Examen Toegepaste Wiskunde I Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

1e bachelor bio-ingenieur
— 1e zittijd 2016–2017

Naam: ....

Richting: BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore:	/60

1. Los de volgende complexe vierkantsvergelijking op:

$$(1-2i)\,z^2+(7+6i)\,z-3+11i=0$$

/6

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{lllll|ll} 3z^4 & +(1-i)\,z^3 & -5iz^2 & -(3+i)\,z & +12-3i & z^2 & -3i \\ \cline{6-7} & & & & & & \end{array}$$

/6

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

/6

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{3}{4}} \frac{32x^3 + 32x^2 - 6x - 9}{16x^3 - 24x^2 - 63x - 27}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x - x^2} - x}{2 - \sqrt{5 - x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{1 - \cos 2x}$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$2 + \frac{1}{\log_{x+2}(x-1)} = \log_{x-1}(6x-13) + \frac{1}{\log_4(x-1)}$$

/6

5. Zoek de buigraaklijn van de functie $f\left(x\right) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 15x + 4$.

/6

6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 4 + \cos 6\theta$$

en maak hier een tekening van.

$\boxed{\quad\quad /6}$

7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):

$$\int \frac{2x^2+2}{x^3-7x-6}dx$$

/6

8. Bereken

$$\int \frac{x + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1} - 1} dx$$

/6

9. Bewijs dat

$$\int_0^{\infty} \frac{3}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Hint: bereken eerst de primitieve van $\dfrac{3}{1+x^3} = \dfrac{3}{(x+1)\,(x^2-x+1)}$ door splitsing in partieelbreuken.

/6

10. Bereken de complanatie van het manteloppervlak dat je krijgt door de kromme $y = 2\cosh\dfrac{x}{2}$ rond de X–as te wentelen over het interval $[-2, 2]$.

/6

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/60

Oplossingen:

1. Los de volgende complexe vierkantsvergelijking op:

$$(1-2i)\,z^2+(7+6i)\,z-3+11i=0$$

$\Delta=(7+6i)^2-4\,(1-2i)\,(-3+11i)=-63+16i$

Stel $\begin{cases} x^2-y^2=-63 \\ 2xy=16 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-63 \\ xy=8 \\ xy>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-63 \\ x^2\left(-y^2\right)=-64 \\ xy>0 \end{cases}$

Resolvente vergelijking: $\lambda^2+63\lambda-64=0\Rightarrow\lambda\in\{1,-64\}$

$\Rightarrow x^2=1$ en $y^2=64$ en $xy>0$

$\Rightarrow x+yi\in\{1+8i,-1-8i\}$

$\Rightarrow z_{1,2}=\dfrac{-7-6i\pm(1+8i)}{2\,(1-2i)}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{-7-6i+(1+8i)}{2\,(1-2i)}=\dfrac{-6+2i}{2\,(1-2i)}=\dfrac{-3+i}{1-2i}=\dfrac{(-3+i)\,(1+2i)}{5}=-1-i \\ z_2=\dfrac{-7-6i-(1+8i)}{2\,(1-2i)}=\dfrac{-8-14i}{2\,(1-2i)}=\dfrac{-4-7i}{1-2i}=\dfrac{(-4-7i)\,(1+2i)}{5}=2-3i \end{cases}$

2. Bepaal quotiënt en rest van de volgende Euclidische deling:

$$\begin{array}{ccccc|cc} 3z^4 & +(1-i)\,z^3 & -5iz^2 & -(3+i)\,z & +12-3i & z^2 & -3i \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 3z^4 & +(1-i)\,z^3 & -5iz^2 & -(3+i)\,z & +12-3i & z^2 & & -3i \\ \cline{6-8} -(3z^4 & & -9iz^2) & & & 3z^2 & +(1-i)\,z & +4i \\ \cline{1-3} & (1-i)\,z^3 & +4iz^2 & & & & & \\ & -((1-i)\,z^3 & & -(3+3i)\,z) & & & & \\ \cline{2-4} & & 4iz^2 & +2iz & & & & \\ & & -(4iz^2 & & +12) & & & \\ \cline{3-5} & & & 2iz & -3i & & & \end{array}$$

