Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Пересторонин П.Г.

Группа ИУ7-63Б

Преподаватель Саркисян П.С.

Москва — 2021 г.

Оглавление

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительно интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретические сведения

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.1}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \tag{2.2}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;

$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{2.3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{2.4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;

n – объем выборки;

γ – уровень доверия;

$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

3 Результат работы

3.1 Код программы

```
X = [-2.54, -0.79, -4.27, -3.09, -3.82, -0.61, -0.64, -1.24, -1.73, -2.91, -1.48, -1.28,
    -0.37, -1.88, -2.19, -1.61, -1.52, -3.17, -1.36, -3.08, -3.11, -3.07, -1.57, -1.51,
    -2.37, -0.58, -3.05, -2.93, -1.01, -1.40, -2.06, -3.05, -1.84, -1.24, -1.89, -2.06,
    -1.59, -2.83, -1.07, -2.96, -3.17, -3.08, -0.49, -3.11, -3.14, -2.30, -3.99, -1.56,
    -1.28, -3.46, -2.63, -0.82, -2.18, -0.89, -3.08, -1.13, -1.62, -1.06, -2.98, -1.55,
    -1.49, -1.65, -1.45, -2.29, -0.85, -1.44, -2.87, -2.40, -2.13, -3.52, -1.42, -3.64,
    -3.47, -2.05, -2.39, -2.07, -0.80, -1.52, -3.92, -2.22, -0.78, -2.60, -1.78, -1.61,
    -1.65, -2.06, -3.33, -3.41, -1.97, -1.74, -2.04, 0.01, -1.37, -3.15, -2.35, -3.66,
    -1.79, -2.56, -1.87, -1.06, -0.64, -2.49, -1.85, -1.40, -0.86, -0.17, -0.62, -2.85,
    -2.12, -1.17, -2.48, -1.65, -3.74, -2.87, -3.15, -1.89, -1.34, -4.33, -0.96, -1.79];
gamma = 0.9;

% 1-2
[muhat, muci] = my_normfit_mu(X, 1 - gamma);
[s2hat, s2ci] = my_normfit_s2(X, 1 - gamma);

% 3
process_mu(X, gamma, muhat);
process_s2(X, gamma, s2hat);


function [muhat, muci] = normfit_mu(X, alpha)
    [muhat, ~, muci, ~] = normfit(X, alpha);
end

function [s2hat, s2ci] = normfit_s2(X, alpha)
    [~, sigmahat, ~, sigmaci] = normfit(X, alpha);
    s2hat = sigmahat ^ 2;
    s2ci = sigmaci .^ 2;
end

function [muhat, muci] = my_normfit_mu(X, alpha)
    muhat = mean(X);
    s = std(X);
    gamma = 1 - alpha;
    n = length(X);
    mu_bottom = muhat + s * tinv((1 - gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
    mu_top = muhat + s * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
    muci = [mu_bottom, mu_top];
end

function [s2hat, s2ci] = my_normfit_s2(X, alpha)
```

```
    s2hat = var(X);
    gamma = 1 - alpha;
    n = length(X);
    s2_top = (n - 1) * s2hat / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
    s2_bottom = (n - 1) * s2hat / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
    s2ci = [s2_bottom, s2_top];
end

function process_parameter(X, gamma, est, fit, line_legend, est_legend, top_legend,
    bottom_legend)
    N = length(X);
    figure;
    hold on;
    grid on;
    plot([1, N], [est, est]);
    ests = [];
    cis_bottom = [];
    cis_top = [];
    for n = 1:N
        [est, cis] = fit(X(1:n), 1 - gamma);
        ests = [ests, est];
        cis_bottom = [cis_bottom, cis(1)];
        cis_top = [cis_top, cis(2)];
    end
    plot(1:N, ests);
    plot(1:N, cis_bottom);
    plot(1:N, cis_top);
    l = legend(line_legend, est_legend, top_legend, bottom_legend);
    set(l, 'Interpreter', 'latex', 'fontsize', 18);
    hold off;
end

function process_mu(X, gamma, muhat)
    process_parameter(X, gamma, muhat, @my_normfit_mu, '$\hat\mu(\vec␣x_N)$',
        '$\hat\mu(\vec␣x_n)$', '$\underline\mu(\vec␣x_n)$', '$\overline\mu(\vec␣x_n)$');
end

function process_s2(X, gamma, S2)
    process_parameter(X, gamma, S2, @my_normfit_s2, '$\hat\sigma^2(\vec␣x_N)$',
        '$\hat\sigma^2(\vec␣x_n)$', '$\underline\sigma^2(\vec␣x_n)$',
        '$\overline\sigma^2(\vec␣x_n)$');
end
```

3.2 Результаты расчётов

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = -2{,}0585$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 0{,}944$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = -2{,}2055$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = -1{,}9115$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0{,}7723$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1{,}1848$$

