Eerste Bachelor Informatica
examen
4 januari 2021
Discrete Wiskunde

Afspraken:

- Gesloten boek, enkel toegelaten: schrijfgerei en papier.
- GSM moet afgezet worden, horloge uitgedaan.
- Schrijf leesbaar en vermeld je naam en rolnummer op elk blad!
- Combinatiegetallen en e-machten hoeven niet uitgerekend worden.

/2

1. Kijk naar de functie

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \longmapsto n^2 - 13n + 42$$

(a) Toon aan dat deze functie niet injectief is en niet surjectief.

(b) Bepaal ook een zo groot mogelijk gebied $A \subset \mathbb{N}$ en een zo groot mogelijk gebied $B \subset \mathbb{N}$ zodat

$$g : A \to B : n \longmapsto n^2 - 13n + 42$$

wel een bijectie is. Bepaal ook g^{-1}.

/2

2. Bekijk de machtsverzameling $V = 2^{\{2,4,5,8\}}$. We noteren de relatie R tussen twee verzamelingen $X, Y \in V$ als volgt:

$$XRY \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X : \exists y \in Y \text{ zodat } x|y.$$

Is dit een equivalentierelatie en/of een partiële orde? Zoja, geef de bijbehorende partitie of het bijbehorende Hasse diagram.

/3

3. Toon aan via inductie dat
$$\frac{(4n-2)!}{8^n} \in \mathbb{N}$$
voor elk natuurlijk getal $n \geq 5$.

/3

4. (a) In een emmer zitten 15 rode ballen en 15 blauwe ballen, elk genummerd met een geheel getal tussen 1 en 100. De 30 ballen hebben verschillende nummers. Een *koppel* ballen bestaat uit een rode bal en een blauwe bal. Toon aan dat je steeds twee koppels kan vinden die dezelfde som hebben.

(b) Laat zien dat deze eigenschap niet noodzakelijk geldt als je 13 rode en 13 blauwe ballen hebt.

/3

5. Een (standaard)deck bestaat uit 52 kaarten in 4 "soorten" ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$) Een bridgehand bestaat uit 13 kaarten uit zo'n standaarddeck. Wat is de kans dat als ik een willekeurig bridgehand trek, er ten minste 1 soort <u>niet</u> in zit.

/2

6. Een muntstuk wordt herhaaldelijk opgegooid totdat er een eerste keer kop is gegooid, of totdat er 5 keer munt wordt gegooid. Bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal worpen dat gegooid wordt.

/2

7. Schrijf de uitdrukking

$$P = \overline{\overline{(x+\overline{y})(z+\overline{u})} + (u+\overline{y})} + \overline{xz}$$

   (a) als som van producten van literals met zo weinig mogelijk literals.

   (b) als product van sommen van literals met zo weinig mogelijk literals.

/3

8. In deze oefening noemen we s_n het aantal codewoorden van lengte n. Een codewoord van lengte n is hierbij een cijfercombinaties met n decimale cijfers waarbij een het aantal 1'nen en 2'en (samen) oneven is. Zo is 123417 een codewoord van lengte 6 en 0112 een codewoord van lengte 4.

   (a) Toon aan dat s_n voldoet aan de recursierelatie

$$s_0 = 0, \quad s_{n+1} = 2 \cdot 10^n + 6s_n$$

   (b) Los deze recursieve gelijkheid op door gebruik te maken van genererende functies, m.a.w. zoek een gesloten formule voor s_n.

Veel succes!