

Analisi della tensione ai capi di un condensatore in un circuito RLC sotto generazione impulsiva

Benazzi Marco (N° 0000975544)
Coli Simone (N° 0000977195)

June 1, 2022

Abstract

Lo scopo dell'esperienza è quello di studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi di un condensatore inserito in un circuito RLC, generando corrente attraverso una tensione che varia in maniera impulsiva. Questa è prodotta prima attraverso un'onda quadra e poi attraverso una funzione che simula un impulso e restituisce valori differenti a seconda del metodo di generazione. Aumentando poi il valore della resistenza e dell'induttanza, si nota che le misure sono più vicine all'andamento teorizzato, cioè quello di un oscillatore armonico sotto smorzato. Nei primi due campioni di dati si nota infatti che nella parte finale è presente uno sfasamento rispetto l'andamento atteso, mentre in quello a resistenza maggiore si evidenzia un andamento simile alla funzione attesa.

Introduzione

Nell'esperimento proposto abbiamo studiato diversi metodi per generare una tensione ai capi di un condensatore in un RLC in serie, al fine di trovare quale configurazione di elementi permetta di ottenere una serie di dati seguenti l'andamento teorico di un oscillatore sinusoidale smorzato. Tale circuito è stato realizzato seguendo il modello base di un RLC in serie, come mostrato in figura 1, nel quale abbiamo generato un segnale impulsivo. Il modello teorico supposto viene descritto dall'equazione 1, in cui compaiono le grandezze: V tensione ai capi del condensatore, A ampiezza del segnale, i parametri smorzamento α e pulsazione ω , calcolati con le equazioni 2, mentre la variabile t indica il tempo e ϕ lo sfasamento dell'onda.

$$V(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$a) \quad \alpha = \frac{R}{2L} \quad b) \quad \omega = \frac{1}{2C\sqrt{L}} \sqrt{4C - R^2L} \quad (2)$$

1 Apparato Sperimentale e Svolgimento

1.1 Apparato Sperimentale

Per la presa dati sono stati utilizzati i seguenti strumenti:

- DAQ ELVIS II, tramite cui si è misurata la tensione ai capi del condensatore nel circuito. Le misure proposte nell'analisi dei dati tengono conto della resistenza interna del dispositivo, dove R_{int} è pari a 50 ohm stando alle specifiche ELVIS;
- Programma LabView di acquisizione dati, per eseguire la misurazione di tensioni ai capi dei componenti del circuito e del rumore di fondo del circuito.

Per la costruzione del circuito, invece, le componenti utilizzate sono state:

- Un condensatore di capacità $C = (9.94 \pm 0.01)$ nF utilizzato per tutti e tre i campioni di dati acquisiti, collegato in serie a resistenza e induttore, come riportato in Fig. 1. L'incertezza sulla misura della capacità del condensatore è stata calcolata imponendo un errore relativo pari ad 1%, come indicato nelle specifiche ELVIS;

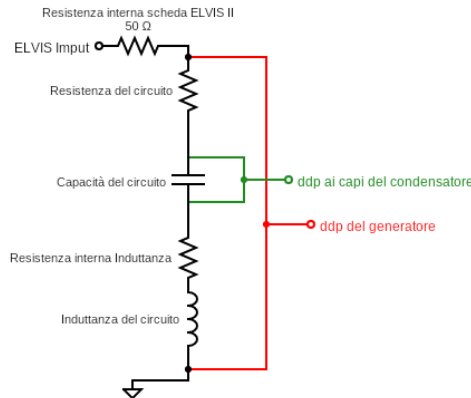


Figure 1: Nella figura è rappresentato il circuito utilizzato per l'esperienza. In esso la resistenza del circuito sarà prima R_1 e poi R_2 , così come per l'induttore L_1 e poi L_2 , mentre la capacità C è rimasta la stessa per tutte le misure. Il generatore, indicato come *ELVIS input*, è stato prima attaccato al pin "fgen" della scheda per le onde quadre, poi a "AO 0" per la creazione di un'onda impulsiva. Il circuito rosso e il circuito verde sono serviti rispettivamente per l'acquisizione dati della differenza di potenziale ai capi del generatore e del condensatore.

