ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1212

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

XVII

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I

DESCRIPTION
DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

CHAPITRE II

THÉORIE DES ENSEMBLES

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1954

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Livre I. — **Théorie des ensembles.**
Fascicule de résultats : nº 846-1141 (2e éd.)

Livre II. — **Algèbre.**
Chapitre I (*Structures algébriques*) : nº 934-1144 (2e éd.)
Chapitre II (*Algèbre linéaire*) : nº 1032
Chapitre III (*Algèbre multilinéaire*) : nº 1044
Chapitre IV (*Polynômes et fractions rationnelles*)
Chapitre V (*Corps commutatifs*) } nº 1102
Chapitre VI (*Groupes et corps ordonnés*)
Chapitre VII (*Modules sur les anneaux principaux*) } nº 1179

Livre III. — **Topologie générale.**
Chapitre I (*Structures topologiques*)
Chapitre II (*Structures uniformes*) } nº 858-1142 (2e éd., revue et augmentée)
Chapitre III (*Groupes topologiques*)
Chapitre IV (*Nombres réels*) } nº 916-1143 (2e éd.)
Chapitre V (*Groupes à un paramètre*)
Chapitre VI (*Espaces numériques et espaces projectifs*)
Chapitre VII (*Les groupes additifs* $\mathbf{R}^n$)
Chapitre VIII (*Nombres complexes*) } nº 1029
Chapitre IX (*Utilisation des nombres réels en topologie générale*) : nº 1045
Chapitre X (*Espaces fonctionnels*)
Dictionnaire } nº 1084
Fascicule de résultats : nº 1196

Livre IV. — **Fonctions d'une variable réelle.**
Chapitre I (*Dérivées*)
Chapitre II (*Primitives et intégrales*)
Chapitre III (*Fonctions élémentaires*) } nº 1074
Chapitre IV (*Equations différentielles*)
Chapitre V (*Etude locale des fonctions*)
Chapitre VI (*Développements tayloriens généralisés ; formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*)
Chapitre VII (*La fonction gamma*) } nº 1132

Livre V. — **Espaces vectoriels topologiques.**
Chapitre I (*Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué*)
Chapitre II (*Ensembles convexes et espaces localement convexes*) } nº 1189

Livre VI. — **Intégration.**
Chapitre I (*Inégalités de convexité*)
Chapitre II (*Espaces de Riesz*)
Chapitre III (*Mesures sur les espaces localement compacts*)
Chapitre IV (*Prolongement d'une mesure. Espaces* L^p) } nº 1175

A PARAITRE PROCHAINEMENT

Livre V. — **Espaces vectoriels topologiques.**
Chapitre III (*Espaces d'applications linéaires continues*)
Chapitre IV (*La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*)
Chapitre V (*Espaces hilbertiens*)
Dictionnaire

Enrique FREYMANN, notre éditeur et notre ami, est mort pendant la correction des épreuves de ce volume. Après avoir publié seize fascicules de notre ouvrage, il n'aura pas eu la satisfaction d'en faire paraître le Livre Premier.

Il y a bientôt vingt ans, dédaignant les conseils de prudence qui lui venaient de toute part, Enrique FREYMANN décidait d'accueillir un auteur complètement inconnu du public scientifique.

Il nous témoignait ainsi une confiance qui nous aida grandement dans notre entreprise. Depuis ce temps il n'a cessé de suivre nos travaux avec une sympathie dont nous lui sommes reconnaissants.

Aujourd'hui, en hommage à un ami qui apportait à son métier d'éditeur une âme d'artiste, nous dédions ce volume

A LA MÉMOIRE

DE

ENRIQUE FREYMANN

INTRODUCTION

Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux ; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes.

En effet, l'analyse du mécanisme des démonstrations dans des textes mathématiques bien choisis a permis d'en dégager la structure, du double point de vue du vocabulaire et de la syntaxe. On arrive ainsi à la conclusion qu'un texte mathématique suffisamment explicite pourrait être exprimé dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de « mots » invariables assemblés suivant une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles inviolables : un tel texte est dit *formalisé*. La description d'une partie d'échecs au moyen de la notation usuelle, une table de logarithmes, sont des textes formalisés ; les formules du calcul algébrique ordinaire en seraient aussi, si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en fait certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage, et que l'usage autorise à y faire certaines dérogations.

La vérification d'un texte formalisé ne demande qu'une attention en quelque sorte mécanique, les seules causes d'erreur possibles étant dues à la longueur ou à la complication du texte ;

c'est pourquoi un mathématicien fait le plus souvent confiance à un confrère qui lui transmet le résultat d'un calcul algébrique, pour peu qu'il sache que ce calcul n'est pas trop long et a été fait avec soin. Par contre, dans un texte non formalisé, on est exposé aux fautes de raisonnement que risquent d'entraîner, par exemple, l'usage abusif de l'intuition, ou le raisonnement par analogie. En fait, le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction, ou, comme on dit, de la « rigueur » d'une démonstration ou d'une théorie, ne recourt guère à l'une des formalisations complètes dont on dispose aujourd'hui, ni même le plus souvent aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires ; il se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible). Si, comme il arrive mainte et mainte fois, des doutes viennent à s'élever, c'est en définitive sur la possibilité d'aboutir sans ambiguïté à une telle formalisation qu'ils portent, soit qu'un même mot soit employé en des sens variables suivant le contexte, soit que les règles de la syntaxe aient été violées par l'emploi inconscient de modes de raisonnement non spécifiquement autorisés par elles, soit encore qu'une erreur matérielle ait été commise. Ce dernier cas mis à part, le redressement se fait invariablement, tôt ou tard, par la rédaction de textes se rapprochant de plus en plus d'un texte formalisé, jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin ; autrement dit, c'est par une comparaison, plus ou moins explicite, avec les règles d'un langage formalisé, que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique.

La *méthode axiomatique* n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir. Ce n'est pas là une invention nouvelle ; mais son emploi systématique comme instrument de découverte est l'un des traits originaux de la mathématique contemporaine. Peu importe en effet, s'il s'agit d'écrire ou de lire un texte formalisé, qu'on attache aux mots ou signes de ce texte telle ou telle signification, ou même qu'on ne leur en attache aucune ; seule importe l'observation correcte des règles de la syntaxe. C'est ainsi qu'un même calcul algébrique, comme chacun sait, peut servir à

résoudre des problèmes portant sur des kilogrammes ou des francs, sur des paraboles ou des mouvements uniformément accélérés. Ce même avantage s'attache, et pour les mêmes raisons, à tout texte rédigé suivant la méthode axiomatique : une fois établis les théorèmes de la Topologie générale, on peut les appliquer à volonté à l'espace ordinaire, à l'espace de Hilbert, à bien d'autres encore. Cette faculté de donner des contenus multiples aux mots ou notions premières d'une théorie est même une importante source d'enrichissement de l'intuition du mathématicien, qui n'est pas nécessairement de nature spatiale ou sensible comme on le croit parfois, mais qui est plutôt une certaine connaissance du comportement des êtres mathématiques, aidée souvent par des images de nature très variée, mais fondée avant tout sur leur fréquentation journalière. On est souvent amené ainsi à étudier avec fruit, dans une théorie, des propriétés traditionnellement négligées dans celle-ci, mais étudiées systématiquement dans une théorie axiomatique générale dont elle est une particularisation (par exemple des propriétés ayant leur origine historique dans une autre particularisation de cette théorie générale). De plus, et c'est ce qui nous importe particulièrement en ce Traité, la méthode axiomatique permet, lorsqu'on a affaire à des êtres mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre de notions, c'est-à-dire, pour employer un mot qui sera défini plus loin avec précision, de les classer suivant les *structures* auxquelles elles appartiennent (une même structure pouvant intervenir, bien entendu, à propos d'êtres mathématiques divers) ; c'est ainsi que, parmi les propriétés de la sphère, les unes sont topologiques, d'autres sont algébriques, d'autres encore peuvent être considérées comme relevant de la géométrie différentielle ou de la théorie des groupes de Lie. Quelque artificiel que puisse devenir parfois ce principe de classification dès que s'enchevêtrent les structures, c'est lui qui est à la base de la répartition en Livres des matières formant l'objet de ce Traité.

***

De même que l'art de parler correctement une langue préexiste à la grammaire, de même la méthode axiomatique a été pratiquée bien avant l'invention des langages formalisés ; mais sa pratique consciente ne peut reposer que sur une connaissance des principes généraux gouvernant ces langages et de leurs relations avec les textes mathématiques courants. Nous nous proposons en ce Livre de donner d'abord la description d'un tel langage, et même l'exposé de principes généraux qui pourraient s'appliquer à beaucoup d'autres semblables. Un seul de ces langages suffira toutefois à notre objet. En effet, alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartînt en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver presque toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles. Il nous suffira donc d'exposer les principes d'un langage formalisé unique, d'indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la Théorie des Ensembles, puis de faire voir comment s'insèrent dans celle-ci les diverses branches des mathématiques, au fur et à mesure que notre attention se portera sur elles. Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité. Il se peut qu'un jour les mathématiciens s'accordent à utiliser des modes de raisonnement non formalisables dans le langage exposé ici ; il faudrait alors, sinon changer complètement de langage, tout au moins élargir les règles de la syntaxe. C'est à l'avenir qu'il appartiendra de décider.

Il va de soi que la description du langage formalisé se fait en langage courant, comme celle des règles du jeu d'échecs ; nous n'entrerons pas dans la discussion des problèmes psychologiques ou métaphysiques que soulève la validité de l'emploi du langage courant en de telles circonstances (par exemple la possibilité de reconnaître qu'une lettre de l'alphabet est « la même » à deux endroits différents d'une page, etc.). Il n'est guère possible non plus d'entreprendre une telle description sans faire usage de la numération ; bien que de bons esprits aient pu sembler embarrassés de ce fait, jusqu'à y voir une pétition de principes, il est clair qu'en l'occurrence les chiffres ne sont utilisés que comme repères (que l'on pourrait d'ailleurs remplacer par d'autres signes tels que des couleurs ou des lettres), et qu'on ne fait aucun raisonnement mathématique lorsqu'on dénombre les signes qui figurent dans une formule explicitée. Nous ne discuterons pas de la possibilité d'ensei-

gner les principes du langage formalisé à des êtres dont le développement intellectuel n'irait pas jusqu'à savoir lire, écrire et compter.

***

Si la mathématique formalisée était aussi simple que le jeu d'échecs, une fois décrit le langage formalisé que nous avons choisi, il n'y aurait plus qu'à rédiger nos démonstrations dans ce langage, comme l'auteur d'un traité d'échecs écrit dans sa notation les parties qu'il se propose d'enseigner, en les accompagnant au besoin de commentaires. Mais les choses sont loin d'être aussi faciles, et point n'est besoin d'une longue pratique pour s'apercevoir qu'un tel projet est absolument irréalisable ; la moindre démonstration du début de la Théorie des Ensembles exigerait déjà des centaines de signes pour être complètement formalisée. Dès le Livre I de ce Traité s'impose donc la nécessité impérieuse d'abréger le texte formalisé par l'introduction de mots nouveaux (dits « symboles abréviateurs ») et de règles de syntaxe additionnelles (dites « critères déductifs ») en assez grand nombre. Ce faisant, on obtient des langages beaucoup plus maniables que le langage formalisé proprement dit, et dont un mathématicien tant soit peu expérimenté a la conviction qu'ils peuvent être considérés comme des transcriptions sténographiques de celui-ci. Mais on n'a déjà plus la certitude que le passage de l'un de ces langages à l'autre pourrait se faire d'une manière purement mécanique ; du moins faudrait-il, pour qu'on en fût assuré, compliquer les règles de syntaxe gouvernant l'emploi des mots nouveaux à tel point que leur utilité deviendrait illusoire ; là, comme en calcul algébrique et dans l'emploi de presque toutes les notations dont se servent ordinairement les mathématiciens, on préfère un instrument maniable à un autre théoriquement plus parfait, mais par trop incommode.

Comme le verra le lecteur, l'introduction de ce langage condensé s'accompagne de « raisonnements » d'un type particulier, qui appartiennent à ce qu'on appelle la *Métamathématique*. Cette discipline, faisant complètement abstraction de toute signification qu'on aura pu à l'origine attribuer aux mots ou phrases des textes mathématiques formalisés, considère ces textes comme des objets particulièrement simples, assemblages d'objets préalablement donnés dont seul importe l'ordre qu'on leur assigne. Et, de même par exemple qu'un traité de chimie annonce d'avance le résultat d'une expérience effectuée dans des conditions données, les « raisonnements » métamathématiques affirmeront d'ordinaire qu'après une succession d'opérations sur un texte d'un type donné, le texte final sera d'un autre type donné. Dans les cas les plus simples, ces affirmations sont à vrai dire de purs truismes (qu'on pourrait par exemple comparer au suivant : « quand, dans un sac de billes contenant des billes noires et des billes blanches, on remplace toutes les billes noires par des billes blanches, il ne reste plus dans le sac que des billes blanches » ; cf. p. 14). Mais on rencontre très tôt (cf. p. 18) des exemples où l'argumentation prend une tournure typiquement mathématique, avec emploi prédominant d'entiers arbitraires et du raisonnement par récurrence. Si nous avons écarté ci-dessus l'objection contre l'emploi de la numération dans la description d'un langage formalisé, il n'est plus possible ici de nier le danger d'une pétition de principes, puisque, dès le début, on semble faire usage de toutes les ressources de l'arithmétique, alors qu'on se propose, entre autres, d'en exposer les fondements. A cela certains pensent pouvoir répondre que, dans ce genre de raisonnements, ils ne font que décrire des opérations susceptibles d'être effectuées et contrôlées, et pour cette raison ils y puisent une conviction d'un autre ordre que celle qu'ils accordent à la mathématique proprement dite. Il semble plus simple de dire qu'on *pourrait* se passer de ces raisonnements métamathématiques si la mathématique formalisée était effectivement écrite : au lieu d'utiliser les « critères déductifs », on recommencerait chaque fois les suites d'opérations qu'ils ont pour but d'abréger en prédisant leur résultat. Mais la mathématique formalisée ne peut être écrite tout entière ; force est donc, en définitive, de faire confiance à ce qu'on peut appeler le sens commun du mathématicien ; confiance analogue à celle qu'un comptable ou un ingénieur accorde à une formule ou une table numérique sans soupçonner l'existence des axiomes de Peano, et qui finalement se fonde sur ce qu'elle n'a jamais été démentie par les faits.

Nous abandonnerons donc très tôt la Mathématique formalisée, mais non sans avoir pris soin de tracer avec précision le chemin par lequel on y pourrait revenir. Les facilités qu'apportent les premiers « abus de langage » ainsi introduits nous permettront d'écrire le reste de ce Traité (et en particulier le fascicule de résultats du Livre I) comme le sont en pratique tous les textes mathématiques, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules constituant des formalisations partielles, particulières et incomplètes, et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu. Souvent même on se servira du langage courant d'une manière bien plus libre encore, par des abus de langage volontaires, par l'omission pure et simple des passages qu'on présume pouvoir être restitués aisément par un lecteur tant soit peu exercé, par des indications intraduisibles en langage formalisé et destinées à faciliter cette restitution. D'autres passages également intraduisibles contiendront des commentaires destinés à rendre plus claire la marche des idées, au besoin par un appel à l'intuition du lecteur ; l'emploi des ressources de la rhétorique devient dès lors légitime, pourvu que demeure inchangée la possibilité de formaliser le texte. Les premiers exemples en seront donnés, dès ce Livre, au chapitre III, qui expose la théorie des entiers et des cardinaux.

Ainsi, rédigé suivant la méthode axiomatique, et conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une formalisation totale, notre Traité vise à une rigueur parfaite ; prétention que ne démentent point les considérations qui précèdent, ni les feuillets d'*errata* au moyen desquels nous avons corrigé et nous continuerons à corriger les erreurs qui se glissent de temps à autre dans le texte. Du fait que nous cherchons à nous tenir constamment aussi près d'un texte formalisé qu'il semble possible sans longueurs insupportables, la vérification, en principe, est aisée ; les erreurs (inévitables dans une pareille entreprise) peuvent être localisées sans excessive perte de temps, et le risque de les voir entacher de nullité un chapitre ou un Livre entier demeure très faible.

***

C'est dans le même esprit réaliste que nous envisageons ici la question de la non-contradiction, l'une de celles qui ont le plus préoccupé les logiciens modernes, et qui sont en partie à l'origine de la création des langages formalisés (cf. Note historique). On dit qu'une théorie mathématique est contradictoire si l'on y a démontré à la fois un théorème et sa négation ; des règles de raisonnement usuelles, qui sont à la base des règles de la syntaxe des langages formalisés, il résulte alors que tout théorème est à la fois vrai et faux dans cette théorie, qui perd en ce cas tout intérêt. Si donc on a abouti involontairement à une contradiction, on ne peut la laisser subsister sans que se soit rendue vaine la théorie où elle s'insère.

Peut-on acquérir la certitude que cela n'arrivera jamais ? Sans entrer à ce propos dans un débat hors de notre compétence sur la notion même de certitude, observons que la métamathématique peut se proposer d'examiner les problèmes de non-contradiction par ses méthodes propres. Qu'une théorie soit contradictoire revient en effet à dire qu'elle comporte une démonstration formalisée correcte aboutissant à la conclusion $0 \neq 0$. Or la métamathématique peut chercher, par des procédés de raisonnement empruntés à la mathématique, à approfondir la structure de ce texte formalisé supposé écrit, pour arriver enfin à « démontrer » l'impossibilité d'un tel texte. En fait, on a donné de telles « démonstrations » pour certains langages formalisés partiels, moins riches que celui que nous nous proposons d'introduire, mais assez riches pour qu'on y puisse écrire une bonne partie de la mathématique classique. On peut se demander, il est vrai, ce qu'on a « démontré » ainsi ; car, si la mathématique était contradictoire, certaines de ses applications aux objets matériels, donc en particulier aux textes formalisés, risqueraient de devenir illusoires ; il faudrait, pour échapper à ce dilemme, que la non-contradiction d'un langage formalisé pût être « démontrée » par des raisonnements formalisables dans un langage moins riche et partant plus digne de confiance ; or un théorème célèbre de métamathématique, dû à Gödel, dit que cela est impossible s'il s'agit d'un langage du type de celui que nous décrirons, et suffisamment riche en axiomes pour permettre de formuler les résultats de l'arithmétique classique.

Au contraire, dans les démonstrations de non-contradiction « relative » (c'est-à-dire celles qui établissent la non-contradiction d'une théorie en supposant qu'une autre théorie, par exemple celle des ensembles, n'est pas contradictoire), la partie métamathématique du raisonnement (cf. chap. I, § 2, n° 4) est tellement simple qu'il ne semble guère possible de la mettre en doute sans renoncer à tout emploi rationnel de nos facultés intellectuelles. Puisque les diverses théories mathématiques sont maintenant rattachées logiquement à la Théorie des Ensembles, il s'ensuit que toute contradiction rencontrée dans une de ces théories donnerait lieu à une contradiction dans la Théorie des Ensembles elle-même. Ce n'est évidemment pas là un argument permettant de conclure à la non-contradiction de la Théorie des Ensembles. Toutefois, depuis 40 ans qu'on a formulé avec assez de précision les axiomes de cette théorie et qu'on s'est appliqué à en tirer des conséquences dans les domaines les plus variés des mathématiques, on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais.

