UNIVERSITE D'ABOMEYCALAVI
(BENIN)

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications
Adresse mail : secretariat@imsp-uac.org

FILIÈRE : STATISTIQUE-PROBABILITÉS

Thème

Value At Risk

Rédigé par :

JUSTE O. L. OGODJA
GIOVANNI DOSSOU
...

Adresse mail : ogodjajusteluc@gmail.com

Adresse mail : giovannidossou97@gmail.com

Superviseur :

DR. (MC) FREEDATH DJIBRIL MOUSSA

THE ABDUS SALAM
INTERNATIONAL CENTRE FOR
THEORETICAL PHYSICS (ITALY)

Année académique 2023-2024

B.P. : 613 PORTO-NOVO
REPUBLIQUE DU BENIN
E-mail: **imspstatproba@imsp-uac.org**

Table des matières

Value at Risk

1. Introduction

La *Value at Risk* (VaR) est un indicateur utilisé par les institutions financières pour mesurer le risque de perte sur un portefeuille d'investissements. Elle se définit comme la perte maximale attendue sur une période donnée, avec un niveau de confiance spécifié. La VaR est donc un outil essentiel pour quantifier les risques financiers, en fournissant une estimation du montant que l'on pourrait perdre avec une certaine probabilité. Ce travail se propose d'examiner les différentes méthodes d'estimation de la VaR, afin de comprendre les approches disponibles pour mesurer et gérer le risque financier dans les portefeuilles d'investissement.

2. Concepts Fondamentales

2.1 Marchés financiers

Contexte financier

Les marchés financiers sont des plateformes où se rencontrent les acheteurs et les vendeurs pour échanger des actifs financiers, comme des actions, des obligations, des devises, des matières premières, etc. Ces marchés facilitent la liquidité, la formation des prix et l'allocation du capital.

Contexte mathématique

Les marchés financiers sont modélisés comme des systèmes dynamiques où les prix des actifs évoluent selon des processus stochastiques. Des modèles mathématiques comme le modèle de Black-Scholes sont utilisés pour évaluer les dérivés et d'autres instruments financiers.

2.2 Portefeuille

Dans le contexte Financier

Dans le contexte financier, un **portefeuille financier** est un ensemble d'actifs détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent inclure des actions, des obligations, des liquidités, des produits dérivés, des biens immobiliers, des matières premières, etc. Le but d'un portefeuille est de diversifier les investissements pour réduire le risque tout en essayant d'obtenir un rendement optimal. La gestion de portefeuille implique des décisions sur la composition, la gestion du risque, le rééquilibrage et l'allocation d'actifs en fonction des objectifs financiers, de la tolérance au risque et des horizons de temps de l'investisseur.

Dans le contexte Mathématique

Dans un contexte mathématique, un **portefeuille financier** peut être modélisé comme une combinaison pondérée de différents actifs. Mathématiquement, on peut représenter un portefeuille P par un vecteur de poids $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, où chaque w_i représente la proportion de l'investissement total allouée à l'actif i. Le rendement attendu du portefeuille est alors la somme pondérée des rendements attendus des actifs individuels, et le risque (souvent mesuré par la variance ou l'écart type) est calculé à partir des covariances entre les rendements des différents actifs. Ces concepts sont centraux dans la théorie moderne du portefeuille, notamment dans l'optimisation de portefeuille de Markowitz.

2.3 Actif financier

Contexte financier

Un actif financier est un titre ou un instrument qui représente une valeur ou une créance. Les actifs financiers comprennent les actions, les obligations, les dépôts bancaires, les certificats de dépôt, les contrats à terme, les options, etc. Ils sont négociables sur les marchés financiers et sont utilisés pour générer des revenus, tels que des intérêts, des dividendes, ou des plus-values.

Contexte mathématique

Dans un modèle mathématique, un actif financier peut être représenté par une variable aléatoire dont la valeur change dans le temps. Cette variable peut modéliser le prix de l'actif, son rendement ou d'autres caractéristiques financières. L'analyse mathématique des actifs financiers implique souvent des concepts comme les espérances, les variances et les distributions de probabilité.

2.4 Titre

Contexte financier

Un titre est un document légal représentant un droit de propriété (comme une action) ou un droit de créance (comme une obligation) sur un actif. Les titres sont négociables sur les marchés financiers, et leur valeur varie en fonction des conditions du marché.

Contexte mathématique

Un titre peut être modélisé comme une variable aléatoire représentant sa valeur de marché à un moment donné. L'évolution de cette valeur peut être analysée à l'aide de processus stochastiques, permettant de modéliser les risques et les rendements associés.

2.5 Horizon

Contexte financier

L'horizon d'investissement est la durée pendant laquelle un investisseur prévoit de maintenir un investissement avant de le liquider. Il peut être court terme, moyen terme, ou long terme, et il influence les choix d'allocation d'actifs et de stratégie de gestion du risque.

