

# Hoorcollege woensdag 24/09/2024

## Introductie:

De cursus kopen is aan te raden

Op backboard:

- Opnames van 2021-2022 beschikbaar
- 3 doorjaarse taken (geen punten wel feedback)

## Wat te verwachten v/d cursus:

1. Verzamelingen, relaties en functies ← Taak
2. Bewijstechnieken ← Taak
3. Combinatoriek (=telproblemen)
4. Kanstheorie ← Taak
5. Booleaanse Algebra (Overlap met CSA)
6. Genererende functies

## Verzamelingen, relaties & Functies

### Verzamelingen

Voorbeelden van verzamelingen:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, (\mathbb{C}, \text{complexe getallen worden niet bekeken})$
- $\{\text{kat, hond, vis}\}$ : opsomming
- $\{\text{natuurlijke getallen}\}$ : beschrijving
- $\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{16}\} = \{\frac{3}{4}\} = A \rightarrow \frac{3}{4} \in A$

(Elke waarde kan maximaal 1 keer voorkomen per verzameling)

Verzamelingstheoretische schrijfwijze:

- Algemeen:  $\{a \mid \text{voorwaarde op } a\}$
- Vb.  $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leq x \leq 12\}$

Een paar mogelijke schrijfwijzen van de gehele drievouden:

- $\{\dots -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
- $\{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\{a \mid a/3 \in \mathbb{Z}\}$
- $\{q \in \mathbb{Z} \mid \text{zodat } q = 3n\}$
- $\{b \in \mathbb{Z} \mid b \pmod{3} = 0\}$

Doorsneden en unies

Neem de verzamelingen A, B

- $A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$
- AND, doorsnede,  $A \cap B$
- OR, unie  $A \cup B$
- XOR, symmetrisch verschil,  $A \Delta B$
- NOT, complement, complement  $A = \bar{A}$
- Verschil, behalve,  $A \setminus B$

$$\Rightarrow A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ of } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Eigenschappen van unies, doorsneden...

### Commutativiteit:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$

### Associativiteit:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$  (we noteren dus zonder haakjes)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$  (we noteren dus zonder haakjes)
- $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C \leftarrow$  Hier zijn haakjes wel noodzakelijk

### Distributiviteit:

- $(A \cap B) \cap C = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- analoog bij omgewisseld

### Indexverzamelingen:

- Unies:  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$
- Doorsnede:  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$
- Analooog aan som:  $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$
- Voorbeeld:  $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n, -n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, -n\}$
- Voorbeeld:  $\bigcap_{i=1}^{\infty} ]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[ = ]-1, 1[ \cap ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cap \dots = \emptyset$
- Verzameling met 1 element = singleton
- Verzameling met 0 elementen, lege verzameling =  $\emptyset = \{\}$
- A en B zijn disjunct als  $A \cap B = \emptyset$
- Universum = een grote verzameling waarin je werkt
- Notatie:  $\Omega, V, U$
- Hieruit volgt:
  - $A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset, \forall A: \emptyset \subset A$
  - Het complement van  $\emptyset$  is  $\Omega$ , en omgekeerd.

**De wet van De Morgan:**

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

(zie ook CSA)

**Machtsverzameling van A:**

= De verzameling van alle deelverzamelingen van A

- Notatie:  $2^A$
- Voorbeeld:  $\{\text{Kat}, \text{Hond}, \text{Vis}\} = A \leftarrow 3 \text{ el.}$   
 $\rightarrow 2^A = \{\emptyset, \{\text{K}\}, \{\text{H}\}, \{\text{V}\}, \{\text{K,V}\}, \{\text{K,H}\}, \{\text{H,V}\}, A\} \leftarrow 2^3 \text{ el.} = 8 \text{ el.}$

**Cartesisch product**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Voorbeeld:

$$A = \{1, 2\}, B = \{\text{K}, \text{H}, \text{V}\}$$

$$A \times B = \{(1, \text{K}), (2, \text{K}), (1, \text{H}), (2, \text{H}), \dots\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \leftarrow \text{Verzameling van n-tupels}$$

Analoog product aan product van getallen

**Hoorcollege maandag 30/09/2024**Relaties: A, B verzamelingen, dan noemen we R een relatie als  $R \subset A \times B$ Vb. 1, 2: *notities onvolledig*

$$\text{Domein v/e relatie } R = \text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\} \subset A$$

= alle elementen uit A waar een pijl vertrekt

$$\text{Beeld of bereik van } R = \text{Ran}(R) = \text{Im}(R) \subset B$$

= alle elementen van B waar een pijl toekomt

Notatie  $aRb \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in R$ : a staat in relatie tot b volgens R

$$\text{Vb. 3: } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25\}$$

$$\text{Dom}(S) = [-2, 8]; \text{Im}(S) = [-3, 7]$$

$$\text{Vb. 4: } A = \{\text{appel}, \text{banaan}, \text{peer}\}; B = \{a, b, c, \dots, z\}$$

R = ... bevat de letter ...; Een combinatie kan maar 1 keer voorkomen!

Dom(R) = A: er vertrekken pijlen vanuit elk element van a

Im(R) = {a, b, e, l, n, p, r}: er komen pijlen aan in deze letters

$$X \subset A; R(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X : (x, b) \in R \text{ (dit is } xRb)\}$$

= de elementen die je vanuit X bereikt

$$X = \{\text{appel}, \text{peer}\}$$

$$\rightarrow R(X) = \{a, e, l, p, r\}$$

**Eigenschappen:**

$$1. \forall X \subset A : R(X) \subset \text{Im}(R)$$

$$2. R(A) = \text{Im}(R)$$

$$3. R(\emptyset) = \emptyset$$

$$4. \forall X, Y \subset A : A \subset Y \rightarrow R(X) \subset R(Y)$$

Opm.:  $R(X) \subset R(Y) \rightarrow X \subset Y$  GELDT NIET

$$\text{Vb. 5: } A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2\}; R = \{(1,1), (2,2), (3,2)\}$$

$$X = \{2, 3\}; Y = \{1, 2\} \text{ dan } R(X) = \{2\} \text{ en } R(Y) = \{1, 2\} \text{ dus } R(X) \subset R(Y) \text{ maar } X \not\subset Y$$

**Inverse relaties:**

$$R \subset A \times B \text{ een relatie: } R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

= inverse relatie van R

$$\subset B \times A$$

**Eigenschappen:**

$$5. \forall X, Y \subset B : X \subset Y \rightarrow R^{-1}(X) \subset R^{-1}(Y)$$

= eig. 4 voor  $R^{-1}$  i.p.v. R

$$6. (R^{-1})^{-1} = R$$

$$7. \forall X, Y \subset A : R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y)$$

$$8. \forall X, Y \subset A : R(X \cap Y) \subset R(X) \cap R(Y) \text{ Waarom niet gelijk? Zoek een tegenvoorbeeld!}$$

Vb. 6: variant Vb. 5, met een paar extra pijlen

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{1, 2\}$$

$$X = \{2, 3\}; Y = \{1, 2\} \text{ dus } R(X \cap Y) = R(\{2\}) = \{2\}$$

$$R(X) = \{1, 2\}$$

$$R(Y) = \{1, 2\} \text{ dus } R(X) \cap R(Y) = \{1, 2\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

**Samenstelling van 2 relaties:**

$$R \subset A \times B; S \subset B \times C$$

$$S \text{ na } R: S \circ R \subset A \times C \quad S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : aRb \text{ en } bSc\}$$

**Eigenschappen:**

$$9. (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

$$10. R \subset A \times B; S \subset B \times C; T \subset C \times D : T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R : \text{associatief}$$

**Functies:**

**Def.:** Een relatie  $R \subset A \times B$  is een functie als en slechts als

$$1. \text{Dom}(R) = A \text{ (uit elk element van } A \text{ vertrekt minimum 1 pijl)}$$

$$\forall a \in A, \exists b \in B : aRb$$

2.  $\forall a \in A, \forall b, b' \in B: aRb \text{ en } aRb' \rightarrow b = b'$  (uit elk element van A vertrekt maximum 1 pijl)

Tezamen: Uit elk element van A vertrekt **precies** 1 pijl.

Anders gezegd: voor elke  $a \in A, \exists! b \in B: aRb$

We noemen het unieke beeld van a R(a)

Notatie:  $F \subset A \times B$  functie

$$F: A \rightarrow B: x \rightarrow f(x)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow x^2$$

### Injectieve functie:

Een functie  $f: A \rightarrow B$  noemen we injectief als en slechts als  $\forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$

In elk element van b komt maximum 1 pijl toe

**Surjectieve functie:** Een functie  $f: A \rightarrow B$  noemen we surjectief als en slechts als

$$\forall b \in B, \exists a \in A: f(a) = b$$

In elk element van b komt minimum 1 pijl toe

**Bijjectieve functie:** Een functie noemen we bijjectief als er exact 1 pijl toekomt in elke b

$$\forall b \in B, \exists! a \in A: f(a) = b$$

Voorbeelden

$$1) f: \{A, B, C, \dots, Z\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, 50\}$$

$$A \rightarrow 1; B \rightarrow 2; \dots; Z \rightarrow 26$$

Deze functie is injectief, elk getal wordt max. 1 keer bereikt

Deze functie is niet surjectief, de getallen groter dan 26 worden niet bereikt

$$2) f: \{A, B, C, \dots, Z\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, 26\}$$

$$A \rightarrow 1; B \rightarrow 2; \dots; Z \rightarrow 26$$

Deze functie is injectief, elk getal wordt max 1 keer bereikt

Deze functie is surjectief, alle getallen worden bereikt

$$3) A = \{\text{studenten} \in \text{deze klas}\}; B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20, \text{AFW}, \text{VER}, \text{WTV}, \text{FRD}\}$$

$f: a \rightarrow b: x \rightarrow \text{score die } x \text{ heeft op het examen Discrete Wiskunde in januari}$

$$|A| = 105; |B| = 25$$

f is een functie (iedereen krijgt een "score") maar f is geen injectieve functie (sommige scores worden meermaals bereikt), f surjectief als elke score bereikt zou worden

Eigenschap: een samenstelling van 2 functies is opnieuw een functie

Verder werkende op vorige voorbeeld:

$$C = \{\text{2de zit, geen 2de zit}\}$$

$$g: B \rightarrow C: x \rightarrow \text{geen 2de zit als } x \in \{10, 11, \dots, 20\}; \text{ OF } x \rightarrow \text{2de zit als } x \notin \{10, 11, \dots, 20\}$$

$$g \circ f : A \rightarrow C : x \mapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

**Eigenschappen:**  $A \rightarrow B$ , functie,  $g : B \rightarrow C$ , functie (bewijzen hieronder)

1. Als  $f$  en  $g$  injectief, dan  $g \circ f$  injectief
2. Als  $f$  en  $g$  surjectief, dan  $g \circ f$  surjectief
3.  $g \circ f$  injectief  $\rightarrow f$  injectief
4.  $g \circ f$  surjectief  $\rightarrow g$  surjectief

**BEWIJS 1, STAAT NIET IN DE CURSUS:**

Geg:  $f$  injectief  $\rightarrow \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$

$g$  injectief  $\rightarrow \forall b, b' \in B : g(b) = g(b') \rightarrow b = b'$

TB:  $(g \circ f : A \rightarrow C)$

$g \circ f$  injectief:  $\forall a, a' \in A : g(f(a)) = g(f(a')) \rightarrow a = a'$

Bewijs:

Kies  $a, a' \in A$  willekeurig zodat  $g(f(a)) = g(f(a'))$

Neem  $b = f(a), b' = f(a')$  Omdat  $g$  injectief:  $f(a) = f(a')$

Omdat  $f$  injectief:  $a = a'$

■

## Hoorcollege woensdag 02/10/2024

**BEWIJS 2, STAAT NIET IN DE CURSUS:**

Geg:  $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b, \forall c \in C, \exists b \in B : g(b) = c$

TB:  $\forall c \in C, \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c$

Bewijs: Neem  $c$  uit  $C$  willekeurig

Uit geg 2:  $\exists b \in B : g(b) = c$

Uit geg 1:  $a \in A : f(a) = b$

Hieruit volgt:  $g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c$

■

**BEWIJS 3, STAAT NIET IN DE CURSUS:**

Geg:  $\forall a, a' \in A : (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow a = a'$

TB:  $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

Bewijs: Kies  $a, a'$  zodat  $f(a) = f(a')$

Pas  $g$  toe:  $g(f(a)) = g(f(a'))$

Uit geg:  $a = a'$



UOVT: Onderzoek het tegenovergestelde zelf

**BEWIJS 4, STAAT NIET IN DE CURSUS:**

Geg:  $\forall c \in C, \exists a \in A: (g \circ f)(a) = c$

TB:  $\forall c \in C, \exists b \in B: g(b) = c$

Bewijs: Neem  $c$  uit  $C$  willekeurig

Uit geg:  $\exists a \in A: g(f(a)) = c$

Kies  $b = f(a)$ , die bestaat want  $f$  is een functie ( $A$  bevat geen losse punten)

$\Rightarrow \exists b \in B: g(b) = c$

UOVT: Onderzoek het tegenovergestelde zelf

**Een paar definities:**

1. Grootte van verzamelingen = **kardinaliteit**

Als  $A$  eindige verzameling, dan  $|A| = \# \text{elementen} = \text{kardinaliteit van } A$ .

2.  $A$  en  $B$  zijn **equipotent** ( $\sim$ -even machtig) als er een bijectie bestaat van  $A$  naar  $B$ .

Dan hebben  $A$  en  $B$  dezelfde kardinaliteit

Voorbeelden:

1. Eindige verzameling:  $A = \{1, 2, 3\}$ ;  $B = \{\text{rood, groen, blauw}\}$ ; bijectie  $R$  is bv.  $\{(2, \text{rood}), \{1, \text{blauw}\}, \{3, \text{groen}\}$

2. Oneindige verzamelingen:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

3. Stel  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$  (uitgesproken aleph-0)

4. We noemen een verzameling  $A$  **aftelbaar** als ze eindig is of als er een bijectie bestaat van  $\mathbb{N}$  naar  $A$ . Je kan de elementen op een rijtje zetten ( $\mathbb{N} \rightarrow A: n \rightarrow a_n$ )

Oefeningetjes:

1. is er een bijectie van  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ? Ja!

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0: n \rightarrow n+1$  is een bijectie

$\Rightarrow \mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}_0$  zijn equipotent

$\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| = \aleph_0$

2. is  $\mathbb{Z}$  aftelbaar?

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  Zo niet

$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$  Maar zo wel! Dus JA

Functievoorschrift:  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}: n - \text{even}: n \rightarrow n/2; n - \text{oneven}: n \rightarrow -(n+1)/2$

3. Is  $\mathbb{Q}$  aftelbaar? **EXAMENVRAAG-BEWIJS** Ja!

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_0\}$$

Zoek een opsomming  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	<del>-4/2</del>	-3/2	<del>-2/2</del>	-1/2	<del>0/2</del>	1/2	<del>2/2</del>	3/2	<del>4/2</del>	...
...	-4/3	<del>-3/3</del>	-2/3	-1/3	<del>0/3</del>	1/3	2/3	<del>3/3</del>	4/3	...
...										

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-2}{3}, \dots\} \text{ Dus } |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

4. Is  $\mathbb{R}$  aftelbaar? Neen!

$$|\mathbb{R}| = C - \text{hoekig} > |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

**Bewijs “diagonaalelement van Cantor”:** uit het ongerijmde (= bewijs door contradictie)

Stel:  $\mathbb{R}$  is aftelbaar

$\Rightarrow \exists$  bijectie  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  Voorbeeld  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

$$a_0 = 1.4142\dots; a_1 = 4.00000\dots; a_2 = 3.1415; a_3 = 0.088888\dots$$

Maak een nieuw getal  $a$  het  $i$ -de cijfer na de komma is (het  $i$ -de cijfer van  $a_i$ ) + 1

$a = 2.159\dots$  zit niet in de opsomming en  $a \in \mathbb{R}$  de opsomming is onvolledig en  $\mathbb{R}$  is **overaftelbaar**

C-hoekig =  $\aleph_1$ ? (= 1 van de 23 vragen van Hilbert (1900)): Continuümhypothese, Gödel heeft gevonden dat het niet-bewijsbaar is

Hotel van Hilbert: zie die ene video

5. Is  $] -1, 1[$  aftelbaar?

$$|] -1, 1[| = |\mathbb{R}|$$

Bewerking: vind een bijectie  $\mathbb{R} \rightarrow ] -1, 1[$

Via de boogtangensfunctie  $f: \mathbb{R} \rightarrow ] -1, 1[ : x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan(x)$  is strikt stijgend, dus bijectie

Dus:  $] -1, 1[| = |\mathbb{R}|$ , beide overaftelbaar

## Hoorcollege 07/10/2024

**Stelling van Schröder-Bernstein:**

Er bestaat een bijectie van  $A \rightarrow B$

$\Leftrightarrow$  er bestaat een injectie van  $A \rightarrow B$ , en er bestaat een injectie van  $B \rightarrow A$



$[-1, 1]$  is overaftelbaar. Bewijs via bovenstaande:

- $\exists$  injectie  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , namelijk  $x \rightarrow x$
- $\exists$  injectie  $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , namelijk  $g: x \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctan x$

$$\Rightarrow |\mathbb{R}| = |[-1, 1]|$$

Voorbeeld van een niet-injectieve functie:  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = x^2 \quad \text{injectief: } f(a) = f(a') \rightarrow a = a'$$

In dit geval:  $f(1) = f(-1)$  maar  $-1 \neq 1$

Injectiviteit nagaan: trek horizontale rechten en als elke rechte max. 1 keer de grafiek snijdt, is de functie injectief.

### Duivenhokprincipe:

Stel  $\exists A, B \mid |A| = |B| < \infty$ , dan zijn deze eigenschappen equivalent:

$$f: A \rightarrow B \text{ is een bijjectie} \Leftrightarrow f: A \rightarrow B \text{ is een injectie} \Leftrightarrow f: A \rightarrow B \text{ is een surjectie}$$

$A = \{\text{duiven}\}$ ,  $B = \{\text{hokken}\}$ , alle duiven hebben een hokje, als je meerdere duiven in een hokje steekt zijn er lege hokjes.

