt = e^{-x}dx$ en $e^{-x} = 1-t$
Als $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ en als $x \to +\infty \Rightarrow t \to 1$
$= \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{t}} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{t}} = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)dt = \lim_{a\to 0+}\left[2\sqrt{t}-\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a^3}-2\sqrt{a}+\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$

10. Bereken het omwentelingsoppervlakte van de figuur die je bekomt door de kromme met vergelijking $y = \frac{1}{3}\left(x^2-2\right)^{3/2}$ op het interval $\left[\sqrt{2},4\right]$ te wentelen rond de Y–as (dus NIET rond de X–as!!!)
$y = \frac{1}{3}\left(x^2-2\right)^{3/2}$
$\Rightarrow y' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}\left(x^2-2\right)^{3/2}\right) = x\sqrt{x^2-2}$
$\Rightarrow (y')^2 = \left(x\sqrt{x^2-2}\right)^2 = x^4-2x^2$
$\Rightarrow 1+(y')^2 = x^4-2x^2+1 = \left(x^2-1\right)^2$
$\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = x^2-1$
$S = 2\pi\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^4 x\left(x^2-1\right)dx = 2\pi\int_{\sqrt{2}}^4 \left(x^3-x\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{2}}^4 = 112\pi$

Feedback: Het is volledig af te raden, maar wie toch per se ook $\sqrt{1+(y')^2}$ in functie van x wil schrijven:
$x = \sqrt{2} \to y = 0$
$x = 4 \to y = \frac{1}{3}\sqrt{14^3}$
$\Rightarrow x(y) = \sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}$
$$\Rightarrow x'(y) = \frac{\frac{2}{3}\cdot(3y)^{-\frac{1}{3}}}{2\sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}}\cdot 3 = \frac{(3y)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}}$$
$$\Rightarrow (x'(y))^2 = \frac{(3y)^{-\frac{2}{3}}}{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}$$
$$\Rightarrow (x'(y))^2+1 = \frac{(3y)^{-\frac{2}{3}}+(3y)^{\frac{2}{3}}+2}{(3y)^{\frac{2}{3}}+2} = \frac{\left((3y)^{-\frac{1}{3}}+(3y)^{\frac{1}{3}}\right)^2}{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x'(y))^2+1} = \frac{(3y)^{-\frac{2}{3}}+(3y)^{\frac{2}{3}}+2}{(3y)^{\frac{2}{3}}+2} = \frac{\left((3y)^{-\frac{1}{3}}+(3y)^{\frac{1}{3}}\right)}{\sqrt{(3y)^{\frac{2}{3}}+2}}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{\left(x'\left(y\right)\right)^2+1}=\left(3y\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(3y\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow S=2\pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{14^3}}{3}}\left(\left(3y\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(3y\right)^{\frac{1}{3}}\right)dy=2\pi\left[\frac{1}{2}\left(3y\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}\left(3y\right)^{\frac{4}{3}}\right]_0^{\frac{\sqrt{14^3}}{3}}=112\pi$$