Examen Toegepaste Wiskunde III Oefeningen

Prof. dr Werner Peeters

2e bachelor bio–ingenieur
— 1e zittijd 2015–2016

Naam:	....
Richting:	BIR
Studentenkaartnr.:	....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /60

1. Zoek door gebruik van meervoudige integratie het volume van het gebied in $\mathbb{R}^3$, ingesloten door de cylinders $y = x^2 + x + 1$ en $y = 2x + 3$ en de vlakken $6x + z = 17$ en het $XY-$vlak. /10

2. Bereken de uitwendige flux van het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2x + y^3, 2y + z^4, 2z + x^2\right)$ van het oppervlak, bestaande uit de halve bol $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ boven en de paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 9$ onder het XY–vlak.

/10

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$\left(2x^2+1\right)y''+3xy'-y=0$$

/10

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 3t - 1 \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) - 3t + 2 \end{cases}$$

/10

5. Schrijf alle oplossingen van de partiële differentiaalvergelijking $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} - 4\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$

$\boxed{\quad /10}$

6. Los op door gebruik van de Laplace–transformatie:

$$y'' + 4y = 5e^t \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -1$$

$\boxed{\quad\quad /10}$

7. Los de volgende differentievergelijking van orde 1 op:

$$y\,(n+1) - \frac{n+1}{n} y\,(n) = n+1 \text{ met } y\,(1) = 2$$

/10

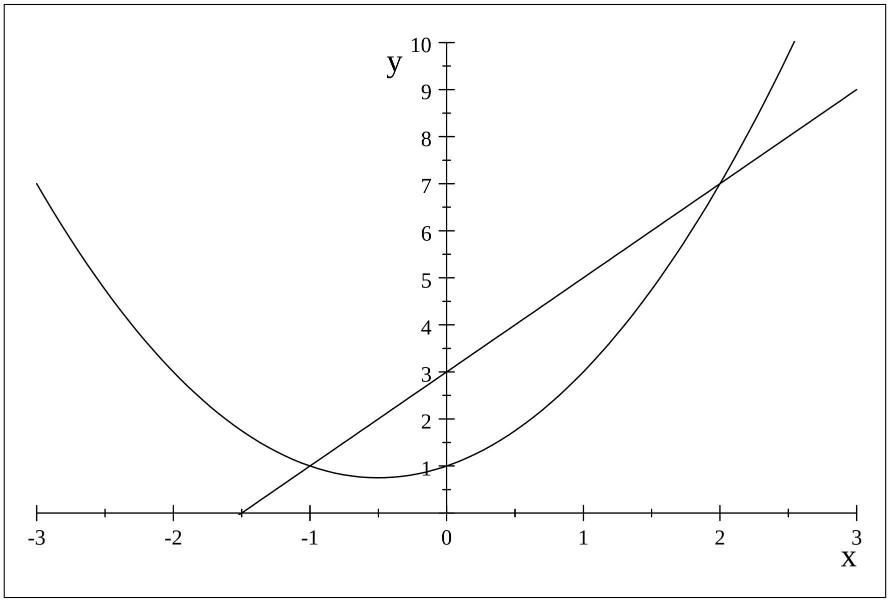
En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

$\boxed{\qquad /70}$

$\Rightarrow \boxed{\qquad /60}$

Oplossingen:

1. Zoek door gebruik van meervoudige integratie het volume van het gebied in $\mathbb{R}^3$, ingesloten door de cylinders $y = x^2 + x + 1$ en $y = 2x + 3$ en de vlakken $6x + z = 17$ en het XY–vlak.
   Het grondvlak wordt ingesloten door $f(x) = x^2 + x + 1$ en $g(x) = 2x + 3$



$f(x) - g(x) = \left(x^2 + x + 1\right) - (2x + 3) = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 2\}$
Het gebied tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 17 - 6x$

$$V = \int_{-1}^{2} \int_{x^2+x+1}^{2x+3} (17 - 6x)\, dydx = \int_{-1}^{2} \left[17y - 6xy\right]_{x^2+x+1}^{2x+3} = \int_{-1}^{2} \left(6x^3 - 23x^2 + 5x + 34\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{23}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 34x\right]_{-1}^{2} = 63$$

2. Bereken de uitwendige flux van het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2x + y^3, 2y + z^4, 2z + x^2\right)$ van het oppervlak, bestaande uit de halve bol $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ boven en de paraboloïde $z = x^2 + y^2 - 9$ onder het XY–vlak.
   Gauss–Ostrogradski: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 6$
   Zij $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V 6dV$$

$$= \iint_S \int_{x^2+y^2-9}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 6dS$$

$$= \iint_S 6\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} - x^2 - y^2 + 9\right) dS$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 6r\left(\sqrt{9 - r^2} - r^2 + 9\right) drd\theta$$

$$= \left[-2\left(9-r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}r^4 + 27r^2\right]_0^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi}$$
$$= 351\pi$$