Contexte mathématique

L'horizon est une variable temporelle qui influence les calculs d'actualisation, les prévisions de rendement, et les modèles de gestion de portefeuille. Les modèles mathématiques peuvent inclure des scénarios pour différents horizons temporels afin de tester la performance d'un portefeuille.

2.6 Risque financier

Contexte financier

Le risque financier représente la possibilité de perdre de l'argent ou de ne pas obtenir le rendement attendu d'un investissement. Il peut provenir de diverses sources, comme la volatilité du marché, le risque de crédit, le risque de taux d'intérêt, ou le risque de change.

Contexte mathématique

Le risque est souvent quantifié par la variance ou l'écart type des rendements d'un portefeuille. D'autres mesures incluent la VaR (Value at Risk) et le bêta (sensibilité d'un actif aux mouvements du marché). Le risque est modélisé par des distributions de probabilités et des simulations stochastiques.

2.7 Formule de Black Sholes

Définition et Interprétation

La formule de Black-Scholes est un modèle mathématique utilisé pour évaluer le prix des options européennes, c'est-à-dire des options qui ne peuvent être exercées qu'à leur date d'échéance. Ce modèle, développé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert Merton en 1973, est l'un des plus célèbres en finance quantitative. Voici une explication détaillée de cette formule :

1. Contexte et Hypothèses

La formule de Black-Scholes repose sur plusieurs hypothèses importantes :

- **Le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique** : Cela signifie que les rendements logarithmiques du prix de l'actif sont normalement distribués et que le prix évolue de manière continue.
- **Les marchés sont sans friction** : Il n'y a ni frais de transaction ni impôts.
- **Le taux d'intérêt est constant et connu** : Le taux sans risque r reste le même pendant toute la durée de vie de l'option.
- **Volatilité constante** : La volatilité du prix de l'actif sous-jacent est constante.
- **Absence d'arbitrage** : Il n'y a aucune possibilité de réaliser un profit sans risque.

2. Formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes pour le prix d'une option d'achat (call) européenne est donnée par :

$$\boxed{C = S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)}$$

Pour une option de vente (put) européenne, la formule est :

$$\boxed{P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)}$$

3. Définition des termes

- C : Prix de l'option d'achat (call).
- P : Prix de l'option de vente (put).
- S_0 : Prix de l'actif sous-jacent à l'instant initial $t = 0$.
- K : Prix d'exercice de l'option (strike price).
- T : Temps restant jusqu'à l'échéance de l'option, en années.
- r : Taux d'intérêt sans risque.
- σ : Volatilité du prix de l'actif sous-jacent, exprimée comme un écart-type.
- $N(\cdot)$: Fonction de répartition cumulative d'une loi normale standard (la probabilité qu'une variable aléatoire normalement distribuée soit inférieure ou égale à une certaine valeur).
- d_1 et d_2 sont donnés par :

$$\boxed{d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}$$

$$\boxed{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}}$$

4. Interprétation des termes

- d_1 **et** d_2 : Ces variables représentent les probabilités ajustées par le risque que l'option expire dans la monnaie (c'est-à-dire que l'option soit exercée avec profit). Plus précisément, d_1 est utilisé pour calculer la probabilité sous la mesure risque neutre que l'option soit exercée, tandis que d_2 représente la probabilité que le prix d'exercice soit dépassé.
- $N(d_1)$: Cette valeur représente la probabilité ajustée par le risque que l'option d'achat soit exercée (c'est-à-dire que le prix de l'actif sous-jacent soit supérieur au prix d'exercice à l'échéance).
- $N(d_2)$: Cette valeur correspond à la probabilité, sous une mesure de risque neutre, que l'option soit dans la monnaie à l'échéance.
- $S_0 \cdot N(d_1)$: Cela représente la valeur actuelle de recevoir l'actif sous-jacent si l'option est exercée.
- $K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$: Cette partie représente la valeur actuelle du montant que l'acheteur de l'option devra payer pour acquérir l'actif sous-jacent si l'option est exercée.

5. Signification économique

La formule de Black-Scholes peut être interprétée comme la différence entre la valeur actuelle attendue du prix de l'actif sous-jacent à l'échéance et la valeur actualisée du prix d'exercice, pondérée par les probabilités ajustées par le risque de ces deux événements.

6. Limites et Extensions

Bien que la formule de Black-Scholes soit largement utilisée, elle présente certaines limites :

- **Volatilité constante** : Dans la réalité, la volatilité peut varier dans le temps, ce que le modèle de Black-Scholes ne prend pas en compte.
- **Dividendes** : La version de base du modèle ne prend pas en compte les dividendes versés par l'actif sous-jacent, bien que des versions ajustées existent pour cela.

- **Marchés non parfaits** : Le modèle suppose des marchés parfaits sans frictions, ce qui n'est pas toujours réaliste.

Des extensions et des ajustements ont été développés pour remédier à ces limitations, tels que les modèles avec volatilité stochastique, les modèles à sauts, et les ajustements pour les dividendes.