### Relaties van $A \rightarrow A$ (= "relatie op A")

- (R) Reflexiviteit:  $\forall a \in A: aRa$  (deze heeft lussen in elk element)
- (S) Symmetrie:  $\forall a, b \in A: aRb \Rightarrow bRa$  (elke pijl die men kan trekken, bestaat ook in de andere richting, behalve bij lussen)
- (AS) Antisymmetrie:  $\forall a, b \in A: aRb \text{ en } bRa \Rightarrow a = b$  (geen enkele pijl bestaat ook in de andere richting)
- (T) Transitiviteit:  $\forall a, b, c \in A: aRb \text{ en } bRc \Rightarrow aRc$  (als je 2 pijlen achtereenvolgens kan trekken, is er ook een pijl die het middelste punt overslaat)

Voorbeeld 1:  $A = \{\text{studenten in deze klas}\}$   $R$ : ... heeft dezelfde score op het examen DW als ...

Eigenschappen:

- (R) zelfde score als zichzelf? Waar
- (S) als student 1 dezelfde score heeft als student 2, heeft s2 dan dezelfde score als s1? Waar
- (AS) er zijn geen 2 mensen met dezelfde score? Niet waar
- (T) als s1 dezelfde score haalt als s2, en s2 als s3, heeft s1 dan dezelfde als s3? Waar

Truc, als "dezelfde" in het voorschrift staat, dan (R) (S) en (T)

**Equivalentierelatie:** Als  $R$  voldoet aan (R), (S) en (T) dan is het een equivalentierelatie.

Notatie:  $a \sim b, a \equiv b$

Voorbeeld 2:  $A = \mathbb{R}$  en  $aRb \Leftrightarrow a^2 = b^2$

Eigenschappen:

- (R)  $aRa$ ? JA
- (S)  $aRb \Rightarrow bRa$ ? Ja
- (AS)  $aRb$  en  $bRa \Rightarrow a = b$ ? neen bv. 3 en -3
- (T) Ja

$R, S, T \Rightarrow$  equivalentierelatie

Voorbeeld 3:  $a \equiv b \Leftrightarrow 3 \mid (a - b) \in \mathbb{Z}$  Bv  $5 \sim 8, -3 \sim 3$

- (R)  $a \equiv a, 3 \mid a - a$ ? Ja
- (S)  $a \equiv b \Leftrightarrow 3 \mid a - b \Rightarrow b \equiv a, 3 \mid b - a$  Ja
- (T)  $a \equiv b$  en  $b \equiv c$

$\Rightarrow 3 \mid a - b$  en  $3 \mid b - c$  Ja het is transitief



Bij een equivalentierelatie wordt A ingedeeld in groepjes:

- Voorbeeld 1: studenten met de dezelfde score. Je kan cirkels tekenen rond groepjes met dezelfde waarde
- Voorbeeld 2:  $(a^2 = b^2)$   $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{-1, 1\} \cup \{-2, 2\} \dots$
- Voorbeeld 3: 3-vouden =  $\{\dots -3, 0, 3, 6, \dots\}, \{3\text{-vouden} + 1\}, \{3\text{-vouden} + 2\}$

Als  $A, \sim$  is een equivalentierelatie

$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$ , bijvoorbeeld:

- In Vb. 3  $a \equiv b \Leftrightarrow 3 \mid a - b$ :  $[0] = \{b \in \mathbb{Z} \mid 0 \equiv b\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid +b\} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = [15], [0]$ : equivalentieklasse, de 0 is de representant

$$[1] = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$$

$$\text{Merk op: } [0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{Z}$$

Beschouw nu:  $\frac{A}{\equiv} = \{[a] \mid a \in A\}$ : quotiëntverzameling

- Dus bij Vb. 3. is dit gelijk aan  $\{\{\dots, 0, 3, \dots\}, \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}, \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}\}$
- Bij Vb. 1.  $\{\{\text{studenten met score 1}\}, \{\text{studenten met score 2}\} \dots\}$
- Bij Vb. 2.  $a \equiv b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ :  $[4] = \{4, -4\}$ :  $\frac{\mathbb{Z}}{\equiv} = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \dots\}$

Voorbeeld 3':  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  en  $a \sim b \Leftrightarrow 3 \mid a - b$

$A / \sim = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$ , dit is een **partitie** van  $A$ , want elk element van  $A$  past slechts in 1 deelverzameling

**Def.:** Stel dat  $A$  een verzameling is. Dan is  $\mathcal{A}$  een partitie van  $A$  als:  $\mathcal{A} \subset 2^A$

Voorbeeld:  $A = \{1, 2\}$   $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$\forall x \in \mathcal{A} : x \neq \emptyset$

NOTITIES ONVOLLEDIG

**Eigenschap:** de quotiëntverzameling van  $A$ ,  $A / \sim$  is een partitie van  $A$

1) Neem  $\mathcal{A} = A / \sim = \{[a] \mid a \in A\}$

T.B:  $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \neq \emptyset$

Bewijs:  $x \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists a \in A : x = [a] \Rightarrow a \in x \Rightarrow x \neq \emptyset$

2) T.B:  $\bigcup_{x \in \mathcal{A}} x = A$  ? Bewijs:  $\forall a \in A : a \in [a]$

$\Rightarrow a \in \bigcup_{x \in \mathcal{A}} x$  bevat alle  $a \in A$

$\Rightarrow \bigcup_{x \in \mathcal{A}} x = A$

3) ofwel is  $x = y$   $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$  (3a)

ofwel  $x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$  (3b)

3a:  $[a] = [b]$  T.B:  $a \sim b \Rightarrow b \in [a] \Rightarrow a \sim b$

3a omgekeerd:  $a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$ , Stel  $x \in [b]$  willekeurig  $\Rightarrow b \sim x, a \sim b \Rightarrow (T) a \sim x$   
 $\Rightarrow x \in [a] \Rightarrow [b] \subset [a]$  (\*)

Verder  $a \sim b \Rightarrow b \sim a \Rightarrow (*) [a] \subset [b]$  Uit \*'s volgt dat  $[a] = [b]$

3b) T.B:  $x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$

Bewijs: door contradictie (uit het ongerijmde)

Stel  $x \neq y$  en  $x \cap y \neq \emptyset$

Dan  $\exists c \in x \cap y$ , Noem  $x = [a]$  en  $y = [b]$

$\Rightarrow c \in [a]$  en  $c \in [b]$

Uit def  $[a] \Rightarrow a \sim c$

Met (S)  $\Rightarrow a \sim c$  en  $c \sim b$

Met (T)  $\Rightarrow a \sim b$

Met 3a  $[a] = [b] \Rightarrow x = y$  én  $x \neq y$ : **contradictie**  $\Rightarrow x \cap y = \emptyset$

■

## Hoorcollege 09/10/2024

In een verzameling  $A$ :  $R$  is een **equivalentierelatie** als: (R), (Z), (T). Notatie  $\equiv$  of  $\sim$

$R$  equivalentierelatie  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  een partitie = Elke partitie komt overeen met een equivalentierelatie

Voorbeeld:  $A = \{0, 1, a, b, \text{rood}, \text{groen}\}$

Dan  $\exists \mathcal{A} = \{\{0, 1\}, \{a, b\}, \{\text{rood}, \text{groen}\}\}$

Def  $p \equiv_{\mathcal{A}} q \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow p, q \in X$

In een verzameling  $A$ :  $R$  is een **partiële orde** op  $A$  als: (R), (AS), (T). Notatie:  $\leq$

Voorbeeld:  $A = \mathbb{R}$ ,  $R$ : is kleiner of gelijk aan

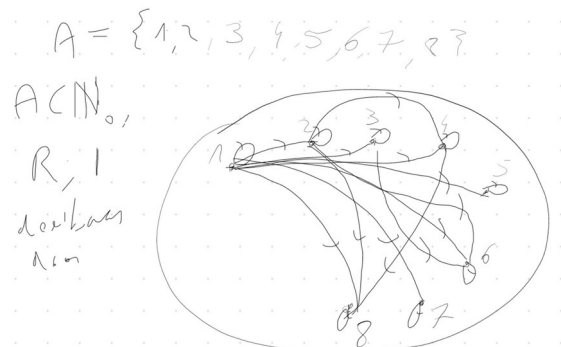
- (R)?  $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$  Ja!
- (AS)?  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ en } b \leq a \Rightarrow a = b$  Ja!
- (T)?  $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ en } b \leq c \Rightarrow a \leq c$  Ja!

$R$  is een **totale orde** op  $A$  als (R), (AS), (T) én (TO):  $\forall a, b \in A : a \leq b$  of  $b \leq a$  (is te ordenen op een as)

- (TO)?  $\forall a, b \in \mathbb{R} : \text{is } a \leq b \text{ of } b \leq a$  OK!  $\mathbb{R} \leq$  is een totaal geordende verzameling

Voorbeeld:  $A = \mathbb{N}_0, aRb \Leftrightarrow a|b$

- (R)  $\forall a \in A : aRa \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{N}_0 : a|a$  OK
- (AS)  $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a|b \text{ en } b|a \Rightarrow a = b$  OK
- (T)  $\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : a|b \text{ en } b|c \Rightarrow a|c$  OK
- (TO)  
 $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : a|b$  of  $b|a$  NIET OK, v.b.  $a=2, b=3$

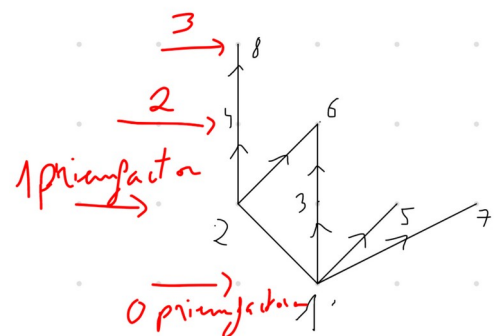


Dus  $\mathbb{N}_0$  is een partieel geordende verzameling = **poset** “partially ordered set”

Eenvoudiger dan Bovenste: **Hasse-diagram van een poset:**

Afspraken:

- Geen lussen tekenen
- Geen pijlen die volgen uit (T)
- Alle pijlen wijzen naar boven



Als  $X, \leq$  een poset  $Y \subset X$

- We noemen  $x \in X$  een bovengrens van  $Y$  als  $\forall y \in Y : y \leq x$
- We noemen  $x \in X$  een ondergrens van  $Y$  als  $\forall y \in Y : x \leq y$
- We noemen  $a \in Y$  een maximum van  $Y$  als  $\forall y \in Y : y \leq a$   
In woorden: Een maximum is te bereiken uit elk element door de pijlen te volgen
- We noemen  $a \in Y$  een minimaal van  $Y$  als  $\forall y \in Y : a \leq y$   
In woorden: Elk element is te bereiken door pijlen te volgen uit het minimum
- We noemen  $a \in Y$  een maximaal element als  $\forall y \in Y : a \leq y \Rightarrow y = a$

In woorden: Uit een maximaal element vertrekken geen pijlen (naar andere elementen)

- We noemen  $a \in Y$  een minimaal element als  $\forall y \in Y : y \leq a \Rightarrow y = a$

In woorden: In een minimaal element komen geen pijlen toe (uit andere elementen)

Voorbeeld:  $\mathbb{R}, \leq$  en  $Y = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

- Bovengrens  $Y$ ? Elke  $r \in \mathbb{R} : r \geq 1$
- Ondergrens  $Y$ ? Elke  $r \in \mathbb{R}^-$
- Maximum: 1? Ja, want  $\forall y \in [0, 1] : 1 \leq y \Rightarrow y = 1$
- Minimum: 0? Ja, want  $\forall y \in [0, 1] : 0 \leq y \Rightarrow y = 0$

**Algemeen:** bij (TO), maximum = *uniek* maximaal element, minimum = *uniek* minimaal element

Voorbeeld:  $\mathbb{R}, \leq$  en  $Y = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$

- Geen maximaal en minimaal element, boven en ondergrensen blijven gelijk aan Vb.  $\wedge$

Voorbeeld:  $A = \{1, 2, \dots, 8\}$  (zie tekening  $\wedge$ )  $R = | \quad A = y, X = \mathbb{N}_0$

- Is 1 een minimum?  $\forall y \in Y : 1 \leq y$  (in dit geval  $\leq = |$ ) : JA
- Is 1 een minimaal element?  $\forall y \in Y : y \leq 1 \Rightarrow y = 1$  ( $\sim$  er is een pijl van  $y$  naar 1): JA
- Er is geen maximum!
- 8, 6, 7, 5 zijn allemaal maximale elementen
- Ondergrens?  $x \in \mathbb{N}_0 : x \leq y, \forall y \in Y$ . 1 is een ondergrens
- Bovengrens?  $x \in \mathbb{N}_0 : y \leq x$ 
  - k.g.v. is de kleinste bovengrens, in dit v.b.  $k.g.v.(1, 2, 3 \dots 8) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$

## Hoofdstuk 3: Bewijstechnieken

Wat is een bewijs?

Voor een wiskundige eigenschap is een bewijs: **een sluitende redenering waarom deze eigenschap klopt.**

### Soorten bewijzen:

#### 1. Triviaal bewijs

Vb. Eigenschap: als  $n > 0$  dan  $n \geq 0$

Bewijs: triviaal, ■

(Ook: uit onwaar  $\Rightarrow$  onwaar of uit onwaar volgt alles Vb. Als  $\pi = 3$ , dan  $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0$  Slaat nergens op!, Bewijs: Triviaal

Voorbeeld: Als  $P$  onwaar, dan kan alles ( $Q$ ) volgen

Elk mens met 5 hoofden is een genie

Elke lege relatie is transitief  $\forall a, b, c \in A : aRb \text{ en } bRc \Rightarrow aRc$  dus  $R = \emptyset$  is transitief)

#### 2. Rechtstreeks bewijs

Geg.: Stelling 0:  $S_0, S_1, \dots, S_k$

T.B:  $S_n$

Bewijs:  $S_0, S_1, \dots, S_k \Rightarrow S_{k+1}; S_0, S_1, \dots, S_{k+1} \Rightarrow S_{k+2} \dots \Rightarrow S_{k+m} = S_n$

Voorbeeld:

Def:  $n \in \mathbb{N}_0$  is een samengesteld getal als  $n = a \cdot b$  met  $a, b \in \mathbb{N}$  en  $a, b \geq 2$

Eig: Elk samengesteld getal heeft een priemdelers  $d \leq \sqrt{n}$

Bewijs: Neem  $n$  een willekeurig samengesteld getal

Uit def:  $n = a \cdot b$  met  $a, b \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Wlog (*without loss of generality*)  $a \geq b$

$$\Rightarrow n = a \cdot b \geq b \cdot b = b^2$$

$$\Rightarrow n \geq b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq b \text{ dus } n \text{ heeft zeker een deler } b \leq \sqrt{n}$$

Er zijn nu 2 gevallen:

1.  $b$  is een priemgetal, dan : stel  $d = b \Rightarrow d|n$  en  $d \leq \sqrt{n}$

2.  $b$  is niet priem, dan  $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$  priemgetal  $d \leq b : d|b$ , zo vinden we  $d : d|b$  en  $b|n \Rightarrow b|n$  en  $d \leq b$  en  $b \leq \sqrt{n}$

■

### 3. Bewijs via contrapositie

T.B:  $A \Rightarrow B$

Dan bewijzen we  $\neg B \Rightarrow \neg A$  (redenering: Als uit  $\neg B$  ook  $A$  kan volgen dan  $\neg B \Rightarrow A \Rightarrow B$ , onmogelijk)

Voorbeeld:

Als het regent zet ik mijn kap op, als ik mijn kap niet op heb regent het niet

Foute conclusie: Als ik mijn kap op heb regent het, of dat als het niet regent, ik mijn kap niet op heb

Voorbeeld:

Eig:  $p > 1$  een heel getal is met geen enkele priemdeeler  $\leq \sqrt{p}$ , dan is  $p$  een priemgetal

Vb.: is 103 een priemgetal?  $\sqrt{103} \approx 11$

$\Rightarrow$  als  $2 \nmid 103, 3 \nmid 103, 5 \nmid 103$  en  $7 \nmid 103$ , dan 103 priem (klopt)

Contrapositie: Als  $p$  geen priemgetal is, dan heeft het een priemdelers  $\leq \sqrt{p}$

Bewijs: zie vorige stelling, bij (2)

## Hoorcollege 14/10/2024

### 4. Bewijs via contradictie (=Bewijs uit het ongerijmde)

Eigenschap:  $A$

Bewijs: Stel dat  $\neg A$  waar is  $\Rightarrow \dots \Rightarrow Q \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg Q$ : Tegenspraak!

Dus  $A$  geldt

Voorbeeld: Eigenschap:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bewijs via contradictie: Stel  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ met } a, b \in \mathbb{N}_0 \text{ en } \text{ggd}(a, b) = 1$$

$$\Rightarrow b\sqrt{2} = a \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow 2 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a^*$$

$$\Rightarrow a = 2c \text{ met } c \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2 \mid b$$

$$\text{DUS: } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

■

(\*): Lemma (= mini-stelling)

TB:  $a^2$  even  $\Rightarrow a$  even,  $A \Rightarrow B$

Bewijs door contrapositie:  $\neg A \Rightarrow \neg B$

Bewijs:  $a$  is oneven

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \text{ is oneven}$$

$$\Rightarrow a^2 \text{ is oneven}$$

■

## 5. Splitsen in gevallen

Voorbeeld:

$$\text{Eig: } \forall n \in \mathbb{N}: n^3 - 4n^2 + n \text{ is even. (= T.B.)}$$

Bewijs via splitsen:  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \text{ is even of } n \text{ is oneven}$

$$\text{A. } n \text{ is even} \Rightarrow n = 2m, m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n^3 - 4n^2 + n = (2m)^3 - 4(2m)^2 + 2m$$

$$= 8m^3 - 16m^2 + 2m$$

$$= 2(4m^3 - 8m^2 + m) \Rightarrow \text{is even}$$

$$\text{B. } n \text{ is oneven} \Rightarrow n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n^3 - 4n^2 + n = (2m + 1)^3 - 4(2m + 1)^2 + 2m + 1$$

$$\text{Uit merkwaardig product} \Rightarrow 8m^3(4m^2) + 3(2m) + 1 - 4(4m^2 + 4m + 1) + 2m + 1$$

$$= 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 - 16m^2 + 16m - 4 + 2m + 1$$

$$= \text{even} + 1 + 1 \text{ is even.}$$

■

## 6. Bewijs via inductie

$$\text{Eig: } \forall n \in \mathbb{N} \text{ geldt: } S(n)$$

Strategie:

- Basisgeval  $S(0)$
- Inductiehypothese: als  $S(k) \Rightarrow S(k+1), \forall k \in \mathbb{N}_0$   
Nadien is de conclusie:  
 $S(0) \Rightarrow S(1) \Rightarrow S(2) \Rightarrow S(3) \Rightarrow \dots$  a.d.h.v. inductiehypothese

Voorbeeld 1:  $\sum_{j=0}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$  (formule KOE)

Bewijs via inductie naar  $n$ :

Basisgeval:  $n = 0$ : TB:  $\sum_{j=0}^0 j = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$  OK!

