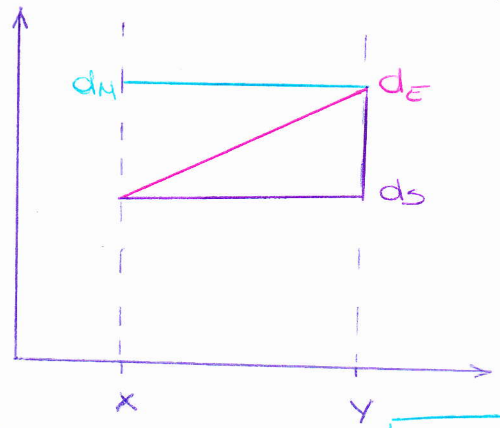
$\boxed{H10}$ Functies v. meerdere veranderlijken

- Elementen van $\mathbb{R}^n$ (vectoren):

$$\underbrace{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{variabelen}} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ f_3(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_p(\underline{x}) \end{pmatrix}}_{\text{componentsfuncties}} = \underline{f}(\underline{x})$$

① Continuïteit en limieten in $\mathbb{R}^n$

- Metrieken/afstanden op $\mathbb{R}^n$.
  geg: 2 punten $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
  → euclidische metriek: $d_E(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
  → sommetriek: $d_S(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
  → maximummetriek: $d_M(\underline{x}, \underline{y}) = \|x - y\|_M = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$



- Limiet v.e functie $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}:}$
  geg: $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bereikt de waarde $b \in \mathbb{R}$ als limiet in punt $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - b| < \varepsilon$

  $\Rightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = b$

  → dezelfde rekenregels als gewone limieten alleen bestaat er geen rechter- en linkerlimiet

- Continuïteit v.e functie $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}:}$
  geg: $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continu in punt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$
  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon$
  $\Rightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$

→ f is discontinu als f niet continu is in a
→ f is globaal continu als het continu is in alle punten v zijn domein

- Limiet ve vectoriele functie : $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}$

geg: $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ met $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_p(\underline{x}))$ als limiet in punt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de waarde $\underline{b} = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ bereikt $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \| \underline{x} - \underline{a} \| < \delta \Rightarrow \| f(\underline{x}) - \underline{b} \| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = \underline{b}$

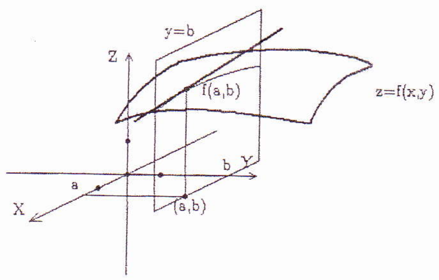
$\Rightarrow f$ = vectoriële functie

- Continuiteit ve functie $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}$: (analoog $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

② Partiële afgeleiden en richtingsafg. in $\mathbb{R}^n$

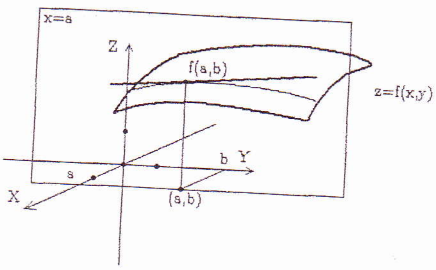
- Partiële afgeleiden in $\boxed{\mathbb{R}^2}$

geg: $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \underline{x} = (x, y) \mapsto f(x, y)$ en punt $\underline{a} = (a, b) \in \text{dom} f$
(f hoeft niet continu te zijn)



$f(\cdot, b) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x, b)$ met $y = b$
→ ontstaan vlak $y = b$ die f snijdt i/d kromme die functie is v. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
→ als f differentieerbaar is in a dan is f partieel afleidbaar naar (x)
$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \dfrac{df(\cdot, b)}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$

= rico voor de raaklijn langs de kromme



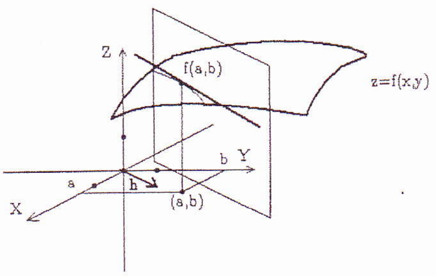
$f(a, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto f(a, y)$ met $x = a$
(analoog hierboven)
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \dfrac{df(a, \cdot)}{dy}(b) = \lim_{k \to 0} \dfrac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$

