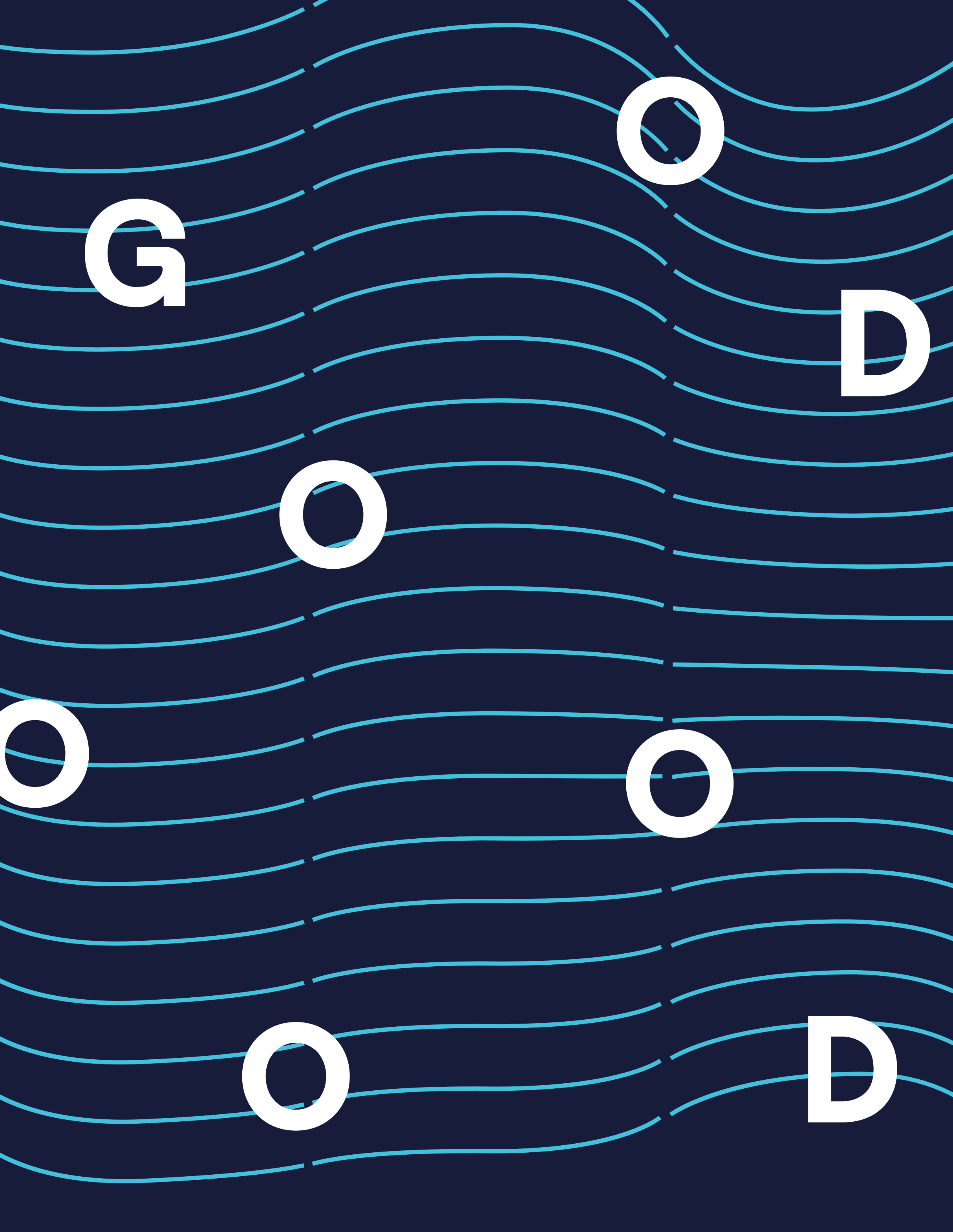

O
G
D
O
O
O
D
O

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Een Relatie R tussen A en B is
een deelverzameling tussen A en B

