Eerste Bachelor Informatica
Taak 2 oplossingen
28 november 2024
Discrete Wiskunde

/3

1. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil.$$

Bewijs je bewering.

Oplossing: Dit geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$. We kunnen immers elke $x \in \mathbb{R}$ schrijven als

$$x = 4v + g(x) \text{ met } v \in \mathbb{Z} \text{ en } 0 < g(x) \leq 4$$

We onderscheiden 2 gevallen:

- $\boxed{0 < g(x) \leq 2}$ *Dan is, met $x = 4v + g(x)$,*
  LL: $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2v+1}{2} \right\rceil = v + 1$
  RL: $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = v + 1$
- $\boxed{2 < g(x) \leq 4}$ *Dan is, met $x = 4v + g(x)$,*
  LL: $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2v+2}{2} \right\rceil = v + 1$
  RL: $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = v + 1$

/2

2. (Examen januari 2023) Toon aan dat er geen enkel rationaal getal x is dat voldoet aan

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0.$$

Oplossing: Veronderstel dat $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ wel een rationale oplossing heeft. Neem $x = \frac{a}{b}$ als een rationale oplossing met $a, b \in \mathbb{Z}_0$ en $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$. Dan is

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 + \left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = 0.$$

Vermenigvuldigen we alles met b^5, dan wordt deze vergelijking

$$a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + b^5 = 0.$$

Nu doen we gevalsonderscheiding op de pariteit van a en b:

- $\boxed{a, b \text{ oneven}}$ *a^5, $a^4 b$, $a^3 b^2$, $a^2 b^3$ en b^5 zijn allen oneven en bijgevolg de som oneven.*

- $\boxed{a \text{ even, } b \text{ oneven}}$ *a^5, a^4b, a^3b^2 en a^2b^3 zijn even, b^5 is oneven en bijgevolg is de som oneven.*
- $\boxed{a \text{ oneven, } b \text{ even}}$ *a^5 is oneven, a^4b, a^3b^2, a^2b^3 en b^5 zijn even en bijgevolg is de som oneven.*
- $\boxed{a, b \text{ even}}$ *Deze situatie kan niet voorkomen aangezien* $\mathrm{ggd}(a,b) = 1$.

In geen enkel geval kan de som dus gelijk zijn aan nul en we vinden een contradictie. De veronderstelling dat er een rationale oplossing is, is dus foutief.

/3

3. Veronderstel dat $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ een oplossing is van $x^2 + y^2 = z^2$.

   Toon aan dat van de drie getallen x, y en z er minstens 1 deelbaar is door 3, er minstens 1 deelbaar is door 4 en er minstens 1 deelbaar is door 5.
   Oplossing: We lossen de drie gevallen apart op.

   - ***Deelbaarheid door 3**: We kijken naar de kwadraten modulo* 3. *Deze is steeds* 0 *of* 1.

$a \pmod 3$	$a^2 \pmod 3$
0	0
1	1
2	1

     $\Longrightarrow$

x^2	y^2	$x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

     Het laatste geval kan niet voorkomen, want dan zou $z^2 \equiv 2 \pmod 3$ *zijn, maar dat kan niet voor een kwadraat. In de drie andere gevallen is er minstens* 1 *kwadraat* $0 \pmod 3$ *en dus is* x, y *of* z *een drievoud.*

   - ***Deelbaarheid door 4**: We kijken naar de kwadraten modulo* 4. *Deze is steeds* 0 *of* 1.

$a \pmod 4$	$a^2 \pmod 4$
0	0
1	1
2	0
3	1

     $\Longrightarrow$

x^2	y^2	$x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

     Het laatste geval kan niet voorkomen, want dan zou $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ *zijn, maar dat kan niet voor een kwadraat. In de drie andere gevallen is er minstens* 1 *kwadraat* $0 \pmod 4$ *en dus is* x^2, y^2 *of* z^2 *een viervoud. Helaas volgt daar niet uit dat* x, y *of* z *een viervoud is (kan ook* $2 \pmod 4$ *zijn). We zoeken hier dus een andere methode. Daarom kunnen we hier* $\pmod 8$ *kijken. De kwadraten* $\pmod 8$ *zou dan achtereenvolgens:* $0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1$. *Stel nu dat er geen viervoud bij* x, y *en* z *zit, dan krijgen we dat* x^2, y^2 *en* z^2 *steeds* $\equiv 1$ *of* $4 \pmod 8$. *Dan is het linkerlid* 2, 5 *of* 0 *en het rechterlid* 1 *of* 4. *Dat is onmogelijk en toont aan dat er steeds een viervoud bij moet zijn.*

- ***Deelbaarheid door 5***: *We kijken naar de kwadraten modulo* 5*. Deze is steeds* 0, 1 *of* 4.

$a \pmod 5$	$a^2 \pmod 5$
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

$\Longrightarrow$

x^2	y^2	x^2+y^2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
0	4	4
4	0	4
1	4	0
4	1	0
1	1	2
4	4	3

Het laatste 2 gevallen kunnen niet voorkomen, want dan zou $z^2 \equiv 2$ *of* $3 \pmod 5$ *zijn, maar dat kan niet voor een kwadraat. In de zeven andere gevallen is er minstens* 1 *kwadraat* $0 \pmod 5$ *en dus is* x, y *of* z *een vijfvoud.*

/2

4. (Examen januari 2022) Toon aan via inductie dat

$$3^{2n+2} + 8n - 9$$

deelbaar is door 16 voor elk natuurlijk getal n.