7. Applications

La formule de Black-Scholes est utilisée pour évaluer les prix des options sur les marchés financiers, mais elle sert également de fondement à d'autres instruments financiers dérivés et à l'évaluation du risque dans divers contextes financiers.

En résumé, la formule de Black-Scholes fournit un cadre théorique puissant pour comprendre et évaluer les options, malgré certaines hypothèses simplificatrices qui peuvent ne pas toujours correspondre parfaitement à la réalité des marchés financiers.

2.8 Simulation de Monte-Carlo

La simulation de Monte-Carlo est une méthode de calcul stochastique utilisée pour comprendre l'impact de l'incertitude et de la variabilité dans les systèmes complexes. Elle repose sur la génération de nombreuses simulations aléatoires afin de modéliser différents scénarios et évaluer la distribution des résultats possibles.

2.8.1 Principes de base

— **Modélisation du problème** : Définir un modèle mathématique qui représente le système ou le processus étudié.

— **Génération aléatoire** : Utiliser des générateurs de nombres pseudo-aléatoires pour simuler des variables aléatoires.

— **Répétition des simulations** : Répéter le processus de simulation de nombreuses fois (parfois des millions de fois) pour explorer une gamme complète de résultats possibles.

— **Analyse statistique** : Analyser les résultats des simulations pour estimer les probabilités d'occurrence des différents résultats.

2.8.2 Applications

— **Finance** : Pour évaluer les risques financiers, les options de tarification, et les portefeuilles d'investissement.

— **Physique** : Pour simuler des systèmes moléculaires, des processus nucléaires, etc.

— **Ingénierie** : Pour la modélisation de la fiabilité des systèmes complexes.

— **Gestion de projet** : Pour évaluer les risques et les incertitudes dans la planification des projets.

3. Définition de la VaR

La **Value at Risk (VaR)** est une mesure probabiliste de la perte maximale que peut subir une position ou un portefeuille d'instruments financiers suite aux fluctuations des facteurs de marché, avec un dégré de confiance prédéfini, un horizon de temps fixé et dans des conditions normales de marché. [**3**]

Considérons P_t comme la valeur future, et donc aléatoire, d'une position ou d'un portefeuille d'actifs à l'instant t et P_0 sa valeur à la date d'estimation. Alors la variation de prix de ce portefeuille d'actifs pour un horizon t, appelée une fonction de perte ou une fonction P&L (profit and loss), est de : [**4**]

$$\boxed{\underset{[0;t]}{\Delta} P = P_t - P_0}$$

La Value at Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période $[0;t]$ avec probabilité q est définie comme un montant, notée $VaR_t(q)$, telle que la variation $\underset{[0;t]}{\Delta} P$ observée pour le portefeuille d'actifs durant l'intervalle $[0;t]$ ne sera inférieure au montant $VaR_t(q)$ qu'avec une probabilité de $1-q$.

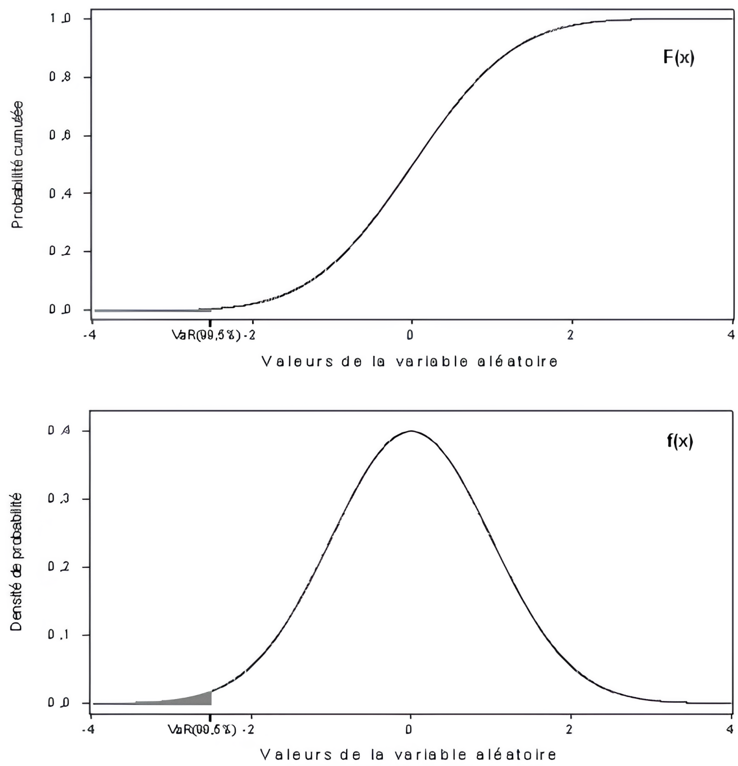
En d'autres termes, la perte de ce portefeuille pour la période $[0;t]$ sera supérieure à $VaR_t(q)$ avec une probabilité q. i.e

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\underset{[0;t]}{\Delta} P \leq VaR_t(q)\right) = 1-q \iff \mathbb{P}\left(\underset{[0;t]}{\Delta} P > VaR_t(q)\right) = q}$$

ou encore

$$\boxed{\mathrm{VaR}_t(q) = F_t^{-1}(1-q)}$$

avec F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire $\underset{[0;t]}{\Delta} P$ et F_t^{-1} la fonction inverse généralisée.



