Eerste Bachelor Informatica
Taak 3 Oplossingen
12 december 2024
Discrete Wiskunde

1. *examen januari 2024.*

/3

Hoeveel permutaties van de letters "M, A, T, H, I, S, F, U, N" zijn er zodat geen van de woorden "MATH", "IS", en "FUN" in voorkomen?

Oplossing: We noteren

$$\begin{aligned}\Omega &= \textit{alle permutaties}\\ A &= \textit{permutaties met ``MATH'' in}\\ B &= \textit{permutaties met ``IS'' in}\\ C &= \textit{permutaties met ``FUN'' in}\end{aligned}$$

Dan is

$$\begin{aligned}A \cap B &= \textit{permutaties met ``MATH'' en ``IS'' in}\\ B \cap C &= \textit{permutaties met ``IS'' en ``FUN'' in}\\ A \cap C &= \textit{permutaties met ``MATH'' en ``FUN'' in}\\ A \cap B \cap C &= \textit{permutaties met ``MATH'', ``IS'' en ``FUN'' in}\end{aligned}$$

Om $|A|$ te berekenen kunnen we tijdelijk "MATH" als 1 letter beschouwen, zodat we 6 letters moeten permuteren. Dat levert ons uiteindelijk $|A| = 6!$. Zo vinden we analoog de aantallen in alle verzamelingen:

$$\begin{array}{llll} |\Omega| = 9! & |A| = 6! & |A \cap B| = 5! & |A \cap B \cap C| = 3! \\ & |B| = 8! & |B \cap C| = 6! & \\ & |C| = 7! & |A \cap C| = 4! & \end{array}$$

Het aantal dat we willen bepalen is dan

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}|.$$

(Deze gelijkheid is een versie van de wet van De Morgan.) We kunnen nu de complementformule en het inclusie-exclusie-principe gebruiken:

$$\begin{aligned}|\overline{A \cup B \cup C}| &= |\Omega| - |A \cup B \cup C|\\ &= |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|\\ &= 9! - 6! - 8! - 7! + 5! + 6! + 4! - 3!\\ &(= 317658)\end{aligned}$$

2. *examen augustus 2024.*

/2

Een ijssalon biedt 8 verschillende smaken ijs aan: vanille, chocolade, aardbei, banaan, mango, pistache, framboos en kokos. In een gulzige bui wil je een ijsje kiezen met 5 bollen, waarbij het ijsje minstens 3 verschillende smaken moet bevatten.

Op hoeveel verschillende manieren kun je zo'n ijsje samenstellen? (De volgorde van de bollen maakt niet uit.)

Oplossing:
Methode 1: rechtstreeks

- *Bij 5 verschillende smaken zijn er* $\binom{8}{5} = 56$ *mogelijkheden.*
- *Bij 4 verschillende smaken kiezen we 1 smaak (uit* 8*) met 2 bollen en dan nog 3 smaken uit de overige 7 smaken (waar we 1 bol van nemen) Dat zijn* $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{3} = 8 \cdot 35 = 280$ *mogelijkheden.*
- *Bij 3 verschillende smaken zijn er 2 opties:*
  - *we kiezen 1 smaak (uit* 8*) met 3 bollen en dan nog 2 smaken uit de overige 7 smaken (waar we 1 bol van nemen) Dat zijn* $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2} = 8 \cdot 21 = 168$ *mogelijkheden.*
  - *we kiezen 2 smaken (uit* 8*) met 2 bollen en dan nog 1 smaak uit de overige 6 smaken (waar we 1 bol van nemen) Dat zijn* $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{1} = 28 \cdot 6 = 168$ *mogelijkheden.*

