

# “Paradoxen” in de wiskunde

Stijn Symens<sup>1</sup> & Bart Windels<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universiteit Antwerpen

<sup>2</sup> Ministerie van Onderwijs

Discrete Wiskunde 2024

# De kaart-paradox

# De kaart-paradox

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is waar.

voorkant

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is niet waar.

achterkant

## De kaart-paradox

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is waar.

voorkant

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is niet waar.

achterkant

Is de zin op de voorkant een ware uitspraak is?

## De kaart-paradox

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is waar.

voorkant

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is niet waar.

achterkant

Is de zin op de voorkant een ware uitspraak is?

voorkant waar  $\implies$  achterkant waar  $\implies$  voorkant niet waar.

## De kaart-paradox

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is waar.

voorkant

De uitspraak op  
de andere kant van  
deze kaart  
is niet waar.

achterkant

Is de zin op de voorkant een ware uitspraak is?

voorkant waar  $\implies$  achterkant waar  $\implies$  voorkant niet waar.

voorkant niet waar  $\implies$  achterkant niet waar  $\implies$  voorkant waar.

## De kaart-paradox



voorkant



achterkant

Is de zin op de voorkant een ware uitspraak is?

voorkant waar  $\implies$  achterkant waar  $\implies$  voorkant niet waar.

voorkant niet waar  $\implies$  achterkant niet waar  $\implies$  voorkant waar.

**Logische paradox: kan niet waar, maar ook niet niet waar zijn**

# De onverwachte overhoring



## De onverwachte overhoring

Op vrijdagnamiddag doet de lerares wiskunde de volgende uitspraak aan haar leerlingen, die op elke dag van de week wel een uurtje wiskunde hebben:

## De onverwachte overhoring

Op vrijdagmiddag doet de lerares wiskunde de volgende uitspraak aan haar leerlingen, die op elke dag van de week wel een uurtje wiskunde hebben:

*Er zal volgende week een overhoring wiskunde zijn, maar de dag waarop die overhoring doorgaat zal een volledige verrassing zijn.*

## De onverwachte overhoring

Op vrijdagnamiddag doet de lerares wiskunde de volgende uitspraak aan haar leerlingen, die op elke dag van de week wel een uurtje wiskunde hebben:

*Er zal volgende week een overhoring wiskunde zijn, maar de dag waarop die overhoring doorgaat zal een volledige verrassing zijn.*

Conclusie van de leerlingen:

## De onverwachte overhoring

Op vrijdagnamiddag doet de lerares wiskunde de volgende uitspraak aan haar leerlingen, die op elke dag van de week wel een uurtje wiskunde hebben:

*Er zal volgende week een overhoring wiskunde zijn, maar de dag waarop die overhoring doorgaat zal een volledige verrassing zijn.*

Conclusie van de leerlingen:

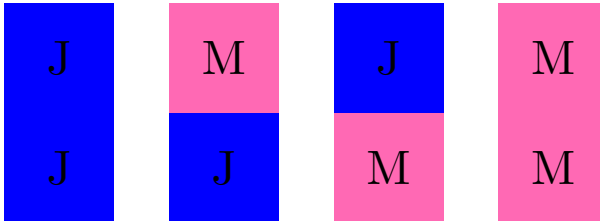
*Er is geen overhoring wiskunde.*

## De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?

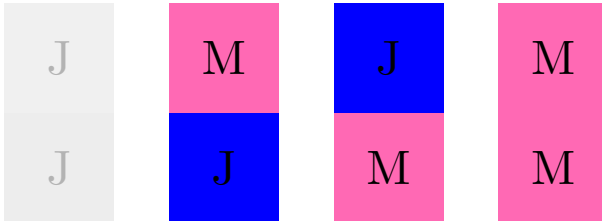
## De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?



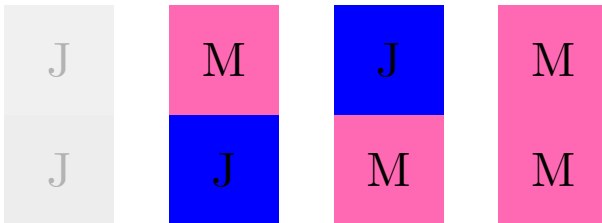
## De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?