I.H.: als de formule klopt voor  $n = k$ :  $\sum_{j=0}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$

T.B: de formule klopt voor  $n = k + 1$ :  $\sum_{j=0}^{k+1} j = (k+1) \frac{((k+1)+1)}{2}$

Bewijs:  $L = \sum_{j=0}^{k+1} j = 0 + 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \frac{(k+2)}{2} = R$

■

Voorbeeld 2: Gegeven:  $n$  rechten in het vlak

“Het is steeds mogelijk om de ontstane gebieden in te kleuren met slechts 2 kleuren zodat aangrenzende gebieden een andere kleur hebben.”

Bewijs via inductie naar  $n$ :

Basisgeval:  $n = 0$

(Alles 1 kleur)

I.H.: eigenschap geldt voor  $k$  rechten, dan ook voor  $k+1$

Bewijs:

Kleur de situatie met  $k$  rechten in (kan via IH)

Voeg de rechte opnieuw toe, aan één kant ervan wissel je R en G

- Grenzen langs de rechten  $\Rightarrow$  OK
- Alle interne grenzen rechts  $\Rightarrow$  OK  
links  $\Rightarrow$  OK

■

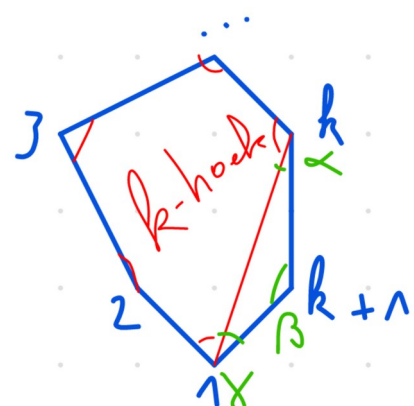
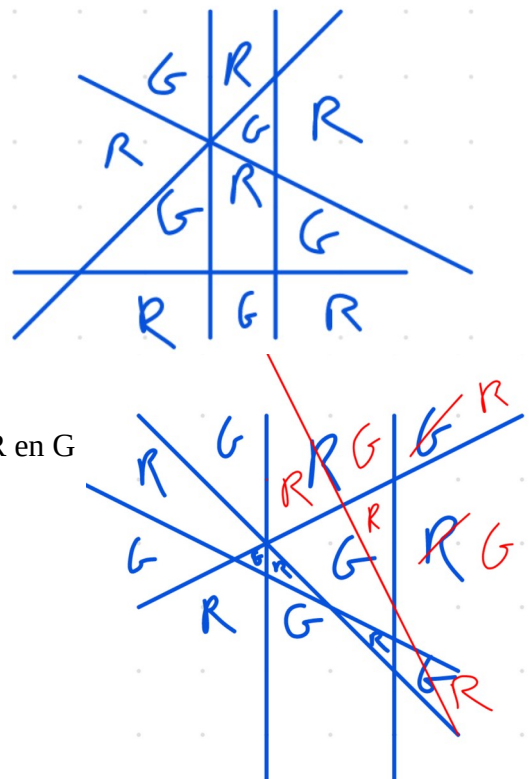
Uitbreiding:

- Starten vanaf andere  $n$ : basis  $S(m)$  met  $m \neq 0$

Voorbeeld: Bewijs voor elke  $n$ -hoek dat de som van al zijn hoeken gelijk is aan  $s = (n-2) \cdot 180^\circ$

Bewijs via inductie naar  $n$ :

- Basisgeval  $n = 3$ . Voor driehoek:  $s = 180^\circ = (3-2) \cdot 180^\circ = (3-n) \cdot 180^\circ$





- Algemeen geval: IH: als voor een  $k$ -hoek geldt  $s = (k-2) \cdot 180^\circ$ , dan is  $s = (k+1-2) \cdot 180^\circ$

$$\text{Bewijs: } s_{k+1} = s_k + \alpha + \beta + \gamma = (k-2)180^\circ + 180^\circ = (k-1)180^\circ$$

Variant: Basisgeval  $S(0)$  en  $S(1)$

en inductiehypothese: uit  $S(k-1)$  en  $S(k) \Rightarrow S(k+1)$

Voorbeeld: Rij van Fibonacci:

$$\text{Rij: } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ en } F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$\text{Eigenschap/TB: } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Basisgevallen:

$$n=0: F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = 0$$

$$n=1: F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Inductiehypothese: als de formule geldt voor  $n = k$  en  $n = k-1$ , geldt ze ook voor  $n = k+1$

$$\text{TB: } F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

$$\text{Bewijs: } F_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} F_k + F_{k-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right)$$

$$\text{Nog te bewijzen: } \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$L L = \frac{1 \pm \sqrt{5} + 2}{2} = \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$R L = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = L L$$

$$\Rightarrow F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) = T \cdot B.$$

■

Nog een voorbeeld van inductie: Rij  $T_0, T_1, T_2, \dots \Rightarrow T_n$  of  $(T_n)_n$

Voorbeeld:  $T_0 = 2, T_1 = 3, T_2 = 6$

$$T_n = (n+4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n-8)T_{n-3}$$

Dus  $T_3 = (3+4)T_2 - 4 \cdot T_1 + (4 \cdot 3 - 8)T_0 = 7 \cdot 6 - 12 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 14$  (voorbeeld v/e **recursieformule**)

$(T_n)_n = 2, 3, 6, 14, 40, 152, 784$

Olympiade: Volgende term, deze rij is een som van 2 bekende rijen, Welke?

Dus  $T_n = a_n + b_n \Rightarrow b_n = T_n - a_n$

Een beetje testen: priemgetallen? Nee dan  $b_n$  is nonsens,  $2^n$  Ja! Dan  $b_n = n!$

Bewijs via inductie naar  $n$ :

Basisgevallen:  $T_0 = 2^0 + 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 = 2$ ,  $T_1 = 2^1 + 1! = 3$ ,  $T_2 = 2^2 + 2! = 4 + 2 = 6$  3x OK

Inductiehypothese: als  $T_n = 2^n + n!$  voor  $n = k$ ,  $n = k-1$  en  $n = k-2$ , dan geldt die ook voor  $n = k+1$

TB:  $T_{k+1} = 2^{k+1} + (k+1)!$

Bewijs:  $T_{k+1} \stackrel{\text{recursie met } n=k+1}{=} (k+1+4)T_k - 4(k+1)T_{k-1} + 4((k+1)-8)T_{k-2}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{IH}}{=} (k+5)(2^k + k!) - 4(k+1)(2^{k-1} + (k-1)!) + (4k-4)(2^{k-2} + (k-2)!) \\ &= (k+4)2^k + 2^k - 4k2^{k-1} - 4 \cdot 2^{k-1} + (2k-2)2^{k-1} + (k+5)k! - 4(k+1)(k-1)! + 4(k-1)(k-2)! \end{aligned}$$

Faculiteiten samenvoegen  $= 2^{k-1}(2k+8+2-4k-4+2k-2) + 4k! + (k+1)! - 4k! - 4(k-1)! + 4(k-1)!$

$$= 4 \cdot 2^{k-1} + (k+1)! = 2^{k+1} + (k+1)!$$

■

## Hoorcollege 16/10/2024

### • Inductie

→ Variant:  $\forall n \in \mathbb{N}$  met  $n$  even: Eig  $S(c)$

- ♦ Optie 1: Stel  $n = 2k$ , inductie naar  $k$ .

$$S(n) = S'(k) \text{ IH: } S'(k) \rightarrow S'(k+1)$$

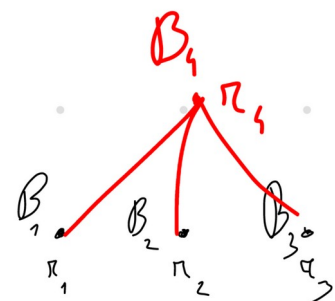
- ♦ Optie 2: Basis  $S(0)$

$$\text{IH: } S(k) \Rightarrow S(k+2)$$

### ➤ Structurele inductie

→ Def: 1 knoop is een boom, deze knoop is de “root” van de boom.

→ Recursieve definitie: Stel dat  $B_1 B_2 \dots B_n$  bomen zijn met roots  $r_1 \dots r_n$  dan kan je een nieuwe boom maken door alle  $r_i$  te verbinden met een nieuwe knoop  $r$ , die de root van de nieuwe boom  $B$  zal zijn.



### ➤ Recursieve definitie van een structuur

→ Basisgeval: eenvoudige gevallen

→ Recursieve def: gegeven  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  maak  $Y$

➤ Voor bomen geldt de eigenschap:

→ Noem  $e = \# \text{verbindingen (edges)}$

$V = \# \text{knopen (vertices)}$

Dan,  $V = e + 1$

→ Bewijs van de eigenschap via structurele inductie:

- ♦ Basisgeval: 1 knoop,  $V=1$ ,  $e=0 \Rightarrow v=e+1$  OK
- ♦ IH: veronderstel dat  $v_i = e_i + 1 \forall boom(B_1, B_2, \dots, B_n)$
- ♦ TB: dan geldt  $v = e + 1$  voor B gemaakt uit  $B_1, B_2, \dots, B_n$
- ♦ Bewijs: in de nieuwe boom B: (achter hoofd staat  $+n+1$  }  $v = v + 1$  ■)
- ♦ Voorbeeld: Compilers werken met “expressions”
  - Eenvoudige versie:
    - Definitie van basisgeval: elke letter en elk getal zijn een expression.

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= 0 & \text{Vgl 2 - 2 \cdot Vgl 1} \\
 8a + 4b + 2c &= 0 & \Rightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ -10a - 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow b = -3a \\
 27a + 9b + 3c &= 3 & \text{Vgl 2 - 2 \cdot Vgl 3} \\
 \Rightarrow -10a + 6a &= -2 \Rightarrow -4a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\
 b = -3a &\Rightarrow b = -\frac{3}{2} ; \text{ in Vgl 1: } c = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\
 \text{Dus } T_n &= P_{(n)} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + n - 3 \\
 \text{(controle: } &\checkmark
 \end{aligned}$$

- Vb.: 12, 3 a z -3
- Recursieve definitie: als  $E_1$  en  $E_2$  expressions zijn, dan ook  $E_1 + E_2, E_1 \cdot E_2$  en  $(E_1)$

Vb.: 12, 3+3 a.b

Quiz:

Vraag 1: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ? :  $2n^2, ? = 72$

Vraag 2: -3, -3, -3, 0, 9, 18, 27, 57, ?

TIP BIJ RIJEN, SCHRIJF STEEDS HET VERSCHIL OP TUSSEN DE WAARDE, TOT JE BIJ EEN CONSTATE KOMT. DIT WERKT VAAK

Bewering: Als je na het nemen van n verschil rijen een constante rij uitkomt, dan voldoen de termen aan een veeltermvoorschrift van graad n.

Hoe vinden we de coëfficiënten van deze veeltermfunctie?

$\Rightarrow$  Methode van de onbepaalde coëfficiënten:  $T_n = P(n)$  dus  $T_0 = -3 = d$   
 $T_1 = -3 = P(1) = a1^3 + b1^2 + c + d$ ,  $T_2 = -3 = P(2) \dots T_3 = 0 = P(3) \dots$

Tips:

1. Start met tellen bij 0
2. De hoogstegraadsterm  $a = \frac{\text{constante i. n de laatste rij}}{n!}$

toegepast op rij van fibonacci  
 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...  
 Verschijft:  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \neq$  veeltermfunctie  
 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  stel  $F_n = a x^n$  (← probeersel)  
 Invullen:  $a x^{n+1} = a x^n + a x^{n-1}$   
 $\Rightarrow x^{n+1} - x^n - x^{n-1} = 0$   
 $\Rightarrow x^{n-1}(x^2 - x - 1) = 0$   
 Dus  $x = 0$  of  $x^2 - x - 1 = 0$   
 (↳ dan  $F_n = 0 \forall n$ )  
 $b^2 - 4ac = 0 + 4 = 4$   
 $x = \frac{a \pm \sqrt{b}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$   
 Noem  $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi_1$  → de Gulden Sneeke  
 $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \phi_2$   
 Bij van Lucas: 1, 3, 4, 7, 11  
 $L_1 = 1$   $L_3 = 4$   $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$   
 Verschijft?  $L_n = a x^n$   
 $\Rightarrow$  de wortels van de vierkantsvergelijking  
 $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$   $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  want dezelfde v.h.  
 $\Rightarrow L_n = \alpha \phi_1^n + \beta \phi_2^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) \\ 6 = \alpha(3+\sqrt{5}) + \beta(3-\sqrt{5}) \end{cases}$$

$$\text{Vgl } 2 - \text{Vgl } 1 \Rightarrow 0 = \alpha\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + (-3\sqrt{5})\beta + \sqrt{5}/\beta = 0$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha = \beta \text{ in Vgl } 1 \Rightarrow 2 = \alpha(1+\sqrt{5}) + \alpha(1-\sqrt{5}) = 2\alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$L_n = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Gevolg:  $a_n = \alpha \phi_1^n$  voldoet aan  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$   
 ook  $b_n = \beta \phi_2^n$  voldoet " "  
 $\Rightarrow$  ook  $c_n = \alpha \phi_1^n + \beta \phi_2^n$  voldoet " "  
 2 en 3?  $F_0 = 0 = \alpha \phi_1^0 + \beta \phi_2^0 = \alpha + \beta$   
 $F_1 = 1 = \alpha \phi_1^1 + \beta \phi_2^1 = \alpha \phi_1 + \beta \phi_2$   
 $\text{Vgl } 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$   
 $\Rightarrow \alpha(\phi_1 - \phi_2) = 1$   
 $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

## Hoorcollege 21/10/2024

### Heuristieken (deel 2):

In deze zullen minstens 5 mensen in dezelfde maand jarig zijn

Als aantal personen  $> 4 \cdot 12 = 48$ , want als het meer is dan zal móeten er meer dan 5 in elke maand zitten.

### =duivenhokprincipe: Varianten

- $n > k: \exists$  hok met minstens 2 duiven
- $n < k: \exists$  leeg hok
- $n > q \cdot k (q \in \mathbb{N}_0): \exists$  hok met minstens  $(q+1)$  duiven

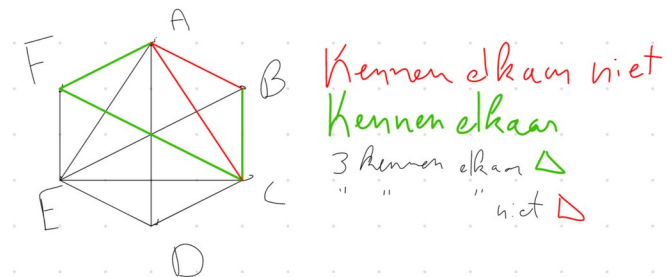
•

$n = k$ : als alle hokken gevuld zijn, zit er één duif  $\in$  elk hok (zie hfdst. II, relaties,  $|A|=|B| < +\infty$  Inj. + Sur.)

Eigenschap: in een groep van 6 mensen kan je er steeds 3 vinden die elkaar kennen of 3 die elkaar niet kennen

Opm: Bewijzen via opsommen?

#mogelijkheden =  $2^{15}$  = #symm. Relaties waarbij  $(a, a) \notin R$  Te Bewijzen: er bestaat groene, of rode driehoek



- Kijk vanuit A.  $\exists 5$  verbindingen, in 2 kleuren:  $n = 5$ ,  $k = 2$

Uit het duivenhokprincipe:  $\exists$  kleur met 3 verbindingen

W.l.o.g.: A is verbonden met B, C, D in het groen

- Kijk nu naar driehoek BCD, er zijn 2 gevallen:
  - BCD is rode driehoek  $\Rightarrow \exists$  rode driehoek OK
  - BCD heeft minstens 1 groene lijn  $\Rightarrow \exists$  groene driehoek OK

VEREENVOUDIGEN:

Voorbeeld: eigenschap: als  $ab + bc + cd + da = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , dan  $a = b = c = d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ )

Probeer eens met  $ab + ba = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Nu volledig: uit  $\wedge 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da = 0$

$\Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + \dots = 0 \Rightarrow (a - b)^2 + \dots = 0$ : elke term moet 0 zijn want allemaal positief dus  $a = b = c = d$

## Hoofdstuk 4: Tellen

Voorbeeld: kiezen €10, Eet ik kip, spaghetti **of** sushi of een van de 20 speelfilms.

