Examen Wiskunde Oefeningen REEKS A

dr Werner Peeters

1e bachelor scheikunde, biochemie & bio–ingenieur
— 1e zittijd 2009–2010

Naam: ....

Richting: SCH / BIC / BIR

Studentenkaartnr.: ....

- Gebruik van een niet–programmeerbaar, niet–alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!
- Onleesbaar = fout!
- Gebruik, tenzij uitdrukkelijk gevraagd, geen numerieke afrondingen en geen kommagetallen.
- Schrijf waar mogelijk zo veel mogelijk tussenstappen.
- VEEL SUCCES!

Eindscore: /70

1. Bereken de booglengte van de kromme $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}}{10} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ op het interval $[1, 4]$

/8

2. Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x \operatorname{Bgsin}^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, indien dit bestaat.

/8

3. Los op:

$$x^2 + 4y^2 = 8xyy'$$

met als randvoorwaarde $y(4) = 1$

/9

4. Los op:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}\left(1 + xe^{x}\right)$$

/9

5. Joe, Jack, William en Averell Dalton vormen van klein naar groot qua lichaamslengte een rekenkundige rij. Als ze op elkaars hoofd gaan staan, reiken ze net tot de muur van de gevangenis, die $6,68$ m hoog is. Als Joe en Averell loodrecht met hun hoofd tegen elkaar gaan liggen, passen ze juist tegen de twee opeenvolgende muren van hun (rechthoekige) gevangeniscel die $2,68$ m^2 groot is. Hoe groot zijn de Daltons elk?

/8

6. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = 1 - x^2$ op $[-\pi, \pi]$. Haal uit de uitkomst de formule voor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ via de stelling van Perceval.

/10

7. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^4 \\ -3x^3y^2 \\ 2x^2y^4 \\ 4xy^6 \end{pmatrix}$ en $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b, c, d) \mapsto a^4 + b^3 + c^2 + d$. Bereken $D\,(g \circ f)$ zonder de samenstelling $g \circ f$ uit te rekenen.

/9

8. Zoek de lokale extrema van $f\,(x, y) = x^3 + x^2y + x^2 - y^2 - 6y - 5$

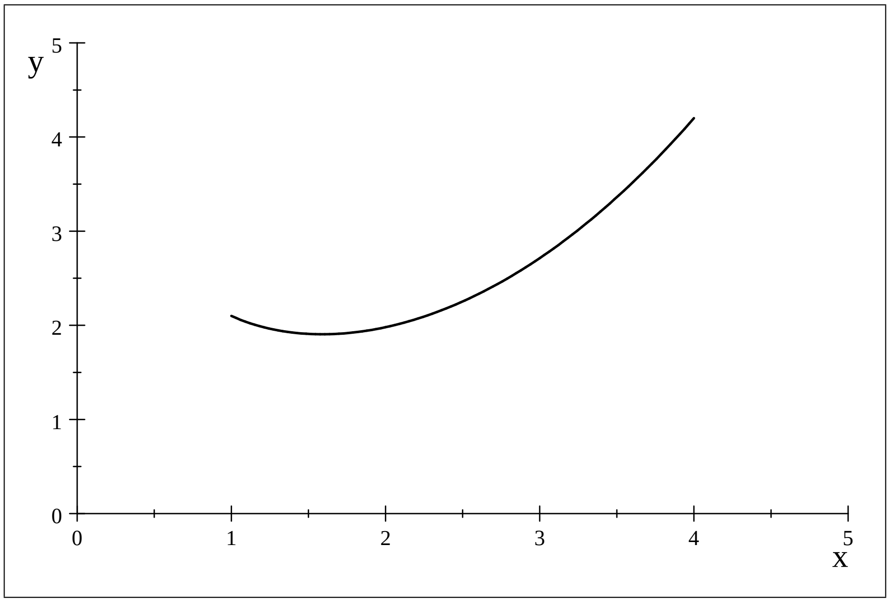
/9

En hier is nog een leeg blad om flaters van de vorige bladzijden recht te zetten:

/70

Oplossingen:

1. Bereken de booglengte van de kromme $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}}{10} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ op het interval $[1, 4]$



$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{10} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}\frac{x^3-4}{x^{3/2}} = \frac{1}{4}x^{3/2} - \frac{1}{x^{3/2}}$$
$$\Rightarrow (f'(x))^2 = \left(\frac{1}{4}x^{3/2} - \frac{1}{x^{3/2}}\right)^2 = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^3}$$
$$\Rightarrow 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{x^3}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{x^3+4}{4x^{3/2}} = \frac{1}{4}x^{3/2} + \frac{1}{x^{3/2}}$$
$$\Rightarrow l = \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^{3/2} + \frac{1}{x^{3/2}}\right) dx = \left[\frac{1}{10}x^{5/2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \frac{41}{10}$$

2. Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x \operatorname{Bgsin}^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, indien dit bestaat.

