Geloof niet blindelings wat hier staat, mogelijks staan er fouten in!

Hoorcollege woensdag 24/09/2024

Introductie:

De cursus kopen is aan te raden
Op backboard:

- Opnames van 2021-2022 beschikbaar
- 3 doorjaarse taken (geen punten wel feedback)

Wat te verwachten v/d cursus:

1. Verzamelingen, relaties en functies ← Taak
2. Bewijstechnieken ← Taak
3. Combinatoriek (=telproblemen)
4. Kanstheorie ← Taak
5. Booleaanse Algebra (Overlap met CSA)
6. Genererende functies

Verzamelingen, relaties & Functies

Verzamelingen

Voorbeelden van verzamelingen:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, (\mathbb{C}\ \textit{wordt niet bekeken})$
- {kat, hond, vis}: opsomming
- {natuurlijke getallen}: beschrijving
- $\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{16}\} = \{\frac{3}{4}\} = A \rightarrow \frac{3}{4} \in A$

(Elke waarde kan maximaal 1 keer voorkomen per verzameling)

<u>Verzamelingstheoretische schrijfwijze:</u>

- Algemeen: {a | voorwaarde op a}
- Vb. $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x \leq 12\}$

<u>Een paar mogelijke schrijfwijzen van de gehele drievouden:</u>

- $\{...-6, -3, 0, 3, 6...\}$
- $\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\{a \mid a/3 \in \mathbb{Z}\}$
- $\{q \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ \textit{zodat}\ q = 3n\}$
- $\{b \in \mathbb{Z} \mid a \pmod{3} = 0$

Doorsneden en unies:

Neem de verzamelingen A, B

- $A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$
- AND, doorsnede, A ∩ B
- OR, unie A ∪ B
- XOR, symmetrisch verschil, A Δ B
- NOT, complement, complement A = Ā
- Verschil, behalve, A \ B

⇒ A Δ B = (A \ B) ∪ (B \ A) of A Δ B = (A ∪ B) \ (A ∪ B)

Eigenschappen van unies, doorsneden...

Commutativiteit:

- A ∪ B = B ∪ A
- A ∩ B = B ∩ A
- A \ B ≠ B \ A

Associativiteit:

- (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C) = A ∩ B ∩ C (we noteren dus zonder haakjes)
- (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C) = A ∪ B ∪ C (we noteren dus zonder haakjes)
- A ∩ (B ∪ C) ≠ (A ∩ B) ∪ C ← Hier zijn haakjes wel noodzakelijk

Distributiviteit:

- (A ∩ B) ∩ C = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
- analoog wanneer omgewisseld

Indexverzamelingen:

- Unies: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$
- Doorsnede: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$
- Analoog aan som: $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$
- Voorbeeld: $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n, -n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, -n\}$
- Voorbeeld: $\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[=]-1, 1[\cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap ... = 0$
- Verzameling met 1 element = singelton
- Verzameling met 0 elementen, lege verzameling = ∅ = {}
- A en B zijn disjunct als A ∩ B = ∅
- Universum = een grote verzameling waarin je werkt
- Notatie: Ω, V, U
- Hieruit volgt:
  - A ∪ Ω = Ω,   A ∪ ∅ = A,   A ∩ Ω = A,   A ∩ ∅ = ∅,   ∀A: ∅ ⊂ A
  - Het complement van ∅ is Ω, en omgekeerd.

De wet van De Morgan:
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} ; \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(zie ook CSA)

Machtsverzameling van A:
= De verzameling van alle deelverzamelingen van A
- Notatie: 2^A
- Voorbeeld: {Kat, Hond, Vis} = A ← 3 el.
  → 2^A ={∅, {K}, {H}, {V}, {K,V}, {K,H}, {H,V}, A} ← 2^3 el. = 8 el.

Cartesisch product
A×B = {(a, b) | a ∈ A, b ∈ B}
Voorbeeld:
A = {1, 2}, B = {K, H, V}
A×B = {(1, K), (2, K), (1, H), (2,H)...}
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ ← Verzameling van n-tupels
Analoog product aan product van getallen

Hoorcollege maandag 30/09/2024

Relaties: A, B verzamelingen, dan noemen we R een relatie als $R \subset A \times B$

Vb. 1, 2: *notities onvolledig*
Domein v/e relatie $R = Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\} \subset A$
= alle elementen uit A waar een pijl vertrekt

Beeld of bereik van $R = Ran(R) = Im(R) \subset B$
= alle elementen van B waar een pijl toekomt

Notatie $aRb \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R$: a staat in relatie tot b volgens R
Vb. 3: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25\}$
$Dom(S)[-2, 8]; Im(S) = [-3, 7]$

Vb. 4: $A = \{appel, banaan, peer\}; B = \{a, b, c, ..., z\}$
R = ... bevat de letter ...; Een combinatie kan maar 1 keer voorkomen!
Dom(R) = A: er vertrekken pijlen vanuit elk element van a
Im(R) = {a, b, e, l, n, p, r}: er komen pijlen aan in deze letters
$X \subset A ; R(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X : (x, b) \in R (dit\ is\ xRb)\}$
= de elementen die je vanuit X bereikt
X ={appel, peer}
→ R(X) = {a, e, l, p, r}

Eigenschappen:
1. $\forall X \subset A: R(X) \subset Im(R)$
2. *R(A) = Im(R)*
3. $R(\varnothing) = \varnothing$
4. $\forall X, Y \subset A: A \subset Y \rightarrow R(X) \subset R(Y)$
Opm.: $R(X) \subset R(Y) \rightarrow X \subset Y$ GELDT NIET

Vb. 5: A = {1, 2, 3, 4}; B = {1, 2}; R = {(1,1), (2,2), (3,2)}
X = {2, 3}; Y = {1, 2} dan R(X) = {2} en R(Y) = {1,2} dus $R(X) \subset R(Y)$ *maar* $X \not\subset Y$

Inverse relaties:
$R \subset A \times B \, een\, relatie: R^{-1} = (a,b) | (a,b) \in R$
= inverse relatie van R
$\subset B \times A$
Eigenschappen:
5. $\forall X, Y \subset B: X \subset Y \rightarrow R^{-1}(X) \subset R^{-1}(Y)$
= eig. 4 voor R^{-1} *i.p.v. R*
6. $(R^{-1})^{-1} = R$
7. $\forall X, Y \subset A: R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y)$
8. $\forall X, Y \subset A: R(X \cap Y) \subset R(X) \cap R(Y)$ *Waarom niet gelijk? Zoek een tegenvoorbeeld!*

Vb. 6: variant Vb. 5, met een paar extra pijlen
A = {1, 2, 3, 4}; B {1, 2}
X = {2, 3}; Y = {1, 2} dus $R(X \cap Y) = R(\{2\}) = \{2\}$
R(X) = {1, 2}
R(Y) = {1, 2} dus $R(X) \cap R(Y) = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$

Samenstelling van 2 relaties:

$R \subset A \times B; S \subset B \times C$

S na R: $S \circ R \subset A \times C \quad S \circ R = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B: aRb \text{ en } bSc\}$

Eigenschappen:

9. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

10. $R \subset A \times B; S \subset B \times C; T \subset C \times D: T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$: associatief

Functies:

Def.: Een relatie $R \subset A \times B$ is een functie als en slechts als

1. Dom(R) = A (uit elk element van A vertrekt minimum 1 pijl)

$\forall a \in A, \exists b \in B: aRb$

2. $\forall a \in A, \forall b, b' \in B : aRb\, en\, aRb' \rightarrow b = b'$(uit elk element van A vertrekt maximum 1 pijl)

Tezamen: Uit elk element van A vertrekt **precies** 1 pijl.

Anders gezegd: voor elke $a \in A, \exists! b \in B : aRb$

We noemen het unieke beeld van a R(a)

Notatie: $F \subset A \times B\, functie$

$F : A \rightarrow B : x \rightarrow f(x)$

$f\, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$

Injectieve functie:

Een functie $f : A \rightarrow B$ noemen we injectief als en slechts als $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$
<u>In elk element van b komt maximum 1 pijl toe.</u>

Surjectieve functie: Een functie $f : A \rightarrow B$ noemen we surjectief als en slechts als
$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$
<u>In elk element van b komt minimum 1 pijl toe.</u>

Bijectieve functie: Een functie noemen we bijectief als er exact 1 pijl toekomt in elke b
$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$

Voorbeelden

1) $f : \{A, B, C, \ldots, Z\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\ldots, 50\}$

$A \rightarrow 1; B \rightarrow 2; \ldots; Z \rightarrow 26$

Deze functie is injectief, elk getal wordt max. 1 keer bereikt
Deze functie is niet surjectief, de getallen groter dan 26 worden niet bereikt

2) $f : \{A, B, C, \ldots, Z\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\ldots, 26\}$

$A \rightarrow 1; B \rightarrow 2; \ldots; Z \rightarrow 26$

Deze functie is injectief, elk getal wordt max. 1 keer bereikt
Deze functie is surjectief, alle getallen worden bereikt

3)$A = \{studenten \in deze\, klas\}; B = \{0, 1, 2, 3\ldots20, AFW, VER, WTV, FRD\}$

$f : a \rightarrow b : x \rightarrow$ *score die x heeft op het examen Discrete Wiskunde in januari*

|A| = 105; |B| = 25
f is een functie (iedereen krijgt *een* “score”) maar f is geen injectieve functie (sommige scores worden meermaals bereikt), f surjectief als elke score bereikt zou worden

<u>Eigenschap</u>: een samenstelling van 2 functies is opnieuw een functie

Verder werkende op vorige voorbeeld:
C = {2de zit, geen 2de zit}

$g : B \rightarrow C : x \rightarrow geen\, 2\, de\, zit\, als\, x \in \{10, 11, \ldots, 20\}; OF\, x \rightarrow 2\, de\, zit\, als\, x \notin \{10, 11, \ldots 20\}$

$g \circ f : A \rightarrow C : x \rightarrow g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

Eigenschappen: $f : A \rightarrow B, functie, g : B \rightarrow C, functie$ (bewijzen hieronder)

1. Als f en g injectief, dan $g \circ f$ injectief
2. Als f en g surjectief, dan $g \circ f$ surjectief
3. $g \circ f\ injectief \rightarrow f\ injectief$
4. $g \circ f\ surejectief \rightarrow g\ surjectief$

BEWIJS 1, STAAT NIET IN DE CURSUS:

Geg: $f\ injectief \rightarrow \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$

$g\ injectief \rightarrow \forall b, b' \in B : g(b) = g(b') \rightarrow b = b'$

TB: $(g \circ f : A \rightarrow C)$

$g \circ f\ injectief : \forall a, a' \in A : g(f(a)) = g(f(a')) \rightarrow a = a'$

Bewijs:

$Kies\ a, a' \in A\ willekeurig\ zodat\ g(f(a)) = g(f(a'))$

$Neem\ b = f(a), b = f(a')\ Omdat\ g\ injectief : f(a) = f(a')$

$Omdat\ f\ injectief : a = a'$

■

Hoorcollege woensdag 02/10/2024

BEWIJS 2, STAAT NIET IN DE CURSUS:

Geg: $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b, \quad \forall c \in C, \exists b \in B : g(b) = c$

TB:$\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = a$

Bewijs: Neem c uit C willekeurig

$Uit\ geg\ 2 : \exists b \in B : g(b) = c$

$Uit\ geg\ 1 : a \in A : f(a) = b$

Hieruit volgt: $g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c$

■

BEWIJS 3, STAAT NIET IN DE CURSUS:

Geg: $\forall a, a' \in A : (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow a = a'$

TB: $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Bewijs: Kies a, a’ zodat $f(a)=f(a')$
Pas g toe: $g(f(a))=g(f(a'))$

Uit geg: a = a’

■

UOVT (=Uitstekende oefening voor thuis): Onderzoek het tegenovergestelde zelf

BEWIJS 4, STAAT NIET IN DE CURSUS:
Geg: $\forall c\in C, \exists a\in A:(g\circ f)(a)=c$

TB: $\forall c\in C, \exists b\in B: g(b)=c$

Bewijs: Neem c uit C willekeurig

Uit geg: $\exists a\in A: g(f(a))=c$

Kies *b* = *f(a)*, die bestaat want f is een functie (A bevat geen losse punten)
$\Rightarrow \exists b\in B: g(b)=c$
UOVT: Onderzoek het tegenovergestelde zelf

Een paar definities:

1. Grootte van verzamelingen = **kardinaliteit**
Als A eindige verzameling, dan |A| = #elementen = kardinaliteit van A.

2. A en B zijn **equipotent** (~even machtig) als er een bijectie bestaat van A naar B.
Dan hebben A en B dezelfde kardinaliteit

Voorbeelden:
1. Eindige verzameling; A = {1, 2, 3}; B = {rood, groen, blauw}; bijectie R is bv. {(2,rood}, {1,blauw}, {3,groen}

2. Oneindige verzamelingen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

3. Stel $|\mathbb{N}|=\aleph_0$ (uitgesproken aleph-0)

4. We noemen een verzameling A **aftelbaar** als ze eindig is of als er een bijectie bestaat van $\mathbb{N}$ naar A. Je kan de elementen op een rijtje zetten ($\mathbb{N}\rightarrow A: n\rightarrow a_n$)

Oefeningetjes:

1.is er een bijectie van $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}_0$? Ja!
$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}_0: n\rightarrow n+1$ is een bijectie

$\Rightarrow \mathbb{N}\, en\, \mathbb{N}_0$ zijn equipotent

$\Rightarrow |\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_0|=\aleph_0$

2. is $\mathbb{Z}$ *aftelbaar ?*
$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ Zo niet

$\mathbb{Z}=\{0,-1,1,-2,2,-3,3,...\}$ Maar zo wel! Dus JA

Functievoorschrift: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} : n - even : n \rightarrow n/2 : n - oneven\, n \rightarrow -(n+1)/2$

3. Is $\mathbb{Q}$ *aftelbaar ?* Ja! **EXAMENVRAAGBEWIJS**

$\mathbb{Q} = \{a/b | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_0\}$

Zoek een opsomming $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$

...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	~~-4/2~~	-3/2	~~-2/2~~	-1/2	~~0/2~~	1/2	~~2/2~~	3/2	~~4/2~~	...
...	-4/3	~~-3/3~~	-2/3	-1/3	~~0/3~~	1/3	2/3	~~3/3~~	4/3	…
...										

$\mathbb{Q} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-2}{3}, ...\}$ Dus $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

4. Is $\mathbb{R}$ *aftelbaar ?* Neen!

$|\mathbb{R}| = C - hoekig > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ (C-hoekig heeft geen Unicodesymbool en kan dus niet getypt worden)

Bewijs "diagonaalelement van Cantor": uit het ongerijmde (= bewijs door contradictie)
Stel: ℝ is aftelbaar

$\Rightarrow \exists bijectie\, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Voorbeeld $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$

$$a_0 = \mathbf{1}.4142...; a_1 = 4.\mathbf{0}0000....; a_2 = 3.1\mathbf{4}15; a_3 0.08\mathbf{8}8888....$$

Maak een nieuw getal a het i-de cijfer na de komma is (het i-de cijfer van a_i) + 1

a = 2.159... zit niet in de opsomming en $a \in \mathbb{R}$de opsomming is onvolledig en ℝ is **overaftelbaar**
∎

C-hoekig = $\aleph_1$? (= 1 van de 23 vragen van Hilbert (1900)): Continuümhypothese, Gödel heeft gevonden dat het niet-bewijsbaar is.

Hotel van Hilbert: zie die ene video https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo

5. Is]-1,1[aftelbaar?

$|]-1, 1[| = |\mathbb{R}|$

Bewerking: vind een bijectie $\mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$

Via de boogtangensfunctie $f: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[: x \rightarrow \frac{2}{\pi} bgtan(x)$ is strikt stijgend, dus bijectie

Dus: $|]-1, 1[| = |\mathbb{R}|, beide\, overaftelbaar$

Hoorcollege 07/10/2024

Stelling van Schröder-Bernstein:
Er bestaat een bijectie van $A \rightarrow B$

$\Leftrightarrow$ er bestaat een injectie van $A \rightarrow B$, en er bestaat een injectie van $B \rightarrow A$

[-1, 1] is overaftelbaar. Bewijs via bovenstaande:

- $\exists injectie [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, namelijk\, x \rightarrow x$
- $\exists injectie\, \mathbb{R} \rightarrow [-1,1], namelijk\, g : x \rightarrow \frac{2}{\pi} bgtan\, x$

=> $|\mathbb{R}| = |[-1,1]|$

Voorbeeld van een niet-injectieve functie: [-1, 1] $\rightarrow \mathbb{R}$

$y = x^2$ injectief: $f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$
In dit geval: $f(1) = f(-1)\, maar -1 \neq 1$

Injectiviteit nagaan: trek horizontale rechten en als elke rechte max. 1 keer de grafiek snijdt, is de functie injectief.

Duivenhokprincipe:

Stel $\exists A, B \mid |A| = |B| < \infty$, dan zijn deze eigenschappen equivalent:
$f : A \rightarrow B\, is\, een\, bijectie \Leftrightarrow f : A \rightarrow B\, is\, een\, injectie \Leftrightarrow f : A \rightarrow B\, is\, een\, surjectie$

A = {duiven}, B = {hokken}, alle duiven hebben een hokje, als je meerdere duiven in een hokje steekt zijn er lege hokjes.

Relaties van $A \rightarrow A$ (=”relatie op A”)

- (R) **Reflexiviteit**: $\forall a \in A : aRa$ (deze heeft lussen in elk element)
- (S) **Symmetrie**: $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ (elke pijl die men kan trekken, bestaat ook in de andere richting, behalve bij lussen)
- (AS) **Antisymmetrie**: $\forall a, b \in A : aRb\, en\, bRa \Rightarrow a = b$ (geen enkele pijl bestaat ook in de andere richting)
- (T) **Transitiviteit**: $\forall a, b, c \in A : aRb\, en\, bRc \Rightarrow aRc$ (als je 2 pijlen achtereenvolgens kan trekken, is er ook een pijl die het middelste punt overslaat)

Voorbeeld 1: A = {studenten in deze klas} R: … heeft dezelfde score op het examen DW als …
Eigenschappen:

- (R) zelfde score als zichzelf? Waar
- (S) als student 1 dezelfde score heeft als student 2, heeft s2 dan dezelfde score als s1? Waar
- (AS) er zijn geen 2 mensen met dezelfde score? Niet (altijd) waar

- (T) als s1 dezelfde score haalt als s2, en s2 als s3, heeft s1 dan dezelfde als s3? Waar

  Truc, als "dezelfde" in het voorschrift staat, dan (R) (S) en (T)

Equivalentierelatie: Als R voldoet aan (R), (S) en (T) dan is het een equivalentierelatie.