- Un induttore di induttanza $L_1 = (14.7 \pm 0.2)$ mH con resistenza interna di $R_1^{(L)} = (0.46 \pm 0.01)\Omega$ utilizzato per i primi due set di dati. Per il terzo, invece, ne è stato utilizzato uno di induttanza $L_2 = (47.0 \pm 0.5)$ mH con una resistenza interna pari a $R_2^{(L)} = (232.21 \pm 0.11)\Omega$. Anche in questo caso l'incertezza è stata misurata seguendo le specifiche ELVIS che riportavano un errore relativo dell'1%;
- Una resistenza di $R_1 = (101.7 \pm 0.1)\Omega$ nei primi due campioni di dati, mentre nel terzo si è usata una resistenza $R_2 = (678.6 \pm 0.3)\Omega$, per amplificare lo smorzamento. L'incertezza sulle resistenze è stata misurata seguendo le specifiche ELVIS ($R \cdot 4.5 \times 10^{-4} + [range] \cdot 10^{-4}$). Ai valori delle resistenze vanno poi aggiunte la resistenza interna del dispositivo ELVIS II (50.0 Ω) e quella dell'induttore.

1.2 Svolgimento

Per realizzare l'esperimento, in primo luogo sono stati misurati i valori della capacità, induttanza e resistenza, attraverso l'applicativo NI Digital Multimeter e le rispettive incertezze calcolate seguendo i criteri riportati nel paragrafo precedente.

Il primo campione di dati è stato raccolto utilizzando la resistenza dal valore più basso, corrispondente a R_1 , un condensatore di capacità C e l'induttore L_1 . Dopo aver assemblato il circuito, usando cavi la cui resistenza è stata assunta trascurabile, si è generato un segnale impulsivo tramite l'applicativo NI Function Generator. Più precisamente definendo un'onda quadra di frequenza 1kHz, ampiezza 5V (picco-picco), *offset* a 2.5V (in modo che la tensione del condensatore oscillasse tra 0V e 5V) e un *duty cycle* del 2%. Questo ha permesso di costruire un'onda quadra che avesse un segnale a 5V per il 2% del periodo di generazione del segnale e 0V per il tempo restante. I dati sono stati presi tramite un programma LabView che leggeva in entrata i valori della tensione ai capi del condensatore, con 500 misure acquisite ad una frequenza di 500kHz. Questi parametri di campionatura sono stati scelti sapendo qual era il valore dello smorzamento atteso α e di conseguenza l'intervallo di tempo in cui l'ampiezza si trovava in un intorno di zero. Nel nostro caso questo era compreso tra 0.75ms e 1ms.

Il secondo campione di dati è stato acquisito utilizzando gli stessi valori della resistenza R_1 , capacità C

e induttanza L_1 del campione precedente; in questo caso, però, l'impulso è stato generato tramite l'NI Arbitrary Waveform Generator. Questo è stato costruito impostando tre periodi: il primo di $200\mu\text{s}$ in cui non si ha alcun segnale, seguito da un intervallo di $1\mu\text{s}$ in cui si genera un impulso di ampiezza 5V tramite funzione predefinita del programma chiamata *pulse*, con *update rate* di 900kSample/s e infine un ultimo intervallo di $100\mu\text{s}$ in cui il segnale in input torna ad annullarsi. I parametri di campionatura per il programma LabView sono gli stessi riportati nel caso precedente.

Infine, il terzo campione di dati utilizza i valori di resistenza R_2 , capacità C e induttanza L_2 sensibilmente maggiori rispetto ai precedenti. Questi sono stati scelti per aumentare lo smorzamento in modo che gli effetti di interferenza da parte del dispositivo ELVIS II fossero trascurabili nel lasso di tempo finale dei dati acquisiti. In questo caso, come per il primo campione, l'impulso è stato realizzato tramite onda quadra con gli stessi parametri della prima acquisizione, così come sono rimasti invariati anche i parametri del programma LabView per l'acquisizione dei dati.

Per misurare il rumore di fondo del circuito si è generata un'onda quadra tramite NI Function Generator con frequenza di 1kHz, ampiezza di 5V, *offset* fissato a 2.5V (in modo che il segnale oscillasse attorno al valore di 5V) e *duty cycle* al 98%, così che nel periodo di generazione del segnale, l'onda quadra acquisisse un valore costante pari a 5V per il 98% del tempo, annullandosi per il restante 2%. Così facendo, siamo riusciti a simulare un segnale ad intensità costante di cui abbiamo raccolto 500 misure ad una frequenza di acquisizione di 500 kHz, da cui si è ricavata la deviazione standard (corretta con il fattore N-1) utilizzata come incertezza per i dati di tensione del condensatore e quindi come incertezza per effettuare test di ipotesi del chi-quadro.