## De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?



Kans op 2 meisjes:  $\frac{1}{3}$



## De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is die op dinsdag geboren is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?

# De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is die op dinsdag geboren is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?

## KIND 2

		MAANDAG				DINSdag				WOENSDAG				DONDERDAG				VRIJDAG				ZATERDAG				ZONDAG			
KIND 1	MA																												
	DI																												
	WO																												
	DO																												
	VR																												
	ZA																												
	ZO																												

# De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is die op dinsdag geboren is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?

## KIND 2

		MAANDAG				DINSDAG				WOENSDAG				DONDERDAG				VRIJDAG				ZATERDAG				ZONDAG			
KIND 1	MA	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	DI	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	<b>J</b>	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>	J	<b>M</b>
	WO	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	DO	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	VR	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	ZA	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	ZO	J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	<b>J</b>	<b>M</b>	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M

# De Kinderen van meneer Smith?

Meneer Smith heeft twee kinderen waarvan er ten minste één dochter is die op dinsdag geboren is. Wat is de kans dat Meneer Smith 2 dochters heeft?

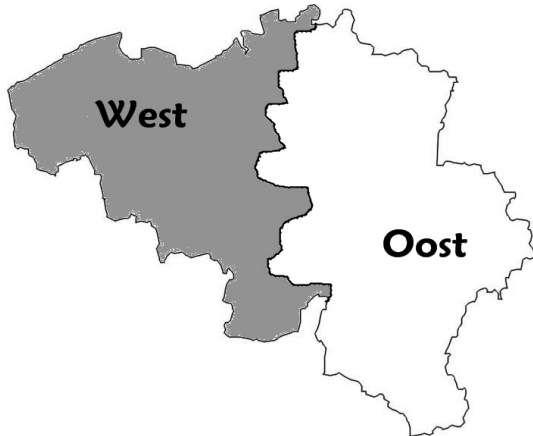
## KIND 2

		MAANDAG				DINSDAG				WOENSDAG				DONDERDAG				VRIJDAG				ZATERDAG				ZONDAG			
KIND 1	MA	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	DI	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	WO	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	DO	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	VR	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	ZA	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
	ZO	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M
		J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M	J	M

Kans op 2 meisjes:  $\frac{13}{27}$

## Beleidsbeslissing

<b>West</b>	mannen	vrouwen	<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350	actieven	1050	2100
werklozen	375	450	werklozen	225	675



# Besluit van de commissie West

<b>West</b>	mannen	vrouwen	<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350	actieven	1050	2100
werklozen	375	450	werklozen	225	675

# Besluit van de commissie West

<b>West</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350
werklozen	375	450

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1050	2100
werklozen	225	675

<b>West</b>	mannen	vrouwen
werklozen	22,73 %	33,33 %

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
werklozen	21,43 %	32,14 %

## Besluit van de commissie West

<b>West</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350
werklozen	375	450

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1050	2100
werklozen	225	675

<b>West</b>	mannen	vrouwen
werklozen	22,73 %	33,33 %

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
werklozen	21,43 %	32,14 %

**West** krijgt de meeste subsidies.



## Besluit van de commissie Oost

<b>West</b>	mannen	vrouwen	<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350	actieven	1050	2100
werklozen	375	450	werklozen	225	675

## Besluit van de commissie Oost

<b>West</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350
werklozen	375	450

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1050	2100
werklozen	225	675

<b>West</b>	allen
actieven	3000
werklozen	825

<b>Oost</b>	allen
actieven	3150
werklozen	900

## Besluit van de commissie Oost

<b>West</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350
werklozen	375	450

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1050	2100
werklozen	225	675

<b>West</b>	allen
actieven	3000
werklozen	825

<b>Oost</b>	allen
actieven	3150
werklozen	900

<b>West</b>	allen
werklozen	27,57 %

<b>Oost</b>	allen
werklozen	28,50 %

## Besluit van de commissie Oost

<b>West</b>	mannen	vrouwen
actieven	1650	1350
werklozen	375	450

<b>Oost</b>	mannen	vrouwen
actieven	1050	2100
werklozen	225	675

<b>West</b>	allen
actieven	3000
werklozen	825

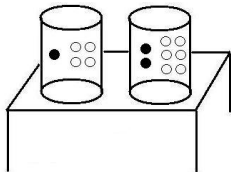
<b>Oost</b>	allen
actieven	3150
werklozen	900