→ functie $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is partieel afleidbaar $\Leftrightarrow$ beide afgeleiden bestaan

→ afgeleidenmatrix v. f : $Df(a, b) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$

→ veralgemening voor in $\boxed{\mathbb{R}^n}$ of voor $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}$: zie pg 221

③ Afleidbaarheid in $\mathbb{R}^n$



IPV doorsnede met vlak, nemen we nu een vlak loodrecht op XY-vlak
→ er geldt $\forall \underline{h} = (h_1, h_2) \neq \vec{0}$ dat door het punt $f(a, b)$ precies 1 vlak gaat, evenwijdig met h en loodrecht op XY-vlak
→ we beperken $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tot kromme die doorsnede is vh opp. $z = f(x, y)$ met gegeven vlak. (functie : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

→ richtingsafgeleide v. f id richting $\underline{h}$ in punt (a,b):

$$Df((a,b),\underline{h}) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda h_1, b+\lambda h_2) - f(a,b)}{\lambda}$$

→ uitgebreid naar $\mathbb{R}^n$: $Df(\underline{a},\underline{h}) := \lim_{\lambda \to 0} \dfrac{f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a})}{\lambda}$

→ $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is afleidbaar ie punt $\underline{a} \in \text{dom } f \Leftrightarrow \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \ (\neq \vec{0})$ de richtingsafgeleide $Df(\bar{a},\bar{h})$ bestaat

④ Differentieerbaarheid in $\mathbb{R}^n$

◦ $\boxed{\mathbb{R}^2}$: $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is partieel afleidbaar in $\underline{a} = (a,b)$, dan is f differentieerbaar in $\underline{a}$ als:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}).(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}).(y-b)}{\|\underline{x} - \underline{a}\|} = 0$$

→ raakvlak: $z = f(\underline{a}) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}).(y-b)$

→ totale afgeleide: $Df(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) \end{pmatrix}$

→ gradiënt: $\nabla f(\underline{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}), \dfrac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) \right)$

→ uitgebreid naar $\boxed{\mathbb{R}^n}$: zie pg 235

Eigenschappen:

1) Als $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $\underline{a} \in \text{dom } f$, dan is f continu in $\underline{a}$

!

Bewijs: stel $\omega: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$\forall \underline{x} \in \text{dom } f: \omega(\underline{x}) = \dfrac{|f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - Df(\underline{a}).(\underline{x}-\underline{a})|}{\|\underline{x} - \underline{a}\|}$

$\Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{a})| \leq \omega(x).\|\underline{x} - \underline{a}\| + |Df(\underline{a}).(\underline{x} - \underline{a})|$

$\Rightarrow$ limiet voor $\underline{x} \to \underline{a}$ dan $f(\underline{x}) \to f(\underline{a})$ en wordt $RL = 0$ en dus LL ook

$\Rightarrow f$ is continu in $\underline{a}$

2) Als $f: \text{dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in $\underline{a} \in \text{dom } f$, dan is f afleidbaar in $\underline{a}$ in elke $\underline{h} \in \mathbb{R}^n \ (\neq \vec{0})$ en dan geldt:

$Df(\underline{a},\underline{h}) = Df(\underline{a}).\underline{h}$

!

Bewijs: stel $\|\underline{h}\| = 1$

→ $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0$:

$$\underbrace{\frac{\|f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a}) - Df(\underline{a}).(\lambda\underline{h})\|}{\|\lambda\underline{h}\|}}_{*} = \frac{\|f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a}) - \lambda Df(\underline{a}).\underline{h}\|}{|\lambda|\underbrace{\|\underline{h}\|}_{=1}}$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\|f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a}) - \lambda Df(\underline{a}).\underline{h}\|$$

$$= \left\|\frac{f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a})}{\lambda} - Df(\underline{a}).\underline{h}\right\|$$

→ als f differentieerbaar is : $\lim_{\lambda\to 0}(*) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\underline{a}+\lambda\underline{h}) - f(\underline{a})}{\lambda} = Df(\underline{a}).\underline{h}$$

$= $ richtingsafgeleide $Df(\underline{a},\underline{h})$

→ voor $\|\underline{h}\| \neq 1$: def. differentieerbaarheid

3) als $f : \operatorname{dom} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar is in $\underline{a} \in \operatorname{dom} f$:

- f continu in $\underline{a}$
- f afleidbaar in $\underline{a}$ in elke $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ $(\neq \vec{0})$ en bovendien geldt : $Df(\underline{a},\underline{h}) = Df(\underline{a}).\underline{h}$

5) continu diff. in $\mathbb{R}^n$

- $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is partieel afleidbaar in punt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ dan is f continu differentieerbaar in $\underline{a}$ als alle partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \operatorname{dom} f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ continu zijn in $\underline{a}$

continu differentieerbaar → differentieerbaar

differentieerbaar → continue f

differentieerbaar → $Df(0).\underline{h} = Df(0,h)$ richtingsafgeleide

differentieerbaar → afgeleide → partieel afgeleide

→ CD is sterker als D en zo verder...

→ C, $Df(0).\underline{h}$ en A hebben niets met elkaar te maken

6) Kettingregel

- functies $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $g : \operatorname{dom} g \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ zijn samenstelbaar → $h = g \circ f : \operatorname{dom} h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ bestaat

→ als f en g (continu) diff. zijn dan is $\underline{h}$ dat ook en dan geldt $\forall \underline{a} \in \text{dom} f$ als $\underline{b} = f(\underline{a})$: $D\underline{h}(\underline{a}) = Dg(\underline{b}) \cdot Df(\underline{a})$ (matrixproduct)

→ $k \in \{1, \dots, q\}$ en $i \in \{1, \dots, n\}$ dan element op k^e rij en i^e kolom vd matrix $D\underline{h}(\underline{a})$ gelijk aan:

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(\underline{a}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(\underline{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{a})$$

→ volluit geschreven:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial h_q}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mathbf{b}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(\mathbf{b}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\mathbf{b}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_p}(\mathbf{b}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \frac{\partial g_q}{\partial y_2}(\mathbf{b}) & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial y_p}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

- Toepassing: andere coördinaatstelsels
  ZIE CURSUS pg 247

⑦ Hogere afg. in meerdere veranderlijken

- stel $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is partieel diff op heel G en als alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ zijn partieel diff. in $\underline{a} \in G$ dan zijn deze partiële afg., partiële afgeleiden vd 2^e orde v. f in $\underline{a}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(\underline{a}) := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a})$$

→ 2^e afgeleidenmatrix:

$$D^2 f(\mathbf{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

→ f is 2 maal continu diff in $\underline{a}$ als alle functies uit de matrix bestaan en continu zijn in $\underline{a}$

- Stelling: als $f : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 maal diff. is in $\underline{a} \in G$ dan geldt voor alle $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{a})$

⑩ Krommen en opp. in $\mathbb{R}^n$

- Kromme in $\mathbb{R}^n$ = continue functie : $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto x(t)$
  → bepaald door parametervoorstelling
  → beeld $x(I)$ = baan vd kromme
  → als x diff is in $a \in I$ dan is de vector $x'(a)$ = snelheidsvector v. x in a
  → als x' = continu dan is het een gladde kromme
  → als x = glad zodanig dat $\forall x \in I : x'(x) \neq \vec{0}$ dan is x

een reguliere kromme

→ raaklijn in a aan reguliere x = unieke rechte door $x(a)$, evenwijdig met $x'(a)$, met parametervgl: $\{x(a) + \lambda x'(a) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

→ $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{x(a+\lambda) - x(a) - \lambda x'(a)}{\lambda} = 0$

- Kromme $x : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is gesloten als $x(a)$ (beginpunt) = $x(b)$ (eindpunt)

  Kromme $x : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is simpel als $x|_{[a,b[}$ injectief is dus als geen enkel punt (behalve a of b) meer dan 1 maal bereikt wordt

- open deel $S \subseteq \mathbb{R}^n$ = samenhangende deelverzameling als elke 2 punten v. S met (stuksgewijze) gladde kromme verbonden kunnen worden, waarv. de baan binnen S blijft

  → enkelvoudig samenhangend als elke gesloten curve op S op continue wijze omgevormd kan worden tot een constante kromme

- oppervlak in $\mathbb{R}^3$ = continue afbeelding

  $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto f(u,v) := (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

  met G = open samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}^2$

  → als f = continu diff → glad opp.