2 Risultati e Discussione

2.1 Considerazioni Teoriche sui Parametri

In tabella 1 sono mostrati i valori calcolati attraverso considerazioni teoriche dei parametri relativi all'andamento della differenza di potenziale ai capi del generatore nei due casi a resistenza ed induttanza differente. Questi saranno poi da confrontare con quelli ottenuti a livello sperimentale.

Parametro	Valore	Errore	Parametro	Valore	Errore
α_1	5.19 kHz	0.06 kHz	α_2	10.23 kHz	0.10 kHz
ω_1	82.7 kHz	0.6 kHz	ω_2	45.1 kHz	0.4 kHz

Table 1: Nella tabella di sinistra sono mostrati i valori calcolati dei parametri, definiti nelle equazioni 2, utilizzando le componenti R_1 e L_1 , mentre in quella di destra sono mostrati quelli utilizzando le componenti R_2 e L_2 con i rispettivi errori.

2.2 Analisi dell'Oscillazione con Resistenza R_1

I risultati delle misure ottenute utilizzando come resistenza del circuito il tipo R_1 , sono mostrati nella Fig. 2, sia nel caso di un impulso generato con onda quadra, sia nel caso in cui venga generato con la funzione *pulse* (Arbitrary Waveform Generator), di forma impulsiva a 5V di intensità. I dati ottenuti da un impulso generato con onda quadra, mostrato in Fig. 2 a sinistra, sono stati quindi fittati con l'equazione 1. Da questa si sono ottenuti i seguenti valori per i parametri: $\alpha = (12.183 \pm 0.013)$ kHz, $\omega = (90.728 \pm 0.004)$ kHz ed un'ampiezza pari a $A = (4.90 \pm 0.04)$ V. L'errore ottenuto dal fit dei dati è decisamente una sottostima di quello reale, questo è dovuto all'utilizzo della deviazione standard ottenuta dall'analisi del rumore della scheda ELVIS pari a 2.18 mV. Si nota inoltre che, benché il fit segua molto bene i dati nella prima parte della misura, tende poi a scostarsi da essi in quella finale, nonostante i dati seguano chiaramente un andamento della forma dell'equazione 1. Questo, probabilmente, è dovuto a dei fattori interni alla struttura del circuito (comprese le componenti della scheda ELVIS II) che interferiscono con l'andamento della corrente nel circuito, variandone l'andamento nella parte finale. Comparando i valori del parametro α ottenuto dal fit con quello calcolato dalle misure di R, L e C , otteniamo una discrepanza significativa. La causa è la presenza di una resistenza parassita di 205.7Ω , la cui natura è intrinseca nel circuito. Al fine di minimizzare