S'il en était autrement, c'est que la contradiction observée serait inhérente aux principes mêmes qu'on a mis à la base de la Théorie des Ensembles ; ceux-ci seraient donc à modifier, sans compromettre si possible les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus ; il est clair qu'on y parviendrait d'autant plus facilement que l'usage de la méthode axiomatique et d'un langage formalisé aura permis de formuler plus distinctement ces principes et d'en séparer plus nettement les conséquences. C'est d'ailleurs à peu près ce qui s'est passé à date récente, lorsqu'on a éliminé les « paradoxes » de la Théorie des Ensembles par l'adoption d'un langage formalisé essentiellement équivalent à celui que nous décrivons ici : c'est une révision semblable qu'il faudrait entreprendre si ce dernier à son tour se révélait contradictoire.

En résumé, nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée ; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I

DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

§ 1. — Termes et relations.

1. *Signes et assemblages.*

Les *signes* d'une théorie mathématique $\mathcal{T}$ (*) sont les suivants :

1° Les *signes logiques* (**) : $\square$, τ, $\vee$, $\rceil$.

2° Les lettres.

Nous entendons par là les lettres majuscules et minuscules latines, affectées d'accents. Ainsi, A, A′, A″, A‴,..., sont des lettres. A tout endroit du texte, il est possible d'introduire des lettres autres que celles qui figuraient dans les raisonnements antérieurs.

3° Les *signes spécifiques*, qui dépendent de la théorie considérée.

En Théorie des Ensembles, nous n'utiliserons que les trois signes spécifiques : $=$, $\in$, $\supset$.

Un *assemblage* de $\mathcal{T}$ est une succession de signes de $\mathcal{T}$ écrits les uns à côté des autres, certains signes distincts des lettres pouvant être joints deux à deux par des traits qui courent au-dessus de la

---

(*) Le sens de cette expression se précisera progressivement au cours de ce chapitre.

(**) Pour la signification intuitive de ces signes, voir n° 3, *Remarque*.

ligne et qu'on appelle des *liens*. *Ainsi, dans la théorie des ensembles, où $\in$ est un signe spécifique,

$$\tau \vee \rceil \in \square A' \in \square A''$$

est un assemblage. *

L'usage exclusif des assemblages conduirait à des difficultés typographiques et mentales insurmontables. C'est pourquoi les textes courants utilisent des symboles abréviateurs (notamment des mots du langage ordinaire), qui n'appartiennent pas à la mathématique formelle. L'introduction de ces symboles est l'objet des *définitions*. Leur emploi *n'est pas théoriquement indispensable*, et prête souvent à des confusions que seule une certaine habitude permet d'éviter.

Exemples. — 1) L'assemblage $\vee\rceil$ se représente par $\Rightarrow$.

2) Les symboles suivants représentent des assemblages (d'ailleurs fort longs) :

« 3 et 4 »

$\varnothing$

N

Z

« la droite numérique »

« la fonction Γ »

$f \circ g$

$\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$1 \in 2$

« tout corps fini est commutatif »

« les zéros de $\zeta(s)$ autres que $-2, -4, -6, \ldots$ sont sur la droite $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$ ».

En général, le symbole qu'on utilise pour représenter un assemblage contient toutes les lettres qui figurent dans cet assemblage. Parfois cependant, on peut enfreindre ce principe sans grand risque de confusion. * Par exemple « la complétion de E » représente un assemblage qui contient la lettre E, mais qui contient aussi la lettre représentant l'ensemble des entourages de la structure uniforme de E. Par contre $\int_0^1 f(x)dx$ représente un assemblage où ne figure pas la lettre x (ni la lettre d) ; les assemblages représentés par **N**, **Z**, « la fonction Γ » ne contiennent aucune lettre. *

Une *théorie mathématique* (ou simplement *théorie*) comporte des règles permettant de dire que certains assemblages de signes sont des *termes* ou des *relations* de la théorie, et d'autres règles permettant de dire que certains assemblages sont des *théorèmes* de la théorie.

La description de ces règles, qui va être faite dans ce chapitre, *n'appartient pas* à la mathématique formelle ; il y intervient des assemblages plus ou moins indéterminés, par exemple des lettres indéterminées. Pour alléger l'exposé, il est commode de désigner ces assemblages par des symboles peu encombrants. Nous utiliserons notamment des combinaisons de signes (d'une théorie mathématique), de lettres italiques grasses (éventuellement affectées d'indices ou d'accents) et de symboles particuliers, dont on va donner quelques exemples. *Comme on veut seulement éviter des circonlocutions* (cf. note (*) du § 3, nº 1, p. 25), on n'énoncera pas de règles strictes et générales relatives à l'emploi de ces symboles ; le lecteur pourra reconstituer sans peine, dans chaque cas particulier, l'assemblage dont il s'agit. Par abus de langage, on dira souvent que les symboles employés *sont* des assemblages, au lieu de dire qu'ils *désignent* des assemblages ; des expressions telles que « l'assemblage $\boldsymbol{A}$ » ou « la lettre $\boldsymbol{x}$ », dans l'énoncé des règles qui suivent, devraient donc être remplacées par « l'assemblage désigné par $\boldsymbol{A}$ » ou « la lettre désignée par $\boldsymbol{x}$ ».

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des assemblages. On désignera par $\boldsymbol{AB}$ l'assemblage obtenu en écrivant l'assemblage $\boldsymbol{B}$ à la droite de l'assemblage $\boldsymbol{A}$. On désignera par $\vee \boldsymbol{A} \neg \boldsymbol{B}$ l'assemblage obtenu en écrivant de gauche à droite le signe $\vee$, l'assemblage $\boldsymbol{A}$, le signe $\neg$, l'assemblage $\boldsymbol{B}$. Etc.

Soient $\boldsymbol{A}$ un assemblage, et $\boldsymbol{x}$ une lettre. On désignera par $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ l'assemblage obtenu de la manière suivante : on forme l'assemblage $\tau\boldsymbol{A}$, on joint par un lien chaque occurrence de $\boldsymbol{x}$ dans $\boldsymbol{A}$ au τ écrit à la gauche de $\boldsymbol{A}$, et on remplace $\boldsymbol{x}$, en chacune de ses occurrences, par un $\square$. L'assemblage désigné par $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ *ne contient donc pas* $\boldsymbol{x}$.

Exemple. — Le symbole $\tau_x(\in xy)$ représente l'assemblage $\tau \in \square y$.

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des assemblages, et $\boldsymbol{x}$ une lettre. L'assemblage obtenu en remplaçant $\boldsymbol{x}$, en chacune de ses occurrences dans $\boldsymbol{A}$, par l'assemblage $\boldsymbol{B}$, se désigne par $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$ (lire : $\boldsymbol{B}$ remplace $\boldsymbol{x}$ dans $\boldsymbol{A}$). Si $\boldsymbol{x}$ ne figure pas dans $\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$ est donc identique à $\boldsymbol{A}$; en particulier $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{x})\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ est identique à $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$.

Exemple. — Lorsque dans l'assemblage

$$\vee \in xy = xx$$

on remplace x par $\square$, en chacune de ses occurrences, on obtient l'assemblage

$$\vee \in \square y = \square\square.$$

Lorsque, étant donné un assemblage $\boldsymbol{A}$, on s'intéresse particulièrement à une lettre $\boldsymbol{x}$, ou à deux lettres distinctes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ (qui peuvent ou non figurer dans $\boldsymbol{A}$), on écrit souvent $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{x}\}$ ou $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. Dans ce cas, on écrit $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}\}$ au lieu de $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$. On désigne par $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ l'assemblage obtenu en remplaçant *simultanément* $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{y}$ par $\boldsymbol{C}$ en toutes leurs occurrences dans $\boldsymbol{A}$ (on notera que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ peuvent figurer dans $\boldsymbol{B}$ et dans $\boldsymbol{C}$) ; si $\boldsymbol{x}'$ et $\boldsymbol{y}'$ sont des lettres distinctes de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et distinctes entre elles, ne figurant ni dans $\boldsymbol{A}$, ni dans $\boldsymbol{B}$, ni dans $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ n'est autre que $(\boldsymbol{B}\,|\,\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{C}\,|\,\boldsymbol{y}')(\boldsymbol{x}'\,|\,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\,|\,\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}$.

Remarque. — Quand on introduit, par une définition, un symbole abréviateur Σ pour représenter un certain assemblage, on convient (en général de façon tacite) de représenter l'assemblage obtenu par la substitution à une lettre $\boldsymbol{x}$ d'un assemblage $\boldsymbol{B}$ dans l'assemblage initial, par le symbole obtenu en remplaçant la lettre $\boldsymbol{x}$ dans Σ par l'assemblage $\boldsymbol{B}$ (ou plus fréquemment par un symbole abréviateur représentant l'assemblage $\boldsymbol{B}$).

* Par exemple, après avoir précisé quel assemblage représente le symbole $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$, où E et F sont des lettres, — assemblage qui, d'ailleurs, contient d'autres lettres que E et F — on utilisera sans explications le symbole $\mathbf{Z} \otimes \mathrm{F}$. *

Cette règle peut conduire à des confusions qu'on évite par des artifices typographiques variés, dont le plus fréquent consiste à remplacer $\boldsymbol{x}$ par $(\boldsymbol{B})$ au lieu de $\boldsymbol{B}$.

* Par exemple, $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$ désigne un assemblage contenant la lettre N. Si on substitue à N l'assemblage représenté par $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ on obtient un assemblage que l'on désigne par $\mathrm{M} \cap (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q})$. *

2. *Critères de substitution.*

La mathématique formelle ne comporte que des assemblages explicitement écrits. Cependant, même avec l'usage des symboles abréviateurs, un développement de la mathématique strictement conforme à ce principe conduirait à des raisonnements extrêmement longs. Aussi allons-nous établir dans ce Livre des *critères*, concernant des assemblages indéterminés, et dont chacun décrira une fois pour toutes le résultat final d'une succession déterminée de manipulations sur ces assemblages. Ces critères ne sont donc pas théoriquement indispensables ; leur justification appartient à la *métamathématique*.

Le développement de la métamathématique nécessite lui-même pratiquement l'usage de symboles abréviateurs, dont certains ont déjà été indiqués. La plupart de ces symboles seront aussi utilisés en mathématique.

On se servira des critères suivants, appelés *critères de substitution* :

CS1. *Soient* A *et* B *des assemblages,* x *et* x' *des lettres. Si* x' *ne figure pas dans* A, $(B \mid x)A$ *est identique à* $(B \mid x')(x' \mid x)A$.

CS2. *Soient* A, B *et* C *des assemblages,* x *et* y *des lettres distinctes* (*). *Si* y *ne figure pas dans* B, $(B \mid x)(C \mid y)A$ *est identique à* $(C' \mid y)(B \mid x)A$, *où* C' *est l'assemblage* $(B \mid x)C$.

CS3. *Soient* A *un assemblage,* x *et* x' *des lettres. Si* x' *ne figure pas dans* A, $\tau_x(A)$ *est identique à* $\tau_{x'}(A')$, *où* A' *est l'assemblage* $(x' \mid x)A$.

CS4. *Soient* A *et* B *des assemblages,* x *et* y *des lettres distinctes. Si* x *ne figure pas dans* B, $(B \mid y)\tau_x(A)$ *est identique à* $\tau_x(A')$, *où* A' *est l'assemblage* $(B \mid y)A$.

CS5. *Soient* A, B, C *des assemblages,* x *une lettre. Les assemblages* $(C \mid x)(\neg A)$, $(C \mid x)(\vee AB)$, $(C \mid x)(\Rightarrow AB)$, $(C \mid x)(sAB)$ (*s signe spécifique*) *sont identiques respectivement à* $\neg A'$, $\vee A'B'$, $\Rightarrow A'B'$, $sA'B'$, *où* A', B' *sont respectivement* $(C \mid x)A$, $(C \mid x)B$.

Indiquons par exemple le principe de la vérification de CS2. Comparons l'opération qui fait passer de A à $(B \mid x)(C \mid y)A$ à l'opération qui fait passer de A à $(C' \mid y)(B \mid x)A$. Dans les deux

(*) Conformément à ce qui a été signalé au nº 1, la phrase « x et y sont des lettres distinctes » est un abus de langage pour dire que x et y *désignent* des lettres distinctes dans les assemblages que l'on considère.

opérations, aucun signe figurant dans A et distinct de x et de y n'est modifié. A chaque endroit où figure x dans A, on doit substituer B à x dans la première comme dans la seconde opération : c'est évident pour la première, et pour la seconde cela résulte de ce que y ne figure pas dans B. Enfin, à chaque endroit où figure y dans A, la première opération consiste à substituer C à y, puis B à x à chaque endroit où figure x dans C ; mais il est clair que cela revient à substituer à y, à chaque endroit où il figure dans A, l'assemblage $(B \mid x)C$.

3. *Constructions formatives.*

Parmi les signes spécifiques d'une théorie, les uns seront dits *relationnels*, et les autres *substantifiques*. D'autre part, à chaque signe spécifique est associé un nombre entier, appelé son *poids* (pratiquement toujours le nombre 2).

Un assemblage est dit de *première espèce* s'il commence par un τ, ou par un signe substantifique, ou s'il se réduit à une lettre, de *deuxième espèce* dans les autres cas.

Une *construction formative* d'une théorie $\mathcal{T}$ est une suite d'assemblages qui possède la propriété suivante : pour chaque assemblage A de la suite, l'une des conditions ci-dessous est vérifiée :

a) A est une lettre.

b) Il y a, dans la suite, un assemblage de deuxième espèce B précédant A, tel que A soit $\neg B$.

c) Il y a deux assemblages de deuxième espèce B et C précédant A (distincts ou non) tels que A soit $\vee BC$.

d) Il y a un assemblage de deuxième espèce B précédant A et une lettre x tels que A soit $\tau_x(B)$.

e) Il y a un signe spécifique s de poids n (*) de $\mathcal{T}$, et n assemblages de première espèce $A_1, A_2, \ldots, A_n$ précédant A, tels que A soit $sA_1A_2\ldots A_n$.

On appelle *termes* (resp. *relations*) de $\mathcal{T}$ les assemblages de première espèce (resp. de deuxième espèce) *figurant dans les constructions formatives de* $\mathcal{T}$.

(*) Comme il a été dit ci-dessus, on pourrait, pour développer les théories mathématiques actuelles, se borner à ne considérer que des signes spécifiques de poids 2, et par conséquent ne pas utiliser l'expression « nombre entier n » dans la définition d'une construction formative.

Exemple. — * Dans la théorie des ensembles, où $\in$ est un signe relationnel de poids 2, la suite des assemblages que voici est une construction formative :

$$\begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{A}' \\ \mathrm{A}'' \\ \in \mathrm{AA}' \\ \in \mathrm{AA}'' \\ \urcorner \in \mathrm{AA}' \\ \vee \urcorner \in \mathrm{AA}' \in \mathrm{AA}'' \\ \tau \vee \urcorner \in \square\, \mathrm{A}' \in \square\, \mathrm{A}''. \end{array}$$

Donc l'assemblage donné en exemple au nº 1 est un terme de la théorie des ensembles. *

Remarque. — Intuitivement, les termes sont des assemblages qui représentent des *objets*, les relations sont des assemblages qui représentent des *assertions* que l'on peut faire sur des objets. La condition *a*) signifie que les lettres représentent des objets. La condition *b*) signifie que, si $\boldsymbol{B}$ est une assertion, $\urcorner \boldsymbol{B}$, qu'on appelle la *négation* de $\boldsymbol{B}$, est une assertion (qui se lit : non $\boldsymbol{B}$). La condition *c*) signifie que, si $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des assertions, $\vee \boldsymbol{BC}$, qu'on appelle la *disjonction* de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$, est une assertion (qui se lit : $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$) ; ainsi $\Rightarrow \boldsymbol{BC}$ est une assertion (qui se lit : « non $\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{C}$ », ou « $\boldsymbol{B}$ implique $\boldsymbol{C}$ », ou « $\boldsymbol{B}$ entraîne $\boldsymbol{C}$ »). La condition *d*) signifie que, si $\boldsymbol{B}$ est une assertion et $\boldsymbol{x}$ une lettre, $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ est un objet ; considérons l'assertion $\boldsymbol{B}$ comme exprimant une propriété de l'objet $\boldsymbol{x}$; alors, s'il existe un objet possédant la propriété en question, $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ représente un objet privilégié qui possède cette propriété ; sinon, $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ représente un objet dont on ne peut rien dire. Enfin, la condition *e*) signifie que, si $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ sont des objets, et s un signe relationnel (resp. substantifique) de poids n, $s\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n$ est une assertion relative aux objets $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ (resp. un objet dépendant de $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$).

Exemples. — Les symboles $\varnothing$, $\mathbf{N}$, « la droite numérique », « la fonction Γ », $f \circ g$, représentent des termes. Les symboles $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 \in 2$, « tout corps fini est commutatif », « les zéros de $\zeta(s)$ autres que $-2, -4, -6, \ldots$, sont sur la droite $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$ », représentent des relations. Le symbole « 3 et 4 » ne représente ni un terme, ni une relation.

Le signe initial d'une relation est $\vee$, $\urcorner$, ou un signe relationnel ; le signe initial d'un terme est τ ou un signe substantifique, à moins

que le terme ne se réduise à une lettre. En effet, l'assertion relative aux termes résulte de ce qu'un terme est un assemblage de première espèce. Si $\boldsymbol{A}$ est une relation, $\boldsymbol{A}$ figure dans une construction formative, n'est pas une lettre et ne commence pas par un τ ; donc trois cas sont possibles : 1) $\boldsymbol{A}$ est précédé d'un assemblage $\boldsymbol{B}$ tel que $\boldsymbol{A}$ soit $\urcorner \boldsymbol{B}$; 2) $\boldsymbol{A}$ est précédé par deux assemblages $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ tels que $\boldsymbol{A}$ soit $\vee \boldsymbol{BC}$; 3) $\boldsymbol{A}$ est précédé par des assemblages $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ tels que $\boldsymbol{A}$ soit $s\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n$, s étant un signe relationnel.

4. *Critères formatifs.*

CF1. *Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des relations d'une théorie $\mathcal{T}$, $\vee \boldsymbol{AB}$ est une relation de $\mathcal{T}$.*

En effet, considérons deux constructions formatives (de $\mathcal{T}$) dont l'une contient $\boldsymbol{A}$ et l'autre $\boldsymbol{B}$. Considérons la suite d'assemblages obtenue en écrivant d'abord les assemblages de la première construction, puis les assemblages de la deuxième, puis $\vee \boldsymbol{AB}$. Comme $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont de deuxième espèce, on vérifie aussitôt que cette suite est une construction formative de $\mathcal{T}$. L'assemblage $\vee \boldsymbol{AB}$ est de deuxième espèce, donc est une relation de $\mathcal{T}$.

