

Afspraken:

- Gesloten boek, enkel toegelaten: schrijfgerei en papier.
- GSM moet afgezet worden.
- Schrijf leesbaar en vermeld je naam en rolnummer op elk blad!

/2

1. Gegeven de verzameling  $V = \mathbb{N}_0$  en definieer de relatie  $R$  en  $S$  op  $V$  als volgt:

$$mRn \iff m^3 \text{ is deler van } n^2 \quad \text{en} \quad mSn \iff m^2 \text{ is deler van } n^3$$

- (a) Zijn de relaties  $R$  en  $S$  reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief?
- (b) Zijn de relaties  $R$  en  $S$  equivalentierelaties/partiële ordeningen? Geef de bijbehorende partitie (in geval van equivalentierel.) of het bijbehorende Hassediagram (in geval van part. ordening).

/2

2. Toon aan dat voor elke  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat

$$-5 \leq |x+2| - |x-3| \leq 5$$

.

/3

3. Veronderstel dat  $\alpha \in \mathbb{R}$  is zodat

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Toon aan dat voor elke  $n \in \mathbb{N}$  geldt dat

$$\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

/2

4. Hoeveel deelverzamelingen van  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  hebben geen twee opeenvolgende elementen?

/3

5. De voorraad van een lampenfabriek bestaat uit dozen met hoge kwaliteit lampen, dozen met medium kwaliteit lampen en dozen met lage kwaliteit lampen, in de respectievelijke verhouding 1 : 2 : 2. De kans dat een lamp van hoge, medium of lage kwaliteit niet voldoet aan de lichtoutputvereisten is respectievelijk 0, 0.1 en 0.2.

Een doos wordt willekeurig gekozen en 2 lampen uit die doos worden getest en blijken te voldoen aan de lichtoutputvereisten.

- (a) Wat is de kans dat die doos een doos is met hoge kwaliteitslampen?
- (b) Wat is de kans dat die doos een doos is met medium kwaliteitslampen?
- (c) Wat is de kans dat die doos een doos is met lage kwaliteitslampen?

/3

6. Een discrete randomvariabele heeft de volgende kansdichtheidsfunctie:

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 2^{-k} & k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & k \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

- (a) Wat is  $\mathbb{P}(X > 5)$  ?
- (b) Wat is  $\mathbb{P}(X \text{ is een drievoud})$  ?
- (c) Welke verdeling volgt deze  $X$ ? Geef de naam en de bijbehorende parameters.

/2

7. Gegeven de uitdrukking  $(xyz_u)_2$  is de binaire schrijfwijze van getallen uit  $\{0, 1, \dots, 15\}$ . De functie  $P$  wordt gedefinieerd als volgt.

$$P : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\} : (x, y, z, u) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{indien } (xyz_u)_2 \text{ een Fibonaccigetel is} \\ 0 & \text{indien } (xyz_u)_2 \text{ geen Fibonaccigetel is} \end{cases}$$

(beschouw 0 als een fibonaccigetel). Gebruik nu Karnaugh maps voor de volgende opgaves.

- (a) Schrijf  $P$  als som van producten van literals met zo weinig mogelijk literals.
- (b) Schrijf  $P$  als product van sommen van literals met zo weinig mogelijk literals.

/3

8. Kijk naar het recursief gedefinieerd rijtje  $(a_n)_n$ :

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} + 2^n \quad \text{als } n \geq 1$$

Gebruik genererende functies om een gesloten formule te bekomen van  $(a_n)_n$ .

*Veel succes!*