Notatie: $a \sim b, a \equiv b$

Voorbeeld 2: $A = \mathbb{R}\ en\ aRb \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Eigenschappen:

- (R) aRa? Is $a^2 = a^2$? Ja
- (S) aRb $\Rightarrow bRa$? Als $a^2 = b^2, dan\ b^2 = a^2$? Ja
- (AS) aRb en bRa $\Rightarrow a = b\ ?$ neen bv. 3 en -3
- (T) Als $a^2 = b^2\ en\ b^2 = c^2, is\ dan\ a^2 = c^2$? Ja

$R, S, T \Rightarrow equivalentierelatie$

Voorbeeld 3: $a \equiv b \Leftrightarrow 3|(a-b) \in \mathbb{Z}$ Bv 5 ~ 8, -3 ~ 3

- (R) $a \equiv a, 3|a-a\ ?\ Ja$
- (S) $a \equiv b \Leftrightarrow 3|a-b \Rightarrow b \equiv a\ 3|b-a$ Ja
- (T) $a \equiv b\ en\ b \equiv c \Rightarrow 3|a-b\ en\ 3|b-c$ Ja het is transitief

Bij een equivalentierelatie wordt A ingedeeld in groepjes:

- Voorbeeld 1: studenten met de dezelfde score. Je kan cirkels tekenen rond groepjes met dezelfde waarde
- Voorbeeld 2: $(a^2 = b^2)\ \mathbb{Z} = \{0\} \cup \{-1, 1\} \cup \{-2, 2\} \ldots$
- Voorbeeld 3: 3-vouden = {…, -3, 0, 3, 6, …}, {3-vouden + 1}, {3-vouden + 2}

Als A, ~ is een equivalentierelatie

[a] = $\{b \in A | a \sim b\}$, bijvoorbeeld:

- In Vb. 3 $a \equiv b \Leftrightarrow 3|a-b : [0] = \{b \in \mathbb{Z} | 0 \equiv b\} = \{b \in \mathbb{Z} | +b\} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} = [15]$, [0]: equivalentieklasse, de 0 is de **representant**
  [1] = {…, -2, 1, 4, …}
  [2] = {…, -1, 2, 5, …}
  Merk op: $[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{Z}$
  Beschouw nu: $A/\equiv = \{[a] | a \in A\}$: quotiëntverzameling
  - Dus bij Vb. 3. is dit gelijk aan $\{\{\ldots, 0, 3 \ldots\}, \{\ldots, -2, 1, 4 \ldots.\}, \{\ldots, -1, 2, 5, \ldots\}\}$
  - Bij Vb. 1. {{studenten met score 1}, {studenten met score 2} …}
  - Bij Vb. 2. $a \equiv b \Leftrightarrow a^2 = b^2 : [4] = \{4, -4\} : \mathbb{Z}/\equiv = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \ldots\}$

Voorbeeld 3’: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\, en\, a \sim b \Leftrightarrow 3|a-b$
$A/\sim=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$, dit is een **partitie** van A, want elk element van A past slechts in 1 deelverzameling

Def.: Stel dat A een verzameling is. Dan is $\mathcal{A}$ een partitie van A als: $\mathcal{A} \subset 2^A$

Voorbeeld: A = {1,2} 2^A = $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
$\forall x \in \mathcal{A} : x \neq \emptyset$

NOTITIES ONVOLLEDIG

Eigenschap: de quotiëntverzameling van A, $A/\sim$ is een partitie van A
1) Neem $\mathcal{A}$ = $A/\sim$ = {[a] | $a \in A$}
$TB: x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \neq \emptyset$

Bewijs: $x \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists a \in A : x=[a] \Rightarrow a \in x \Rightarrow x \neq \emptyset$

2) TB: $U_{x \in \mathcal{A}}\, x=a\, ?\, Bewijs: \forall a \in A : a \in [a]$
$\Rightarrow a \in U_{x \in A}\, x\, bevat\, alle\, a \in A$

$\Rightarrow U_{x \in A}\, x=A$

3) ofwel is x = y $[a]=[b] \Leftrightarrow a \sim b$ (3a)
ofwel $x \neq y \Rightarrow x \cap y=\emptyset$ (3b)
3a: [a] = [b] $TB: a \sim b \Rightarrow b \in [a] \Rightarrow a \sim b$
3a omgekeerd: $a \sim b \Rightarrow [a]=[b]$, Stel $x \in [b]\, willekeurig \Rightarrow b \sim x, a \sim b \Rightarrow (T)\, a \sim x$
$\Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a]$ (*)

Verder $a \sim b \Rightarrow b \sim a \Rightarrow (*) [a] \subset [b]$ Uit *’s volgt dat [a] = [b]

3b) T.B: $x \neq y \Rightarrow x \cap y=\emptyset$

Bewijs: door contradictie (uit het ongerijmde)
Stel $x \neq y\, en\, x \cap y \neq \emptyset$

Dan $\exists c \in x \cap y, Noem\, x=[a]\, en\, y=[b]$

$\Rightarrow c \in [a]\, en\, c \in [b]$

$Uit\, d\, ef\, [a] \Rightarrow a \sim c$

Met (S)$\Rightarrow a \sim c\, en\, c \sim b$
Met (T) $\Rightarrow a \sim b$
Met 3a: $[a]=[b] \Rightarrow x=y\, én\, x \neq y : \boldsymbol{contradictie} \Rightarrow x \cap y=\emptyset$

■

Hoorcollege 09/10/2024

In een verzameling A: R is een **equivalentierelatie** als: (R), (Z), (T). Notatie $\equiv of \sim$
R equivalentierelatie ⇔ $\mathcal{A}$ een partitie = Elke partitie komt overeen met een equivalentierelatie

Voorbeeld: A = {0, 1, a, b, rood, groen}
Dan $\exists\ \mathcal{A}$ = {{0, 1}, {a, b}, {rood, groen}}

Def: $p \equiv_{\mathcal{A}} q \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow p, q \in X$

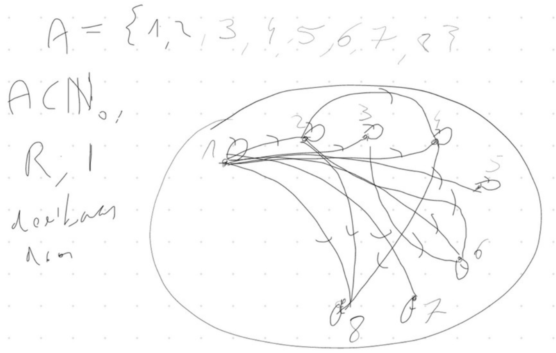
In een verzameling A: R is een **partiële orde** op A als: (R), (AS), (T). Notatie: $\leqslant$

Voorbeeld: $A = \mathbb{R}$, R: is kleiner of gelijk aan

- (R)? $\forall a \in \mathbb{R} : a \leqslant a\ Ja!$
- (AS)? $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leqslant b\ en\ b \leqslant a \Rightarrow a = b\ Ja!$
- (T)? $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leqslant b\ en\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c\ Ja!$

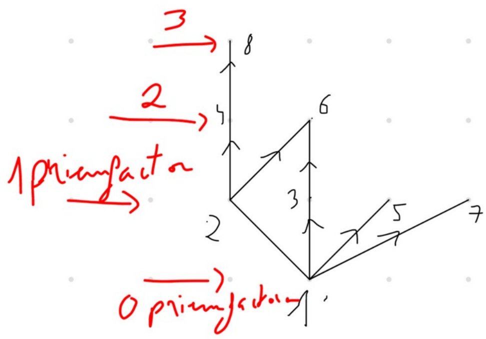
  R is een **totale orde** op A als (R), (AS), (T) én (TO): $\forall a, b \in A : a \leqslant b$ *of* $b \leqslant a$ *(is te ordenen op een as)*
- (TO)? $\forall a, b \in \mathbb{R} : is\ a \leqslant b\ of\ b \leqslant a\ OK!\ \mathbb{R} \leqslant is\ een\ totaal\ geordende\ verzameling$

Voorbeeld: $A = \mathbb{N}_0, aRb \Leftrightarrow a|b$



- (R) $\forall a \in A : aRa\,? \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{N}_0 : a|a$ OK
- (AS) $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a|b\ en\ b|a \Rightarrow a = b$ OK
- (T) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : a|b\ en\ b|c \Rightarrow a|c$ OK
- (TO)
  $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a|b\ of\ b|a\ NIET\ OK, vb.\ a = 2, b = 3$

Dus $\mathbb{N}_0$,| is een partieel geordende verzameling = **poset** "partially ordered set"



Eenvoudiger dan Bovenste: **Hasse-diagram van een poset**:
Afspraken:

- Geen lussen tekenen
- Geen pijlen die volgen uit (T)
- Alle pijlen wijzen naar boven

Als $X, \leqslant$ *een poset* $Y \subset X$

- We noemen $x \in X$ een **bovengrens** van Y als $\forall\ y \in Y : y \leqslant x$
- We noemen $x \in X$ een **ondergrens** van y als $\forall\ y \in Y : x \leqslant y$
- We noemen $a \in Y$ een **maximum** van Y als $\forall\ y \in Y : y \leqslant a$
  In woorden: Een maximum is te bereiken uit elk element door de pijlen te volgen
- We noemen $a \in Y$ een **minimum** van Y als $\forall\ y \in Y : a \leqslant y$
  In woorden: Elk element is te bereiken door pijlen te volgen uit het minimum
- We noemen $a \in Y$ een **maximaal element** als $\forall\ y \in Y : a \leqslant y \Rightarrow y = a$
  In woorden: Uit een maximaal element vertrekken geen pijlen (naar andere elementen)
- We noemen $a \in Y$ een **minimaal element** als $\forall\ y \in Y : y \leqslant a \Rightarrow y = a$
  In woorden: In een minimaal element komen geen pijlen toe (uit andere elementen)

Voorbeeld: $\mathbb{R}, \leqslant en\, Y=[0,1]\subset\mathbb{R}$

- Bovengrens Y? Elke $r\in\mathbb{R}: r\geqslant 1$
- Ondergrens Y? Elke $r\in\mathbb{R}^-$
- Maximum: 1? Ja, want $\forall\, y\in[0,1]: 1\leqslant y \Rightarrow y=1$
- Minimum: 0? Ja, want $\forall\, y\in[0,1]: 0\leqslant y \Rightarrow y=0$

Algemeen: bij (TO), maximum = *uniek* maximaal element , minimum = *uniek* minimaal element

Voorbeeld: $\mathbb{R}, \leqslant en\, Y=]0,1[\subset\mathbb{R}$

- Geen maximaal en minimaal element, boven en ondergrenzen blijven gelijk aan Vb. ^

Voorbeeld: A = {1,2,…,8} (zie tekening ^) R = | $A=y, X=\mathbb{N}_0$

- Is 1 een minimum? $\forall\, y\in Y: 1\leqslant y\,(in\, dit\, geval \leqslant = |)$: JA
- Is 1 een minimaal element? $\forall\, y\in Y: y\leqslant 1 \Rightarrow y=1$ (~ er is een pijl van y naar 1): JA
- Er is geen maximum!
- 8, 6, 7, 5 zijn allemaal maximale elementen
- Ondergrens? $x\in\mathbb{N}_0: x\leqslant y, \forall\, y\in Y$. 1 is een ondergrens
- Bovengrens?$x\in\mathbb{N}_0: y\leqslant x$
  - k.g.v. is de kleinste bovengrens, in dit v.b. k.g.v.(1,2,3...8) $=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7=840$

Hoofdstuk 3: Bewijstechnieken

Wat is een bewijs?
Voor een wiskundige eigenschap is een bewijs: **een sluitende redenering waarom deze eigenschap klopt.**

Soorten bewijzen:

1.Triviaal bewijs

Vb. Eigenschap: als $n>0\, dan\, n\geqslant 0$
Bewijs: triviaal, ■
(Ook: uit onwaar ⇒ onwaar of uit onwaar volgt alles Vb. $Als\, \pi=3, dan\, \forall\, x\in\mathbb{R}: x>0$ *Slaat nergens op!, Bewijs: Triviaal)*

Voorbeeld: Als P onwaar, dan kan alles (Q) volgen
Elk mens met 5 hoofden is een genie
Elke lege relatie is transitief $\forall\, a,b,c\in A: aRb\, en\, bRc \Rightarrow aRc$ *dus* $R=\emptyset$ *is transitief)*

2. Rechtstreeks bewijs

Geg.: Stelling 0: $S_0, S_1,.., S_k$
TB: S_n
Bewijs: $S_0, S_1,.., S_k \Rightarrow S_{k+1}; S_0, S_1,.., S_{k+1}\Rightarrow S_{k+2}...\Rightarrow S_{k+m}=S_n$

Voorbeeld:
Def: $n\in\mathbb{N}_0$ is een samengesteld getal als $n=a\cdot b\, met\, a,b\in\mathbb{N}\, en\, a,b\geq 2$
Eig: Elk samengesteld getal heeft een priemdeler $d\leq\sqrt{n}$

Bewijs: Neem n een willekeurig samengesteld getal

Uit def: $n = a \cdot b \, met \, a, b \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Wlog *(=without loss of generality)* $a \geq b$

$\Rightarrow n = a \cdot b \geq b \cdot b = b^2$

$\Rightarrow n \geq b^2$

$\Rightarrow \sqrt{n} \geq b$ dus n heeft zeker een deler $b \leq \sqrt{n}$

Er zijn nu 2 gevallen:

1. b is een priemgetal, dan : stel d = b $\Rightarrow d | n \, en \, d \leq \sqrt{n}$
2. b is niet priem, dan $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \, priemgetal \, d \leq b : d | b$, zo vinden we d: $d | b \, en \, b | n \Rightarrow b | n \, en \, d \leq b \, en \, b \leq \sqrt{n}$

■

3. Bewijs via contra<u>positie</u>

TB: $A \Rightarrow B$

Dan bewijzen we $\neg B \Rightarrow \neg A$ (redenering: Als uit $\neg B$ ook A kan volgen dan $\neg B \Rightarrow A \Rightarrow B$, onmogelijk)

Voorbeeld:

Als het regent zet ik mijn kap op ⇒ als ik mijn kap niet op heb regent het niet.
Foute conclusies:

- Als ik mijn kap op heb regent het
- Dat als het niet regent, ik mijn kap niet op heb

Voorbeeld:

Eig: p > 1 een heel getal is met geen enkele priemdeler $\leq \sqrt{p}$, dan is p een priemgetal
Vb.: is 103 een priemgetal? $\sqrt{103} \approx 11$

$\Rightarrow als \, 2 \nmid 103, 3 \nmid 103, 5 \nmid 103 \, en \, 7 \nmid 103$, dan 103 priem (klopt)

<u>Contrapositie</u>: Als p geen priemgetal is, dan heeft het een priemdeler $\leq \sqrt{p}$
Bewijs: zie vorige stelling, bij (2)

Hoorcollege 14/10/2024

4. Bewijs via contra<u>dictie</u> (=Bewijs uit het ongerijmde)

Eigenschap: A
Bewijs: Stel dat $\neg A$ waar is $\Rightarrow ... \Rightarrow Q \Rightarrow ... \Rightarrow \neg Q$: Tegenspraak!
Dus A geldt

Voorbeeld: Eigenschap:$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bewijs via contradictie: Stel $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a}{b}\, met\, a, b \in \mathbb{N}_0\, en\, \boldsymbol{ggd(a,b)=1}$

$\Rightarrow b\sqrt{2}=a \Rightarrow 2b^2=a^2 \Rightarrow 2|a^2 \Rightarrow 2|a*$

$\Rightarrow a=2c\, met\, c\in\mathbb{N}_0$

$\Rightarrow 2b^2=4c^2 \Rightarrow b^2=2c^2 \Rightarrow \boldsymbol{2|b}$
DUS: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
■

(*): Lemma (= mini-stelling)

TB: a² even ⇒ a even, A ⇒ B
Bewijs door contrapositie: $\neg A \Rightarrow \neg B$

Bewijs: a is oneven
$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}: a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1\, is\, oneven$

$\Rightarrow a^2\, is\, oneven$

■

5. Splitsen in gevallen

Voorbeeld:

Eig: $\forall n\in\mathbb{N}: n^3-4n^2+n\, is\, even.\, (=T.B.)$
Bewijs via splitsen: $n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\, is\, even\, of\, n\, is\, oneven$

A. n is even ⇒ $n=2m, m\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n^3-4n^2+n=(2m)^3-4(2m)^2+2m$

$=8m^3-16m^2+2m$

$=2(4m^3-8m^2+2m) \Rightarrow is\, even$

B. n is oneven $\Rightarrow n=2m+1, m\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n^3-4n^2+n=(2m+1)^3-4(2m+1)^2+2m+1$

$Uit\, merkwaardig\, product \Rightarrow 8m^3(4m^2)+3(2m)+1-4(4m^2+4m+1)+2m+1$

$=8m^3+12m^2+6m+1-16m^2+16m-4+2m+1$

= even + 1 + 1 is even.
■

6. Bewijs via inductie

Eig: $\forall n\in\mathbb{N}\, geldt: S(n)$
Strategie:

- Basisgeval S(0)

- Inductiehypothese: als S(k) ⇒ S(k+1), $\forall k \in \mathbb{N}_0$
  Nadien is de conclusie:
  S(0) ⇒ S(1) ⇒ S(2) ⇒ S(3) ⇒ ... a.d.h.v. inductiehypothese

Voorbeeld 1: $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ (te kennen formule)

Bewijs via inductie naar n:

Basisgeval: n = 0: TB: $\sum_{j=0}^{0} j = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$ $OK!$

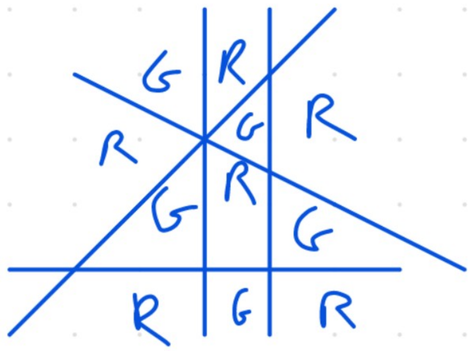
I.H.: als de formule klopt voor $n=k: \sum_{j=0}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$

T.B: de formule klopt voor n = k + 1: $\sum_{j=0}^{k+1} j = (k+1)\frac{((k+1)+1)}{2}$

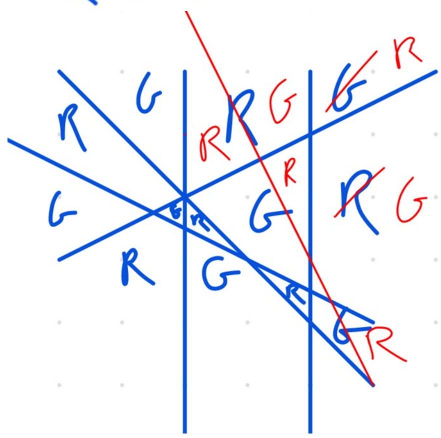
Bewijs:$LL = \sum_{j=0}^{k+1} j = 0+1+2+...+k+(k+1) = (k+1)(\frac{k}{2}+1) = (k+1)\frac{(k+2)}{2} = RL$

■

Voorbeeld 2: Gegeven: n rechten in het vlak
“Het is steeds mogelijk om de ontstane gebieden in te kleuren met slechts 2 kleuren zodat aangrenzende gebieden een andere kleur hebben.”



