

Afspraken:

- Gesloten boek, enkel toegelaten: schrijfgerei en papier.
- GSM moet afgezet worden.
- Schrijf leesbaar en vermeld je naam en rolnummer op elk blad!
- Combinatiegetallen en e -machten hoeven niet uitgerekend worden.

/1

1. De functie f is gegeven (we noteren $2\mathbb{N}$ voor de even natuurlijke getallen):

$$f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}) : n \mapsto (2n, 2n + 1)$$

Is f injectief, surjectief, bijectief?

/2

2. Toon aan dat $\log_2 3$ een irrationaal getal is.

/2

3. Toon aan via inductie dat de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14^n$$

gehele oplossingen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ heeft voor elke $n \in \mathbb{N}$.

/2

4. Noem V de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$. Hoeveel verschillende partiële ordeningen zijn er op V (bepaal hiervoor alle mogelijke Hassediagrammen op V)?

/2

5. De verzamelingen X en Y (met $|X| = 5$ en $|Y| = 7$) zijn gegeven. Hoeveel functies $f : X \rightarrow Y$ bestaan er zodat het beeld precies 3 elementen heeft ($|\text{Im}(f)| = 3$)?

/2

6. In een lampenfabriek worden de lampen machinaal gemaakt. Aan 3% van de lampen zijn er productiefouten vastgesteld en deze worden er door de machine uitgefilterd. De lampen worden verpakt in dozen van 80 lampen. Wat is de kans dat er 85 of meer lampen gemaakt moeten worden door de machine om 1 doos te vullen?

/3

7. Veronderstel dat je de volgende informatie krijg over vakantiegangers:

- 40% checkt zijn werkemail.
- 30% gebruikt zijn smartphone.
- 25% neemt een laptop mee.
- 23% checkt zijn werkemail en gebruikt zijn smartphone.
- 51% checkt zijn werkemail niet, gebruikt geen smartphone en geen laptop mee.
- 88% van zij die een laptop meenemen checken ook hun werkemail.
- 70% van zij die een smartphone gebruiken brengen ook een laptop mee.

Wat is de kans dat iemand die zijn laptop meeneemt en zijn werkemail checkt, ook een smartphone gebruikt?

/2

8. $(xyz_u)_2$ is de binaire schrijfwijze van getallen uit $\{0, 1, \dots, 15\}$. De functie P wordt gedefinieerd door

$$P : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\} : (x, y, z, u) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{indien } 9 \leq (xyz_u)_2 \leq 14 \\ 0 & \text{indien niet} \end{cases}$$

Gebruik nu Karnaugh maps voor de volgende opgaves.

- Schrijf P als som van producten van literals met zo weinig mogelijk literals.
- Schrijf P als product van sommen van literals met zo weinig mogelijk literals.

/1

9. Wat is de genererende functie van de positieve oneven getallen ($a_0 = 1, a_1 = 3, \dots$)? Geef voor deze genererende functie een korte schrijfwijze.

/3

10. Een moestuinier wil op zijn veld een rij groenten planten. Hij start links en plant mooi op een rijtje eerst de knolgewassen (voor elk plantje kiest hij uit een ui, een look of een wortel), dan plant hij de bladgewassen (voor elk plantje kiest hij uit een salade of een selder), en dan uiterst rechts de peulgewassen (voor elk plantje kiest hij uit een snijboon, een sperzieboon of een erwt).

- Geef een genererende functie waarvan de coëfficiënt bij x^n bepaalt op hoeveel manieren hij zo een rij van n knolgewasplantjes kan maken. Doe hetzelfde voor de bladgewassen en voor de peulgewassen.
- Combineer deze drie genererende functies tot een genererende functie waarvan de coëfficiënt bij x^n bepaalt op hoeveel manieren hij zo een rij van n gewassen kan maken op bovenstaande manier.
- Zoek voor de coëfficiënten uit (b) ook een gesloten formule?

Veel succes!