3. Los op met de methode van Frobenius:

$$\left(2x^2+1\right)y'' + 3xy' - y = 0$$

Stellen we

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}
\end{aligned}$$

Dan is

$$\begin{aligned}
\left(2x^2-1\right)y'' - 6xy' - 10y &= \left(2x^2+1\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\overset{m=n-2}{=} 2\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) c_{m+2} x^m + 3\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) c_{n+2} + (2n(n-1) + 3n - 1) c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) c_{n+2} + \left(2n^2 + n - 1\right) c_n\right] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) c_{n+2} + (n+1)(2n-1) c_n\right]
\end{aligned}$$

De recursiebetrekking is

$$\forall n \geq 0 : c_{n+2} = -\frac{(n+1)(2n-1)c_n}{(n+1)(n+2)} = -\left(\frac{2n-1}{n+2}\right)c_n$$

Stellen we enerzijds $c_0 \neq 0$ en $c_1 = 0$ dan vinden we

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{2}c_0 \\
c_4 &= -\frac{3}{4}c_2 = -\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}c_0 \\
c_6 &= -\frac{7}{6}c_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 \\
c_8 &= -\frac{11}{8}c_6 = -\frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 \\
&\ldots \\
c_{2n} &= \frac{(-1)^{n+1}\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-5)}{2^n n!}c_0
\end{aligned}$$

Stellen we anderzijds $c_0 = 0$ en $c_1 \neq 0$ dan vinden we

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{1}{3}c_1 \\
c_5 &= -\frac{5}{5}c_3 = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}c_1 \\
c_7 &= -\frac{9}{7}c_5 = -\frac{1\cdot 5\cdot 9}{3\cdot 5\cdot 7}c_1 \\
c_9 &= -\frac{13}{9}c_7 = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}c_1 \\
& \quad ... \\
c_{2n+1} &= \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot (4n-3)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n+1)}c_1 = \frac{(-1)^n \cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot (4n-3)\cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!}c_1
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot ...\cdot (4n-5)}{2^n n!}x^{2n}\right) \\
&\quad +c_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot ...\cdot (4n-3)\cdot 2^n\cdot n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

4. Los de volgende vectoriële differentiaalvergelijking op:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) - 3t - 1 \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) - 3t + 2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Karakteristieke vergelijking: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-3, 3\}$

$\Rightarrow E_3 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_{-3} : \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X_h(t) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ e^{3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ e^{3t} & -2e^{-3t} \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ e^{3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3t-1 \\ -3t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-3t}t \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W(t) = \int \Phi^{-1}F\,dt = \int \begin{pmatrix} -3e^{-3t}t \\ -e^{3t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-3t}t + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Phi W = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ e^{3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t}t + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3}e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X_h(t):\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

5. Schrijf alle oplossingen van de partiële differentiaalvergelijking $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - 4\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$

   Stel $z = \lambda x + y$ en $\psi(x,y) = f(z)$

   $$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \lambda^2 f''(z) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \lambda f''(z) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f''(z) \end{cases}$$

   $\Rightarrow f''(z)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right) = 0$

   Singuliere oplossing: $f''(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \alpha z + \beta \Rightarrow \psi(x,y) = ax + by + c$

   Parameterfamilie: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-1, 4\}$

   $\Rightarrow \psi(x,y) = f_1(-x+y) + f_2(4x+y)$

6. Los op door gebruik van de Laplace–transformatie:

   $$y'' + 4y = 5e^t \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -1$$

   $\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[5e^t]$

   $\Rightarrow \left(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\right) + 4Y(z) = \frac{5}{z-1}$

   $\Rightarrow z^2Y(z) - z + 1 + 4Y(z) = \frac{5}{z-1}$

   $\Rightarrow \left(z^2+4\right)Y(z) = z - 1 + \frac{5}{z-1} = z - 1 + \frac{5}{z-1} = \frac{z^2-2z+6}{z-1}$

   $\Rightarrow Y(z) = \frac{z^2-2z+6}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{z^2-2z+6}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+4}$

   $$\begin{aligned} A &= \frac{z^2-2z+6}{z^2+4}\Big|_{z=1} = 1 \\ B(2i) + C &= \frac{z^2-2z+6}{z-1}\Big|_{z=2i} = -2 \Rightarrow (B,C) = (0,-2) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z^2+4}$

   $\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{2}{z^2+4}\right] = e^t - \sin 2t$

7. Los de volgende differentievergelijking van orde 1 op:

   $$y(n+1) - \frac{n+1}{n}y(n) = n+1 \text{ met } y(1) = 2$$

   $y(n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a(i)\right)y(1) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a(i)\right)g(j)$

   $= 2\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i+1}{i}\right) + \sum_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n-1}\left(\frac{i+1}{i}\right)(j+1)$

   $= 2n + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{n}{j+1}(j+1)$

$$
\begin{aligned}
&= 2n + \sum_{j=1}^{n-1} n \\
&= 2n + (n-1)\,n \\
&= n^2 + n
\end{aligned}
$$