Bewijs via inductie naar n:
Basisgeval: n = 0
(Alles 1 kleur)
I.H.: eigenschap geldt voor k rechten, dan ook voor k+1
Bewijs:
Kleur de situatie met k rechten in (kan via IH)
Voeg de rechte opnieuw toe, aan één kant ervan wissel je R en G



- Grenzen langs de rechten ⇒ OK
- Alle interne grenzen: rechts ⇒ OK, links ⇒ OK

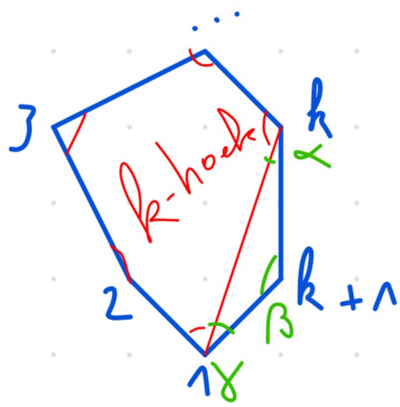
■

<u>Uitbreiding:</u>

- Starten vanaf andere n: basis S(m) met $m \neq 0$

Voorbeeld: Bewijs voor elke n-hoek dat de som van al zijn hoeken gelijk is aan $s=(n-2)\cdot 180°$
Bewijs via inductie naar n:

- Basisgeval n = 3. Voor driehoek: s = 180° = (3-2)·180° = (3-n)·180°
- Algemeen geval: IH: als voor een k-hoek geldt s = (k-2)·180°, dan is s = (k + 1 – 2)·180°



Bewijs: $s_{k+1}=s_k+\alpha+\beta+\gamma=(k-2)180°+180°=(k-1)180°$

Variant: Basisgeval S(0) en S(1)
en inductiehypothese: uit S(k-1) en S(k) ⇒ S(k+1)
Voorbeeld - Rij van Fibonnacci:

Rij: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\, en\, F_0=0, F_1=1$

Eigenschap/TB: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

Basisgevallen:

$n=0: F_0=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0$

$n=1: F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})=1$

Inductiehypothese: als de formule geldt voor n = k en n = k – 1, geldt ze ook voor n = k + 1

TB: $F_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1})$

Bewijs: $F_{k+1}\stackrel{\text{def}}{=}F_k+F_{k-1}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k)+\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1})$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1})$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1)-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1))$

Nog te bewijzen: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$

$LL=\frac{1\pm\sqrt{5}+2}{2}=(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2})^2$

$RL=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=LL$

$\Rightarrow F_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1})=T.B.$

■

Nog een voorbeeld van inductie: $Rij\, T_0, T_1, T_2, \ldots\Rightarrow T_n\, of\, (T_n)_n$
Voorbeeld: $T_0=2, T_1=3, T_2=6$
$T_n=(n+4)T_{n-1}-4nT_{n-2}+(4n-8)T_{n-3}$

Dus $T_3=(3+4)T_2-4\cdot T_1+(4\cdot3-8)T_0=7\cdot6-12\cdot3+4\cdot2=14$ (voorbeeld v/e **recursieformule**)
$(T_n)_n=2, 3, 6, 14, 40, 152, 784$

Olympiade: Volgende term, deze rij is een som van 2 bekende rijen, Welke?
Dus $T_n = a_n + b_n \Rightarrow b_n = T_n - a_n$
Een beetje testen: priemgetallen? Nee dan b_n is nonsens, 2^n? Ja! Dan $b_n = n!$

Bewijs via inductie naar n:

Basisgevallen: $T_0 = 2^0 + 0! \overset{def}{=} 1+1=2,\ T_1 = 2^1 + 1! = 3,\ T_2 = 2^2 + 2! = 4+2=6$ 3x OK

Inductiehypothese: als $T_n = 2^n + n!\ voor\ n=k, n=k-1\ en\ n=k-2, dan\ geldt\ die\ ook\ voor\ n=k+1$
TB: $T_{k+1} = 2^{k+1} + (k+1)!$
Bewijs:$T_{k+1} \overset{recursie\ met\ n=k+1}{=} (k+1+4)T_k - 4(k+1)T_{k-1} + 4((k+1)-8)T_{k-2}$

$$\overset{IH}{=} (k+5)(2^k + k!) - 4(k+1)(2^{k-1} + (k-1)!) + (4k-4)(2^{k-2} + (k-2)!)$$
$$= (k+4)2^k + 2^k - 4k\,2^{k-1} - 4\cdot 2^{k-1} + (2k-2)2^{k-1} + (k+5)k! - 4(k+1)(k-1)! + 4(k-1)(k-2)!$$

$$Faculteiten\ samenvoegen = 2^{k-1}(2k+8+2-4k-4+2k-2) + 4k! + (k+1)! - 4k! - 4(k-1)! + 4(k-1)!$$

$$= 4\cdot 2^{k-1} + (k+1)! = 2^{k+1} + (k+1)!$$

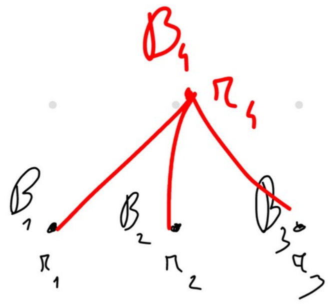
■

Hoorcollege 16/10/2024

- **Inductie**
  - → Variant: $\forall n \in \mathbb{N}\ met\ n\ even : Eig\ S(c)$
    - Optie 1: $Stel\ n=2k, inductie\ naar\ k$

      S(n)=S'(k) IH: $S'(k) \rightarrow S'(k+1)$
    - Optie 2: Basis S(0)

      IH: $S(k) \Rightarrow S(k+2)$
- **Structurele inductie**
  - → Def: 1 knoop is een boom, deze knoop is de "root" van de boom.
  - → Recursieve definitie: Stel dat $B_1, B_2, \dots B_n$ bomen zijn met roots $r_1 \dots r_n$ dan kan je een nieuwe boom maken door alle r_i te verbinden met een nieuwe knoop r , die de root van de nieuwe boom B zal zijn.



- **Recursieve definitie van een structuur**
  - → Basisgeval: eenvoudige gevallen
  - → Recursieve def: gegeven $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ maak Y
- Voor bomen geldt de eigenschap:

→ Noem e = #verbindingen (edges)
V = #knopen (vertices)
Dan, **V = e + 1**

→ Bewijs van de eigenschap via structurele inductie:

- Basisgeval: 1 knoop, V=1, e=0 $\Rightarrow v=e+1\,OK$
- IH: veronderstel dat $v_i=e_i+1\,\forall\, boom(B_1,B_2,\ldots,B_n)$
- TB: dan geldt v = e + 1 voor B gemaakt uit $B_1,B_2,\ldots B_n$
- Bewijs: in de nieuwe boom B: (achter hoofd staat + n + **1** } v = v + 1 ■)
- Voorbeeld: Compilers werken met “expressions”
  - Eenvoudige versie:
    - Definitie van basisgeval: elke letter en elk getal zijn een expression.

$a+b+c=0$ Vgl 2 − 2·Vgl 1

$8a+4b+2c=0 \Rightarrow \begin{cases} 6a+2b=0 \\ -10a-2b=-2 \end{cases} \Rightarrow b=-3a$

$27a+9b+3c=3$ Vgl 2 − 2·Vgl 3

$\Rightarrow -10a+6a=-2 \Rightarrow -4a=-2 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$

$b=-3a \Rightarrow b=\frac{-3}{2}$, uit vgl 1: $c=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

Dus $T_n = P(n) = \frac{1}{2}n^3-\frac{3}{2}n^2+n-3$

Controle: ✓

    - Vb.: 12,3 a z -3
    - Recursieve definitie: als $E_1\,en\,E_2$ expressions zijn, dan zijn ook $E_1+E_2, E_1\cdot E_2\,en\,(E_1)$ expressions

      Vb.: 12,3 + 3; a · b

Quiz:
Vraag 1: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ?: $2n^2, ?=72$

Vraag 2: -3, -3, -3, 0, 9, 18, 27, 57, ?
TIP: Bij rijen, schrijf steeds het verschil op tussen de waarden, tot je bij een constante term uitkomt, dit werkt vaak! (Maar niet altijd)

Bewering: Als je na het nemen van n verschil rijen een constante rij uitkomt, dan voldoen de termen aan een veeltermvoorschrift van graad n.
Hoe vinden we de coëfficiënten van deze veeltermfunctie?

$\Rightarrow Methode\ van\ de\ onbepaalde\ coëfficiënten: T_n = P(n)\ dus\ T_0 = -3 = d$
$T_1 = -3 = P(1) = a1^3 + b1^2 + c + d, T_2 = -3 = P(2) \ldots T_3 = 0\ P(3) \ldots$

Tips:

1. Start met tellen bij 0
2. De hoogstegraadsterm $a = \frac{constante\ i.n\ de\ laatste\ rij}{n!}$

Toegepast op de rij van Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

Voorschrift: $\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) \neq veeltermfunctie$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ Stel\ F_n = ax^n (\leftarrow probeersel)$

Invullen: $\cancel{a} x^{n+1} = \cancel{a} x^n + \cancel{a} x^{n-1} \Rightarrow x^{n+1} - x^n - x^{n-1} = 0$

$\Rightarrow x^{n-1}(x^2 - x - 1) = 0, dus \underbrace{(x=0)}_{onnuttig,\ want\ dan\ \forall n: F_n = 0}\ of\ x^2 - x - 1 = 0 (*)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} b^2 - 4ac = D = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{a \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = gulden\ snede(\phi)$

Toegepast op de rij van Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18… (~rij van Fib. Maar dan met andere startgetallen)

Voorschrift? $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}\ Stel\ L_n = ax^n \Rightarrow zelfde\ uitkomst\ als\ bij\ Fibonacci$

$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow L_n = \alpha \phi_1^n + \beta \phi_2^n$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) \\ 6 = \alpha(3+\sqrt{5}) + \beta(3-\sqrt{5}) \end{cases}$

$\overset{vgl2-vgl1}{\Rightarrow} 0 = \alpha\sqrt{5} - 3\alpha\sqrt{5} + (-3\sqrt{5})\beta + \sqrt{5}\beta = -2\alpha\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$\overset{\alpha=\beta, vgl1}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 1 \Rightarrow L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Gevolg: $a_n = a\phi_1^n$ voldoet aan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ook $b_n = b\phi_2^n$ voldoet hieraan

$\Rightarrow ook\ c_n = \alpha\phi_1^n + \beta\phi_2^n$ voldoet hier niet aan

$\underline{\alpha\ en\ \beta?:} F_0 = 0 = \alpha\phi_1^0 + \beta\phi_2^0 = \alpha + \beta$

$F_1 = 1 = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$

$\overset{vgl1}{\Rightarrow} \beta = -\alpha \overset{vgl2}{\Rightarrow} \alpha\phi_1 - \alpha\phi_2 = 1 \Rightarrow \alpha(\phi_1 - \phi_2) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

Hoorcollege 21/10/2024

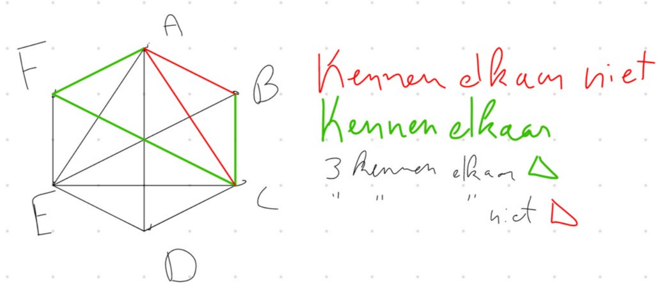
Heuristieken (deel 2):

In deze aula zullen minstens 5 mensen in dezelfde maand jarig zijn
$Als\, aantal\ personen > 4 \cdot 12 = 48$, want als het meer is dan zal móeten er meer dan 5 in minstens één maand zitten.

=**duivenhokprincipe: Varianten**

- $n > k : \exists\, hok\ met\ minstens\ 2\ duiven$
- $n < k : \exists\, leeg\ hok$
- $n > q \cdot k \,(q \in \mathbb{N}_0) : \exists\, hok\ met\ minstens\ (q+1)\ duiven$
- $n = k : als\ alle\ hokken\ gevuld\ zijn, zit\ er\ één\ duif \in elk\ hok\ (zie\ hfdst.\ II, relaties, |A| = |B| < +\infty\ Inj. + Sur.)$

Eigenschap: in een groep van 6 mensen kan je er steeds 3 vinden die elkaar kennen of 3 die elkaar niet kennen



Opm: Bewijzen via opsommen? #mogelijkheden = 2^{15} = #symm. Relaties waarbij $(a, a) \notin R$ Te Bewijzen: er bestaat groene, of rode driehoek

- Kijk vanuit A. $\exists\, 5\ verbindeningen$, in 2 kleuren: n = 5, k = 2
  Uit het duivenhokprincipe: $\exists\, kleur\ met\ 3\ verbindingen$
  W.l.o.g: A is verbonden met B,C,D in het groen
  - Kijk nu naar driehoek BCD, er zijn 2 gevallen:
    - BCD is rode driehoek $\Rightarrow \exists\, rode\ driehoek$ OK
    - BCD heeft minstens 1 groene lijn $\Rightarrow \exists\, groene\ driehoek$ OK

VEREENVOUDIGEN:

Voorbeeld: eigenschap: als ab + bc + cd + da = $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, dan a = b = c = d $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

Probeer eens met ab + ba = $a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Nu volledig: uit ^ $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da = 0$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + \ldots = 0 \Rightarrow (a-b)^2 + \ldots = 0 : elke\ term\ moet\ 0\ zijn\ want\ allemaal\ positief$ dus a=b=c=d

Hoofdstuk 4: Tellen

Voorbeeld: kiezen €10, Eet ik kip, spaghetti **of** sushi of een van de 20 speelfilms.
Hoeveel keuzes? 20 + 3 = 23

En met €20? Eten EN film: 20 · 3 = 60

Somregel: $|A|=|B|=|A\cup B|$ (A, B disjunct)
n(A) manieren om A te doen
n(B) manieren om B te doen
dan zijn er n(A) + n(B) manieren om A **OF** B te doen

Productregel: $|A|\cdot|B|=|A\times B|$
n(A) manieren om A te doen
n(B) manieren om B te doen
dan zijn er n(A) · n(B) manieren om A **EN** B te doen

We maken dan koppels (a, b) met $a\in A\, en\, b\in B$

<u>Voorbeeld 1</u>: Hoeveel bestandsnamen kan je maken met letters of cijfers? De lengte mag maximaal 32 karakters zijn. Je moet starten met een letter.

$n=\sum_{k=1}^{32} 26\cdot 36^{k-1}=\sum_{j=0}^{31} 26\cdot 36^{j}=26\frac{36^{31}-1}{36-1}$(laatste stap met meetkundige reeks)

<u>Voorbeeld 2</u>: Trump bezoekt 50 (verschillende) staten, hoeveel mogelijke volgordes?

$n=50!$

Uitbreiding: … met kortste afgelegde afstand (= traveling salesmen (TSP))

<u>Voorbeeld 3</u>: Matrixvermenigvuldiging

$C=A\,B\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{jk}=c_{ik}\, met\; A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times m}$

Hoeveel bewerkingen nodig in functie van n?

Opl: $\forall c_{ik}: doe\, zoals\, voor\; c_{11}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,b_{j1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots$

$N=n^2(2n-1)(=O(n^3))$

<u>Voorbeeld 4</u>: Hoeveel (positieve) delers heeft $n=p_1^{\alpha_1}+p_2^{\alpha_2}+...+p_k^{\alpha_k}$ met $p_i\, priem, alpha_i\in\mathbb{N}$

Opl: elke deler d = $p_1^{\beta_1}+p_2^{\beta_2}\,...\,p_k^{\beta_k}$

Voorbeeld: 12 = $2^2\cdot 3 = 2^2\cdot 3^1\cdot 5^0$

Hoeveel manieren om β te kiezen? $\beta_j\in\{0,1,2,3...\alpha_j\}$dus $\alpha_j+1\, mogelijkheden$

#mogelijkheden: $\#d=\prod_{j=1}^{k}\alpha_j+1$

<u>Voorbeeld 5</u>: Trouwfeest met 10 gasten aan 1 (ronde) tafel

#oplossingen? Enkel wie naast wie zit is belangrijk

$n=\frac{10!}{10\cdot 2}=\frac{9!}{2}\Leftarrow DELINGSREGEL$ (delen door 10 om draaiingen niet dubbel te tellen, 2 om spiegelingen niet dubbel te tellen)

Delingsregel:
n(A) manieren om A te doen
n(B) manieren om B te doen
en *voor elke* manier om B te doen, zijn er k manieren om A te doen
Dan $n(B)=\frac{n(A)}{k}$

Let op met delingsregels!

<u>Voorbeeld 6</u>**:** Barcode: dunne (0) en dikke (1) lijnen, W/Z

#verschillende barcodes kan je maken met 13 enen of nullen, gelet op symmetrie (ondersteboven scannen)?

#codes: 2^{13}
! codes die omgekeerd hetzelfde zijn? Palindroombarcode #p = 2^7

#niet-palindroombarcodes = $2^{13} - 2^7$

#bruikbare barcodes: (#niet-pal. /2) + #pal. $\frac{2^{13}-2^7}{2}+2^7=2^{12}+2^7-2^6$

<u>Voorbeeld 7</u>: Rijbewijs? 7; Busabonnement? 22; Op kot? 7; R+B: 2; R+K: 2; B+K: 3; alle 3: 0

Stelling: Inclusie- exclusieprincipe………. Het antwoord is: 29

Inclusie- exclusieprincipe:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{j=1}^{n} A_i\right|$$

Hoorcollege woensdag 23/10/2024

<u>Voorbeeld 9</u>**:** Trap met 5 treden
Op hoeveel manieren kan je deze oplopen?
Je stapt altijd op 0 en 5. #manieren = #deelverzamelingen van {1, 2, 3 4} = $|2^A|=2^4=16$

Alternatief: beslissingsboom. Teken een boom beginnende bij 0 en vertak steeds naar welke treden je nog kan gaan.