Value at Risk avec probabilité de 99,5%

Plus simplement, la VaR est définie comme étant un quantile de la distribution des P&L théoriques d'un portefeuille, résultants des mouvements possibles des facteurs de risque de marché, sur un horizon de temps fixé.

4. Methodes d'estimations de la VaR

Il existe trois techniques classiques pour estimer la VaR :

1. La méthode de simulation historique.
2. La méthode de la matrice de variance-covariance estimée, encore appelée méthode analytique ou méthode paramétrique.
3. La méthode de simulation de Monte-Carlo.

Pour appliquer les différentes méthodes de calcul de la VaR, il faut effectuer au préalable une transformation des différentes positions du portefeuille avec un certain nombre de facteurs de risques. La variation de prix du portefeuille sur la période $[0;t]$ est alors fonction des variations de ces facteurs de risque $\underset{[0;t]}{\Delta} X_1, \underset{[0;t]}{\Delta} X_2, \cdots$ et $\underset{[0;t]}{\Delta} X_n$. **[4]**

On a :

$$\boxed{\underset{[0;t]}{\Delta} P = \Theta\left(\underset{[0;t]}{\Delta} X_1, \underset{[0;t]}{\Delta} X_2, \cdots, \underset{[0;t]}{\Delta} X_n\right)}$$

où $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont les différents facteurs de risque du portefeuille et $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ces facteurs de risque sont des variables fondamentales du marché (par exemple, les cours des titres, les taux d'intérêts, les indices boursiers, etc.) qui déterminent les risques d'actifs de l'investisseur. La fonction Θ peut être linéaire si le modèle d'évaluation du prix d'une position de portefeuille est linéaire (le cas des actions). En revanche, pour certains types d'actifs comme les options, le modèle d'évaluation n'est pas linéaire, donc la fonction Θ ne l'est plus.

Exemples de la fonction Θ : Linéaire vs Non Linéaire

Cas où la fonction Θ est linéaire : Portefeuille d'actions

Facteur de risque : Le prix de l'action (X).

Relation : La variation de la valeur du portefeuille est directement proportionnelle à la variation du prix de l'action.

Exemple : Détenir 100 actions : si le prix de l'action augmente de 1 €, la valeur du portefeuille augmente de 100 €

Formule : $\Delta P = a \cdot \Delta X$

Θ est donc une multiplication **linéaire**.

Cas où la fonction Θ est non linéaire : Instruments dérivés complexes

Facteur de risque : Diverses variables (taux d'intérêt, volatilité, etc.).

Relation : Les dérivés complexes comme les swaps de taux d'intérêt ou les options exotiques ont des réponses non linéaires aux changements dans les facteurs de risque.

Exemple : Un swaption (option sur un swap de taux d'intérêt) a une sensibilité non linéaire aux taux d'intérêt et à la volatilité.

Formule : $\Delta P = \Theta(\Delta X_1, \Delta X_2, \dots)$

Θ est une fonction complexe qui prend en compte les interactions non linéaires.

Les méthodes d'estimation de la VaR doivent ensuite exploiter les données historiques disponibles relatives à ces différents facteurs de risque pour estimer le quantile d'ordre q de la distribution de $\underset{[0;t]}{\Delta} P$.

Généralement, ces données historiques sont formées par les variations journalières des différents facteurs de risque sur une période définie. Le choix de cette période est très important, puisque nous devons disposer de cotations pour tous les facteurs de risque tout au long de cette période, et celle-ci doit permettre d'estimer les futures variations de ces facteurs de risque.

4.1 Méthode Historique

4.1.1 Description

La méthode d'estimation de la VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risque $X_1, X_2, \cdots, X_n$. [**3**]

Supposons que nous disposions d'un historique de longueur N.

A un instant t_0 choisi, nous pouvons valoriser le portefeuille avec les facteurs de risque de l'historique. Cela veut dire que nous calculons pour chaque date $t \in \{t_0 - 1, \ldots, t_0 - N\}$ une valeur (potentielle) du portefeuille.

Nous pouvons alors déterminer N variations potentielles, que nous assimilons à N pertes potentielles (certaines pertes sont en fai des gains).

Ainsi, à partir de l'historique, nous construisons implicitement une distribution empirique. De celle-ci, nous pouvons extraire le quantile à $\alpha\%$. Il suffit pour cela de ranger les N pertes potentielles et de prendre la valeur absolue de la $N * (1 - \alpha)$ ième plus petite valeur.