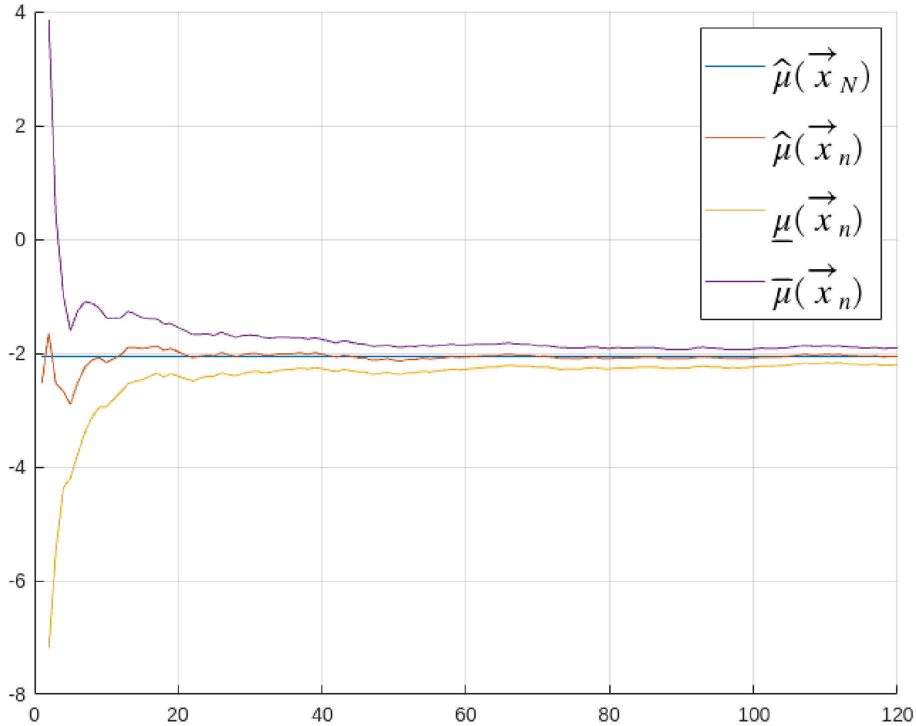

Рис. 3.1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

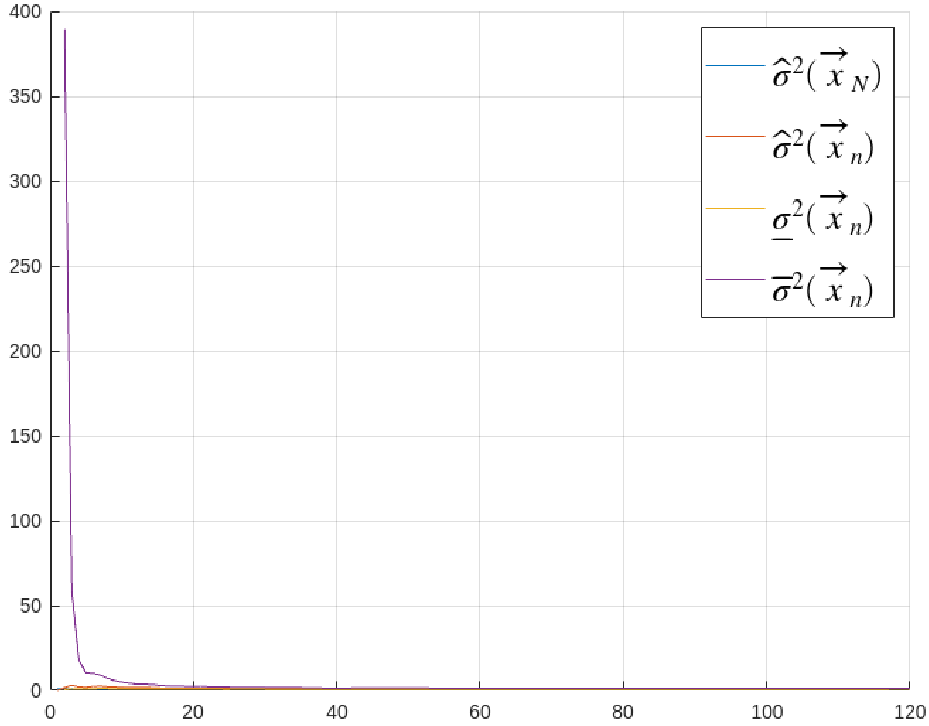

Рис. 3.2: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (1)

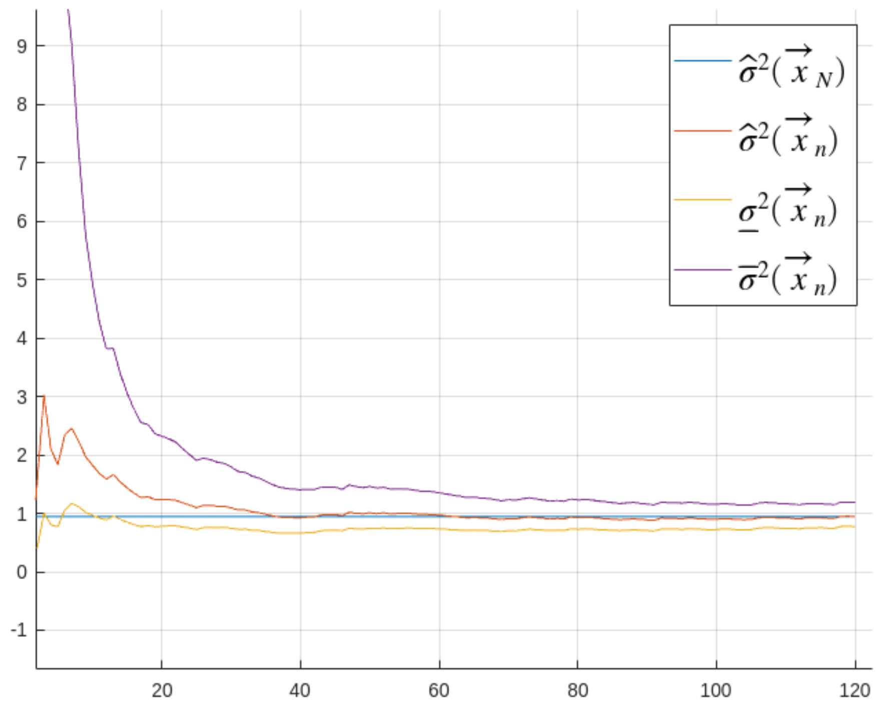

Рис. 3.3: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (2, приближенный)