Combinatoriek

<u>Voorbeeld 10</u>: 52 studenten. Op hoeveel manieren kan ik 5 studenten hieruit op een rij zetten.
= $\frac{52!}{47!}=\textbf{\textit{Variatie}}\ van\ 5\ uit\ 52(k\leq n)=V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}(=P(n,k))$
- Volgorde van belang
- Geen herhaling

Als k = n: **Permutatie** $V_n^n=n!=P_n$

<u>Voorbeeld 11:</u> Op reis 2 uit 4 gezinsleden, op hoeveel manieren?

Combinatie = $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

Tussenstappen: zet 2 gezinsleden op een rij P(2, 4), maar elk koppel wordt dubbel geteld: delingsregel: delen door k!

Algemeen: $C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ = binomiaalcoëfficiënt

- Volgorde niet van belang
- Geen herhaling

Voorbeeld 12: Ontgrendelen van code van 6 cijfers

Herhalingsvariatie: $\overline{V}_n^k = n^k$
- Volgorde van belang
- Herhaling mag

Voorbeeld 13: Sint komt naar de klas. Iedere student kan kiezen uit een iPad, een iPhone, een macbook (Hans is een apple fanboy). Hoeveel keuzes zijn er in totaal met 54 studenten? $3^{54} = \overline{V}_3^{54}$

Hoeveel mogelijke lijstjes? k = 54, n = 3. Je kiest 54 keer uit 3 objecten

Herhalingscombinatie: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1}$
- Volgorde niet van belang
- Herhaling mag

Tussenstappentrucje: Teken 54 + 3 – 1 bolletjes (om scheidingslijnen een bolletje te geven.
\# manieren om een lijstje te maken = # aantal manieren om scheidingslijnen te zetten
= C_{56}^2

Voorbeeld 13b: Hoeveel oplossingen over ℕ heeft $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, #opl. $\overline{C}_n^k$

Voorbeeld 14: Op hoeveel manieren kan je 30 balletjes in 3 bakken steken?
Herhaling mag, volgorde niet belangrijk
n=3, k = 30

\# manieren: $\overline{C}_3^{30} = C_{32}^2$

Voorbeeld 15: RUIT. Hoeveel anagrammen? = 4!

Herhalingspermutatie: (=#anagrammen): $\overline{P}_n^{x,y,\ldots,z,} = \frac{n!}{x!y!\ldots z!} = \binom{n}{x,y,\ldots z}$ $met\ x + y + \ldots + z = n$

= multibinomiaalcoëfficiënt
- Herhaling mag
- Volgorde van belang

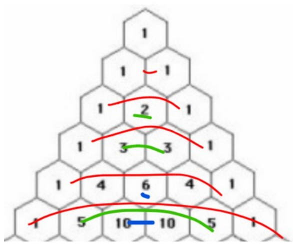
DRIEHOEK # = $\frac{8!}{2!}$

PARALLELLEPIPEDUM # = $\frac{17!}{2!4!3!3!}$

Uitbreiding: $\binom{n}{k}$ met $n \notin \mathbb{N}$ $vb.\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!}[n(n-1)...(n-k+1)]$ *er zijn k factoren*

Dus $\binom{-1/2}{3} = \frac{1}{3!}((\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)(\frac{-1}{n}-2)) = \frac{-5}{16}$, toepassing zie later, Vb. $(1+x)^{\frac{-1}{2}}$

Combinatorische gelijkheden:



1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: Algabraïsch bewijs

Bewijs: LL = $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ = RL

Optie 2: bewijs via combinatorisch argument.

⇒ los een telprobleem op op 2 manieren

Bewijs: LL = kies k objecten uit V = {1,2,3,...,n}, dan is RL (n-k) elementen om in V te laten en het resultaat is hetzelfde ⇒ LL = RL

2. De gelijkheid van Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

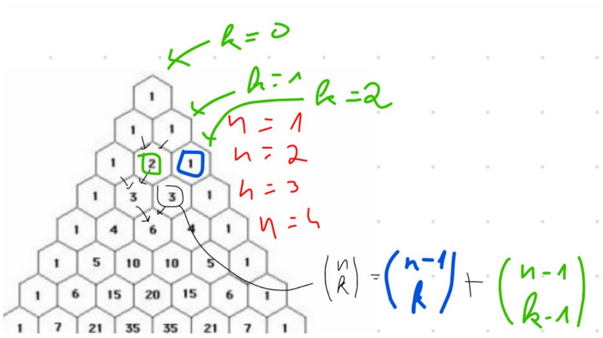
Algebraïsch bewijs: RL uiteenhalen en op gelijke noemer zetten maal $\frac{(n-k)}{(n-k)}$ bij LT en $\frac{k}{k}$ bij RT

Combinatorisch argument:

Bewijs : LL: kies k elementen uit V = {1, 2, ..., n}
RL: is een som van :
manieren om te zorgen dat element n zeker wordt gekozen = (k-1) keer kiezen uit (n-1) elementen (want n al gekozen)
manieren waarbij we n niet kiezen = n-1 keer kiezen uit k elementen
Dus totaal aanal manieren (doe n er in **of** er uit): som van vorige

Verband met driehoek van Pascal?
$(A+B)^3 = A^3 + \mathbf{3} A^2 B + 3AB^2 + B^3$

Aantal manieren om 2·A te kiezen uit 3 = $\binom{3}{2}$



3. $\binom{n}{p}\binom{p}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$: Algebraïsch bewijs

$$RL = \frac{n!}{\cancel{(n-k)!}\,k!} \cdot \frac{\cancel{(n-k)!}}{(p-k)!\,((n-\cancel{k})-(p-\cancel{k}))!}$$

$$= LL = \frac{n!}{(n-p)!\,\cancel{p!}} \cdot \frac{\cancel{p!}}{(p-k)!\,k!} \left(=\binom{n}{n-p,\,p-k,\,k}\right)$$

Bewijs via combinatorisch argument:
Vb. Rode duivels: selectie door bondscoach
men volgt n = 50 spelers
dan neemt men p = 23 spelers in de selectie, en hiervan kiest men k = 11 spelers voor de basisgeval

2 manieren om te kiezen:
- Manier 1: kies p uit n: $\binom{n}{p}=\binom{50}{23}$ *en nadien*$:$ *k uit deze p*$:\binom{p}{k}=\binom{23}{11}$

\# mogelijkheden voor selectie en basis = $\binom{50}{23}\binom{23}{11}=\binom{n}{p}\binom{p}{k}$

- Manier 2: kies eerst de basis elf

$\Rightarrow$ *# =* $\binom{50}{11}=\binom{n}{k}$*, kies dan de reserves* $(\in$ *selectie, niet* $\in$ *basis*$):=\binom{50-11}{23-11}=\binom{n-k}{p-k}$
Dus linkerlid = rechterlid

Hoorcollege 28/10/2024

In de driehoek van Pascal is de som van elke rij: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Idee: in elke rij wordt elk getal 2 keer gebruikt in de volgende rij

<u>Algebraïsch bewijs via inductie naar n</u>:

Basisgeval: $n=0: LL=\sum_{k=0}^{0} is \binom{0}{k}=\binom{0}{0}=1=RL=2^0=1$

IH: stel dat dit klopt voor n = m: $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m$

TB: klopt voor n = m + 1: $\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}=2^{m+1}$

Bewijs van de inductiestap:

LL=$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}=\binom{m+1}{0}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}+\binom{m+1}{m+1} \overset{gelijkheid\,van\,Pascal}{=} 1+\sum_{k=1}^{m+1}\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]+1$, neem k-1=l

$$=\binom{m}{m}+\sum_{l=0}^{m-1}\binom{m}{l}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}+\binom{m}{0}\overset{IH}{=}2^m+2^m=2^{m+1}$$

Bewijs via combinatorisch argument:

LL=$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} en \binom{n}{k}$: #manieren om k objecten uit n objecten te kiezen
= #deelverzamelingen met k elementen uit A, |A|=n

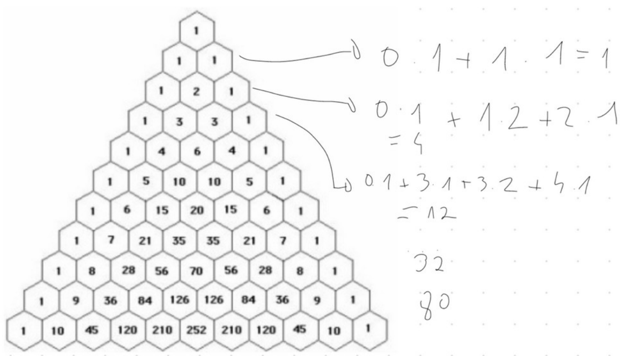
=$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$= #deelverzamelingen met 0 el. + ... #deelverzamelingen met n el. (uit n)

=#deelverzamelingen van A als |A| = n

RL = #deelverzamelingen van A = 2^n

■

Volgende eigenschap:



Vectorieel vermenigvuldigen met (0,1,2,...n) ^

Eigenschap: $\sum_{i=0}^{n} i\cdot\binom{n}{i}=n\cdot 2^{n-1}$

Bewijs via combinatorisch argument:

LL=? Product: $\binom{n}{i} en\, dan\, vermenigvuldigen\, met\, i$

Groep van n personen, je kiest i vertegenwoordigers.
In deze groep kies je één voorzit(s)ter. # = $\binom{i}{1}$=i

#mogelijke delegaties: $\sum_{i=\mathbf{1}}^{n}\binom{n}{i}\cdot i=\sum_{i=\mathbf{0}}^{n}\binom{n}{i}\cdot i=LL$

RL: kies eerst de voorzit(s)ter ⇒#=n
Kies nadien nog maximaal (n – 1) vertegenwoordigers ⇒#=2^{n-1}: samen is dit $n\cdot 2^{n-1}$
■

Verwante eigenschap: $\sum_{i=\overset{\text{want termen met } i=0 \text{ en } i=1 \text{ zijn } 0}{2}}^{n}\binom{n}{i}i(i-1)=n(n-1)2^{n-1}$, Bewijs via combinatorisch argument:

Methode 1 (LL):

Kies een groep van i vertegenwoordigers (minstens 2) #=$\binom{n}{i}$

Kies een voorzit(s)ter en een ondervoorzit(s)ter: #=i en #i-1
= $\binom{n}{i} i(i-1)$

Methode 2 (RL):

Kies 1 voorzit(s)ter en dan 1 ondervoorzit(s)ter: #n en #n-1
Vul aan met maximaal (n-2) vertegenwoordigers

$\Rightarrow RL = n(n-1)2^{n-2}$

■

Binomium van Newton:
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^{2y} + 3xy^2 + y^3$
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ **want de som van de machten van x en y is n** $n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \ldots n\}$

Bewijs via algebra (inductie naar n):

Basisgeval: n = 0 LL = $(x+y)^0 = 1$
RL= $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1\, OK$

IH: $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$

TB: $(x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{(m+1)-k}$

Bewijs via inductie naar n:

LL= $(x+y)^{m+1} = (x+y)^m (x+y) \stackrel{IH}{=} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k} (x+y)$

$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{k+1} y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m+1-k}$

$\stackrel{stel\, k+1=l \Rightarrow k=l-1}{=} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{l-1} x^l y^{m-(l-1)} + \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} x^l y^{m+1-l}$

$= \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l-1} x^l y^{m-l+1} + \binom{m}{m} x^{m+1} y^0 + \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l-1} x^l y^{m-l+1} + \binom{m}{0} x^{m+1} y^0$, Gelijkheid van Pascal

$$=\sum_{l=1}^{m}\binom{m+1}{l}x^l y^{m+1-l}+\binom{m+1}{m+1}x^{m+1}+\binom{m+1}{0}y^{m+1}$$

$$=\sum_{l=0}^{m+1}\binom{m+1}{l}x^l y^{m+1-l}$$

■

Bewijs via combinatorisch argument:

$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\ldots n\,factoren\ldots$

= $x^n+y^n+nx^{n-1}y+..?$, n: op hoeveel manieren kan ik bij n factoren 1 y kiezen

Algemeen: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}A_k x^k y^{n-k}(met\ A_k\ een\ onbekende\ coëfficiënt)$

Vanwaar is de term A $_k$ afkomstig? $A_k x^k y^{n-k}$

Je moet k keer x kiezen (en dus automatisch (n - k) keer y uit n factoren

$\Rightarrow A_k=\binom{n}{k}$

■

Gevolg van binomium van Newton*:* Stel x = y = 1 $\Rightarrow 2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k}=vorige\ eigenschap$

Uitbreiding: Multinomium van Newton

$$(x_1+x_2+\ldots x_r)^n=\sum\binom{n}{n_1,n_2,\ldots n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r}$$

$n_1+n_2\ldots n_r=n\ met\ n_i\in\mathbb{N}$ en $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$

Voorbeelden:

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^c+ab^2+ac^2+bc^2+abc$

Coëfficïent van a^2b = coëfficiënt van $a^2b^1c^0$=$\binom{3}{2,1,0}=\frac{3!}{2!1!0!}=\frac{6}{2}=3$

Coëfficiënt van $a^1b^1c^1$ = $\binom{3}{1,1,1}=\frac{3!}{1!1!1!}=6$

Verdere uitbreiding:

Wat is $\sqrt{\frac{1006}{1000}}=\sqrt{1{,}006}=(1+0{,}006)^{\frac{1}{2}}\ is\ van\ de\ vorm\ (x+y)^n\ met\ x=1\,,\ y=0{,}006\,,\ n=\frac{1}{2}$

Stelling: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ als |x| < |y|: **De Binomiaalreeks**

Voorbeeld:

$(x+1)^{1/2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}x^k 1^{1/2-k}$ *Binomiaalreeks met* $x=1, n=1/2$

$=\binom{1/2}{0}1^0+\binom{1/2}{1}x^1+\binom{1/2}{2}+\binom{1/2}{3}x^3+\dots$ want $(\binom{1/2}{0}=\frac{1}{0!};\binom{1/2}{1}=\frac{1/2}{1!};\binom{1/2}{2}=\frac{1/2(1/2-1)}{2!}$...

$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\dots$

Gevolg: $\sqrt{1{,}006}\overset{x=0{,}006}{=}1+\frac{1}{2}(0{,}006)+\ldots\approx 1{,}003$

$\binom{\alpha}{k}$ *met* $\alpha\in\mathbb{Z}:\binom{\alpha}{k}\overset{\text{def}}{=}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\left(\overset{als\,\alpha\in\mathbb{N}}{=}\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!\,k!}\right)$

$=\frac{-|\alpha|(-|\alpha|+1)\ldots-(|\alpha|-k-1)}{k!}=(-1)^k(k-1+|\alpha|)\ldots\frac{(a+|\alpha|)\cdot|\alpha|}{k!}=(-1)^k\frac{(|\alpha|+k-1)!}{(|\alpha|-1)!\,k!}$

$\overset{\alpha=-1}{\Rightarrow}\binom{\alpha}{k}=(-1)^k\frac{(k-1-\alpha)!}{k!(\alpha-1)!}=met\,\alpha>0\,of\,(-1)^k\frac{(k-1+\alpha)!}{k!(\alpha-1)!}$

Hoorcollege 30/10/2024

Kansrekening

Definities:

Voorbeeld 1: dobbelsteen Ω ={1,2,3,4,5,6}

1) Kansruimte = **universum** = sample space
= gebeurtenisruimte
= verzameling van alle mogelijke uitkomsten bij een kanstheoretisch experiment
Notatie, Ω, V, ...

2) **Gebeurtenis**: $A\subset\Omega$ *Voorbeeld, een oneven getal gooien, A = {1,3,5}*
Voorbeeld, hoger gooien dan 4, B = {5,6}
Voorbeeld, 2 of lager gooiten, C = {1,2}

3) Disjuncte gebeurtenis:
$A\,en\,B$ ***disjunct*** $\Leftrightarrow A\cap B=\emptyset$
In dit voorbeeld, A en B zijn niet disjunct. B en C zijn disjunct

4) Verzameling met 1 element = "**singleton**"

5) Gebeurtenis met 1 element noemen we een **atomaire gebeurtenis**
Voorbeeld: D = {6}, "een zes gooien"

6) Gebeurtenis met meer dan 1 element: **Samengestelde gebeurtenissen**.
Voorbeeld: A,B,C uit bovenstaande voorbeelden

7) Een kanstuimte is **equiprobabel** als alle atomaire gebeurtenissen met dezelfde kans voorkomen.
Voorbeeld: Gooien met 1 eerlijke dobbelsteen (kans op elke atomaire gebeurtenis is 1/6 = 1/|Ω|

Voorbeeld 2: werpen met 2 eerlijke dobbelstenen
$\Omega_1 =$ de som van de ogen van beide dobbelstenen
= {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, kans op 7: 1/6, kans op 2 of 12: 1/36
Voorbeeld 3: werpen met 2 eerlijke dobbelstenen met elks een andere kleur: rood en blauw
$\Omega_2 = \{alle\, tupels(worpRood, worpBlauw)\}$

deze kansruimte is equiprobabel, steeds 1/36

Voorbeeld 4: werpen met 2 identieke dobbelstenen, beschouw de koppels

Voorbeeld: $(2,3) \equiv (3,2)$, een 2 gooien met de ene en een 3 met de andere
Notatie, <2,3>

$\Omega_3 =$ {<1,1>,<1,2>,<1,3>...<2,2>,<2,3>...<6,6>} dus geen <2,1>...
Deze kansruimte is niet equiprobabel: <1,2>: 1/18, <1,1>: 1/36

7) **Kansmaat** op Ω is een functie
ℙ: 2^Ω (=alle gebeurtenissen)→{0,1]: A → $\mathbb{P}(A)$

die voldoet aan
$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1, als\, A\, en\, B\, disjunct: is\, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *(wiskundige definitie)*

Voorbeeld 5: A={1,2,3} ⊂Ω={1,2,3,4,5,6}
$\mathbb{P}(A) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) \overset{eerlijke\, dobbelsteen}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

Gevolg: je kan ℙ vinden door te kijken naar atomaire gebeurtenissen:

Stel A = {e | e∈A} dan is ℙ(A) = $\sum_{e \in A} \mathbb{P}(\{e\})$

Soms wordt ℙ gedefinieerd via de kans op atomaire gebeurtenissen

Alternatieve definitie: $\mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0,1]: e \rightarrow \mathbb{P}(e)$ *met* $\sum_{e \in \Omega} \mathbb{P}(e) = 1$ *dan* $\mathbb{P}(A) = \sum_{e \in A} \mathbb{P}(e)$

dit werkt voor eindige en aftelbare Ω (anders $0 \cdot \infty$*)*

We noemen een kansmaat equiprobabel als:
$\exists a \in [0,1]\, zodat\, \mathbb{P}(\{e\}) = a, \forall e \in \Omega$

Eigenschap: Als ℙ equiprobabel is en 0<|Ω|<+∞

dan is $a = \frac{1}{|\Omega|}\, en\, dus\, \mathbb{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{\Omega}|}$

Voorbeeld 6: Som van de ogen van 2 dobbelstenen:
ℙ(som = 3) = $\frac{|A|}{|\Omega_2|} = \frac{|\{(1,2),(2,1)\}|}{36} = \frac{2}{36}$

$\mathbb{P}$(som = 4) = $\frac{|A|}{|\Omega_2|}=\frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

$\mathbb{P}$(n) = $\{\frac{n-1}{36}:n\leq 7;\frac{13-n}{36}:n>7\}$

Alternatief, maak een tabel, en lees daar de waarde uit.