Exemple : Nous supposons que les pertes potentielles P_i sont ordonnées.
Nous obtenons alors un ensemble $[P_1, \ldots, P_i, \cdots, P_N]$ avec $P_i \leq P_j$
quel que soit $1 < i < j < N$.
Pour un seuil de confiance de 99%, la VaR correspond à la valeur absolue de la première perte potentielle P_1 si $N = 100$, à la valeur absolue de la dixième perte potentielle P_{10} si $N = 1000$, etc.

4.1.2 Limites de la méthode historique

- **Dépendance aux données historiques** : Cette méthode utilise les rendements passés pour estimer la VaR, supposant que le passé est représentatif du futur. Cependant, en période de changement structurel ou de crise, cette hypothèse peut être invalide.

- **Incapacité à modéliser les événements extrêmes** : Si des événements extrêmes ne se sont pas produits dans l'historique des données, la méthode risque de sous-estimer la probabilité de ces événements.

- **Inflexibilité** : Elle ne prend pas en compte l'évolution des conditions de marché ou les changements dans les corrélations entre actifs.

- **Estimation d'un quantile** : L'estimation d'un quantile, telle que nécessaire pour la VaR, a une vitesse de convergence beaucoup plus faible que d'autres estimations comme la moyenne ou la variance. C'est une estimation locale qui nécessite beaucoup de données pour être précise, ce qui peut poser problème avec des échantillons de taille limitée.

4.2 Méthode de Covariance-Variance

4.2.1 Description

Cette méthode a été introduite en Octobre 1994 par J.P. Morgan, c'est la plus utilisée et est adaptée aux portefeuilles linéaires (comme les positions sur devises par exemple). Cette méthode nécessite une matrice de covariance des actifs ainsi que leur composition dans le portefeuille. C'est dire donc que nous avons besoin des variances et covariances des rendements des actifs du portefeuille, qui peuvent être estimées soit par les méthodes standard (écart-type ou variance), soit par un modèle GARCH ou de pondération exponentielle. [**5**]

Dans le modèle de VaR paramétrique, nous supposons que la valeur algébrique d'un portefeuille est représentée par une combinaison linéaire de n facteurs gaussiens (linéarité).

Notons P_t la valeur du portefeuille à l'instant t et

$\underset{[0;t]}{\Delta} X = \left(\underset{[0;t]}{\Delta} X_1, \underset{[0;t]}{\Delta} X_2, \cdots, \underset{[0;t]}{\Delta} X_n \right)$ le vecteur gaussien des facteurs de loi $\mathcal{N}(\mu;\Sigma)$.

La valeur du portefeuille en t vaut alors

$$\boxed{P_t = \mathbf{a}^\top \underset{[0;t]}{\Delta} X}$$

avec **a** le vecteur de sensibilités.

À la période t, la valeur de P_{t+1} n'est pas connue puisque nous ne disposons que de l'information jusqu'en t.

P_{t+1} et P_t étant identiquement distribués, alors à l'instant t, P_{t+1} est donc une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(\mathbf{a}^\top\mu;\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a})$.
La valeur de la VaR pour un seuil de confiance $1-\alpha$ correspond alors à :

$$\boxed{\mathbb{P}(P_{t+1} - P_t > VaR_\alpha) = \alpha}$$

Dans cette équation, $P_{t+1} - P_t$ représente la variation du portefeuille entre l'instant $t+1$ et l'instant t.
C'est donc une perte si la valeur réalisée du portefeuille dans un jour est inférieure à la valeur actuelle du portefeuille.
Comme la VaR représente la perte potentielle que l'on s'autorise et que celle-ci est exprimée en valeur absolue,

$$\boxed{\mathbb{P}(P_{t+1} - P_t > VaR_\alpha) = \alpha}$$

est la probabilité que la perte ne dépasse pas la VaR (ou perte potentielle).
Par définition, cette probabilité est notre seuil de confiance. Lorsque la période de détention n'est pas 1 unité de temps mais h unité de temps, la mesure de la VaR se définit à partir de la relation suivante :

$$\boxed{\mathbb{P}(P_{t+h} - P_t > VaR_{\alpha,h}) = \alpha}$$

Comme nous supposons que $P(t+1)$ est gaussien, alors nous en déduisons que

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{P_{t+1}-\mathbf{a}^\top\mu}{\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}}} > \Phi^{-1}(\alpha)\right) = \alpha}$$

avec Φ^{-1} la fonction gaussienne inverse.
Or nous avons

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$$

avec $\Phi^{-1}(\alpha)$ le quantile à $\alpha\%$ de la loi gaussienne. Un rapide calcul montre que :

$$\boxed{VaR_\alpha = P_t + \mathbf{a}^\top\mu - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}}}$$

Lorsque les facteurs $X_1, X_2, \cdots, X_n$ modélisent directement la variation du portefeuille, la mesure VaR devient

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha = \mathbf{a}^\top\mu - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}}}$$

ou

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha = \mathbf{a}^\top\mu + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}}}$$

En général, nous supposons que $\mu = 0$, et nous avons finalement

$$\boxed{VaR_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}}}$$

Cette méthode de calcul de la VaR est appelée la méthode de variance–covariance, puisqu'elle dérive directement de la matrice de covariance Σ des facteurs.