Hoeveel keuzes?  $20 + 3 = 23$

En met €20? Eten **EN** film:  $20 \cdot 3 = 60$

**Somregel:**  $|A| + |B| = |A \cup B|$  ( $A, B$  disjunct)

$n(A)$  manieren om A te doen

$n(B)$  manieren om B te doen

dan zijn er  $n(A) + n(B)$  manieren om A **OF** B te doen

**Productregel:**  $|A| \cdot |B| = |A \times B|$

$n(A)$  manieren om A te doen

$n(B)$  manieren om B te doen

dan zijn er  $n(A) \cdot n(B)$  manieren om A **EN** B te doen

We maken dan koppels  $(a, b)$  met  $a \in A$  en  $b \in B$

Voorbeeld 1: Hoeveel bestandsnamen kan je maken met letters of cijfers? De lengte mag maximaal 32 karakters zijn. Je moet starten met een letter.

$$n = \sum_{k=1}^{32} 26 \cdot 36^{k-1} = \sum_{j=0}^{31} 26 \cdot 36^j = 26 \frac{36^{31} - 1}{36 - 1} \text{ (laatste stap met meetkundige reeks)}$$

Voorbeeld 2: Trump bezoekt 50 (verschillende) staten, hoeveel mogelijke volgordes?

$$n = 50!$$

Uitbreiding: ... met kortste afgelegde afstand (= traveling salesmen (TSP))

Voorbeeld 3: Matrixvermenigvuldiging

$$C = A B \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = c_{ik} \text{ met } A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Hoeveel bewerkingen nodig in functie van n?

$$\text{Opl: } \forall c_{ik}: \text{doe zoals voor } c_{11} = \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots$$

$$N = n^2(2n-1) (=O(n^3))$$

Voorbeeld 4: Hoeveel (positieve) delers heeft  $n = p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + \dots + p_k^{\alpha_k}$  met  $p_i$  priem,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$

$$\text{Opl: elke deler } d = p_1^{\beta_1} + p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

$$\text{Voorbeeld: } 12 = 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0$$

Hoeveel manieren om  $\beta$  te kiezen?  $\beta_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, \alpha_j\}$  dus  $\alpha_j + 1$  mogelijkheden

$$\# \text{mogelijkheden: } \#d = \prod_{j=1}^k \alpha_j + 1$$

Voorbeeld 5: Trouwfeest met 10 gasten aan 1 (ronde) tafel

#oplossingen? Enkel wie naast wie zit is belangrijk

$$n = \frac{10!}{10 \cdot 2} = 9 \frac{!}{2} \leftarrow \text{DELINGSREGEL (delen door 10 om draaiingen niet dubbel te tellen, 2 om spiegelingen niet dubbel te tellen)}$$

**Delingsregel:**

$n(A)$  manieren om A te doen

$n(B)$  manieren om B te doen

en voor elke manier om B te doen, zijn er k manieren om A te doen

$$\text{Dan } n(B) = \frac{n(A)}{k}$$

**Let op met delingsregels!**

Voorbeeld 6: Barcode: dunne (0) en dikke (1) lijnen, W/Z

#verschillende barcodes kan je maken met 13 enen of nullen, gelet op symmetrie (ondersteboven scannen)?

#codes:  $2^{13}$

**! codes die omgekeerd hetzelfde zijn?** Palindroombarcode #p =  $2^7$

#niet-palindroombarcodes =  $2^{13} - 2^7$

#bruikbare barcodes: (#niet-pal. /2) + #pal.  $\frac{2^{13}-2^7}{2} + 2^7 = 2^{12} + 2^7 - 2^6$

Voorbeeld 7: Rijbewijs? 7; Busabonnement? 22; Op kot? 7; R+B: 2; R+K: 2; B+K: 3; alle 3: 0

Stelling: Inclusie- exclusieprincipe..... Het antwoord is: 29

**Inclusie- exclusieprincipe:**

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{j=1}^n A_i \right|$$

## Hoorcollege woensdag 23/10/2024

Voorbeeld 9: Trap met 5 treden

Op hoeveel manieren kan je deze oplopen?

Je stapt altijd op 0 en 5. #manieren = #deelverzamelingen van  $\{1, 2, 3, 4\} = |2^A| = 2^4 = 16$

Alternatief: beslissingsboom. Teken een boom beginnende bij 0 en vertak steeds naar welke treden je nog kan gaan.

## Combinatoriek

Voorbeeld 10: 52 studenten. Op hoeveel manieren kan ik 5 studenten hieruit op een rij zetten.

$$\# = \frac{52!}{47!} = \text{Variatie van 5 uit 52} (k \leq n) = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} (= P(n, k))$$

- Volgorde van belang
- Geen herhaling

Als  $k = n$ : **Permutatie**  $V_n^n = n! = P_n$

Voorbeeld 11: Op reis 2 uit 4 gezinsleden, op hoeveel manieren?

$$\text{Combinatie} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Tussenschappen: zet 2 gezinsleden op een rij  $P(2, 4)$ , maar elk koppel wordt dubbel geteld:  
delingsregel: delen door  $k!$

$$\text{Algemeen: } C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \text{binomiaalcoëfficiënt}$$

- Volgorde niet van belang
- Geen herhaling

Voorbeeld 12: Ontgrendelen van code van 6 cijfers

**Herhalingsvariatie:**  $\overline{V}_n^k = n^k$

- Volgorde van belang
- Herhaling mag

Voorbeeld 13: Sint komt naar de klas. Iedere student kan kiezen uit een iPad, een iPhone, een macbook (Hans is een apple fanboy). Hoeveel keuzes zijn er in totaal met 54 studenten?  $3^{54} = \overline{V}_3^{54}$

Hoeveel mogelijke lijstjes?  $k = 54, n = 3$ . Je kiest 54 keer uit 3 objecten

**Herhalingscombinatie:**  $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1}$

- Volgorde niet van belang
- Herhaling mag

Tussenstappentrucje: Teken  $54 + 3 - 1$  bolletjes (om scheidingslijnen een bolletje te geven.

$$\begin{aligned} \# \text{ manieren om een lijstje te maken} &= \# \text{ aantal manieren om scheidingslijnen te zetten} \\ &= C_{56}^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld 13b: Hoeveel oplossingen over  $\mathbb{N}$  heeft  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , #opl.  $\overline{C}_n^k$

Voorbeeld 14: Op hoeveel manieren kan je 30 balletjes in 3 bakken steken?

Herhaling mag, volgorde niet belangrijk

$n=3, k=30$

# manieren:  $\overline{C}_3^{30} = C_{32}^2$

Voorbeeld 15: RUIT. Hoeveel anagrammen? = 4!

**Herhalingspermutatie:** (= #anagrammen):  $\overline{P}_n^{x,y,\dots,z} = \frac{n!}{x!y!\dots z!} = \binom{n}{x,y,\dots,z}$  met  $x+y+\dots+z=n$

= multibinomiaalcoëfficiënt

- Herhaling mag
- Volgorde van belang

DRIEHOEK # =  $\frac{8!}{2!}$

PARALLELEPIPEDUM # =  $\frac{17!}{2!4!3!3!}$

Uitbreiding:  $\binom{n}{k}$  met  $n \notin \mathbb{N}$  v.b.  $\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!} [n(n-1)\dots(n-k+1)]$  er zijn  $k$  factoren

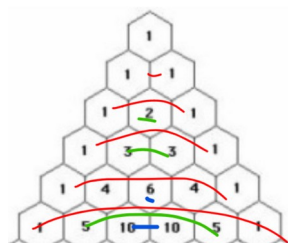
Dus  $\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{3!} \left( \left( \frac{-1}{2} \right) \left( \frac{-1}{2} - 1 \right) \left( \frac{-1}{2} - 2 \right) \right) = \frac{-5}{16}$ , toepassing zie later, Vb.  $(1+x)^{\frac{-1}{2}}$

Combinatorische gelijkheden:

1.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ : Algebraïsch bewijs

Bewijs:  $LL = \frac{n!}{(n-k)!k!} = RL$

Optie 2: bewijs via combinatorisch argument.





$\Rightarrow$  los een telprobleem op op 2 manieren

Bewijs: LL = kies  $k$  objecten uit  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , dan is RL  $(n-k)$  elementen om in  $V$  te laten en het resultaat is hetzelfde  $\Rightarrow LL = RL$

## 2. De gelijkheid van Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Algebraïsch bewijs: RL uiteenhalen en op gelijke noemer zetten maal  $(n-k)/(n-k)$  bij LT  $k/k$  bij RT

*Combinatorisch argument:*

Bewijs: LL: kies  $k$  elementen uit  $V = \{1, 2, \dots, n\}$

RL: is een som van :

# manieren om te zorgen dat element  $n$  zeker wordt gekozen =  $(k-1)$  keer kiezen uit  $(n-1)$  elementen (want  $n$  al gekozen)

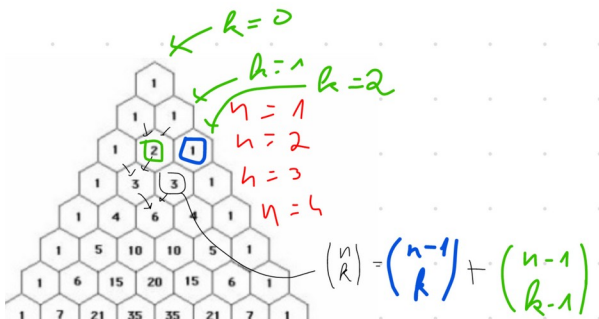
# manieren waarbij we  $n$  niet kiezen =  $n-1$  keer kiezen uit  $k$  elementen

Dus totaal aantal manieren (doe  $n$  er in **of** er uit): som van vorige

Verband met driehoek van Pascal?

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Aantal manieren om  $2 \cdot A$  te kiezen uit  $3 = \binom{3}{2}$



3.  $\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ : Algebraïsch bewijs

$$RL = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-k-(p-k))!}$$

$$= LL = \frac{n!}{(n-p)!p!} \cdot \frac{p!}{(p-k)!k!} = \binom{n}{n-p, p-k, k}$$

Bewijs via combinatorisch argument:

Vb. Rode duivels: selectie door bondscoach

men volgt  $n = 50$  spelers

dan neemt men  $p = 23$  spelers in de selectie, en hiervan kiest men  $k = 11$  spelers voor de basisgeval

2 manieren om te kiezen:

- Manier 1: kies  $p$  uit  $n$ :  $\binom{n}{p} = \binom{50}{23}$  en nadien:  $k$  uit deze  $p$ :  $\binom{p}{k} = \binom{23}{11}$

# mogelijkheden voor selectie en basis =  $\binom{50}{23} \binom{23}{11} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$

- Manier 2: kies eerst de basis elf

$\Rightarrow \# = \binom{50}{11} = \binom{n}{k}$ , kies dan de reserves (selectie, niet in basis):  $= \binom{50-11}{23-11} = \binom{n-k}{p-k}$

Dus linkerlid = rechterlid

## Hoorcollege 28/10/2024

In de driehoek van Pascal is de som van elke rij:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Idee: in elke rij wordt elk getal 2 keer gebruikt in de volgende rij

Algebraïsch bewijs via inductie naar  $n$ :

Basisgeval:  $n=0$ :  $LL = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = RL = 2^0 = 1$

IH: stel dat dit klopt voor  $n = m$ :  $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$

TB: klopt voor  $n = m + 1$ :  $\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = 2^{m+1}$

Bewijs van de inductiestap:

$LL = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = \binom{m+1}{0} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} \stackrel{\text{gelijkheid van Pascal}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{m+1} [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] + 1$ , neem  $k-1=l$

$= \binom{m}{m} + \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} + \binom{m}{0} \stackrel{IH}{=} 2^m + 2^m = 2^{m+1}$

Bewijs via combinatorisch argument:

$LL = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  en  $\binom{n}{k}$ : #manieren om  $k$  objecten uit  $n$  objecten te kiezen

= #deelverzamelingen met  $k$  elementen uit  $A$ ,  $|A|=n$

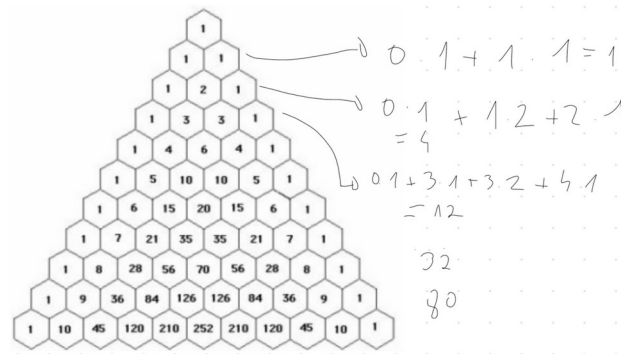
$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$  = #deelverzamelingen met 0 el. + ... #deelverzamelingen met  $n$  el. (uit  $n$ )

= #deelverzamelingen van  $A$  als  $|A| = n$

$RL = \text{#deelverzamelingen van } A = 2^n$



Volgende eigenschap:



Vectorieel vermenigvuldigen met  $(0,1,2,\dots,n)^\wedge$

**Eigenschap:**  $\sum_{i=0}^n i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$

Bewijs via combinatorisch argument:

LL=? Product:  $\binom{n}{i}$  en dan vermenigvuldigen met  $i$

Groep van  $n$  personen, je kiest  $i$  vertegenwoordigers.

In deze groep kies je één voorzitter.  $\# = \binom{i}{1} = i$

#mogelijke delegaties:  $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot i = LL$

RL: kies eerst de voorzitter  $\Rightarrow \# = n$

Kies nadien nog maximaal  $(n-1)$  vertegenwoordigers  $\Rightarrow \# = 2^{n-1}$ : samen is dit  $n \cdot 2^{n-1}$



**Verwante eigenschap:**  $\sum_{i=\substack{\text{want termen met } i=0 \text{ en } i=1 \text{ zijn } 0}}^n \binom{n}{i} i(i-1) = n(n-1)2^{n-2}$

Bewijs via combinatorisch argument:

Methode 1 (LL):

Kies een groep van  $i$  vertegenwoordigers (minstens 2)  $\# = \binom{n}{i}$

Kies een voorzitter en een ondervoorzitter:  $\# = i$  en  $\# = i-1$

$\# = \binom{n}{i} i(i-1)$

Methode 2 (RL):

Kies 1 voorzitter en dan 1 ondervoorzitter:  $\# = n$  en  $\# = n-1$

Vul aan met maximaal  $(n-2)$  vertegenwoordigers

$\Rightarrow RL = n(n-1)2^{n-2}$



### Binomium van Newton:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \text{ want de som van de machten van } x \text{ en } y \text{ is } n, n \in \mathbb{N}, k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

### Bewijs via algebra (inductie naar n):

$$\text{Basisgeval: } n = 0 \text{ LL} = (x+y)^0 = 1$$

$$\text{RL} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 \text{ OK}$$

$$\text{IH: } (x+y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$$

$$\text{TB: } (x+y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^k y^{(m+1)-k}$$

### Bewijs via inductie naar n:

$$\text{LL} = (x+y)^{m+1} = (x+y)^m (x+y) \stackrel{\text{IH}}{=} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m-k} (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{k+1} y^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m+1-k}$$

$$\stackrel{\text{stel } k+1=l \Rightarrow k=l-1}{=} \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{l-1} x^l y^{m-(l-1)} + \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} x^l y^{m+1-l}$$

$$= \sum_{l=1}^m \binom{m}{l-1} x^l y^{m-l+1} + \binom{m}{m} x^{m+1} y^0 + \sum_{l=1}^m \binom{m}{l} x^l y^{m-l+1} + \binom{m}{0} x^{m+1} y^0, \text{ Gelijkheid van Pascal}$$

$$= \sum_{l=1}^m \binom{m+1}{l} x^l y^{m+1-l} + \binom{m+1}{m+1} x^{m+1} y^0 + \binom{m+1}{0} y^{m+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{m+1} \binom{m+1}{l} x^l y^{m+1-l}$$



### Bewijs via combinatorisch argument:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y) \dots n \text{ factoren} \dots$$

$$= x^n + y^n + nx^{n-1}y + \dots ?, n: \text{ op hoeveel manieren kan ik bij } n \text{ factoren } 1 \text{ y kiezen}$$

$$\text{Algemeen: } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n A_k x^k y^{n-k} \text{ (met } A_k \text{ een onbekende coëfficiënt)}$$

$$\text{Vanwaar is de term } A_k x^k y^{n-k}$$

Je moet  $k$  keer  $x$  kiezen (en dus automatisch  $(n - k)$  keer  $y$  uit  $n$  factoren

$$\Rightarrow A_k = \binom{n}{k}$$

■

**Gevolg van binomium van Newton:** Stel  $x = y = 1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \text{vorige eigenschap}$

### Uitbreiding: Multinomial van Newton

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_r} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n \text{ met } n_i \in \mathbb{N} \text{ en } \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Voorbeelden:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + abc$$

$$\text{Coëfficiënt van } a^2b = \text{coëfficiënt van } a^2b^1c^0 = \binom{3}{2, 1, 0} = \frac{3!}{2! 1! 0!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Coëfficiënt van } a^1b^1c^1 = \binom{3}{1, 1, 1} = \frac{3!}{1! 1! 1!} = 6$$

### Verdere uitbreiding:

$$\text{Wat is } \sqrt{\frac{1006}{1000}} = \sqrt{1,006} = (1 + 0,006)^{\frac{1}{2}} \text{ is van de vorm } (x + y)^n \text{ met } x = 1, y = 0,006, n = \frac{1}{2}$$

$$\text{Stelling: } (x + y)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ als } |x| < |y|: \text{De Binomiaalreeks}$$

Voorbeeld:

$$(x + 1)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} x^k 1^{1/2-k} \text{ Binomiaalreeks met } x = 1, n = 1/2$$

$$= \binom{1/2}{0} 1^0 + \binom{1/2}{1} x^1 + \binom{1/2}{2} x^2 + \binom{1/2}{3} x^3 + \dots \text{ want } \binom{1/2}{0} = \frac{1}{0!}; \binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1!}; \binom{1/2}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{2!} \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

$$\text{Gevolg: } \sqrt{1,006} \stackrel{x=0,006}{=} 1 + \frac{1}{2}(0,006) + \dots \approx 1,003$$

$$\binom{\alpha}{k} \text{ met } \alpha \in \mathbb{Z}: \binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \left( \stackrel{\text{als } \alpha \in \mathbb{N}}{=} \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! k!} \right)$$

$$= \frac{-|\alpha|(-|\alpha|+1)\dots-(|\alpha|-k+1)}{k!} = (-1)^k (k-1+|\alpha|) \dots \frac{(a+|\alpha|) \cdot |\alpha|}{k!} = (-1)^k \frac{(|\alpha|+k-1)!}{(|\alpha|-1)! k!}$$

$$\stackrel{\alpha=-1}{\Rightarrow} \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{(k-1-\alpha)!}{k!(\alpha-1)!} = \text{met } \alpha > 0 \text{ of } (-1)^k \frac{(k-1+\alpha)!}{k!(\alpha-1)!}$$

## Hoorcollege 30/10/2024

### Kansrekening

#### Definities:

Voorbeeld 1: dobbelsteen  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

1) Kansruimte = **universum** = sample space

= gebeurtenisruimte

= verzameling van alle mogelijke uitkomsten bij een kanstheoretisch experiment

Notatie,  $\Omega$ ,  $V$ , ...

2) **Gebeurtenis:**  $A \subset \Omega$  *Voorbeeld, een oneven getal gooien,  $A = \{1,3,5\}$*

*Voorbeeld, hoger gooien dan 4,  $B = \{5,6\}$*

*Voorbeeld, 2 of lager gooien,  $C = \{1,2\}$*

3) Disjuncte gebeurtenis:

$A$  en  $B$  **disjunct**  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

In dit voorbeeld,  $A$  en  $B$  zijn niet disjunct.  $B$  en  $C$  zijn disjunct

4) Verzameling met 1 element = “**singleton**”

5) Gebeurtenis met 1 element noemen we een **atomaire gebeurtenis**

*Voorbeeld:  $D = \{6\}$ , “een zes gooien”*

6) Gebeurtenis met meer dan 1 element: **Samengestelde gebeurtenissen.**

*Voorbeeld:  $A, B, C$  uit bovenstaande voorbeelden*

7) Een kansruimte is **equiprobabel** als alle atomaire gebeurtenissen met dezelfde kans voorkomen.

