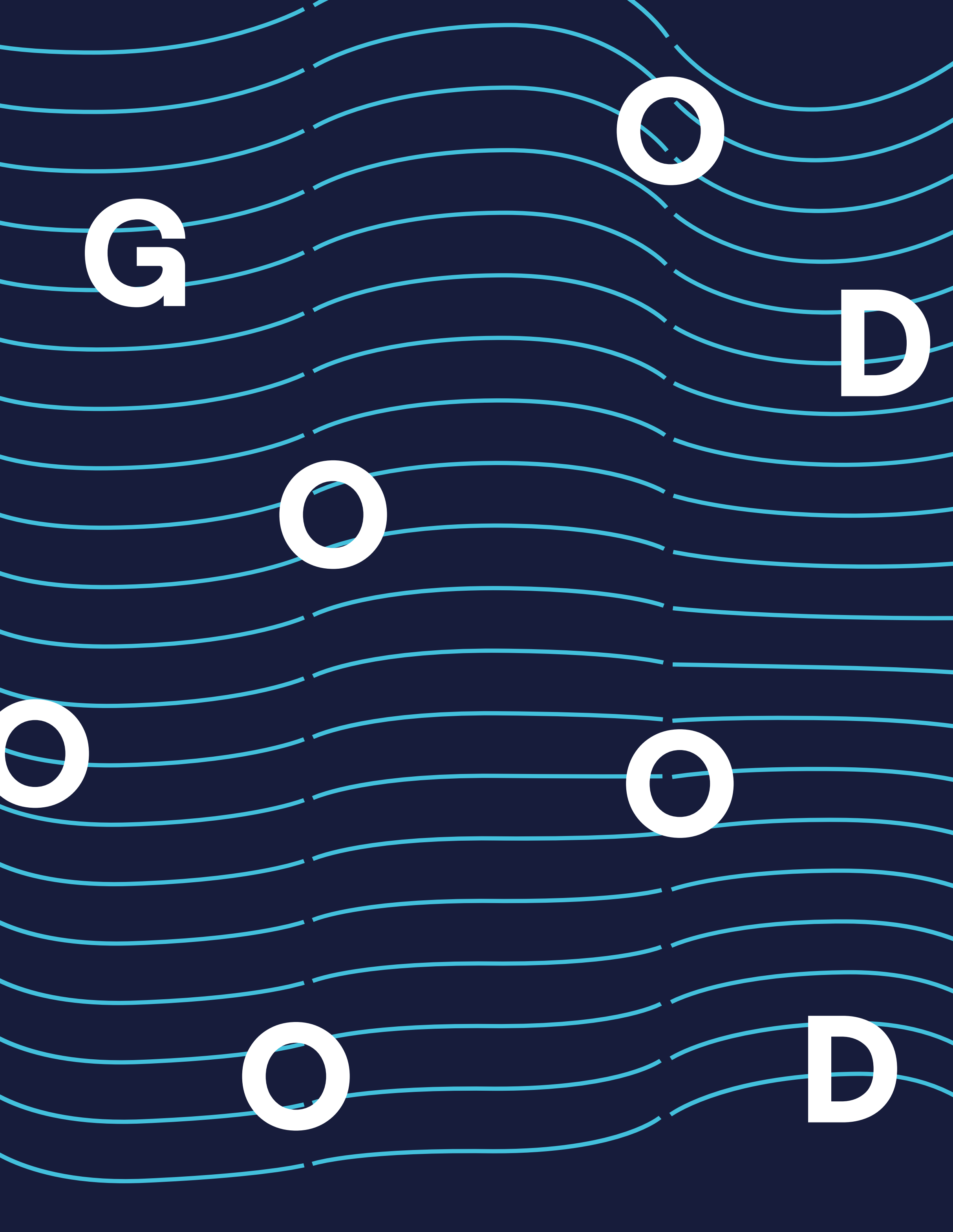

O
G
D
O
O O
O D

Grootte van verzamelingen

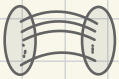
↳ = kardinaliteit

$|A|$ = # elm^n van A = kardinaliteiten van A

A, B verzamelingen

↳ equipotent als er een bijectie bestaat tussen a en b

= heeft zelfde kardinaliteit



evenveel elementen
max 1 pijl toekomen
min 1 pijl toekomen

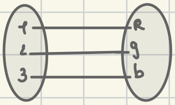
Vb

A = {1, 2, 3}

B = {rood, geel, blauw}

equipotent

evenveel elementen



1 - 1 verband

Kardinaliteit oneindigheid

$\# a = \infty$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$

meer

verschillende soorten oneindigheid

$\#$elementen $\mathbb{N} = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ aleph - nul

AFSPRAAK

zoals $|A| = 3$

$A = \{1, 2, 3\}$

kleinste oneindige verzameling

AFtellen

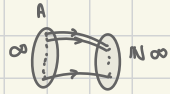
je gaat elke getal tegenkomen na bepaalde tijd

= bijectie

Aftelbaarheid

bijectie + op een Rij zetten
equipotent met $\mathbb{N}$ → Aftelbaar

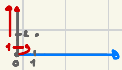
↳ We noemen een verzameling A aftelbaar
Als A eindig is of
Als er een bijectie bestaat met $\mathbb{N}$ => maw equipotent met $\mathbb{N}$



is Er een bijectie tussen $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}$?

$$f\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \ : n \mapsto n+1$$

=> $\mathbb{N}_0$ is Aftelbaar
↳ bijectie ✓
" je kan de getallen uit $\mathbb{N}_0$ op een Reitje zetten."



Aftelbaarheid

$f : \mathbb{N} \to A : n \mapsto a_n$

We kunnen A Schrijven als $\{ a_0, a_1, a_2, \ldots$

Z aftelbaar?