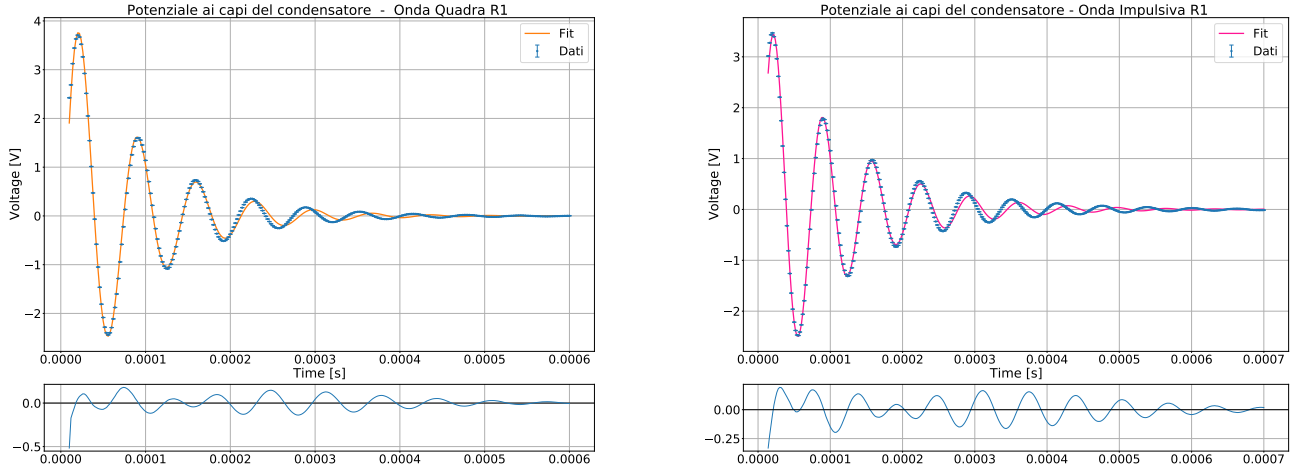


Figure 2: La figura mostra a sinistra le misure effettuate generando una differenza di potenziale impulsiva con onda quadra. In blu sono rappresentati i dati misurati mentre in arancione il fit. A destra invece è mostrato l'andamento dei dati nel caso di una differenza di potenziale impulsiva generata con una funzione impulsiva. In blu si hanno ancora i dati misurati, il fit invece è in rosa. Al di sotto di entrambi i grafici sono mostrati i residui tra dati e fit.

le interferenze si è utilizzato un secondo metodo per la generazione della differenza di potenziale, ossia, creando una funzione di forma impulsiva attraverso l'Arbitrary Waveform Generator, con le caratteristiche descritte nella sezione relativa allo svolgimento dell'esperienza. L'analisi dei dati di questa misura (in Fig. 2 a destra) restituisce come $\alpha = (9.459 \pm 0.011)$ kHz, come $\omega = (92.526 \pm 0.012)$ kHz e come $A = (4.23 \pm 0.04)$ V. Quest'ultima risulta essere minore rispetto a quella ottenuta precedentemente. Il motivo risiede nella rapidità di tale impulso, infatti, imponendo la sua durata a $1\mu s$, il condensatore riesce a caricarsi completamente, causando una perdita di ampiezza. Inoltre, anche in questo caso notiamo che dati e fit tendono a sfasarsi dopo una serie di oscillazioni, di conseguenza gli effetti perturbativi non sono solo dovuti al generatore. Si nota, inoltre, che anche in questo caso il parametro α ottenuto con il fit si scosta notevolmente da quelli in tabella 1. La discrepanza è sempre dovuta alla presenza di una resistenza parassita intrinseca nel circuito. In queste misure questa vale circa 125.3Ω .

2.3 Considerazioni sul Generatore

La perturbazione da parte del generatore è però un dato di fatto in quanto basta osservare la Fig.3 per

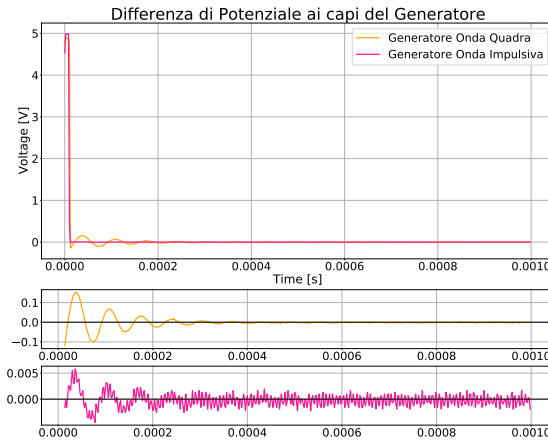


Figure 3: La figura mostra l'andamento del potenziale ai capi del generatore, in arancione la variazione di potenziale impulsiva generata da una funzione impulsiva, in rosa la variazione di potenziale impulsiva generata da un'onda quadra. Sotto alla figura sono mostrati, in ordine dall'alto verso il basso, i residui tra l'asse del tempo e la differenza di potenziale per onda quadra e per onda impulsiva.

notare un comportamento sinusoidale. In entrambe è presente un'oscillazione che tende a smorzarsi con il tempo, ciononostante nel primo caso, questa ha un'intensità 20 volte maggiore rispetto alla funzione impulsiva. Questa perturbazione, però, non sembra influire significativamente sull'andamento della differenza di potenziale ai capi del condensatore.

2.4 Analisi dell'Oscillazione con Resistenza R_2

Dall'analisi dei dati, misurati con resistenza e induttanza del circuito, si è ottenuto un fit migliore con l'equazione 1. La motivazione risiede nel fatto che gli effetti dovuti a resistenze parassite intrinseche nel circuito, vengono resi trascurabili da un resistore di intensità notevolmente maggiore come componente. In Fig. 4 sono mostrati i risultati dell'acquisizione dati in questo caso.

