



UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

INFO-F302  
INFORMATIQUE FONDAMENTALE

---

# Rapport Informatique Fondamentale

---

*Étudiants :*

Hugo CALLENS  
Rayan CONTULIANO BRAVO  
Ethan ROGGE

*Enseignants :*

E. FILLIOT  
R. PETIT

15 décembre 2023

# 1 Modélisation d'un automate déterministe en FNC

Voici quelques notations utilisées dans la suite de ce rapport :

- $P$  représente l'ensemble des mots acceptés par l'automate
- $N$  représente l'ensemble des mots non-acceptés par l'automate
- $\Sigma$  représente l'alphabet de l'automate
- $k$  représente le nombre au plus d'états de l'automate

## 1.1 Choix des variables

### 1.1.1 Etats

L'ensemble  $Q$  est défini comme suit :  $Q = \{q_{1a}, q_{1na}, \dots, q_{ka}, q_{kna} | k\}$  contenant ainsi  $2k$  états dans  $Q$  pour un automate à  $k$  états. Les variables  $q_i$  peuvent être définies comme suit :

- $q_{ia/na} = 1$  si l'état  $i$  acceptant/non-acceptant est présent dans l'automate.
- $q_{ia/na} = 0$  si l'état  $i$  acceptant/non-acceptant n'est pas présent dans l'automate.

### 1.1.2 Transitions

L'ensemble  $\Delta$  est défini comme suit :  $\Delta = \{d_{i,l,j} | i, j \in Q, l \in \Sigma\}$ , représentant l'ensemble des transitions de l'automate. Les variables  $d_{i,l,j}$  peuvent être définies comme suit :

- $d_{i,l,j} = 1$  si la transition avec la lettre  $l$  existe entre l'état  $i$  et l'état  $j$ .
- $d_{i,l,j} = 0$  si la transition avec la lettre  $l$  n'existe pas entre l'état  $i$  et l'état  $j$ .

### 1.1.3 Exécutions

L'ensemble  $E$  est défini comme suit :  $E = \{e_{m,i,t} | i \in Q, t \in \{0, \dots, \text{len}(m) - 1\}, m \in P \cup N\}$ , représentant l'ensemble des exécutions de l'automate. Les variables  $e_{m,i,t}$  peuvent être définies comme suit :

- $e_{m,i,t} = 1$  si l'automate est dans l'état  $i$  après avoir lu les  $t$  premières lettres du mot  $m$ .
- $e_{m,i,t} = 0$  si l'automate n'est pas dans l'état  $i$  après avoir lu les  $t$  premières lettres du mot  $m$ .

## 1.2 Contraintes

1. Il y a un unique état initial :

$$\Phi_1 = q_{0a} \vee q_{0na}$$

2. Un état est exclusivement acceptant ou non-acceptant :

$$\Phi_2 = \bigwedge_{\substack{q \in Q \\ i \in \{1, \dots, k\}}} q_{ia} \rightarrow \neg q_{ina} \equiv \bigwedge_{\substack{q \in Q \\ i \in \{1, \dots, k\}}} \neg q_{ia} \vee \neg q_{ina}$$

3. Chaque état a au plus une transition par lettre de l'alphabet :

$$\Phi_3 = \bigwedge_{\substack{l \in \Sigma \\ i, j, q \in Q}} d_{i,l,j} \rightarrow \neg d_{i,l,q} \equiv \bigwedge_{\substack{l \in \Sigma \\ i, j, q \in Q}} \neg d_{i,l,j} \vee \neg d_{i,l,q}$$

4. Un état  $i$  est acceptant s'il existe une exécution d'un mot  $m$  de  $P$  qui se termine sur l'état

$i$  à l'étape  $t = \text{len}(m)$  :

$$\Phi_4 = \bigwedge_{\substack{t=\text{len}(m) \\ q \in Q \\ m \in P \\ i \in \{1, \dots, k\}}} e_{m,i,t} \rightarrow q_{ia} \equiv \bigwedge_{\substack{t=\text{len}(m) \\ q \in Q \\ m \in P \\ i \in \{1, \dots, k\}}} \neg e_{m,i,t} \vee q_{ia}$$

5. Si on a une exécution qui est sur l'état  $i$  pour l'étape  $t$  du mot  $m$  et une transition de  $i$  vers  $j$  pour la lettre  $l$ , alors, on a une exécution pour le mot  $m$  à l'étape  $t + 1$  sur l'état  $j$  :

$$\Phi_5 = \bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma \\ m \in P \cup N \\ t \in \{0, \dots, \text{len}(m)\} \\ l=m[t]}} (e_{m,i,t} \wedge d_{i,l,j} \rightarrow e_{m,j,t+1}) \equiv \bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma \\ m \in P \cup N \\ t \in \{0, \dots, \text{len}(m)\} \\ l=m[t]}} (\neg e_{m,i,t} \vee \neg d_{i,l,j} \vee e_{m,j,t+1})$$