D1, D2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Voorbeeld 7: kans dat de som van 2 dobbelsteenworpen oneven is?
Ω={2,3,4,...,12}(niet equiprobabel)
$\mathbb{P}$({3,5,7,9})=$\mathbb{P}$({3})+$\mathbb{P}$({5})+$\mathbb{P}$({7})+$\mathbb{P}$({9})$\mathbb{P}$({11})

$=\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{18}{26}=\frac{1}{2}$

$\mathbb{P}$(even som gooien) = 1 – $\mathbb{P}$({3,5,7,9}) = 1 – 0,5 = 0,5

8) Het **complement** van A is $\overline{A}:\overline{A}=\Omega\setminus A$
aangezien $A\cap\overline{A}=\emptyset, A\cup\overline{A}=\Omega\Rightarrow\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(\overline{A})=1$

$\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{A}})\mathbf{=1-}\mathbb{P}(\boldsymbol{A})$

Wat als A en B niet disjuct zijn?

- Voor equiprobabele kansmaten:
  $\mathbb{P}(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|\Omega|}=\frac{|A|}{|\Omega|}+\frac{|B|}{|\Omega|}-\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
- Geldt dit ook voor niet-equiprobabele kansmaten? JA.

Eigenschap: $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

Bewijs: $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\setminus B)+\mathbb{P}(A\cap B), \textit{want ze zijn disjunct}$

$\Rightarrow\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

$=\mathbb{P}(A\setminus B)+\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$

$\overset{disjunct}{=}\mathbb{P}((A\setminus B)\cup B)=\mathbb{P}(A\cup B)$

■

Voorwaardelijke kans

1) A en B zijn **onafhankelijke gebeurtenissen** $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B)_{=A\,en\,B\,tegelijk}=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

Dus de kansen van beide gebeurtenissen beïnvloeden elkaar niet.

<u>Voorbeeld:</u> tegelijk werpen met een rode en een blauwe dobbelsteen

$\mathbb{P}(5,6)=\mathbb{P}(R)\cdot\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\{5\})\cdot\mathbb{P}(\{6\})=1/36$

Voorbeeld: A = even gooien met rood
B = ≥ 5 gooien met blauw

Zijn deze gebeurtenissen onafhankelijk?

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(\{2,4,6\})=1/3$

$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\{5,6\})=1/2$

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{(2,5),(2,6),(4,5),(4,6),(6,5),(6,6)\})=1/6$

Dus onafhankelijke gebeurtenissen

<u>Voorbeeld:</u> A = 2 gooien met blauw, B = som van de ogen is acht

$\mathbb{P}(A)=1/6\,;\mathbb{P}(B)=\frac{13-8}{36}=\frac{5}{36}\Rightarrow\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)=\frac{5}{216}$

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{(2,6)\})=1/36=6/216\neq 5/216\Rightarrow ze\ zijn\ \textbf{niet}\ onafhankelijk$

Voorbeeld: A = 2 gooien met blauw, B = som van de ogen is zeven

$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{6}\,;\mathbb{P}(B)=\frac{7-1}{36}=\frac{1}{6}\Rightarrow\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)=\frac{1}{36}$

$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{(2,5)\})=1/36\Rightarrow ze\ zijn\ \textbf{wel}\ onafhankelijk$

<u>Voorwaardelijke kans:</u>

$\mathbb{P}(A|B)=kans\ op\ A\,,gegeven\ B=kans\ op\ A\,,wetende\ B$

$\stackrel{def}{=}\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

<u>Voorbeeld:</u> Kans op blauwe 2 gegeven som = 8 (met 2 dobbelstenen)
A = blauwe 2, B = (som = 8) $P(A|B)=\frac{\mathbb{P}A\cap B}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(\{(2,6)\})}{\mathbb{P}(B)}=\frac{1/36}{\frac{18-8}{36}}=\frac{1}{5}$

$\mathbb{P}$(blauwe 2 gegeven dat de som 7 is) = $\mathbb{P}$(A|B) = $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(\{(2,5)\})}{1/6}=1/6$

Merk op: hier is $\mathbb{P}(A|B)=\frac{1}{6}=\mathbb{P}(A)\,dus\,\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A)$

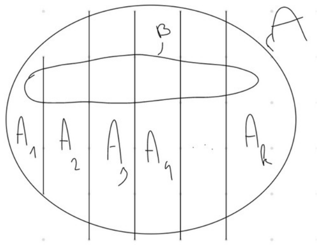
$\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\Rightarrow$ A en B onafhankelijk

Eigenschap: $\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow A\, en\, B\, onafhankelijk$

Hoorcollege 4/11/2024

Somregel:

A_i: *partitite* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *als* #j = $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$



$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

Bewijs:

$\mathbb{P}(B) \overset{X\cap Y=\emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(X\cup Y)=\mathbb{P}(X)+\mathbb{P}(Y)}{=} \mathbb{P}((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup\ldots\cup(B\cap A_k))=\mathbb{P}(B\cap A_1)+\ldots+\mathbb{P}(B\cap A_k)$ en

$\frac{\mathbb{P}(B\cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(B|A_1) \Rightarrow \mathbb{P}(B\cap A_i)=\mathbb{P}(\overset{(*)}{B}|A_i) \Rightarrow \mathbb{P}(B|A_i)(A_i)=\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B\cap A_i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$

■

Gevolg: **regel van Bayes:**

$$\mathbb{P}(A_j|B)=\frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$$

Bewijs: $\mathbb{P}(A_j|B)=\frac{\mathbb{P}(A_j\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \underset{somregel}{\overset{(*)}{=}} \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}$

■

Logische paradoxen: zie slides Blackboard

Keuze van een geneesmiddel (1):
Score van een geneesmiddel: $\in\{1,2,3,4,5,6\}$
Voor 46% van de bevolking is B het beste, voor 54% is A de beste (dus A is beter)
Keuze van een geneesmiddel (2):
Met 3 medicijnen A: ~30% B: ~36% C: ~34% (dus B is het beste en A is het slechtst)

Dus of C bestaat of niet bestaat, maakt dat A de beste of de slechtste is.

Kansverdeling:

Tot hier: $A\subset\Omega$ en bekijk $\mathbb{P}(A)\in[0,1]$

Def: We noemen X een **stochastische variabele** of **toevalsveranderelijke** als X een reëelwaardige functie is: X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Bv.: Je gooit met 2 eerlijke dobbelstenen.

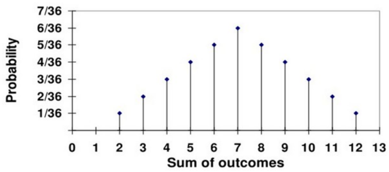
Ω = {(1,1),(1,2)....(6,6)}
X = som van de ogen: X((1,1))=2

ℙ(X=5) = ℙ({(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}) = $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

ℙ(X = x) = ℙ({$s \in \Omega \mid X(s)=x$**})**

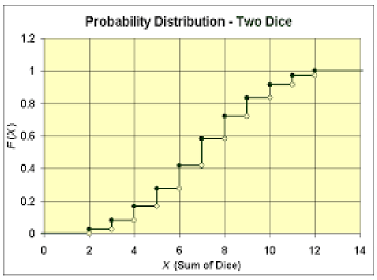
- **Kansdichtheidsfunctie (probability density function = pdf)**
  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1] : x \rightarrow \mathbb{P}(X=x)$

  Voorbeeld met som van de ogen van een dobbelsteen: $f_X(x)=\left\{ \begin{matrix} \frac{x-1}{36} 2 \le x \le 7, x \in \mathbb{N} \\ \frac{13-x}{7} < x \le 12, x \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$



Vaak: Im(X) $\rightarrow [0,1]$

- ***Kansverdelingsfunctie (cumutative distribution function = cdf)***
  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1] : x \rightarrow \mathbb{P}(X \le x)$
  Voorbeeld met som van de ogen van een dobbelsteen:



x	f_x	F_X
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36

<u>Overzicht van enkele verdelingen:</u>

1. **<u>Uniforme verdeling:</u>**
   <u>Vb.</u> X = #ogen bij werpen van 1 eerlijke dobbelsteen. (f_x Allemaal 1/6) Not.: X~U({1t/m6})

   Algemeen: X ~ U({x_1,x_2,...,x_n} *drlarrow* $\mathbb{P}(X=x_i)=\frac{1}{n}$

2. **<u>Bernoulliverdeling:</u>**
   Bernoulli-experiment: kanstheoretisch experiment met kans op slagen p en kans op falen $(1-p=q)$

Ω = { “slagen”, “falen”}
X(“slagen”) = 1
X(“falen”) = 0

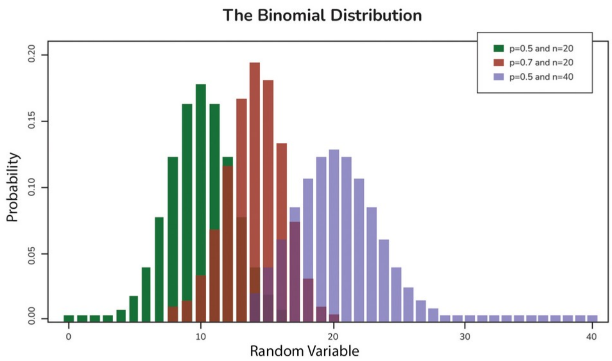
$f_X : \Omega \rightarrow [0,1] : \begin{matrix} 1\, als\, slagen \\ 0\, als\, falen \end{matrix}$

$\mathbb{P}(X=x) = \{ \begin{matrix} p\, als\, x=1 \\ 1-p\, als\, x=0 \end{matrix}$

<u>Vb.</u> Een 6 gooien met 1 dobbelsteen, is een Bernoulli-experiment met $p=\frac{1}{6}; q=\frac{5}{6}$

Hier X~B($1, \frac{1}{6}$) (1= in 1 experiment) (1/6 = p) : B: Binomiale verdeling

3. **<u>Binomiale verdeling:</u>**



X~(n, p) komt overeen met het aantal successen in n Bernoulli-experimenten met kans op slagen p.

ℙ(X=k) = ?
Vinden van B(n, p)?

Noem succes: S, falen: F

Dan is elke reeks van n experimenten een woord met n letters (Vb. $\underbrace{SFFFSS \ldots FSSS}_{n\, letters}$)

Hoeveel woorden met k successen? $\binom{n}{k}$

Wat is de kans op zo 1 woord? $p^k \cdot q^{n-k} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

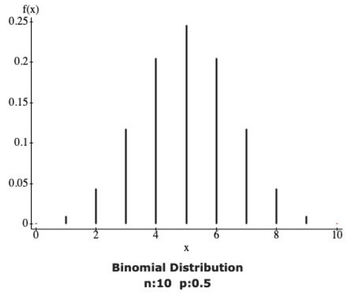
In totaal: ℙ(X=k) = $\binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Hoorcollege 6/10/2024

Bewijs: Is de som van de kansen 1 voor de Binomiale verdeling?

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

■



Voorbeeld: 10x een munt opgooien. X = #kop

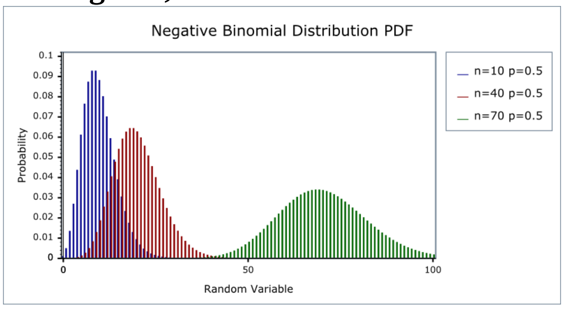
$X \sim B(10, \frac{1}{2})$

$\mathbb{P}(X=0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$, $\mathbb{P}(X=1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{10}{1024.}$ ...

4. **Negatief Binomiale verdeling:**
   "Hoe vaak zal ik moeten gooiten met een dobbelsteen om n keer een 6 te gooien?"

   Def: **X~NB(n, p), doe onafhankelijke Bernoulli-experimenten met kans op succes p en stop wanneer je n successen hebt, #pogingen dat nodig was, is k.**

   Gevolg: $\mathbb{P}$(X=k) = 0 als $k<n$

   Formule? Welk woord met letters S,F komt overeen met n-de succes na k pogingen?
   $\underbrace{SSFSSFFF\ldots}_{k-1} S \leftarrow eindigen\, met\, succes$

   #woorden (lengte k-1, bevat n-1 keer S) = $\binom{k-1}{n-1}$

   kans op zo'n woord = $p^n \cdot q^{k-n}$ met, n=#S; en k-n = #F

   $$\Rightarrow \boldsymbol{\mathbb{P}(X=k)\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}}\, als\, X \sim NB(n,p)$$

   Controle dat de kans 1 is?

   $$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{\boldsymbol{k=n}}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \underbrace{p^n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n}}_{dit\, moet\, gelijk\, zijn\, aan\, \frac{1}{p^n} = p^{-n}}$$

   Nog te Bewijzen: $p^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n}$

   Bewijs via binomiale reeks: $(x+y)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} x^l \cdot y^{\alpha-l}\, met\, |x|<|y|$, bij hoge machten van x

   Stel -q=x, 1=y, $\alpha = -n$

$$\overset{\text{Binomiale reeks}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-n}{l} (-q)^l \cancel{1^{-n-l}}$$

$$\overset{\text{stel } k=l+n,\, l=k-n}{\Rightarrow} = \sum_{k=n}^{\infty} (-q)^{k-n} \binom{-n}{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-n} \boldsymbol{(-1)^{k-n} \binom{-n}{k-n}} (*)$$

wegens $\binom{\alpha}{l} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-l+1)}^{l \text{ factoren}}}{l!}$ $voor\ \alpha \in \mathbb{R}$

met $(-1)^{k-n} \frac{\overbrace{(-n)(-n-1)\ldots(-n-(k-n)+1)}^{k-n \text{ factoren}}}{(k-n)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(k-1)}{(k-n)!} = \binom{k-1}{n-1} (**)$

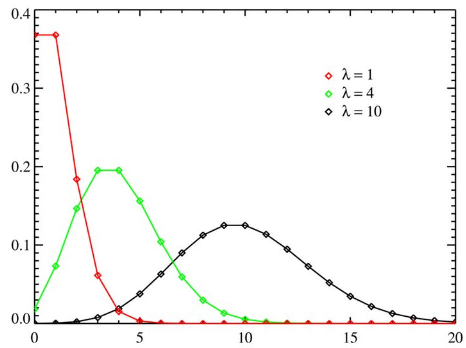
$\binom{k-1}{n-1} \overset{\text{symmetrie}}{=} \binom{k-1}{(k-1)-(k-n)}$

Dus $p^{-n} \overset{*}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-n} \binom{k-1}{n-1} \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$ ■

5. Poissionverdeling

X telt het aantal keer dat “iets” gebeurt in een zekere tijdspanne

Voorbeeld: Hoeveel klanten komen de supermarkt binnen op woensdag tussen 10 en 11u?



X~$P(\lambda)$

Formule (bewijs niet te kennen):

$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ met $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$(=taylerreeks)

Idee van de taylerreeks: benader een functie door een veelterm van graad d zodat de (d-1) eerste afgeleiden in 1 punt gelijk zijn aan die van de oorspronkelijke functie.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$e^x \approx 1 + x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Controle dat som van de kansen 1 is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1\, OK\, ¿$$

Hoe meaken we nieuwe verdelingen?
Voorbeeld som van de ogen met 2 dobbelstenen

X = $X_1 + X_2$ met X_1, X_2~U({1,2,3,4,5,6})

$\mathbb{P}$(X=5) = $\mathbb{P}$((1,4))+$\mathbb{P}$((2,3))+$\mathbb{P}$((4,1))+$\mathbb{P}$((3,2))

= ℙ(1)ℙ(4)+... (want EN) (beide resultaten onafhankelijken)

X_1 en X_2 zijn toevalsveranderelijken (TV)

$X = X_1 + X_2$

$\mathbb{P}(X=k)=\sum_l \mathbb{P}(X_1=l \, en \, X_2=k-l)$, *sommatie loopt over nuttige waarde voor k*

Als X_1 en X_2 <u>onafhankelijk</u> zijn, dan

$\mathbb{P}(X=k)=\sum_l \mathbb{P}(X_1=l)\cdot\mathbb{P}(X_2=k-l)$:**Convolutieproduct**

De kansdichtheidsfunctie van X is het convolutieproduct van de kansdichtheden van X_1 en X_2

Voorbeeld: $X_1 \sim B(n,p); X_2 \sim B(m,p) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim ?$ Hypothese: $X \sim (m+n, p)$

$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X_1+X_2=k)=\sum_l \mathbb{P}(X_1=k \, en \, X_2=k-l)$

$\overset{onafh.}{=} \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}(X_2=k-l)=\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} p^l q^{(n-l)} \binom{m}{k-l} p^{k-l} q^{(m-(k-l))}$

$=\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l} p^k q^{n-l+m-k+l}$ we verwachtten $\mathbb{P}(X=k)=\binom{m+n}{k} p^k q^{(m+n)-k}$

<u>Dus nog te bewijzen</u>: $\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}=\binom{m+n}{k}$

<u>Bewijs via combinatorisch argument:</u>
RL: kies k personen uit een groep met m+n mensen
LL: de groep bestaat uit m mannen en n vrouwen
kies l vrouwen uit n en k-l mannen uit m
$\Rightarrow \# = \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}$, en herhaal dit voor $l \in \{0,1,2,...n\}$voor $n<l\leq k : \binom{n}{l}=0$

Dus X~B(m+n, p)

Hoorcollege 13/11/2024

Verwachtingswaarden en variantie

Stel X een stochast:
$\mathbb{E}[x]=\sum_k k\,\mathbb{P}(X=k)$: $\mathbb{E}$ *van 'expectation value'*
score · kans dat de score optreedt.
Voorbeeld: X~U{$x_1, x_2, ..., x_n$}) $\mathbb{P}(x_i)=\frac{1}{n}$
$\Rightarrow \mathbb{E}[x]=x_1\mathbb{P}(x_1)+x_2\mathbb{P}(x_2)...+x_n\mathbb{P}(x_n)$
$=\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+....+\frac{x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Voor dobbelsteen: U({1,2,3,4,5,6})
$\mathbb{E}[x]=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3,5$