↳ Stap 1: hoe kunnen we $\mathbb{Z}$ op een rijtje zetten?

$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$

$\xrightarrow{\text{oneindigheid nr rechtn}}$

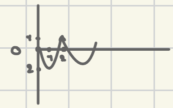
dus we kunnen een bijectie maken

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$0 \mapsto 0$
$1 \mapsto -1$
$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto -2$
$4 \mapsto 2$
$5 \mapsto -3$

Formule $\longrightarrow$

$$n \mapsto \begin{cases} \text{even: } \frac{n}{2} \\ \text{oneven: } -\frac{n+1}{2} \end{cases}$$



kardinaliteit $\mathbb{Z}$

$|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ want bevat evenveel elementen als $\mathbb{N}$

Q aftelbaar?

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_0 \}$$

$\mathbb{Q}$

.....	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	....
....	$\cancel{\frac{-4}{2}}$	$\frac{-3}{2}$	$\cancel{\frac{-2}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$\cancel{0}$	$\frac{1}{2}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$	....
...	$-\frac{4}{3}$	$\cancel{\frac{-3}{3}}$	$\frac{-2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\cancel{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{3}{3}}$	$\frac{4}{3}$	....
...	$\cancel{\frac{-4}{4}}$	$\frac{-3}{4}$	$\cancel{\frac{-2}{4}}$	$\frac{-1}{4}$	$\cancel{0}$	$\frac{1}{4}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{3}{4}$	$\cancel{\frac{4}{4}}$	....
⋰	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Alle rationale getallen op een rijtje

↳ aftelbaar ✓

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{-1}{2}, -1, -2, \ldots\}$$

— R aftelbaar?

↳ Neen !