In totaal krijgen we zo $56 + 280 + 168 + 168 = 672$ *mogelijke ijsjes.*

Methode 2: via het complement
Voor het totaal aantal ijsjes moet je 5 smaken kiezen uit 8*, herhaling mag en de volgorde is niet van belang. Dit is een herhalingscombinatie. Je kan dus in totaal* $\overline{C}_8^5 = \binom{12}{7} = 792$ *keuzes maken.*
Hiervan trekken we de keuzes af waarbij 1 smaak wordt gebruikt of 2 smaken worden gebruikt:

- *Voor 1 smaak zijn er* 8 *mogelijkheden.*
- *Voor 2 smaken zijn er* $8 \cdot 7 = 56$ *mogelijkheden als je* $4 + 1$ *bol kiest en* $8 \cdot 7 = 56$ *mogelijkheden als je* $3 + 2$ *bollen kiest.*

Dat zijn in totaal $8 + 56 + 56 = 120$ *"slechte gevallen". Daarom krijgen we*

$$792 - 102 = 672 \textit{ mogelijke smaken}.$$

3. *examen september 2017.*

/3

Op een huwelijk zijn er 30 gasten en 3 tafels van 10 personen. Op hoeveel manieren kunnen we hen in 3 groepen van 10 splitsen zodat Jos niet bij Janne aan tafel zit en Luc niet bij Louise aan tafel zit. (De volgorde van de groepen maakt dus niet uit, de plaats aan de tafel ook niet).

Oplossing: Er zijn verschillende oplossingsmethode, we werken er hier enkele uit.
Oplossing 1: We tellen alle mogelijkheden om de gasten in 3 groepen van 10 te verdelen en dan trekken we daar de slechte mogelijkheden van af: diegene waar Jos bij Janne zit of Luc bij Louise zit. Notatie:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\textit{alle configuraties}\}\\
A &= \{\textit{configuraties waar Jos bij Janne zit}\}\\
B &= \{\textit{configuraties waar Luc bij Louise zit}\}\\
A \cap B &= \{\textit{configuraties waar Luc bij Louise zit en Jos bij Janne zit}\}\\
A \cup B &= \{\textit{configuraties waar Luc bij Louise zit of Jos bij Janne zit}\}
\end{aligned}$$

We veronderstellen dat de volgorde van de tafels niet van belang is (daarom moeten we steeds delen door $3!$*). Dan krijgen we:*

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \frac{30!}{10!10!10!3!}\\
|A| &= 3\frac{28!}{10!10!8!3!}\\
|B| &= 3\frac{28!}{10!10!8!3!}\\
|A \cap B| &= 3\frac{26!}{10!10!6!3!} + 3!\frac{26!}{10!8!8!3!}\\
|A \cup B| &= \frac{28!}{10!10!8!} - \left(\frac{26!}{10!10!6!2} + \frac{26!}{10!8!8!}\right)
\end{aligned}$$

En dus vinden we als eindresultaat:

$$\frac{30!}{10!10!10!3!} - \frac{28!}{10!10!8!} + \frac{26!}{10!10!6!2} + \frac{26!}{10!8!8!} = 440\ 555\ 300\ 900$$

Oplossing 2: We gaan ervan uit dat Jos in groep 1 zit en Janne in groep 2. Dan zijn er $V_3^2 = 6$ *manieren om Luc en Louise in de 3 groepen te plaatsen zodat Luc niet bij Louise zit:*

Jos	*Janne*	
Luc	*Louise*	
Louise	*Luc*	
Luc		*Louise*
Louise		*Luc*
	Luc	*Louise*
	Louise	*Luc*

In de eerste 2 gevallen moeten de 26 overige gasten verdeeld worden over groepen van 8, 8 *en* 10. *In de laatste 4 gevallen moeten de 26 overige gasten verdeeld worden over groepen van* 8, 9 *en* 9. *Het totaal aantal mogelijke tafelverdelingen wordt dus*

$$2\frac{26!}{8!8!10!} + 4\frac{26!}{8!9!9!} = 440\ 555\ 300\ 900$$

4. *examen september 2021.*

/3

Het salaris van een professor aan de Universiteit Antwerpen is normaal verdeeld. Veronderstel dat 25% van de professoren een salaris heeft van minder dan $60\ 000$ euro en 25% van de professoren een salaris heeft van meer dan $100\ 000$ euro. Wat is dan de kans dat een professor een salaris heeft van tussen $50\ 000$ en $60\ 000$ euro?

