Eerste Bachelor Informatica
examen
11 januari 2016
Discrete Wiskunde

Afspraken:

- Gesloten boek, enkel toegelaten: schrijfgerei en papier.
- GSM moet afgezet worden.
- Schrijf leesbaar en vermeld je naam en rolnummer op elk blad!

/3

1. Gegeven de functies f en g

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : n \longmapsto (|n|, (-1)^n|n|) \qquad g : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (n, m) \longmapsto m^n$$

Geef aan of $f, g, f \circ g, g \circ f$ injectief en/of surjectief zijn. Motiveer je antwoord!

/3

2. $A = \{\text{de positieve delers van } 18\}$.

   (a) Hoeveel relaties op A zijn er die zowel antisymmetrisch als reflexief zijn?

   (b) Hoeveel relaties op A zijn equivalentierelatie?

/2

3. Bewijs dat de vergelijking

$$a^2 - 15b^4 = 3$$

geen enkele oplossing $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ heeft.

/3

4. Noem voor elke $n \geq 2$

$$A_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}.$$

   (a) Bereken $A_2, A_3, A_4, \ldots$ en probeer hieruit een gesloten formule te ontdekken voor A_n.

   (b) Bewijs deze formule via inductie.

/3

5. Bij een groot aantal ziekenhuispatiënten werd nagegaan of ze leden aan diabetes en werd bovendien de bloeddruk gemeten. In deze populatie had 10% diabetes en 25% een hoge bloeddruk. Bij diabetespatiënten had 85% een hoge bloeddruk.

   (a) Bepaal de kans op hoge bloeddruk bij niet-diabetici.

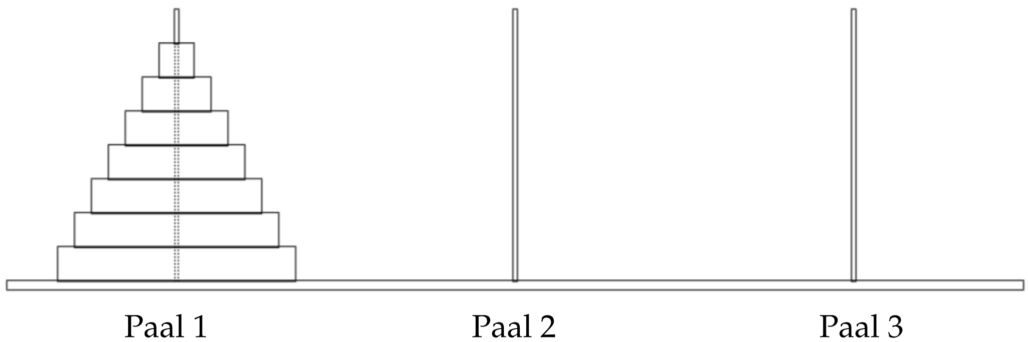
   (b) Bepaal de kans dat een patïent diabetes heeft indien de bloeddruk hoog is.

/2

6. Telefoontjes bereiken een secretaresse binnen ons bedrijf op een willekeurige manier en onafhankelijk van elkaar. Deze secretaresse krijgt gemiddeld 4 telefoontjes van binnen het bedrijf per uur. Bovendien krijgt deze secretaresse ook gemiddeld 2 telefoontjes van buiten het bedrijf per uur. Wat is de kans dat deze secretaresse de laatste 5 minuten meer dan twee telefoontjes heeft gehad?

/4

7. Een minder gekende variant van de torens van Hanoi is de gelijkaardige puzzel van Sheboygan. Het begint met 3 palen en n schijven van verschillende grootte, van groot naar klein gestapeld, net zoals bij de torens van Hanoi (zie figuur).



Het doel van de puzzel is alle schijven te verplaatsen van paal 1 naar paal 2 volgens de volgende regels:

- Je mag enkel de bovenste schijf van een paal verplaatsen en bovenop de volgende paal leggen (volgende in de zin dat paal 2 na paal 1 komt, paal 3 na paal 2 komt en paal 1 na paal 3 komt). Een schijf van paal 3 kan dus niet rechtstreeks naar paal 2 verplaatst worden.
- Een grotere schijf mag nooit op een kleinere schijf liggen.

Een mogelijke manier om de Sheboygan puzzel op te lossen wordt recursief bepaald: Om een stapel van n schijven naar de volgende paal te verplaatsen, verplaats je eerst de bovenste $n-1$ schijven naar paal 2 en dan naar paal 3. Daarna verplaats je de grootste schijf naar paal 2. Uiteindelijk verplaats je dan de $n-1$ schijven van paal 3 terug twee keer tot je deze uiteindelijk bovenop de grootste schijf op paal 2 hebt gelegd.

(a) Noem s_n heeft aantal stappen dat je nodig hebben om een toren met n schijven te verplaatsen van paal 1 naar paal 2 volgens bovenstaand recursief algoritme. Geef dan een recursieformule voor s_n.

(b) Zoek een expliciet voorschrift voor s_n door gebruik te maken van genererende functies.

Veel succes!