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$
$\quad \| $
$\quad c$

Bewijs via contradictie

Stel dat $\mathbb{R}$ wel aftelbaar is

$\Rightarrow \exists$ bijectie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : n \longmapsto a_n$

bv
$0 \xrightarrow{a_0 =} \boxed{3}, 145123 48 \ldots$
$1 \xrightarrow{a_1 =} 0, \boxed{0}0100010 \ldots$
$2 \xrightarrow{a_1 =} 4, 4\boxed{1}34213 \ldots$
$3 \rightarrow 1, 43\boxed{0}10101 \ldots$
$4 \rightarrow 3, 500\boxed{0}0000 \ldots$
$5 \rightarrow \ldots$

Contradictie
zoek een getal die niet in lijst zit

kijk voor i-de getal
v/d rij naar het i-de cijfer
na de komma

Construeer een nieuw getal
$a = 4,1211$
door telkens 1 op te tellen

we vinden dat a nergens in de lijst voorkomt
want het kan niet gelijk zijn met a_i
i-de plaats na de komma is verschillend
$\Rightarrow$ contradictie $\square$

"Diagonaal
Argument van Cantor"

$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

↳ "over aftelbaar"

Kleine samenvatting

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

$= \mathfrak{c} \leftarrow |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

↳ overaftelbaar

is er een nieuwe verzameling?

$|\mathbb{Q}| < |..| < |\mathbb{R}|$

$\aleph_1$

$\aleph_1$ = eerst volgende kardinaliteit groter dan $> \aleph_0$

$\aleph_2 = \quad > \aleph_1$

Continue hypothese

$\aleph_1 \overset{?}{=} \mathfrak{c}$

we kunnen het niet aantonen

↳ m.a.w. je kan het niet bewijzen of ontkrachten

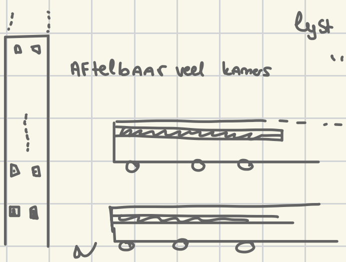
Hotel van Hilbert

↳ Hilbert : 1900 lijst 23 onopgeloste problemen

"voor de 20e eeuw"

lijst met 7 problemen vr

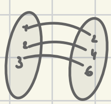
" 21e eeuw "



Aftelbaar veel kamers

dag 1 gevuld

dag 2 hoe?



kamer

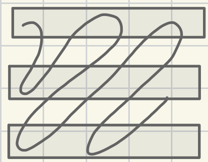
1 → 2

2 → 4

3 → 6

oneven kamers vrij

dag 3 oneindig veel bussen



bus2 2, 4, 8, 16..

bus3 3, 9, 27..

bus 7 5, 25, 12

Interval even groot als R?

$]-1, 1[$ aftelbaar / overaftelbaar?

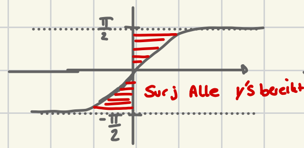
$|]-1, 1[| \stackrel{?}{=} |\mathbb{R}|$ gelijk?

$f : \mathbb{R} \to]-1, 1[\quad x \longmapsto \frac{2}{\pi} \text{Bgtan}\, x$

is bijectie

Interval even groot als $\mathbb{R}$

Bgtan



Strikt Stygend => injectief

Bereik $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{-2}[$

domein $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ is bijectie

ook Surjectief
alles wordt minstens 1 keer bereikt

Eigenschap: schröder bernstein

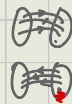
Eig:

ER bestaat een bijectie tussen A en B

$\Updownarrow$

ER bestaat een injectie $f: A \to B$
en een injectie $g: B \to A$

bv bij geen bijectie

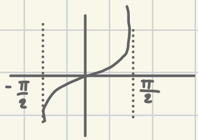


Max 1
$a \to B$
$B \to a$
domein boş kaldı
dit is een vb

bv TB: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is bijectief met $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]: x \mapsto \text{Bgtan}\,x$
is injectie

$g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}: x \mapsto x$



Strikt stygend ook injectie

dus bijectie

$\Rightarrow$ Gevraagde volgt uit Schröde-Bernstein

Eig: duivenhok principe

bijective

injective

surjective

max 1 pije

min 1 pij

Elm a = elm b