↳ hoe elementen VAN A verbonden met B

	1	2	4
1	•		•
2			
3		•	
4	•		

bv. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad a.b = 12$ elementen

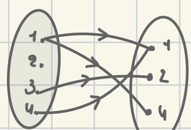
$B = \{1, 2, 4\}$ $\quad$ ↳ mogelijkheden per Relatie : 2^{12}

Alle mogelijke koppels

$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,4), \ldots, (4,4)\}$

$R = \{(1,1), (1,4), (3,2), (4,1)\}$

↳ visueel vendiagram

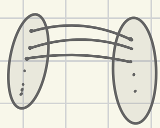


Relatie die je kent : A verzameling

Δ = diagonaal $\subset A \times A$

$= \{(a,a) \mid a \in A\}$

= ..... is gelijk aan ...



bv $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

	1	2	3	4	5
1	•				
2		•			
3			•		
4				•	
5					•

Vb ... is kleiner dan ....

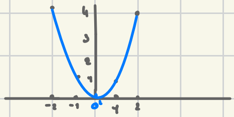
$A = \mathbb{R}$

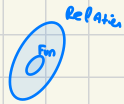
$B = \mathbb{R}$

$R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$

Vb

$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x^2 = y\}$





$R = \{(1,1), (1,4), (3,2), (4,1)\}$

bv | $1R1$ v $1R4$

Notatie $aRb \iff (a, b) \in R$

DEF $R \subset A \times B$ een relatie

$\text{dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : aRb\}$

dom van R = een A element van A, bestaat er een $b \in B$ zodat a a in Relatie staat met b

= Alle elementen uit A waar een pijl vertrekt

$\text{im}(R) = \text{Ran}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : aRb\}$

= waar pijl toekomt

Relatie

↳ deelverzamelijp van $A \times B$

↳ enige voorwoorde : een paar koppels

mag nog

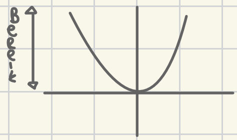
↳ Functions: mag niet

Functions

$f(x) = x^2$ parabool

↳ is een Relatie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

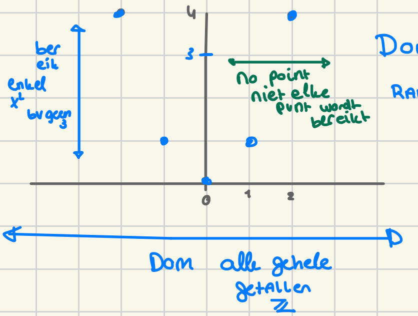


$dom(f) = \mathbb{R}$

$bereik(f) = \mathbb{R}^+$

$g(x) = x^2$ tussen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$

$g = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}$



$Dom(g) = \mathbb{Z}$

$Range(g) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{Z} : y = x^2\}$

Inverse relatie

DEF:

$R \subset A \times B$ een Relatie,

dan noemen we $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$

de inverse Relatie van R

bv

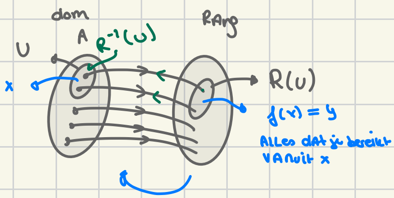
$R = \{(a,1),(c,5)\} \subset \{a,b,c\} \times \{1,2,3,4,5\}$

	1	2	3	4	5
a	•				
b					
c					•

$R^{-1} = \{(1,a),(5,6)\}$

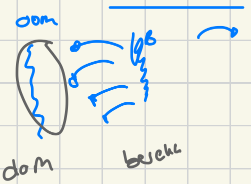
Stel $U \subset A$, R relatie van A naar B

$R(U) = \{b \in B \mid \exists a \in U \quad aRb\}$



OPM: $R(A) = \text{Range}(R)$

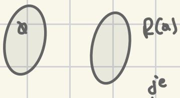
$R^{-1}(B) = \text{dom}(R)$



$f(x)$

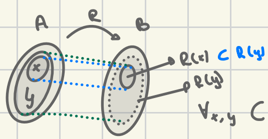
Kleine eigenschapjes

1) $R(\emptyset) = \emptyset$



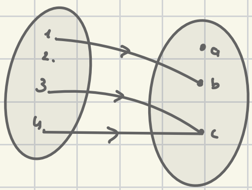
je gaat niets bereiken Als er geen pijl vertrekt