<b>West</b>	allen
werklozen	27,57 %

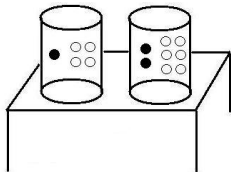
<b>Oost</b>	allen
werklozen	28,50 %

**Oost** krijgt de meeste subsidies.

# Waar is de kans op een zwarte bal het grootst?

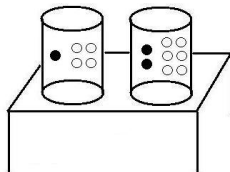


# Waar is de kans op een zwarte bal het grootst?

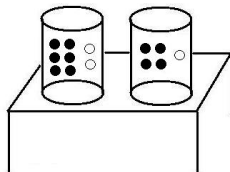


$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}$$

# Waar is de kans op een zwarte bal het grootst?

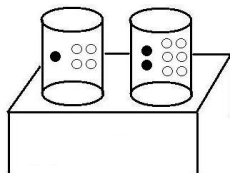


$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}$$

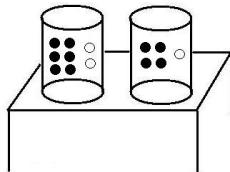


$$\frac{6}{8} < \frac{4}{5}$$

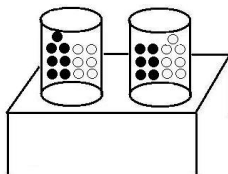
# Waar is de kans op een zwarte bal het grootst?



$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}$$

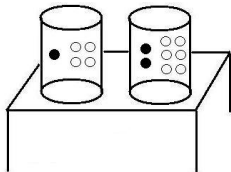


$$\frac{6}{8} < \frac{4}{5}$$

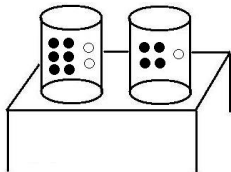




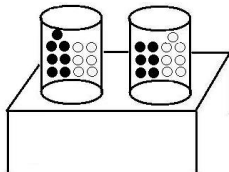
# Waar is de kans op een zwarte bal het grootst?



$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}$$



$$\frac{6}{8} < \frac{4}{5}$$



$$\frac{7}{13} > \frac{6}{13}$$

# De “paradox” van Simpson

Voor sommige gehele getallen  $a, b, c, d, A, B, C, D$  geldt dat

$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B} \quad \text{en} \quad \frac{c}{d} < \frac{C}{D}$$

én dat

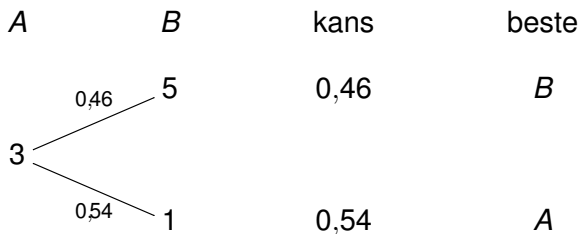
$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{A+C}{B+D}$$