On établit de façon analogue les trois critères suivants :

CF2. *Si $\boldsymbol{A}$ est une relation d'une théorie $\mathcal{T}$, $\urcorner \boldsymbol{A}$ est une relation de $\mathcal{T}$.*

CF3. *Si $\boldsymbol{A}$ est une relation d'une théorie $\mathcal{T}$, et $\boldsymbol{x}$ une lettre, $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ est un terme de $\mathcal{T}$.*

CF4. *Si $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ sont des termes d'une théorie $\mathcal{T}$, et s un signe relationnel* (resp. *substantifique*) *de poids n de $\mathcal{T}$, $s\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\ldots\boldsymbol{A}_n$ est une relation de $\mathcal{T}$* (resp. *un terme de $\mathcal{T}$*).

Ces critères entraînent aussitôt le suivant :

CF5. *Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des relations d'une théorie $\mathcal{T}$, $\Rightarrow \boldsymbol{AB}$ est une relation de $\mathcal{T}$.*

CF6. *Soit $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ une construction formative d'une théorie $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ des lettres. Supposons que $\boldsymbol{y}$ ne figure pas dans les $\boldsymbol{A}_i$. Alors, $(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_1, (\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_2, \ldots, (\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_n$ est une construction formative de $\mathcal{T}$.*

En effet, soit A'_i l'assemblage $(y \mid x)A_i$. Si A_i est une lettre, A'_i est une lettre. Si A_i est de la forme $\neg A_j$, où A_j est un assemblage de deuxième espèce qui précède A_i dans la construction, A'_i est identique à $\neg A'_j$ d'après CS5, et A'_j est un assemblage de deuxième espèce. On raisonne de façon analogue si A_i est de la forme $\vee A_j A_k$ ou $s A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_m}$, s étant un signe spécifique de $\mathcal{T}$. Si enfin A_i est de la forme $\tau_z(A_j)$, où A_j est un assemblage de deuxième espèce précédant A_i dans la construction, plusieurs cas peuvent se présenter :

a) z est une lettre distincte de x et de y ; alors A'_i est identique à $\tau_z(A'_j)$ d'après CS4, et A'_j est un assemblage de deuxième espèce ;

b) z est identique à x : alors A_i ne contient pas x, donc A'_i est identique à A_i, c'est-à-dire à $\tau_x(A_j)$; comme y ne figure pas dans A_j, $\tau_x(A_j)$ est identique à $\tau_y(A'_j)$ d'après CS3 ;

c) z est identique à y : alors A_i est l'assemblage τA_j puisque y ne figure pas dans A_j ; donc A'_i est l'assemblage $\tau A'_j$, c'est-à-dire $\tau_u(A'_j)$, u étant une lettre qui ne figure pas dans A'_j.

CF7. *Soient A une relation* (resp. *un terme*) *d'une théorie $\mathcal{T}$, x et y des lettres. Alors $(y \mid x)A$ est une relation* (resp. *un terme*) *de $\mathcal{T}$.*

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une construction formative où figure A. Montrons de proche en proche que, si A_i est une relation (resp. un terme), $(y \mid x)A_i$, que nous désignerons par A'_i, est une relation (resp. un terme). Supposons ce point établi pour $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ et établissons-le pour A_i. Si A_i est une lettre, A'_i est une lettre. Si A_i est précédé dans la construction par une relation A_j telle que A_i soit $\neg A_j$, A'_i est identique à $\neg A'_j$, d'après CS5, et $\neg A'_j$ est une relation d'après CF2. On procède de façon analogue si A_i est précédé par des relations A_j, A_k telles que A_i soit $\vee A_j A_k$, ou par des termes $A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}$ tels que A_i soit $s A_{j_1} \ldots A_{j_m}$, où s est un signe spécifique de $\mathcal{T}$ de poids m. Si enfin A_i est précédé par une relation A_j telle que A_i soit $\tau_z(A_j)$, plusieurs cas peuvent se présenter :

a) z est distinct de x et de y : alors A'_i est identique à $\tau_z(A'_j)$ d'après CS4, et on sait déjà que A'_j est une relation, donc A'_i est un terme d'après CF3 ;

b) z est identique à x : alors A_i ne contient pas x, donc A'_i est identique à A_i, et par suite est un terme ;

c) z est identique à y. Soit alors u une lettre distincte de x et de y, et qui ne figure pas dans $A_1, A_2, \ldots, A_j$; d'après CF6, la suite d'assemblages $(u \mid y)A_1, \ldots, (u \mid y)A_j$, que nous désignerons par $A''_1, \ldots, A''_j$, constitue une construction formative de $\mathcal{T}$; comme y ne figure plus dans cette nouvelle construction, $(y \mid x)A''_1, \ldots, (y \mid x)A''_j$ est une construction formative en vertu de CF6, de sorte que $(y \mid x)A''_j$ est une relation de $\mathcal{T}$; par suite, $\tau_u((y \mid x)A''_j)$ est un terme de $\mathcal{T}$. Mais ce terme est identique à $(y \mid x)\tau_u(A''_j)$ d'après CS4, donc à $(y \mid x)\tau_y(A_j)$ d'après CS3, donc à A'_i.

CF8. *Soient A une relation* (resp. *un terme*) *d'une théorie $\mathcal{T}$, x une lettre et T un terme de $\mathcal{T}$. Alors $(T \mid x)A$ est une relation* (resp. *un terme*) *de $\mathcal{T}$.*

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une construction formative où figure A. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les lettres distinctes qui figurent dans T. Associons à chaque lettre x_i une lettre x'_i distincte de $x_1, \ldots, x_p$ et des lettres figurant dans $A_1, \ldots, A_n$, de façon que les lettres $x'_1, \ldots, x'_p$ soient deux à deux distinctes. L'assemblage $(x'_1 \mid x_1)(x'_2 \mid x_2) \ldots (x'_p \mid x_p)T$ est un terme T' d'après CF7, et $(T \mid x)A$ est identique à

$$(x_1 \mid x'_1)(x_2 \mid x'_2) \ldots (x_p \mid x'_p)(T' \mid x)A$$

par application de CS1. Il suffit donc de montrer que $(T' \mid x)A$ est une relation (resp. un terme) ; autrement dit, on peut supposer désormais que les lettres qui figurent dans T ne figurent pas dans $A_1, \ldots, A_n$.

Montrons alors de proche en proche que, si A_i est une relation (resp. un terme), $(T \mid x)A_i$, que nous désignerons par A'_i, est une relation (resp. un terme). Supposons ce point établi pour $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ et établissons-le pour A_i. Si A_i est une lettre, A'_i est, soit cette lettre, soit T, donc un terme. Si A_i est de la forme $\neg A_j$, A_j étant une relation qui précède A_i dans la construction, A'_i est identique à $\neg A'_j$ d'après CS5, et on sait déjà que A'_j est une relation, donc A'_i est une relation d'après CF2. On procède de façon analogue si A_i est de la forme $\vee A_j A_k$, ou $s A_{j_1} \ldots A_{j_m}$. Si enfin A_i est de la forme $\tau_z(A_j)$, où A_j est une relation qui précède A_i dans la construction, plusieurs cas peuvent se présenter :

a) z est distinct de x et des lettres figurant dans T ; alors A'_i est identique à $\tau_z(A'_j)$ d'après CS4, et on sait déjà que A'_j est une relation ; donc A'_i est un terme d'après CF3 ;

b) z est identique à x : alors A_i ne contient pas x, donc A'_i est identique à A_i, et est par suite un terme ;

c) z figure dans T ; alors z ne figure pas dans A_j, de sorte que A_i

est identique à τA_j, donc A'_i à $\tau A'_j$; or, on sait déjà que A'_j est une relation, et $\tau A'_j$ est identique à $\tau_u(A'_j)$, u étant une lettre qui ne figure pas dans A'_j ; il en résulte que A'_i est un terme d'après CF3.

Intuitivement, si A est une relation de $\mathcal{T}$, que nous pouvons considérer comme exprimant une propriété de l'objet x, affirmer $(B \mid x)A$ revient à dire que l'objet B possède cette propriété. Si A est un terme de $\mathcal{T}$, il représente un objet qui dépend d'une certaine manière de l'objet désigné par x ; le terme $(B \mid x)A$ représente ce que devient l'objet A quand on prend pour x l'objet B.

Exercices. — 1) Soit $\mathcal{T}$ une théorie sans signe spécifique. Aucun assemblage de $\mathcal{T}$ n'est une relation. Les seuls assemblages de $\mathcal{T}$ qui soient des termes sont les assemblages réduits à une lettre.

2) Soit A un terme ou une relation d'une théorie $\mathcal{T}$. Montrer que chaque signe $\square$, s'il y en a, est lié à un seul signe τ, situé à sa gauche. Montrer que chaque signe τ, s'il y en a, est, ou bien non lié, ou bien lié à certains signes $\square$ situés à sa droite. Aucun autre signe n'est lié.

3) Soit A un terme ou une relation d'une théorie $\mathcal{T}$. Montrer que chaque signe spécifique, s'il y en a, est suivi par un $\square$, ou par un τ, ou par une lettre, ou par un signe substantifique.

¶ 4) Soient A un terme ou une relation d'une théorie $\mathcal{T}$, B un assemblage de $\mathcal{T}$. Montrer que AB n'est ni un terme, ni une relation de $\mathcal{T}$. (Raisonner par récurrence sur le nombre de signes de A).

5) Soient A un assemblage d'une théorie $\mathcal{T}$, x une lettre. Si $\tau_x(A)$ est un terme de $\mathcal{T}$, A est une relation de $\mathcal{T}$.

6) Soient A et B des assemblages d'une théorie $\mathcal{T}$. Si A et $\Rightarrow AB$ sont des relations de $\mathcal{T}$, B est une relation de $\mathcal{T}$ (utiliser l'exerc. 4).

§ 2. — Théorèmes.

Pour faciliter la lecture de ce qui suit, nous écrirons désormais, si A *est une relation,* non(A) *au lieu de* $\neg A$. *Si* A *et* B *sont des relations, nous écrirons* « (A) ou (B) » *au lieu de* $\vee AB$, *et* $(A) \Rightarrow (B)$ *au lieu de* $\Rightarrow AB$. *Parfois, nous supprimerons les parenthèses. Le lecteur pourra déterminer sans peine, dans chaque cas, de quel assemblage il s'agit.*

1. *Axiomes.*

La donnée des signes spécifiques définit, nous l'avons vu, les termes et les relations d'une théorie $\mathcal{T}$. Pour achever de construire $\mathcal{T}$, on fait ce qui suit :

1° On écrit d'abord un certain nombre de relations de $\mathcal{T}$; on dit que ce sont les *axiomes explicites* de $\mathcal{T}$; les lettres qui figurent dans les axiomes explicites sont appelées les *constantes* de $\mathcal{T}$.

2° On se donne une ou plusieurs règles (*), qu'on appelle les *schémas* de $\mathcal{T}$, et qui doivent présenter les particularités suivantes : *a*) l'application d'une telle règle $\mathfrak{R}$ fournit une relation de $\mathcal{T}$; *b*) si T est un terme de $\mathcal{T}$, x une lettre, R une relation de $\mathcal{T}$ construite par application du schéma $\mathfrak{R}$, la relation $(T \mid x)R$ peut encore se construire par application de $\mathfrak{R}$.

Dans tous les cas que nous envisagerons, la vérification de ces conditions sera toujours facile.

Toute relation, formée par application d'un schéma de $\mathcal{T}$, est appelée *axiome implicite* de $\mathcal{T}$.

Intuitivement, les axiomes représentent, soit des assertions évidentes, soit des hypothèses dont on s'apprête à tirer des conséquences ; les constantes représentent des objets bien déterminés, pour lesquels les propriétés exprimées par les axiomes explicites sont supposées vraies. Au contraire, si la lettre x n'est pas une constante, elle représente un objet complètement indéterminé ; si une propriété de l'objet x est supposée vraie par un axiome, cet axiome est nécessairement implicite, de sorte que la propriété est encore vraie d'un objet T quelconque.

2. *Démonstrations.*

Un *texte démonstratif* d'une théorie $\mathcal{T}$ comporte :

1° Une construction formative auxiliaire de relations et de termes de $\mathcal{T}$.

2° Une *démonstration de* $\mathcal{T}$, c'est-à-dire une suite de relations de $\mathcal{T}$ figurant dans la construction formative auxiliaire, telles que, pour chaque relation R de la suite, l'une au moins des conditions suivantes soit vérifiée :

a_1) R est un axiome explicite de $\mathcal{T}$;

a_2) R résulte de l'application d'un schéma de $\mathcal{T}$ à des termes ou relations figurant dans la construction formative auxiliaire ;

(*) Ces règles seront exprimées en utilisant, pour abréger, les symboles dont nous avons parlé au § 1, n° 1 (et notamment les lettres italiques grasses) ; mais il serait facile de se passer complètement de l'emploi de ces symboles pour les formuler (voir § 3, n° 1, note (*) de la p. 25).

b) il y a dans la suite deux relations S, T précédant R, telles que T soit $S \Rightarrow R$.

Un *théorème* de $\mathcal{T}$ est une relation *figurant dans une démonstration de* $\mathcal{T}$.

Cette notion est donc essentiellement relative à l'état de la théorie considérée, au moment où on la décrit : une relation d'une théorie $\mathcal{T}$ *devient* un théorème de $\mathcal{T}$ lorsqu'on a réussi à l'insérer dans une démonstration de $\mathcal{T}$. Dire qu'une relation de $\mathcal{T}$ « n'est pas un théorème de $\mathcal{T}$ » ne peut avoir de sens si on ne précise pas le stage du développement de $\mathcal{T}$ auquel on se réfère.

Au lieu de « théorème de $\mathcal{T}$ », on dit aussi « relation *vraie* dans $\mathcal{T}$ » (ou « proposition », « lemme », « corollaire », etc.). Soit R une relation de $\mathcal{T}$, x une lettre, T un terme de $\mathcal{T}$; si $(T \mid x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que T *vérifie dans* $\mathcal{T}$ *la relation* R (ou est une *solution de* R), quand R est considérée comme relation en x.

Dans les mathématiques courantes, on omet le plus souvent de préciser que les relations écrites constituent une démonstration.

Une relation est dite *fausse* dans $\mathcal{T}$ si sa négation est un théorème de $\mathcal{T}$. On dit qu'une théorie $\mathcal{T}$ est *contradictoire* quand on a écrit une relation qui est à la fois vraie et fausse dans $\mathcal{T}$.

Ici encore, il s'agit bien entendu d'une notion relative à un stage déterminé du développement d'une théorie. On se gardera de la confusion (malheureusement suggérée par le sens intuitif du mot « faux ») qui consisterait à croire que, lorsqu'on a prouvé qu'une relation R est fausse dans $\mathcal{T}$, on a par là même établi que R « n'est pas vraie » dans $\mathcal{T}$ (cette dernière phrase n'ayant à proprement parler aucun sens précis *en Mathématique*, comme on l'a vu plus haut).

Nous donnerons dans ce qui suit des critères métamathématiques dits *critères déductifs*, qui permettent d'abréger les démonstrations. Ces critères seront désignés par la lettre C suivie d'un numéro.

C1 (*syllogisme*). *Soient* A *et* B *des relations d'une théorie* $\mathcal{T}$. *Si* A *et* $A \Rightarrow B$ *sont des théorèmes de* $\mathcal{T}$, B *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, soit $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure A, et $S_1, S_2, \ldots, S_p$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure $A \Rightarrow B$. Il est évident que $R_1, R_2, \ldots, R_n, S_1, S_2, \ldots, S_p$ est une démonstration de $\mathcal{T}$ où figurent A et $A \Rightarrow B$. Donc

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, S_1, S_2, \ldots, S_p, B$$

est une démonstration de $\mathcal{T}$, ce qui prouve que B est un théorème de $\mathcal{T}$.

3. *Substitutions dans une théorie.*

Soient $\mathcal{T}$ une théorie, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ses axiomes explicites, x une lettre, T un terme de $\mathcal{T}$. Soit $(T \mid x)\mathcal{T}$ la théorie dont les signes et les schémas sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}$, et dont les axiomes explicites sont $(T \mid x)A_1, (T \mid x)A_2, \ldots, (T \mid x)A_n$.

C2. *Soient* A *un théorème d'une théorie* $\mathcal{T}$, T *un terme de* $\mathcal{T}$, x *une lettre. Alors* $(T \mid x)A$ *est un théorème de* $(T \mid x)\mathcal{T}$.

En effet, soit $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$ où figure A. Considérons la suite $(T \mid x)R_1, (T \mid x)R_2, \ldots, (T \mid x)R_n$, qui est une suite de relations de $\mathcal{T}$ d'après CF8 (§ 1, n° 4). On va voir que c'est une démonstration de $(T \mid x)\mathcal{T}$, ce qui établira le critère. Si R_k est un axiome implicite de $\mathcal{T}$, $(T \mid x)R_k$ est encore un axiome implicite de $\mathcal{T}$ (n° 1), donc de $(T \mid x)\mathcal{T}$. Si R_k est un axiome explicite de $\mathcal{T}$, $(T \mid x)R_k$ est un axiome explicite de $(T \mid x)\mathcal{T}$. Enfin, si R_k est précédée des relations R_i et R_j, R_j étant $R_i \Rightarrow R_k$, $(T \mid x)R_k$ est précédée de $(T \mid x)R_i$ et de $(T \mid x)R_j$, et cette dernière relation est identique à $(T \mid x)R_i \Rightarrow (T \mid x)R_k$ (critère CS5).

C3. *Soient* A *un théorème d'une théorie* $\mathcal{T}$, T *un terme de* $\mathcal{T}$, *et* x *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$. *Alors* $(T \mid x)A$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

Cela résulte aussitôt de C2, puisque x ne figure pas dans les axiomes explicites de $\mathcal{T}$.

Plus particulièrement, si $\mathcal{T}$ ne comporte pas d'axiomes explicites, ou si les axiomes explicites ne contiennent pas de lettres, le critère C3 s'applique sans restriction sur la lettre x.

4. *Comparaison des théories.*

Une théorie $\mathcal{T}'$ est dite *plus forte* qu'une théorie $\mathcal{T}$ si tous les signes de $\mathcal{T}$ sont des signes de $\mathcal{T}'$, si tous les axiomes explicites de $\mathcal{T}$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$, et si les schémas de $\mathcal{T}$ sont des schémas de $\mathcal{T}'$.

C4. *Si une théorie $\mathcal{T}'$ est plus forte qu'une théorie $\mathcal{T}$, tous les théorèmes de $\mathcal{T}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$.*

Soit $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une démonstration de $\mathcal{T}$. On va voir de proche en proche que chaque R_i est un théorème de $\mathcal{T}'$, ce qui établira le critère. Supposons notre assertion établie pour les relations précédant R_k et établissons-la pour R_k. Si R_k est un axiome de $\mathcal{T}$, c'est un théorème de $\mathcal{T}'$ par hypothèse. Si R_k est précédée par des relations R_i et $R_i \Rightarrow R_k$, on sait déjà que R_i et $R_i \Rightarrow R_k$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$, donc R_k est un théorème de $\mathcal{T}'$ d'après C1.

