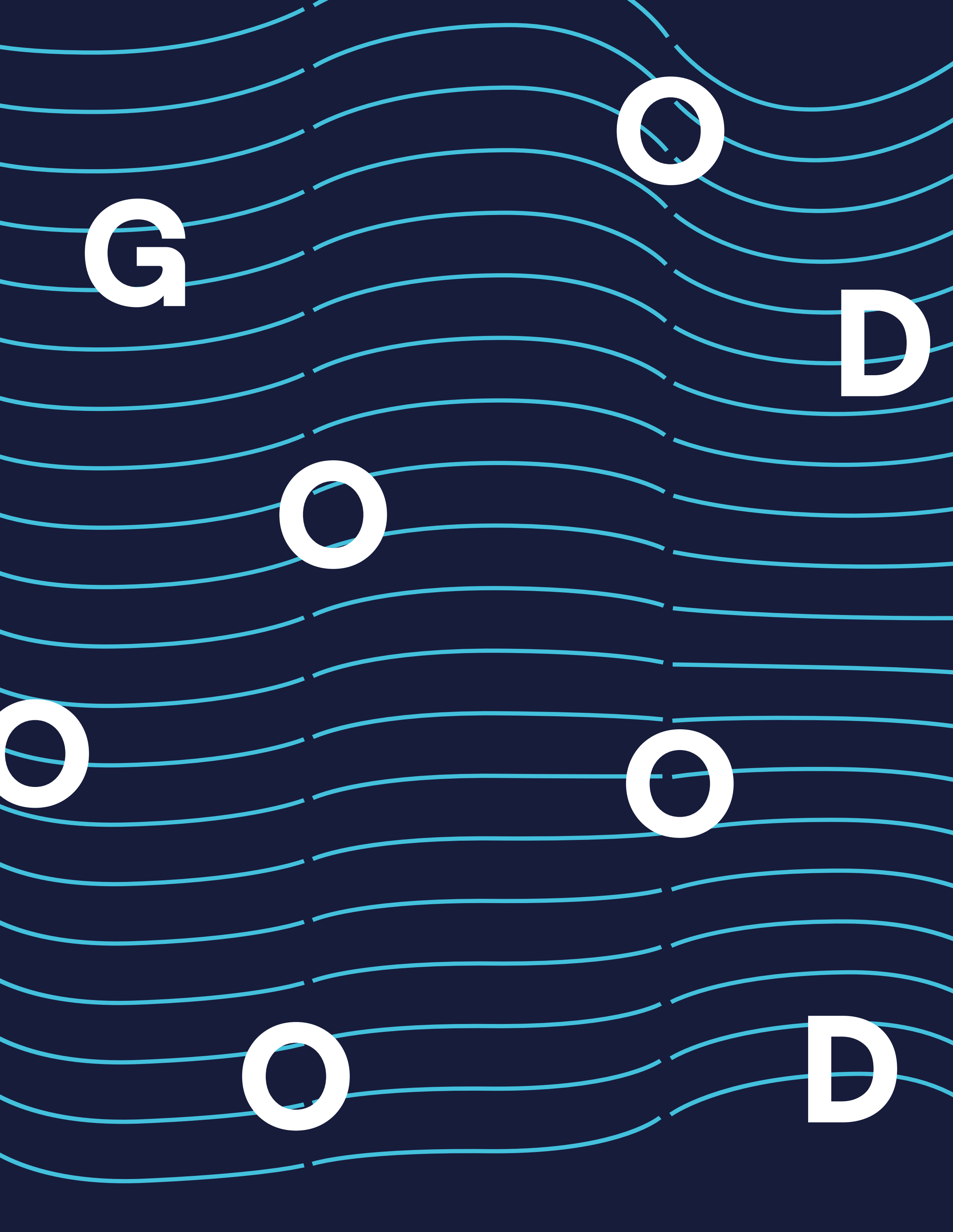

O
G
D
O
O
O
O
D

Inleiding

Vb

5 Stukken fruit

Ik wil 2

$\binom{5}{2}$

n stukken fruit kiezen

$\binom{5}{n}$

binomium

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$

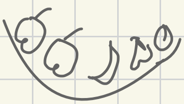
$1 + 2x + x^2$

verschillend

$$= (1+x)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k 1^{n-k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

bij x^k staat een coefficiënt, die precies overeenkomt met het antwoord op de vraag: " op hul manieren kan ik k stukken fruit kiezen uit deze fruitschaal"

