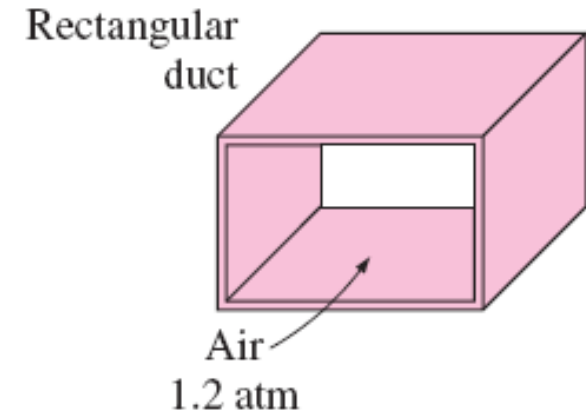
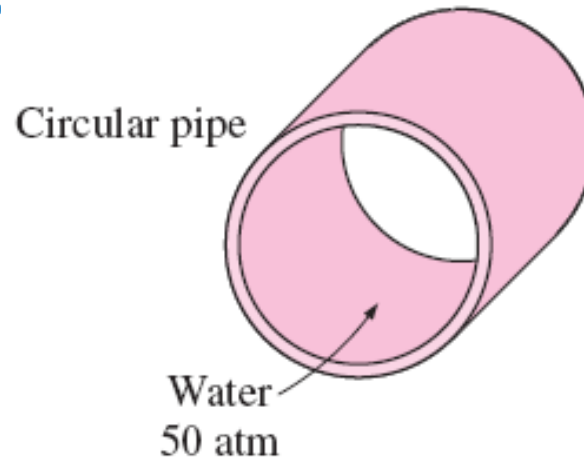


# Hfdst 6: Interne stroming

1. Inleiding
2. Laminaire en turbulente stroming
3. Het ingangsgebied
4. Laminaire stroming in buizen
5. Turbulente stroming in buizen
6. Kleine verliezen
7. Buizennetwerken

# 1. Inleiding

- **Nomenclatuur**

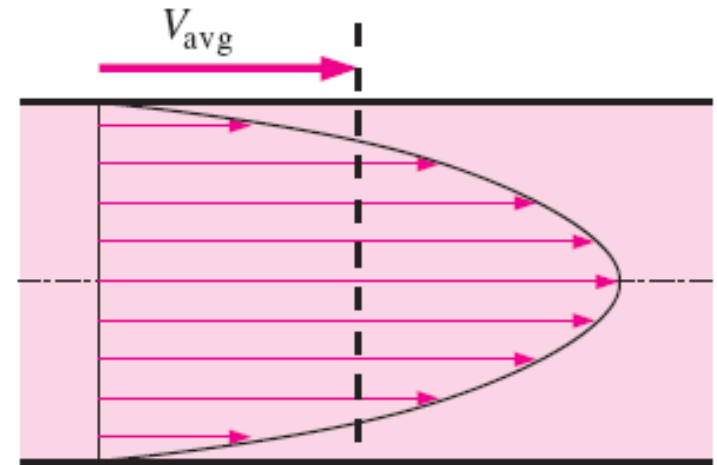


- Gebruikt in verwarming- en afkoelingstoepassingen en voor distributie
- Gebruik van pomp of ventilator
- **Wrijving**, verbonden met **drukverschil** en **hoogteverlies**
- Drukverschil gebruikt om **pompvermogen** te bepalen

## • Gemiddelde snelheid in een buis

- Snelheid aan wand is 0 (no-slip conditie)
- Gemiddelde snelheid  $V_{avg}$  werken: constant als opp.  $A_c$  constant blijft
- No-slip conditie veroorzaakt schuifspanning langs wand
- Gemiddelde snelheid  $V_{avg}$ :

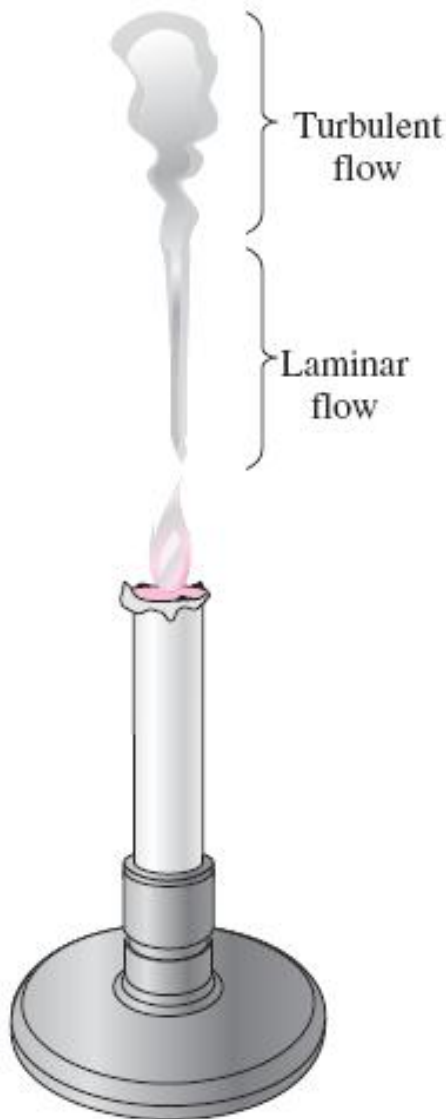
$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c = \int_{A_c} \rho u(r) dA_c$$



$$V_{avg} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr$$

$$V_{avg} = \frac{u_{max}}{2}$$

# 2. Laminaire en turbulente stroming

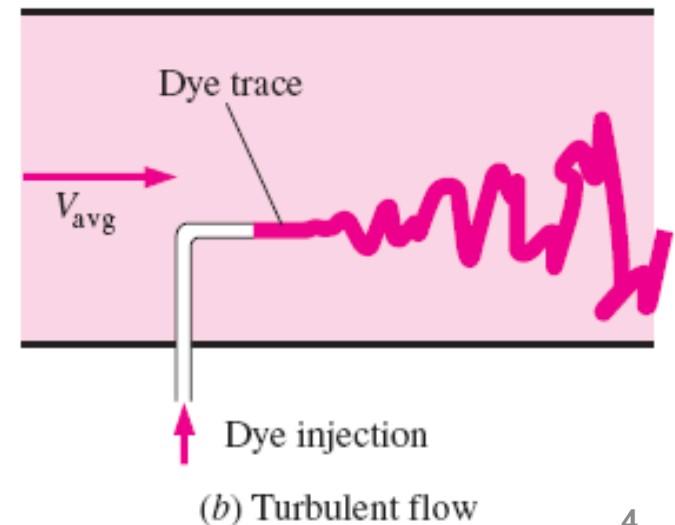
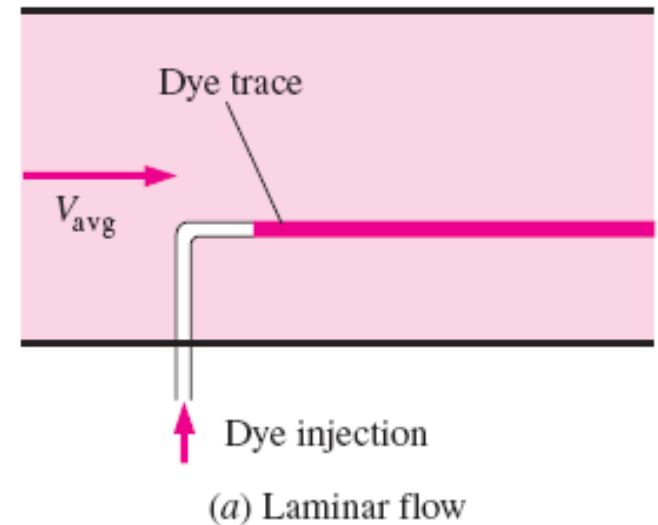


**Laminair:** vlakke stroomlijnen, geordende beweging

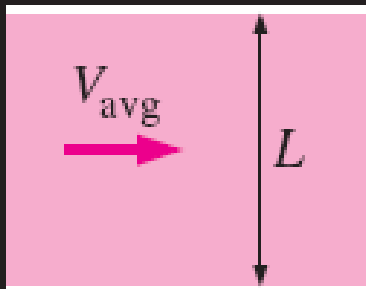
**Turbulent:** snelheidsfluctuaties en sterk wanordelijke beweging

**Overgang:** stroming fluctueert tussen laminair en turbulent

De meeste stromingen in de praktijk zijn turbulent



- Het **Reynoldsgetal**, **Re**



The diagram shows a pink rectangular fluid element of length  $L$  and average velocity  $V_{avg}$  moving to the right. To the right of the diagram, the Reynolds number  $Re$  is defined as the ratio of inertial forces to viscous forces, with four equivalent mathematical expressions:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\text{Inertial forces}}{\text{Viscous forces}} \\ &= \frac{\rho V_{avg}^2 L^2}{\mu V_{avg} L} \\ &= \frac{\rho V_{avg} L}{\mu} \\ &= \frac{V_{avg} L}{\nu} \end{aligned}$$

$\mu$  = dynamische (absolute) viscositeit

$\nu$  = kinematische viscositeit

- Het kritisch Reynoldsgetal ( $Re_{cr}$ ) voor stroming in ronde buizen:  $Re_{cr} = 2300$ 
  - $Re < 2300$ : laminair
  - $2300 \leq Re \leq 10000$ : overgang
  - $Re > 10000$ : turbulent
- Niet absoluut: in zeer gladde buizen laminair tot  $Re \approx 100000$
- $Re_{cr}$  hangt af van
  - Buisruwheid
  - Vibraties v/d buis
  - Fluctuaties in stroming: kleppen, ellebogen enz., die stroming verstoren

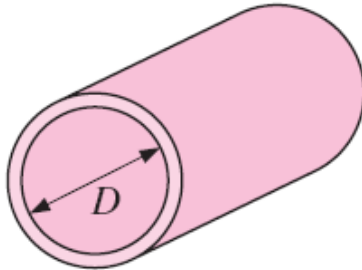
- Voor niet-ronde buizen: **hydraulische diameter**

$$D_h = \frac{4A_c}{p}$$

- $A_c$  = oppervlakte van de doorsnede
- $p$  = natte omtrek (perimeter)

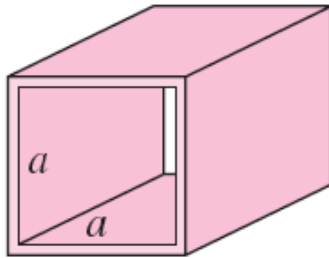
Voorbeeld: open kanaal

*Circular tube:*



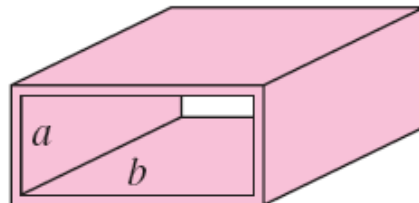
$$D_h = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$

*Square duct:*

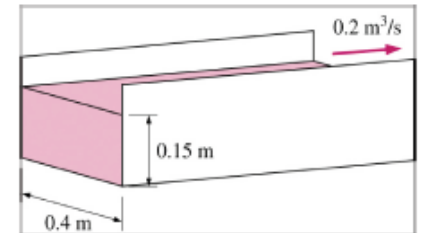


$$D_h = \frac{4a^2}{4a} = a$$

*Rectangular duct:*



$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$



- $A_c = 0,15 \times 0,4 = 0,06 \text{ m}^2$
- $p = 0,15 + 0,15 + 0,4 = 0,7 \text{ m}$
- $D_h = 4 \times 0,06 / 0,7 = 0,34 \text{ m}$