Si chacune des deux théories $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est plus forte que l'autre, on dit que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont *équivalentes*. Alors, tout théorème de $\mathcal{T}$ est un théorème de $\mathcal{T}'$ et vice-versa.

C5. *Soient $\mathcal{T}$ une théorie, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ses axiomes explicites, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ ses constantes, $T_1, T_2, \ldots, T_h$ des termes de $\mathcal{T}$. Supposons que $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)A_i$ (pour $i = 1, 2, \ldots, n$) soient des théorèmes d'une théorie $\mathcal{T}'$, que les signes de $\mathcal{T}$ soient des signes de $\mathcal{T}'$, et que les schémas de $\mathcal{T}$ soient des schémas de $\mathcal{T}'$. Alors, si A est un théorème de $\mathcal{T}$, $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$ est un théorème de $\mathcal{T}'$.*

En effet, $\mathcal{T}'$ est plus forte que la théorie $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)\mathcal{T}$, et il suffit d'appliquer C2 et C4.

Quand on déduit, par ce procédé, un théorème de $\mathcal{T}'$ d'un théorème de $\mathcal{T}$, on dit qu'*on applique dans $\mathcal{T}'$ les résultats de $\mathcal{T}$*. Intuitivement, les axiomes de $\mathcal{T}$ expriment des propriétés de $a_1, a_2, \ldots, a_h$, et A exprime une propriété qui est une conséquence de ces axiomes. Si des objets $T_1, T_2, \ldots, T_h$ possèdent dans $\mathcal{T}'$ les propriétés exprimées par les axiomes de $\mathcal{T}$, ils possèdent aussi la propriété A.

* Par exemple, dans la théorie des groupes $\mathcal{T}$, les axiomes explicites contiennent deux constantes G et μ (le groupe et la loi de composition). Dans la théorie des ensembles $\mathcal{T}'$, on définit deux termes : la droite numérique et l'addition des nombres réels. Si on substitue ces termes respectivement à G et μ dans les axiomes explicites de $\mathcal{T}$, on obtient des théorèmes de $\mathcal{T}'$. D'autre part, les schémas et les signes de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont les mêmes. On peut donc « appliquer à l'addition des nombres réels les résultats de la théorie des groupes ». On dit qu'on a construit pour la théorie des groupes un *modèle* dans la théorie des ensembles. (On observera que, la théorie des groupes étant plus forte que la théorie des ensembles, on peut aussi appliquer à la théorie des groupes les résultats de la théorie des ensembles). *

Remarque. — Sous les hypothèses de C5, si la théorie $\mathcal{T}$ s'avérait contradictoire, il en serait de même de $\mathcal{T}'$. En effet, si A et « non A » sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$, et non$(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$. * Par exemple, si la théorie des groupes était contradictoire, la théorie des ensembles le serait aussi. *

Exercice. — Soient $\mathcal{T}$ une théorie, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ses axiomes explicites, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ ses constantes.

a) Soit $\mathcal{T}'$ la théorie dont les signes et les schémas sont ceux de $\mathcal{T}$, et dont les axiomes explicites sont $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. On dit que A_n est *indépendant* des autres axiomes de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T}'$ n'est pas équivalente à $\mathcal{T}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que A_n ne soit pas un théorème de $\mathcal{T}'$.

b) Soit $\mathcal{T}''$ une théorie dont les signes et les schémas sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}$. Soient $T_1, T_2, \ldots, T_h$ des termes de $\mathcal{T}$ tels que $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)A_i$ soit un théorème de $\mathcal{T}''$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et tels que non$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)A_n$ soit un théorème de $\mathcal{T}''$. Alors A_n est indépendant des autres axiomes de $\mathcal{T}$, ou $\mathcal{T}''$ est contradictoire.

§ 3. — Théories logiques.

1. *Les axiomes.*

On appelle *théorie logique* toute théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle les schémas S1 à S4 ci-dessous fournissent des axiomes implicites.

S1. *Si A est une relation de $\mathcal{T}$, la relation $(A$ ou $A) \Rightarrow A$ est un axiome de $\mathcal{T}$* (*).

S2. *Si A et B sont des relations de $\mathcal{T}$, la relation $A \Rightarrow (A$ ou $B)$ est un axiome de $\mathcal{T}$.*

(*) L'expression de ce schéma n'utilisant pas la lettre A ni le symbole abréviateur $\Rightarrow$ est la suivante : *Lorsqu'on a une relation, on obtient un théorème en écrivant de gauche à droite* $\vee$, $\neg$, $\vee$, *puis trois fois de suite la relation donnée.* Le lecteur pourra s'exercer à traduire de même l'expression des autres schémas.

S3. *Si* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *sont des relations de* $\mathcal{T}$, *la relation* $(\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}) \Rightarrow (\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{A})$ *est un axiome de* $\mathcal{T}$.

S4. *Si* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{C}$ *sont des relations de* $\mathcal{T}$, *la relation*

$$(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Rightarrow ((\boldsymbol{C} \text{ ou } \boldsymbol{A}) \Rightarrow (\boldsymbol{C} \text{ ou } \boldsymbol{B}))$$

est un axiome de $\mathcal{T}$.

Ces règles sont effectivement des schémas ; vérifions-le par exemple pour S2. Soit $\boldsymbol{R}$ une relation obtenue par application de S2 : il y a donc des relations $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ de $\mathcal{T}$ telles que $\boldsymbol{R}$ soit la relation $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B})$; soient $\boldsymbol{T}$ un terme de $\mathcal{T}$ et x une lettre ; soient $\boldsymbol{A}'$ et $\boldsymbol{B}'$ les relations $(\boldsymbol{T}|\overline{x})\boldsymbol{A}$ et $(\boldsymbol{T}|\,x)\boldsymbol{B}$; alors $(\boldsymbol{T}|\,x)\boldsymbol{R}$ est identique à $\boldsymbol{A}' \Rightarrow (\boldsymbol{A}'$ ou $\boldsymbol{B}')$, donc s'obtient par application de S2.

Intuitivement, les règles S1 à S4 ne font qu'exprimer le sens qu'on attache aux mots « ou » et « implique » dans le langage mathématique usuel (*).

Si une théorie logique $\mathcal{T}$ est contradictoire, *toute relation de* $\mathcal{T}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$. En effet, soit $\boldsymbol{A}$ une relation de $\mathcal{T}$ telle que $\boldsymbol{A}$ et « non $\overline{\boldsymbol{A}}$ » soient des théorèmes de $\mathcal{T}$, et soit $\boldsymbol{B}$ une relation quelconque de $\mathcal{T}$. D'après S2, (non $\boldsymbol{A}) \Rightarrow ((\text{non } \boldsymbol{A})$ ou $\boldsymbol{B})$ est un théorème de $\mathcal{T}$, donc, d'après C1 (§ 2, n° 2) « (non $\boldsymbol{A}$) ou $\boldsymbol{B}$ », c'est-à-dire $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, est un théorème de $\mathcal{T}$. Une nouvelle application de C1 montre que $\boldsymbol{B}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Dans toute la suite, $\mathcal{T}$ *désignera une théorie logique.*

2. *Premières conséquences.*

C6. *Soient* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *des relations de* $\mathcal{T}$. *Si* $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ *sont des théorèmes de* $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, $(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}) \Rightarrow ((\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Rightarrow (\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}))$ est un axiome de $\mathcal{T}$, d'après S4 où on remplace $\boldsymbol{A}$ par $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}$ par $\boldsymbol{C}$, et $\boldsymbol{C}$ par « non $\boldsymbol{A}$ ». D'après C1 (§ 2, n° 2), $(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Rightarrow (\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C})$ est un théorème de $\mathcal{T}$. On conclut par une nouvelle application de C1.

(*) Dans le langage courant, le mot « ou » peut avoir deux sens distincts suivant le contexte : lorsqu'on relie deux affirmations par le mot « ou », on peut vouloir affirmer, soit l'une au moins des deux (et éventuellement toutes les deux à la fois), soit l'une à l'exclusion de l'autre.

C7. *Si* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *sont des relations de* $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B})$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, $\boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{A})$, et $(\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{A}) \Rightarrow (\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B})$ sont des axiomes de $\mathcal{T}$ d'après S2 et S3. On conclut par application de C6.

C8. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une relation de* $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, $\boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{A})$, et $(\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{A}) \Rightarrow \boldsymbol{A}$ sont des axiomes d'après S2 et S1. On conclut par application de C6.

C9. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une relation, et* $\boldsymbol{B}$ *un théorème de* $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, $\boldsymbol{B} \Rightarrow ((\text{non } \boldsymbol{A})$ ou $\boldsymbol{B})$ est un théorème d'après C7, donc « (non $\boldsymbol{A}$) ou $\boldsymbol{B}$ », c'est-à-dire $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, est un théorème d'après C1.

C10. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une relation de* $\mathcal{T}$, « $\boldsymbol{A}$ ou (non $\boldsymbol{A}$) » *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, « (non $\boldsymbol{A}$) ou $\boldsymbol{A}$ » est un théorème d'après C8. On conclut par S3 et C1.

C11. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est une relation de* $\mathcal{T}$, « $\boldsymbol{A} \Rightarrow$ (non non $\boldsymbol{A}$) » *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, cette relation n'est autre que « (non $\boldsymbol{A}$) ou (non non $\boldsymbol{A}$) » et le critère résulte de C10.

C12. *Soient* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *deux relations de* $\mathcal{T}$. *La relation*

$$(\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}) \Rightarrow ((\text{non } \boldsymbol{B}) \Rightarrow (\text{non } \boldsymbol{A}))$$

est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet,

$$((\text{non } \boldsymbol{A}) \text{ ou } \boldsymbol{B}) \Rightarrow ((\text{non } \boldsymbol{A}) \text{ ou } (\text{non non } \boldsymbol{B}))$$

est un théorème d'après C11, S4 et C1. D'autre part,

$$((\text{non } \boldsymbol{A}) \text{ ou } (\text{non non } \boldsymbol{B})) \Rightarrow ((\text{non non } \boldsymbol{B}) \text{ ou } (\text{non } \boldsymbol{A}))$$

est un axiome d'après S3. Donc

$$((\text{non } \boldsymbol{A}) \text{ ou } \boldsymbol{B}) \Rightarrow ((\text{non non } \boldsymbol{B}) \text{ ou } (\text{non } \boldsymbol{A}))$$

est un théorème d'après C6. Or, c'est la relation à établir.

C13. *Soient* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *des relations de* $\mathcal{T}$. *Si* $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$, $(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{C}) \Rightarrow (\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C})$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, (non $\boldsymbol{B}) \Rightarrow$ (non $\boldsymbol{A}$) est un théorème d'après C12 et C1. Donc $(\boldsymbol{C}$ ou (non $\boldsymbol{B})) \Rightarrow (\boldsymbol{C}$ ou (non $\boldsymbol{A}))$ est un théorème d'après S4 et C1. Par double application de S3 et de C6, on en conclut que ((non B) ou C) $\Rightarrow$ ((non A) ou C) est un théorème. Or, ceci est la relation à démontrer.

Désormais, nous emploierons le plus souvent les règles C1 *et* C6 *sans nous y référer explicitement.*

3. Méthodes de démonstration.

I. *Méthode de l'hypothèse auxiliaire.* — Elle repose sur la règle suivante :

C14 (*critère de la déduction*). *Soient* A *une relation de* $\mathcal{T}$, *et* $\mathcal{T}'$ *la théorie obtenue en adjoignant* A *aux axiomes de* $\mathcal{T}$. *Si* B *est un théorème de* $\mathcal{T}'$, $A \Rightarrow B$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ une démonstration de $\mathcal{T}'$ dans laquelle figure B. Nous allons montrer de proche en proche que les relations $A \Rightarrow B_k$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Supposons ceci établi pour les relations qui précèdent B_i, et prouvons que $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si B_i est un axiome de $\mathcal{T}'$, B_i est, soit un axiome de $\mathcal{T}$, soit A. Dans les deux cas, $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$, par application de C9 ou de C8. Si B_i est précédée des relations B_j et $B_j \Rightarrow B_i$, on sait que $A \Rightarrow B_j$ et $A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Alors $(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C13. Donc, d'après C6, $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$, c'est-à-dire « (non A) ou $(A \Rightarrow B_i)$ » est un théorème de $\mathcal{T}$, et par suite aussi « $(A \Rightarrow B_i)$ ou (non A) » d'après S3. Or, (non A) $\Rightarrow$ ((non A) ou B_i), c'est-à-dire (non A) $\Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après S2. Par application de S4, on voit que

$$((A \Rightarrow B_i) \text{ ou } (\text{non } A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \text{ ou } (A \Rightarrow B_i))$$

est un théorème de $\mathcal{T}$, donc que « $(A \Rightarrow B_i)$ ou $(A \Rightarrow B_i)$ » est un théorème de $\mathcal{T}$. Par S1, on conclut que $A \Rightarrow B_i$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En pratique, on indique qu'on va employer ce critère par une phrase du genre suivant : « Supposons que A soit vraie ». Cette phrase signifie qu'on va raisonner pour un moment dans la théorie $\mathcal{T}'$. On reste dans $\mathcal{T}'$ jusqu'à ce que l'on y ait démontré la relation B. Ceci fait, il est établi que $A \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$, et on continue (s'il y a lieu) à raisonner dans $\mathcal{T}$ sans indiquer en général qu'on abandonne $\mathcal{T}'$. La relation A que l'on a introduite comme nouvel axiome s'appelle l'*hypothèse auxiliaire.* * Par exemple, quand on dit : « Soit x un nombre réel », on construit une théorie dans laquelle la relation « x est un nombre réel » est une hypothèse auxiliaire. *

II. *Méthode de réduction à l'absurde.* — Elle repose sur la règle suivante :

C15. *Soient* A *une relation de* $\mathcal{T}$, *et* $\mathcal{T}'$ *la théorie obtenue en adjoignant l'axiome* « non A » *aux axiomes de* $\mathcal{T}$. *Si* $\mathcal{T}'$ *est contradictoire,* A *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, A est un théorème de $\mathcal{T}'$. Par suite (méthode de l'hypothèse auxiliaire), (non A) $\Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$. D'après S4, (A ou (non A)) $\Rightarrow$ (A ou A) est un théorème de $\mathcal{T}$. D'après C10, « A ou A » est un théorème de $\mathcal{T}$. On conclut par application de S1.

En pratique, on indique qu'on va employer ce critère par une phrase du genre suivant : « Supposons que A soit fausse ». Cette phrase signifie qu'on va raisonner pour un moment dans $\mathcal{T}'$. On reste dans $\mathcal{T}'$ jusqu'à ce que l'on ait établi deux théorèmes de la forme B et « non B ». Ceci fait, il est établi que A est un théorème de $\mathcal{T}$, ce qu'on indique en général par une phrase du genre suivant : « Or ceci (à savoir, dans les notations précédentes, B et « non B ») est absurde ; donc A est vrai ». On revient alors à la théorie $\mathcal{T}$ dont on s'occupait précédemment.

Comme premières applications de ces méthodes, démontrons les critères suivants :

C16. *Si* A *est une relation de* $\mathcal{T}$, (non non A) $\Rightarrow A$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, supposons « non non A » vraie ; il faut prouver A. Supposons A fausse. Dans la théorie ainsi fondée, « non non A » et « non A » sont des théorèmes. Ceci est absurde ; donc A est vraie.

C17. *Si* A *et* B *sont des relations de* $\mathcal{T}$,

$$((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, supposons (non B) $\Rightarrow$ (non A) vraie. Il faut prouver que $A \Rightarrow B$ est vraie. Or, supposons A vraie et prouvons que B est vraie. Supposons « non B » vraie. Alors, « non A » est vraie, ce qui est absurde.

III. *Méthode de disjonction des cas.* — Elle repose sur la règle suivante :

C18. *Soient* A, B, C *des relations de* $\mathcal{T}$. *Si* « A ou B », $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow C$ *sont des théorèmes de* $\mathcal{T}$, *alors* C *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, d'après S4, (A ou B) $\Rightarrow$ (A ou C), et (C ou A) $\Rightarrow$ (C ou C) sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Compte tenu de S3 et S1, (A ou B) $\Rightarrow C$ est un théorème de $\mathcal{T}$; d'où la règle.

Pour démontrer C, il suffit donc, quand on dispose d'un théorème « A ou B », de démontrer C en adjoignant A aux axiomes de $\mathcal{T}$, puis de démontrer C en adjoignant B aux axiomes de $\mathcal{T}$. L'intérêt de cette méthode provient du fait que, si « A ou B » est vraie, rien ne permet en général d'affirmer que l'une des relations A, B soit vraie.

En particulier, d'après C10, si $A \Rightarrow C$, et (non A) $\Rightarrow C$, sont toutes deux des théorèmes de $\mathcal{T}$, C est un théorème de $\mathcal{T}$.

IV. *Méthode de la constante auxiliaire.* — Elle repose sur la règle suivante :

C19. *Soient* x *une lettre,* A *et* B *des relations de* $\mathcal{T}$ *telles que* :

1° *La lettre* x *n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$ *et ne figure pas dans* B.

2° *On connaît un terme* T *de* $\mathcal{T}$ *tel que* $(T \mid x)A$ *soit un théorème de* $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}'$ *la théorie obtenue en adjoignant* A *aux axiomes de* $\mathcal{T}$. *Si* B *est un théorème de* $\mathcal{T}'$, B *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

En effet, $A \Rightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$ (critère de la déduction). Puisque x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, $(T \mid x)(A \Rightarrow B)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C3. Comme x ne figure pas dans B, $(T \mid x)(A \Rightarrow B)$ est identique, d'après CS5 (§ 1, n° 2), à $((T \mid x)A) \Rightarrow B$. Enfin, $(T \mid x)A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, donc aussi B.

Intuitivement, la méthode consiste à utiliser, pour démontrer B, un objet arbitraire x (la *constante auxiliaire*) qu'on suppose doué de certaines propriétés qui sont exprimées par A. * Par exemple, dans une démonstration de géométrie où il s'agit, entre autres choses, d'une droite D, on peut « prendre » un point x sur cette droite ; la relation A est alors $x \in \mathrm{D}$. * Pour qu'on puisse se servir, au cours d'une démonstration, d'un objet doué de certaines propriétés, il faut évidemment qu'il existe de tels objets. Le théorème $(T \mid x)A$, dit *théorème de légitimation*, garantit cette existence.

En pratique, on indique qu'on va utiliser cette méthode par une phrase du genre suivant : « Soit x un objet tel que A ». Contrairement à ce qui se passe dans la méthode de l'hypothèse auxiliaire, la conclusion du raisonnement ne concerne pas x.

4. La conjonction.

Soient A, B des assemblages. L'assemblage

non((non A) ou (non B))

sera désigné par « A et B ».