Vb2



zelfde

And

$(1 + x + x^2)(1+x)(1+x)(1+x)$

0 Appels or 1App or 2App

of

0banaan

1banaan

$= (1 + x + x^2)(1 + 3x + 3x^2 + x^3)$

1 manier om niets te kiezen

3 manieren om 1 iets te kiezen

3 manieren om 2 dingen te kiezen

1 manier om alle 3 te kiezen

$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + 4x^4 + x^5$

1	3	3	1		
	1	3	3	1	
		1	3	3	1
1	4	7	7	4	1

hul manieren 2 stukken fruit uit deze schaal nemen! 7 manieren

Inleiding

Vb 3

Bakker → taartjes kopen

4 ab. taartjes

3 kaas taartjes

4 aardbeien taartjes ⟶ per 2 kopen !

hoeveel manieren 𝑘 taartjes kopen

abrikoos

kaas

aardbei

je mag niet 1 per 1 kopen

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + \cancel{x} + x^2 + \cancel{x^3}\ x^4)$$

kans dat je 1 koopt

kans dat je 3 koopt

$$= (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7)(1 + x^2 + x^4)$$

$$= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 9x^5$$
$$+ 9x^6 + 8x^7 + 6x^8 + 4x^9 + 2x^{10} + x^{11}$$

1 2 3 4 4 3 2 1

1 2 3 4 4 3 2 1

1 2 3 4 4 3 2 1

1 2 4 6 (6 8 9 9 8 6 4 2 1

Genererende functies

DEF:

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ eindige rij van getallen

(of oneindig en $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$)

dan noemen we de veelterm :

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

de genererende functie van deze rij

Vb 2')

4 aardbei taartjes

3 kaas taartje

∞ abrikoze taart

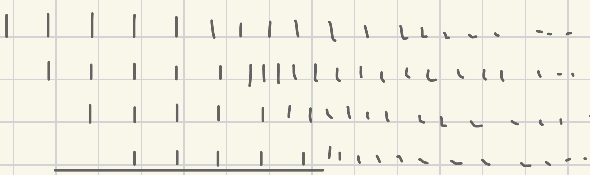
$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4)$

$(x+1)(x+1)(x+1)$

$1 + y = x$

$y = x - 1$

berekenen



1 2 3 4 4 4 4 . . .

1 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 . . . .

1 2 3 4 4 4 4 4 4 4 4 . .

1 2 3 4 4 4 4 4 4 4 . –

1 2 4 6 8 10 11 12 12 12 12 12 12 . . .

$(1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 10x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 12x^8 + 9x^9)$

Formele machtsreeks

↳ geen intentie om x in te vullen

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

Optelling

$(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots) + (b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)$

$= (a_0 + b_0) + (a_1 x + b_1 x) + (a_2 x^2 + b_2 x^2) + \dots$

Vermenigvuldiging

$(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_0 + b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots$

-1 -1

+1 +1 ..

$\Rightarrow \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Vb3

Wingk: $\begin{cases} \text{hamburgers} & €3 \\ \text{Soep} & €2 \end{cases}$

\# Manieren om k euro uit te geven?

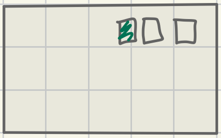
per 3 euro

$\underbrace{(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)}_{\text{hamburger}} \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots)}_{\text{Soep}}$

$= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^8 + 2x^9 + x^{10} + \dots$

Formele machtsreeks

Vb 4)



3 postzegels plakken

Volgorde van belang

postzegels van 1 cent 2 cent of 3 cent

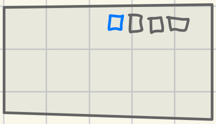
manieren om 3 postzegels te plakken (volgorde v) met k cent in totaal

1 cent, 2 cent, 3 cent — Middelste zegel — Rechtse postzegel

$$(x + x^2 + x^3) \cdot (x + x^2 + x^3)(x + x^2 + x^3) = (x + x^2 + x^3)^3$$

$$= x^3 + 2x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$$

Vb 4') 3 of 4 postzegels



manieren om k cent te plakken met 3 of 4 postz.