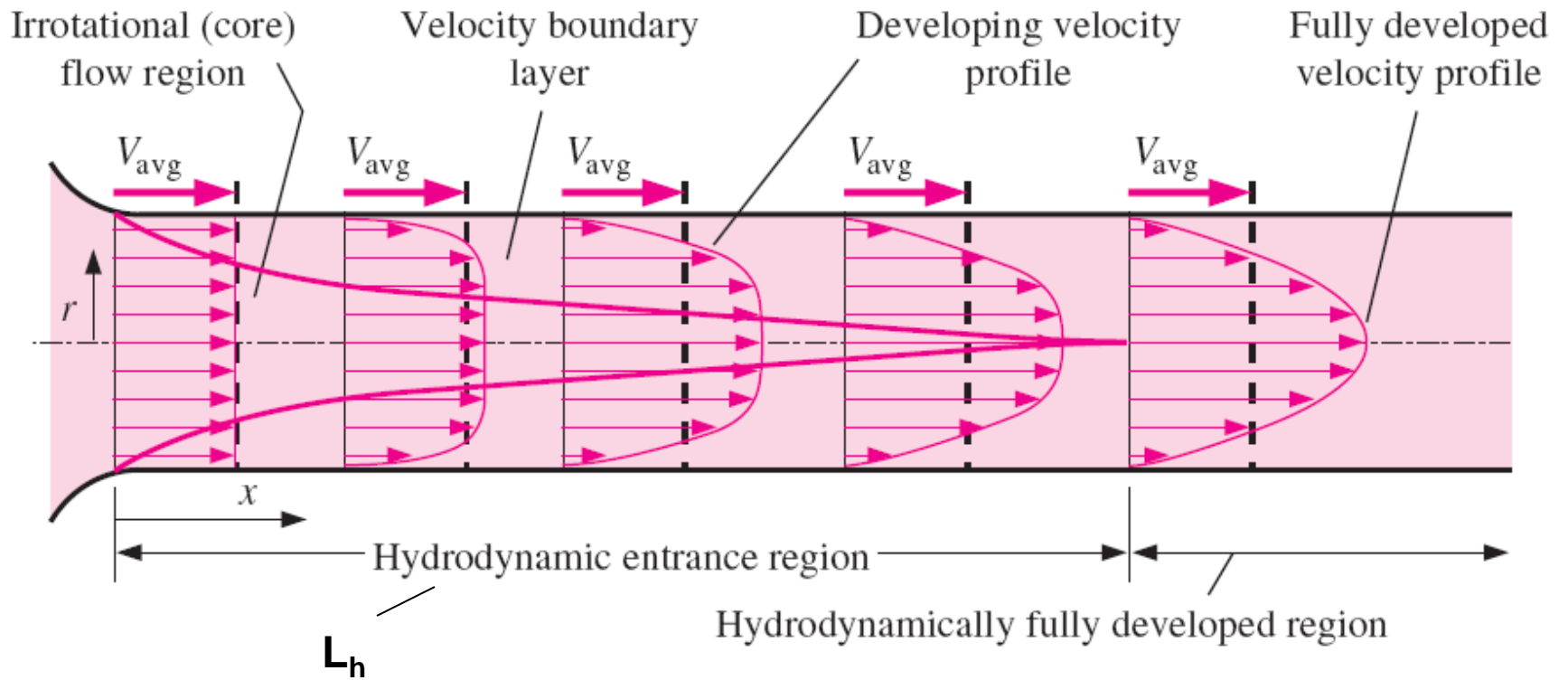
Wat betekent dit?

De stroming in dit kanaal is equivalent met de stroming in een ronde buis met diameter van 0,34 m

# 3. Het ingangsgebied

- Wrijving aan de wand veroorzaakt:
  - Snelheidsgradiënt en grenslaag (snelheid aan wand = 0)
  - Drukval over de lengte van de buis
- Ronde pijp met diameter  $D$ . Stroomafwaarts ontwikkelt zich een snelheidsprofiel over bepaalde lengte, de **hydrodynamische ingangslengte  $L_h$** .  $L_h/D$  is functie van  $Re$ .

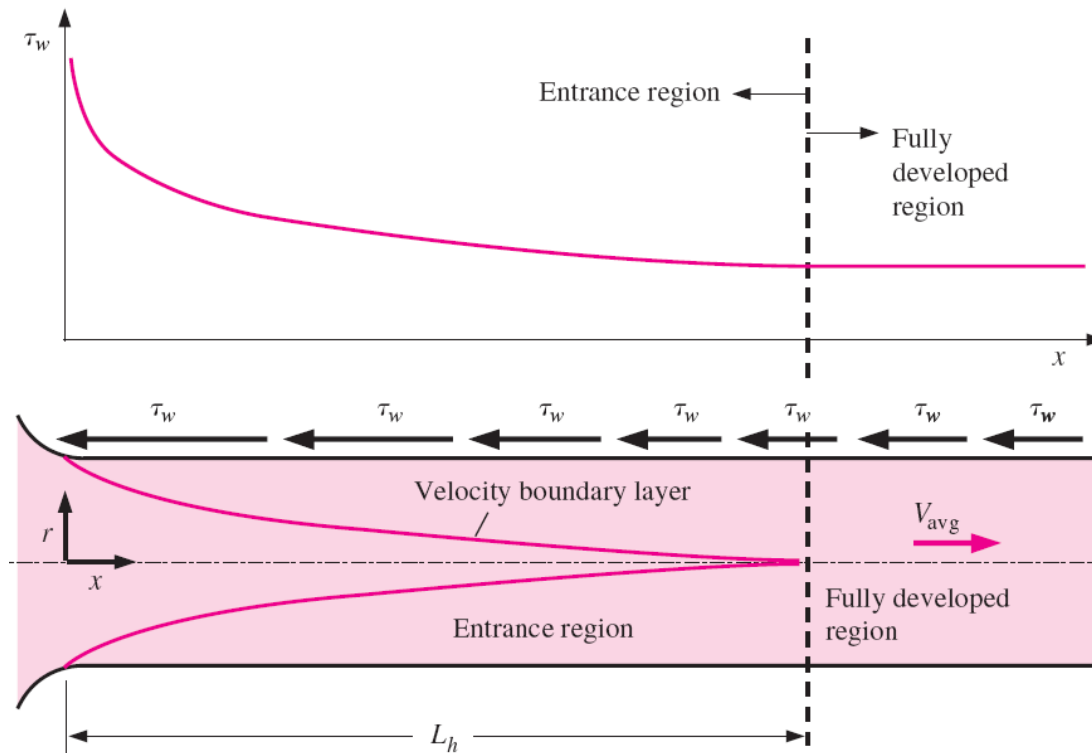




- Snelheidsprofiel constant als functie van axiale afstand  $x$  in het **hydrodynamische volledig ontwikkeld gebied**

$$\frac{\partial u(r, x)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u(r)$$

- Schuifspanning v/d wand blijft ook constant



- **Hydrodynamische ingangslengte  $L_h$ :**

- Benaderende vgl. voor  $L_h$ :

$$\frac{L_{h, \text{laminar}}}{D} \cong 0.05 \text{Re}$$

Laminaire stroming

$$\frac{L_{h, \text{turbulent}}}{D} = 1.359 \text{Re}^{1/4}$$

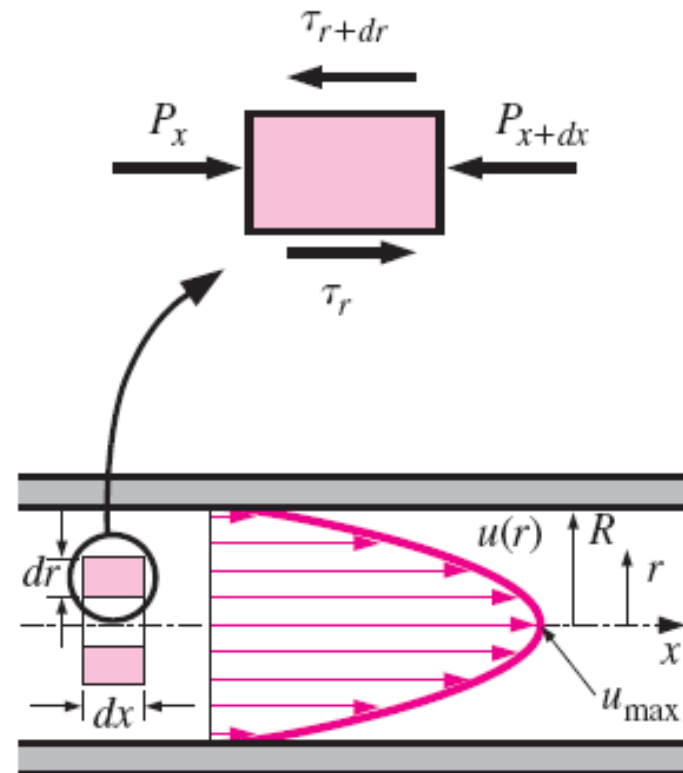
Turbulente stroming

$$\frac{L_{h, \text{turbulent}}}{D} \approx 10$$

Benadering voor turbulente stroming

## 4. Laminaire stroming in buizen

- Snelheidsprofiel bekomen dmv impulsbalans (krachtenbalans = 0) op een ringvormig differentieel volume-element (CV): **balans tussen druk- en schuifkrachten**



$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{dP}{dx} = \text{constante}$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) + C_1 \ln r + C_2$$

$$\partial u / \partial r = 0 \text{ at } r = 0$$

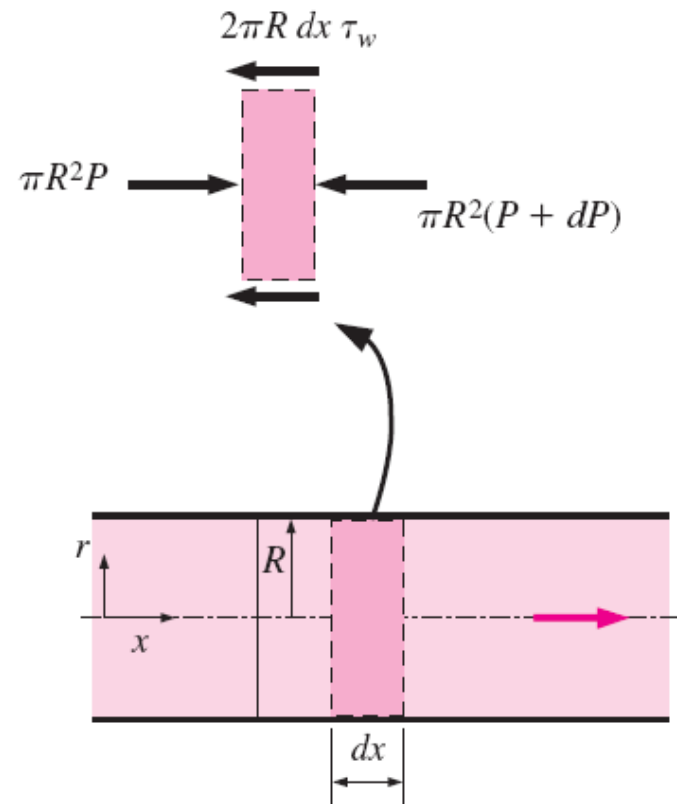
$$u = 0 \text{ at } r = R$$

randvoorwaarden

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$V_{\text{avg}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r \, dr$$

$$u(r) = 2V_{\text{avg}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad u_{\text{max}} = 2V_{\text{avg}}$$



Force balance:

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R \, dx \, \tau_w = 0$$

Simplifying:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

- **Drukval en ladingsverlies**

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad V_{\text{avg}} = -\frac{R^2}{8\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right)$$

*Laminar flow:*

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{\text{avg}}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{\text{avg}}}{D^2}$$

Een drukdaling wegens viskeuze effecten, stelt een onomkeerbaar drukverlies voor en wordt **drukverlies  $\Delta P_L$**  genoemd

$$\Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{avg}}^2}{2}$$

waarbij  $f$  de wrijvingsfactor en met  $\rho V_{\text{avg}}^2/2$  de dynamische druk

### **Ladingsverlies over een buis**

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{avg}}^2}{2g}$$

$h_L$  stelt de bijkomende hoogte voor waarover de vloeistof gepompt dient te worden om de wrijvingsverliezen in de buis te overwinnen.

Nodig **pompvermogen** om drukverlies te overbruggen

$$\dot{W}_{\text{pomp}, L} = \dot{V} \Delta P_L = \dot{V} \rho g h_L = \dot{m} g h_L$$

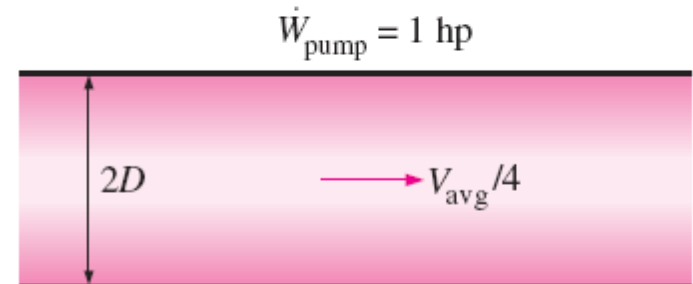
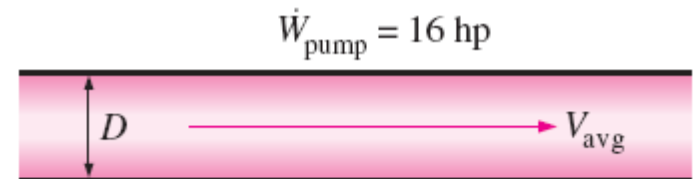
Laminaire stroming in horizontale buis:

- **Wet van Poiseuille:** Voor een bepaald debiet is het drukverlies
  - evenredig met volumetrisch debiet, lengte en visositeit
  - omgekeerd evenredig met  $D^4$  -> drukverlies daalt met factor 16 als  $D \times 2$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_m}{R^2} = \frac{32\mu L V_m}{D^2} \Rightarrow V_m = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

$$\dot{V} = V_m A_c = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} \pi R^2 = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L}$$

Wet van Poiseuille



Het drukverschil  $\Delta P$  is enkel gelijk aan het drukverlies  $\Delta P_L$  voor een horizontale buis, dus niet voor een hellende buis of een buis met variabele dwarsdoorsnede.