Voor 2 dobbelstenen, som van de ogen = voor uniform:

$$\mathbb{E}[x]=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+...+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

<u>Eigenschap:</u> $\mathbb{E}[x_1+x_2]=\mathbb{E}[x_1]+\mathbb{E}[x_2]$

Bewijs:

$$\mathbb{E}[x_1+x_2]=\sum_k k\cdot\mathbb{P}(X_1+X_2=k)=\sum_k k\sum_l \mathbb{P}(X_1=l\, en\, X_2=k-l)$$

$$\overset{\substack{Stel: x_1=l \Rightarrow x_1+x_2=k\\ x_2=k-l}}{=} \sum_{x_2}\sum_{x_1}(x_1+x_2)\mathbb{P}(X_1=x_1\, en\, X_2\, en\, X_2=x_2)$$

$$=\sum_{x_2}\sum_{x_1}x_1\mathbb{P}(X_1=x_1\, en\, X_2=x_2)+\sum_{x_2}\sum_{x_1}x_2\mathbb{P}(X_1=x_1\, en\, X_2=x_2)$$

$$\overset{\substack{x_1\, en\, x_2\, buiten\, de\, som\, zetten\\ 2\, sommaties\, van\, plaats\, wisselen}}{=} \sum_{x_1}x_1 \underbrace{\sum_{x_2}\mathbb{P}(X_1=x_1\, en\, X_2=x_2)}_{\mathbb{P}(X=x_1)\, want\, alle\, kansen\, van\, x_2\, tezamen\, zijn\, 1,\, 1\, en\, Y=Y} + \sum_{x_2}x_2 \underbrace{\sum_{x_1}\mathbb{P}(X_1=x_1\, en\, X_2=x_2)}_{analoog} = \mathbb{E}[x]$$

$$=\sum_{x_1}x_1\mathbb{P}(X_1=x_1)+\sum_{x_2}x_2\mathbb{P}(X_2=x_2)=\mathbb{E}[x_1]+\mathbb{E}[x_2]$$

■

<u>Voor Bernouilli</u>:

$\mathbb{E}[x] = \sum_k k\cdot\mathbb{P}(X=k)=0\cdot q+1\cdot p=p$ ■

<u>Voor Binomiaal:</u>

$\mathbb{E}[x]\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ *Tip: zoek vorm van binomium of binomiumreeks*

Bewijs:

Lemma:

$$k\cdot\binom{n}{k}=\frac{n!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}(\heartsuit)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[x]\underset{\heartsuit}{=}\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

Stel k-1 = l

$$=\sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l}p^{l+1}q^{(n-1)-l}=p\sum_{l=0}^{n-1}n\binom{n-1}{l}p^l q^{(n-1)-l}=np(p+q)^{n-1}=np, want\ p+q=1$$

<u>Voor negatief binomiaal:</u>

Afleiding steunt op: $\sum_{x=n}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=1\Rightarrow\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}=1$ (*)

$\mathbb{E}[x]=\sum_k k\cdot\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=n}^{\infty}k\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$: ♥ met $k, n\, omgewisseld: n\binom{k}{n}=k\binom{k-1}{n-1}$

$=n\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}p^n q^{k-n}$, Stel $\begin{matrix}k=K-1\\ n=N-1\end{matrix}\Rightarrow k-n=K-1-(N-1)=K-N$

$=n\sum_{K=N}^{\infty}\binom{K-1}{N-1}p^{N-1}q^{K-N}\overset{*}{=}\frac{n}{p}$

Klopt dit met onze intuïtie?

Vb. 6 gooien met een dobbelsteen, hoeveel beurten zijn er nodig?

$\mathbb{E}[x]=\frac{n}{p}=\frac{1}{1/6}=6$

<u>Voor Poisson:</u>

$\mathbb{E}[x]=\sum_k k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$

stel k-1=l = $e^{-e^{-\lambda}}\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}=\lambda e^{\lambda}e^{-\lambda}=\lambda$

<u>Wat is 𝔼[x] voor bekende verdelingen:</u>

1. Uniform: X~($\{x_1, x_2 \dots x_n\}$) $\mathbb{P}(x_1)=\frac{1}{n}$ $\mathbb{E}[x]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
2. Bernouilli: X~B(1, p) $\mathbb{P}(x)=\{\begin{matrix}p: x=1\\ 1-p=q: x=0\end{matrix}$ $\mathbb{E}[x]=p$
3. Binomiaal: X~B(n, p) $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $\mathbb{E}[x]=n\cdot p$
4. Negatieve binomiaal: X~NB(n, p) $\mathbb{P}(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n q^{k-n}$ $\mathbb{E}[x]=\frac{n}{p}$
5. Poisson: X~P(λ) $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\mathbb{E}[x]=\lambda$

Variantie:

Idee van spreiding

Mediaan: 50% hoger, 50% lager
Modus: defenitie

Probeer de breedte van een verdeling te meten en X-𝔼[x] is een maat voor de afwijking.

- Probeer $\mathbb{E}[-\mathbb{E}[x]]=\sum_k((k-\mathbb{E}[x])\mathbb{P}(X=k))$
  $=\sum_k k\,\mathbb{P}(X=k)-\sum_k(\mathbb{E}[x]\cdot\mathbb{P}(X=k))=\mathbb{E}[x]\cdot\mathbb{E}[x]\underbrace{\sum_k\mathbb{P}(X=k)}_{=1}=0$, dus heeft geen zin
- Probeer $\mathbb{E}[|X-\mathbb{E}[x]|]$, rekent niet handig

Probeer $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[x])^2]: kwadraat \begin{matrix}\Rightarrow maakt \geq 0\\ \Rightarrow geeft\ grotere\ bijdage\ aan\ afwijkende\ waarde\end{matrix}=Var(X)$

Let op: Var(X) bevat een kwadraat, Vb. Lichaamslengte: Var(X) in cm²

$\boldsymbol{\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{Var(X)}: standaardafwijking}$

Berekenen?

$\boldsymbol{Var(X) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[X])^2]} = \mathbb{E}[X^2 - 2x\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$

$= \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}[x]] + E[\mathbb{E}[X]^2]$

Eigenschappen:

$\mathbb{E}[aX] = a\sum_{k\cdot\mathbb{P}}(X=k) = a\,\mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}[a] = a$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2(\mathbb{E}[x])^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \boldsymbol{\mathbb{E}[X^2] - (E[X])^2}$

Let op: $\mathbb{E}[X^2] = \sum_k k^2\,\mathbb{P}(X=k) \neq E[x]^2 = \left(\sum_k k\,\mathbb{P}(X=k)\right)^2$

Var(X) voor gekende verdelingen:

1. **Uniform: X~({$x_1, x_2 \dots x_n$})**

dan: $Var(X) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\mathbb{P}(X=x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbb{P}(X=x_i)\right)^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

Speciaal geval: $x_i = i$

$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{12} - \left(\frac{1}{n}\cdot n\frac{(n+1)^2}{2}\right)$

$= \frac{n+1}{12}(2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$

Voorbeeld: 1 dobbelsteen: $\begin{matrix}\mathbb{E}[x] = 3{,}5 \\ Var(X) = \frac{35}{12} \approx 3\end{matrix} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}7$

2. **Bernouilli: X~B(1,P)**

$Var(X) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \sum_{k=0}^{1} k^2\,\mathbb{P}(X=k) - p^2 = 0\cdot q + p - p^2 = p(1-p) = pq$

$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{pq}$

3. **Binomiaal: X~B(n, p)**

$Var(X) = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} p^k q^{n-k} - (np)^2$

$\overset{\heartsuit + start\ vanaf\ 1}{=} \sum_{k=1}^{n} k\,n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - p^2 n^2 \overset{n\ voorop,\ k=(k-1)+1}{=} n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - n^2 p^2$

$$\overset{\heartsuit: \substack{k\to k-1 \\ n\to n-1}}{=} n\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} + \overset{Stel\, k-1=l}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^{l+1}q^{n-(l+1)} - n^2p^2$$

$$\overset{Stel\, k-2=j}{=}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j+2}q^{n-(j+2)} + np\sum_{l=0}^{n=1}\binom{n-1}{l}p^l q^{(n-1)-l} - n^2p^2$$

$$\overset{zonder\, +2\, af}{=} n(n-1)p^2\underbrace{(p+q)^{n-2}}_{=1} + np(p+q)^{n-1} - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

■

Hoorcollege 18/11/2024

Is Var(X + Y) gelijk aan Var(X) + Var(Y)?
=> Ja, als X, Y onafhankelijk

Bewijs: $Var(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2$

$= \mathbb{E}[X^2 + 2X + Y^2] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 \overset{\mathbb{E}\ v/d\ som}{=} ¿\,\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + [Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$= Var(X) + Var(Y) + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y])$

Lemma: als X en Y onafhankelijke TV's zijn, dan is
$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ *Dit lemma vervolledigd het bewijs.*
■

Bewijs: $\mathbb{E}[XY] = \sum_k \mathbb{P}(XY = k)$

$= \sum_k k \sum_l \mathbb{P}(X = l\, en\, y = \frac{k}{l})$, over de mogelijke k en l

Stel $x = l, y = \frac{k}{l} \Rightarrow k = \frac{l\cdot k}{l} = xy$

$= \sum_x \sum_y xy\,\mathbb{P}(X = x\, en\, Y = y)$ *(Let wel, 2de som is nog steeds genest, dit blijft steeds zo)*

Enkel als X en Y onafhankelijk zijn, volgt:

$\overset{definitie\, onafh.}{=} \sum_x \sum_y \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y) = \sum_x \mathbb{P}(X=x)\underbrace{\sum_y y\,\mathbb{P}(Y=y)}_{\mathbb{E}[Y]}$

$= \mathbb{E}[Y]\underbrace{\sum_x x \quad (X=x)}_{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

■

Gevolg:

$x_1 \sim B(1,p) \Rightarrow Var(X_i) = pq$

$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow X \sim B(n,p) \Rightarrow Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$

$X_i \overset{onafh.}{=} Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = pq + \ldots + pq = npq$

■ (Dit bewijst hetzelfde als het laatste bewijs van vorige les, je mag zowel deze 2 als dat van toen geven als gevraagd wordt npq=Var(X) te bewijzen)

4. **Negatieve Binomiaal X~NB(n, p)**

Steun op: $\sum_{K=N}^{\infty} \mathbb{P}(X=K) = 1 : \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^N q^{K-N} = 1$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2\mathbb{P}}(X=k) - \frac{n^2}{p^2} = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2}$

♥ met k en n gewisseld: $n\binom{n}{k} = k\binom{k-1}{n-1}$ = (♥')

$= \sum_{k=n}^{\infty} k\,n \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2} = n \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)\binom{k}{n} p^n q^{k-n} - n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2}$

$♥' \, met \, \frac{k+1}{n+1} \Rightarrow (n+1)\binom{k+1}{n+1} = (k+1)\binom{k}{n}$

$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k+1}{n+1} p^{¿} - n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2}$ gebruik ♥

$= n(n+1) \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^{N-2} q^{K-N} - n \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^{N-1} q^{K-N¿} - \frac{n^2}{p^2}$

p² voorop zetten

$\overset{steunpunt}{=} n\frac{(n+1)}{p} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} = \frac{n}{p^2}(1-p) = \frac{nq}{p^2}$.

5. **Poisson X~P(λ)**

$$Var(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k)-\mathbb{E}[x]^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\sum_{k}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^k}{(k-1)!}-\lambda^2$$

Stel k – 2 = l en k – 1 = j

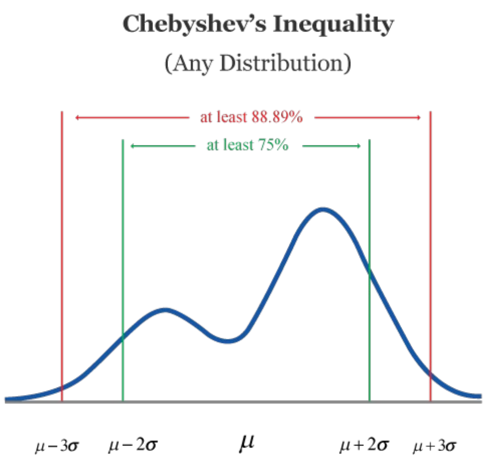
$$=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k+e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot\lambda^k}{(k-1)!}-\lambda^2=e^{-\lambda}\sum_{l=¿}\infty\frac{\lambda^{l+2}}{l!}+e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j+1}-\lambda^2$$

Lambda’s voorop zetten, en dan schrappen

$$=\lambda$$

Stelling van Chebychev (Чебышёв)

X: TV, σ_x: standaardafwijking, $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$



We verwachten dat als α *stijgt*, de kans in de staarten daalt

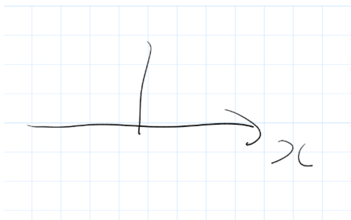
$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[x]-\alpha\sigma_x<X<\mathbb{E}[X]+\alpha\sigma_x)>1-\frac{1}{\alpha^2}$$

Voorbeeld: $\alpha=2$ voor elke verdeling geldt dat:

$$|X-\mathbb{E}[x]|<2\sigma>1-\frac{1}{2^2}=75\%$$

Bewijs:

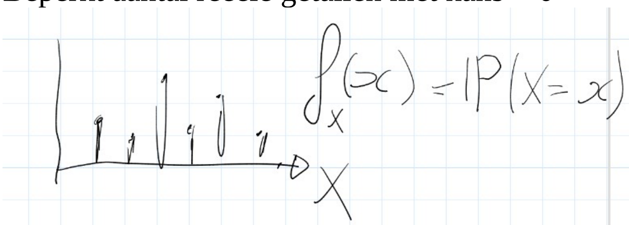
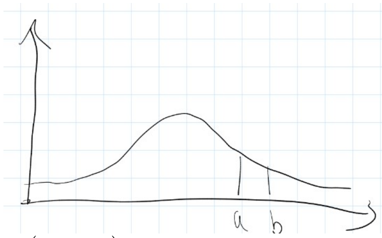
- Geval 1: $\sigma_x=0$
  $$\Rightarrow Var(X)=0=\sum_k (X-\mathbb{E}[X])^2\mathbb{P}(X=k), groter\, dan\, 0$$
  $$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k)=0\, of\, X=\mathbb{E}[X]\,\forall k\Rightarrow \mathbb{P}(X=\mathbb{E}[X])=1$$
  $$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]>\alpha\cdot\sigma_x|)=0<\frac{1}{\alpha^2}$$



- Geval 2: $\sigma_x\neq 0$
  - Stel dan $Y=(X-\mathbb{E}[X])^2, dan\, is\, \mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]=Var(X)=\sigma_x^2$
  - Definieer een “gebeurtenis” A: $|X-\mathbb{E}[X]|>\alpha\sigma_x$ (A: X valt in de staart)

- Het te bewijzen is dan: $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{\alpha^2}$
- Bereken nu: $\sigma_x^2 = \mathbb{E}[Y] = \sum_{a\in\Omega} y \cdot \mathbb{P}(X=a)$
  $= \sum_{a\in A} y(a)\mathbb{P}(Y=a) + \sum_{a\notin A} y(a)\mathbb{P}(Y=a)$
- Omdat y een gevolg is van een kwadraat, en kansen altijd positief zijn
  $\Rightarrow \sigma_x^2 \geq \sum_{a\in A} y(a)\mathbb{P}(X=a)$
  met $y(a) = \left|X(a) - \mathbb{E}[X]^2\right| > \alpha^2 \sigma_x^2$ wegens de def. van A
  $> \sum_{a\in A} \alpha^2 \sigma^{¿} x\, \mathbb{P}(X=a) : \textit{constanten vooraan zetten}$
  $= \alpha^2 \sigma_x^2 \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X=a)$ <u>Dus:</u> $\sigma_x^2 > \sigma_x^2 \alpha^2 \mathbb{P}(A) \overset{\textit{deel door } \alpha^2 \neq 0}{\Rightarrow} \boldsymbol{\frac{1}{\alpha^2} > \mathbb{P}(A)}$ ■

Continue verdelingen en benaderingen

Discrete verdeling	**Continue verdelingen**
Beperkt aantal reëele getallen met kans > 0  	Op een (mogelijk oneindig) interval, zijn alle waarden mogelijk  $\mathbb{P}(X=x)=0$, de kans op 1 specif. waarde is 0 $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ is wel eindig en ≥ 0 $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$
Totale kans: $\sum_k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\equiv\infty}^{\infty} f_X(k) = 1$ Cummulatieve distributiefunctie (**cdf**): $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=-\infty}^{x} f_X(x)$	**Totale kans**: $\mathbb{P}(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx$ Cummulatieve distributiefunctie (**cdf**): $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ <u>Dus:</u> $F_X(x)' = f_X(x)$
$\mathbb{E}[X] = \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$ (=gemiddelde waarde)
$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ $= \sum_k k^2 \mathbb{P}(X=k) - \mathbb{E}[X]^2$	$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[x])^2 f_X(x)\,dx$ $= \int x^2 f_X(x)\,dx - \mathbb{E}[X]^2$

$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$, geldt voor allebei

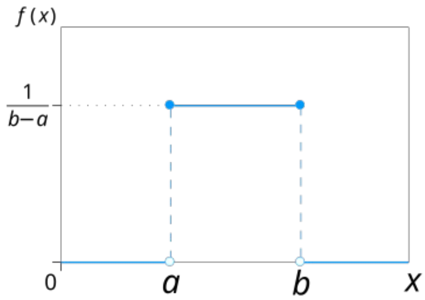
1. **Continue uniforme verdeling**

Vb. Random getal genereren in python: X~U([0,1])

$$f_X(x)=1_{[0,1]}=\begin{cases} 1 \; als \; 0\leq x\leq 1 \\ anders \; 0\end{cases}$$

<u>Voorbeeld</u>: $\mathbb{P}(0\leq x\leq\frac{1}{3})=\int_0^{1/3} f_X(x)\,dx=\frac{1}{3}$

<u>Algemener</u>: X~U([a,b])



$$f_X(x)=\frac{1}{b-a}\cdot 1_{[a,b]}$$

<u>Controle</u>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}=\frac{1}{b-a}[x]_b^a=\frac{1}{b-a}(b-a)=1 \quad \text{OK}$$

<u>Verwachtingswaarde</u>:

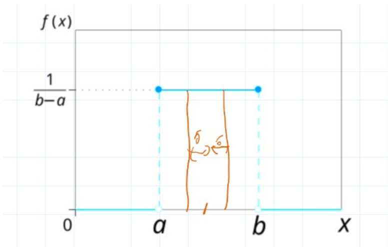
$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\mathbb{P}(X=x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

<u>Variantie</u>:

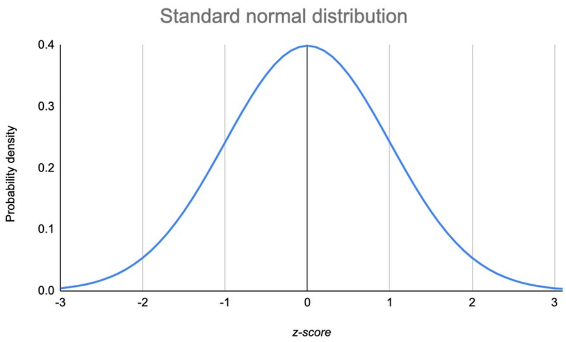
$$Var(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\mathbb{P}(X=x)dx-\mathbb{E}[X]^2=\int_a^b x^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx-\frac{(a+b)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b-\frac{(a+b)^4}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}\overset{merkw.product}{=}\frac{1}{12}(4b^2+4ab+4a^2-3a^2-3b^2-6ab)$$

$$=\frac{1}{12}[b^2-2ab+a^2]=\frac{(b-a)^2}{12}\Rightarrow\sigma_X=\frac{b-a}{\sqrt{12}}\approx 0,28(b-a)$$



Hoorcollege 25/11/2024



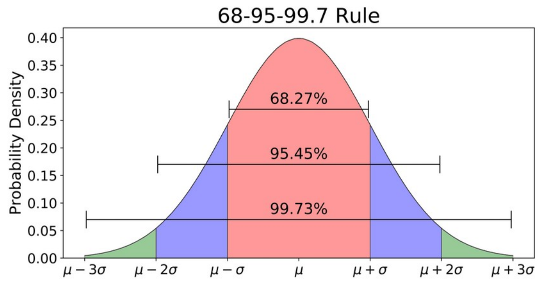
2. **Standaard Normale Verdeling N(0, 1)**
= kansverdeling met $\mathbb{E}[x]=0, \sigma_x=1$

"klokcurve" "Gausscurve"

$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ TOP: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0,39$

$\int f_x(x)dx=1$, want $\int e^{\frac{-x^2}{2}}=\sqrt{2\pi}$ = Gaussische integraal

De functie is symmetrisch



<u>Berekenen?</u>

$\mathbb{E}[x]=\int x\cdot f_x(x)dx=\int \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}=I_1-I_1=0$

De integraal van een oneven functie voor een onbepaald interval = 0 (?)