3 postz. $(x + x^2 + x^3)^3$

\+ 4 postz. $(x + x^2 + x^4)^4$

$$(x + x^2 + x^3)^3 + (x + x^2 + x^3)^4$$

$$= x^3 + 4x^4 + 10x^5 + \dots + x^{12}$$

manieren om 4 cent te plakken (# postzegels niet vast)

volgorde ✓

0 postz 1 postz 2 postz 3 postz 4 postz

$$1 + (x + x^2 + x^3) + (x + x^2 + x^3)^2 + (x + x^2 + x^3)^3 + (x + x^2 + x^3)^4$$

per postzegel

$$= 1 + x \quad 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 \quad \ldots$$

Volgorde niet van belang   per cent soort

1 cent kastanje 2 cent 3 cent

$$(1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6 + x^9)$$

Inversie: kortere versie

$A = a_0, a_1, a_2, \ldots$ (oneindige rij) $\rightsquigarrow$ $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

↳ genererende functie van A

bv $F_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n=0 \\ 1 & \text{als } n=1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \ldots$

compacte vorm

↳ via inverse genererende functies

niet van B→A

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \\ B(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{ elkaars inverse} \iff A(x)\,B(x) = 1$$

$1 + 0x + 0x^2$

A(x) gegeven wnr bestaat inverse genererende functie van A(x)

$$\Rightarrow \underbrace{A(x)}_{\text{gegeven}}\,\underbrace{B(x)}_{\text{gegeven}} = 1$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots$$
$$= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \ldots$$

$\Rightarrow$ oneindig groot stelsel

inversie bestaat als stelsel oplossing heeft

(Coeff LL = Coëff RL)

voorwaarde oplossing: $a_0 \neq 0$

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = a_0^{-1} \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0) \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0) \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Compacte vorm

vb Abrikoze taart

$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^{-1}$ inverse

$a_i = 1$

$$\begin{cases} 1 \cdot b_0 = 1 \end{cases}$$

Vb compacte vorm + stelsel

Vb 1) Abrikose taart

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^{-1} \quad \text{inverse} \qquad a_i = 1$$

$$\hookrightarrow (1 - x)$$

$$\begin{cases} 1 \cdot b_0 = 1 \\ b_1 + b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -1 \\ b_2 + \underset{-1}{b_1} + \underset{+1}{b_0} = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \qquad b_n = 0 \text{ als } n \geq 2$$

Formule

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{korte vorm}$$

Vb 2)

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^k x^k + \dots$$

$$1 + (2x)^1 + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots = \frac{1}{1 - 2x} \qquad \text{Subsitutie}$$

Alternatief

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1 \\ b_2 + b_1 + b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -2 \\ \vdots \quad b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 - 2x}$$

Vb 3)

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \dots$$

$$1 + (x^3)^1 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + (x^3)^4 = \frac{1}{1 - x^3}$$

Vb 4)

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$1 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x^3) + (-x)^4 + \dots = \frac{1}{1 + x^3}$$

Vb 5)

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots \qquad b_n = 0 \text{ als } n \geq 3$$

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 + 2b_0 = 0 \Rightarrow b_1 = -2 \\ b_2 + 2b_1 + 3b_0 = 0 \Rightarrow b_2 = -2(-2) - (1 \cdot 3) = 4 - 3 = 1 \\ b_3 + 2b_2 + 3b_1 + 4b_0 = 0 \Rightarrow b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1 - 2x + x^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

$$\frac{1}{1-x^m} = \binom{m-1}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{2}x^3$$

Sei $m = 2$

$$= \binom{1}{0} + \binom{2}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \dots$$