CS6. *Soient* A, B, T *des assemblages,* x *une lettre. L'assemblage* $(T \mid x)$(A et B) *est identique à* « $(T \mid x)A$ et $(T \mid x)B$ ».

Ceci résulte aussitôt de CS5 (§ 1, n° 2).

CF9. *Si* A, B *sont des relations de* $\mathcal{T}$, « A et B » *est une relation de* $\mathcal{T}$ (appelée *conjonction* de A et de B).

Ceci résulte aussitôt de CF1 et CF2 (§ 1, n° 4).

C20. *Si* A, B *sont des théorèmes de* $\mathcal{T}$, « A et B » *est un théorème de* $\mathcal{T}$.

Supposons « A et B » fausse, c'est-à-dire

non non ((non A) ou (non B))

vraie. D'après C16, « (non A) ou (non B) », c'est-à-dire $A \Rightarrow$ (non B), est vraie, donc « non B » est vraie. Or, ceci est absurde. Donc « A et B » est vraie.

C21. *Si* A, B *sont des relations de* $\mathcal{T}$, (A et B) $\Rightarrow A$, (A et B) $\Rightarrow B$ *sont des théorèmes de* $\mathcal{T}$.

En effet, les relations (non A) $\Rightarrow$ ((non A) ou (non B)), (non B) $\Rightarrow$ ((non A) ou (non B)) sont des théorèmes de $\mathcal{T}$ d'après S2 et C7. Or, ((non A) ou (non B)) $\Rightarrow$ non(A et B) est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C11. Donc, (non A) $\Rightarrow$ non(A et B), (non B) $\Rightarrow$ non(A et B) sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. On conclut par application de C17.

On convient de désigner par « A et B et C » (resp. « A ou B ou C ») la relation « A et (B et C) » (resp. « A ou (B ou C) »). Plus généralement, si on a des relations A_1, $A_2, \ldots$, A_h, on désigne par « A_1 et A_2 et ... et A_h » une relation qui se construit de proche en proche par la convention que « A_1 et A_2 et ... et A_h » désigne la même relation que « A_1 et (A_2 et ... et A_h) ». On définit de même

« A_1 ou A_2 ou ... ou A_h ». La relation « A_1 et A_2 et ... et A_h » est un théorème de $\mathcal{T}$ si et seulement si chacune des relations $A_1, A_2, \ldots, A_h$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Il en résulte que toute théorie logique $\mathcal{T}$ est équivalente à une théorie logique $\mathcal{T}'$ possédant au plus un axiome explicite. C'est évident si $\mathcal{T}$ ne possède aucun axiome explicite. Si $\mathcal{T}$ possède les axiomes explicites $A_1, A_2, \ldots, A_h$, soit $\mathcal{T}'$ la théorie qui admet les mêmes signes et les mêmes schémas que $\mathcal{T}$, et l'axiome explicite « A_1 et A_2 et ... et A_h ». On voit aussitôt que tout axiome de $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}'$) est un théorème de $\mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{T}$).

Soit $\mathcal{T}_0$ la théorie sans axiome explicite qui admet les mêmes signes que $\mathcal{T}$ et les seuls schémas S1, S2, S3, S4. L'étude de $\mathcal{T}$ se ramène, en principe, à l'étude de $\mathcal{T}_0$: pour que la relation A soit un théorème de $\mathcal{T}$, il faut et il suffit qu'il y ait des axiomes $A_1, A_2, \ldots, A_h$ de $\mathcal{T}$ tels que (A_1 et A_2 et ... et A_h) $\Rightarrow A$ soit un théorème de $\mathcal{T}_0$. En effet, la condition est évidemment suffisante. Supposons d'autre part que A soit un théorème de $\mathcal{T}$, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_h$ les axiomes de $\mathcal{T}$ qui figurent dans une démonstration de $\mathcal{T}$ contenant A. Soit $\mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{T}''$) la théorie déduite de $\mathcal{T}_0$ par adjonction des axiomes $A_1, A_2, \ldots, A_h$ (resp. de l'axiome « A_1 et A_2 et ... et A_h »). La démonstration de A dans $\mathcal{T}$ est une démonstration de A dans $\mathcal{T}'$, donc A est un théorème de $\mathcal{T}'$ et par suite de $\mathcal{T}''$, puisqu'on a vu ci-dessus que $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ sont équivalentes. D'après le critère de la déduction,

$$(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } A_h) \Rightarrow A$$

est un théorème de $\mathcal{T}_0$.

Si $\mathcal{T}$ est contradictoire, il existe d'après ce qui précède une conjonction A d'axiomes de $\mathcal{T}$ et une relation R de $\mathcal{T}$ telles que $A \Rightarrow$ (R et (non R)) soit un théorème de $\mathcal{T}_0$. Donc

$$((\text{non } R) \text{ ou } (\text{non non } R)) \Rightarrow (\text{non } A)$$

est un théorème de $\mathcal{T}_0$, et comme « (non R) ou (non non R) » est un théorème de $\mathcal{T}_0$, « non A » est un théorème de $\mathcal{T}_0$. Réciproquement, s'il existe une conjonction A d'axiomes de $\mathcal{T}$ telle que « non A » soit un théorème de $\mathcal{T}_0$, A et « non A » sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, de sorte que $\mathcal{T}$ est contradictoire.

5. *L'équivalence.*

Soient A et B des assemblages. L'assemblage

$$(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$$

sera désigné par $A \Leftrightarrow B$.

CS7. *Soient A, B, T des assemblages, x une lettre. L'assemblage $(T \mid x)(A \Leftrightarrow B)$ est identique à $(T \mid x)A \Leftrightarrow (T \mid x)B$.*

Ceci résulte aussitôt de CS5 (§ 1, n° 2) et CS6 (n° 4).

CF10. *Si A et B sont des relations de $\mathcal{T}$, $A \Leftrightarrow B$ est une relation de $\mathcal{T}$.*

Ceci résulte aussitôt de CF5 (§ 1, n° 4) et CF9 (n° 4).

Si $A \Leftrightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$, nous dirons que A et B sont *équivalentes* dans $\mathcal{T}$; si x est une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, et si A et B sont considérées comme relations en x, tout terme de $\mathcal{T}$ qui vérifie l'une vérifie aussi l'autre.

Il résulte des critères C20 et C21 que, pour démontrer dans $\mathcal{T}$ un théorème de la forme $A \Leftrightarrow B$, il faut et il suffit qu'on puisse démontrer $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ dans $\mathcal{T}$. Cela se fait souvent en démontrant B dans la théorie déduite de $\mathcal{T}$ par adjonction de l'axiome A, puis en démontrant A dans la théorie déduite de $\mathcal{T}$ par adjonction de l'axiome B. Ces remarques permettent d'établir aussitôt les critères suivants, dont nous laissons la démonstration au lecteur.

C22. *Soient A, B, C des relations de $\mathcal{T}$. Si $A \Leftrightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $B \Leftrightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si $A \Leftrightarrow B$ et $B \Leftrightarrow C$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$, $A \Leftrightarrow C$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

C23. *Soient A et B des relations équivalentes dans $\mathcal{T}$, et C une relation de $\mathcal{T}$. Alors, on a dans $\mathcal{T}$ les théorèmes suivants :*

$$(\text{non } A) \Leftrightarrow (\text{non } B); \quad (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C); \quad (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B);$$
$$(A \text{ et } C) \Leftrightarrow (B \text{ et } C); \quad (A \text{ ou } C) \Leftrightarrow (B \text{ ou } C).$$

C24. *Soient A, B, C des relations de $\mathcal{T}$; on a dans $\mathcal{T}$ les théorèmes suivants :*

$$(\text{non non } A) \Leftrightarrow A; \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A));$$
$$(A \text{ et } A) \Leftrightarrow A; \quad (A \text{ et } B) \Leftrightarrow (B \text{ et } A);$$
$$(A \text{ et } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ et } C);$$
$$(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B));$$
$$(A \text{ ou } A) \Leftrightarrow A; \quad (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (B \text{ ou } A);$$
$$(A \text{ ou } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ ou } C);$$
$$(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C));$$
$$(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C));$$
$$(A \text{ et } (\text{non } B)) \Leftrightarrow \text{non}(A \Rightarrow B); \quad (A \text{ ou } B) \Leftrightarrow ((\text{non } A) \Rightarrow B).$$

C25. *Si A est un théorème de $\mathcal{T}$ et B une relation de $\mathcal{T}$, $(A \text{ et } B) \Leftrightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si « non A » est un théorème de $\mathcal{T}$, $(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow B$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

En principe, dans tout le reste de ce Traité, les critères C1 à C25 seront désormais utilisés sans référence.

Exercices. — 1) Soient A, B, C des relations d'une théorie logique $\mathcal{T}$. Montrer que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}$:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$
$$A \Rightarrow ((\text{non } A) \Rightarrow B)$$
$$(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \text{ et } B) \text{ ou } ((\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)))$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non } A) \Leftrightarrow B)$$
$$(A \Rightarrow (B \text{ ou } (\text{non } C))) \Leftrightarrow ((C \text{ et } A) \Rightarrow B)$$
$$(A \Rightarrow (B \text{ ou } C)) \Leftrightarrow (B \text{ ou } (A \Rightarrow C))$$
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \text{ et } C)))$$
$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \text{ ou } B) \Rightarrow C))$$
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{ et } C) \Rightarrow (B \text{ et } C))$$
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{ ou } C) \Rightarrow (B \text{ ou } C)).$$

2) Soit A une relation d'une théorie logique $\mathcal{T}$. Si $A \Leftrightarrow (\text{non } A)$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ est contradictoire.

3) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des relations d'une théorie logique $\mathcal{T}$.

a) Pour démontrer la relation « A_1 ou A_2 ou ... ou A_n » dans $\mathcal{T}$, il suffit de démontrer A_n dans la théorie obtenue en adjoignant à $\mathcal{T}$ les axiomes non A_1, non $A_2, \dots$, non A_{n-1}.

b) Si « A_1 ou A_2 ou ... ou A_n » est un théorème de $\mathcal{T}$, et si on veut démontrer dans $\mathcal{T}$ un théorème A, il suffit de démontrer les théorèmes $A_1 \Rightarrow A, A_2 \Rightarrow A, \dots, A_n \Rightarrow A$.

4) Soient A et B des relations d'une théorie logique $\mathcal{T}$. Désignons par $A \mid B$ la relation « (non A) ou (non B) ». Prouver dans $\mathcal{T}$ les théorèmes suivants :

$$(\text{non } A) \Leftrightarrow (A \mid A)$$
$$(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B))$$
$$(A \text{ et } B) \Leftrightarrow ((A \mid B) \mid (A \mid B))$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \mid (B \mid B)).$$

5) Soient $\mathcal{T}$ une théorie logique, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ses axiomes explicites. Pour que A_n soit indépendant des autres axiomes de $\mathcal{T}$ (§ 2, exercice), il faut et il suffit que la théorie dont les signes et les schémas sont ceux de $\mathcal{T}$, et les axiomes explicites $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, « non A_n », soit non contradictoire.

§ 4. — Théories quantifiées.

1. Définition des quantificateurs.

Dans le § 3, les seuls signes logiques qui aient joué un rôle sont $\neg$ et $\vee$; les règles qui vont être énoncées concernent essentiellement l'emploi des signes logiques τ et $\square$.

Si R est un assemblage, et x une lettre, l'assemblage $(\tau_x(R) \mid x)R$ se désigne par « il existe un x tel que R », ou par $(\exists x)R$. L'assemblage non$((\exists x)(\text{non } R))$ se désigne par « pour tout x, R », ou par « quel que soit x, R », ou par $(\forall x)R$. Les symboles abréviateurs $\exists$ et $\forall$ s'appellent respectivement *quantificateur existentiel* et *quantificateur universel*. La lettre x ne figure pas dans l'assemblage désigné par $\tau_x(R)$; *elle ne figure donc pas* dans les assemblages désignés par $(\exists x)R$ et $(\forall x)R$.

CS8. *Soient R un assemblage, x et x' des lettres. Si x' ne figure pas dans R, $(\exists x)R$ et $(\forall x)R$ sont identiques respectivement à $(\exists x')R'$ et $(\forall x')R'$, où R' est $(x' \mid x)R$.*

En effet $(\tau_x(R) \mid x)R$ est identique à $(\tau_x(R) \mid x')R'$ d'après CS1 (§ 1, nº 2), et $\tau_x(R)$ est identique à $\tau_{x'}(R')$ d'après CS3 (§ 1, nº 2). Donc $(\exists x)R$ est identique à $(\exists x')R'$. Il en résulte que $(\forall x)R$ est identique à $(\forall x')R'$.

CS9. *Soient R et U des assemblages, x et y des lettres distinctes. Si x ne figure pas dans U, $(U \mid y)(\exists x)R$ et $(U \mid y)(\forall x)R$ sont identiques respectivement à $(\exists x)R'$ et $(\forall x)R'$, où R' est $(U \mid y)R$.*

En effet $(U \mid y)(\tau_x(R) \mid x)R$ est identique, d'après CS2 (§ 1, nº 2), à $(T \mid x)(U \mid y)R$, où T est $(U \mid y)\tau_x(R)$, c'est-à-dire $\tau_x(R')$ d'après CS4. D'où l'identité de $(U \mid y)(\exists x)R$ avec $(\exists x)R'$, et par suite celle de $(U \mid y)(\forall x)R$ avec $(\forall x')R'$.

CF11. *Si R est une relation d'une théorie $\mathcal{T}$ et x une lettre, $(\exists x)R$ et $(\forall x)R$ sont des relations de $\mathcal{T}$.*

Ceci résulte aussitôt de CF3, CF8 et CF2 (§ 1, nº 4).

Intuitivement, considérons R comme exprimant une propriété de l'objet désigné par x. D'après la signification intuitive du terme $\tau_x(R)$, affirmer $(\exists x)R$ revient à dire qu'il y a un objet possédant la propriété R. Affirmer « non$(\exists x)$(non R) », c'est dire qu'il n'existe aucun objet ayant la propriété « non R » ; c'est donc dire que tout objet possède la propriété R.

Si, dans une théorie logique $\mathcal{T}$, on dispose d'un théorème de la forme $(\exists x)R$, où la lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, ce théorème peut servir de théorème de légitimation dans la méthode de la constante auxiliaire (§ 3, n° 3), puisqu'il est identique à $(\tau_x(R) \mid x)R$. Soit alors $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue par adjonction de R aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si on peut démontrer dans $\mathcal{T}'$ une relation S où x ne figure pas, S est un théorème de $\mathcal{T}$.

C26. *Soient $\mathcal{T}$ une théorie logique, R une relation de $\mathcal{T}$ et x une lettre. Les relations $(\forall x)R$ et $(\tau_x(\text{non } R) \mid x)R$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.*

En effet, $(\forall x)R$ est identique à « non$(\tau_x(\text{non } R) \mid x)$ (non R) », donc à « non non$(\tau_x(\text{non } R) \mid x)R$ ».

C27. *Si R est un théorème d'une théorie logique $\mathcal{T}$ dont la lettre x n'est pas une constante, $(\forall x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

En effet, $(\tau_x(\text{non } R) \mid x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$, d'après C3 (§ 2, n° 3).

> Par contre, si x est une constante de $\mathcal{T}$, la vérité de R dans $\mathcal{T}$ n'entraîne pas celle de $(\forall x)R$. Intuitivement, le fait que R soit une propriété vraie de x, qui est, dans $\mathcal{T}$, un objet déterminé, n'entraîne évidemment pas que R soit une propriété vraie de tout objet.

C28. *Soient $\mathcal{T}$ une théorie logique, R une relation de $\mathcal{T}$ et x une lettre. Les relations* « non$(\forall x)R$ » *et* $(\exists x)(\text{non } R)$ *sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.*

En effet, « non $(\forall x)R$ » est identique à « non non $(\exists x)(\text{non } R)$ ».

2. *Axiomes des théories quantifiées.*

On appelle *théorie quantifiée* toute théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle les schémas S1 à S4 (§ 3, n° 1) et le schéma S5 ci-dessous fournissent des axiomes implicites.

S5. *Si R est une relation de $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, et x une lettre, la relation $(T \mid x)R \Rightarrow (\exists x)R$ est un axiome.*

Cette règle est bien un schéma. En effet, soit A un axiome de $\mathcal{T}$ obtenu par application de S5 : il y a donc une relation R de $\mathcal{T}$, un terme T de $\mathcal{T}$ et une lettre x tels que A soit $(T \mid x)R \Rightarrow (\exists x)R$. Soient U un terme de $\mathcal{T}$, y une lettre ; on va montrer que $(U \mid y)A$ s'obtient encore par application de S5. Par utilisation de CS1 (§ 1, n° 2), et CS8 (n° 1), on peut se ramener au cas où x est distincte de y et ne figure pas dans U. Soient alors R' la relation $(U \mid y)R$ et T' le terme $(U \mid y)T$. Les critères CS2 (§ 1, n° 2) et CS9 (n° 1) montrent que $(U \mid y)A$ est identique à $(T' \mid x)R' \Rightarrow (\exists x)R'$.

> Le schéma S5 exprime que, s'il y a un objet T pour lequel la relation R, considérée comme exprimant une propriété de x, est vraie, alors R est vraie pour l'objet $\tau_x(R)$; ce qui est en accord avec la signification intuitive que nous avons attribuée à $\tau_x(R)$ (§ 1, n° 3, *Remarque*).

3. *Propriétés des quantificateurs.*

Nous n'aurons désormais à considérer que des théories quantifiées. Dans toute la fin de ce paragraphe, on désigne par $\mathcal{T}$ une telle théorie, et par $\mathcal{T}_0$ la théorie sans axiomes explicites qui possède les mêmes signes que $\mathcal{T}$ et les seuls schémas S1 à S5 ; $\mathcal{T}$ est plus forte que $\mathcal{T}_0$.

C29. *Soient R une relation de $\mathcal{T}$, et x une lettre. Les relations « non$(\exists x)R$ » et $(\forall x)(\text{non } R)$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.*

En effet, il suffit d'établir le critère dans la théorie $\mathcal{T}_0$, dont x n'est pas une constante. Le théorème $R \Leftrightarrow (\text{non non } R)$ donne par C3 (§ 2, n° 3), les théorèmes

$$(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R) \mid x)(\text{non non } R)$$

et

$$(\exists x)(\text{non non } R) \Rightarrow (\tau_x(\text{non non } R) \mid x)R.$$

Appliquant S5, on en déduit dans $\mathcal{T}_0$ les théorèmes

$$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)(\text{non non } R),$$

et

$$(\exists x)(\text{non non } R) \Rightarrow (\exists x)R,$$

d'où le théorème $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)(\text{non non } R)$. Or, $(\exists x)(\text{non non } R)$ est équivalente dans $\mathcal{T}_0$ à « non non$(\exists x)(\text{non non } R)$ » c'est-à-dire à « non$(\forall x)(\text{non } R)$ ». D'où le critère.

> Les critères C28 et C29 permettent de déduire les propriétés d'un des quantificateurs de celles de l'autre.