## Aantonen door energiebalans voor stationaire, onsamendrukbare 1-dimensionale stroming:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pomp}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L$$

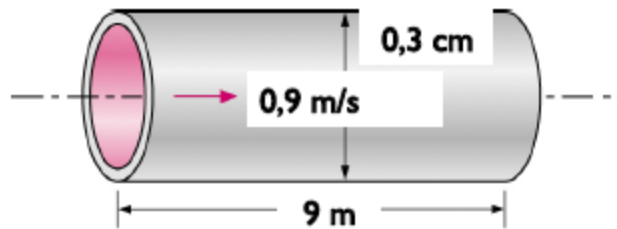
$$P_1 - P_2 = \rho(\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2)/2 + \rho g[(z_2 - z_1) + h_{\text{turbine}, e} - h_{\text{pomp}, u} + h_L]$$

### Voorwaarden:

- Horizontale buis:  $z_2 - z_1 = 0$
- Geen pomp of turbine:  $h_{\text{pomp}, u} = h_{\text{turbine}, e} = 0$
- Dwarsdoorsnede is c<sup>te</sup> en dus ook gem. snelheid ( $V_1 = V_2$ )
- Snelheidsprofielen in sectie 1 en 2 hebben dezelfde vorm:  $\alpha_1 = \alpha_2$



- Voorbeeld 14-2: Drukvaling en hoogterelies in een buis



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- ingangseffecten zijn verwaarloosbaar, dus stroming is volledig ontwikkeld

Bepaal:

- het hoogterelies  $h_L$ ,
- de drukvaling  $\Delta P_L$ ,
- het nodige pompvermogen om het drukverlies te compenseren.

(a)

Bepalen van het stromingsregime:  $Re = \frac{V_{avg} D}{\mu} = 1777$

$$f = \frac{64}{Re} = 0,036$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V_{avg}^2}{2g} = 4,46 \text{ m}$$

$\hookrightarrow < 2300$ : Laminare stroming

(b)

$$\Delta P = \Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{avg}^2}{2} = 43,7 \text{ kPa}$$

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu}$$

(c)

$$\dot{V} = V_{avg} A_c = 6,36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\dot{W}_{pomp,L} = \dot{V} \Delta P = 0,28 \text{ W}$$

# Stationaire, laminaire stroming in hellende buizen

$$\sum F = 0$$

$$(2\pi r dr)P - (2\pi r dr)\left(P + \frac{dP}{dx} dx\right) + (2\pi r dx)\tau - (2\pi dx)\left(r\tau + \frac{d(r\tau)}{dr} dr\right) - \rho g 2\pi r dr dx \sin \theta = 0$$

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} + \rho g \sin \theta$$

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

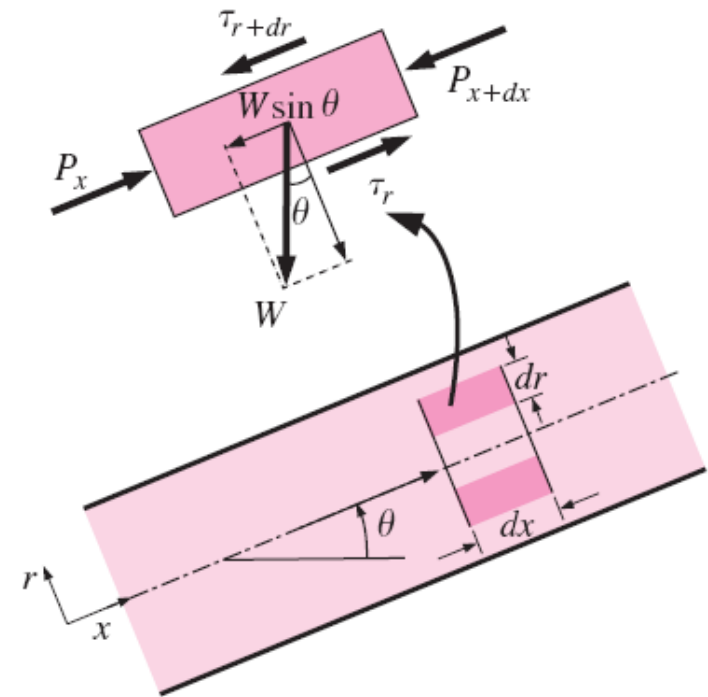
$$V_m = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) D^2}{32\mu L} \quad \text{en} \quad \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) \pi D^4}{128\mu L}$$

$$\text{Horizontal pipe: } \dot{V} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L}$$

$$\text{Inclined pipe: } \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) \pi D^4}{128\mu L}$$

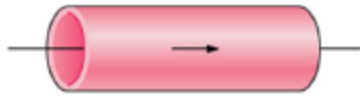
Uphill flow:  $\theta > 0$  and  $\sin \theta > 0$

Downhill flow:  $\theta < 0$  and  $\sin \theta < 0$



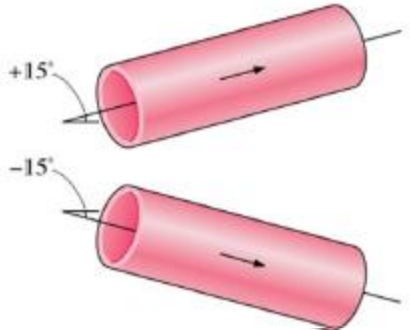
• Voorbeeld 14-1: Volumetrisch debiet in een horizontale of hellende buis

Horizontal



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- ingangseffecten zijn verwaarloosbaar, dus stroming is volledig ontwikkeld



Bepaal:

- Het volumetrisch debiet voor een horizontale buis.
- Het volumetrisch debiet voor een opwaarts (+15°) hellende buis.
- Het volumetrisch debiet voor een neerwaarts (-15°) hellende buis.

(a) Horizontale buis

$$\dot{V}_{\text{horiz}} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128 \mu L} = \frac{(648 \text{ kPa}) \pi (0.05 \text{ m})^4}{128 (0.8 \text{ kg/m} \cdot \text{s}) (40 \text{ m})} \left( \frac{1000 \text{ N/m}^2}{1 \text{ kPa}} \right) \left( \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right) = \mathbf{0.00311 \text{ m}^3/\text{s}}$$

(b) Opwaartse (+15°) buis

$$= \mathbf{0.00267 \text{ m}^3/\text{s}}$$

(c) Neerwaartse (-15°) buis

$$\dot{V} = \mathbf{0.00354 \text{ m}^3/\text{s}}$$

$$v_m^* = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{0.00354 \text{ m}^3/\text{s}}{0.001963 \text{ m}^2} = 1.80 \text{ m/s}$$

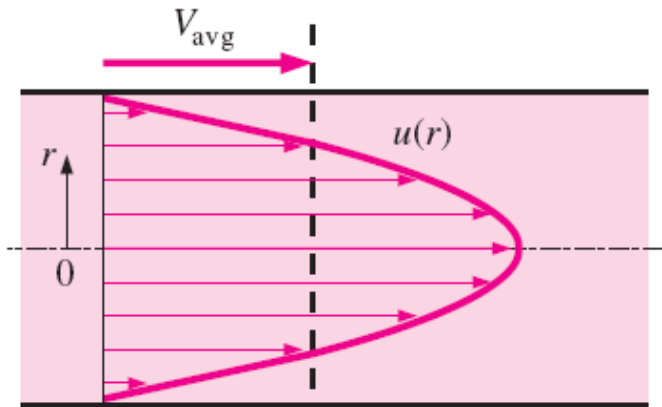
$$\text{Re} = \frac{\rho v_m^* D}{\mu} = \frac{(888 \text{ kg/m}^3)(1.80 \text{ m/s})(0.05 \text{ m})}{0.8 \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 100$$

# 5. Turbulente stroming in buizen

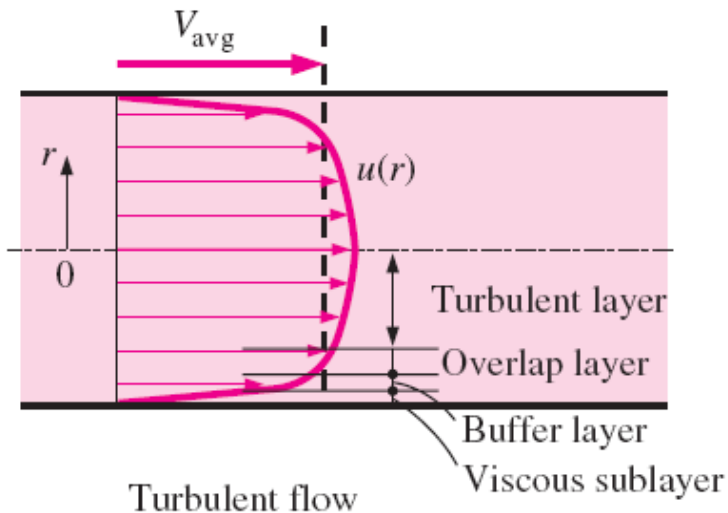
- **Turbulente stroming**

- Theorie nog niet voldoende ontwikkeld: geen analytische oplossing, maar baseren op experimenten en empirische relaties.
- Fluctueren van snelheid rond een gemiddelde snelheid.
- Ruwheid van wand speelt belangrijke rol.
- De “swirling eddies” transporteren veel sneller massa, impuls en energie dan andere stromingsgebeiden dan door moleculaire diffusie waardoor de massa-, impuls- en warmteoverdracht groter is.
- Met als resultaat dat turbulente stroming geassocieerd is met hogere waarden voor de wrijvings-, warmte- en massaoverdrachtscoëfficiënten.

# Turbulent snelheidsprofiel



Laminar flow



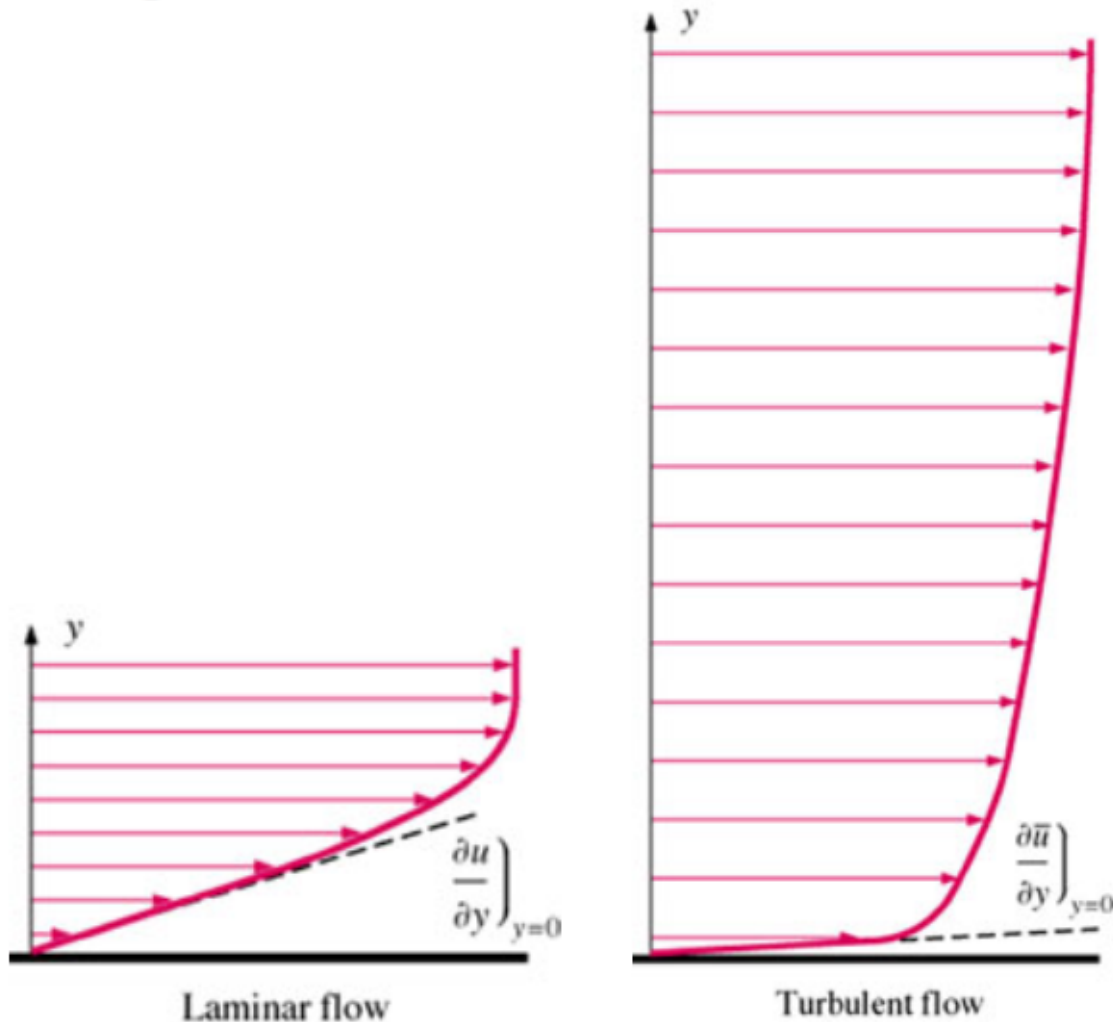
Turbulent flow

- Snelheidsprofiel is meer afgerond, met scherpe helling dicht bij wand.
- Zeer dunne laag naast de wand waar viskeuze krachten domineren: **viskeuze** sublaag