*Voorbeeld: Gooien met 1 eerlijke dobbelsteen (kans op elke atomaire gebeurtenis is  $1/6 = 1/|\Omega|$ )*

Voorbeeld 2: werpen met 2 eerlijke dobbelstenen

$\Omega_1 =$  de som van de ogen van beide dobbelstenen

=  $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ , kans op 7:  $1/6$ , kans op 2 of 12:  $1/36$

Voorbeeld 3: werpen met 2 eerlijke dobbelstenen met elks een andere kleur: rood en blauw

$\Omega_2 = \{\text{alle tupels (worpRood, worpBlauw)}\}$

deze kansruimte is equiprobabel, steeds  $1/36$

Voorbeeld 4: werpen met 2 identieke dobbelstenen, beschouw de koppels

*Voorbeeld:  $(2,3) \equiv (3,2)$ , een 2 gooien met de ene en een 3 met de andere*

Notatie,  $\langle 2,3 \rangle$

$\Omega_3 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \dots, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \dots, \langle 6,6 \rangle\}$  dus geen  $\langle 2,1 \rangle, \dots$

Deze kansruimte is niet equiprobabel:  $\langle 1,2 \rangle$ :  $1/18$ ,  $\langle 1,1 \rangle$ :  $1/36$

7) **Kansmaat** op  $\Omega$  is een functie

$$\mathbb{P}: 2^\Omega (= \text{alle gebeurtenissen}) \rightarrow \{0,1\}: A \rightarrow \mathbb{P}(A)$$

die voldoet aan

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1, \text{ als } A \text{ en } B \text{ disjunct: is } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \text{ (wiskundige definitie)}$$

Voorbeeld 5:  $A = \{1,2,3\} \subset \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) \stackrel{\text{eerlijke dobbelsteen}}{=} \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Gevolg: je kan  $\mathbb{P}$  vinden door te kijken naar atomaire gebeurtenissen:

$$\text{Stel } A = \{e \mid e \in A\} \text{ dan is } \mathbb{P}(A) = \sum_{e \in A} \mathbb{P}(\{e\})$$

Soms wordt  $\mathbb{P}$  gedefinieerd via de kans op atomaire gebeurtenissen

$$\text{Alternatieve definitie: } \mathbb{P}: \Omega \rightarrow [0,1]: e \rightarrow \mathbb{P}(e) \text{ met } \sum_{e \in \Omega} \mathbb{P}(e) = 1 \text{ dan } \mathbb{P}(A) = \sum_{e \in A} \mathbb{P}(e)$$

dit werkt voor eindige en aftelbare  $\Omega$  (anders  $0 \cdot \infty$ )

We noemen een kansmaat equiprobabel als:

$$\exists a \in [0,1] \text{ zodat } \mathbb{P}(\{e\}) = a, \forall e \in \Omega$$

Eigenschap: Als  $\mathbb{P}$  equiprobabel is en  $0 < |\Omega| < +\infty$

$$\text{dan is } a = \frac{1}{|\Omega|} \text{ en dus } \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Voorbeeld 6: Som van de ogen van 2 dobbelstenen:

$$\mathbb{P}(\text{som} = 3) = \frac{|A|}{|\Omega_2|} = \frac{|((1,2), (2,1))|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$\mathbb{P}(\text{som} = 4) = \frac{|A|}{|\Omega_2|} = \frac{|((1,3), (2,2), (3,1))|}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{P}(n) = \left\{ \frac{n-1}{36} : n \leq 7; \frac{13-n}{36} : n > 7 \right\}$$

Alternatief, maak een tabel, en lees daar de waarde uit.

D1, D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Voorbeeld 7: kans dat de som van 2 dobbelsteenworpen oneven is?

$\Omega = \{2,3,4,\dots,12\}$  (niet equiprobabel)

$$\mathbb{P}(\{3,5,7,9\}) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{7\}) + \mathbb{P}(\{9\}) = \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\text{even som gooien}) = 1 - \mathbb{P}(\{3,5,7,9\}) = 1 - 0,5 = 0,5$$

8) Het **complement** van A is  $\bar{A}: \bar{A} = \Omega \setminus A$

$$\text{aangezien } A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Wat als ... a en B niet disjunct zijn?

- Voor equiprobabele kansmaten:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

- Geldt dit ook voor niet-equiprobabele kansmaten? JA.

$$\text{Eigenschap: } \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Bewijs:  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ , want ze zijn disjunct

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\stackrel{\text{disjunct}}{=} \mathbb{P}((A \setminus B) \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B)$$

■

## Voorwaardelijke kans

1) A en B zijn **onafhankelijke gebeurtenissen**  $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B)_{=A \text{ en } B \text{ tegelijk}} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Dus de kansen van beide gebeurtenissen beïnvloeden elkaar niet.

Voorbeeld: tegelijk werpen met een rode en een blauwe dobbelsteen

$$\mathbb{P}(5,6) = \mathbb{P}(R) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{5\}) \cdot \mathbb{P}(\{6\}) = 1/36$$

Voorbeeld: A = even gooien met rood

B =  $\geq 5$  gooien met blauw

Zijn deze gebeurtenissen onafhankelijk?

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = 1/3$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{5,6\}) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(2,5), (2,6), (4,5), (4,6), (6,5), (6,6)\}) = 1/6$$

Dus onafhankelijke gebeurtenissen

Voorbeeld: A = 2 gooien met blauw, B = som van de ogen is acht

$$\mathbb{P}(A) = 1/6; \mathbb{P}(B) = \frac{13-8}{36} = \frac{5}{36} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{5}{216}$$



$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(2, 6)\}) = 1/36 = 6/216 \neq 5/216 \Rightarrow \text{ze zijn **niet** onafhankelijk}$$

Voorbeeld:  $A = 2$  gooien met blauw,  $B = \text{som van de ogen is zeven}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}; \mathbb{P}(B) = \frac{7-1}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(2, 5)\}) = 1/36 \Rightarrow \text{ze zijn **wel** onafhankelijk}$$

### Voorwaardelijke kans:

$\mathbb{P}(A|B) = \text{kans op } A, \text{ gegeven } B = \text{kans op } A, \text{ wetende } B$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Voorbeeld: Kans op blauwe 2 gegeven som = 8 (met 2 dobbelstenen)

$$A = \text{blauwe 2}, B = (\text{som} = 8) \quad \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(2, 6)\})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/36}{\frac{18-8}{36}} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(\text{blauwe 2 gegeven dat de som 7 is}) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(2, 5)\})}{1/6} = 1/6$$

$$\text{Merk op: hier is } \mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \text{ dus } \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A \text{ en } B \text{ onafhankelijk}$$

$$\text{Eigenschap: } \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow A \text{ en } B \text{ onafhankelijk}$$

## Hoorcollege 4/11/2024

### Somregel:

$$A_i: \text{partitie } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ als } i \neq j \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k A_i = A$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

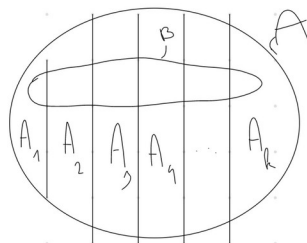
Bewijs:

$$\mathbb{P}(B) \stackrel{X \cap Y \Rightarrow \mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)}{=} \mathbb{P}((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_k) \text{ en}$$

$$\frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(B|A_i) \Rightarrow \mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B \cap A_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

Q.E.D

Gevolg: **regel van Bayes:**



$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

$$\text{Bewijs: } \mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

■

## Logische paradoxen: zie slides Blackboard

Keuze van een geneesmiddel (1):

Score van een geneesmiddel:  $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Voor 46% van de bevolking is B het beste, voor 54% is A de beste (dus A is beter)

Keuze van een geneesmiddel (2):

Met 3 medicijnen A: ~30% B: ~36% C: ~34% (dus B is het beste en A is het slechtst)

Dus of C bestaat of niet bestaat, maakt dat A de beste of de slechtste is.

## Kansverdeling:

Tot hier:  $A \subset \Omega$  en bekijk  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

**Def:** We noemen  $X$  een **stochastische variabele** of **toevalsveranderelijke** als  $X$  een reëelwaardige functie is:  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Bv.: Je gooit met 2 eerlijke dobbelstenen.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

$$X = \text{som van de ogen: } X((1,1)) = 2$$

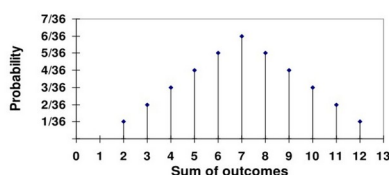
$$\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{P}(\{s \in \Omega \mid X(s) = x\})$$

- **Kansdichtheidsfunctie (probability density function = pdf)**

$$f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]: x \mapsto \mathbb{P}(X=x)$$

$$\text{Voorbeeld met som van de ogen van een dobbelsteen: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{36} & 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{N} \\ \frac{13-x}{7} & 8 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

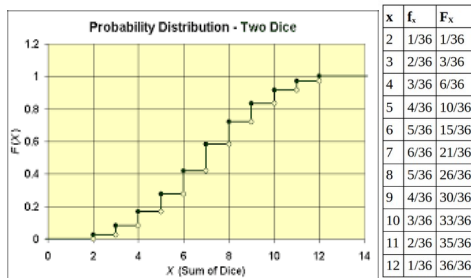


$$\text{Vaak: } \text{Im}(X) \rightarrow [0, 1]$$

- **Kansverdelingsfunctie (cumulative distribution function = cdf)**

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]: x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

*Voorbeeld met som van de ogen van een dobbelsteen:*



Overzicht van enkele verdelingen:

### 1. Uniforme verdeling:

Vb.  $X$  = #ogen bij werpen van 1 eerlijke dobbelsteen. ( $f_x$  Allemaal  $1/6$ ) Not.:  $X \sim U(\{1t/6\})$

Algemeen:  $X \sim U(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \rightarrow \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}$

### 2. Bernoulli-verdeling:

Bernoulli-experiment: kanstheoretisch experiment met kans op slagen  $p$  en kans op falen ( $1 - p = q$ )

$\Omega = \{ \text{"slagen"}, \text{"falen"} \}$

$X(\text{"slagen"}) = 1$

$X(\text{"falen"}) = 0$

$f_X: \Omega \rightarrow [0, 1]: \begin{cases} 1 \text{ als slagen} \\ 0 \text{ als falen} \end{cases}$

$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p \text{ als } x = 1 \\ 1 - p \text{ als } x = 0 \end{cases}$

Vb. Een 6 gooien met 1 dobbelsteen, is een Bernoulli-experiment met  $p = \frac{1}{6}; q = \frac{5}{6}$

Hier  $X \sim B(1, \frac{1}{6})$  (1= in 1 experiment) ( $1/6 = p$ ): B: Binomiale verdeling

### 3. Binomiale verdeling:

$X \sim (n, p)$  komt overeen met het aantal successen in  $n$  Bernoulli-experimenten met kans op slagen  $p$ .

$\mathbb{P}(X=k) = ?$

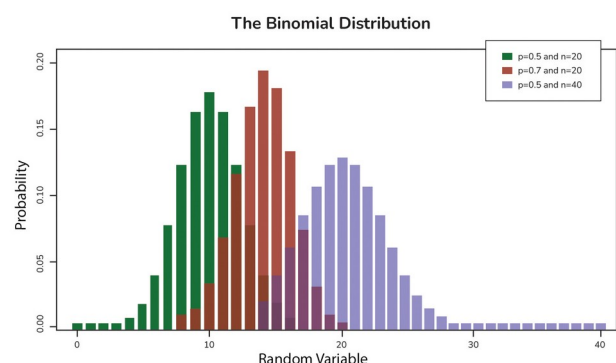
Vinden van  $B(n, p)$ ?

Noem succes: S, falen: F

Dan is elke reeks van  $n$  experimenten een woord met  $n$  letters (Vb.  $\underbrace{SFFFSS \dots FSSS}_{n \text{ letters}}$ )

Hoeveel woorden met  $k$  successen?  $\binom{n}{k}$

Wat is de kans op zo 1 woord?  $p^k \cdot q^{n-k} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$



In totaal:  $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

# Hoorcollege 6/10/2024

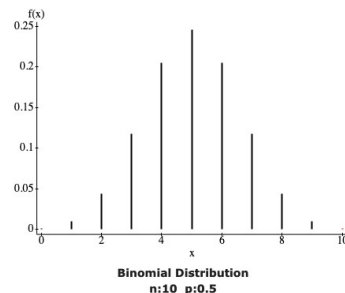
Bewijs: Is de som van de kansen 1 voor de Binomiale verdeling?

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Q.E.D

Voorbeeld: 10x een munt opgooien.  $X = \# \text{kop}$

$$X \sim B(10, \frac{1}{2})$$



$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \quad \mathbb{P}(X=1) = \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{10}{1024} \dots$$

## 4. Negatief Binomiale verdeling:

“Hoe vaak zal ik moeten gooien met een dobbelsteen om n keer een 6 te gooien?”

Def:  $X \sim NB(n, p)$ , doe onafhankelijke Bernoulli-experimenten met kans op succes p en stop wanneer je n successen hebt, #pogingen dat nodig was, is k.

Gevolg:  $\mathbb{P}(X=k) = 0$  als  $k < n$

Formule? Welk woord met letters S,F komt overeen met n-de succes na k pogingen?

SSFSSFFF ... S ← eindigen met succes  
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{k-1}$

#woorden (lengte k-1, bevat n-1 keer S) =  $\binom{k-1}{n-1}$

kans op zo'n woord =  $p^n \cdot q^{k-n}$  met,  $n = \#S$ ; en  $k-n = \#F$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} \text{ als } X \sim NB(n, p)$$

Controle dat de kans 1 is?

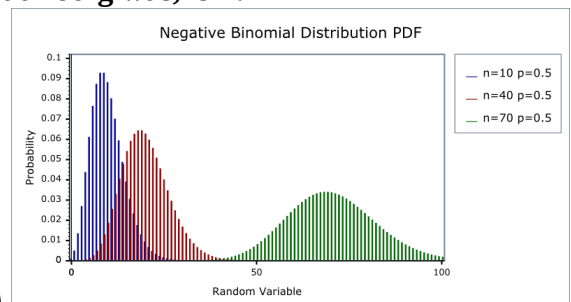
$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = p^n \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n}}_{\text{dit moet gelijk zijn aan } \frac{1}{p^n} = p^{-n}}$$

$$\text{Nog te Bewijzen: } p^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n}$$

Bewijs via binomiale reeks:  $(x+y)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} x^l \cdot y^{\alpha-l}$  met  $|x| < |y|$ , bij hoge machten van x

Stel  $-q=x$ ,  $1=y$ ,  $\alpha=-n$

$$\stackrel{\text{Binomiale reeks}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-n}{l} (-q)^l 1^{-n-l}$$



$$\text{stel } k=l+n, l=k-n \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} (-q)^{k-n} \binom{-n}{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} q^{k-n} (-1)^{k-n} \binom{-n}{k-n} (*)$$

$$\text{wegens } \binom{\alpha}{l} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-l+1)}^{l \text{ factoren}}}{l!} \text{ voor } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{met } (-1)^{k-n} \frac{\overbrace{(-n)(-n-1)\dots(-n-(k-n)+1)}^{k-n \text{ factoren}}}{(k-n)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(k-1)}{(k-n)!} = \binom{k-1}{n-1} (**)$$

$$\binom{k-1}{n-1} \stackrel{\text{symmetrie}}{=} \binom{k-1}{(k-1)-(k-n)}$$

$$\text{Dus } p^{-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-n} \binom{k-1}{n-1} \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1 \text{ Q.E.D}$$

## 5. Poissonverdeling

X telt het aantal keer dat “iets” gebeurt in een zekere tijdspanne

*Voorbeeld:* Hoeveel klanten komen de supermarkt binnen op woensdag tussen 10 en 11u?

$$X \sim P(\lambda)$$

Formule (bewijs niet te kennen):

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \text{ met } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (= \text{taylorreeks})$$

Idee van de taylorreeks: benader een functie door een veelterm van graad d zodat de (d-1) eerste afgeleiden in 1 punt gelijk zijn aan die van de oorspronkelijke functie.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$e^x \approx 1+x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$$

Controle dat som van de kansen 1 is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \text{ OK } \checkmark$$

Hoe meaken we nieuwe verdelingen?