2)



$\forall_{x,y} \subset A : x \subset y \Rightarrow R(x) \subset R(y)$ Range bereik

Opm: deze pijl geldt niet in 2 Richtingen



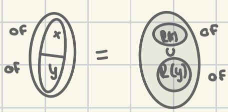
$X = \{3, 4\}$ $\quad R(x) = c$ $\quad R(x) \subset R(y) \not\Rightarrow X \subset y$

$y = \{1, 4\}$ $\quad R(y) = \{b, c\}$

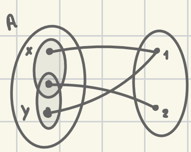
want x heeft $\underline{3}$ en 4
en y heeft $\underline{1}$ en 4 verschillend

3) $\forall_{x,y} \subset B : x \subset y \Rightarrow R^{-1}(x) \subset R^{-1}(y)$ Domein

4) $\forall_{x,y} \subset A : R(x \cup y) = R(x) \cup R(y)$



5) $\forall_{x,y} \subset A : R(x \cap y) \subset R(x) \cap R(y)$



$R(x) = \{1, 2\}$

$R(y) = \{1, 2\}$

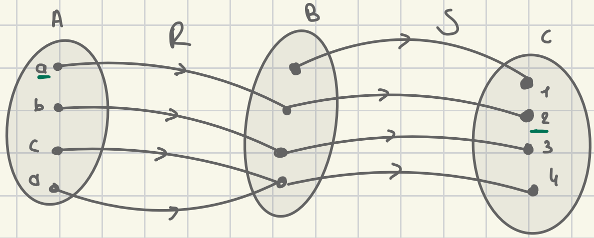
$R(y \cap x) = \{2\}$

Samenstelling van relaties

def : R relatie van A naar B $R \subset A \times B$

S " " B " C $S \subset B \times C$

$\underset{\text{na}}{S \circ R} = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B : a R b \text{ en } b R c\}$

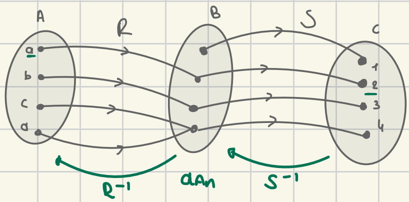


$\{(a,2), (b,3), (c,4)\}$

Kleine eigenschappen

(6) $R \subset A \times B : (R^{-1})^{-1} = R$ (inversie)

(7) $\left.\begin{matrix} R \subset A \times B \\ S \subset B \times C \end{matrix}\right\} (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ \underset{\text{first}}{S^{-1}}$ (inversie)



(8) $\left.\begin{matrix} R \subset A \times B \\ S \subset B \times C \\ T \subset C \times D \end{matrix}\right\} (\underset{3}{T} \circ \underset{2}{S}) \circ \underset{1}{R} = \underset{3}{T} \circ (\underset{2}{S} \circ \underset{1}{R})$

Olay haakje değil

olay $\circ$'nin nerde durduğu

Functies

Max 1 pijl vertrekken

↳ extra voorwaarden

iki yere Aynı anda gidemezsin

een relatie $F \subset A \times B$ noemen we een Functie als

(a) $\text{dom}(F) = A$ (uit elk element van A vertrekt minstens 1 pijl)

(b) $\forall a \in A, \forall b \in B : aFb$ en $aFb' \to b = b'$ (uit elk element van A vertrekt max 1 pijl)

(a) en (b) kunnen we samen noteren

$(a,b) \in F$

$\forall a \in A, \exists! b \in B : aFb$

(= uit elk element van A vertrekt precies 1 pijl)

Dat unieke element noemen we $F(a)$

Algemeen $F : \underbrace{A}_{\text{domein}} \to \underbrace{B}_{\text{beeld}} : \underbrace{a \longmapsto F(a)}_{\text{voorschrift}}$

Vb

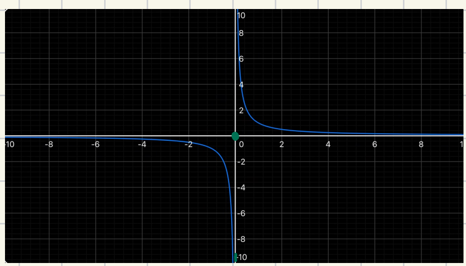
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