Het snelheidsprofiel in deze laag is praktisch lineair en de stroming gestroomlijnd.

- **Bufferlaag**: turbulente effecten significant worden, stroming nog steeds gedomineerd door viskeuze effecten
- **Overlap- (of transitie) laag**: turbulente effecten veel meer significant zijn, maar nog niet dominant
- **Turbulente laag**: het overblijvende deel van de stroming waarin turbulente effecten domineren over moleculaire diffusie (viskeuze) effecten.

- De snelheidsgradiënten aan de wand (en dus de wandschuifspanning) zijn veel groter voor turbulente stroming dan voor laminaire stroming.



- De **wrijvingsfactor**  $f$  voor volledig ontwikkelde stroming in een buis hangt van  $Re$  en de **relatieve ruwheid**  $\epsilon/D$  af.
- Dit verband werd experimenteel bepaald en in een grafiekvorm weergegeven = de **Moody-grafiek**.
- De **Colebrookvergelijking** is een fitting van de data:

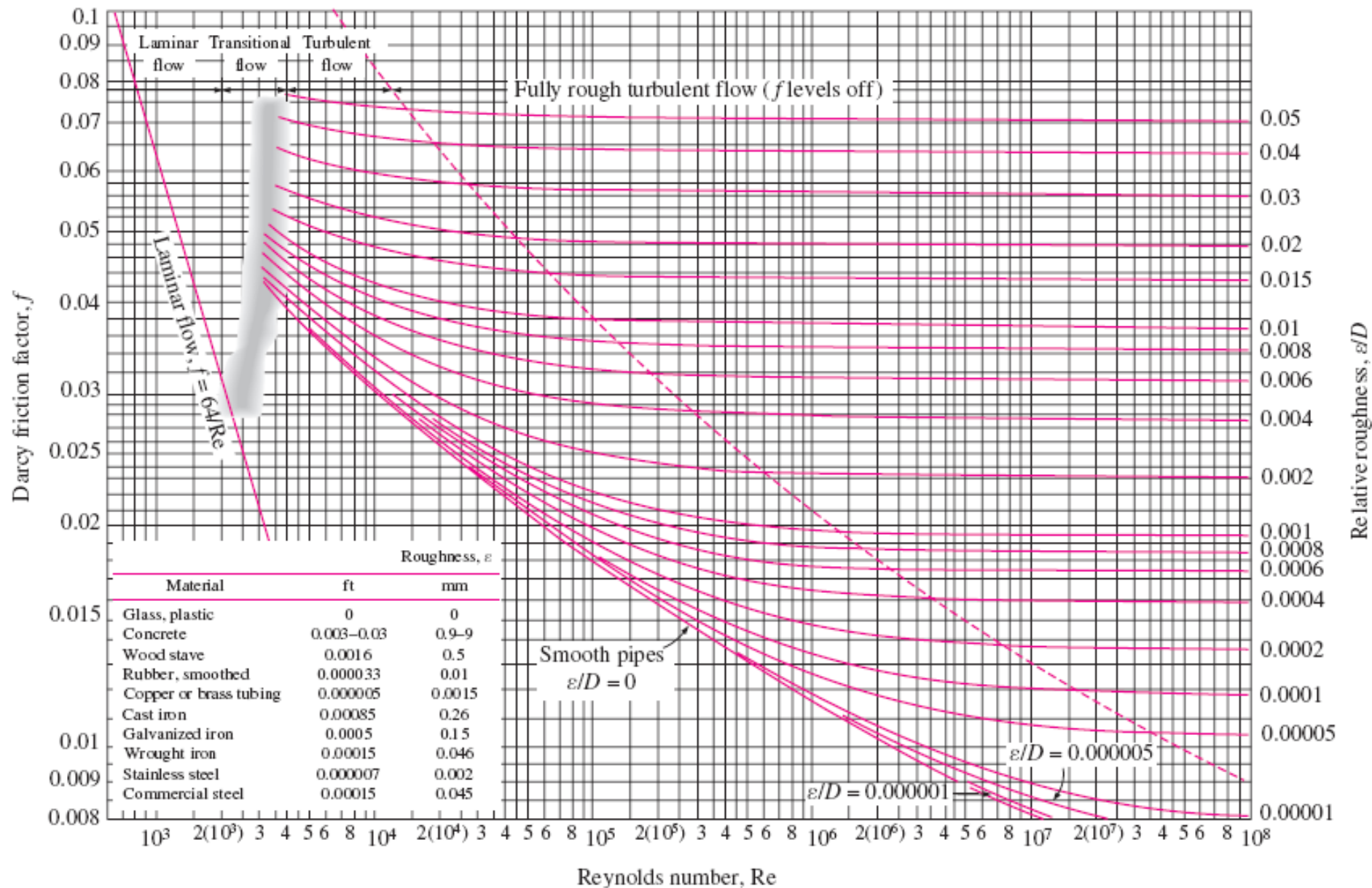
(impliciete vergelijking)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

Equivalent roughness values for new commercial pipes\*

Material	Roughness, $\epsilon$	
	ft	mm
Glass, plastic	0 (smooth)	
Concrete	0.003–0.03	0.9–9
Wood stave	0.0016	0.5
Rubber, smoothed	0.000033	0.01
Copper or brass tubing	0.000005	0.0015
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Wrought iron	0.00015	0.046
Stainless steel	0.000007	0.002
Commercial steel	0.00015	0.045

Opmerking: De **Moody-grafiek** werd ontwikkeld voor circulaire buizen, maar kan ook voor niet-circulaire buizen gebruikt worden door gebruik te maken van de **hydraulische diameter**.



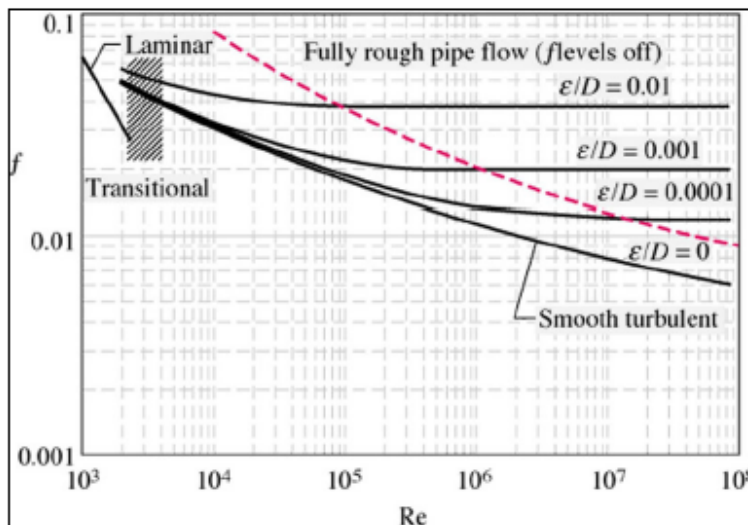


- Een benaderende *expliciete* correlatie voor  $f$  (Haaland):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \approx -1.8 \log \left[ \frac{6.9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$

Merk op uit de Moody-grafiek:

- Laminaire stroming:  $f$  neemt af met  $Re$  en is onafhankelijk van de ruwheid
- Darcy-wrijvingsfactor  $f$  neemt toe met de ruwheid
- Voor zeer grote  $Re$ -getallen:  $f$  is onafhankelijk van  $Re \Rightarrow$  volledig ruwe turbulente stroming



- Types stromingsproblemen:

1. Bepaal  $\Delta P$  (of  $h_L$ );  $L, D, \dot{V}$  is gegeven
  2. Bepaal  $\dot{V}$ ;  $L, D, \Delta P$  is gegeven
  3. Bepaal  $D$ ;  $L, \Delta P, \dot{V}$  is gegeven

- Type 1 kan direct opgelost worden met Moody-grafiek en Colebrook-vgl.:

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

- Types 2 en 3 zijn gewone engineeringdesignproblemen, nl. selectie van de buisdiameters om de constructie- en materiaalkosten te minimaliseren.
  - Echter, een iteratie-aanpak is nodig vermist zowel  $V$  als  $D$  in het Reynoldsgetal voorkomen, ofwel moet men wiskundige software (“equation solver”) gebruiken.

- Types stromingsproblemen:

1. Bepaal  $\Delta P$  (of  $h_L$ );  $L, D, \dot{V}$  is gegeven
  2. Bepaal  $\dot{V}$ ;  $L, D, \Delta P$  is gegeven
  3. Bepaal  $D$ ;  $L, \Delta P, \dot{V}$  is gegeven

- Type 2: volumetrisch debiet of snelheid is niet gekend

schat  $f \Rightarrow$  bereken snelheid  $V$ : 
$$V = \sqrt{\frac{2gh_L}{f L/D}}$$

$\Rightarrow$  bereken  $Re \Rightarrow$  schat  $f$  uit Moody-grafiek of Colebrookvgl.

$\Rightarrow$  vergelijk de  $f$ -en  $\Rightarrow$  itereer.

- Type 3:  $Re$  en relatieve ruwheid kan niet bepaald worden  
veronderstel een bepaalde diameter  $D$

$\Rightarrow$  bereken  $\Delta P$  en vergelijk met de opgegeven  $\Delta P$ : 
$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2}$$

$\Rightarrow$  herhaal totdat voor de gekozen  $D$  de  $\Delta P$ 's overeenkomen.

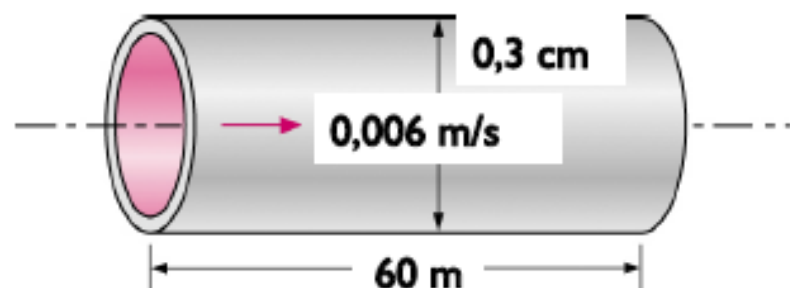
- **Expliciete vergelijkingen** zijn ook voorhanden, zodat iteratie overbodig is. Interessant voor snelle berekeningen (maar zorgen voor bijkomende fout van 2%)  
(**Swamee & Jain**):

$$h_L = 1.07 \frac{\dot{V}^2 L}{g D^5} \left\{ \ln \left[ \frac{\varepsilon}{3.7 D} + 4.62 \left( \frac{\nu D}{\dot{V}} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad \begin{array}{l} 10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2} \\ 3000 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{array}$$

$$\dot{V} = -0.965 \left( \frac{g D^5 h_L}{L} \right)^{0.5} \ln \left[ \frac{\varepsilon}{3.7 D} + \left( \frac{3.17 \nu^2 L}{g D^3 h_L} \right)^{0.5} \right] \quad \text{Re} > 2000$$

$$D = 0.66 \left[ \varepsilon^{1.25} \left( \frac{L \dot{V}^2}{g h_L} \right)^{4.75} + \nu \dot{V}^{9.4} \left( \frac{L}{g h_L} \right)^{5.2} \right]^{0.04} \quad \begin{array}{l} 10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2} \\ 5000 < \text{Re} < 3 \times 10^8 \end{array}$$

- Voorbeeld 1: Bepalen van het hoogteverlies in een buis



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- ingangseffecten zijn verwaarloosbaar, dus stroming is volledig ontwikkeld

Bepaal het drukverschil,  $h_L$  en het nodige pompvermogen.