C30. *Soient R une relation de $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, x une lettre. La relation $(\forall x)R \Rightarrow (T \mid x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

D'après S5, $(T|x)(\text{non } R) \Rightarrow (\tau_x(\text{non } R)|x)(\text{non } R)$ est un axiome. Cette relation est identique à

$$(\text{non } (T|x)R) \Rightarrow (\text{non } (\tau_x(\text{non } R)|x)R).$$

Donc $(\tau_x(\text{non } R)|x)R \Rightarrow (T|x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. On conclut par application de C26 (n° 1).

Soit R une relation de $\mathcal{T}$. D'après C26, C27 et C30, il revient au même (lorsque la lettre x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$) d'énoncer dans $\mathcal{T}$ le théorème R, ou le théorème $(\forall x)R$, ou enfin d'énoncer la règle métamathématique : si T est un terme quelconque de $\mathcal{T}$, $(T|x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

C31. *Soient R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{T}$. Si $R \Rightarrow S$* (resp. $R \Leftrightarrow S$) *est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ et $(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$* (resp. $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$ *et* $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$) *sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.*

En effet, supposons que $R \Rightarrow S$ soit un théorème de $\mathcal{T}$. Adjoignons l'hypothèse $(\forall x)R$ (où x ne figure pas). Alors R, donc S, donc aussi $(\forall x)S$, sont vraies. Par suite $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Il en résulte que, si $R \Leftrightarrow S$ est un théorème de $\mathcal{T}$, il en est de même de $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$. Les règles relatives à $\exists$ s'en déduisent par emploi de C29.

C32. *Soient R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre. Les relations*

$$(\forall x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow ((\forall x)R \text{ et } (\forall x)S)$$
$$(\exists x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow ((\exists x)R \text{ ou } (\exists x)S)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

En effet, il suffit d'établir ces critères dans $\mathcal{T}_0$, dont x n'est pas une constante. Si $(\forall x)(R \text{ et } S)$ est vraie, « R et S » est vraie, donc chacune des relations R, S est vraie ; par suite chacune des relations $(\forall x)R$, $(\forall x)S$ est vraie, donc « $(\forall x)R$ et $(\forall x)S$ » est vraie. On voit de même que, si « $(\forall x)R$ et $(\forall x)S$ » est vraie, $(\forall x)(R \text{ et } S)$ est vraie. D'où le premier théorème. Le deuxième s'en déduit par emploi de C29.

On aura soin de noter que si $(\forall x)(R \text{ ou } S)$ est un théorème de $\mathcal{T}$, on ne peut en conclure que $((\forall x)R \text{ ou } (\forall x)S)$ soit un théorème de $\mathcal{T}$. Intuitivement, dire que la relation $(\forall x)(R \text{ ou } S)$ est vraie signifie que, pour tout objet x, l'une au moins des relations R, S est vraie ; mais, en général, une seule des deux sera vraie, et suivant le choix de x, ce pourra être l'une ou l'autre des relations R, S. On voit de même que si $((\exists x)R$ et $(\exists x)S)$ est un théorème de $\mathcal{T}$, on ne peut en conclure que $(\exists x)(R \text{ et } S)$ soit un théorème de $\mathcal{T}$. On a toutefois le critère suivant :

C33. *Soient R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre qui ne figure pas dans R. Les relations*

$$(\forall x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow (R \text{ ou } (\forall x)S)$$
$$(\exists x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow (R \text{ et } (\exists x)S)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

En effet, il suffit d'établir le critère dans $\mathcal{T}_0$, dont x n'est pas une constante. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant $(\forall x)(R \text{ ou } S)$ aux axiomes de $\mathcal{T}_0$. Dans $\mathcal{T}'$, « R ou S », donc $(\text{non } R) \Rightarrow S$, sont des théorèmes. Si « non R » est vraie (hypothèse où x ne figure pas), S, donc aussi $(\forall x)S$, sont vraies. Donc $(\text{non } R) \Rightarrow (\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, et par suite $(\forall x)(R \text{ ou } S) \Rightarrow (R \text{ ou } (\forall x)S)$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$. De même, si « R ou $(\forall x)S$ » est vraie, « R ou S », donc $(\forall x)(R \text{ ou } S)$, sont vraies. Par suite $(R \text{ ou } (\forall x)S) \Rightarrow (\forall x)(R \text{ ou } S)$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$. La règle relative à $\exists$ s'en déduit par emploi de C29.

C34. *Soient R une relation, x et y des lettres. Les relations*

$$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$$
$$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$$
$$(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

En effet, il suffit d'établir le critère dans $\mathcal{T}_0$, dont x, y ne sont pas des constantes. Si $(\forall x)(\forall y)R$ est vraie, $(\forall y)R$, donc R, donc $(\forall x)R$, donc $(\forall y)(\forall x)R$ sont vraies. De même, si $(\forall y)(\forall x)R$ est vraie, $(\forall x)(\forall y)R$ est vraie. D'où le premier théorème. Le deuxième s'en déduit par emploi de C29. Enfin, puisque $(\forall y)R \Rightarrow R$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, il en est de même de $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$ d'après C31 ; si $(\exists x)(\forall y)R$ est vraie, $(\exists x)R$ est donc vraie, et par suite aussi $(\forall y)(\exists x)R$. D'où le troisième théorème.

Par contre, si $(\forall y)(\exists x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$, on ne peut en conclure que $(\exists x)(\forall y)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Intuitivement, dire que la relation $(\forall y)(\exists x)R$ est vraie signifie qu'étant donné un objet y quelconque, il y a un objet x tel que R soit une relation vraie entre les objets x et y. Mais l'objet x dépendra en général du choix de l'objet y. Au contraire, dire que $(\exists x)(\forall y)R$ est vraie signifie qu'il y a un objet *fixe* x tel que R soit une relation vraie entre cet objet et tout objet y.

4. *Quantificateurs typiques.*

Soient A et R des assemblages, et x une lettre. On désigne l'assemblage $(\exists x)(A \text{ et } R)$ par $(\exists_A x)R$, et l'assemblage « non $(\exists_A x)(\text{non } R)$ » par $(\forall_A x)R$. Les symboles abréviateurs $\exists_A$ et $\forall_A$ sont appelés *quantificateurs typiques*. On notera que la lettre x ne figure pas dans les assemblages désignés par

$$(\exists_A x)R, \ (\forall_A x)R.$$

CS10. *Soient A et R des assemblages, x et x' des lettres. Si x' ne figure ni dans R ni dans A, $(\exists_A x)R$ et $(\forall_A x)R$ sont identiques respectivement à $(\exists_{A'} x')R'$ et $(\forall_{A'} x')R'$, où R' est $(x' \mid x)R$, et où A' est $(x' \mid x)A$.*

CS11. *Soient A, R, U des assemblages, x et y des lettres distinctes, Si x ne figure pas dans U, les assemblages $(U \mid y)(\exists_A x)R$ et $(U \mid y)(\forall_A x)R$ sont identiques respectivement à $(\exists_{A'} x)R'$ et $(\forall_{A'} x)R'$, où R' est $(U \mid y)R$ et où A' est $(U \mid y)A$.*

Ces règles résultent aussitôt des critères CS8, CS9 (n° 1), CS5 (§ 1, n° 2) et CS6 (§ 3, n° 4).

CF12. *Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre. Alors, $(\exists_A x)R$ et $(\forall_A x)R$ sont des relations de $\mathcal{T}$.*

Cela résulte aussitôt de CF11 (n° 1), CF9 (§ 3, n° 4) et CF2 (§ 1, n° 4).

Intuitivement, considérons A et R comme exprimant des propriétés de x. Il peut arriver que, dans une série de démonstrations, on ne s'intéresse qu'aux objets vérifiant A. Dire qu'il existe un objet vérifiant A tel que R, c'est dire qu'il existe un objet tel que « A et R » : d'où la définition de $\exists_A$. Dire que tous les objets vérifiant A ont la propriété R, c'est dire qu'il n'existe pas d'objets vérifiant A et tels que « non R » ; d'où la définition de $\forall_A$. Dans la pratique, ces signes sont remplacés par des phrases assez diverses suivant la nature de la relation A. * On dira par exemple : « quel que soit l'entier x, R », « il existe un élément x de l'ensemble E tel que R », etc. *

C35. *Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Les relations $(\forall_A x)R$ et $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.*

En effet, la relation $(\forall_A x)R$ est identique à

$$\text{« non } (\exists x)(A \text{ et } (\text{non } R)) \text{ ».}$$

Or, « A et $(\text{non } R)$ » est équivalente dans $\mathcal{T}_0$ à non $(A \Rightarrow R)$, donc « non $(\exists x)(A$ et $(\text{non } R))$ » est équivalente dans $\mathcal{T}_0$ à « non $(\exists x)(\text{non } (A \Rightarrow R))$ » d'après C31 (n° 3), et cette dernière relation est identique à $(\forall x)(A \Rightarrow R)$. Le critère est donc établi dans $\mathcal{T}_0$, et par suite dans $\mathcal{T}$.

On a souvent à démontrer des relations de la forme $(\forall_A x)R$. On le fait généralement en s'aidant d'un des deux critères suivants :

C36. *Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant A aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, et si R est un théorème de $\mathcal{T}'$, $(\forall_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

En effet, $A \Rightarrow R$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après le critère de la déduction, donc $(\forall_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C27 (n° 1) et C35.

En pratique, on indique qu'on va employer cette règle par une phrase du genre suivant : « Soit x un élément quelconque tel que A ». Dans la théorie $\mathcal{T}'$ ainsi constituée, on cherche à démontrer R. On ne peut naturellement affirmer que R soit elle-même un théorème de $\mathcal{T}$.

C37. *Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant les relations A et « non R » aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si x n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, et si $\mathcal{T}'$ est contradictoire, $(\forall_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.*

En effet, la théorie $\mathcal{T}'$ est équivalente à la théorie obtenue en adjoignant « non $(A \Rightarrow R)$ » aux axiomes de $\mathcal{T}$. D'après la méthode de réduction à l'absurde, $A \Rightarrow R$ est un théorème de $\mathcal{T}$, donc aussi $(\forall_A x)R$ d'après C27 (n° 1) et C35.

En pratique, on dit : « Supposons qu'il existe un objet x vérifiant A, pour lequel R soit fausse », et on cherche à établir une contradiction.

Les propriétés des quantificateurs typiques sont analogues à celles des quantificateurs :

C38. *Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Les relations* $\text{non}(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)(\text{non } R)$, $\text{non}(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)(\text{non } R)$ *sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.*

C39. *Soient A, R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{T}$. Si la relation $A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$* (resp. $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$) *est un théorème de $\mathcal{T}$, les relations*

$$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S, \qquad (\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$$
$$(\text{resp. } (\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S, \qquad (\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

C40. *Soient A, R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre. Les relations*

$$(\forall_A x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R \text{ et } (\forall_A x)S)$$
$$(\exists_A x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R \text{ ou } (\exists_A x)S)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

C41. *Soient A, R et S des relations de $\mathcal{T}$, et x une lettre qui ne figure pas dans R. Les relations*

$$(\forall_A x)(R \text{ ou } S) \Leftrightarrow (R \text{ ou } (\forall_A x)S)$$
$$(\exists_A x)(R \text{ et } S) \Leftrightarrow (R \text{ et } (\exists_A x)S)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

C42. *Soient A, B, R des relations de $\mathcal{T}$, x et y des lettres. Si x ne figure pas dans B, et si y ne figure pas dans A, les relations*

$$(\forall_A x)(\forall_B y)R \Leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)R$$
$$(\exists_A x)(\exists_B y)R \Leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)R$$
$$(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

A titre d'exemple, démontrons une partie de C42. La relation $(\exists_A x)(\exists_B y)R$ est identique à $(\exists x)(A \text{ et } (\exists y)(B \text{ et } R))$, donc est équivalente dans $\mathcal{T}_0$ (puisque y ne figure pas dans A) à $(\exists x)(\exists y)(A \text{ et } (B \text{ et } R))$, d'après C33 et C31. De même, $(\exists_B y)(\exists_A x)R$ est équivalente à $(\exists y)(\exists x)(B \text{ et } (A \text{ et } R))$. On conclut par application de C31 et C34 (nº 3).

* Comme exemple d'application des critères précédents, considérons la relation suivante : « la suite de fonctions numériques (f_n) converge uniformément vers 0 dans $[0, 1]$ », ce qui signifie : « pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier $m \geqslant n$, on ait $|f_m(x)| \leqslant \varepsilon$ ». Supposons qu'on veuille prendre la négation de cette relation (par exemple pour faire un raisonnement par l'absurde) ; le critère C38 montre que cette négation est équivalente à la relation suivante : « il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier n, il existe un $x \in [0, 1]$ et un $m \geqslant n$ pour lesquels $|f_m(x)| > \varepsilon$ ». *

Exercices. — Dans tous ces exercices, $\mathcal{T}$ désigne une théorie quantifiée.

1) Soient A et B des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre ne figurant pas dans A. Alors $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

2) Soient A et B des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre distincte des constantes de $\mathcal{T}$ et ne figurant pas dans A. Si $B \Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $((\exists x)B) \Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

3) Soient A une relation de $\mathcal{T}$, x et y des lettres. Les relations $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)((x|y)A)$, $(\exists x)((x|y)A) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

4) Soient A et B des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Montrer que les relations

$$(\forall x)(A \text{ ou } B) \Rightarrow ((\forall x)A \text{ ou } (\exists x)B)$$
$$((\exists x)A \text{ et } (\forall x)B) \Rightarrow (\exists x)(A \text{ et } B)$$

sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

5) Soient A et B des relations de $\mathcal{T}$, x et y des lettres. Si x ne figure pas dans B et si y ne figure pas dans A,

$$(\forall x)(\forall y)(A \text{ et } B) \Leftrightarrow ((\forall x)A \text{ et } (\forall y)B)$$

est un théorème de $\mathcal{T}$.

6) Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Les relations $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

7) Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre distincte des constantes de $\mathcal{T}$. Si $R \Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Si $(\text{non } R) \Rightarrow A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. En particulier, si A est un théorème de $\mathcal{T}$, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ et $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

8) Soient A et R des relations de $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, x une lettre. Si $(T|x)A$ est un théorème de $\mathcal{T}$, $(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$, et $(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

§ 5. — Théories égalitaires.

1. *Les axiomes.*

On appelle *théorie égalitaire* une théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle figure un signe relationnel de poids 2 noté $=$ (qui se lit « égale »), et dans laquelle les schémas S1 à S5 (§§ 3 et 4) ainsi que les schémas S6 et S7 ci-dessous fournissent des axiomes implicites ; si T et U sont des termes de $\mathcal{T}$, l'assemblage $= TU$ est une relation de $\mathcal{T}$ (dite *relation d'égalité*) d'après CF4 ; on la désigne pratiquement par $T = U$ ou $(T) = (U)$.

S6. *Soient* x *une lettre,* T *et* U *des termes de* $\mathcal{T}$, *et* $R\{x\}$ *une relation de* $\mathcal{T}$ *; la relation* $(T = U) \Rightarrow (R\{T\} \Leftrightarrow R\{U\})$ *est un axiome.*

S7. *Si* R *et* S *sont des relations de* $\mathcal{T}$ *et* x *une lettre, la relation* $((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ *est un axiome.*

La règle S6 est bien un schéma. Soit en effet A un axiome de $\mathcal{T}$, obtenu par application de S6 : il y a une relation R de $\mathcal{T}$, des termes T et U de $\mathcal{T}$, et une lettre x, tels que A soit $(T = U) \Rightarrow ((T|x)R \Leftrightarrow (U|x)R)$. On va voir que, si y est une lettre et V un terme de $\mathcal{T}$, la relation $(V|y)A$ s'obtient encore par application de S6. Par utilisation de CS1 (§ 1, n° 2), on peut se ramener au cas où x est distinct de y et ne figure pas dans V. Désignons par T', U', R' les assemblages $(V|y)T$, $(V|y)U$, $(V|y)R$. D'après CS2 et CS5 (§ 1, n° 2), $(V|y)A$ est identique à

$$(T' = U') \Rightarrow ((T'|x)R' \Leftrightarrow (U'|x)R'),$$

ce qui établit notre assertion. On vérifie de façon analogue que S7 est un schéma.

Intuitivement, le schéma S6 signifie que, si deux objets sont égaux, ils ont les mêmes propriétés. Le schéma S7 est plus éloigné de l'intuition courante ; il signifie que, lorsque deux propriétés R et S d'un objet x sont équivalentes, alors les objets privilégiés $\tau_x(R)$ et $\tau_x(S)$ (choisis respectivement parmi ceux qui vérifient R, et parmi ceux qui vérifient S, s'il y a de tels objets) sont égaux. Le lecteur notera que la présence dans S7 du quantificateur $\forall x$ est essentielle (cf. exerc. 7).

La négation de la relation $= TU$ se désigne par $T \neq U$, ou $(T) \neq (U)$ (où le signe $\neq$ se lit « différent de »).

On déduit de S6 le critère suivant :

C43. *Soient* x *une lettre,* T *et* U *des termes de* $\mathcal{T}$, *et* $R\{x\}$ *une relation de* $\mathcal{T}$ *; les relations* $(T = U$ et $R\{T\})$ *et* $(T = U$ et $R\{U\})$ *sont équivalentes.*

En effet, si on adjoint les hypothèses $T = U$ et $R\{T\}$, $R\{U\}$ est vraie d'après S6, donc $(T = U$ et $R\{U\})$ est vraie.

Par abus de langage, lorsqu'on a démontré une relation de la forme $T = U$ dans une théorie $\mathcal{T}$, on dit souvent que les termes T et U sont « les mêmes » ou sont « identiques ». De même, lorsque $T \neq U$ est vraie dans $\mathcal{T}$, on dit que T et U sont « distincts » au lieu de dire que T est différent de U.

2. *Propriétés de l'égalité.*

Nous ne considérerons plus désormais que des théories égalitaires. Soit $\mathcal{T}$ une telle théorie. Soit $\mathcal{T}_0$ la théorie dont les signes sont ceux de $\mathcal{T}$, et dont les axiomes sont fournis par les seuls schémas S1 à S7. La théorie $\mathcal{T}_0$ est moins forte que $\mathcal{T}$ (§ 2, n° 4) et ne possède pas de constantes. Les trois théorèmes qui suivent sont des théorèmes de $\mathcal{T}_0$.

THÉORÈME 1. — $x = x$.

Désignons par S la relation $x = x$ de $\mathcal{T}_0$. D'après C27 (§ 4, n° 1), pour toute relation R de $\mathcal{T}_0$, $(\forall x)(R \Leftrightarrow R)$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, donc, d'après S7, $\tau_x(R) = \tau_x(R)$, c'est-à-dire $(\tau_x(R)|x)S$, est un théorème de $\mathcal{T}_0$. En prenant pour R la relation « non S », et tenant compte de C26 (§ 4, n° 1), on voit que $(\forall x)S$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$. D'après C30 (§ 4, n° 3), S est donc un théorème de $\mathcal{T}_0$.