6. Si on a une exécution qui est sur l'état  $i$  pour l'étape  $t$  du mot  $m$  et une exécution à l'étape  $t + 1$  pour le même mot  $m$  qui se trouve sur l'état  $j$ , alors, il existe une transition de  $i$  vers  $j$  avec la lettre  $l$  :

$$\Phi_6 = \bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma \\ m \in P \cup N \\ t \in \{0, \dots, \text{len}(m)\} \\ l=m[t]}} (e_{m,i,t} \wedge e_{m,j,t+1} \rightarrow d_{i,l,j}) \equiv \bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma \\ m \in P \cup N \\ t \in \{0, \dots, \text{len}(m)\} \\ l=m[t]}} (\neg e_{m,i,t} \vee \neg e_{m,j,t+1} \vee d_{i,l,j})$$

7. Toutes les exécutions, qui existent, sur les mots de  $N$  doivent se terminer sur un état non-acceptant :

$$\Phi_7 = \bigwedge_{\substack{m \in N \\ i \in \{1, \dots, k\} \\ t=\text{len}(m) \\ q \in Q}} e_{m,i,t} \rightarrow q_{ina} \equiv \bigwedge_{\substack{m \in N \\ i \in \{1, \dots, k\} \\ t=\text{len}(m) \\ q \in Q}} \neg e_{m,i,t} \vee q_{ina}$$

8. Toutes les exécutions sur les mots de  $P$  doivent exister :

$$\Phi_8 = \bigwedge_{m \in P} \bigvee_{\substack{t \in \{0, \dots, \text{len}(\text{word})\} \\ i \in \{1, \dots, k\}}} e_{m,i,t+1}$$

9. Toutes les exécutions doivent commencer à l'état initial :

$$\Phi_9 = \bigwedge_{m \in P \cup N} e_{m,1,0}$$

La formule en logique propositionnelle finale est :

$$\Phi = \bigwedge_{i=1, \dots, 9} \Phi_i$$

## 2 Algorithme de minimisation d'un automate déterministe

Afin de minimiser le nombre d'états d'un automate fini sur  $\Sigma$ , une approche dichotomique est utilisée en considérant :

1. Recherche de la borne supérieure, donc un  $k$  tel qu'avec  $2^k$  états, la solution est trouvée.
2. Recherche dichotomique entre  $2^{(k-1)}$  et  $2^k$  pour trouver le  $k$  minimal pour lequel la solution est trouvée.

Etant donné que l'automate est fini, il existe un nombre fini d'états, la borne supérieure est toujours trouvée et il est possible d'itérer sur  $k \in \{0, \dots, \infty\}$ .

Finalement, il suffit d'utiliser les contraintes précédemment définies (cf. 1.2) afin de trouver

l'automate minimal en nombre d'états.

### 3 Modélisation d'un automate déterministe complet en FNC

Il suffit de reprendre les contraintes précédentes (cf. 1.2) et d'ajouter la contrainte suivante :

1. Tous les états doivent avoir au moins une transition par lettre de l'alphabet :

$$\bigwedge_{l \in \Sigma} \bigvee_{i,j \in Q} d_{i,l,j}$$

Du fait que nous avons au moins une transition par lettre de l'alphabet et au plus une transition par lettre de l'alphabet, nous avons donc exactement une transition par lettre de l'alphabet pour chaque état, ce qui implique que l'automate est complet.

### 4 Modélisation d'un automate réversible en FNC

Il suffit de rajouter aux contraintes précédentes (cf. 1.2) la contrainte suivante :

1. S'il existe une transition de  $i$  vers  $j$  pour la lettre  $l$ , alors il n'existe pas de transition de  $k$  vers  $j$  pour la lettre  $l$  :

$$\bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma}} d_{i,l,j} \rightarrow \neg d_{k,l,j} \equiv \bigwedge_{\substack{i,j \in Q \\ l \in \Sigma}} \neg d_{i,l,j} \vee \neg d_{k,l,j}$$



FIGURE 4.1 – À gauche nous voyons un automate non-réversible et à droite nous voyons un automate réversible

### 5 Modélisation d'un automate fini complet avec au plus $l$ états en FNC

Pour que l'automate fini complet ait au plus  $l$  états, il suffit de rajouter aux contraintes précédentes (cf. 3) la contrainte suivante (suivant le formalisme de la documentation de [PySAT](#)) :

1. Il y a au plus  $l$  états acceptants :

$$\sum_{i=0}^k q_{ia} \leq l$$

Cette contrainte a été ajoutée au solveur MiniCard.

## 6 Modélisation d'un automate non déterministe en FNC

## 7 Modélisation d'un automate avec au plus $k$ états et $k'$ transitions en FNC

En suivant le raisonnement de la question 6, il suffit de rajouter une contrainte sur le nombre de transitions et faire en sorte que celui-ci ne dépasse pas  $k'$ .