Stel $t = \operatorname{Bgsin} x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ en $x = \sin t$. Als $\begin{cases} x = -1 & \Rightarrow & t = -\pi/2 \\ x = 1 & \Rightarrow & t = \pi/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^3 \sin t dt$$

$$\begin{cases} u = t^3 \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3t^2 dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$= \left[-t^3\cos t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2\cos t dt$$

$$\begin{cases} u = t^2 \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t dt \\ v = \sin t \end{cases}$$

$$= \left[-t^3\cos t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 3\left(\left[t^2\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin t dt\right)$$

$$= \left[-t^3\cos t + 3t^2\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 6\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\sin t dt$$

$$\begin{cases} u = t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$= \left[-t^3\cos t + 3t^2\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 6\left(\left[-t\cos t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt\right)$$

$$= \left[-t^3\cos t + 3t^2\sin t + 6t\cos t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 6\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt$$

$$= \left[-t^3\cos t + 3t^2\sin t + 6t\cos t - 6\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[3t^2\sin t - 6\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi^2 - 12$$

3. Los op:

$$x^2 + 4y^2 = 8xyy'$$

met als randvoorwaarde $y(4) = 1$
Stel $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$
$\Rightarrow x^2 + 4u^2x^2 = 8x^2u(u'x + u)$
$\Rightarrow 1 + 4u^2 = 8u(u'x + u)$
$\Rightarrow 1 + 4u^2 = 8uu'x + 8u^2$
$\Rightarrow 1 - 4u^2 = 8uu'x$
$\Rightarrow 1 - 4u^2 = 8u\dfrac{du}{dx}x$
$\Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{8u}{1-4u^2}du$; SO: $1 - 4u^2 = 0 \Rightarrow u = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{x}{2}$
$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{8u}{1-4u^2}du$
$\Rightarrow \ln|x| = -\ln\left|1 - 4u^2\right| + c$
$\Rightarrow \ln|x| + \ln\left|1 - 4u^2\right| = c$
$\Rightarrow \ln\left|x\left(1 - 4u^2\right)\right| = c$
$\Rightarrow \left|x\left(1 - 4u^2\right)\right| = k > 0$
$\Rightarrow x\left(1 - 4u^2\right) = k \neq 0$
$\Rightarrow x\left(1 - 4u^2\right) = c$; de singuliere oplossingen zijn dus abondant
$\Rightarrow x\left(1 - 4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right) = c$
$\Rightarrow$ A.O.: $x^2 - 4y^2 = cx$
$(4,1) \in$ opl $\Rightarrow 4^2 - 4\cdot 1^2 = c\cdot 2 \Rightarrow c = 3$
$\Rightarrow$ P.O.: $x^2 - 4y^2 = 3x$

4. Los op:
$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}\left(1 + xe^{x}\right)$$

$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + xe^{3x}$
Eerst bekijken we $y'' - 5y' + 6y = 0$

$$\text{KV: } t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t \in \{2, 3\}$$