Oplossing: We bewijzen dit via inductie naar n*: Het basisgevallen* $n = 0$ *is onmiddellijk bewezen:*

$$3^2 + 8 \cdot 0 - 9 = 0 \text{ is deelbaar door } 16.$$

Veronderstel nu dat $16 | 3^{2k+2} + 8k - 9$ *(IH). Dan is*

$$\begin{aligned} 3^{2k+4} + 8(k+1) - 9 &= 9 \cdot 3^{2k+2} + 8k + 8 - 9 \\ &= \underbrace{8 \cdot \underbrace{3^{2k+2}}_{\textit{oneven}}}_{16\textit{voud}+8} + \underbrace{3^{2k+2} + 8k - 9}_{\textit{(IH): deelbaar door } 16} + 8 \\ &= 16k + 8 + 16l + 8 \quad \textit{voor zekere } k, l \in \mathbb{N}. \\ &= 16(k + l + 1) \quad \textit{voor zekere } k, l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

We vinden dus dat $3^{2k+4} + 8(k+1) - 9$ *deelbaar is door* 16 *en het inductiebewijs is volledig.*

/4

5. Het rijtje $(u_n)_n$ wordt gedefinieerd door

$$u_1 = 3, u_2 = 5, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} (n \geq 3).$$

Geef een algemene formule voor u_n en bewijs die formule via inductie.

Oplossing: De eerste termen van de rij zijn

$$3, 5, 9, 17, 33, 65, \ldots$$

We kunnen vermoeden dat de rij van de vorm $u_n = 2^n + 1$.
(We hadden hiervoor ook de geziene techniek kunnen gebruiken uit de les. De recursievergelijking herleidt zich dan tot $x^2 - 3x + 2 = 0$ met 1 en 2 als oplossingen. We kunnen dus vermoeden dat de formule van de vorm $u_n = \alpha 2^n + \beta 1^n = \alpha 2^n + \beta$. Invullen van de eerste twee termen geeft het stelsel

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta \\ 5 = 4\alpha + \beta \end{cases}$$

met als oplossing $\alpha = 1$ en $\beta = 1$.)
Dan geven we nog een bewijs via volledige inductie naar n. Indien $n = 1$ klopt de formule want $3 = 2^1 + 1$, indien $n = 2$ klopt de formule want $5 = 2^2 + 1$. Laten we nu veronderstellen dat de formule klopt voor $n \leq k$ voor een gegeven $k \geq 2$ (IH). Dan is

$$u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1} \stackrel{(IH)}{=} 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2^{k+1} + 1.$$

$\square$

/3

6. (Examen augustus 2024) Toon aan dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Oplossing: We bewijzen dit via inductie naar n.
Stel $n = 1$:

$$LL = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$
$$RL = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

IH: Stel nu dat $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}$. (dit is geval $n = k$).
Dan is

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &\stackrel{IH}{=} \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{(k+3) - 2}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{k+1}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+2)(k+3)} \end{aligned}$$

en dat toont het geval $n = k + 1$ aan. Hiermee is de eigenschap bewezen via inductie.

/3

7. (Examen januari 2022) In een ondoorzichtige zak zit een bal. Hiervan is geweten dat deze met 50% kans blauw is en met 50% kans rood is.

   (a) We steken er nog een rode bal bij. Dan trekken we een willekeurige bal uit de zak. Deze blijkt rood te zijn. Wat is de kans dat de bal die dan nog in de zak zit ook een rode bal is?

   (b) We steken de rode bal terug in de zak. Dan trekken we opnieuw een willekeurige bal uit de zak. Deze blijkt opnieuw rood te zijn. Wat is nu de kans dat de bal die dan nog in de zak zit ook een rode bal is?

Oplossing: Noem A de gebeurtenis dat de startbal in de zak rood is. $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.
Noem B de gebeurtenis dat we een rode bal trekken bij trekking 1. $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(B|A) = 1$, $\mathbb{P}(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}$.
Noem C de gebeurtenis dat we een rode bal trekken bij trekking 1 *en* 2. $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(C|A) = 1$, $\mathbb{P}(C|\overline{A}) = \frac{1}{4}$.

(a) Volgens de regel van Bayes vinden we:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

(b) Ook Volgens de regel van Bayes vinden we:

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}.$$

/3

8. (bonusvraag) 11 strikt positieve gehele getallen, waarvan de som 30 is, worden op een cirkel geplaatst. Toon aan dat het altijd mogelijk is om een aantal getallen te vinden die aaneengesloten op de cirkel liggen zodat de som van deze getallen 20 is.

Oplossing: Noem de 11 *getallen* $a_1, \ldots, a_{11}$ *en bereken de* 11 *partieelsommen:*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_{11} &= a_1 + \ldots + a_{11} \end{aligned}$$

Van de 11 *getallen* s_1 *tot* s_{11} *hebben er (minimum) 2 dezelfde rest bij deling door 10 (DHP). Noem* s_j *de grootste van de twee en* s_i *de kleinste van deze twee. Dan is* $s_j - s_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$ *deelbaar door 10. Daardoor moet* $a_{i+1} + \ldots + a_j = 10$ *of* $a_{i+1} + \ldots + a_j = 20$. *Indien deze som* $= 20$, *dan zijn* a_{i+1} *tot* a_j *de gezochte getallen. Indien deze som* $= 10$, *laat je* a_{i+1} *tot* a_j *weg (en heeft het complement som* 20*).*