La relation $(\forall x)(x = x)$ est aussi un théorème de $\mathcal{T}_0$; et si T est un terme de $\mathcal{T}_0$, $T = T$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$ (cf. § 4, n° 3). Il est possible de transformer de la même façon les théorèmes ultérieurs en des théorèmes où ne figure aucune lettre, ou en des critères métamathématiques. Nous ne ferons plus désormais ces transformations, mais nous les utiliserons souvent implicitement.

THÉORÈME 2. — $(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$.

Supposons que la relation $x = y$ soit vraie. D'après S6, la relation $(x = y) \Rightarrow ((x \mid y)(y = x) \Leftrightarrow (y \mid y)(y = x))$, c'est-à-dire $(x = y) \Rightarrow ((x = x) \Leftrightarrow (y = x))$ est vraie. Donc $(x = x) \Leftrightarrow (y = x)$ est vraie. En vertu du théorème 1, $y = x$ est vraie, ce qui établit le théorème.

Théorème 3. — $((x = y)$ et $(y = z)) \Rightarrow (x = z)$.

Adjoignons les hypothèses $x = y$, $y = z$ aux axiomes de $\mathcal{T}_0$. D'après S6, la relation $(x = y) \Rightarrow ((x = z) \Leftrightarrow (y = z))$ est vraie. Donc $(x = z) \Leftrightarrow (y = z)$, et par suite $x = z$, sont vraies, ce qui établit le théorème.

C44. *Soient* $\mathbf{x}$ *une lettre,* $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}\{\mathbf{x}\}$ *des termes de* $\mathcal{T}_0$. *La relation* $(\mathbf{T} = \mathbf{U}) \Rightarrow (\mathbf{V}\{\mathbf{T}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{U}\})$ *est un théorème de* $\mathcal{T}_0$.

En effet, soient $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ deux lettres distinctes entre elles, distinctes de $\mathbf{x}$ et des lettres qui figurent dans $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$. Adjoignons l'hypothèse $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Alors, d'après S6,

$$((\mathbf{y} \mid \mathbf{z})(\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{z}\})) \Leftrightarrow (\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{z}\})$$

c'est-à-dire $(\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{y}\}) \Leftrightarrow (\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{z}\})$ est vraie. Or, $\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{y}\}$ est vraie d'après le th. 1. Donc $\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{z}\}$ est vraie. De tout ceci résulte que $(\mathbf{y} = \mathbf{z}) \Rightarrow (\mathbf{V}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{z}\})$ est un théorème de $\mathcal{T}_0$, soit $\mathbf{A}$. Or, $(\mathbf{T} \mid \mathbf{y})(\mathbf{U} \mid \mathbf{z})\mathbf{A}$ n'est autre que $(\mathbf{T} = \mathbf{U}) \Rightarrow (\mathbf{V}\{\mathbf{T}\} = \mathbf{V}\{\mathbf{U}\})$.

On dit qu'une relation de la forme $\mathbf{T} = \mathbf{U}$, où $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}$ sont des termes de $\mathcal{T}$, est une *équation* ; une *solution* (dans $\mathcal{T}$) de la relation $\mathbf{T} = \mathbf{U}$, considérée comme équation en une lettre $\mathbf{x}$, est donc (§ 2, nº 2) un terme $\mathbf{V}$ de $\mathcal{T}$ tel que $\mathbf{T}\{\mathbf{V}\} = \mathbf{U}\{\mathbf{V}\}$ soit un théorème de $\mathcal{T}$.

Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}$ deux termes de $\mathcal{T}$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ les lettres figurant dans $\mathbf{T}$ et non dans $\mathbf{U}$. Si la relation $(\exists \mathbf{x}_1)\ldots(\exists \mathbf{x}_n)(\mathbf{T} = \mathbf{U})$ est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que $\mathbf{U}$ *se met sous la forme* $\mathbf{T}$ (dans $\mathcal{T}$). Soient $\mathbf{R}$ une relation de $\mathcal{T}$, $\mathbf{y}$ une lettre. Soit $\mathbf{V}$ une solution (dans $\mathcal{T}$) de $\mathbf{R}$, considérée comme relation en $\mathbf{y}$. Si toute solution (dans $\mathcal{T}$) de $\mathbf{R}$, considérée comme relation en $\mathbf{y}$, peut se mettre sous la forme $\mathbf{V}$, on dit que $\mathbf{V}$ est *solution complète* (ou *solution générale*) de $\mathbf{R}$ (dans $\mathcal{T}$).

3. *Relations fonctionnelles.*

Soient $\mathbf{R}$ un assemblage, $\mathbf{x}$ une lettre. Soient $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ des lettres distinctes entre elles, distinctes de $\mathbf{x}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$. Soient $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ deux autres lettres ayant les mêmes propriétés. En vertu de CS8, CS9 (§ 4, nº 1), CS2, CS5 (§ 1, nº 2), CS6 (§ 3, nº 4), les assemblages

$$(\forall \mathbf{y})(\forall \mathbf{z})(((\mathbf{y} \mid \mathbf{x})\mathbf{R} \text{ et } (\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\mathbf{R}) \Rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{z}))$$

et

$$(\forall \mathbf{y}')(\forall \mathbf{z}')(((\mathbf{y}' \mid \mathbf{x})\mathbf{R} \text{ et } (\mathbf{z}' \mid \mathbf{x})\mathbf{R}) \Rightarrow (\mathbf{y}' = \mathbf{z}'))$$

sont identiques. Si $\mathbf{R}$ est une relation de $\mathcal{T}$, l'assemblage ainsi défini est une relation de $\mathcal{T}$ qui se désigne par « il existe au plus un $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{R}$ » ; la lettre $\mathbf{x}$ n'y figure pas. Lorsque cette relation est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que $\mathbf{R}$ est *univoque* en $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{T}$. Pour prouver que $\mathbf{R}$ est univoque dans $\mathcal{T}$, il suffit de prouver $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ dans la théorie déduite de $\mathcal{T}$ par adjonction des axiomes $(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$ et $(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ étant des lettres distinctes entre elles, distinctes de $\mathbf{x}$, ne figurant ni dans $\mathbf{R}$, ni dans les axiomes explicites de $\mathcal{T}$.

C45. *Soient* $\mathbf{R}$ *une relation de* $\mathcal{T}$, *et* $\mathbf{x}$ *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$. *Si* $\mathbf{R}$ *est univoque en* $\mathbf{x}$ *dans* $\mathcal{T}$, $\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x} = \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}))$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$. *Réciproquement, si, pour un terme* $\mathbf{T}$ *de* $\mathcal{T}$ *ne contenant pas* $\mathbf{x}$, $\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{T})$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$, $\mathbf{R}$ *est univoque en* $\mathbf{x}$ *dans* $\mathcal{T}$.

Supposons que $\mathbf{R}$ soit univoque en $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{T}$, et prouvons que $\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x} = \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}))$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Adjoignons l'hypothèse $\mathbf{R}$. Alors, $(\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}) \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$ est vraie d'après S5, donc « $\mathbf{R}$ et $(\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}) \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$ » est vraie. Or, comme $\mathbf{R}$ est univoque en $\mathbf{x}$,

$$(\mathbf{R} \text{ et } (\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}) \mid \mathbf{x})\mathbf{R}) \Rightarrow (\mathbf{x} = \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R}))$$

est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C30 (§ 4, nº 3). Donc $\mathbf{x} = \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{R})$ est vraie.

Réciproquement, supposons que $\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{T})$ soit un théorème de $\mathcal{T}$. Soient $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ des lettres distinctes entre elles et distinctes de $\mathbf{x}$, ne figurant ni dans $\mathbf{R}$, ni dans les axiomes explicites de $\mathcal{T}$. Comme $\mathbf{x}$ n'est pas une constante de $\mathcal{T}$ et ne figure pas dans $\mathbf{T}$, les relations $(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{T})$ et $(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{z} = \mathbf{T})$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Adjoignons les hypothèses $(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$ et $(\mathbf{z} \mid \mathbf{x})\mathbf{R}$. Alors $\mathbf{y} = \mathbf{T}$ et $\mathbf{z} = \mathbf{T}$ sont vraies, donc $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ est vraie.

Soit R une relation de $\mathcal{T}$. La relation

« $(\exists x)R$ et il existe au plus un x tel que R »

se désigne par « il existe un x et un seul tel que R ». Si cette relation est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que R est une *relation fonctionnelle en* x *dans* $\mathcal{T}$.

C46. *Soient* R *une relation de* $\mathcal{T}$, *et* x *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$. *Si* R *est fonctionnelle en* x *dans* $\mathcal{T}$, $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$. *Réciproquement, si, pour un terme* T *de* $\mathcal{T}$ *ne contenant pas* x, $R \Leftrightarrow (x = T)$ *est un théorème de* $\mathcal{T}$, R *est fonctionnelle en* x *dans* $\mathcal{T}$.

Supposons que R soit fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$. Alors, $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ est un théorème de $\mathcal{T}$ d'après C45. D'autre part, $(\exists x)R$ est un théorème de $\mathcal{T}$. D'après S6, la relation

$$(x = \tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$$

est un théorème de $\mathcal{T}$. Si nous adjoignons l'hypothèse $x = \tau_x(R)$, on voit que R est vraie. Donc $(x = \tau_x(R)) \Rightarrow R$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Réciproquement, si $R \Leftrightarrow (x = T)$ est un théorème de $\mathcal{T}$, R est univoque en x dans $\mathcal{T}$ d'après C45. En outre, $(T|x)R \Leftrightarrow (T = T)$ est un théorème de $\mathcal{T}$, donc $(T|x)R$, et par suite $(\exists x)R$, sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

Lorsqu'une relation R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$, R est donc équivalente à la relation, souvent plus maniable, $x = \tau_x(R)$. Aussi introduit-on généralement un symbole abréviateur Σ pour représenter le terme $\tau_x(R)$. Un tel symbole s'appelle *symbole fonctionnel* dans $\mathcal{T}$.

Intuitivement, Σ représente l'objet unique qui possède la propriété définie par R. * Par exemple, dans une théorie où « y est un nombre réel $\geqslant 0$ » est un théorème, la relation « x est un nombre réel $\geqslant 0$ et $y = x^2$ » est fonctionnelle en x. On prend comme symbole fonctionnel correspondant $\sqrt{y}$ ou $y^{\frac{1}{2}}$. *

C47. *Soient* x *une lettre qui n'est pas une constante de* $\mathcal{T}$, $R\{x\}$ *et* $S\{x\}$ *deux relations de* $\mathcal{T}$. *Si* $R\{x\}$ *est fonctionnelle en* x *dans* $\mathcal{T}$, *la relation* $S\{\tau_x(R)\}$ *est équivalente à* $(\exists x)(R\{x\}$ *et* $S\{x\})$.

En effet, il résulte de C46 et C43 que $(R\{x\}$ et $S\{x\})$ est équivalente à $(R\{x\}$ et $S\{\tau_x(R)\})$; comme $S\{\tau_x(R)\}$ ne contient pas x, $(\exists x)(R\{x\}$ et $S\{\tau_x(R)\})$ est équivalente à

$$S\{\tau_x(R)\} \text{ et } (\exists x)R$$

d'après C33 (§ 4, n° 3) ; on conclut en remarquant que $(\exists x)R$ est vraie, puisque R est fonctionnelle en x.

Exercices. — Dans tous ces exercices, $\mathcal{T}$ désigne une théorie égalitaire.

1) La relation $x = y$ est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$.

2) Soient R une relation de $\mathcal{T}$, x et y des lettres distinctes. Alors les relations $(\exists x)(x = y$ et $R)$, $(y|x)R$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$.

3) Soient R et S des relations de $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, x et y des lettres distinctes. On suppose que y n'est pas une constante de $\mathcal{T}$ et que x ne figure pas dans T. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie obtenue en adjoignant S aux axiomes de $\mathcal{T}$. Si R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}'$, et si $(T|y)S$ est un théorème de $\mathcal{T}$, alors la relation $(T|y)R$ est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$.

4) Soient R et S des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{T}$. Si R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$, et si $R \Leftrightarrow S$ est un théorème de $\mathcal{T}$, S est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$.

5) Soient R, S, T des relations de $\mathcal{T}$, x une lettre. Si R est fonctionnelle en x dans $\mathcal{T}$, montrer que les relations suivantes sont des théorèmes de $\mathcal{T}$:

$$(\text{non } (\exists x)(R \text{ et } S)) \Leftrightarrow (\exists x)(R \text{ et } (\text{non } S))$$
$$(\exists x)(R \text{ et } (S \text{ et } T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ et } S) \text{ et } (\exists x)(R \text{ et } T))$$
$$(\exists x)(R \text{ et } (S \text{ ou } T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ et } S) \text{ ou } (\exists x)(R \text{ et } T)).$$

6) Montrer que si, dans $\mathcal{T}$, le schéma $(\exists x)R \Rightarrow R$ fournit des axiomes implicites, $x = y$ est un théorème de $\mathcal{T}$ (cf. exerc. 1).

7) Montrer que si, dans $\mathcal{T}$, le schéma $(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ fournit des axiomes implicites, $x = y$ est un théorème de $\mathcal{T}$ (prendre pour R la relation $x = x$, pour S la relation $x = y$, puis substituer x à y dans l'axiome obtenu) (*).

(*) On verra que, dans la Théorie des ensembles, $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ est un théorème (chap. II, § 1, exerc. 2).

APPENDICE

Caractérisation des termes et des relations.

La métamathématique, lorsqu'elle dépasse le niveau très élémentaire du présent chapitre, utilise largement les résultats de la mathématique ; nous l'avons signalé dans l'Introduction. Le but de cet Appendice est de donner un exemple simple de ce genre de raisonnements (*). Nous commencerons par établir certains résultats qui se rattachent à la théorie mathématique des *monoïdes libres* (*Alg.*, chap. I, § 1, nº 3) ; nous en ferons ensuite l' « application » métamathématique à la caractérisation des termes et relations d'une théorie.

1. *Signes et mots.*

* Soit S un ensemble non vide, dont les éléments seront appelés *signes* dans ce qui suit (cette terminologie étant appropriée à l'application métamathématique que nous avons en vue). Soit L(S) le monoïde libre déduit de S, dont les éléments (appelés *mots*) sont identifiés aux suites finies non vides $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de S ; nous noterons multiplicativement la loi de composition dans L(S), AB étant donc la suite obtenue par juxtaposition de A et de B. Soit $L_0(S)$ la réunion de L(S) et de la suite vide $\varnothing$ (encore appelée *mot vide*) ; on prolonge à $L_0(S)$ la loi de composition en posant $\varnothing A = A\varnothing = A$ pour tout mot $A \in L_0(S)$ (de sorte que $\varnothing$ est élément neutre de $L_0(S)$). Rappelons que la *longueur* $l(A)$ d'un mot $A \in L_0(S)$ est le nombre d'éléments de la suite A ; on a $l(AB) = l(A) + l(B)$; les mots de longueur 1 sont les signes.

Supposons en outre donnée une application $s \to n(s)$ de S dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers $\geqslant 0$; pour tout mot non vide $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$

(*) Les résultats établis dans cet Appendice ne seront pas utilisés dans la suite de ce Traité.

de L(S), on pose $n(A) = \sum_{i=0}^{k} n(s_i)$, et $n(\varnothing) = 0$; on dit que $n(A)$ est le *poids* de A. On a évidemment $n(AB) = n(A) + n(B)$.

Si $A = A'BA''$, on dit que le mot B est un *segment* de A (segment *propre* si en outre $B \neq A$). Si A' (resp. A'') est vide, on dit que B est un segment *initial* (resp. *final*) de A. Si $l(A') = k$, on dit que B commence à la $(k+1)$-ème place.

Si $A = BCDEF$ (où les mots B, C, D, E, F peuvent être vides), on dit que les segments C et E de A sont *disjoints*.

2. *Mots significatifs.*

Nous appellerons *suite significative* toute suite $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de mots de $L_0(S)$ qui possède la propriété suivante : pour chaque mot A_i de la suite, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1º A_i est un signe de poids 0.

2º Il existe p mots $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ de la suite, d'indice $< i$, et un signe f de poids p, tels que $A_i = fA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}$.

On appelle *mots significatifs* les mots qui figurent dans les suites significatives. On a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 1. — *Si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p mots significatifs et f un signe de poids p, le mot $fA_1A_2\ldots A_p$ est significatif.*

3. *Caractérisation des mots significatifs.*

Un mot $A \in L_0(S)$ est dit *équilibré* s'il possède les deux propriétés suivantes :

1º $l(A) = n(A) + 1$ (ce qui implique que A n'est pas vide).

2º Pour tout segment initial propre B de A, on a $l(B) \leqslant n(B)$.

Proposition 2. — *Pour qu'un mot soit significatif, il faut et il suffit qu'il soit équilibré.*

En effet, soit A un mot significatif, figurant dans une suite significative $A_1, A_2, \ldots, A_n$; nous allons montrer par récurrence sur k, que chacun des A_k est équilibré. Supposons ceci établi pour les A_j d'indice $j < k$, et prouvons-le pour A_k. Si A_k est un signe de poids 0 (ce qui est la seule hypothèse possible pour $k = 1$), A_k est équilibré puisque $l(A_k) = 1$ et $n(A_k) = 0$. Sinon, $A_k = fB_1B_2\ldots B_p$

où f est un signe de poids p, et les B_j sont de la forme A_{i_j}, avec $i_j < k$, donc sont des mots équilibrés par hypothèse. On a

$$\begin{aligned} l(A_k) &= 1 + l(B_1) + l(B_2) + \cdots + l(B_p) \\ &= 1 + (n(B_1) + 1) + (n(B_2) + 1) + \cdots + (n(B_p) + 1) \\ &= 1 + p + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_p) = 1 + n(A_k). \end{aligned}$$

Soit d'autre part C un segment initial propre de A, et soit q le plus grand des entiers $m < p$ tels que B_m soit un segment de C ; on a donc $C = fB_1B_2\ldots B_qD$, où D est un segment initial propre de B_{q+1}. Donc

$$\begin{aligned} l(C) &= 1 + l(B_1) + \cdots + l(B_q) + l(D) \\ &\leqslant 1 + (n(B_1) + 1) + \cdots + (n(B_q) + 1) + n(D) \\ &\leqslant p + n(B_1) + \cdots + n(B_q) + n(D) = n(C). \end{aligned}$$

Donc A_k est équilibré.