  → normaal = vector loodrecht op 2 partiële afgeleiden vh opp: $\eta(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial f}{\partial v}$

  → als $\forall (u,v) \in G : \eta(u,v) \neq \vec{0}$ → opp = regulier

1.1 Impliciete functiestelling

- Impliciete functie v. 2 veranderlijken: $F(x,y) = 0$

  Expliciete functie: $y = f(x)$ (analoog voor 3 veranderlijken)

(dubbelpunt, snijpunt, buigpunten)

→ punten waar geldt $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ en $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ zijn singulier

- Stelling: als $F : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu diff. is en $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$ is punt waarvoor $F(x_0, y_0) = 0$ en $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ dan bestaat er omgeving I v. x_0 in $\mathbb{R}$ en unieke continu diff functie $f : I \to \mathbb{R}$ zodanig dat:
  - $f(x_0) = y_0$
  - $\forall x \in I : F(x, f(x)) = 0$

= IMPLICIETE FUNCTIESTELLING I

- Eigenschap:
stel $F(x,y)=0$ = impliciete functie met $F: G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu diff. functie waarvoor impliciete functiestelling I geldt dan geldt in alle punten waarvoor $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$$ = impliciete afleiding

Bewijs: stel $f: I \to \mathbb{R}$ = impliciet en stelling I geldt, dan bestaat er: $g: I \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, f(x))$

$\to F \circ g = 0$ op I

$\to$ Kettingregel: $\forall x \in I$:

$$DF(g(x)) . Dg(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(g(x))\right) . \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{df}{dx}(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(g(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(x)) . \frac{dy}{dx}(x) = 0$$

als $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ dan klopt de eig.

- Stelling:
stel $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is continu diff. en $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ is punt waarvoor $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ dan bestaat er omgeving G v. (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ ~~waar~~ en unieke continu diff functie $f: G \to \mathbb{R}$ zodanig dat:
  - $f(x_0, y_0) = z_0$
  - $\forall (x,y) \in G : F(x, y, f(x,y)) = 0$

= IMPLICIETE FUNCTIESTELLING II

- Eigenschap:
stel $F(x,y,z) = 0$ = impliciet met $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continu diff. functie waarvoor stelling II geldt dan geldt in alle punten waarvoor $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y) \neq 0$ dat de partiële afg. worden geg. door:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}\right)$$

Bewijs stel $f: G \to \mathbb{R}$ = impliciet en II geldt dan bestaat er $g: G \to \mathbb{R}^3 : \underline{x} = (x,y) \mapsto (x, y, f(\underline{x}))$

$\to F \circ g = 0$ op G

$\to$ Kettingregel: $\forall \underline{x} \in G$:

$DF(g(\underline{x})) \cdot Dg(\underline{x}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{f}(\underline{x})) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{f}(\underline{x})) \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{f}(\underline{x})) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{f}(\underline{x})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{f}(\underline{x})) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{f}(\underline{x})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{f}(\underline{x})) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}) \right) = (0,0)$$

$\rightarrow$ als $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ dan klopt de eig.

- Stelling:

stel $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is continu diff en $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ = punt waarvoor $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ en $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ en

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\underline{x}_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\underline{x}_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

dan bestaat er omgeving I v. z_0 in $\mathbb{R}$ en 2 unieke continu diff functies $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig

- $(f(z_0), g(z_0)) = (x_0, y_0)$
- $\forall z \in I$: $F(f(z), g(z), z) = 0$ en $G(f(z), g(z), z) = 0$

= IMPLICIETE FUNCTIESTELLING III

- Eigenschap

stel $F(x,y,z) = 0$ en $G(x,y,z) = 0$ zijn impliciet met $F, G : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continu diff. functies waarvoor III geldt, dan geldt in alle punten waarvoor $\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\underline{x}_0)\right| \neq 0$ dat de afgeleiden worden geg door:

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{dz}(z) \\ \frac{dg}{dz}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \dfrac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}(\underline{x}_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\underline{x}_0)\right|} \\ - \dfrac{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(\underline{x}_0)\right|}{\left|\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\underline{x}_0)\right|} \end{pmatrix}$$

Bewijs: stel $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ = impliciet waarvoor III geldt dan bestaat er $\underline{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : z \mapsto (f(z), g(z), z)$

