Eerste Bachelor Informatica
Taak 1 **oplossingen**
31 oktober 2024
Discrete Wiskunde

/3

1. Kijk naar de functie

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \longmapsto n^2 - 13n + 42$$

   (a) Toon aan dat deze functie niet injectief is en niet surjectief.

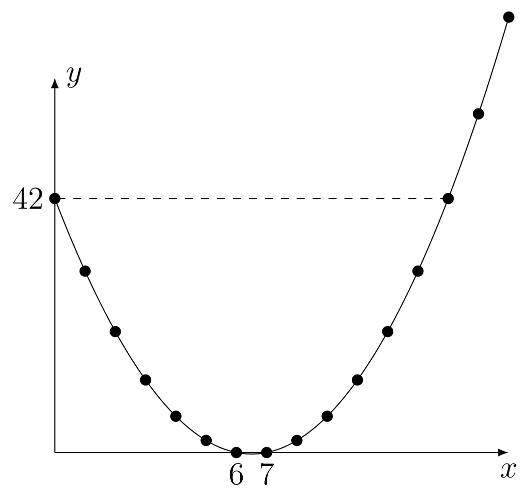
   (b) Bepaal ook een zo groot mogelijk gebied $A \subset \mathbb{N}$ en een zo groot mogelijk gebied $B \subset \mathbb{N}$ zodat

$$g : A \to B : n \longmapsto n^2 - 13n + 42$$

   wel een bijectie is. Bepaal ook g^{-1}.

Oplossing:

(a) De functie f bevat enkel de positieve (gehele) punten van de parabool met vergelijking $y = x^2 - 13x + 42$, met als nulpunten 6 en 7. Dat zijn de bolletjes op de grafiek.



We merken meteen dat de functie niet injectief is, aangezien de 0 meerdere keren bereikt wordt ($f(6) = f(7) = 0$). De functie is ook niet surjectief, aangezien bijvoorbeeld 1 niet bereikt wordt. De oplossingen van $n^2 - 13n + 42 = 1$ zijn immers niet geheel.

(b) Om de functie injectief te maken zouden we ons wat het domein betreft kunnen beperken tot de gehele getallen ≥ 7. Dan is de functie strikt stijgend. Wat het beeld betreft beperken we ons enkel tot die gehele getallen die we bereiken. Hierdoor krijgen we een bijectie:

$$g : \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 7\} \to \{n^2 - 13n + 42 \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 7\} : n \longmapsto n^2 - 13n + 42$$

Het voorschrift van de inverse functie g^{-1} vinden we door gebruik te maken van de discriminant formule op de gelijkheid $n^2 - 13n + 42 = k$:

$$g^{-1} : \{n^2 - 13n + 42 \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 7\} \to \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 7\} : k \longmapsto \frac{13 + \sqrt{1+4k}}{2}$$

Hier nemen we enkel de $+$ bij de $\pm$ in de discriminantformule, aangezien we enkel kijken naar de rechtse bolletjes van de grafiek.

Opmerking: Vermits $n^2 - 13n + 42 = (n-6)(n-7)$ kan de verzameling B ook gegeven worden door

$$B = \{n(n+1) \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

/2

2. We nemen $A = \{1, 2, 3. \ldots, 8\}$.

   (a) Hoeveel verschillende bijecties zijn er van A naar A?

   (b) Hoeveel verschillende injecties zijn er van A naar A?

   (c) Hoeveel verschillende surjecties zijn er van A naar A die elk even getallen steeds naar een oneven getal stuurt?

Oplossing:

(a) Bijecties zijn in dit geval permutaties, dus $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$ mogelijkheden.

(b) Door het duivenhokprincipe is elke injectie ook een bijectie, dus ook $8!$ mogelijkheden.

(c) Vermits de even getallen naar de oneven getallen worden gestuurd, moeten de oneven getallen wel naar de even worden gestuurd, aangezien elk element moet bereikt worden. Daarom zijn er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mogelijkheden voor de even getallen en $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mogelijkheden voor de oneven getallen. In totaal zijn er dus $(4!)^2 = 576$ mogelijkheden.