Probleem is **type 1**: bereken  $\Delta P$  ( $L, D, V$  of  $\dot{V}$  gegeven).

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = 3.06 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = 134300 \longrightarrow \text{Turbulente stroming}$$

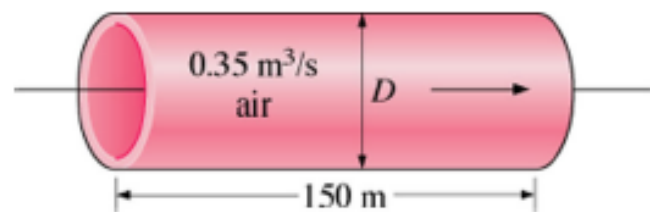
Bepaal  $f$  m.b.v. de Colebrook-vergelijking (itereren)  $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \rightarrow f = 0.0172$

$$\Delta P = \Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V^2}{2} = 96,5 \text{ kPa}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = 9,85 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{\text{pomp}} = \dot{V} \Delta P = 579 \text{ W}$$

## • Voorbeeld 2: Bepaal de diameter van een buis (lucht)



Het hoogteverschil mag 20 m niet overschrijden.

Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- ingangseffecten zijn verwaarloosbaar, dus stroming is volledig ontwikkeld
- lucht is een ideaal gas
- de stroming is turbulent (moet gecontroleerd worden)

Bepaal de minimale diameter van de buis.

Probleem is van het **type 3**:  
bepaal  $D$

- (1) Iteratie, veronderstel een  $D$  en bereken  $h_L \Rightarrow$  vergelijk met opgegeven  $h_L$
- (2) Schrijf al de relevante vgl. (met  $D$  als onbekende)  $\Rightarrow$  los op met een "equation solver".
- (3) Gebruik de vgl. van Swamee-Jain om  $D$  te berekenen.

$$\mathcal{V} = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} = \frac{0.35 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi D^2/4}$$

$$\text{Re} = \frac{\mathcal{V} D}{\nu} = \frac{\mathcal{V} D}{1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) = -2.0 \log \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{\mathcal{V}^2}{2g} \rightarrow 20 = f \frac{150 \text{ m}}{D} \frac{\mathcal{V}^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$

4 vgl., 4 onbekenden

Eq. solver:  $D = 0.267 \text{ m}$ ,  $f = 0.0180$ ,  $\mathcal{V} = 6.24 \text{ m/s}$ , and  $\text{Re} = 100,800$

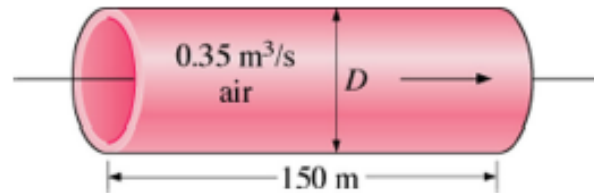
Swamee-Jain

$$D = 0.66 \left[ \epsilon^{1.25} \left( \frac{L \dot{V}^2}{g h_L} \right)^{4.75} + \nu \dot{V}^{9.4} \left( \frac{L}{g h_L} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

$$= 0.66 \left[ 0 + (1.655 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(0.35 \text{ m}^3/\text{s})^{9.4} \left( \frac{150 \text{ m}}{(9.81 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

$$= 0.271 \text{ m}$$

- **Voorbeeld 3:** Bepaling van het volumetrisch debiet in een buis (lucht)



Bepaal het volumetrisch debiet door de buis.

Probleem van het **type 2**:  
bepaal  $\dot{V}$

(1) Iteratie is nodig vermits de snelheid niet gekend is  $\Rightarrow$  schat  $f$  en

bereken de snelheid  $V$ : 
$$V = \sqrt{\frac{2gh_L}{f L/D}}$$

$\Rightarrow$  bereken  $Re \Rightarrow$  bereken  $f$  (Moody-grafiek of Coolebrookvgl.)  $\Rightarrow$  vergelijk  $f$ -en  $\Rightarrow$  itereer tot de  $f$ -en gelijk zijn.

(2) Gebruik een “equation solver”.

(3) Gebruik vgl. van Swamee-Jain.



**Alternative Solution** If a computer is not available (as in an exam situation), another option is to set up a *manual iteration loop*. We have found that the best convergence is usually realized by first guessing the friction factor  $f$ , then solving for the velocity  $\mathcal{V}$ . The equation for  $\mathcal{V}$  as a function of  $f$  is

Mean velocity through the pipe:

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2gh_L}{fL/D}}$$

Now that  $\mathcal{V}$  is known, the Reynolds number can be calculated, from which a *corrected* friction factor is obtained from the Moody chart or the Colebrook equation. We repeat the calculations with the corrected value of  $f$  until convergence. We guess  $f = 0.04$  for illustration:

Iteration	$f$ (guess)	$\mathcal{V}$ (m/s)	Re	Corrected $f$
1	0.04	2.955	$4.724 \times 10^4$	0.0212
2	0.0212	4.059	$6.489 \times 10^4$	0.01973
3	0.01973	4.207	$6.727 \times 10^4$	0.01957
4	0.01957	4.224	$6.754 \times 10^4$	0.01956
5	0.01956	4.225	$6.756 \times 10^4$	0.01956



## 6. Kleine verliezen

- In buizensystemen komen kleppen, bochten, ellebogen, T-verbindingen, uitlaten, inlaten, verbredingen en vernauwingen voor.
- Componenten verstoren stroming en veroorzaken bijkomende verliezen wegens **stromingsscheiding** en **menging**.
- In typisch systeem met lange buizen zijn verliezen *klein* t.o.v. totale verliezen in de buizen (=“***grote verliezen***”)

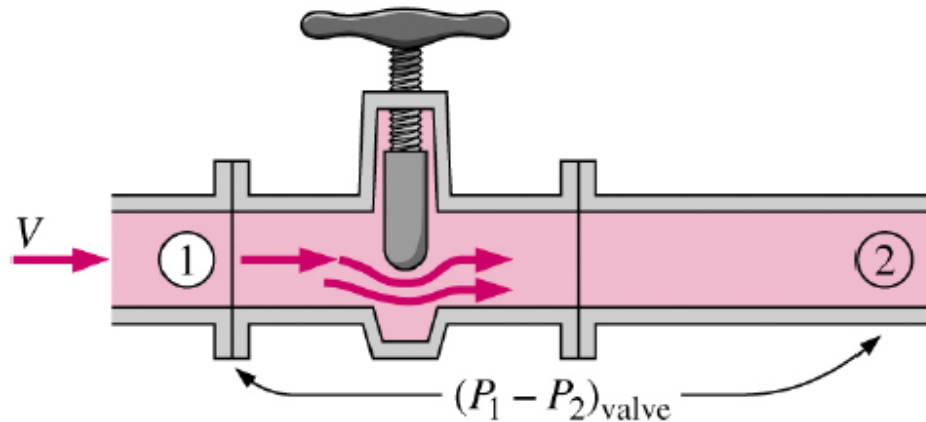
- **Kleine ladingsverliezen:**

$K_L$  is **verliescoëfficiënt**: 
$$K_L = \frac{h_L}{V^2/(2g)}$$

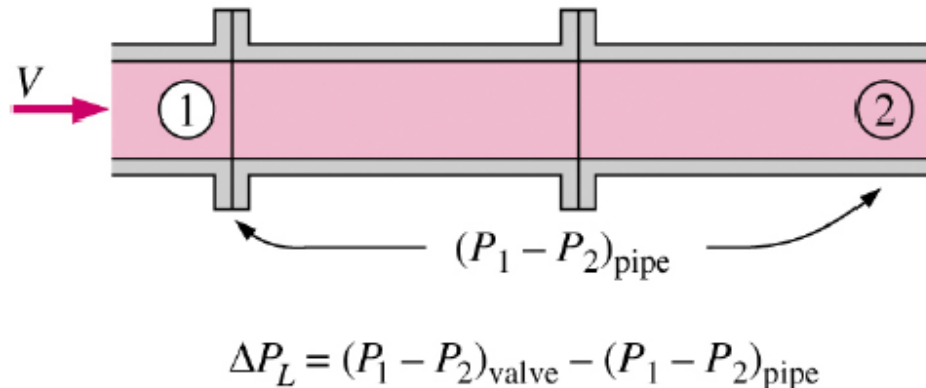
- Is verschillend voor elke component in het systeem
- Wordt verondersteld onafhankelijk te zijn van  $Re$  (OK voor grote  $Re$ -getallen; meestal in praktijk)
- Wordt door de fabrikant opgegeven, of kan in tabellen gevonden worden

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g}$$

Pipe section with valve:



Pipe section without valve:



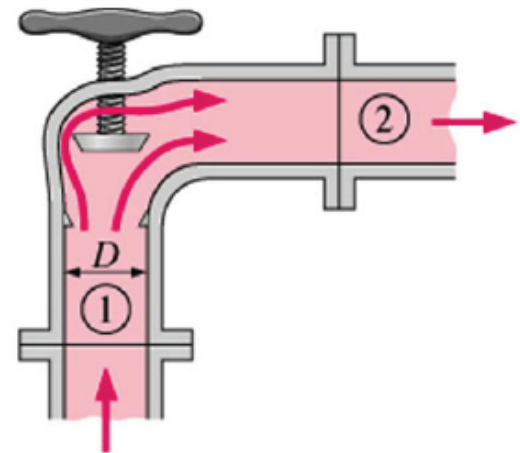
Als de inlaatdiameter = uitlaatdiameter:

de verliescoëfficiënt van de component kan bepaald worden door het bijkomend drukverlies te meten en dit te delen door de dynamische druk.

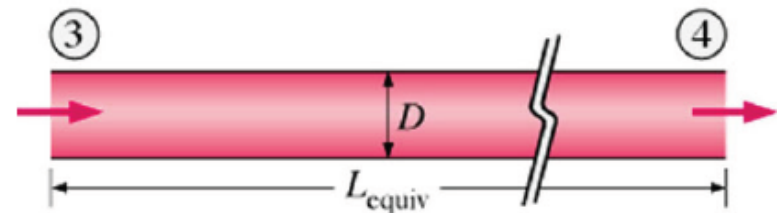
$$K_L = \frac{\Delta P_L}{\frac{\rho V^2}{2}}$$

- Het ladingsverlies veroorzaakt door een component is equivalent met het ladingsverlies veroorzaakt door een buis met **equivalente lengte**:

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_{equiv}}{D} \frac{V^2}{2g} \rightarrow L_{equiv} = \frac{D}{f} K_L$$