Oplossing: We hebben hier een variabele $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, *waarbij* μ *en* σ *nog onbekend zijn. Verder weten we uit de opgave dat*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X > 100\ 000) = 0{,}25 \\ \mathbb{P}(X < 60\ 000) = 0{,}25 \end{cases}$$

Omgezet naar Z*-scores levert dit*

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{100\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \\ \Phi\left(\frac{60\,000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \end{cases}$$

Uit de tabel van de normale verdeling halen we dan dat

$$\begin{cases} \frac{100\,000-\mu}{\sigma} = 0{,}675 \\ \frac{60\,000-\mu}{\sigma} = -0{,}675 \end{cases}$$

Waarna we na optellen komen tot $160\,000 - 2\mu = 0$ *en dus* $\mu = 80\,000$. *Hieruit kunnen we ook* σ *berekenen, maar omdat we in het vervolg vooral* $\frac{1}{\sigma}$ *nodig hebben, onthouden we*

$$\frac{20\,000}{\sigma} = 0{,}675.$$

De gevraagde kans is dan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(50\,000 \leq X \leq 60\,000) &= \mathbb{P}\left(-\frac{30\,000}{\sigma} \leq Z \leq -\frac{20\,000}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{-\frac{3}{2}\cdot 0{,}675}_{-1{,}0125} \leq Z \leq -0{,}675\right) \\
&= \mathbb{P}\left(0{,}675 \leq Z \leq 1{,}0125\right) \\
&= \Phi(1{,}0125) - \Phi(0{,}675) = 84{,}5\% - 75\% = 9{,}5\%.
\end{aligned}$$

/3

5. *examen januari 2020.*

Laten we in deze vraag ervan uitgaan dat het geboortegewicht van Vlaamse baby's verdeeld is volgens een normale verdeling met gemiddelde 3400 gram en standaardafwijking van 500 gram. De baby's worden in 3 categorieën verdeeld:

- Baby's met laag geboortegewicht (< 2500g).
- Baby's met normaal geboortegewicht (tussen 2500g. en 4500g).
- Baby's met hoog geboortegewicht (> 4500g).

Bij de baby's met een laag geboortegewicht zijn er 46% jongens, bij die met een normaal geboortegewicht zijn er dat 51%, en bij die met een hoog geboortegewicht zijn dat er 71%.
Als er een jongen geboren wordt, wat is dan de kans dat hij een hoog geboortegewicht heeft?

Oplossing: We bepalen eerst de kansen dat kinderen een laag, normaal of hoog geboortegewicht hebben. Daarom zetten we eerst alles om naar een Z-score en dan gebruiken we *onder andere de tabel om dit op te lossen.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{laag}) &= \mathbb{P}\left(Z < \frac{2500-3400}{500}\right) = \mathbb{P}(Z < -1{,}8) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z < 1{,}8) = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359 \\
\mathbb{P}(\text{normaal}) &= \mathbb{P}\left(\frac{2500-3400}{500} < Z < \frac{4500-3400}{500}\right) \\
&= \mathbb{P}(-1{,}8 < Z < 2{,}2) = \mathbb{P}(Z < 2{,}2) - \mathbb{P}(Z < 1{,}8) \\
&= 0{,}9861 - 0{,}0359 = 0{,}9502 \\
\mathbb{P}(\text{hoog}) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{4500-3400}{500}\right) = \mathbb{P}(Z > 2{,}2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Z < 2{,}2) = 1 - 0{,}9861 = 0{,}0139 \\
\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{laag}) &= 0{,}46 \\
\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{normaal}) &= 0{,}51 \\
\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{hoog}) &= 0{,}71
\end{aligned}$$