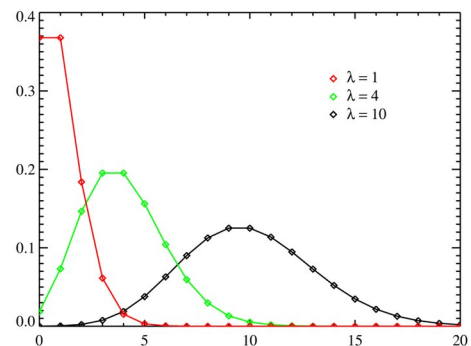
*Voorbeeld som van de ogen met 2 dobbelstenen*

$$X = X_1 + X_2 \text{ met } X_1, X_2 \sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$$

$$\mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}((1,4)) + \mathbb{P}((2,3)) + \mathbb{P}((4,1)) + \mathbb{P}((3,2))$$

$$= \mathbb{P}(1)\mathbb{P}(4) + \dots \text{ (want EN) (beide resultaten onafhankelijken)}$$

$X_1$  en  $X_2$  zijn toevalsveranderlijken (TV)



$$X = X_1 + X_2$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_l \mathbb{P}(X_1=l \text{ en } X_2=k-l), \text{ sommatie loopt over nuttige waarde voor } k$$

Als  $X_1$  en  $X_2$  onafhankelijk zijn, dan

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_l \mathbb{P}(X_1=l) \cdot \mathbb{P}(X_2=k-l) : \text{Convolutieproduct}$$

De kansdichtheidsfunctie van  $X$  is het convolutieproduct van de kansdichtheden van  $X_1$  en  $X_2$

Voorbeeld:  $X_1 \sim B(n, p); X_2 \sim B(m, p) \Rightarrow X = X_1 + X_2 \sim ?$  Hypothese:  $X \sim (m+n, p)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_l \mathbb{P}(X_1=l \text{ en } X_2=k-l)$$

$$\stackrel{\text{onafh.}}{=} \sum_{l=0}^n \mathbb{P}(X_1=l) \mathbb{P}(X_2=k-l) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} p^l q^{n-l} \binom{m}{k-l} p^{k-l} q^{m-(k-l)}$$

$$= \sum_{k=0}^k \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} p^k q^{n-l+m-k+l} \text{ we verwachten } \mathbb{P}(X=k) = \binom{m+n}{k} p^k q^{(m+n)-k}$$

$$\text{Dus nog te bewijzen: } \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \binom{m}{k-l} = \binom{m+n}{k}$$

Bewijs via combinatorisch argument:

RL: kies  $k$  personen uit een groep met  $m+n$  mensen

LL: de groep bestaat uit  $m$  mannen en  $n$  vrouwen

kies  $l$  vrouwen uit  $n$  en  $k-l$  mannen uit  $m$

$$\Rightarrow \# = \binom{n}{l} \binom{m}{k-l}, \text{ en herhaal dit voor } l \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ voor } n < l \leq k : \binom{n}{l} = 0$$

Dus  $X \sim B(m+n, p)$

## Hoorcollege 13/11/2024

### Verwachtingswaarden en variantie

Stel  $X$  een stochast:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k k \mathbb{P}(X=k) : \mathbb{E} \text{ van 'expectation value'}$$

score  $\cdot$  kans dat de score optreedt.

$$\text{Voorbeeld: } X \sim U\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \mathbb{P}(x_i) = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = x_1 \mathbb{P}(x_1) + x_2 \mathbb{P}(x_2) + \dots + x_n \mathbb{P}(x_n)$$

$$= \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Voor dobbelsteen:  $U(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

Voor 2 dobbelstenen, som van de ogen = voor uniform:

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Eigenschap:  $\mathbb{E}[x_1 + x_2] = \mathbb{E}[x_1] + \mathbb{E}[x_2]$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[x_1 + x_2] &= \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_k k \sum_l \mathbb{P}(X_1 = l \text{ en } X_2 = k - l) \\
 &\stackrel{\text{Stel: } x_1 = l \Rightarrow x_1 + x_2 = k}{x_2 = k - l} = \sum_{x_2} \sum_{x_1} (x_1 + x_2) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ en } X_2 = x_2) \\
 &= \sum_{x_2} \sum_{x_1} x_1 \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ en } X_2 = x_2) + \sum_{x_2} \sum_{x_1} x_2 \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ en } X_2 = x_2) \\
 &\stackrel{\substack{x_1 \text{ en } x_2 \text{ buiten de som zetten} \\ 2 \text{ sommaties van plaats wisselen}}}{=} \sum_{x_1} x_1 \underbrace{\sum_{x_2} \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ en } X_2 = x_2)}_{\mathbb{P}(X = x_1) \text{ want alle kansen van } x_2 \text{ tezamen zijn } 1, 1 \text{ en } Y = Y} + \sum_{x_2} x_2 \underbrace{\sum_{x_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ en } X_2 = x_2)}_{\text{analoog}} = \mathbb{E}[x] \\
 &= \sum_{x_1} x_1 \mathbb{P}(X_1 = x_1) + \sum_{x_2} x_2 \mathbb{P}(X_2 = x_2) = \mathbb{E}[x_1] + \mathbb{E}[x_2]
 \end{aligned}$$

■

Voor Bernoulli:

$$\mathbb{E}[x] = \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \quad \blacksquare$$

Voor Binomiaal:

$$\mathbb{E}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{Tip: zoek vorm van binomium of binomiumreeks}$$

Bewijs:

*Lemma:*

$$k \cdot \binom{n}{k} = \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1} (\heartsuit)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[x] \stackrel{\heartsuit}{=} \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Stel  $k-1 = l$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} p^{l+1} q^{(n-1)-l} = p \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} p^l q^{(n-1)-l} = np (p+q)^{n-1} = np, \text{ want } p+q=1$$

Voor negatief binomiaal:

$$\text{Ableiding steunt op: } \sum_{x=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = 1 (*)$$

$$\mathbb{E}[x] = \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}: \heartsuit \text{ met } k, n \text{ omgewisseld: } n \binom{k}{n} = k \binom{k-1}{n-1}$$



$$= n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n}, \text{ Stel } \begin{matrix} k=K-1 \\ n=N-1 \end{matrix} \Rightarrow k-n = K-1-(N-1) = K-N$$

$$= n \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^{N-1} q^{K-N} = \frac{n}{p}$$

Klopt dit met onze intuïtie?

Vb. 6 gooien met een dobbelsteen, hoeveel beurten zijn er nodig?

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p} = \frac{1}{1/6} = 6$$

Voor Poisson:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$\text{stel } k-1=l = e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

Wat is  $\mathbb{E}[X]$  voor bekende verdelingen:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. Uniform: $X \sim (\{x_1, x_2 \dots x_n\})$ | $\mathbb{P}(x_1) = \frac{1}{n}$                                      | $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ |
| 2. Bernoulli: $X \sim B(1, p)$                | $\mathbb{P}(X) = \begin{cases} p & : X=1 \\ 1-p & : X=0 \end{cases}$ | $\mathbb{E}[X] = p$                            |
| 3. Binomiaal: $X \sim B(n, p)$                | $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$                         | $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$                    |
| 4. Negatieve binomiaal: $X \sim NB(n, p)$     | $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$                     | $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p}$                  |
| 5. Poisson: $X \sim P(\lambda)$               | $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$          | $\mathbb{E}[X] = \lambda$                      |

## Variantie:

Idee van spreiding

Mediaan: 50% hoger, 50% lager

Modus: defenitie

Probeer de breedte van een verdeling te meten en  $X - \mathbb{E}[X]$  is een maat voor de afwijking.

- Probeer  $\mathbb{E}[-\mathbb{E}[X]] = \sum_k ((k - \mathbb{E}[X]) \mathbb{P}(X=k))$   
 $= \sum_k k \mathbb{P}(X=k) - \sum_k (\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{P}(X=k)) = \mathbb{E}[X] \cdot \underbrace{\sum_k \mathbb{P}(X=k)}_{=1} = 0$ , dus heeft geen zin
- Probeer  $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$ , rekent niet handig

Probeer  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ : kwadraat  $\Rightarrow$  maakt  $\geq 0$   $= \text{Var}(X)$   
 $\Rightarrow$  geeft grotere bijdrage aan afwijkende waarde

**Let op:**  $\text{Var}(X)$  bevat een kwadraat, Vb. Lichaamslengte:  $\text{Var}(X)$  in  $\text{cm}^2$

$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$ : **standaardafwijking**

Berekenen?

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2x\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]^2]\end{aligned}$$

Eigenschappen:

$$\mathbb{E}[aX] = a \sum_{k \in \mathbb{P}} (X=k) = a \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}[a] = a$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2(\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

**Let op:**  $\mathbb{E}[X^2] = \sum_k k^2 \mathbb{P}(X=k) \neq \mathbb{E}[X]^2 = \left(\sum_k k \mathbb{P}(X=k)\right)^2$

$\text{Var}(X)$  voor gekende verdelingen:

1. **Uniform:**  $X \sim \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$\begin{aligned}\text{dan: } \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mathbb{P}(X=x_i) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X=x_i)\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2\end{aligned}$$

*Speciaal geval:*  $x_i = i$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\right)^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(n+2)}{12} - \left(\frac{1}{n} \cdot n \frac{(n+1)^2}{2}\right) \\ &= \frac{n+1}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) = \frac{n+1}{12} (4n+2 - 3n-3) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

Voorbeeld: 1 dobbelsteen:  $\mathbb{E}[X] = 3,5$   
 $\text{Var}(X) = \frac{35}{12} \approx 3 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7$

2. **Bernoulli:**  $X \sim B(1, p)$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{k=0}^1 k^2 \mathbb{P}(X=k) - p^2 = 0 \cdot q + p - p^2 = p(1-p) = pq \\ &\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{pq}\end{aligned}$$

3. **Binomiaal:**  $X \sim B(n, p)$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - (np)^2$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{\heartsuit + \text{start vanaf } 1}{=} \sum_{k=1}^n k n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - p^2 n^2 \stackrel{\text{voorop, } k=(k-1)+1}{=} n \sum_{k=1}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - n^2 p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\heartsuit: k \rightarrow k-1}{\stackrel{n \rightarrow n-1}{=}} n \sum_{k=2}^n (n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + \stackrel{\text{Stel } k-1=l}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l+1} q^{n-(l+1)} - n^2 p^2 \\
& \stackrel{\text{Stel } k-2=j}{=} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^{j+2} q^{n-(j+2)} + np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l q^{(n-1)-l} - n^2 p^2 \\
& \stackrel{\text{zonder } +2af}{=} n(n-1) p^2 \underbrace{(p+q)^{n-2}}_{=1} + np(p+q)^{n-1} - n^2 p^2 = n^2 p^2 - np^2 + n^2 p^2 = np(1-p) = npq
\end{aligned}$$

■

## Hoorcollege 18/11/2024

Is  $\text{Var}(X + Y)$  gelijk aan  $\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ ?

=> Ja, als X, Y onafhankelijk

**Bewijs:**  $\text{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2$

$$\begin{aligned}
& = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 \stackrel{\text{E v/d som}}{=} \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
& = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y])
\end{aligned}$$

Lemma: als X en Y onafhankelijke TV's zijn, dan is

$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  Dit lemma vervolledigd het bewijs.

Q.E.D

**Bewijs:**  $\mathbb{E}[XY] = \sum_k \mathbb{P}(XY=k)$

$$= \sum_k k \sum_l \mathbb{P}\left(X=l \text{ en } y=\frac{k}{l}\right), \text{ over de mogelijke } k \text{ en } l$$

$$\text{Stel } x=l, y=\frac{k}{l} \Rightarrow k=\frac{l \cdot k}{l} = xy$$

$$= \sum_x \sum_y xy \mathbb{P}(X=x \text{ en } Y=y) \text{ (Let wel, 2de som is nog steeds genest, dit blijft steeds zo)}$$

Enkel als X en Y onafhankelijk zijn, volgt:

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{definitie onafh.}}{=} \sum_x \sum_y \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x \mathbb{P}(X=x) \underbrace{\sum_y y \mathbb{P}(Y=y)}_{\mathbb{E}[Y]} \\
& = \mathbb{E}[Y] \underbrace{\sum_x x \mathbb{P}(X=x)}_{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

■

**Gevolg:**

$$x_1 \sim B(1, p) \Rightarrow \text{Var}(X_1) = pq$$

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow X \sim B(n, p) \Rightarrow \text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$X_i \stackrel{\text{onafh.}}{=} \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = pq + \dots + pq = npq$$

■ (Dit bewijst hetzelfde als het laatste bewijs van vorige les, je mag zowel deze 2 als dat van toen geven als gevraagd wordt  $npq = \text{Var}(X)$  te bewijzen)

**4. Negatieve Binomiaal  $X \sim \text{NB}(n, p)$** 

$$\text{Steun op: } \sum_{K=N}^{\infty} \mathbb{P}(X=K) = 1: \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^N q^{K-N} = 1$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k) - \frac{n^2}{p^2} = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2}$$

$$\heartsuit \text{ met } k \text{ en } n \text{ gewisseld: } n \binom{n}{k} = k \binom{k-1}{n-1} = (\heartsuit)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k n \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2} = n \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2}$$

$$\heartsuit' \text{ met } \frac{k+1}{n+1} \Rightarrow (n+1) \binom{k+1}{n+1} = (k+1) \binom{k}{n}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k+1}{n+1} p^{n+1} - n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2} \text{ gebruik } \heartsuit$$

$$= n(n+1) \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^{N-2} q^{K-N} - n \sum_{K=N}^{\infty} \binom{K-1}{N-1} p^{N-1} q^{K-N} - \frac{n^2}{p^2}$$

$p^2$  voorop zetten

$$\stackrel{\text{steunpunt}}{=} n \frac{(n+1)}{p} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} = \frac{n}{p^2} (1-p) = \frac{nq}{p^2}.$$

## 5. Poisson $X \sim P(\lambda)$

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k) - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2$$

Stel  $k-2=1$  en  $k-1=j$

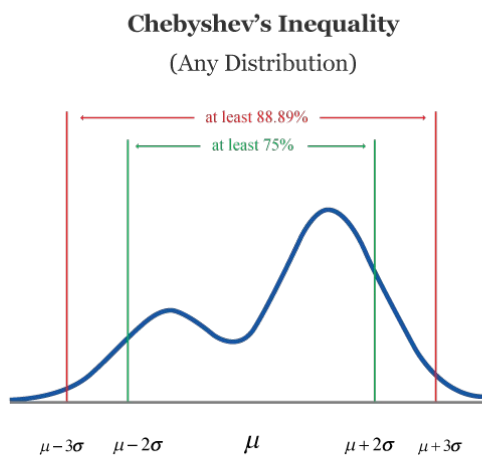
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot \lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l+2}}{l!} + e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j+1} - \lambda^2$$

Lambda's voorop zetten, en dan schrappen

$$= \lambda$$

## Stelling van Chebychev (Чебышёв)

$X$ : TV,  $\sigma_x$ : standaardafwijking,  $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$



We verwachten dat als  $\alpha$  stijgt, de kans in de staarten daalt

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - \alpha \sigma_x < X < \mathbb{E}[X] + \alpha \sigma_x) > 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Voorbeeld:  $\alpha = 2$  voor elke verdeling geldt dat:

$$|X - \mathbb{E}[X]| < 2\sigma > 1 - \frac{1}{2^2} = 75\%$$

### Bewijs:

- Geval 1:  $\sigma_x = 0$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = 0 = \sum_k (X - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(X=k), \text{ groter dan } 0$$

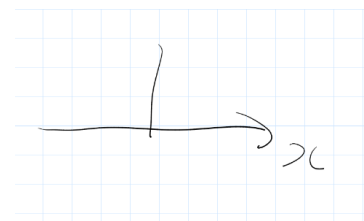
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=k) = 0 \text{ of } X = \mathbb{E}[X] \forall k \Rightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha \cdot \sigma_x) = 0 < \frac{1}{\alpha^2}$$

- Geval 2:  $\sigma_x \neq 0$

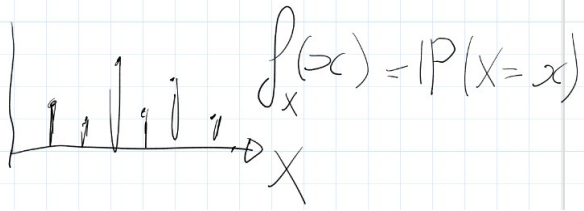
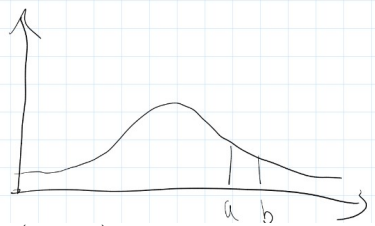
- Stel dan  $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ , dan is  $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}(X) = \sigma_x^2$

- Definieer een "gebeurtenis" A:  $|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha \sigma_x$  (A: X valt in de staart)



- Het te bewijzen is dan:  $\mathbb{P}(A) < \frac{1}{\alpha^2}$
- Bereken nu:  $\sigma_x^2 = \mathbb{E}[Y] = \sum_{a \in \Omega} y \cdot \mathbb{P}(X=a)$   
 $= \sum_{a \in A} y(a) \mathbb{P}(Y=a) + \sum_{a \notin A} y(a) \mathbb{P}(Y=a)$
- Omdat  $y$  een gevolg is van een kwadraat, en kansen altijd positief zijn  
 $\Rightarrow \sigma_x^2 \geq \sum_{a \in A} y(a) \mathbb{P}(X=a)$   
 met  $y(a) = |X(a) - \mathbb{E}[X]|^2 > \alpha^2 \sigma_x^2$  wegens de def. van  $A$   
 $> \sum_{a \in A} \alpha^2 \sigma_x^2 \mathbb{P}(X=a)$ : constanten vooraan zetten  
 $= \alpha^2 \sigma_x^2 \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X=a)$  Dus:  $\sigma_x^2 > \alpha^2 \mathbb{P}(A)$   $\xRightarrow{\text{deel door } \alpha^2 \neq 0} \frac{1}{\alpha^2} > \mathbb{P}(A)$  ■

## Continue verdelingen en benaderingen

Discrete verdeling	Continue verdelingen
<p>Beperkt aantal reële getallen met kans <math>&gt; 0</math></p>  <p><math>f_X(x) = \mathbb{P}(X=x)</math></p> <p><b>Totale kans:</b> <math>\sum_k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(k) = 1</math></p> <p>Cummulatieve distributiefunctie (<b>cdf</b>):</p> $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=-\infty}^x f_X(k)$ <p><math>\mathbb{E}[X] = \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X=k)</math></p> <p><math>\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2</math>  <math>= \sum_k k^2 \mathbb{P}(X=k) - \mathbb{E}[X]^2</math></p>	<p>Op een (mogelijk oneindig) interval, zijn alle waarden mogelijk</p>  <p><math>\mathbb{P}(X=x) = 0</math>, de kans op 1 specif. waarde is 0  <math>\mathbb{P}(a \leq X \leq b)</math> is wel eindig en <math>\geq 0</math></p> $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$ <p><b>Totale kans:</b> <math>\mathbb{P}(-\infty &lt; X &lt; +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx</math></p> <p>Cummulatieve distributiefunctie (<b>cdf</b>):</p> $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$ <p><u>Dus:</u> <math>F_X(x)' = f_X(x)</math></p> <p><math>\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx</math> (=gemiddelde waarde)</p> <p><math>\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2</math>  <math>= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx</math>  <math>= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \mathbb{E}[X]^2</math></p>

$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$ , geldt voor allebei

## 1. Continue uniforme verdeling

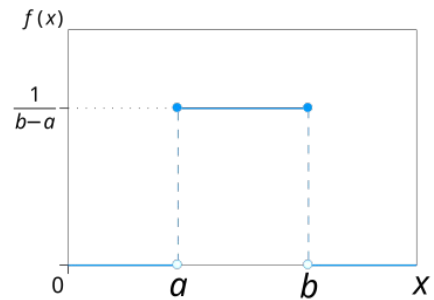
Vb. Random getal genereren in python:  $X \sim U([0,1])$

$$f_X(x) = 1_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Voorbeeld:  $\mathbb{P}(0 \leq x \leq \frac{1}{3}) = \int_0^{1/3} f_X(x) dx = \frac{1}{3}$