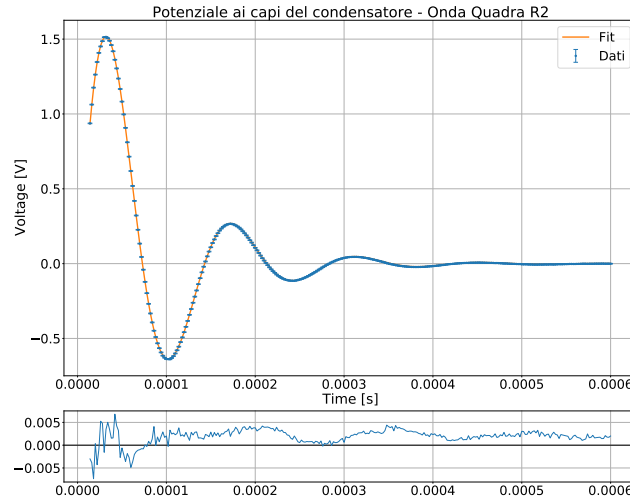


Figure 4: La figura mostra l'andamento dei dati misurati con resistenza R_2 ed induttanza L_2 , in blu, fittati all'equazione 1, in arancione. Al di sotto del grafico sono inseriti i residui tra i dati effettivi ed il fit.

Dall'analisi di questo fit si ottiene $\alpha = (12.35 \pm 0.04)$ kHz, $\omega = (44.90 \pm 0.05)$ kHz ed un'ampiezza $A = (2.335 \pm 0.006)$ V: in questo caso l'ampiezza che è stata utilizzata per generare l'impulso era di 2.5V invece che 5V. Da tali misure si è ottenuto un $\chi^2/dof = 1.36$ il che indica comunque una leggera sottostima dell'errore, che risulta però notevolmente minore rispetto a quella presente nelle misure con R_1 ed L_1 . Anche questa misura restituisce un valore per α che non è compatibile con il valore che compare nella tabella 1, e sembrano variare a causa della presenza di una resistenza parassita di 200.1Ω .

Conclusione

Si conclude che per lo studio di un sistema sottosmorzato generato impulsivamente, per rendere minimi gli effetti perturbativi, è necessario utilizzare un resistore con resistenza molto maggiore rispetto alle componenti interne del circuito, ad esempio della resistenza interna del generatore. A questo deve seguire un relativo aumento dell'induttore in maniera tale da mantenere costante il valore di α e, probabilmente, diminuire la capacità del condensatore in modo da generare maggiori oscillazioni. Ciò che contribuisce profondamente è anche la scelta del generatore e la calibrazione della durata dell'impulso. Un'onda quadra risulta ideale per generare un'ampiezza ottimale, ma è soggetta a numerosi effetti perturbativi. La funzione pulse, invece, è ottima per la generazione di una differenza di potenziale con poche perturbazioni, ma non permette di avere un'ottimale caricatura del condensatore, a causa della sua rapidità. Inoltre si osserva che esistono dei fattori a noi ignoti che contribuiscono ad intensificare la resistenza effettiva del circuito, aumentandola di un fattore di circa 200Ω nel caso del generatore ad onda quadra e di circa 125Ω nel caso di un'onda impulsiva. Il parametro α misurato a partire dai valori di resistenza, capacità e induttanza non risulta, per questo motivo, compatibile con

i dati sperimentali, a meno che non vengano considerate le resistenze parassite. Al contrario, benché nel caso dei primi due campioni di dati il parametro oscillazione (ω) non sia compatibile con quello che compare in tabella 1, nel caso del terzo campione di dati, questo risulta compatibile entro errori casuali: $\omega_2^{(fit)} = (44.90 \pm 0.05)$ kHz, $\omega_2^{(RLC)} = (45.1 \pm 0.4)$ kHz. Sarebbe poi interessante osservare cosa potrebbe accadere per valori molto più elevati della resistenza, variando di conseguenza capacità ed induttanza, al fine di minimizzare ancora di più gli effetti perturbativi assieme alla resistenza parassita.

Bibliografia

- Pierre Cafarelli, Jean-Philippe Champeaux, Martine Sence, Nicolas Roy. *The RLC system: An invaluable test bench for students*. Am. J. Phys. 80, 789 (2012); doi: 10.1119/1.4726205