$\Rightarrow y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$

- $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
$\left.\begin{array}{l}\text{mult}_\Phi(2) = 1\\ \text{gr}(Q(x)) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Stel } y_p = (b_0 + b_1x)e^{2x} = b_1xe^{2x}$
$\left\{\begin{array}{l} y_p = b_1xe^{2x}\\ y_p' = b_1e^{2x} + 2b_1xe^{2x}\\ y_p'' = 4b_1e^{2x} + 4b_1xe^{2x}\end{array}\right.$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_p = b_1xe^{2x} & |1\\ y_p' = b_1e^{2x}(2x+1) & |-5\\ y_p'' = b_1e^{2x}(4x+4) & |6\end{array}\right.$
$\Rightarrow b_1e^{2x}(4x+4) - 5b_1e^{2x}(2x+1) + 6b_1xe^{2x} = -b_1e^{2x} \equiv e^{2x}$
$\Rightarrow b_1 = -1$
$\Rightarrow Y_{P1} = -xe^{2x}$
- $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$
$\left.\begin{array}{l}\text{mult}_\Phi(3) = 1\\ \text{gr}(Q(x)) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Stel } y_p = \left(d_0 + d_1x + d_2x^2\right)e^{3x} = \left(d_1x + d_2x^2\right)e^{3x}$
$\left\{\begin{array}{l} y_p = \left(d_1x + d_2x^2\right)e^{3x}\\ y_p' = e^{3x}d_1 + 2e^{3x}d_2x + 3e^{3x}d_1x + 3e^{3x}d_2x^2\\ y_p' = 2d_2e^{3x} + 6e^{3x}d_1 + 12e^{3x}d_2x + 9e^{3x}d_1x + 9e^{3x}d_2x^2\end{array}\right.$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_p = \left(d_1x + d_2x^2\right)e^{3x} & |1\\ y_p' = e^{3x}\left(d_1 + (3d_1 + 2d_2)x + 3d_2x^2\right) & |-5\\ y_p' = e^{3x}\left((6d_1 + 2d_2) + (9d_1 + 12d_2)x + 9d_2x^2\right) & |6\end{array}\right.$
$e^{3x}\left((6d_1 + 2d_2) + (9d_1 + 12d_2)x + 9d_2x^2\right) - 5e^{3x}\left(d_1 + (3d_1 + 2d_2)x + 3d_2x^2\right) + 6\left(d_1x + d_2x^2\right)e^{3x} =$
$e^{3x}\left((d_1 + 2d_2) + 2d_2x\right) \equiv xe^{3x}$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 + 2d_2 = 0\\ 2d_2 = 1\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d_1 = -1\\ d_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$
$\Rightarrow Y_{P2} = \dfrac{1}{2}x^2e^{3x} - xe^{3x}$
$\Rightarrow y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)e^{3x}$

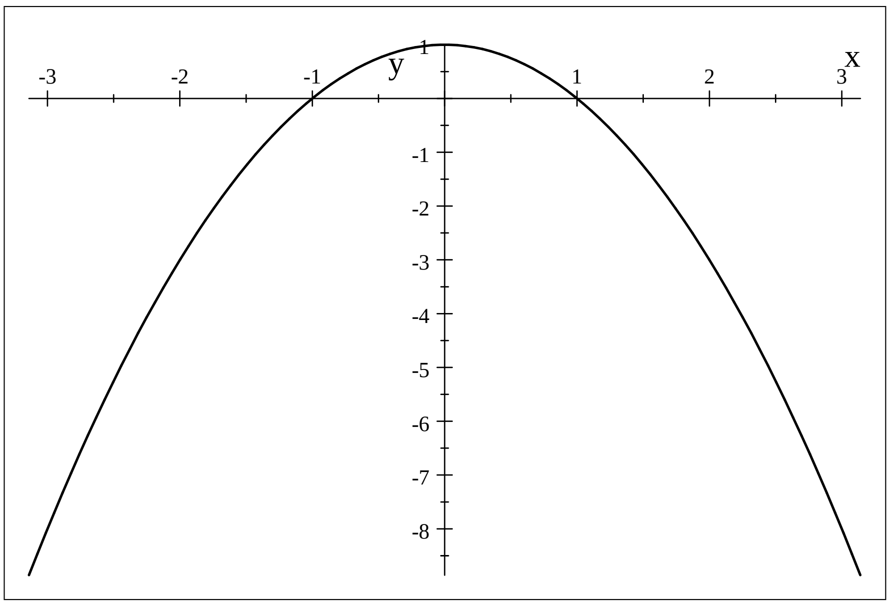
5. Joe, Jack, William en Averell Dalton vormen van klein naar groot qua lichaamslengte een rekenkundige rij. Als ze op elkaars hoofd gaan staan, reiken ze net tot de muur van de gevangenis, die 6,68 m hoog is. Als Joe en Averell loodrecht met hun hoofd tegen elkaar gaan liggen, passen ze juist tegen de twee opeenvolgende muren van hun (rechthoekige) gevangeniscel die 2,68 m^2 groot is. Hoe groot zijn de Daltons elk?
$\left\{\begin{array}{ll} \text{Joe:} & x_1\\ \text{Jack:} & x_2 = x_1 + v\\ \text{William:} & x_3 = x_1 + 2v\\ \text{Averell:} & x_4 = x_1 + 3v\end{array}\right.$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.68\\ x_1 \cdot x_4 = 2.68\end{array}\right.$
$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x_1 + 6v = 6.68\\ x_1 \cdot (x_1 + 3v) = 2.68\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3v = 3.34 \\ x_1 \cdot (x_1 + 3v) = 2.68 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3v = 3.34 - 2x_1 \\ x_1 \cdot (x_1 + 3.34 - 2x_1) = 2.68 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3v = 3.34 - 2x_1 \\ -x_1^2 + 3.34x_1 - 2.68 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3.34 - 2x_1}{3} \\ x_1 \in \{1.34; 2.0\} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.34 \text{ en } v = \dfrac{3.34 - 2 \cdot 1.34}{3} = 0.22 \\ x_1 = 2 \text{ en } v = \dfrac{3.34 - 2 \cdot 2}{3} = -0.22 \end{cases}$$