La dernière relation s'interprète très facilement :

- $\mathbf{a}^\top\Sigma\mathbf{a}$ est en fait l'écart-type de la variation du portefeuille : nous pouvons l'assimiler à un risque-volatilité ;
- $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ est un coefficient que nous notons c ;

Nous avons donc une relation linéaire entre le risque-volatilité et la perte potentielle :

$$\boxed{\mathrm{VaR} = c \times \text{risque-volatilité}}$$

À titre d'illustration, c prend la valeur 2,33 pour un seuil de confiance $1-\alpha = 99\%$. Dans ce cas, la VaR correspond au risque-volatilité multiplié par ce facteur 2,33.

Cette méthode repose sur trois hypothèses :

1. l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille ;
2. la normalité de la variation des facteurs risques $X_1, X_2, \cdots, X_n$;
3. et la relation linéaire entre les facteurs et la valeur du portefeuille.

Ces trois hypothèses simplifient le calcul de la VaR, puisque les quantiles de $\mathbf{a}^\top \underset{[0;t]}{\Delta} X$ sont liés de façon linéaire au quantile de la loi normale à une dimension.

4.2.2 Limites de la méthode analytique

Dans le cadre du modèle paramétrique, nous avons illustré comment combiner, d’un point de vue analytique, positions exposées au risque, volatilités et corrélations pour calculer la VaR d’un portefeuille. Ce modèle présente certaines limites telles que :

- Il est applicable seulement pour des portefeuilles d’instruments linéaires, c’est-à-dire dont le rendement varie linéairement avec les variations relatives du facteur de risque (c’est le cas des positions de change, approximativement pour les obligations, les forwards, etc.).
  On conclut donc que ce modèle n’est pas très satisfaisant pour un portefeuille d’options.

- Il suppose que le rendement du portefeuille est distribué suivant la loi normale, pourtant la réalité en est autrement ; peu de facteurs de risque suivent la loi normale.

- Le modèle suppose que le comportement des données historiques, toutes les dépendances possibles existantes entre les facteurs de risque, peuvent être captées par une matrice de covariance ; pourtant cette matrice présente elle-même des limites tant au niveau de son estimation qu’au niveau de sa prévision.

Par conséquent, la méthode analytique ne peut s’appliquer de façon satisfaisante aux instruments financiers non linéaires, parlant des options. Calculer la VaR sur un portefeuille d’options devient plus complexe puisque d’une part, le rendement d’une option n’est pas une fonction linéaire de l’actif sous-jacent et d’autre part, la variation du prix de l’option est sensible à celle de la volatilité du sous-jacent, un élément inobservable directement sur le marché. La simulation Monte-Carlo vient alors pallier cette faiblesse et atténuer le problème lié à la matrice de covariance même si cette dernière est aussi utilisée dans la simulation.

4.3 Méthode de Simulation de Monte-Carlo

L'estimation de la VaR par la méthode de Monte-Carlo est basée sur la simulation des facteurs de marché $X_1, X_2, \cdots, X_n$ dont on se donne une loi de distribution a priori, de préférence admissible avec l'historique. Nous pouvons alors valoriser le portefeuille avec les facteurs simulés. Si nous utilisons N simulations, nous pouvons alors déterminer N variations simulées du portefeuille, que nous assimilons à N pertes ou gains potentiels. Il suffit ensuite de calculer le quantile correspondant tout comme pour la méthode de la VaR historique. Les deux méthodes sont donc très semblables. La seule différence est que l'une des méthodes utilise les facteurs passés, alors que l'autre utilise des facteurs simulés.

Cette méthode est très intéressante et particulièrement adaptée au calcul de la VaR sur des instruments non linéaires notamment les produits optionnels.

La méthode Monte-Carlo demande un effort important de modélisation puisque celle-ci déterminera entièrement les trajectoires des facteurs de marché que l'on utilise pour le calcul de la VaR.

4.3.1 Description

La simulation Monte-Carlo consiste à générer une série de valeurs de marché futures possibles de notre portefeuille par l'emploi d'un modèle d'évolution des facteurs de risque.

L'idée ici est qu'au lieu de se baser uniquement sur le comportement passé des facteurs de risque, il est plus judicieux de simuler le mouvement de ces facteurs, de la date présente à une date future ; la différence entre ces deux dates correspond à l'horizon de la VaR noté h. A partir des valeurs courantes des facteurs de risque à un instant donné (date de calcul de la VaR), des milliers de valeurs possibles de ces facteurs au-delà de l'horizon h jours sont générées en utilisant la méthode Monte-Carlo. Ce nombre de scénarios nous permettra d'avoir des milliers de valeurs possibles pour notre portefeuille dans h jours ; ensuite nous calculons la différence entre chaque nouvelle valeur simulée et la vraie valeur de l'instant t.