/3

3. In deze vraag noemen we W de verzameling woorden zijn die opgelijst staan in het Van Dale woordenboek versie 2024.
   Geef van de volgende relaties R aan of het al dan niet equivalentierelaties zijn en/of het al dan niet partiële ordeningen zijn. Verklaar je antwoord.

   (a) $R = \{(x, y) \in W \times W \,|\,$ woord x begint met dezelfde letter als woord $y\}$.

   (b) $R = \{(x, y) \in W \times W \,|\,$ woord x heeft tenminste één letter gemeenschappelijk als woord $y\}$

   (c) $R = \{(x, y) \in W \times W \,|\,$ de eerste letter van x komt niet later in het alfabet dan de eerste letter van y $\}$

Oplossing:

(a) R *is een equivalentierelatie, want*

i. R *is* *Reflexief:* $\forall x \in W$: x *begint met dezelfde letter als* x

ii. R *is* *Symmetrisch:* $\forall x \in W$: x *begint met dezelfde letter als* y *impliceert dat* y *begint met dezelfde letter als* x.

iii. R *is* *Transitief:* $\forall x, y, z \in W$: x *begint met dezelfde letter als* y *en* y *begint met dezelfde letter als* z *impliceert dat* x *begint met dezelfde letter als* z.

R *is niet antisymmetrisch. Zo hebben we wel dat “appel”*R*“ananas” en “ananas”*R*“appel”, maar “appel”*$\neq$*“ananas”. Bijgevolg is* R *geen partiële orde.*

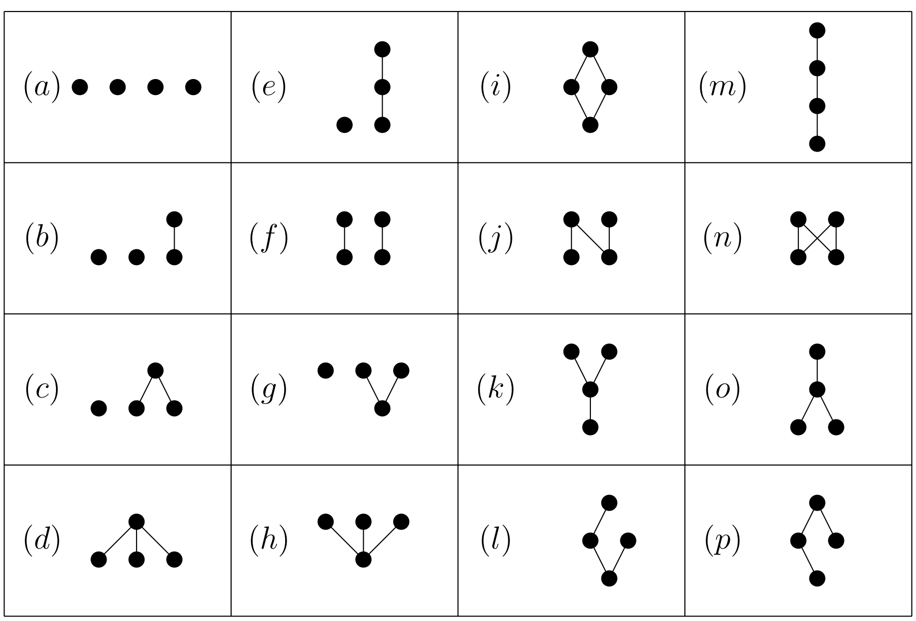
(b) R *is niet transitief. Zo hebben we wel dat “appel”*R*“ananas” en “ananas”*R*“noot”, maar “appel”*R*“noot” geldt niet. Bijgevolg is* R *geen equivalentierelatie en geen partiële orde.*

(c) R *is niet symmetrisch. Zo hebben we wel dat “appel”*R*“peer”, maar “peer”*R*“appel geldt niet. Bijgevolg is* R *geen equivalentierelatie.*
R *is niet antisymmetrisch. Zo hebben we wel dat “appel”*R*“ananas” en “ananas”*R*“appel”, maar “appel”*$\neq$*“ananas”. Bijgevolg is* R *geen partiële orde.*

/3

4. Noem V de verzameling $\{1, 2, 3, 4\}$. Hoeveel verschillende partiële ordeningen zijn er op V (bepaal hiervoor alle mogelijke Hassediagrammen op V)?