# Wél een ware uitspraak

Er geldt wél dat

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

# Keuze van een geneesmiddel (1)

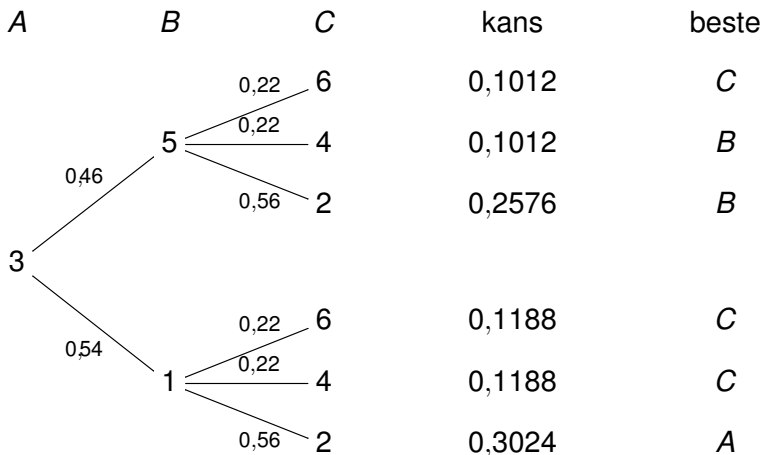


## Keuze van een geneesmiddel (1)

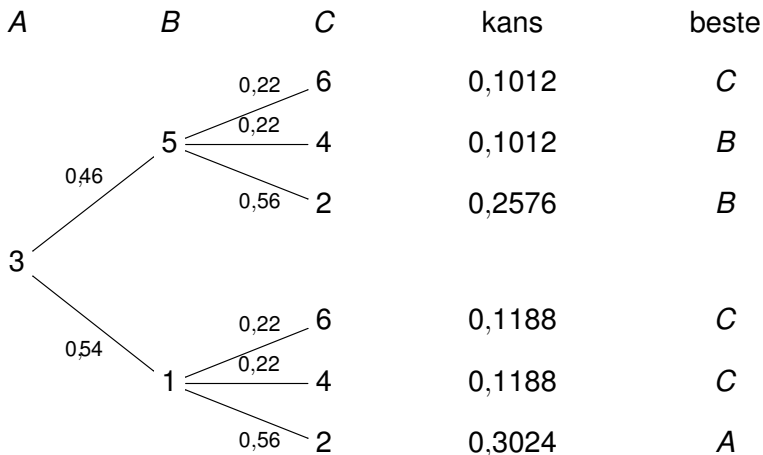
<i>A</i>	<i>B</i>	kans	beste
3	5	0,46	<i>B</i>
	1	0,54	<i>A</i>

Geneesmiddel **A** is het **beste**.

## Keuze van een geneesmiddel (2)



## Keuze van een geneesmiddel (2)



Geneesmiddel **A** is het **slechtst**.

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?



Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$P^c = \underline{\hspace{10cm}}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$P^c = \frac{1}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$P^c = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$\begin{aligned}
 P &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \\
 &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \cdot \frac{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1}{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1}
 \end{aligned}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$$\begin{aligned}
 P &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \\
 &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \cdot \frac{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1}{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1} \\
 &= 1 - \frac{365!}{365^{40} \cdot 325!}
 \end{aligned}$$

Wat is de kans dat er in een groep van 40 mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

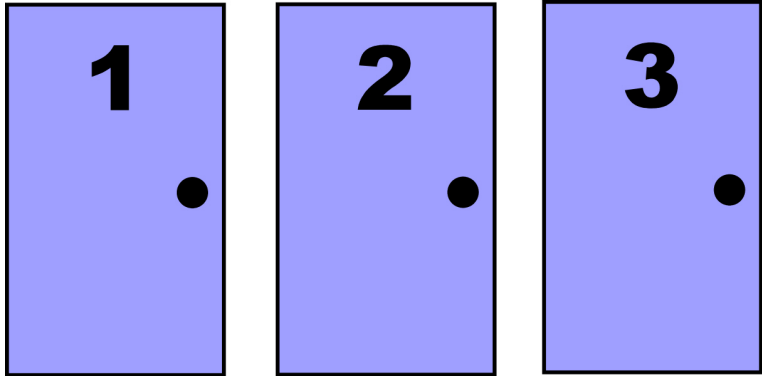
$$\begin{aligned}
 P &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \\
 &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} \cdot \frac{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1}{325 \cdot 324 \cdot \dots \cdot 1} \\
 &= 1 - \frac{365!}{365^{40} \cdot 325!} \\
 &= 0,891231809\dots
 \end{aligned}$$

Wat is de kans dat er in een groep van  $n$  mensen twee van hen dezelfde verjaardag hebben?

$n$	kans op twee dezelfde verjaardagen in een groep van $n$ personen
10	0,116948177 ...
20	0,411438383 ...
23	0,507297234 ...
30	0,706316242 ...
40	0,891231809 ...
50	0,970373579 ...
60	0,994122660 ...
100	0,999999692 ...



## Achter welke deur zit de prijs?



1 2 3