$Var(X)=...=1(berekening\ niet\ te\ kennen)$

<u>Eigenschappen</u>

$\mathbb{P}(-\sigma\leq x\leq\sigma)\approx 68\%$
$\mathbb{P}(-2\sigma\leq x\leq 2\sigma)\approx 95\%$
$\mathbb{P}(-3\sigma\leq x\leq 3\sigma)\approx 99.7\%$

3. **Normale Verdeling** $N(\mu,\sigma)$
μ: gemiddelde waarde, σ: standaardafwijking

- Shiften met μ: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$
- Uitrekken in de x-richting: $f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- Normeren: $f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\Rightarrow \begin{array}{c}\mathbb{E}[x]=\mu\\ Var(X)=\sigma^2\Rightarrow\sigma_x=\sigma\end{array}$

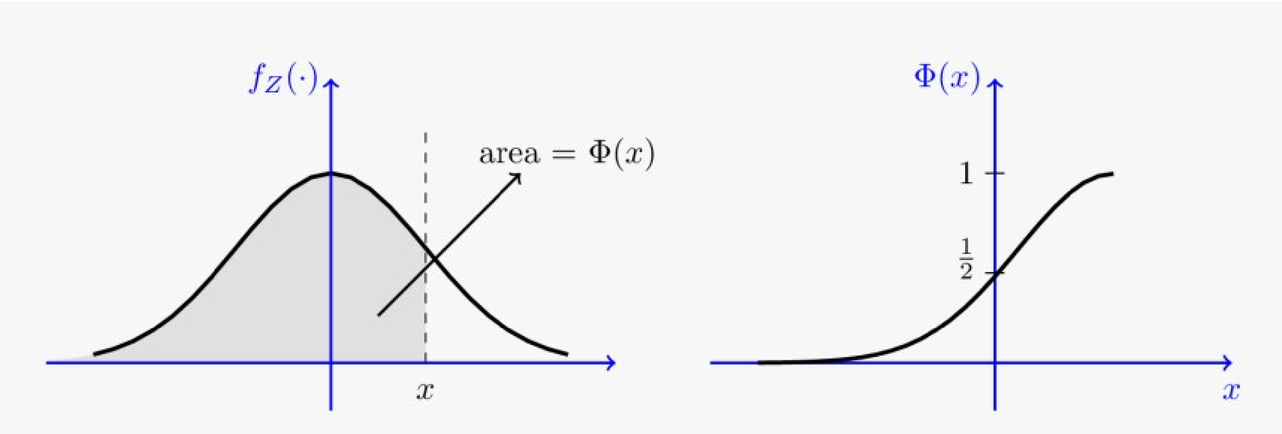
<u>Bij bereking:</u>

als X~N(μ-σ) dan is $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ ~ N(0, 1)

Vb. Wat is $\mathbb{P}(X\leq x) als\ X\quad N(\mu,\sigma)$

$\int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx=F_x(x)$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z) = \phi(z)$: z-score



Uitwerken? Met tabel p.111

- $\mathbb{P}(Z \leq 0{,}73)$ kijken in de rij 0,70, kolom 0,03 ⇒ 0.7673
- $\mathbb{P}(Z \leq -0{,}24)$ neem 1 – het complement
  $\mathbb{P}(Z \geq 0{,}24) = 1 - \phi(0{,}24) = 1 - 0.5948 = 0{,}4052$

Analoog: $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f_x(x)\,dx = [\phi(x)]_a^b = \phi_{(b)} - \phi_{(a)}$

Voorbeeld:

Lengte van Vlaamse mannen is verdeeld als N(180cm,7cm)
$\mathbb{P}(187 \leq x \leq 197{,}5) = ?$

$= \mathbb{P}(\frac{187-180}{7} \leq \frac{x-180}{7} \leq \frac{197{,}5-180}{7}) = \mathbb{P}(1 \leq Z \leq 2{,}5) = \phi(2{,}5) - \phi(1) \overset{tabel}{=} 0.9938 - 0.8413 = 0.1525$

Benaderingen van B(n, p) voor grote n

	B(n, p)	P(λ)
$\mathbb{E}$[x]	Np	λ
Var(X0	Npq	λ

Voorstel: Benader B(n,p) door P(λ) met **np = λ** we kijken erna naar Var(X) = npq = λq, Var(X') = λ

als $q \approx 1\ dan\ is\ Var(X) \approx Var(X')$

Waarom? $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, moeilijk, intensief

$\mathbb{P}(X' = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Voorbeeld Poission met λ=20: in 1u tijd komen 20 mensen in de winkel
≈Binomiaal experiment: 2 000 mensen in de omgeving, kans dat ze dat uur komen is p = 0,01

<u>Eigenschap:</u>
De poisoonverdeling is een goede benadering van B(n,p) als p klein is
Vuistregel: OK als $n \geq 30 \wedge n \cdot p \leq 5$

<u>Stelling:</u> Voor vaste k en λ= np geldt: $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0 \\ np=\lambda}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Bewijs: $LL = \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ $Stel\ p = \frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{A} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{B} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{C} = \lim_{n \to \infty} A = \lim_{n \to \infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k\ termen}}{n \cdot n \ldots \cdot n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$$

$\lim_{n \to \infty} B = \lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ wegens $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$\lim_{n \to \infty} C = \lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1^{-k} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} LL = \frac{\lambda^k}{k!} A \cdot B \cdot C = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

■

<u>Wat als $p \approx 1$?</u>

Verander maak p’ = 1 – p en q’ = 1 – q (wissel de rol van p en q) en dan mag ^ wel.

<u>2. Binomiale benaderen door normale</u>

(als $p \approx 0,5$) X~B(n, p): probleem want de ene discreet de andere continu
“Maak van de stokjes staafjes”
Oppervlakte van de staafjes = $B \cdot (H_0 + H_1 + \ldots H_n) = 1\ want \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1$

Zoek nu μ en σ
X~B(n,p) : $\mathbb{E}$[x] **= np = μ**
Var(X) = **npq = σ² ⇒ σ =** $\sqrt{npq}$

Voorbeeld X~B(300; 0,25)

$$\Rightarrow \mu = np = \frac{300}{4} = 75\ en\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{75 \cdot 3}{4}} = \sqrt{100\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 7,5$$

Wat is $\mathbb{P}(60 \leq x \leq 75)$ *via benadering door normale verdeling*

$$\approx \mathbb{P}(60 \leq X' \leq 75)\ X \sim B(n,p)\ en\ X' \sim N(\mu, \sigma)$$

$=\mathbb{P}(\frac{60-75}{7.5}\leq Z\leq 0)=\phi(0)-\phi(-2)=0.5-(1-\phi(2))=-0.5+\phi(2)=0.4772$

Exact (binomiaal): $\mathbb{P}(60\leq X\leq 75)=0.5135$ overeenkomst is niet zo goed, wij kunnen beter, gebruik de **continuïteitscorrectie**

$\mathbb{P}(60\leq X\leq 75)\approx\mathbb{P}(\mathbf{59.5}\leq X'\leq\mathbf{75.5})=\mathbb{P}(\frac{-15.5}{7.5}\leq Z\leq\frac{0.5}{7.5})\overset{ZRM}{=}\mathbb{P}(-2.066\leq Z\leq 0.066)$

$=\phi(0.066)-1(1-\phi(2.066))$

In tabel: tot op 1/100, dus om nauwkeuriger te gaan, gaan we uit van een linear verband tussen 2 punten. $\phi(0.066)\approx\phi(0.06)+rico\cdot 0.006=0.5239+\frac{4}{10}\cdot 0.006=0.5263$

Analoog: $\phi(2.066)=0.9806$

$\mathbb{P}=0.5263-(1-0.9806)=0.5069$

2 opmerkingen:

- $\mathbb{P}(60<X<75)\approx\mathbb{P}(\mathbf{60.5}\leq X'\leq\mathbf{74.5})$
- $\mathbb{P}(X\leq x)=90\%$ wat is x, zoek in de tabel naar $\phi(x)=90\%\rightarrow$ opnieuw linear berekenen

Centrale limietstelling:

Als $X_1, X_2 ... X_n$ onafhankelijke toevalsveranderlijke zijn, met dezelfde $\mathbb{E}[x_i]=\mu\, en\, \sigma_x(X_i)=\sigma\, , dan$

$\lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq a)=\phi(a)$

Willekeurige X_i (uit eender welke verdeling): Normale verdeling

Bij ons: $X_i \sim B(1, p)$: $\mathbb{E}[x_i] = p$, $\sigma(X_i) = \sqrt{pq}$

$\overset{CLS:}{\Rightarrow}\sum X_i\sim N(n\mu,\sqrt{n}\sigma)=N(np,\sqrt{npq})$

Vuistregel: X~B(n,p) benaderbaar X'~N(μ, σ) als $n\geq 30, np\geq 5, nq\geq 5$

Hoorcollege 2/12/2024

Booleaanse algebra:

- **Booleaanse variabelen** zijn variabelen x, y, ... die enkel de waarde 0 of 1 aannemen (~False, True of Waar, Onwaar...)
- **Booleaanse expressie** (def via recursie)
  - Elke Booleaanse variabele (BV) is een Booleaanse expressie (BE)
  - Als P en Q BE's zijn, dan zijn (P), P + Q, P·Q en $\overline{P}$ dat ook
- Def van bewerkingen via waarheidstabellen:
  - P + Q: OR

Q/P	0	1
0	0	1
1	1	1

  - P · Q: AND

Q/P	0	1
0	0	0
1	0	1

  - $\overline{P}$: NOT: $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$
- Voorrangsregel: eerst · dan + ($x + yz \neq (x+y)z$)
- **Booleaanse functies** (BF): B={0,1}

  $f: \underset{(x_1, x_2, \dots x_n)}{B^n} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{F(x_1, \dots x_n)}{B}$
- Graad van een BF = # variabelen waarop ze gedefinieerd werd
  gr(x·x) = 1
  gr(x + y) = 2
- *Voorbeeld: F:* $B^2 \rightarrow B : (x, y) \rightarrow F(x, y)$*, definiëren via een tabel*

X	Y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Voorschrift: F(x,y) = y of F(x,y) = y + x · y ($\leftarrow$ *meerdere functies voor 1 tabel*)

- Hoeveel BF van graad n bestaan er?
  $2^{(2^n)}$ *want graad* $n \Rightarrow 2^n$ *tupels*, *dus* 2^n rijen in de tabel en op elke rij v/d tabel kan je 0 of 1 invullen $\Rightarrow 2^{aantal\ rijen} = 2^{(2^n)}$
  Voorbeeld voor n=3: 2^8 = 256 BF's

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

- **Booleaanse identiteiten:** gelijkheid tussen 2 BE's die dezelfde booleaanse functie beschrijven
  - $\overline{\overline{x}} = x$
  - Commutativiteit: $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$
  - Associativiteit:
    $(x+y)+z = x+(y+z) \overset{dus\ mag}{=} x+y+z$
    $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \overset{dus\ mag}{=} x \cdot y \cdot z$
  - Distributiviteit van · tov. +: $x(y+z) = xy + xz$
  - **Distributiviteit · tov.** +: $(x+y)(x+z)$
  - Opslorpend element: x · 0 = 0 en x + 1 = 1
  - Neutraal element / identiteitswet: x + 0 = x en x · 1 = x
  - Idempotentie: x · x = x en x + x = x
  - Eenheidswet: $x + \overline{x} = 1\ en\ x \cdot \overline{x} = 0$
  - Absorptiewet: x + x · y = x, x · (x + y) = x
  - **De Morgan:** $\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}\ en\ \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
- **Dualiteit:** de wetten komen steeds per 2 voor
  $(x + y \cdot \overline{z} + 0) \cdot \overline{z} \Leftrightarrow x(\overline{y} + z) \cdot 1 + \overline{z}$
  Als je in een identiteit tussen 2 BE's van beide leden de duale neemt, krijg je terug een identiteit. (Wissel alle 0'en en 1'en om, wissel alle +'en en ·'en om)
- Hoe kan je een identiteit aantussen 2 BE?

1. Stel voor beide expressies een waarheidstabel op. Tabellen gelijk dan expressies gelijk.
2. Gebruik gekende identiteiten

Opm: ook sommige van de basisidentiteiten volgen uit andere, bv de absorptiewet:
$x(x+y) \overset{idnt}{=} .(x+0)(x+y) \overset{distr}{=} x+0\cdot y \overset{opsl}{=} x+0 \overset{ident}{=} x$

UOVT: bewijs de duale versie

2 standaardmanieren om een BD voor te stellen:

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- **DNF** (Disjuctive Normal Form):
  - Literal: een variabele of haar tegengestelde x of $\overline{x}$
  - minterm = product van alle literals (bv. $x\,y\,\overline{z}, \overline{x}\,\overline{y}\,z$ ...)
  - DNF is dan voorstelling als een som van mintermen

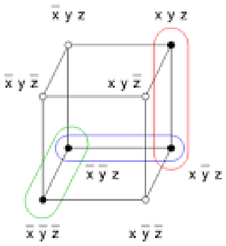
  $F(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,z+\overline{x}\,y\,z+x\,\overline{y}\,\overline{z}$
  Recept: elke minterm komt overeen met 1 rij in de WH tabel waar de functiewaarde 1 is.
  - **Eigenschap, de DNF is uniek** (zie constructie)
- **CNF** (conjunctive normal form)
  - Maxterm: som van alle literals (bv. $x+y+z, x+\overline{y}+z, \ldots$)
  - CNF is dan een voorstelling van een BF als een product van maxtermen

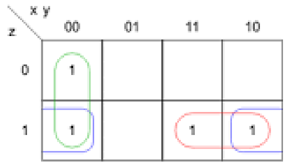
    $F(x,y,z)=(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})$
    Recept: elke maxterm komt overeen met een rij uit de WH tabel waar F(x,y,z) = 0, maak de maxterm met de complementen van de variabelen
    Dit is analoog met een veeltermfunctie als product van de nulwaarden.
- Wanneer kies je welke?
  Kies DNF als er weinig 1'en staan in je F, kies CNF als er weinig 0'en staan in je F.
- **Eigenschap**: DNF en CNF beschrijven dezelfde functies
  $\Leftrightarrow \overline{DNF}\text{ en }\overline{CNF}\text{ beschrijven dezelfde functie}$
  $\overline{DNF}\text{ kan je vinden door DNF op te stellen van de } 0-\text{rijen}$
  $\overline{DNF}=\overline{F(x,y,z)}=\overline{x}\,y\,\overline{z}+x\,\overline{y}\,z+x\,y\,\overline{z}+x\,y\,z$
  $\overline{CNF}=\overline{(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+z)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}$
  $\overset{De\ Morgan}{=} \overline{(x+\overline{y}+z)}+\overline{(\overline{x}+y+\overline{z})}+\overline{(\overline{x}+\overline{y}+z)}+\overline{(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}$

$\overset{De\ Morgan}{=} \bar{x}\, y\, \bar{z} + x\, \bar{y}\, z + x\, y\, \bar{z} + x\, y\, z = \overline{DNF}$

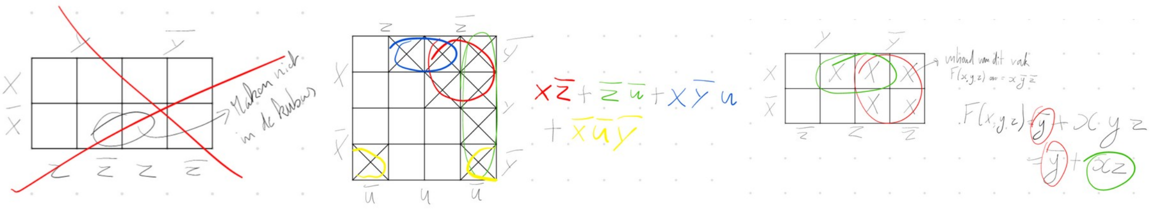
En dit geldt voor willekeurige BE

- Kan je een DNF verder vereenvoudigen? Ja, soms wel zo blijkt
  Voorbeeld $F(x,y,z) = x\,y\,z + x\,y\,\bar{z} + x\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z$
  $F(x,y,z) \overset{ident}{=} x\,y\,(z+\bar{z}) + x\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z \overset{invers}{=} x\,y + x\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z$
- Hoe vereenvoudigen? Via **Karnaugh maps**

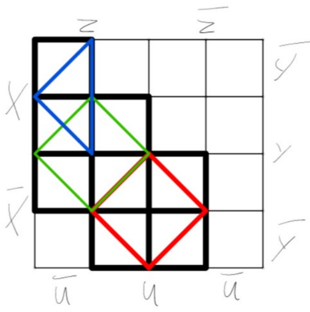




  - Is periodiek
  - 2 vakjes naast elkaar verschillen in het complement nemen in 1 variabele
  - Zet 1 bij elke minterm
  - Zie ook: https://en.wikipedia.org/wiki/Karnaugh_map
  - **Def: Raster met alle 2^n mogelijke mintermen, bij 2 nabije vakjes is er precies 1 variabele gewisseld met zijn complement.**
  - Opm:
    - Grotere blokken zijn mogelijk → $2^m \times 2^p$
    - Blokken mogen overlappen
    - Let op hoe je raster tekent! (scheidingen mogen niet recht over elkaar staan)
    - Je mag over de rand gaan



    - Analoog voor CNF

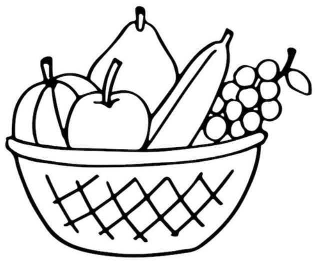


CNF

$F(x,y,z) = (x+\bar u)(\bar y + \bar z)(\bar x + \bar z + u)$

Hoorcollege 4/12/2024

Genererende functies



1. **Fruitmand**

Hoeveel manieren om 2 stuks te kiezen uit 5: $C_5^2 = \binom{5}{2}$

Hoeveel manieren om k stuks te kiezen?: $C_5^k = \binom{5}{k}$

! Link met Binomium van Newton. $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k y^{5-k}$

Hier: $(1+x)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} x + \binom{5}{2} x^2 \ldots \binom{5}{5} x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

Waarom komen deze getallen voor in de veelterm?