Oplossing:
Dit is een (niet zo eenvoudig) telprobleem: we kijken eerst naar alle mogelijk vormen van de Hassediagrammen en passen dan alle permutaties van $\{1, 2, 3, 4\}$ *toe: er zijn* 16 *mogelijk vormen:*



Het aantal mogelijke Hasse diagrammen van deze vorm is

- 1 *in geval (a). (Verwisselen van de plaats van* 1, 2, 3 *en* 4, *verandert de partiële ordening niet.)*

- 4 *in geval (d) en (h). (De onderste 3 getallen (bij (d)) van plaats wisselen verandert niets.)*
- 6 *in geval (n).*
- 12 *in geval (b), (c), (f), (g), (i), (k) en (0).*
- 24 *in geval (e), (j), (l), (m) en (p).*

Dit levert samen $1 + 2 \cdot 4 + 6 + 7 \cdot 12 + 5 \cdot 24 = 219$.

/2

5. Wat is er fout met de volgende redenering, die zou aantonen dat een relatie R op A die symmetrische en transitief is, ook reflexief is.

   > Veronderstel $a \in A$ willekeurig. Kies b zodat $(a, b) \in R$. Uit de symmetrie volgt dat $(b, a) \in R$. Vermits (a, b) en $(b, a) \in R$, volgt uit de transitiviteit dat $(a, a) \in R$. Dit doen we voor elke $a \in A$ en daarom is R reflexief.

   Verduidelijk je antwoord.

Oplossing:
"Kies b zodat $(a, b) \in R$". Zulke b hoeft niet noodzakelijk te bestaan. Het bewijs loopt dan bijvoorbeeld mis als R de lege relatie is.

/3

6. Veronderstel dat R, S, T relaties zijn op $\mathbb{N}$ zodat

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{N} : \ aRb \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : a = 2^k b. \\ \forall a, b \in \mathbb{N} : \ aSb \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists p \in \mathbb{N}_0 : a = p^2 b. \\ \forall a, b \in \mathbb{N} : \ aTb \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists p \in \mathbb{N}_0, \exists k \in \mathbb{N} : a = p^k b. \end{aligned}$$

   Ga voor elk van de relaties R, S, T na of het een equivalentierelatie is, of het een partieel geordende verzameling is en of het een totaal geordende verzameling is.

Oplossing:

$\boxed{\text{Relatie } R}$ *R is een partiële orde, maar geen equivalentierelatie.*

(a) *R is Reflexief: $\forall a \in \mathbb{N} : a = 2^0 a$. Neem dus $k = 0$.*

(b) *R is niet Symmetrisch: Neem bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 1$, dan is aRb want $a = 2^1 b$, maar dan is $b = 2^{-1} a$ en $-1 \notin \mathbb{N}$, dus aRb geldt niet.*

(c) *R is Antisymmetrisch: Indien $a = 2^k b$ en $b = 2^l a$, met $k, l \in \mathbb{N}$, dan is $a = 2^k 2^l a$ en dus $2^{k+l} = 1$. Hieruit volgt dat $k + l = 0$ en dus $k = l = 0$ (want $k, l \in \mathbb{N}$). In dat geval is $a = 2^0 b$ en dus $a = b$.*

(d) *R is Transitief: Indien $a = 2^k b$ en $b = 2^l c$, met $k, l \in \mathbb{N}$, dan is $a = 2^k 2^l c$ en dus $a = 2^{k+l} c$. Ook $k + l \in \mathbb{N}$ als $k, l \in \mathbb{N}$.*

(e) R is geen totale orde: Neem bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 3$. Van $2R3$ en $3R2$ gelden geen van beide.

$\boxed{\textit{Relatie } S}$ *S is een partiële orde, maar geen equivalentierelatie.*

(a) S is Reflexief: $\forall a \in \mathbb{N} : a = 1^2 a$. Neem dus $p = 1$.