$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_3 - P_4$$



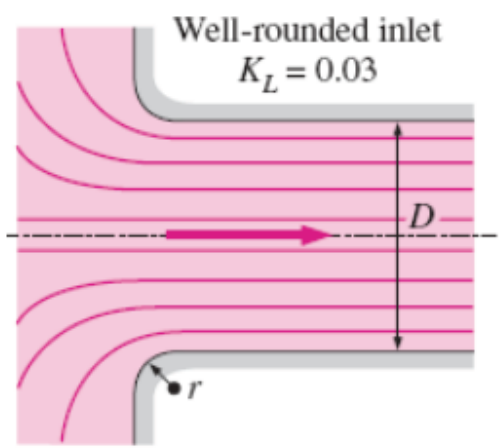
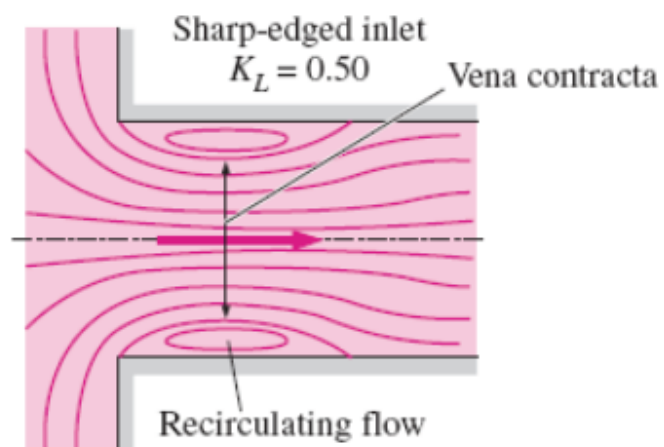
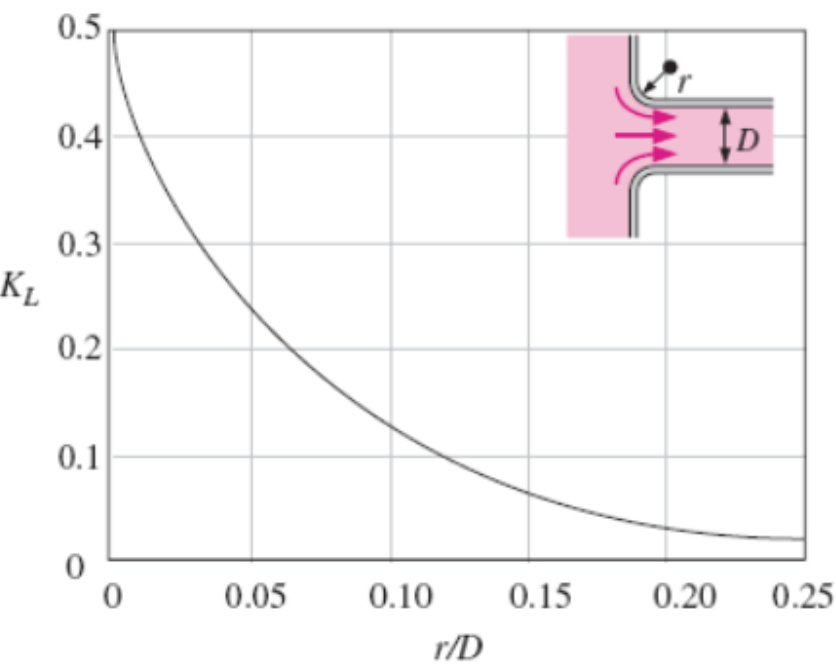
- Het totale ladingsverlies in een systeem bestaat uit de **grote verliezen** (“major losses”) (in de buissecties) en de **lokale verliezen** (“minor losses”) (in de componenten):

$$\begin{aligned} h_{L, \text{total}} &= h_{L, \text{major}} + h_{L, \text{minor}} \\ &= \sum_i f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_j K_{L,j} \frac{V_j^2}{2g} \end{aligned}$$

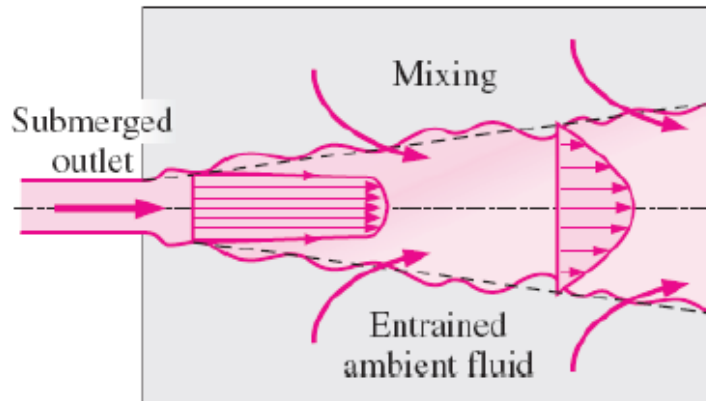
- Bij constante diameter van het buizensysteem:

$$h_L = \left( f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

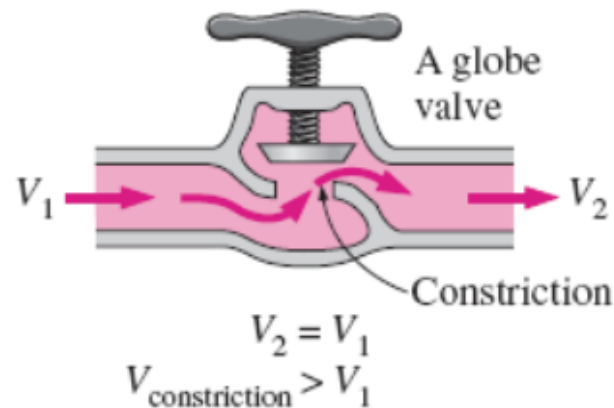
Het effect van het afronden van de buisinlaat op de verliescoëfficiënt.



Het hoogteverlies aan de inlaat is te verwaarlozen voor een goed afgeronde buis ( $K_L = 0.03$  voor  $r/D > 0.2$ ) maar stijgt tot 0.50 voor een inlaat met scherpe randen.

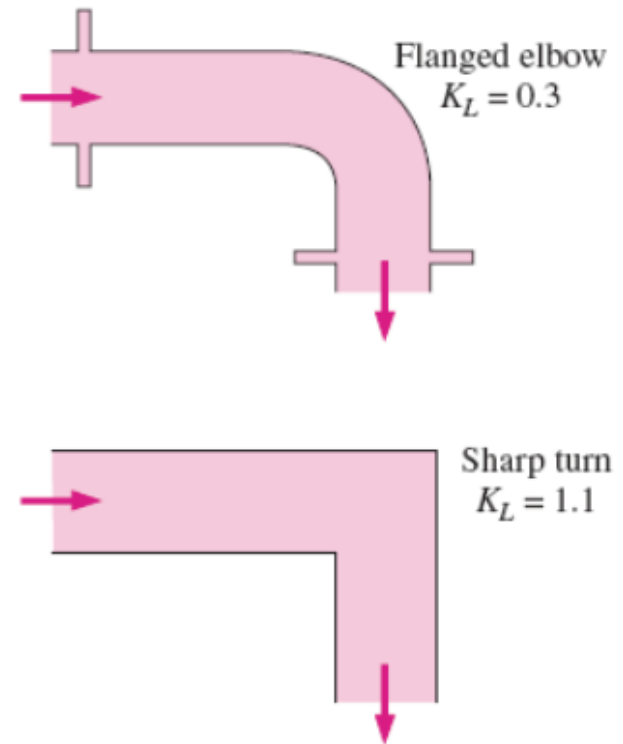


Al de kinetische energie van de stroming is “verloren” (omgezet in thermische energie) door wrijving als de snelheid van de jet afneemt en mengt met vloeistof stroomafwaarts van de uitlaat.



Het grote hoogtevries in een gedeeltelijk gesloten klep is te wijten aan de onomkeerbare snelheidsafname, stromingscheiding en menging van de vloeistof met hoge snelheid die van de smalle passage komt.

## Effect van een ronde bocht op $K_L$

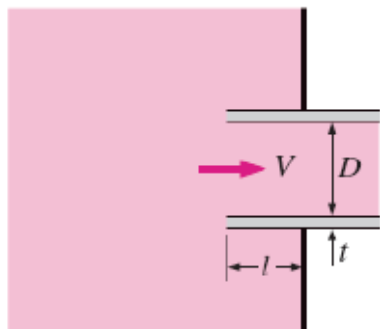


**TABLE 14–3**

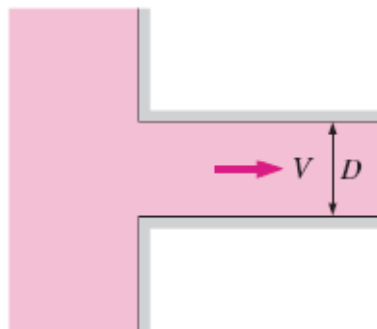
Loss coefficients  $K_L$  of various pipe components for turbulent flow (for use in the relation  $h_L = K_L V^2 / (2g)$ , where  $V$  is the average velocity in the pipe that contains the component)\*

**Pipe Inlet**

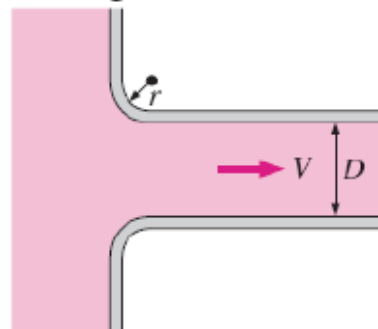
*Reentrant:*  $K_L = 0.80$   
( $t \ll D$  and  $l \approx 0.1D$ )



*Sharp-edged:*  $K_L = 0.50$

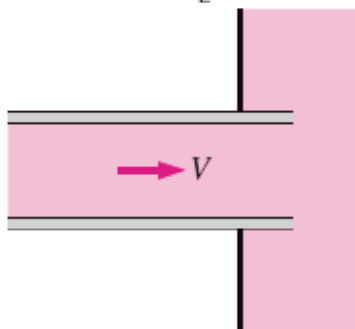


*Well-rounded ( $r/D > 0.2$ ):*  $K_L = 0.03$   
*Slightly rounded ( $r/D = 0.1$ ):*  $K_L = 0.12$   
(see Fig. 14–27)

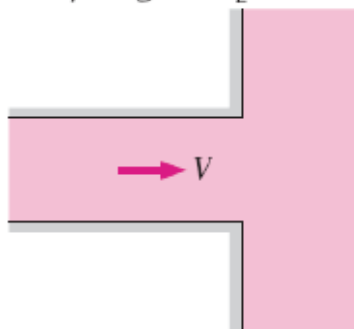


**Pipe Exit**

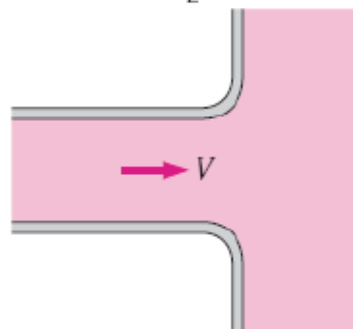
*Reentrant:*  $K_L = \alpha$



*Sharp-edged:*  $K_L = \alpha$



*Rounded:*  $K_L = \alpha$

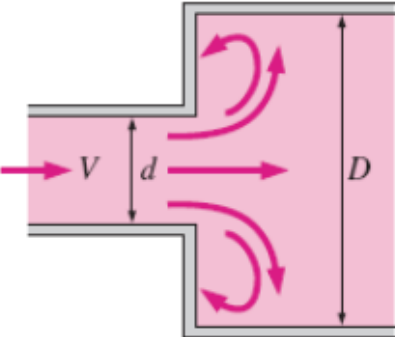


Note: The kinetic energy correction factor is  $\alpha = 2$  for fully developed laminar flow, and  $\alpha \approx 1.05$  for fully developed turbulent flow.

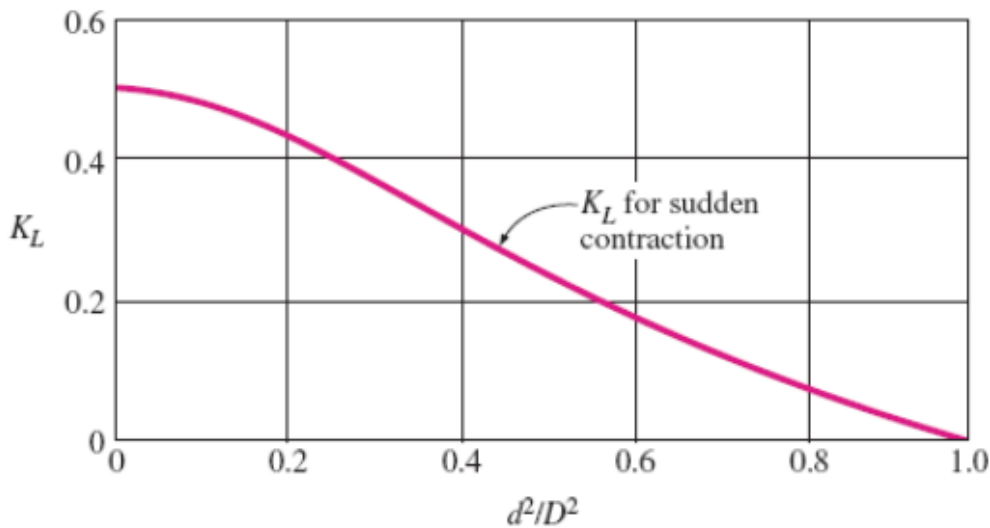
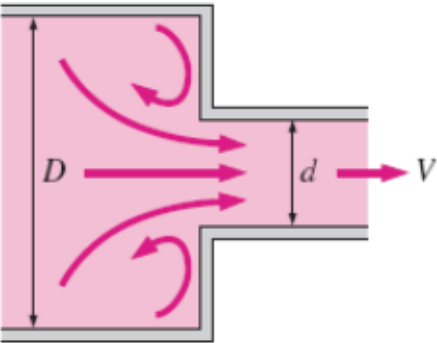


*Sudden Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)*

Sudden expansion:  $K_L = \alpha \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



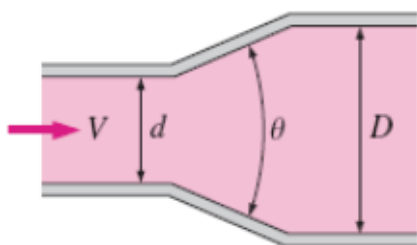
Sudden contraction: See chart.