$Q(z)=3z^2+(1-i)\,z+4i$

$R(z)=2iz-3i$

3. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$ zonder gebruik van de regel van de l'Hopital. Maak indien nodig onderscheid tussen linker-en rechterlimiet en tussen $+\infty$ en $-\infty$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{32x^3+32x^2-6x-9}{16x^3-24x^2-63x-27}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{(4x+3)^2\,(2x-1)}{(4x+3)^2\,(x-3)}=\lim_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2}{3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-x^2}-x}{2-\sqrt{5-x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x-x^2}-x\right)\left(\sqrt{2x-x^2}+x\right)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}{\left(2-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{2x-x^2}+x\right)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{\left(2x-x^2-x^2\right)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}{(4-5+x)\left(\sqrt{2x-x^2}+x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\,(1-x)\left(2+\sqrt{5-x}\right)}{-(1-x)\left(\sqrt{2x-x^2}+x\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x\left(2+\sqrt{5-x}\right)}{-\left(\sqrt{2x-x^2}+x\right)}=$
-4

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos5x}{1-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin4x\sin(-x)}{2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{4x}{x}\right)=4$

4. Los de volgende logaritmische vergelijking op:

$$2+\frac{1}{\log_{x+2}(x-1)}=\log_{x-1}(6x-13)+\frac{1}{\log_4(x-1)}$$

$\Leftrightarrow 2 + \log_{x-1}(x+2) = \log_{x-1}(6x-13) + \log_{x-1} 4$
$\Leftrightarrow \log_{x-1}(x-1)^2 + \log_{x-1}(x+2) - \log_{x-1}(24x-52) = 0$
$\Leftrightarrow \log_{x-1} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{24x-52} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{24x-52} = 1$
$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) - (24x-52) = 0$
$\Leftrightarrow x^3 - 27x + 54 = 0$
$\Leftrightarrow (x+6)(x-3)^2$
$\Rightarrow x \in \{3, -6\}$, en de tweede oplossing moet verworpen worden want in strijd met gegeven
$\Rightarrow x = 3$

5. Zoek de buigraaklijn van de functie $f(x) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 15x + 4$.
$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 120x^2 - 160x + 15$
$f''(x) = 20x^3 - 120x^2 + 240x - 160 = 20\left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) = 20(x-2)^3$

x		2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	$B(-94)$	$\frown$
$f'(x)$		-65	

$T_{(2,-94)}: y + 94 = -65(x-2) \Rightarrow y = -65x + 36$
Feedback: Alleen het nulpunt van de tweede afgeleide zonder bijhorend tekenonderzoek is niet volledig qua antwoord!

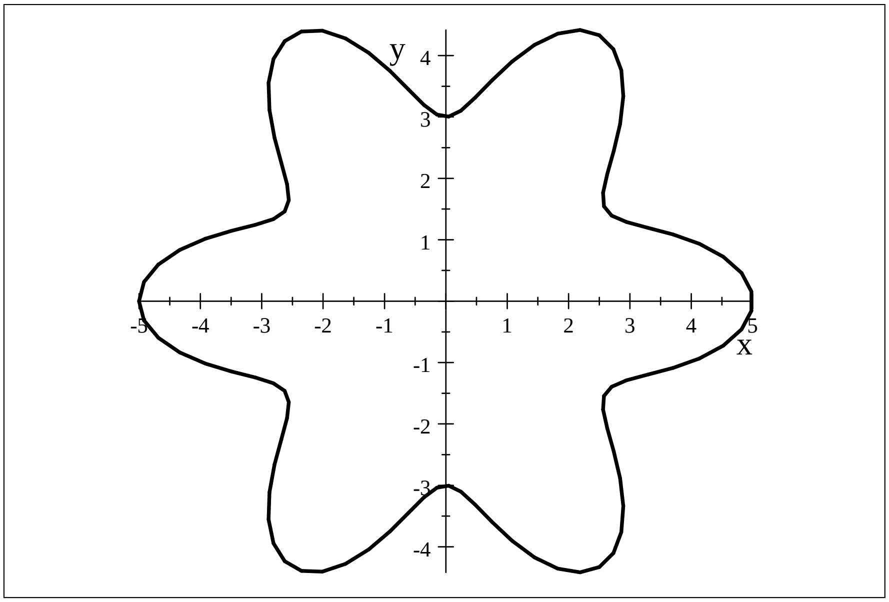
6. Maak een tekenonderzoek tot en met de 1e afgeleide van de poolkromme

$$r(\theta) = 4 + \cos 6\theta$$

en maak hier een tekening van.