(b) S is niet Symmetrisch: Neem bijvoorbeeld $a = 4$ en $b = 1$, dan is aSb want $a = 2^2 b$, maar dan is $b = (2^{-1})^2 a$ en $2^{-1} \notin \mathbb{N}$, dus aSb geldt niet.

(c) S is Antisymmetrisch: Indien $a = p^2 b$ en $b = q^2 a$, met $p, q \in \mathbb{N}_0$, dan is $a = p^2 q^2 a$ en dus $(pq)^2 = 1$. Hieruit volgt dat $pq = 1$ en dus $p = q = 1$ (want $p, q \in \mathbb{N}_0$). In dat geval is $a = 1^2 b$ en dus $a = b$.

(d) S is Transitief: Indien $a = p^2 b$ en $b = q^2 c$, met $p, q \in \mathbb{N}_0$, dan is $a = p^2 q^2 c$ en dus $a = (pq)^2 c$. Ook $pq \in \mathbb{N}_0$ als $p, q \in \mathbb{N}_0$.

(e) S is geen totale orde: Neem bijvoorbeeld $a = 1$ en $b = 2$. Van $1S2$ en $2S1$ gelden geen van beide.

$\boxed{\textit{Relatie } T}$ *T is een partiële orde, maar geen equivalentierelatie. De relatie T komt bovendien overeen met de relatie*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}\; aTb : \quad \Longleftrightarrow \quad \exists p \in \mathbb{N}_0 : a = pb.$$

Je kan immers steeds $k = 1$ nemen en je p aanpassen. T komt dus overeen met "is veelvoud van"

(a) T is Reflexief: $\forall a \in \mathbb{N} : a = 1a$. Neem dus $p = 1$.

(b) T is niet Symmetrisch: Neem bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 1$, dan is aTb want $a = 2b$, maar dan is $b = (2^{-1})a$ en $2^{-1} \notin \mathbb{N}$, dus aTb geldt niet.

(c) T is Antisymmetrisch: Indien $a = pb$ en $b = qa$, met $p, q \in \mathbb{N}_0$, dan is $a = pqa$ en dus $pq) = 1$. Hieruit volgt dat $p = q = 1$ (want $p, q \in \mathbb{N}_0$). In dat geval is $a = 1b$ en dus $a = b$.

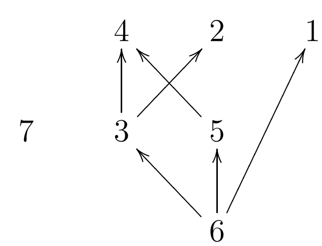
(d) T is Transitief: Indien $a = pb$ en $b = qc$, met $p, q \in \mathbb{N}_0$, dan is $a = pqc$ en dus $a = pqc$. Ook $pq \in \mathbb{N}_0$ als $p, q \in \mathbb{N}_0$.

(e) T is geen totale orde: Neem bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 3$. Van $2T3$ en $3T2$ gelden geen van beide.

$\boxed{\quad /4}$ 7. Noem $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(a) Noem C een partitie van A gegeven door $C = \{\{1, 4\}, \{6, 2, 5\}, \{3\}, \{7\}\}$. Geef een opsomming van alle koppels die de equivalentierelatie beschrijft die bij C hoort.

(b) Gegeven het volgende Hasse diagram op A.



Dit Hasse diagram beschrijft een partiële orderelatie op A. Geef een opsomming van alle koppels die bij deze relatie horen. Welke elementen zijn minima/maxima/minimale elementen/maximale elementen voor deze relatie?

Oplossing:

(a) *Elk staat in relatie met zichzelf en met de andere in de verzamelingen van de partitie: We krijgen dus*

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,4),(4,1),(6,2),(2,6),(5,6),(6,5),(2,5),(5,2)\}$$

(b) *Elk element staat in relatie tot zichzelf en tot die element die je kan bereiken via een pad:*

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(6,5),(6,3),(6,4),(6,2),(6,1),(3,4),(3,2),(5,4)\}$$

Er zijn geen minima en geen maxima. 6 *en* 7 *zijn minimale elementen,* $1, 2, 4, 7$ *zijn maximale elementen.*