*Gradual Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)*

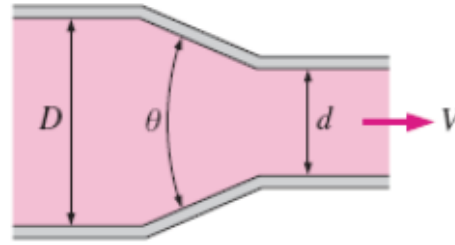
Expansion (for  $\theta = 20^\circ$ ):

- $K_L = 0.30$  for  $d/D = 0.2$
- $K_L = 0.25$  for  $d/D = 0.4$
- $K_L = 0.15$  for  $d/D = 0.6$
- $K_L = 0.10$  for  $d/D = 0.8$



Contraction:

- $K_L = 0.02$  for  $\theta = 30^\circ$
- $K_L = 0.04$  for  $\theta = 45^\circ$
- $K_L = 0.07$  for  $\theta = 60^\circ$

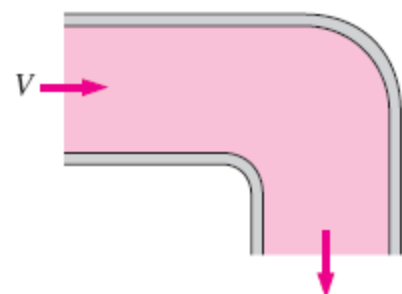


## Bends and Branches

90° smooth bend:

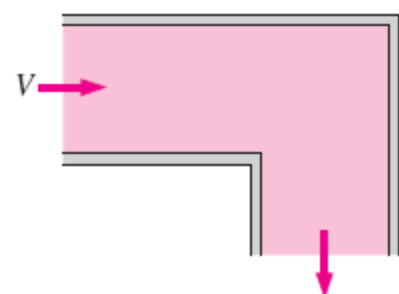
Flanged:  $K_L = 0.3$

Threaded:  $K_L = 0.9$



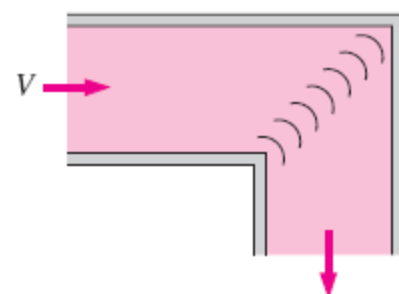
90° miter bend

(without vanes):  $K_L = 1.1$



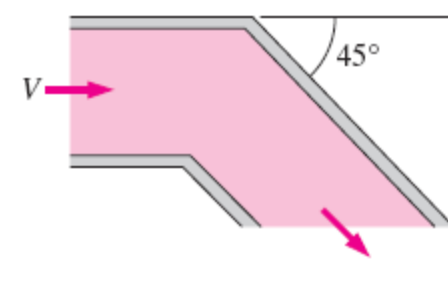
90° miter bend

(with vanes):  $K_L = 0.2$



45° threaded elbow:

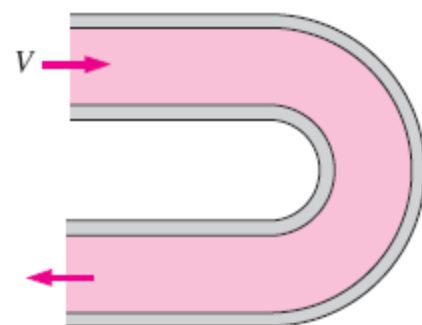
$K_L = 0.4$



180° return bend:

Flanged:  $K_L = 0.2$

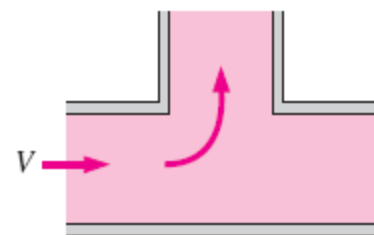
Threaded:  $K_L = 1.5$



Tee (branch flow):

Flanged:  $K_L = 1.0$

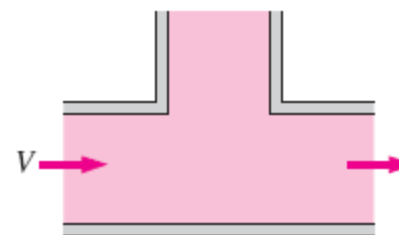
Threaded:  $K_L = 2.0$



Tee (line flow):

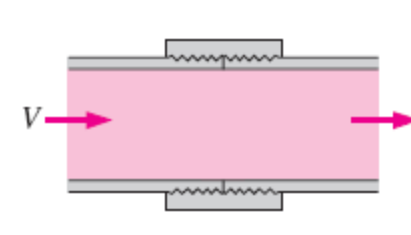
Flanged:  $K_L = 0.2$

Threaded:  $K_L = 0.9$



Threaded union:

$K_L = 0.08$



## Valves

Globe valve, fully open:  $K_L = 10$

Angle valve, fully open:  $K_L = 5$

Ball valve, fully open:  $K_L = 0.05$

Swing check valve:  $K_L = 2$

Gate valve, fully open:  $K_L = 0.2$

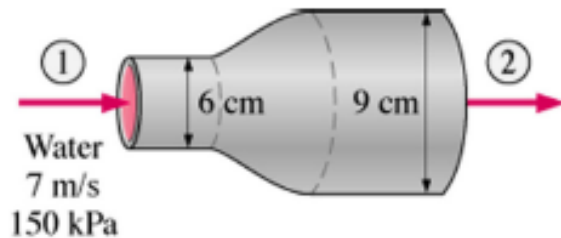
$\frac{1}{4}$  closed:  $K_L = 0.3$

$\frac{1}{2}$  closed:  $K_L = 2.1$

$\frac{3}{4}$  closed:  $K_L = 17$

\* These are representative values for loss coefficients. Actual values strongly depend on the design and manufacture of the components and may differ from the given values considerably (especially for valves). Actual manufacturer's data should be used in the final design.

- **Voorbeeld:** Hoogteverlies en drukverhoging gedurende een graduele verbreding



Bepaal: (a) het hoogteverlies  $h_L$  in de expansiesectie, en (b) de druk in de buis met grote diameter.

(a)

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = 0,333 \text{ m}$$

$K_L$  uit Tabel 14-3:  $K_L = 0,133$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} V_1$$

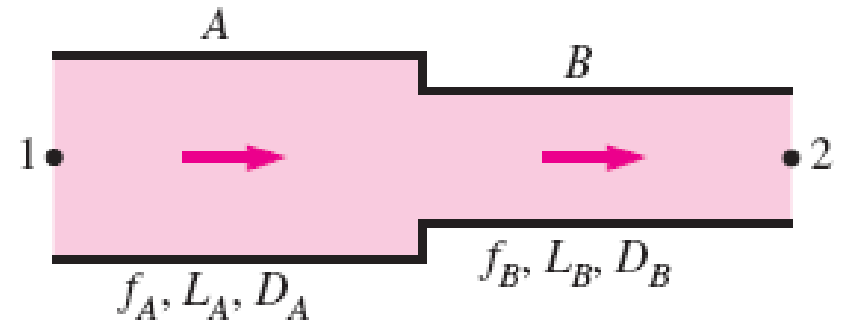
(b)

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}} + h_L \rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_L$$

$$\longrightarrow P_2 = P_1 + \rho \left\{ \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} - gh_L \right\} = 168 \text{ kPa}$$

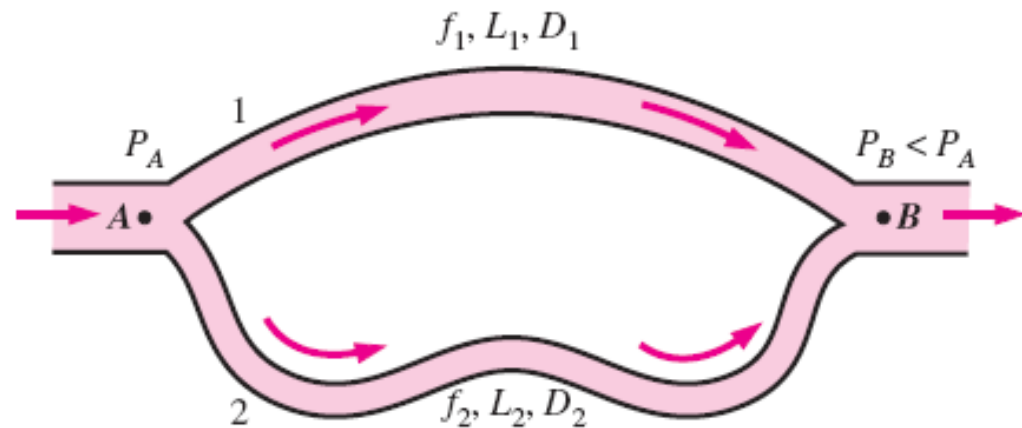
# 7. Buizennetwerken

- 2 netwerktypes
- **Buizen in serie**
  - Volumetrisch debiet is constant
  - Ladingsverlies is de som van de verschillende stukken
- **Buizen in parallel**
  - Volumetrisch debiet is de som van de componenten
  - Ladingsverlies over alle takken is hetzelfde



$$\dot{V}_A = \dot{V}_B$$

$$h_{L, 1-2} = h_{L, A} + h_{L, B}$$



$$h_{L, 1} = h_{L, 2}$$

$$\dot{V}_A = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_B$$

- **Parallele buizen:**

Vermits  $\Delta P$  gelijk is over alle takken, is het ladingsverlies ook gelijk

$$h_{L,1} = h_{L,2} \quad \rightarrow \quad f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{f_2}{f_1} \frac{L_2}{L_1} \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \quad \text{en} \quad \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{A_{c,1} V_1}{A_{c,2} V_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \left( \frac{f_2}{f_1} \frac{L_2}{L_1} \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2}$$

## De analyse van een buizennetwerk is gebaseerd op 2 simpele principes:

### **1. Behoud van massa doorheen het systeem moet gegarandeerd worden.**

In elk knooppunt in een buizennetwerk is de som van de stromen die in dat punt samenkomen, gelijk aan de som van de stromen die vanuit dat punt vertrekken.

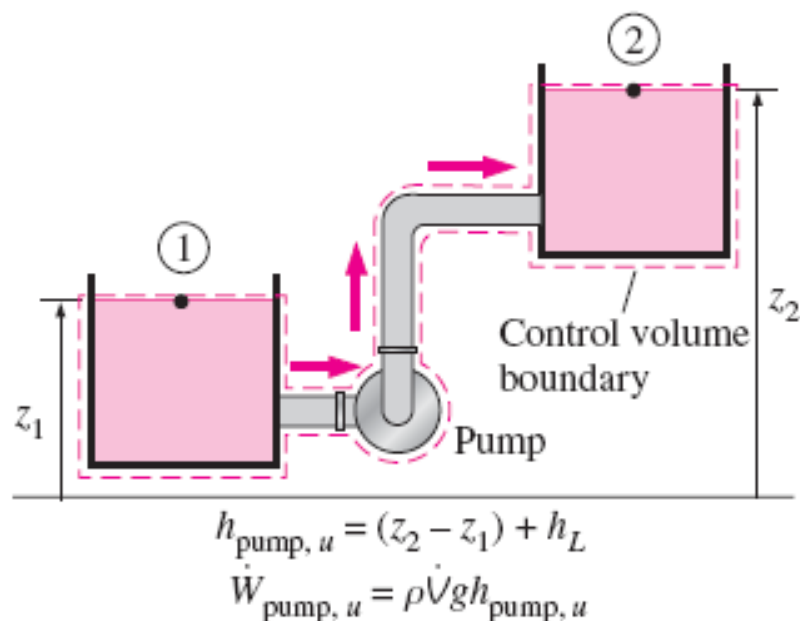
### **2. Drukverlies (en dus hoogteverlies) tussen 2 knooppunten moet gelijk zijn voor alle wegen tussen die 2 knooppunten.**

Dit is omdat druk geen verschillende waarde kan hebben in een specifiek punt. In de praktijk komt het erop neer dat de som van de hoogteverschillen in elke gesloten lus in een kring gelijk is aan 0.