De Daltons staan echter van klein naar groot, dus $v > 0$

$\Rightarrow$ Joe is 1.34 m, Jack is 1.56 m, William is 1.78 m en Averell is 2.00 m

6. Bereken de fourierreeks van de functie $f(x) = 1 - x^2$ op $[-\pi, \pi]$



Haal uit de uitkomst de formule voor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ via de stelling van Perceval.

- $f_E = f,\ f_O = 0 \Rightarrow \forall n \geq 1 : b_n = 0$
- $a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 - x^2\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{1}{3}\pi^3\right) = 2 - \frac{2}{3}\pi^2$
- $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \left(1 - x^2\right) \cos nx dx =$

$$\begin{cases} u = 1 - x^2 \\ dv = \cos nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2x dx \\ v = \dfrac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1-x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx\right) = \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin nx dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array}\right.$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left([-x\cos nx]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left([-x\cos nx]_0^{\pi}\right) = -\frac{4}{n^2}(\cos n\pi) = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

- Fourierreeks: $f(x) \overset{b.o.}{=} 1 - \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{10}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$
- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-x^2\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-x^2\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{4}{3}\pi^2 + 2$

  Perceval: $\frac{2}{5}\pi^4 - \frac{4}{3}\pi^2 + 2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\pi^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$

  $\Rightarrow \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{4}{3}\pi^2 + 2 = 2 - \frac{4}{3}\pi^2 + \frac{2}{9}\pi^4 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$

  $\Rightarrow \frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$

  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{8}{45}\pi^4$

  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\frac{8}{45}\pi^4 = \frac{1}{90}\pi^4$

7. Zij $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^4 \\ -3x^3y^2 \\ 2x^2y^4 \\ 4xy^6 \end{pmatrix}$ en $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} : (a,b,c,d) \mapsto a^4 + b^3 + c^2 + d$. Bereken $D(g \circ f)$ zonder de samenstelling $g \circ f$ uit te rekenen.
   $D(g \circ f) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y)$
   $$= \begin{pmatrix} 4a^3 & 3b^2 & 2c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x^3 & 0 \\ -9x^2y^2 & -6x^3y \\ 4xy^4 & 8x^2y^3 \\ 4y^6 & 24xy^5 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 4x^{12} & 27x^6y^4 & 4x^2y^4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x^3 & 0 \\ -9x^2y^2 & -6x^3y \\ 4xy^4 & 8x^2y^3 \\ 4y^6 & 24xy^5 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 16x^{15} - 243x^8y^6 + 16x^3y^8 + 4y^6 & -162x^9y^5 + 32x^4y^7 + 24xy^5 \end{pmatrix}$$
8. Zoek de lokale extrema van $f(x,y) = x^3 + x^2y + x^2 - y^2 - 6y - 5$
   $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2x = x(3x+2y+2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y - 6 = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x = 0$ of $y = -\dfrac{3}{2}x - 1$
Als $x = 0 \Rightarrow 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3$
Als $y = -\dfrac{3}{2}x - 1 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x \in \{1, -4\}$
Als $x = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{5}{2}$
Als $x = -4 \Rightarrow y = 5$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y + 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \end{cases}$$

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x + 2y + 2 & 2x \\ 2x & -2 \end{vmatrix} = -12x - 4y - 4 - 4x^2$$

- $H(0, -3) = 8 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -3) = -4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -3) = -2 \end{cases} \Rightarrow$ maximum
- $H\left(1, -\dfrac{5}{2}\right) = -10 \Rightarrow$ zadelpunt
- $H(-4, 5) = -40 \Rightarrow$ zadelpunt