$(1+x)^5 = \underbrace{(1+x)}_{aantal\ appels} \cdot \underbrace{(1+x)}_{aantal\ bananen} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\ldots}(1+x)(1+x)$ $\quad 1 = x^0 \rightarrow 0\ \textit{stukken van dat soort fruit}$

$x = x^1 \rightarrow 1\ \textit{stuk van dat soort fruit}$

Bij x² kom je door 2 stuks fruit te kiezen.

2. **Fruitmand, met 2 identieke appels en geen banaan**

Hoeveel manieren zijn er om k stuks te kiezen?

Voor peer, appelsien en pruim verandert er niets: $(1+x)^3$

Appels: $(1+x+x^2)$, kies 0, 1 of 2 appels

$f(x) = (1+x+x^2)(1+x)^3 = (1+x+x^2)(1+3x+3x^2+x^3) \overset{distr}{=} 1+4x+7x^2+7x^3+4x^4+x^5$ *(symmetrisch)*

Trucje: cijferen, mag want je cijfert in basis x in plaats van basis 10

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5
	1	3	3	1		
		1	3	3	1	
+			1	3	3	1
	1	4	7	7	4	1

Controle: 7 oplossingen bij k=2: 7 rijen: OK

appel	2	1	1	1	0	0	0
peer	0	1	0	0	1	1	0
appelsien	0	0	1	0	1	0	1
pruim	0	0	0	1	0	1	1

3. **Bakker**

4 abrikozentaarten, 3 kaastaarten, en 4 aardbeientaarten per 2 verkocht

Op hoeveel manieren kan je k taarten kopen?

$$\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)}_{abrikozen}\cdot\underbrace{\left(1+x+x^2+x^3\right)}_{kaas}\cdot\underbrace{\left(1+x^2+x^4\right)}_{aardbei}$$

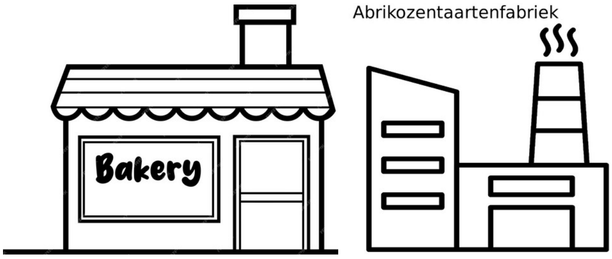
		1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7					
Deel 1		1	1	1	1	1								1^e term $\cdot 1$
			1	1	1	1	1							1^e term $\cdot x$
				1	1	1	1	1						1^e term $\cdot x^2$
	+				1	1	1	1	1					1^e term $\cdot x^3$
Deel 2		1	2	3	4	4	3	2	1					1^e term $\cdot 1$
				1	2	3	4	4	3	2	1			1^e term $\cdot x^2$
	+					1	2	3	4	4	3	2	1	1^e term $\cdot x^4$
		1	2	4	6	8	9	9	8	6	4	2	1	

Antwoord: $1+2x+4x^2+6x^3+8x^4+9x^5+9x^6+8x^7+6x^8+4x^9+2x^{10}+x^{11}$

Deze veelterm noemen we de **genererende functie**.

Def: als $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ een eindige rij getallen is (of oneindig met $\forall a_x = 0 : x > n$) dan noemen we deze **de** genererende functie van deze rij. *(definitie overstegen door algemenere def, zie verder)*

4. **Bakker heeft nu ook een buurman**



Hoeveel manieren zijn er om k taarten te kopen?

$f(x)=(1+x^2+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+\ldots)$

Kaas · Abrikoos

1 1 1 1 1 1 ... maal 1
1 1 1 1 1 ... maal x
1 1 1 1 ... maal x^2
\+ 1 1 1 ... maal x^3

1 2 3 4 4 4 ... Aardbei
1 2 3 4 4 4 4 ...
\+ 1 2 3 4 4 ...

1 2 4 6 8 10 11 12 12

Antw: $1+2x+4x^2+6x^3+8x^4+10x^5+11x^6+12x^7+12\ldots$

Deze uitdrukking is een **machtreeks**. Meestal is men bezorgd of deze som bestaat, en voor welke x. Als men niet geïnteresseerd is in het invullen van waarden voor x, noemt men dit een **formele machtreeks**.

- Het optellen van machtreeksen:
  $(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x\ldots$
  Eigenschap $c_n=a_n+b_n$

- Het vermenigvuldigen van machtreeksen:
  $c_0+c_1x+c_2x^2\ldots=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)$
  $=a_0b_0\cdot 1+(a_0b_1+a_1b_0)x(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\ldots$
  Eigenschap: $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ *(convolutie)*

5. **WINAK verkoopt hamburgers aan €3,00 en soep aan €2,00**

Op hoeveel manieren kan je k euro uitgeven?

$f(x)=(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots)$

$=1+x^2+x^3+x^4+x^5+\underbrace{2x^6}_{\substack{2+2+2\\ of\,3+3}}+x^7+2x^8+2x^9+\ldots$

6. **Brief opsturen met 3 postzegels**

¢1, ¢2 of ¢3 kostende postzegels uit een ver verleden

Hoeveel manieren zijn er om 3 postzegels te plakken met totale waarde ¢k? De volgorde is van belang.

$$f(x)=\overbrace{(x+x^2+x^3)}^{1e\ plaats}\overbrace{(x+x^2+x^3)}^{2e\ plaats}\overbrace{(x+x^2+x^3)}^{3e\ plaats}=(x+x^2+x^3)^3$$

$$=x^3+3x^4+6x^5+7x^6+6x^7+3x^8+x^9$$

7. **Zelfde brief “frankeren” met 3 of 4 zegels**

Hoeveel manieren om nu ¢k te plakken?

- 3 zegels: $(x+x^2+x^3)^3$
- 4 zegels: $(x+x^2+x^3)^4$
- 3 **of** 4 zegels: $(x+x^2+x^3)^3+(x+x^2+x^3)^4$

8. **Zelfde brief, onbeperkt aantal zegels**

Hoeveel manieren om nu k zegels te plakken?

$$f(x)=1+(x+x^2+x^3)+(x+x^2+x^3)^2+(x+x^2+x^3)^3+(x+x^2+x^3)^4+\dots$$

Algemeen:

Def: $A=a_0,a_1,a_2\dots$ dan is $a_0+a_1x+a_2\dots$ **de** genererende functie van A.

Kan je zo’n reeks omzetten naar een compactere vorm?

Voorbeeld:

$1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}$ *want als je de (1-x) overbrengt vallen alle termen met elkaar weg*

Concept: **inverse genererende functie:** $B(x)=\frac{1}{A(x)}$ **!≠inverse functie**

Def: Als $A(x)B(x)=1$ dan noemt men B(x) de inverse genererende functie van A(x)

Wanneer bestaat B(x)?

Opl: Stel $A(x)=a_0+a_1x+\dots en\, B(X)=b_0+b_1x+\dots$
dan moet $(a_0+a_1x+\dots)(b_0+b_1x+\dots)=1$

LL = $a_0b_0\cdot 1+(a_0b_1+a_1b_0)x(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2\dots$

$\Rightarrow +\infty\, groot\, linear\, stelsel, maar\, term\, per\, term\, steeds\, maar\, 1\, onbekende$ **als $a_0 \neq 0$**
$\boldsymbol{\Rightarrow B(x)\, bestaat \Leftrightarrow a_0 \neq 0}$ *(bestaansvoorwaarde)*

Voorbeeld: $A(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ *bestaat B(x)?*

$$\begin{cases} a_0b_0=1 \\ a_1b_0+a_0b_1=0 \\ a_2b_0+a_1b_0+a_0b_2=0 \\ a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_3b_0=0 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0=1 \\ 2b_0+b_1=0 \Rightarrow b_1=-2 \\ 3b_0+2b_1+b_2=0 \Rightarrow b_2=1 \\ 4b_0+3b_1+2b_2+b_3=0 \Rightarrow b_3=0 \\ \quad \Rightarrow b_4=0 \\ \quad \Rightarrow b_5=0 \\ \quad \ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow B(x)=1-2x+x^2=(1-x)^2$

Opm: substitutie mag!

Voorbeeld: $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots \overset{2x=y}{=} 1+y+y^2+y^3+\ldots=\frac{1}{1-y}=\frac{1}{1-2x}$

Voorbeeld ∞ veel postzegels: $\frac{1}{1-y}=\frac{1}{1-(x+x^2+x^3)}$

Hoorcollege 9/12/2024

Genererende functies zagen we al bij telproblemen waarbij een bepaalde som “k” moest zijn.

$a_0, a_1 a_2, \ldots \rightarrow A(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Voorbeeld: $1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}(als\,|x|<1)$

Voorbeeld²: voor $x=\frac{1}{2}: 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2:$ *paradox van Zeno*

<u>Overzicht</u>:

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$
$\frac{1}{1-x^m}=1+x^m+x^{2m}\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} x^{km}$
$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$
$\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k}x^k$

Bewijs van die laatste:

$(1-x)^{-m} \underset{binomiaalreeks}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-m}{k}(-x)^k, met\; m\in\mathbb{N}_0=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-m}{k}(-1)^k x^k$

$met \binom{-m}{k}(-1)^k=\frac{\overbrace{-m(-m-1)(-m-2)\ldots(-m-k+1)}^{k\;factoren}}{k!}(-1)^k$

$$=\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}=\underbrace{\binom{m+k-1}{m-1}}_{herhalingscombinatie}=\binom{m+k-1}{k}$$

■

<u>Link met herhalingscombinaties:</u>

- Klas kies k cadeaus uit m mogelijkheden: $\overline{C}_m^k=\binom{k+m-1}{m-1}$
- In dit hoofdstuk: voor m = 3
  $\underbrace{(1+x+x^2+...)}_{cadeau\,1}\underbrace{(1+x+x^2+...)}_{cadeau\,2}\underbrace{(1+x+x^2+...)}_{cadeau\,3}=\frac{1}{(1-x)^3}=A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$
  de som moet k zijn
  $dus\, a_k=\overline{C}_m^k=\binom{k+m-1}{m-1}$

Recursievergelijkingen of differentievergelijkingen oplossen

Voorbeeld: Torens van Hanoi met 6 niveaus

Wat is het minimaal aantal zetten om een toren van n schijven naar paal 3 te verplaatsen?
Noem dit H_n
<u>Regels</u>:

1. Je mag maar 1 schijf per zet verplaatsen.
2. Je mag nooit een grotere op een kleinere schijf zetten

<u>Oplossing</u>:
Vereenvoudig het probleem.

- $H_0=0$, geen schijven en dus geen te verplaatsen
- $H_1=1$, 1 schijf verplaatsen
- $H_2=3$, gebruik de middelste toren als opslag
- $H_3=7$, gebruik bovenstaande om de 2 bovenste schijven naar de middelste toren te verplaatsen: 3 zetten, dan zet de grootste schijf naar de rechtse toren: 1 zet, verplaats de middelste toren naar rechts: 3 zetten
- $H_n=H_{n-1}+1+H_{n-1}=2H_{n-1}+1$

$Dus\, rij\, h_n=0,1,3,7,15,31\rightarrow H_n=2^n-1$

<u>Oplossing met genererende functies:</u>

Stel $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty}H_k x^k=H_0+H_1x+H_2x^2+\ldots$

$\overset{recursie}{=} H_0+(2H_0+1)x+(2H_1+1)x^2+(2H_2+1)x^3+\ldots$

$=H_0+2(H_0x+H_1x^2+H_2x^3+\ldots)+x+x^2+x^3+\ldots$

$\boldsymbol{=2xH(x)+\frac{1}{1-x}-1=2xH(x)+\frac{x}{1-x}=H(x)}$

$\Rightarrow H(x)(1-2x)=\frac{x}{1-x}\Rightarrow H(x)=\frac{x}{\underbrace{(1-x)(1-2x)}_{staat\, niet\, in\, de\, tabel:(}}$

$H(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}$: splitsen in partieelbreuken

Idee: LL dus H(x) is ontstaan uit RL door op gelijke noemer te zetten.

Gebruik $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{\overbrace{T}^{van\, teller}}{bd}$

Stappenplan:

1. Ontbind noemer in factoren
2. Schrijf als een som van breuken met onbekende tellers
3. Zet beide leden op dezelfde noemer en stel de tellers gelijk
4. Los het lineare stelsel op

Dus: $H(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-2x)}$ (2)

$=\frac{A(1-2x)+B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$ (3)

$\Rightarrow x=A(1-2x)B(1-x)=A+B(-2A-B)x \Leftrightarrow$ 2 veeltermen als alle overeenkomstige coëf. van x^k *gelijk*

$\Rightarrow \{\begin{matrix}0=A+B\\1=-2A-B\end{matrix} \overset{B=-2A}{\Rightarrow} 1=-2A-(-A)=-A\Rightarrow A=-1\Rightarrow B=+1$ (4)

$\Rightarrow H(x)=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}=-\sum_{k=0}^{infintiy} x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k$

$=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)x^k \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k \Rightarrow \boldsymbol{H_k=2^k-1}$, controle OK

■

Voorbeeld 2: $s_0, s_1=1, s_n=-s_{n-1}+6s_{n-2}\, als\, n\geq 2$ via genererende functies

$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty_k} x^k=s_0+s_1+x+s_2x^2+s_3x^3\ldots$

$\overset{recuresie}{=} s_0+s_1x+(-s_1+6s_0)x^2+(-s_2+6\, s\, ub\, 1)x^3\ldots$

$$= s_0 + s_1 x - (s_1 x^2 + s\, ub\, 2\, x^3 + s_3 x^4 + \ldots) + 6(s_0 x^2 + s_1 x^3 + \ldots)$$

$$= s_0 + s_1 x - x \underbrace{[s_1 x + s_2 x^2 + \ldots.]}_{=S(x)-s_0} + 6x^2 \underbrace{[s_0 + s_1 x + s_2 x^2]}_{=S(x)}$$

$$= 1 + x - xS(x) + x + 6x^2 S(x) = 1 + 2x - xS(x) + 6x^2 S(x)$$

Alles met S(x) naar LL:

$$S(x)[1 + x - 6x^2] = 1 + 2x \Rightarrow S(x) = \frac{1+2x}{1+x-6x^2} \overset{1}{=} \frac{1+2x}{(1-2x)(1+3x)}$$

$$\overset{2}{=} \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+3x} \overset{3}{=} \frac{A(1+3x) + B(1-2x)}{(1-2x)(1+3x)} = \frac{A + B + (3A - 2B)x}{(1-2x)(1+3x)}$$

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 2 = 3A - 2B \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} A = \frac{4}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases}$$

<u>Alternatief zonder stelselrekenen (handig bij grotere stelsels):</u>

$$S(x) = \frac{1+2x}{(1-2x)(1+3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+3x}$$

$$\overset{beide\,leden \cdot (1-2x)}{=} (1-2x) S(x) = A + \frac{B(1-2x)}{1+3x} \overset{\lim_x \to \frac{1}{2}}{=} \lim_{x \to \frac{1}{2}} (1-2x) S(x) = A + \lim_{x \to \frac{1}{2}} B \frac{(1-2x)}{1+3x}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x \to \frac{1}{2}} S(x)(1-2x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1+2x}{1+3x} \overset{invullen}{=} \frac{4}{5}\,; \qquad B \overset{analoog}{=} \frac{1}{5}$$

<u>Resultaat:</u> $S(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-3x} = \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathbf{3}x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5} 2^k + \frac{1}{5}(-3)^k\right) x^k$

$\Rightarrow s_k = \frac{4}{5} 2^k + \frac{1}{5}(-3)^k$ Controle: recursie invullen, gesloten formule invullen: OK.

UOVT: 7.11 ← gemaakt tijdens HC maar oefeningen staan niet in deze notities

Regel: bij meervoudig nulpunt in de noemer: neem alle lagere machten ook! ^

Stijn geeft uitleg over de examens (12/12/2024)

Oefeningenexamen:

- Maak de oefeningenexamens op BlackBoard, dit is uitstekende voorbereiding
- Vrijdag voor het examen volgt nog een vragenuurtje (zie sisA)
- Een 8 tal vragen, 6 “basis”, 2 “uitbreiding”
- De verbetering gebeurt zo snel mogelijk, **en zodra het verbeterd is krijg je je score**

Theorie-examen in groep (tussen 10 en 15 man):

- Een half dagdeel
- 2 startvragen “geef de stelling en bewijs die (via [methode])”
  - Eerst individueel
  - Dan mondeling, als het goed is duurt dit kort, anders wordt je op gang gebracht
- In totaal 4 vragen (sowieso kansleer)
- Let op! Zowel in eigen woorden, als **in wiskundige notatie**!
- “Heb geen schrik van het feit dat het mondeling is, het is in uw voordeel”
- Je krijgt na het examen **onmiddelijk feedback, je weet je score dus direct!!**