- Buizennetwerken met pompen/turbines: energievergelijking gebruiken

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{\text{pump}, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{\text{turbine}, e} + h_L$$

- Gebruik van een pomp om vloeistof te verpompen:

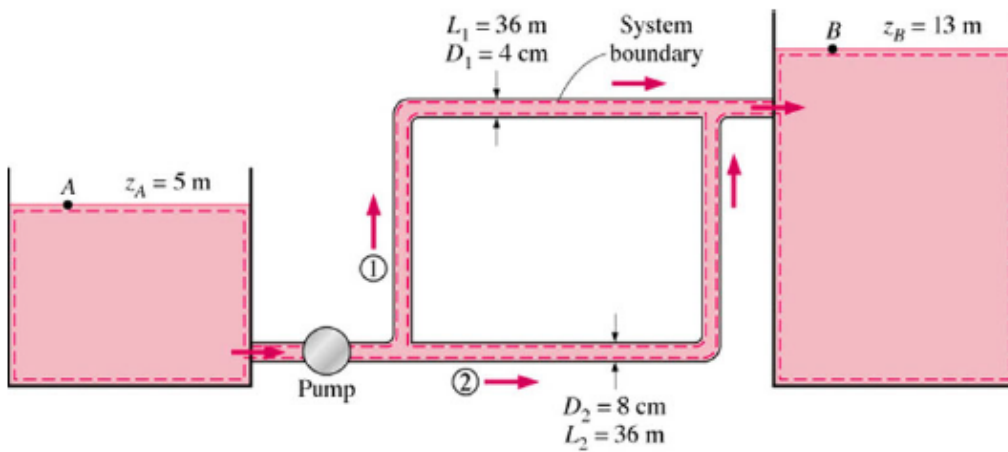


$$h_{\text{pump}, u} = (z_2 - z_1) + h_L$$

$$\dot{W}_{\text{pump, shaft}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{pump}, u}}{\eta_{\text{pump}}}$$

$$\dot{W}_{\text{elect}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{pump}, u}}{\eta_{\text{pump-motor}}}$$

# Voorbeeld 1: Water pompen door 2 parallelle buizen



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en incompressibel
- ingangseffecten zijn verwaarloosbaar, dus stroming is volledig ontwikkeld
- de grote en kleine verliezen verschillend van die in de parallelle buizen zijn te verwaarlozen
- de stroming door beide buizen is turbulent (moet gecontroleerd worden)

Bepaal het totale volumetrisch debiet tussen de reservoirs en het debiet door elke buis afzonderlijk.

- (1) Iteratie is nodig vermits de snelheid niet gekend is (probleem *type 2*).
- (2) Gebruik een “equation solver”.

$$\dot{W}_{\text{elect}} = \frac{\rho \dot{V} g h_{\text{pump, u}}}{\eta_{\text{pump-motor}}}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{\alpha_A V_A^2}{2g} + z_A + h_{\text{pump, u}} = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{\alpha_B V_B^2}{2g} + z_B + h_L \rightarrow h_{\text{pump, u}} = (z_B - z_A) + h_L$$

$$h_L = h_{L,1} = h_{L,2}$$



$$\mathcal{V}_1 = \frac{\dot{V}_1}{A_{c,1}} = \frac{\dot{V}_1}{\pi D_1^2/4} \rightarrow \mathcal{V}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi (0.04 \text{ m})^2/4} \quad (5)$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\dot{V}_2}{A_{c,2}} = \frac{\dot{V}_2}{\pi D_2^2/4} \rightarrow \mathcal{V}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi (0.08 \text{ m})^2/4} \quad (6)$$

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho \mathcal{V}_1 D_1}{\mu} \rightarrow \text{Re}_1 = \frac{(998 \text{ kg/m}^3) \mathcal{V}_1 (0.04 \text{ m})}{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \quad (7)$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho \mathcal{V}_2 D_2}{\mu} \rightarrow \text{Re}_2 = \frac{(998 \text{ kg/m}^3) \mathcal{V}_2 (0.08 \text{ m})}{1.002 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left( \frac{\epsilon/D_1}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_1 \sqrt{f_1}} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left( \frac{0.000045}{3.7 \times 0.04} + \frac{2.51}{\text{Re}_1 \sqrt{f_1}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log \left( \frac{\epsilon/D_2}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_2 \sqrt{f_2}} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log \left( \frac{0.000045}{3.7 \times 0.08} + \frac{2.51}{\text{Re}_2 \sqrt{f_2}} \right)$$

$$h_{L,1} = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{\mathcal{V}_1^2}{2g} \rightarrow h_{L,1} = f_1 \frac{36 \text{ m}}{0.04 \text{ m}} \frac{\mathcal{V}_1^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} \quad (11)$$

$$h_{L,2} = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{\mathcal{V}_2^2}{2g} \rightarrow h_{L,2} = f_2 \frac{36 \text{ m}}{0.08 \text{ m}} \frac{\mathcal{V}_2^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} \quad (12)$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (13)$$

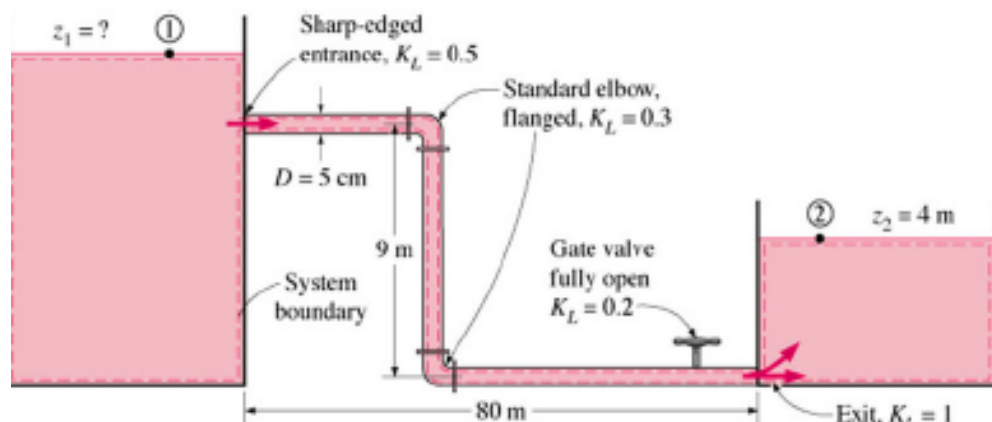
13 vgl., 13  
onbekenden

Eq. solver:  $\dot{V} = 0.0300 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\dot{V}_1 = 0.00415 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\dot{V}_2 = 0.0259 \text{ m}^3/\text{s}$

$\mathcal{V}_1 = 3.30 \text{ m/s}$ ,  $\mathcal{V}_2 = 5.15 \text{ m/s}$ ,  $h_L = h_{L,1} = h_{L,2} = 11.1 \text{ m}$ ,  $h_{\text{pump}} = 19.1 \text{ m}$

$\text{Re}_1 = 131,600$ ,  $\text{Re}_2 = 410,000$ ,  $f_1 = 0.0221$ ,  $f_2 = 0.0182$

## • Voorbeeld 2: Graviteitsgedreven buisstroming



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- het niveau in de reservoirs blijft constant

Tabel: ijzer  $\rightarrow \epsilon = 0,00026 \text{ m}$   
 $K_L$  opzoeken in tabel.

Bepaal de hoogte  $z_1$  voor een volumetrisch debiet van  $6 \text{ l/s}$ .

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \rightarrow z_1 = z_2 + h_L$$

$$h_L = h_{L, \text{total}} = h_{L, \text{major}} + h_{L, \text{minor}} = \left( f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4}$$

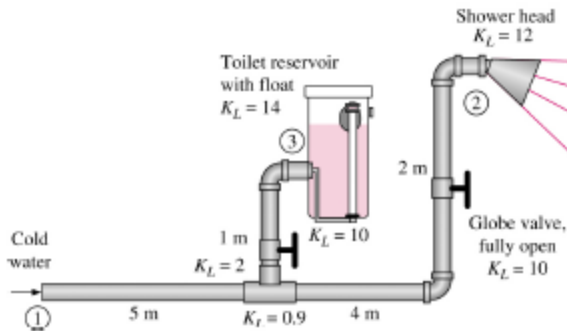
$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = 117000$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{0.0052}{3.7} + \frac{2.51}{117,000 \sqrt{f}} \right) \rightarrow f$$

$$\sum K_L = K_{L, \text{entrance}} + 2K_{L, \text{elbow}} + K_{L, \text{valve}} + K_{L, \text{exit}} = 0.5 + 2 \times 0.3 + 0.2 + 1.0 = 2.3$$

$$z_1 = z_2 + h_L = 4 + 27.9 = \mathbf{31.9 \text{ m}}$$

• **Voorbeeld 3:** Effect van het spoelen van de WC op het debiet van de douche



Veronderstellingen:

- de stroming is stationair en onsamendrukbaar
- de stroming is turbulent en volledig ontwikkeld
- de reservoir op open aan de atmosfeer
- de snelheidshoogten zijn verwaarloosbaar

- (a) Bepaal het waterdebiet door de douchekop als  $P_{l,overdruk} = 200$  kPa en het toiletreservoir vol is (probleem type 2).  
 (b) Bepaal het effect van het WC-spoelen op het debiet van de douche.

$$(a) \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pump, u} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbine, e} + h_L \rightarrow \frac{P_{1,g}}{\rho g} = (z_2 - z_1) + h_L$$

$$h_L = \frac{200,000 \text{ N/m}^2}{(998 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} - 2 \text{ m} = 18.4 \text{ m}$$

$$h_L = \left( f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g} \rightarrow h_L = \left( f \frac{11 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} + 24.7 \right) \frac{V^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}$$

$$V = \frac{\dot{V}}{A_c} = \frac{\dot{V}}{\pi D^2/4} \rightarrow V = \frac{\dot{V}}{\pi (0.015 \text{ m})^2/4}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} \rightarrow Re = \frac{V(0.015 \text{ m})}{1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ m}}{3.7(0.015 \text{ m})} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

4 vgl., 4  
onbekenden

Eq. solver:  $\dot{V} = 0.00053 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $f = 0.0218$ ,  $V = 2.98 \text{ m/s}$ , and  $Re = 44,550$

(b) Uit energievgl. tussen punt 1 en 3:

$$h_{L,3} = \frac{200,000 \text{ N/m}^2}{(998 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} - 1 \text{ m} = 19.4 \text{ m}$$

$$K_{L,3} = 2 + 10 + 0.9 + 14 = 26.9$$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

$$h_{L,2} = f_1 \frac{5 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} \frac{\mathcal{V}_1^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + \left( f_2 \frac{6 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} + 24.7 \right) \frac{\mathcal{V}_2^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 18.4$$

$$h_{L,3} = f_1 \frac{5 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} \frac{\mathcal{V}_1^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + \left( f_3 \frac{1 \text{ m}}{0.015 \text{ m}} + 26.9 \right) \frac{\mathcal{V}_3^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 19.4$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\pi(0.015 \text{ m})^2/4}, \quad \mathcal{V}_2 = \frac{\dot{V}_2}{\pi(0.015 \text{ m})^2/4}, \quad \mathcal{V}_3 = \frac{\dot{V}_3}{\pi(0.015 \text{ m})^2/4}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{\mathcal{V}_1(0.015 \text{ m})}{1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_2 = \frac{\mathcal{V}_2(0.015 \text{ m})}{1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}, \quad \text{Re}_3 = \frac{\mathcal{V}_3(0.015 \text{ m})}{1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -2.0 \log \left( \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ m}}{3.7(0.015 \text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_1 \sqrt{f_1}} \right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -2.0 \log \left( \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ m}}{3.7(0.015 \text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_2 \sqrt{f_2}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_3}} = -2.0 \log \left( \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ m}}{3.7(0.015 \text{ m})} + \frac{2.51}{\text{Re}_3 \sqrt{f_3}} \right)$$

12 vgl., 12  
onbekenden

Eq. solver:  $\dot{V}_1 = 0.00090 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\dot{V}_2 = 0.00042 \text{ m}^3/\text{s}$ , and  $\dot{V}_3 = 0.00048 \text{ m}^3/\text{s}$

Daling debiet met 21%  
=> water wordt plots  
heter.