$g : \cancel{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$

geen Functie want 0 heeft geen beeld

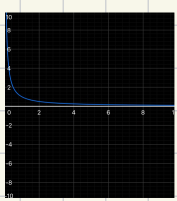
correctie

$g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

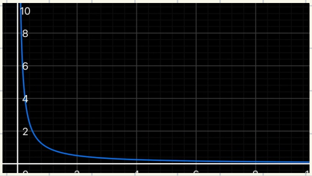


$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

domein beperkt



$h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to \frac{1}{x}$

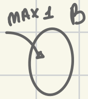


Injectiviteit

Max 1 pijl toekomen

een functie $f: A \to B$ noemen we injectief

Als er MAX 1 toekomst

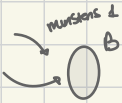


$\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

in elke $b \in B$ komt max 1 pijl toe

Surjectief

Sur baba sur

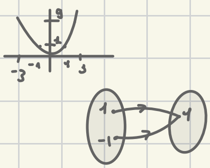


een functie $f: A \to B$ noemen we surjectief

$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

in elke $b \in B$ komt minstens 1 element toe

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{N} ; x \mapsto x^2$



Vb

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

niet injectif

9 → dubbel bereikt $x = 3 \wedge x = -3$

$f(-3) = f(3)$ maar $3 \neq -3$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

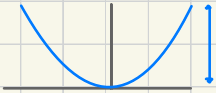
injectief

$f(x) = y$ max 1 keer bereikt

niet surjectief

niet surjectief want $\mathbb{R}_0^-$ wordt niet bereikt.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$



tum bereik

Bijectief

voordeel: omkeren

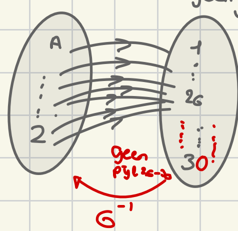
↳ injectief ∧ surjectief
= bijectief
↳ Eig: Als $f: A \to B$ een bijectieve functie is,
dan is f^{-1} ook een functie
↳ Die functie noemen we inverteerbaar
en f noemen we Inverteerbaar

Vb

$G: \{A, \dots, Z\} \to \{1, \dots, 30\}$; $G(A) = 1$
$G(B) = 2$
$\vdots$
$G(Z) = 26$

injectief mr
niet surjectief
Alle getallen worden max 1 keer
bereikt ookal zijn niet
alle getallen bereikt

Als je die omkeert
geen functie
want in je nieuw dom
niet vanuit alles
vertrekt een
pijltje



MAAR inverse
Relatie wel

(ook) Surjectief maken

bereik beperken

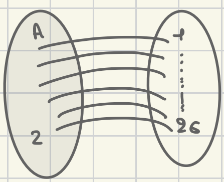
$H: \{A \dots Z\} \to \{1, \dots, 26\}$;

↓

Surjectief + injectief
bijectief

Alles wordt min 1 keer bereikt
" " max 1 " "

injectie
+
ook surjectie
=
bijectie
=
↳ inverteerbaar
Als functie
↓
Anders inverse
Relatie



ER bestaat een inverse Functie
H^{-1}

perciès 1 pijl
↳ evenveel elementen
↳ oneindige verzamelingen... ?

Bewijs injectie

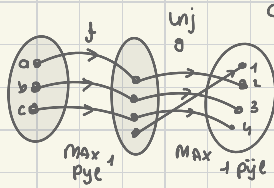
Eig: ALS $\left.\begin{array}{l} f : A \to B \\ g : B \to C \end{array}\right\}$ injectieve Functies

kort

$(f, g \text{ inj} \Rightarrow g \circ f \text{ inj})$

DAn is $g \circ f$ een injectieve functie

a+c inj



$\{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$

gegeven

f inj $\Leftrightarrow \forall a, a' \in A : f(a) = (a') \Rightarrow a = a'$

g inj $\Leftrightarrow \forall b, b' \in \ : g(b) = g(b') \Rightarrow b = b'$

TB: Samenstelling inj

$g \circ f$ inj $\Leftrightarrow \forall a, a' \in A : g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$