$\rightarrow (F,G) \circ \underline{f} = 0$ op I

$\rightarrow$ Kettingregel $\forall x \in I$

$D(F,G) \cdot (\underline{f}(z)) \cdot D\underline{f}(z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\underline{f}(z)) & \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{f}(z)) & \frac{\partial F}{\partial z}(\underline{f}(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\underline{f}(z)) & \frac{\partial G}{\partial}(\underline{f}(z)) & \frac{\partial G}{\partial z}(\underline{f}(z)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{df}{dz}(z) \\ \frac{dg}{dz}(z) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) \cdot \frac{df}{dz}(z) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z) + \frac{\partial F}{\partial z}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) \cdot \frac{df}{dz}(z) + \frac{\partial G}{\partial y}(f(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z) + \frac{\partial G}{\partial z}(f(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

= onbekenden

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) \cdot \frac{df(z)}{dz} + \frac{\partial F}{\partial y}(f(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z) = -\frac{\partial F}{\partial z}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) \cdot \frac{df(z)}{dz} + \frac{\partial G}{\partial y}(f(z)) \cdot \frac{dg}{dz}(z) = -\frac{\partial G}{\partial z}(f(z)) \end{cases}$$

→ stelling v. Cramer

$$\frac{df}{dz}(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial F}{\partial y}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial G}{\partial y}(f(z)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial F}{\partial y}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial G}{\partial y}(f(z)) \end{vmatrix}} \quad \text{en} \quad \frac{dg}{dz}(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial F}{\partial z}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial G}{\partial z}(f(z)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial F}{\partial y}(f(z)) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(f(z)) & \frac{\partial G}{\partial y}(f(z)) \end{vmatrix}}$$

(12) Extrema

voor n = 1 (1x diff).

- voor $f: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heeft lokale extrema:
  1) Maximum in $\underline{a} \in G$ als omgeving V v. $\underline{a}$ bestaat:
     $\forall \underline{x} \in V \cap \operatorname{dom} f : f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$
     → strikt als $\forall \underline{x} \neq \underline{a}$
  2) Minimum: $\forall \underline{x} \in V \cap \operatorname{dom} f : f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$

  → als lokaal extremum bestaat in $\underline{a} \in G$: $\nabla f(\underline{a}) = \underline{0}$ of $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = 0$

- voor $f: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(\underline{x})$ is continu diff.
  → $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ = kritiek punt $\Leftrightarrow \nabla f(\underline{a}) = \underline{0}$
  → " = zadelpunt $\Leftrightarrow$ elke omgeving V v. $\underline{a}$ zowel punten $\underline{x}$ bevat waarvoor $f(\underline{x}) < f(\underline{a})$ als punten $\underline{y}$ waarvoor $f(\underline{y}) > f(\underline{a})$

voor n = 2

- stel $f: G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is 2 maal diff in $\underline{a} \in G$
  → Hessiaanse matrix : $H(\underline{a}) = D^2 f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a}) \right)_{i,j=1}^{n}$

  → met 2 veranderlijken:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ determinant: $\Delta = \det H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right)^2$

- Stelling: 1) alle eigenwaarden v. $H(\underline{a})$ strikt positief $\rightarrow \underline{a}$ = min.
  2) " strikt negatief $\rightarrow \underline{a}$ = max
  3) " zowel pos. als neg. $\rightarrow \underline{a}$ = zadelpunt
  4) 0 een eigenwaarde is $\rightarrow$ niets besluiten

- Stelling: 1) $\Delta < 0$: $\underline{a}$ = zadelpunt $\qquad \left(A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{a})\right)$
  2) $\Delta > 0$ en $A > 0$: $\underline{a}$ = min
  3) $\Delta > 0$ en $A < 0$: $\underline{a}$ = max
  4) $\Delta = 0$: onvoldoende geg.

Voor $n \geq 3$

$\nabla f(\bar{x}_0) = 0 \rightarrow$ is mss een extremum

$\det(D^2 f - \lambda I)$:
- voor alle $\lambda > 0 \rightarrow$ min.
- voor alle $\lambda < 0 \rightarrow$ max
- sommige $\lambda > 0$, $\lambda < 0 \rightarrow$ zadelpunt
- als $\lambda = 0 \rightarrow$?

13) Multiplicatoren v. Lagrange

$\boxed{\text{zie cursus}}$ pg 305