Algemener:  $X \sim U([a,b])$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot 1_{[a,b]}$$



Controle:

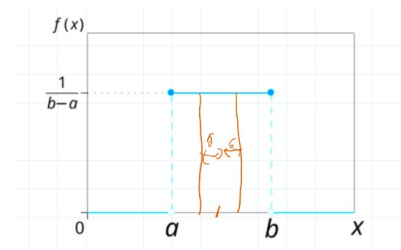
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1 \quad \text{OK}$$

Verwachtingswaarde:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \mathbb{P}(X=x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Variantie:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathbb{P}(X=x) dx - \mathbb{E}[X]^2 = \int_a^b x^2 \left( \frac{1}{b-a} \right) dx - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \stackrel{\text{merkw. product}}{=} \frac{1}{12} (4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 3b^2 - 6ab) \\ &= \frac{1}{12} [b^2 - 2ab + a^2] = \frac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \approx 0,28(b-a) \end{aligned}$$



# Hoorcollege 25/11/2024

## 2. Standaard Normale Verdeling $N(0, 1)$

= kansverdeling met  $E[X] = 0, \sigma_x = 1$

“klokcurve” “Gausscurve”

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{TOP: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,39$$

$$\int f_x(x) dx = 1, \text{ want } \int e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} = \text{Gaussische integraal}$$

De functie is symmetrisch

Berekenen?

$$E[X] = \int x \cdot f_x(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = I_1 - I_1 = 0$$

De integraal van een oneven functie voor een onbepaald interval = 0 (?)

$$\text{Var}(X) = \dots = 1 \text{ (berekening niet te kennen)}$$

Eigenschappen

$$\mathbb{P}(-\sigma \leq x \leq \sigma) \approx 68\%$$

$$\mathbb{P}(-2\sigma \leq x \leq 2\sigma) \approx 95\%$$

$$\mathbb{P}(-3\sigma \leq x \leq 3\sigma) \approx 99.7\%$$

## 3. Normale Verdeling $N(\mu, \sigma)$

$\mu$ : gemiddelde waarde,  $\sigma$ : standaardafwijking

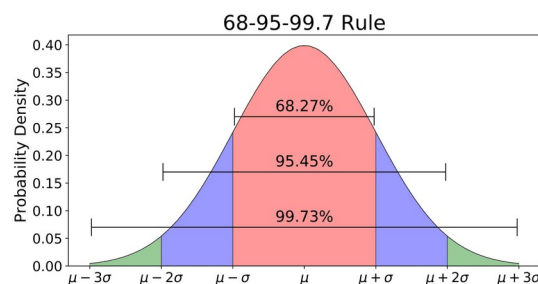
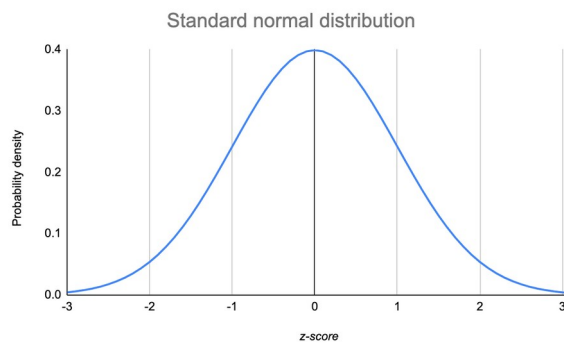
- Shiften met  $\mu$ :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$
- Uittrekken in de x-richting:  $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- Normeren:  $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow \begin{matrix} E[X] = \mu \\ \text{Var}(X) = \sigma^2 \Rightarrow \sigma_x = \sigma \end{matrix}$

Bij berekening:

$$\text{als } X \sim N(\mu, \sigma) \text{ dan is } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

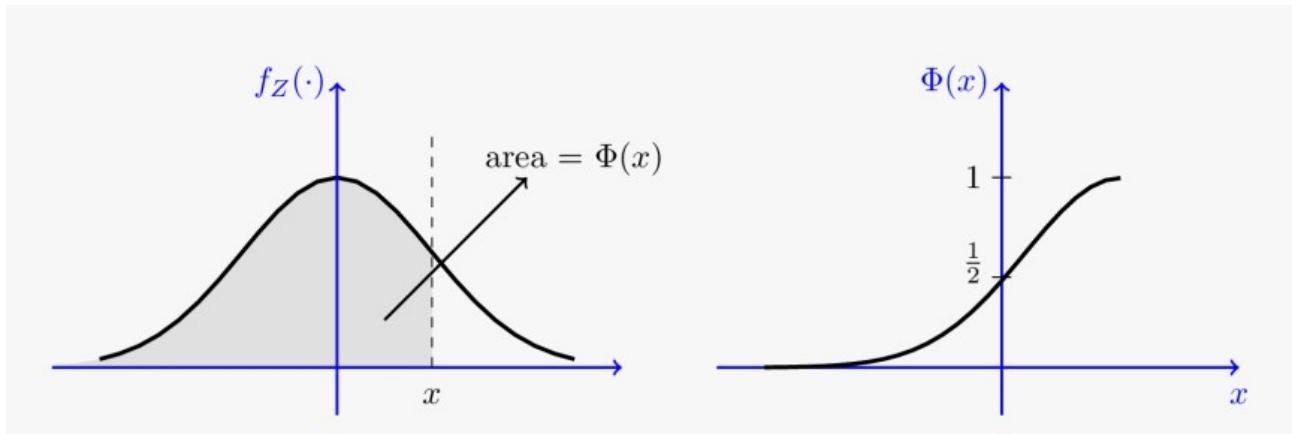
Vb. Wat is  $\mathbb{P}(X \leq x)$  als  $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\int_{-\infty}^x f_x(x) dx = F_x(x)$$





$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z) = \Phi(z): \text{z-score}$$



Uitwerken? Met tabel p.111

- $\mathbb{P}(Z \leq 0,73)$  kijken in de rij 0,70, kolom 0,03  $\Rightarrow 0.7673$
- $\mathbb{P}(Z \leq -0,24)$  neem 1 – het complement  
 $\mathbb{P}(Z \geq 0,24) = 1 - \Phi(0,24) = 1 - 0.5948 = 0.4052$

Analoog:  $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f_x(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$

*Voorbeeld:*

Lengte van Vlaamse mannen is verdeeld als  $N(180\text{cm}, 7\text{cm})$

$$\mathbb{P}(187 \leq x \leq 197,5) = ?$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{187-180}{7} \leq \frac{x-180}{7} \leq \frac{197,5-180}{7}\right) = \mathbb{P}(1 \leq Z \leq 2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(1) \stackrel{\text{tabel}}{=} 0.9938 - 0.8413 = 0.1525$$

Benaderingen van  $B(n, p)$  voor grote  $n$

	$B(n, p)$	$P(\lambda)$
$\mathbb{E}[x]$	$Np$	$\lambda$
$\text{Var}(X)$	$Npq$	$\lambda$

Voorstel: Benader  $B(n, p)$  door  $P(\lambda)$  met  **$np = \lambda$**  we kijken erna naar  $\text{Var}(X) = npq = \lambda q$ ,  $\text{Var}(X') = \lambda$   
als  $q \approx 1$  dan is  $\text{Var}(X) \approx \text{Var}(X')$

Waarom?  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , moeilijk, intensief

$$\mathbb{P}(X' = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

*Voorbeeld* Poisson met  $\lambda = 20$ : in 1u tijd komen 20 mensen in de winkel

$\approx$  Binomiaal experiment: 2 000 mensen in de omgeving, kans dat ze dat uur komen is  $p = 0,01$

Eigenschap:

De poissonverdeling is een goede benadering van  $B(n,p)$  als  $p$  klein is

Vuistregel: OK als  $n \geq 30 \wedge n \cdot p \leq 5$

Stelling: Voor vaste  $k$  en  $\lambda = np$  geldt:  $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow 0 \\ np = \lambda}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } LL &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \text{ Stel } p = \frac{\lambda}{n} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_A \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_B \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_C = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \dots n}}^{k \text{ termen}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} B &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \text{ wegens } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1^{-k} = 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} LL &= \frac{\lambda^k}{k!} A \cdot B \cdot C = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

■

Wat als  $p \approx 1$ ?

Verander maak  $p' = 1 - p$  en  $q' = 1 - q$  (wissel de rol van  $p$  en  $q$ ) en dan mag  $\wedge$  wel.

2. Binomiale benaderen door normale

(als  $p \approx 0,5$ )  $X \sim B(n, p)$ : probleem want de ene discreet de andere continu  
“Maak van de stokjes staafjes”

Oppervlakte van de staafjes =  $B \cdot (H_0 + H_1 + \dots + H_n) = 1$  want  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) = 1$

Zoek nu  $\mu$  en  $\sigma$

$$\begin{aligned} X \sim B(n, p) : \quad \mathbb{E}[x] &= np = \mu \\ \text{Var}(X) &= npq = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{npq} \end{aligned}$$

Voorbeeld  $X \sim B(300; 0,25)$

$$\Rightarrow \mu = np = \frac{300}{4} = 75 \text{ en } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{75 \cdot 3}{4}} = \sqrt{100 \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 7,5$$

Wat is  $\mathbb{P}(60 \leq x \leq 75)$  via benadering door normale verdeling

$$\approx \mathbb{P}(60 \leq X' \leq 75) \quad X \sim B(n, p) \text{ en } X' \sim N(\mu, \sigma)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{60-75}{7.5} \leq Z \leq 0\right) = \phi(0) - \phi(-2) = 0.5 - (1 - \phi(2)) = -0.5 + \phi(2) = 0.4772$$

Exact (binomiaal):  $\mathbb{P}(60 \leq X \leq 75) = 0.5135$  overeenkomst is niet zo goed, wij kunnen beter, gebruik de **continuïteitscorrectie**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(60 \leq X \leq 75) &\approx \mathbb{P}(59.5 \leq X' \leq 75.5) = \mathbb{P}\left(\frac{-15.5}{7.5} \leq Z \leq \frac{0.5}{7.5}\right) \stackrel{ZRM}{=} \mathbb{P}(-2.066 \leq Z \leq 0.066) \\ &= \phi(0.066) - 1(1 - \phi(2.066)) \end{aligned}$$

In tabel: tot op 1/100, dus om nauwkeuriger te gaan, gaan we uit van een linear verband tussen 2 punten.  $\phi(0.066) \approx \phi(0.06) + \text{rico} \cdot 0.006 = 0.5239 + \frac{4}{10} \cdot 0.006 = 0.5263$

Analoog:  $\phi(2.066) = 0.9806$

$$\mathbb{P} = 0.5263 - (1 - 0.9806) = 0.5069$$

## 2 opmerkingen:

- $\mathbb{P}(60 < X < 75) \approx \mathbb{P}(60.5 \leq X' \leq 74.5)$
- $\mathbb{P}(X \leq x) = 90\%$  wat is  $x$ , zoek in de tabel naar  $\phi(x) = 90\% \rightarrow$  opnieuw linear berekenen

## Centrale limietstelling:

Als  $X_1, X_2, \dots, X_n$  onafhankelijke toevalsveranderlijke zijn, met dezelfde  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  en  $\sigma(X_i) = \sigma$ , dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq a\right) = \phi(a)$$

Willekeurige  $X_i$  (uit eender welke verdeling): Normale verdeling

Bij ons:  $X_i \sim B(1, p)$ :  $\mathbb{E}[X_i] = p$ ,  $\sigma(X_i) = \sqrt{pq}$

$$\stackrel{CLS}{\Rightarrow} \sum X_i \sim N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) = N(np, \sqrt{npq})$$

**Vuistregel:**  $X \sim B(n, p)$  benaderbaar  $X' \sim N(\mu, \sigma)$  als  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$ ,  $nq \geq 5$

# Hoorcollege 2/12/2024

## Booleaanse algebra:

- **Booleaanse variabelen** zijn variabelen  $x, y, \dots$  die enkel de waarde 0 of 1 aannemen ( $\sim$ False, True of Waar, Onwaar...)
- **Booleaanse expressie** (def via recursie)
  - Elke Booleaanse variabele (BV) is een Booleaanse expressie (BE)
  - Als  $P$  en  $Q$  BE's zijn, dan zijn  $(P)$ ,  $P + Q$ ,  $P \cdot Q$  en  $\overline{P}$  dat ook
- Def van bewerkingen via waarheidstabellen:
  - $P + Q$ : OR

Q/P	0	1
0	0	1
1	1	1

- $P \cdot Q$ : AND

Q/P	0	1
0	0	0
1	0	1

- $\overline{P}$ : NOT:  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$

- Voorrangsregel: eerst  $\cdot$  dan  $+$  ( $x + yz \neq (x + y)z$ )
- **Booleaanse functies** (BF):  $B = \{0, 1\}$

$$f: \underset{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{B} \overset{n}{\rightarrow} \underset{F(x_1, \dots, x_n)}{B}$$

- Graad van een BF = # variabelen waarop ze gedefinieerd werd  
 $\text{gr}(x \cdot x) = 1$   
 $\text{gr}(x + y) = 2$

- Voorbeeld:  $F: B^2 \rightarrow B: (x, y) \rightarrow F(x, y)$ , definiëren via een tabel

X	Y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Voorschrift:  $F(x, y) = y$  of  $F(x, y) = y + x \cdot y$  ( $\leftarrow$  meerdere functies voor 1 tabel)

- Hoeveel BF van graad  $n$  bestaan er?

$2^{(2^n)}$  want graad  $n \Rightarrow 2^n$  tupels, dus  $2^n$  rijen in de tabel en op elke rij v/d tabel kan je 0 of 1 invullen  $\Rightarrow 2^{\text{aantal rijen}} = 2^{(2^n)}$

Voorbeeld voor  $n=3$ :  $2^8 = 256$  BF's

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

- Booleaanse identiteiten:** gelijkheid tussen 2 BE's die dezelfde booleaanse functie beschrijven

- $\overline{\overline{x}} = x$
- Commutativiteit:  $x + y = y + x$ ,  $x \cdot y = y \cdot x$
- Associativiteit:
 
$$(x + y) + z = x + (y + z) \stackrel{\text{dus mag}}{=} x + y + z$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \stackrel{\text{dus mag}}{=} x \cdot y \cdot z$$
- Distributiviteit van  $\cdot$  tov.  $+$ :  $x(y + z) = xy + xz$
- Distributiviteit**  $\cdot$  tov.  $+$ :  $(x + y)(x + z)$
- Opslorpend element:  $x \cdot 0 = 0$  en  $x + 1 = 1$
- Neutraal element / identiteitswet:  $x + 0 = x$  en  $x \cdot 1 = x$
- Idempotentie:  $x \cdot x = x$  en  $x + x = x$
- Eenheidswet:  $x + \overline{x} = 1$  en  $x \cdot \overline{x} = 0$
- Absorptiewet:  $x + x \cdot y = x$ ,  $x \cdot (x + y) = x$
- De Morgan:**  $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$  en  $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

- Dualiteit:** de wetten komen steeds per 2 voor

$$(x + y \cdot \overline{z} + 0) \cdot \overline{z} \Leftrightarrow x(\overline{y} + z) \cdot 1 + \overline{z}$$

Als je in een identiteit tussen 2 BE's van beide leden de duale neemt, krijg je terug een identiteit. (Wissel alle 0'en en 1'en om, wissel alle  $+$ 'en en  $\cdot$ 'en om)

- Hoe kan je een identiteit aantussen 2 BE?

- Stel voor beide expressies een waarheidstabel op. Tabellen gelijk dan expressies gelijk.
- Gebruik gekende identiteiten

Opm: ook sommige van de basisidentiteiten volgen uit andere, bv de absorptiewet:

$$x(x+y) \stackrel{idnt}{=} (x+0)(x+y) \stackrel{distr}{=} x+0 \cdot y \stackrel{opsl}{=} x+0 \stackrel{idnt}{=} x$$

UOVT: bewijs de duale versie

## 2 standaardmanieren om een BD voor te stellen:

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

- **DNF** (Disjunctive Normal Form):
  - Literal: een variabele of haar tegengestelde  $x$  of  $\bar{x}$
  - minterm = product van alle literals (bv.  $x y \bar{z}, \bar{x} \bar{y} z \dots$ )
  - DNF is dan voorstelling als een som van mintermen

$$F(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x \bar{y} \bar{z}$$

Recept: elke minterm komt overeen met 1 rij in de WH tabel waar de functiewaarde 1 is.

- **Eigenschap, de DNF is uniek** (zie constructie)
- **CNF** (conjunctive normal form)
  - Maxterm: som van alle literals (bv.  $x+y+z, x+\bar{y}+z, \dots$ )
  - CNF is dan een voorstelling van een BF als een product van maxtermen

$$F(x, y, z) = (x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

Recept: elke maxterm komt overeen met een rij uit de WH tabel waar  $F(x,y,z) = 0$ , maak de maxterm met de complementen van de variabelen

*Dit is analoog met een veeltermfunctie als product van de nulwaarden.*

- Wanneer kies je welke?  
Kies DNF als er weinig 1'en staan in je F, kies CNF als er weinig 0'en staan in je F.