↳ $A \to C$

NotAtie

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

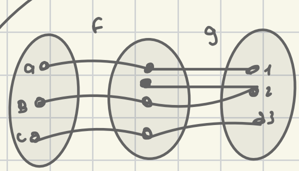
Bewijs

neem $a, a' \in A$ zodat $g(\underbrace{f(a)}_{b}) = g(\underbrace{f(a')}_{b})$

$\overset{g \text{ inj}}{\underset{f(a), f(a') \in B}{\Rightarrow}} f(a) = f(a') \overset{f \text{ inj}}{\Rightarrow} a = a'$

$\square$

Vb in de Andere richting



$\not\Leftarrow$ $g \circ f$ injectif

but g is not injective

$\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

Bewijs surjectief

Eig:

$$\left.\begin{array}{l} f: A \to B \\ g: B \to C \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ is Surjectief}$$

gegeven:

f Surj $\quad \forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

g Surj $\quad \forall c \in C, \exists b \in B : g(b) = c$

TB:

$g \circ f$ Surj $\Rightarrow \forall c \in C, \exists a \in A : g(f(a)) = c$

↳ $A \to C$

Bewijs

Neem $c \in C$ willekeurig

f: Surj $\Rightarrow \exists b \in B : g(b) = c$

g: Surj $\Rightarrow \exists a \in A : f(a) = b$

Dan is $g(b) = g(f(a)) = c$ $\quad \square$

Bewijs: neem een $c \in C$ willekeurig

$\forall b \in B : g(b) = C$

$\forall a \in A : f(a) = b$

$g(b) = g(f(x)) = c$

uit A ↳ to be a function

uit elk elm^t
VAN A vertrekt
Max 1 pijl
min 1 pijl

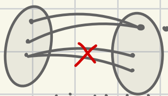
$A \xrightarrow{\text{to}} B$

inj : MAX 1

surj : min 1
↳ Afankomen

tum domein
dolmali
to be a function

Hepiniz Ayni Sinemaya gidebilir
AMA bir kişi iki yere
gidemez



ok Sinemaya iki
kişi

bir kişi iki yere
gidemez

Bewijs: g°f surj => g surj

geg:

g°f surj : $\forall_c \in C, \exists a \in A : g(f(a)) = c$

TB:

g surj: $\forall_c \in C, \exists_b \in B : g(b) = c$

Bewijs:

neem een $c \in C$ willekeurig

wat we nodig hebben is dat er $\exists_b \in B : f(b) = c$

$\overset{geg}{\Longrightarrow}$ $\exists_a \in A : g(\underline{f(a)}) = c$

noem $f(a) = b$ en je vindt dat $\exists b \in B : g(b) = c$

$\square$

Bewijs: g°f inj => f inj

$f(3) = f(3)$

g zaten Aynisi

geg:

g°F inj $\forall_{a,a'} \in A : g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$

$g(f(a))$

TB:

F surj $\forall_{a,a'} \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Bewijs:

neem een $a, a' \in A$ willekeurig zodat $f(a) = f(a')$

PAS de g toe $\Rightarrow$ $g(f(a)) = g(f(a))$ je mag bij beide leden Functie toepassen

$\overset{geg}{\Rightarrow}$ $a = a'$

Grootte van verzamelingen

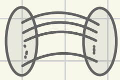
↳ = kardinaliteit

$|A| = \#$ elm^n van A = kardinaliteiten van A

A, B verzamelingen

↳ equipotent als er een bijectie bestaat tussen a en b

= heeft zelfde kardinaliteit

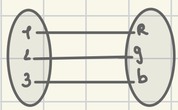


evenveel elementen
max 1 pijl toekomen
min 1 pijl toekomen

Vb

A = {1, 2, 3} | equipotent

B = {Rood, geel, blauw} | evenveel elementen



$\boxed{1 - 1 \text{ verband}}$

$\# a = \infty$

↳ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$

meer

verschillende soorten oneindigheid

elementen $\mathbb{N}$ = $|\mathbb{N}| = \aleph_0$