Dan zegt de regel van Bayes:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{hoog} \,|\, \text{jongen}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{hoog})\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{hoog})}{\mathbb{P}(\text{laag})\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{laag}) + \mathbb{P}(\text{normaal})\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{normaal}) + \mathbb{P}(\text{hoog})\mathbb{P}(\text{jongen} \,|\, \text{hoog})} \\
&= \frac{0{,}0139 \cdot 0{,}71}{0{,}0359 \cdot 0{,}46 + 0{,}9502 \cdot 0{,}51 + 0{,}0139 \cdot 0{,}71} \\
&= 0{,}0193
\end{aligned}$$

/3

6. *examen augustus 2018.*

   Een weverij maakt stof aan op rol. De wever weet dat er fouten gebeuren in het productieproces aan een gemiddelde van 2 fouten per 15 meter. (Poisson-verdeling)

   (a) Wat is de kans dat er precies 4 fouten gebeuren in de een stuk stof van 15 meter lang.

   (b) Wat is de kans dat er precies 10 of meer fouten gebeuren in de een stuk stof van 60 meter lang?

(c) Een handelaar koopt een grote hoeveelheid van de stof aan en verkoopt deze terug in stukken van x meters. Het kiest x zó dat de kans dat er geen fouten zijn in een stuk precies gelijk is aan 80%. Bepaal x.

Oplossing:

(a) $X \sim P(2)$. *Dan is* $\mathbb{P}(X=4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = e^{-2}\frac{2}{3} \approx 0.09$.

(b) De som van 4 Poissonverdeelde variabelen is terug Poissonverdeeld met als gemiddelde de som van de gemiddelden. Daarom krijgen we $Y \sim P(8)$. *Dan is*

$$\mathbb{P}(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \mathbb{P}(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} e^{-8}\frac{8^k}{k!} = 1 - e^{-8}\sum_{k=0}^{9}\frac{8^k}{k!} \approx 0.2834$$

.

(c) We zoeken nu de juiste λ, *en vermenigvuldigen daarna met* $\frac{15}{2}$ *om de juiste* x *te vinden.*

$$\frac{4}{5} = \mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad -\lambda = \ln\frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{15}{2}\ln\frac{5}{4} \approx 1.67 \textit{ meter}$$

7. *examen januari 2022.*

/3

Ik gooi 450 keer met een zuivere dobbelsteen en tel het aantal keer dat ik een 5 of een 6 gooi.

Wat is de kans dat dit aantal tussen 130 en 140 ligt (130 en 140 inclusief)? Gebruik hiervoor de normale verdeling.

Oplossing: De zoeken voor een binomiale toevalsveranderlijke $X \sim B(450, \frac{1}{3})$ *hoeveel de kans* $\mathbb{P}(130 \leq X \leq 140)$. *Hiervoor benaderen we met een normaalverdeelde variabele* X'*:*

$$\mu = np = 450 \cdot \frac{1}{3} = 150 \quad \textit{en} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{450 \cdot \frac{1}{3}\frac{2}{3}} = 10 \quad \textit{dus} \quad X' \sim N(150, 10)$$

We voeren bij de grenzen een continuïteitscorrectie in:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(130 \leq X \leq 140) &= \mathbb{P}(129{,}5 \leq X' \leq 140{,}5) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{129{,}5 - 150}{10} \leq Z \leq \frac{140{,}5 - 150}{10}\right) \\
&= \Phi(-0{,}95) - \Phi(-2{,}05) \\
&\overset{S}{=} \Phi(2,05) - \Phi(1{,}95) \\
&\overset{T}{=} 0{,}9798 - 0{,}8289 = 0{,}1509,
\end{aligned}$$

waarbij ik onderweg de symmetrie (S) van de normale verdeling en de tabel (T) van de normale verdeling heb gebruikt.