Dès lors nous obtenons une nouvelle série (série de variations de la valeur du portefeuille) et la VaR mesurée correspond au centile d'ordre α % de cette série selon notre niveau de confiance.

Par exemple, le centile d'ordre 5% d'une série de 100 valeurs est égal à la $5^{\text{ième}}$ plus petite valeur ou à la $95^{\text{ième}}$ plus grande valeur de cette série.

Les grandes étapes de ce modèle

Soit un portefeuille ayant n facteurs de risque corrélés, de rendements $R_1, R_2, \dots, R_n$, et de matrice de variance-covariance notée V :

La génération des scénarios réside dans l'utilisation des volatilités et des corrélations estimées entre les facteurs de risque du portefeuille pour obtenir un grand nombre de valeurs futures des actifs constituant le portefeuille, toujours sous l'hypothèse de la normalité.

1. D'abord il faut générer n variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant la loi normale standard, que nous représentons par le vecteur Z de dimension $n \times 1$; sa matrice de covariance est I_n, la matrice identité.

2. Utiliser la matrice de covariance des facteurs de risque pour transformer ce vecteur Z en un nouveau vecteur Y de composantes corrélées, en passant par la décomposition de Cholesky de la matrice V.
   La matrice de Cholesky de V est une matrice triangulaire inférieure C telle que $V = C^T C$, où C^T est la transposée de C.
   Ainsi en posant $Y = C^T Z$, Y est aussi de dimension $n \times 1$.
   Nous avons $V_Y = C^T V_Z C = C^T I_k C = C^T C$.
   Or $C^T C = V$, donc on retrouve bien notre matrice de covariance des facteurs de risque. Nous obtenons finalement des rendements distribués suivant la loi normale, et ayant la même structure de la matrice de covariance des facteurs de risque.

3. Utiliser un modèle financier pour évaluer la valeur future de chaque facteur de risque en utilisant les composantes du vecteur Y ; c'est ensuite qu'on pourra introduire chaque facteur simulé dans la formule de pricing de l'instrument financier en question (formule de Black & Scholes pour les options). Finalement, la valeur du portefeuille n'est que la somme des prix de tous les actifs contenus dans le portefeuille. Nous calculons la différence entre la vraie valeur du portefeuille aujourd'hui et celle obtenue par une simulation.

Ces trois étapes sont répétées plusieurs milliers de fois pour obtenir une série de variations du prix du portefeuille. A la fin, il suffira de prendre le centile d'ordre α de cette distribution ; le niveau de confiance étant bien sûr $(1-\alpha)$.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir donner des résultats plus exacts. Avec des milliers d'observations, il y a moins de risque d'échantillonnage d'après la théorie des grands nombres. Elle est aussi très flexible du moment où les paramètres et les hypothèses utilisés pour la simulation sont modifiables.

Remarque : Il est très important de souligner que la puissance de ce modèle dépend d'une part des corrélations utilisées pour la réalisation des scénarios, leur capacité à refléter la dépendance entre les variables, et d'autre part du nombre de scénarios réalisés. Il est conseillé d'aller au moins jusqu'à 1500 scénarios, car plus le nombre est grand, plus il y a une convergence vers les vraies valeurs des actifs, conformément à la théorie des grands nombres.

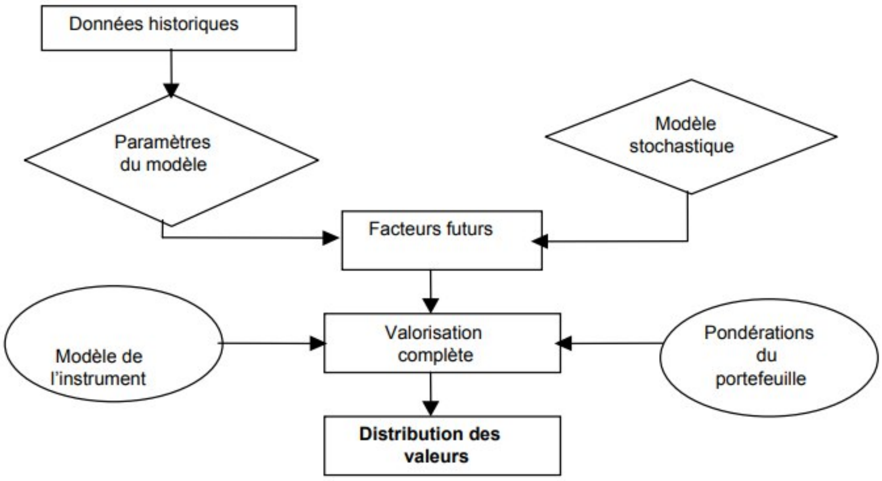


Schéma synthétique de la simulation Monte-Carlo

4.3.2 Limites de la méthode de Monte-Carlo

Le principe de la simulation est en lui-même simple, mais des problèmes apparaissent dès lors que nous voulons passer à l'implémentation sur un cas concret.