- Domein $= \mathbb{R}$
  Periode $= \dfrac{\pi}{3}$
  Beperkt domein $= \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$
- $r = 0$ kan niet
- $r' = -6\sin 6\theta = 0 \Rightarrow \theta = k \cdot \dfrac{\pi}{6}$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
r'	0	$-$	0	$+$	0
	$M(5)$	$\searrow$	$m(3)$	$\nearrow$	$M(5)$



7. Bereken door gebruik van de regel van Fuss (voor een andere methode krijg je geen punten!):
$$\int \frac{2x^2+2}{x^3-7x-6}dx$$
$$\frac{2x^2+2}{x^3-7x-6} = \frac{2x^2+2}{(x-3)(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$
$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{2x^2+2}{(x-3)(x+2)}\right|_{x=-1} = -1 \\ B &= \left.\frac{2x^2+2}{(x-3)(x+1)}\right|_{x=-2} = 2 \\ C &= \left.\frac{2x^2+2}{(x+2)(x+1)}\right|_{x=3} = 1 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow I = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}\right) dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + \ln|x-3| + c$$

8. Bereken
$$\int \frac{x+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}-1}dx$$
Stel $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \dfrac{t^2-1}{2} \Rightarrow dx = tdt$
$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{t^2-1}{2}+t}{t-1} \cdot tdt = \int \frac{t^3+2t^2-t}{2(t-1)}dt = \int \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt$$
$$= \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + t + \ln|t-1| + c$$
$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + \frac{3}{4}(2x+1) + \sqrt{2x+1} + \ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right| + c$$
$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + \frac{3x}{2} + \sqrt{2x+1} + \ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right| + c$$
$$= \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} + \frac{3x}{2} + \sqrt{2x+1} + \ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right| + c$$

$= \frac{x}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{6}\sqrt{2x+1} + \frac{3x}{2} + \sqrt{2x+1} + \ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right| + c$
$= \frac{3x}{2} + \left(\frac{x}{3}+\frac{7}{6}\right)\sqrt{2x+1} + \ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right| + c$

9. Bewijs dat

$$\int_0^\infty \frac{3}{1+x^3}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Hint: bereken eerst de primitieve van $\frac{3}{1+x^3} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}$ door splitsing in partieelbreuken.

$\frac{3}{1+x^3} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{3}{x^2-x+1}\right|_{x=-1} = 1 \\ B\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+C &= \left.\frac{3}{x+1}\right|_{x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}B+C = \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow (B,C) = (-1,2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow OI = \int \frac{3dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx$
$= \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$
$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$
$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + 2\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$
Stel $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$
$\Rightarrow OI = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \sqrt{3}\int \frac{dt}{t^2+1}$
$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{Bgtan}\,t + c$
$= \ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{Bgtan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$
$\Rightarrow BI = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{Bgtan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^b$
$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b+1}{\sqrt{b^2-b+1}}\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{Bgtan}\left(\frac{2b-1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \left(\ln 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{Bgtan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$
$= 0 + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

10. Bereken de complanatie van het manteloppervlak dat je krijgt door de kromme $y = 2\cosh\frac{x}{2}$ rond de X–as te wentelen over het interval $[-2,2]$.

$y = 2\cosh\frac{x}{2} \Rightarrow y' = \sinh\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow (y')^2 = \sinh \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow (y')^2 + 1 = \sinh^2 \frac{x}{2} + 1 = \cosh^2 \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(y')^2 + 1} = \cosh \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow y\sqrt{(y')^2 + 1} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} = \cosh x + 1$$
$$\Rightarrow S = 2\pi \int\limits_{-2}^{2} (\cosh x + 1)\, dx = 2\pi \left[\sinh x + x\right]_{-2}^{2} = 4\pi \sinh 2 + 8\pi$$