- **Eigenschap:** DNF en CNF beschrijven dezelfde functies

$\Leftrightarrow \overline{DNF}$  en  $\overline{CNF}$  beschrijven dezelfde functie

$\overline{DNF}$  kan je vinden door DNF op te stellen van de 0 – rijen

$$\overline{DNF} = \overline{F(x, y, z)} = \overline{\bar{x} \bar{y} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x \bar{y} \bar{z}}$$

$$\overline{CNF} = \overline{(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})}$$

$$\stackrel{\text{De Morgan}}{=} (\overline{x + \bar{y} + z}) + (\overline{\bar{x} + y + \bar{z}}) + (\overline{\bar{x} + \bar{y} + z}) + (\overline{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}})$$

$$\stackrel{\text{De Morgan}}{=} \bar{x} y \bar{z} + x \bar{y} z + x y \bar{z} + x y z = \overline{DNF}$$

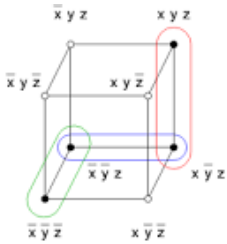
En dit geldt voor willekeurige BE

- Kan je een DNF verder vereenvoudigen? Ja, soms wel zo blijkt

Voorbeeld  $F(x, y, z) = x y z + x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$

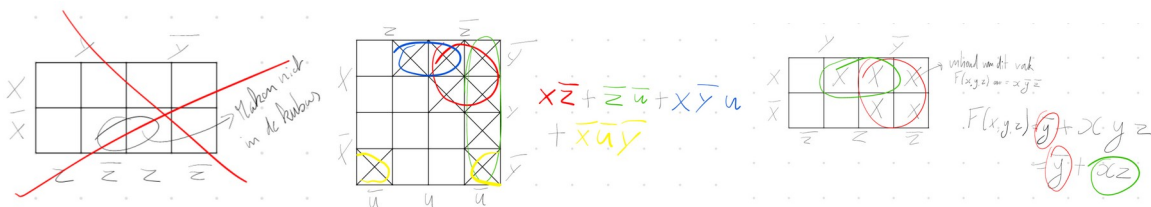
$$F(x, y, z) \stackrel{\text{ident}}{=} x y (z + \bar{z}) + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z \stackrel{\text{invers}}{=} x y + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$$

- Hoe vereenvoudigen? Via **Karnaugh maps**

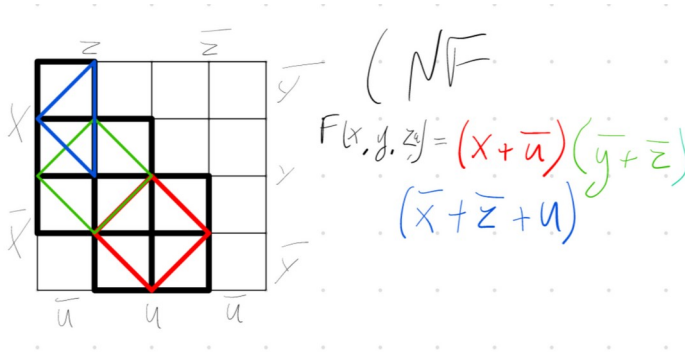


- Is periodiek
- 2 vakjes naast elkaar verschillen in het complement nemen in 1 variabele
- Zet 1 bij elke minterm

- Zie ook: [https://en.wikipedia.org/wiki/Karnaugh\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Karnaugh_map)
- Def:** Raster met alle  $2^n$  mogelijke mintermen, bij 2 nabije vakjes is er precies 1 variabele gewisseld met zijn complement.
- Opm:
  - Grotere blokken zijn mogelijk  $\rightarrow 2^m \times 2^p$
  - Blokken mogen overlappen
  - Let op hoe je raster tekent! (scheidingen mogen niet recht over elkaar staan)
  - Je mag over de rand gaan



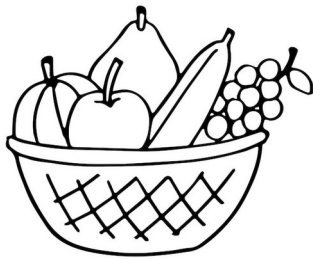
- Analoog voor CNF



## Hoorcollege 4/12/2024

### Genererende functies

#### 1. Fruitmand



Hoeveel manieren om 2 stuks te kiezen uit 5:  $C_5^2 = \binom{5}{2}$

Hoeveel manieren om k stuks te kiezen?:  $C_5^k = \binom{5}{k}$

! Link met Binomium van Newton.  $(x + y)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k y^{5-k}$

$$\text{Hier: } (1+x)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^k = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \dots + \binom{5}{5}x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

Waarom komen deze getallen voor in de veelterm?

$$(1+x)^5 = \underbrace{(1+x)}_{\text{aantal appels}} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\text{aantal bananen}} \cdot \underbrace{(1+x)}_{\dots} (1+x)(1+x) \quad \begin{array}{l} 1 = x^0 \rightarrow 0 \text{ stuken van dat soort fruit} \\ x = x^1 \rightarrow 1 \text{ stuk van dat soort fruit} \end{array}$$

Bij  $x^2$  kom je door 2 stuks fruit te kiezen.

#### 2. Fruitmand, met 2 identieke appels en geen banaan

Hoeveel manieren zijn er om k stuks te kiezen?

Voor peer, appelsien en pruim verandert er niets:  $(1+x)^3$

Appels:  $(1+x+x^2)$ , kies 0, 1 of 2 appels

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x)^3 = (1+x+x^2)(1+3x+3x^2+x^3) \stackrel{\text{distr}}{=} 1+4x+7x^2+7x^3+4x^4+x^5 \text{ (symmetrisch)}$$

Trucje: cijferen, mag want je cijfert in basis x in plaats van basis 10



$$\begin{array}{r}
 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \\
 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 \hline
 1 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

Controle: 7 oplossingen bij  $k=2$ : 7 rijen: OK

appel	2	1	1	1	0	0	0
peer	0	1	0	0	1	1	0
appelsien	0	0	1	0	1	0	1
pruim	0	0	0	1	0	1	1

### 3. Bakker

4 abrikozentaarten, 3 kaastaarten, en 4 aardbeientaarten per 2 verkocht

Op hoeveel manieren kan je  $k$  taarten kopen?

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4)}_{\text{abrikozen}} \cdot \underbrace{(1+x+x^2+x^3)}_{\text{kaas}} \cdot \underbrace{(1+x^2+x^4)}_{\text{aardbei}}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Deel 1} \quad \begin{array}{r}
 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \quad x^7 \\
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot 1 \\
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x \\
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^2 \\
 + \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^3 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot 1 \\
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^2 \\
 + \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^4 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 9 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 1
 \end{array} \\
 \text{Deel 2} \quad \begin{array}{r}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot 1 \\
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^2 \\
 + \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 1^{\text{e term}} \cdot x^4 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 9 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 1
 \end{array} \\
 \text{Antwoord: } 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 9x^5 + 9x^6 + 8x^7 + 6x^8 + 4x^9 + 2x^{10} + x^{11}
 \end{array}$$

Deze veelterm noemen we de **genererende functie**.

**Def:** als  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  een eindige rij getallen is (of oneindig met  $\forall a_x = 0 : x > n$ ) dan noemen we deze **de** genererende functie van deze rij. (definitie overstegen door algemenere def, zie verder)

#### 4. Bakker heeft nu ook een buurman



Hoeveel manieren zijn er om  $k$  taarten te kopen?

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4) \cdot (1 + x + x^2 + x^3) (1 + x + x^2 + \dots)$$

*Handwritten calculation on grid paper:*

Kaas · Abrikoos

1	1	1	1	1	1	...	maal 1		
	1	1	1	1	1	...	maal x		
		1	1	1	1	...	maal x <sup>2</sup>		
			1	1	1	...	maal x <sup>3</sup>		
+	<hr/>								
	1	2	3	4	4	...	Aantalbei		
		1	2	3	4	4	...		
+	<hr/>								
	1	2	4	6	8	10	11	12	12

Antw:  $1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 10x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 12x^8 + \dots$

Deze uitdrukking is een **machtreeks**. Meestal is men bezorgd of deze som bestaat, en voor welke  $x$ . Als men niet geïnteresseerd is in het invullen van waarden voor  $x$ , noemt men dit een **formele machtreeks**.

- Het optellen van machtreeksen:  
 $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$   
 Eigenschap  $c_n = a_n + b_n$
- Het vermenigvuldigen van machtreeksen:  
 $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$   
 $= a_0b_0 + 1 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$   
 Eigenschap:  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  (convolutie)

#### 5. WINAK verkoopt hamburgers aan €3,00 en soep aan €2,00

Op hoeveel manieren kan je  $k$  euro uitgeven?

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots)$$

$$= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \underbrace{2x^6}_{\substack{2+2+2 \\ \text{of } 3+3}} + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + \dots$$

## 6. Brief opsturen met 3 postzegels

€1, €2 of €3 kostende postzegels uit een ver verleden

Hoeveel manieren zijn er om 3 postzegels te plakken met totale waarde €k? De volgorde is van belang.

$$f(x) = \overbrace{(x+x^2+x^3)}^{1e\text{ plaats}} \overbrace{(x+x^2+x^3)}^{2e\text{ plaats}} \overbrace{(x+x^2+x^3)}^{3e\text{ plaats}} = (x+x^2+x^3)^3$$

$$= x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$$

## 7. Zelfde brief “frankeren” met 3 of 4 zegels

Hoeveel manieren om nu €k te plakken?

- 3 zegels:  $(x+x^2+x^3)^3$
- 4 zegels:  $(x+x^2+x^3)^4$
- 3 of 4 zegels:  $(x+x^2+x^3)^3 + (x+x^2+x^3)^4$

## 8. Zelfde brief, onbeperkt aantal zegels

Hoeveel manieren om nu €k zegels te plakken?

$$f(x) = 1 + (x+x^2+x^3) + (x+x^2+x^3)^2 + (x+x^2+x^3)^3 + (x+x^2+x^3)^4 + \dots$$

**Algemeen:**

**Def:**  $A = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  dan is  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  de genererende functie van A.

Kan je zo'n reeks omzetten naar een compactere vorm?

*Voorbeeld:*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \text{ want als je de } (1-x) \text{ overbrengt vallen alle termen met elkaar weg}$$

Concept: **inverse genererende functie:**  $B(x) = \frac{1}{A(x)}$  ! ≠ inverse functie

**Def:** Als  $A(x)B(x) = 1$  dan noemt men B(x) de inverse genererende functie van A(x)

Wanneer bestaat B(x)?

Opl: Stel  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots$  en  $B(x) = b_0 + b_1x + \dots$

dan moet  $(a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots) = 1$

$$LL = a_0b_0 \cdot 1 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots$$

$\Rightarrow +\infty$  groot lineair stelsel, maar term per term steeds maar 1 onbekende als  $a_0 \neq 0$

$\Rightarrow B(x)$  bestaat  $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$  (bestaansvoorwaarde)

Voorbeeld:  $A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$  bestaat  $B(x)$ ?

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ 2b_0 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -2 \\ 3b_0 + 2b_1 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 1 \\ 4b_0 + 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 0 \\ \dots \Rightarrow b_4 = 0 \\ \dots \Rightarrow b_5 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(x) = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$$

**Opm:** substitutie mag!

Voorbeeld:  $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots \stackrel{2x=y}{=} 1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-2x}$

Voorbeeld  $\infty$  veel postzegels:  $\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-(x+x^2+x^3)}$

## Hoorcollege 9/12/2024

Genererende functies zagen we al bij telproblemen waarbij een bepaalde som "k" moest zijn.

$$a_0, a_1, a_2, \dots \rightarrow A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Voorbeeld:  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$  (als  $|x| < 1$ )

Voorbeeld<sup>2</sup>: voor  $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ : *paradox van Zeno*

**Overzicht:**

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$
$\frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{km}$
$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$
$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k$

Bewijs:

$$(1-x)^{-m} \stackrel{\text{binomiaalreeks}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-x)^k, \text{ met } m \in \mathbb{N}_c \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-1)^k x^k$$

$$\text{met } \binom{-m}{k} (-1)^k = \frac{\overbrace{-m(-m-1)(-m-2)\dots(-m-k+1)}^{k \text{ factoren}}}{k!} (-1)^k$$

$$= \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!} = \underbrace{\binom{m+k-1}{m-1}}_{\text{herhalingscombinatie}} = \binom{m+k-1}{k}$$

Q.E.D

Link met herhalingscombinaties:

- Klas kies k cadeaus uit m mogelijkheden:  $\overline{C}_m^k = \binom{k+m-1}{m-1}$

- In dit hoofdstuk: voor  $m = 3$

$$\underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{cadeau 1}} \underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{cadeau 2}} \underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{cadeau 3}} = \frac{1}{(1-x)^3} = A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

de som moet k zijn

$$\text{dus } a_k = \overline{C}_m^k = \binom{k+m-1}{m-1}$$

## Recursievergelijkingen of differentievergelijkingen oplossen

*Voorbeeld: Torens van Hanoi met 6 niveaus*

Wat is het minimaal aantal zetten om een toren van n schijven naar paal 3 te verplaatsen? Noem dit  $H_n$

Regels:

- Je mag maar 1 schijf per zet verplaatsen.
- Je mag nooit een grotere op een kleinere schijf zetten

Oplossing:

Vereenvoudig het probleem.

- $H_0 = 0$ , geen schijven en dus geen te verplaatsen
- $H_1 = 1$ , 1 schijf verplaatsen
- $H_2 = 3$ , gebruik de middelste toren als opslag
- $H_3 = 7$ , gebruik bovenstaande om de 2 bovenste schijven naar de middelste toren te verplaatsen: 3 zetten, dan zet de grootste schijf naar de rechtse toren: 1 zet, verplaats de middelste toren naar rechts: 3 zetten
- $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$

$$\text{Dus } h_n = 0, 1, 3, 7, 15, 31 \rightarrow H_n = 2^n - 1$$

Oplossing met genererende functies:

$$\text{Stel } H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k = H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + \dots$$

$$\stackrel{\text{recursie}}{=} H_0 + (2H_0 + 1)x + (2H_1 + 1)x^2 + (2H_2 + 1)x^3 + \dots$$

$$= H_0 + 2(H_0 x + H_1 x^2 + H_2 x^3 + \dots) + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$= 2xH(x) + \frac{1}{1-x} - 1 = 2xH(x) + \frac{x}{1-x} = H(x)$$

$$\Rightarrow H(x)(1-2x) = \frac{x}{1-x} \Rightarrow H(x) = \frac{x}{\underbrace{(1-x)(1-2x)}_{\text{staat niet in de tabel:}}}$$

$$H(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} : \text{ splitsen in partieelbreuken}$$

Idee: LL dus  $H(x)$  is ontstaan uit RL door op gelijke noemer te zetten.

$$\text{Gebruik } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{\overset{\text{van teller}}{\widehat{T}}}{bd}$$

Stappenplan:

1. Ontbind noemer in factoren
2. Schrijf als een som van breuken met onbekende tellers
3. Zet beide leden op dezelfde noemer en stel de tellers gelijk
4. Los het lineaire stelsel op

$$\text{Dus: } H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} \quad (2)$$

$$= \frac{A(1-2x) + B(1-x)}{(1-x)(1-2x)} \quad (3)$$

$$\Rightarrow x = A(1-2x) + B(1-x) = A + B(-2A - B)x \Leftrightarrow 2 \text{ veeltermen als alle overeenkomstige coëf. van } x^k \text{ gelijk}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B & B = -2A \\ 1 = -2A - B \end{cases} \Rightarrow 1 = -2A - (-A) = -A \Rightarrow A = -1 \Rightarrow B = +1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = - \sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1) x^k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k \Rightarrow H_k = 2^k - 1, \text{ controle OK}$$

■

*Voorbeeld 2:*  $s_0, s_1 = 1, s_n = -s_{n-1} + 6s_{n-2}$  als  $n \geq 2$  via genererende functies

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 \dots$$

$$\stackrel{\text{recursie}}{=} s_0 + s_1 x + (-s_1 + 6s_0)x^2 + (-s_2 + 6s_1)x^3 \dots$$

$$= s_0 + s_1 x - (s_1 x^2 + s_2 x^3 + s_3 x^4 + \dots) + 6(s_0 x^2 + s_1 x^3 + \dots)$$

$$= s_0 + s_1 x - x \underbrace{[s_1 x + s_2 x^2 + \dots]}_{=S(x)-s_0} + 6x^2 \underbrace{[s_0 + s_1 x + s_2 x^2]}_{=S(x)}$$

$$= 1 + x - xS(x) + x + 6x^2 S(x) = 1 + 2x - xS(x) + 6x^2 S(x)$$

Alles met  $S(x)$  naar LL:

$$S(x)[1+x-6x^2]=1+2x \Rightarrow S(x)=\frac{1+2x}{1+x-6x^2} \stackrel{1}{=} \frac{1+2x}{(1-2x)(1+3x)}$$

$$\stackrel{2}{=} \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+3x} \stackrel{3}{=} \frac{A(1+3x)+B(1-2x)}{(1-2x)(1+3x)} = \frac{A+B+(3A-2B)x}{(1-2x)(1+3x)}$$

$$\begin{cases} 1=A+B \\ 2=3A-2B \end{cases} \stackrel{4}{\Rightarrow} \begin{cases} A=\frac{4}{5} \\ B=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Alternatief zonder stelselrekenen (handig bij grotere stelsels):

$$S(x)=\frac{1+2x}{(1-2x)(1+3x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1+3x}$$

$$\stackrel{\text{beide leden} \cdot (1-2x)}{=} (1-2x)S(x)=A+\frac{B(1-2x)}{1+3x} \stackrel{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (1-2x)S(x)=A+\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} B \frac{(1-2x)}{1+3x}$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} S(x)(1-2x)=\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1+2x}{1+3x} \stackrel{\text{invullen}}{=} \frac{4}{5}; \quad B \stackrel{\text{analoog}}{=} \frac{1}{5}$$

$$\text{Resultaat: } S(x)=\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+3x} = \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k + \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} (-3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4}{5} 2^k + \frac{1}{5} (-3)^k \right) x^k$$

$$\Rightarrow s_k = \frac{4}{5} 2^k + \frac{1}{5} (-3)^k \quad \text{Controle: recursie invullen, gesloten formule invullen: OK.}$$

UOVT: 7.11 ← gemaakt tijdens HC maar oefeningen staan niet in deze notities

Regel: bij meervoudig nulpunt in de noemer: neem alle lagere machten ook! ^

# Stijn geeft uitleg over de examens (12/12/2024)

## Oefeningenexamen:

- Maak de oefeningenexamens op BlackBoard, dit is uitstekende voorbereiding
- Vrijdag voor het examen volgt nog een vragenuurtje (zie sisA)
- Een 8 tal vragen, 6 “basis”, 2 “uitbreiding”
- De verbetering gebeurt zo snel mogelijk, **en zodra het verbeterd is krijg je je score**

## Theorie-examen in groep (tussen 10 en 15 man):

- Een half dagdeel
- 2 startvragen “geef de stelling en bewijs die (via [methode])”
  - Eerst individueel
  - Dan mondeling, als het goed is duurt dit kort, anders wordt je op gang gebracht
- In totaal 4 vragen (sowieso kansleer)
- Let op! Zowel in eigen woorden, als **in wiskundige notatie!**
- “Heb geen schrik van het feit dat het mondeling is, het is in uw voordeel”
- Je krijgt na het examen **onmiddellijk feedback, je weet je score dus direct!!**