- **Complexité et coût computationnel** : Cette méthode est la plus flexible, mais elle est également la plus coûteuse en termes de temps de calcul et de ressources, en particulier pour les portefeuilles complexes avec de nombreux actifs.

- **Dépendance au modèle choisi** : La précision de la méthode dépend fortement du modèle utilisé pour générer les scénarios. Si le modèle sous-jacent est mal spécifié, les résultats peuvent être trompeurs.

- **Difficulté d'interprétation** : La méthode peut générer une grande variété de résultats en fonction des paramètres choisis, rendant l'interprétation des résultats plus complexe.

- **Utilisation de la matrice de covariance** : Bien que la méthode de Monte-Carlo atténue certains des problèmes associés à la matrice de covariance, elle en reste tributaire, ce qui peut introduire des imprécisions similaires à celles de la méthode paramétrique.

5. Tableau comparatif des méthodes d'estimation de la VaR

Critère	Méthode Analytique	Méthode de Simulation de Monte-Carlo	Méthode Historique
Description	Basée sur des formules mathématiques et statistiques, notamment la loi normale.	Simulation de nombreux scénarios possibles pour estimer la distribution des pertes.	Analyse des données historiques pour estimer les pertes possibles.
Hypothèses	Distribution normale des rendements, corrélation constante.	Aucune hypothèse spécifique sur la distribution des rendements.	Les rendements futurs suivent la même distribution que les rendements passés.
Complexité	Relativement simple et rapide à calculer.	Complexe, nécessitant de puissants outils de calcul.	Simple à calculer, mais nécessite des données historiques suffisantes.
Précision	Peut être imprécise si les rendements ne suivent pas une distribution normale.	Très précise si un nombre suffisant de simulations est effectué.	Peut manquer de précision si les conditions du marché changent.
Avantages	Facile à implémenter et rapide à calculer, bien adaptée pour des portefeuilles simples.	Peut capturer des événements rares et des comportements non linéaires.	Facile à comprendre et ne nécessite pas de supposer une distribution des rendements.
Inconvénients	Ne capture pas bien les événements extrêmes (queues épaisses).	Temps de calcul élevé, surtout pour des portefeuilles complexes.	Dépend entièrement des données historiques, ne prenant pas en compte les nouvelles situations du marché.
Applications Typiques	Institutions financières avec des portefeuilles simples.	Institutions ayant besoin d'une estimation précise pour des portefeuilles complexes.	Analyse de portefeuilles sur de longues périodes de données historiques.
Sensibilité aux Outliers	Faible, car basée sur une distribution normale.	Peut les capturer si suffisamment de scénarios sont simulés.	Forte, car basée sur les événements passés réels.
Exemples d'utilisation	Évaluation rapide des risques de marché.	Gestion du risque pour des produits dérivés complexes.	Backtesting des stratégies de trading.

6. Conclusion

La *Value at Risk* est un outil indispensable pour la gestion des risques dans les institutions financières, permettant de quantifier le risque de perte sur un portefeuille avec un certain niveau de confiance. Les méthodes d'estimation de la VaR sont diverses et variées, allant des approches paramétriques traditionnelles aux méthodes plus modernes comme la simulation de Monte-Carlo et la simulation historique. Chacune de ces méthodes présente des avantages et des inconvénients, selon les caractéristiques spécifiques des portefeuilles et des conditions de marché. La sélection de la méthode la plus appropriée dépend de nombreux facteurs, y compris la complexité des portefeuilles, les données disponibles et les exigences réglementaires. Ce travail souligne l'importance de bien comprendre ces méthodes pour une gestion efficace des risques, tout en reconnaissant que la VaR n'est qu'un des nombreux outils à la disposition des gestionnaires de risques pour évaluer et atténuer les risques dans un contexte financier complexe et en constante évolution.

Bibliographie

[1] Louis Esch, Robert Kieffer and Thierry Lopez, ***Asset and Risk Management***, Risk Oriented Finance

[2] NEIL D. PEARSON, ***Risk budgeting***, Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk

[3] Moorad Choudhry, ***AN INTRODUCTION TO VALUE-AT-RISK***, Fourth Edition

[4] Marcin FEDOR, Julien MOREL,***Value at Risk en assurance : recherche d'une méthodologie à long terme***

[5] Anthony Saunders, Linda Allen, ***Credit Risk Measurement New Approaches***

[6] Brummelhuis R , Cordoba A , Quintanilla M, ***Principal Component Value***

[7] Michel Crouhy, Dan Galai, Robert Mark, ***The Essentials of Risk Management***

[8] Philippe Jorion, ***Value At Risk The New Benchmark For Managing Financial***