Pour prouver que, réciproquement, tout mot équilibré est significatif, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 1. — *Soit A un mot équilibré. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k < l(A)$, il existe un segment équilibré S de A et un seul qui commence à la $(k + 1)$-ème place.*

L'unicité de S résulte aussitôt de la remarque suivante : si T est un mot équilibré, aucun segment initial propre de T n'est équilibré par définition. Prouvons l'existence de S. Posons $A = BC$ où $l(B) = k$. Pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant q = l(C)$, soit C_i le segment initial de C de longueur i. Comme B est un segment initial propre de A, on a

$$l(C_q) = l(A) - l(B) \geqslant n(A) + 1 - n(B) = n(C_q) + 1.$$

D'autre part, on a $0 = l(C_0) \leqslant n(C_0) = 0$. Soit i le plus grand des entiers $j < q$ tels que $l(C_h) \leqslant n(C_h)$ pour $0 \leqslant h \leqslant j$; on a donc $l(C_i) \leqslant n(C_i)$ et $l(C_{i+1}) \geqslant n(C_{i+1}) + 1$. Montrons que C_{i+1} est équilibré. La condition relative aux segments initiaux propres est satisfaite en raison de la définition de i. D'autre part, on a

$$n(C_{i+1}) + 1 \leqslant l(C_{i+1}) = l(C_i) + 1 \leqslant n(C_i) + 1 \leqslant n(C_{i+1}) + 1$$

donc $l(C_{i+1}) = n(C_{i+1}) + 1$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. — *Tout mot équilibré A peut se mettre sous la forme $A = fA_1A_2\ldots A_p$, où les A_i sont équilibrés et où $n(f) = p$.*

En effet, soit f le signe initial de A. D'après le lemme 1, A peut s'écrire $fA_1A_2\ldots A_p$, où les A_i sont équilibrés : il suffit de définir par récurrence A_i comme étant le segment équilibré de A commençant à la $k(i)$-ème place, où $k(i) = 2 + \sum_{j<i} l(A_j)$. On a en outre

$$\begin{aligned} 1 + l(A_1) + \cdots + l(A_p) = l(A) &= n(A) + 1 \\ &= n(f) + n(A_1) + \cdots + n(A_p) + 1 \\ &= n(f) + (l(A_1) - 1) + \cdots + (l(A_p) - 1) + 1 \end{aligned}$$

d'où $n(f) = p$.

Ces lemmes étant établis, on voit aussitôt, par récurrence sur la longueur de A, que tout mot équilibré A est significatif, en raison du lemme 2 et de la prop. 1.

Corollaire 1. — *Soit A un mot significatif. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k < l(A)$, il existe un segment significatif de A et un seul qui commence à la $(k + 1)$-ème place.*

Corollaire 2. — *Tout mot significatif A peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme $fA_1A_2\ldots A_p$, où les A_i sont significatifs et où $n(f) = p$.*$_*$

4. *Application aux assemblages d'une théorie mathématique.*

Supposons que l'ensemble S soit l'ensemble des signes d'une théorie mathématique $\mathcal{T}$. Nous poserons $n(\square) = 0$, $n(\tau) = n(\neg) = 1$, $n(\vee) = 2$, $n(x) = 0$ pour toute lettre x ; enfin, pour tout signe spécifique s de $\mathcal{T}$, $n(s)$ est le poids de s, fixé par la donnée de $\mathcal{T}$.

Soit A un assemblage de $\mathcal{T}$. Nous désignerons par A^* le mot obtenu en effaçant les liens de A, et nous dirons que A est *équilibré* si A^* est équilibré (dans $L_0(S)$). Nous appellerons *segment* de A tout assemblage obtenu en munissant un segment S de A^* des liens qui, dans A, joignent deux signes de S.

Critère 1. — *Si A est un terme ou une relation de $\mathcal{T}$, A est équilibré.*

Soit en effet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une construction formative de $\mathcal{T}$ où figure A. Raisonnant par récurrence, supposons démontré que les A_j d'indice $j < i$ sont équilibrés, et prouvons que A_i est équilibré. Cela s'établit comme dans la première partie de la démonstration de la prop. 2, sauf lorsque A_i est de la forme $\tau_x(B)$, avec $B = A_j$, $j < i$. Dans ce cas, soit C l'assemblage obtenu en remplaçant x, dans chacune de ses occurrences dans B, par $\square$; le mot A_i^* est identique à τC^* ; or B^* est équilibré, donc C^* est équilibré (puisque $n(\square) = n(x) = 0$) ; par suite A_i^* est équilibré.

Nous avons donc obtenu une condition nécessaire pour qu'un assemblage de $\mathcal{T}$ soit un terme ou une relation. Cette condition, on va le voir, n'est pas suffisante.

Soit A un assemblage équilibré de $\mathcal{T}$. Si A commence par une lettre ou un $\square$, A se réduit nécessairement à ce signe initial (cor. 2 de la prop. 2). Dans tous les autres cas, nous allons définir le ou les assemblages *antécédents* à A.

1° Si A commence par un $\neg$, ou un $\vee$, ou un signe spécifique, A^* se met de manière unique sous la forme $fB_1B_2\ldots B_p$, f étant un signe de poids $p \geqslant 1$ et les B_i étant équilibrés (cor. 2 de la prop. 2). Nous appellerons assemblages antécédents à A les segments $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de A qui correspondent aux segments $B_1, B_2, \ldots, B_p$ de A^*. En outre, nous dirons que A est *parfaitement équilibré* si A est identique à $fA_1A_2\ldots A_p$, autrement dit si, dans A, aucun lien ne joint f à l'un des B_i, ou deux des B_i distincts entre eux.

2° Si A commence par un τ, A^* est de la forme τB, B étant équilibré (cor. 2 de la prop. 2). Nous appellerons assemblage antécédent à A l'un quelconque des assemblages A_1 définis de la façon suivante : on remplace les $\square$ de B qui sont liés dans A au τ initial, par une lettre x distincte des autres lettres figurant dans B, et on rétablit les liens qui joignent, dans A, deux signes de B. (Si, au lieu de x, on substitue une lettre y qui ne figure pas non plus dans B, on obtient un assemblage qui n'est autre que $(y \mid x)A_1$.) En outre, nous dirons que A est *parfaitement équilibré* si A est identique à $\tau_x(A_1)$, autrement dit si aucun lien ne joint le τ initial à des signes de B autres que des $\square$.

On peut alors énoncer le critère suivant :

CRITÈRE 2. — *Soit A un assemblage équilibré de $\mathcal{T}$.*

Pour que A soit un terme, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée : 1) *A se réduit à une lettre* ; 2) *A commence par un τ, est parfaitement équilibré, et les assemblages antécédents sont des relations* (d'après CF8, il suffit de vérifier qu'*un* assemblage antécédent est une relation) ; 3) *A commence par un signe substantifique, est parfaitement équilibré et les assemblages antécédents sont des termes.*

Pour que A soit une relation, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée : 1) *A commence par un $\vee$ ou un $\neg$, est parfaitement équilibré, et les assemblages antécédents sont des relations* ; 2) *A commence par un signe relationnel, est parfaitement équilibré, et les assemblages antécédents sont des termes.*

Les conditions sont suffisantes d'après les critères CF1 à CF4 (§ 1, n° 4). Montrons qu'elles sont nécessaires. Si A est une relation, on a vu (§ 1, n° 3) que A commence par un $\vee$, ou un $\neg$, ou un signe relationnel. On raisonne de façon analogue dans les trois cas. Si par exemple A commence par un $\vee$, A est de la forme $\vee BC$, où B et C sont des relations, de sorte que B, C sont les assemblages antécédents à A ; A est donc parfaitement équilibré. Si A est un terme, ou bien il se réduit à une lettre, ou bien il commence par un signe substantifique, ou bien il commence par un τ. Dans le second cas, on raisonne comme ci-dessus. Si A commence par un τ, la définition d'une construction formative prouve que A est de la forme $\tau_x(B)$, où B est une relation et x une lettre, de sorte qu'on peut prendre B pour assemblage antécédent à A et que A est parfaitement équilibré.

Lorsqu'on veut savoir si un assemblage donné A (non réduit à une lettre) est une relation (resp. un terme) de $\mathcal{T}$, on vérifie d'abord que A est équilibré, et qu'il commence par un $\vee$, un $\neg$ ou un signe relationnel (resp. un τ ou un signe substantifique). On forme le ou les assemblages antécédents, et on vérifie s'il y a lieu que A est parfaitement équilibré. Ceci fait, on est ramené à un problème analogue, mais concernant des assemblages plus courts. De proche en proche, on est ramené à des assemblages dont chacun est réduit à un signe, pour lesquels la solution est immédiate.

Remarque. — Sauf pour certaines théories mathématiques particulièrement pauvres en axiomes (cf. exerc. 7), on ne dispose pas, en général, d'un procédé du type précédent, permettant de savoir si une relation donnée R d'une théorie $\mathcal{T}$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Exercices. — 1) Soient S un ensemble de signes, A un mot de $L_0(S)$, B et C deux segments significatifs de A. Alors, ou bien B est un segment de C, ou bien C est un segment de B, ou bien B et C sont disjoints.

2) Soient S un ensemble de signes, A un mot significatif de $L_0(S)$, qui se met sous la forme $A'BA''$, où B est significatif. Soit C un mot significatif ; alors le mot $A'CA''$ est significatif (utiliser l'exerc. 1).

3) Soient E un ensemble, f une application de $E \times E$ dans E (« loi de composition interne », cf. *Alg.*, chap. I, § 1). Soit S un ensemble de signes somme de E et d'un ensemble réduit à l'élément f ; on pose $n(f) = 2$, $n(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

a) Soit M l'ensemble des mots significatifs de $L_0(S)$; montrer qu'il existe une application et une seule φ de M dans E satisfaisant aux conditions suivantes : 1) $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in E$; 2) si A et B sont deux mots significatifs, $\varphi(fAB) = f(\varphi(A), \varphi(B))$.

b) Pour tout mot $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $L_0(S)$, soit A^* le mot (s_{i_k}), où les i_k sont les indices i tels que $s_i \neq f$, rangés par ordre croissant. Deux mots A, B de $L_0(S)$ sont dits semblables si $A^* = B^*$. Montrer que, si la loi de composition f est associative (c'est-à-dire si $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$), on a $\varphi(A) = \varphi(B)$ pour deux mots significatifs semblables (« théorème général d'associativité »). (Un mot significatif $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2n}$ est dit normal si $s_i = f$ pour $i = 0, 2, 4, \ldots, 2n-2$, $s_i \neq f$ pour les autres indices. Montrer que tout mot significatif A est semblable à un mot normal et un seul A', et prouver que $\varphi(A) = \varphi(A')$ par récurrence sur la longueur de A.)

¶ 4) Soit A un terme ou une relation d'une théorie $\mathcal{T}$. Considérons la suite d'assemblages définie de la façon suivante. On écrit d'abord A ; si A se réduit à une lettre, la construction est terminée. Sinon, on écrit le ou les assemblages antécédents à A (si A commence par un τ, on choisit arbitrairement *un* des assemblages antécédents). Puis on écrit, s'il y a lieu, le ou les assemblages antécédents à ceux des assemblages précédents qui ne sont pas réduits à des lettres. Etc.

a) Si on renverse l'ordre de cette suite d'assemblages, on obtient une construction formative.

b) Soit B un segment de A, équilibré et tel qu'aucun signe de B ne soit lié *dans* A à un signe extérieur à B. Montrer que B est un terme ou une relation (utiliser *a*) et l'exerc. 1).

c) On remplace B dans A par un terme (resp. une relati on) si B est un terme (resp. une relation). Montrer que l'assemblage obtenu est un terme si A est un terme, une relation si A est une relation.

5) Soient A un assemblage d'une théorie $\mathcal{T}$, T un terme de $\mathcal{T}$, x une lettre. Si $(T \mid x)A$ est un terme (resp. une relation), A est un terme (resp. une relation). (Utiliser l'exerc. 4.)

6) Une relation d'une théorie $\mathcal{T}$ est dite *logiquement irréductible* si elle commence par un signe relationnel. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes de $\mathcal{T}$. On appelle *construction logique* de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$, toute suite $A_1, A_2, \ldots, A_p$ d'assemblages de $\mathcal{T}$ tels que, pour chaque A_i, l'une des conditions suivantes soit satisfaite : 1° A_i est l'une des relations $R_1, R_2, \ldots, R_n$; 2° il existe un assemblage A_j précédant A_i tel que A_i soit $\neg A_j$; 3° il existe deux assemblages A_j et A_k précédant A_i tels que A_i soit $\vee A_j A_k$.

a) Montrer que les assemblages d'une construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des relations de $\mathcal{T}$. On appelle relation *logiquement construite* sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une relation qui figure dans une construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

b) Si R et S sont logiquement construites sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$, il en est de même de $\neg R$, $\vee RS$, $\Rightarrow RS$, « R et S », $R \Leftrightarrow S$.

c) Soit R une relation de $\mathcal{T}$. On considère la suite des relations définie de la façon suivante. On écrit d'abord R ; si R est logiquement irréductible, la construction est terminée. Sinon, on écrit le ou les assemblages antécédents à R (qui sont des *relations* bien déterminées). Puis on écrit, s'il y a lieu, le ou les assemblages antécédents à ceux des assemblages précédents qui ne sont pas logiquement irréductibles. Etc. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ les relations logiquement irréductibles distinctes que fournit cette construction : on les appelle les *composantes logiques* de R. Montrer que R est logiquement construite sur ses composantes logiques, mais que, si on ôte de la suite $R_1, R_2, \ldots, R_n$ une relation, R n'est pas logiquement construite sur les relations restantes.

d) Soient R une relation, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes telles que : 1° R est logiquement construite sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$; 2° si on ôte une relation de la suite $R_1, R_2, \ldots R_n$, R n'est pas logiquement construite sur les relations restantes. Montrer que $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont les composantes logiques de R.

¶ 7) Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes (exerc. 6) d'une théorie $\mathcal{T}$. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Supposons chaque R_j affecté de l'un des signes 0, 1. On affecte alors à chaque A_i l'un des signes 0, 1 par la règle suivante : 1° Si A_i est identique à R_j, on affecte à A_i le même signe qu'à R_j ; 2° si A_i est identique à $\neg A_j$, A_j précédant A_i, on affecte à A_i le signe 1 (resp. 0) si A_j est affecté du signe 0 (resp. 1) ; 3° si A_i est identique à $\vee A_j A_k$, on affecte à A_i le signe 1 si A_j et A_k sont tous deux affectés du signe 1, le signe 0 dans les autres cas. (On dit qu'on applique la « règle symbolique » suivante : $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 10 = \vee 01 = \vee 00 = 0$.)

a) Montrer qu'il n'y a qu'une seule manière d'attribuer un signe à chaque A_i conformément à la règle précédente.

b) Si R est logiquement construite sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$, le signe affecté à R ne dépend pas de la construction logique de base $R_1, R_2, \ldots, R_n$ où figure R.

c) Si R et S sont logiquement construites sur $R_1, R_2, \ldots, R_n$ et si les signes affectés à R et $\Rightarrow RS$ sont 0, le signe affecté à S est 0.

d) Supposons désormais que les axiomes de $\mathcal{T}$ soient fournis par les *seuls* schémas S1 à S4. Soit $\boldsymbol{R}$ un théorème de $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ ses composantes logiques. Montrer que, quelle que soit la manière d'affecter l'un des signes 0 ou 1 à $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, le signe correspondant affecté à $\boldsymbol{R}$ est 0 (établir d'abord ceci quand $\boldsymbol{R}$ est un axiome de $\mathcal{T}$; dans le cas général, considérer une démonstration de $\boldsymbol{R}$, et appliquer *c*)).

e) Soit $\boldsymbol{R}$ une relation logiquement irréductible de $\mathcal{T}$. Montrer que ni $\boldsymbol{R}$, ni « non $\boldsymbol{R}$ » ne sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. En particulier, $\mathcal{T}$ est non contradictoire (utiliser *d*)).

f) Soient $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ des relations logiquement irréductibles distinctes de $\mathcal{T}$. On considère toutes les relations de la forme « $\boldsymbol{R}'_1$ ou $\boldsymbol{R}'_2$ ou ... ou $\boldsymbol{R}'_n$ », où, pour chaque i, $\boldsymbol{R}'_i$ est l'une des deux relations $\boldsymbol{R}_i$, « non $\boldsymbol{R}_i$ ». Soient $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \ldots, \boldsymbol{S}_p$ ces relations. Soient $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \ldots, \boldsymbol{T}_q$ les relations de la forme « $\boldsymbol{S}_{i_1}$ et $\boldsymbol{S}_{i_2}$ et ... et $\boldsymbol{S}_{i_r}$ », où $i_1, i_2, \ldots, i_r$ est une suite strictement croissante quelconque d'indices. Soit enfin $\boldsymbol{T}_0$ la relation « $\boldsymbol{R}_1$ ou (non $\boldsymbol{R}_1$) », qui est un théorème de $\mathcal{T}$. Montrer que toute relation logiquement construite sur $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ est équivalente dans $\mathcal{T}$ à une et une seule des relations $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_q$. (Démontrer d'abord que chaque relation $\boldsymbol{R}_i$ est équivalente dans $\mathcal{T}$ à l'une des relations $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_q$; si $\boldsymbol{R}$ est logiquement construite sur $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, raisonner de proche en proche sur une construction logique de base $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ contenant $\boldsymbol{R}$; pour l'unicité, utiliser *d*).)

g) Soit $\boldsymbol{R}$ une relation de $\mathcal{T}$, $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ ses composantes logiques. Pour que $\boldsymbol{R}$ soit un théorème de $\mathcal{T}$, il faut et il suffit que, pour toute manière d'affecter l'un des signes 0 ou 1 à $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, le signe correspondant affecté à $\boldsymbol{R}$ soit 0.

¶ 8) Soient $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ des relations logiquement irréductibles d'une théorie $\mathcal{T}$ (exerc. 6). Affectons à chacune des $\boldsymbol{R}_i$ l'un des signes 0, 1, 2. A toute relation d'une construction logique de base $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ on affecte alors l'un des signes 0, 1, 2 par la règle symbolique (exerc. 7) suivante :

$$\urcorner 0 = 1, \quad \urcorner 1 = 0, \quad \urcorner 2 = 2\,;$$
$$\vee 00 = \vee 01 = \vee 02 = \vee 10 = \vee 20 = \vee 22 = 0,$$
$$\vee 11 = 1, \quad \vee 12 = \vee 21 = 2.$$

a) Si $\boldsymbol{R}$ est logiquement construite sur $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, le signe ainsi affecté à $\boldsymbol{R}$ est indépendant de la construction logique de base $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, où figure $\boldsymbol{R}$.

b) Supposons que les axiomes de $\mathcal{T}$ soient fournis par les seuls schémas S2, S3, S4. Soit $\boldsymbol{R}$ un théorème de $\mathcal{T}$. Montrer que, quelle que soit la manière d'affecter l'un des signes 0, 1, 2 aux composantes logiques de $\boldsymbol{R}$, le signe correspondant affecté à $\boldsymbol{R}$ est 0. Par contre, si $\boldsymbol{S}$ est logiquement irréductible et affectée du signe 2, le signe affecté à $(\boldsymbol{S}$ ou $\boldsymbol{S}) \Rightarrow \boldsymbol{S}$ est 2. En déduire que $\mathcal{T}$ est non équivalente à la théorie ayant mêmes signes que $\mathcal{T}$, et dont les axiomes sont fournis par les schémas S1, S2, S3, S4.

c) Établir un résultat analogue pour des théories basées sur les seuls schémas S1, S3, S4, ou sur les seuls schémas S1, S2, S4. (On utilisera respectivement les règles suivantes :

$$\urcorner 0 = 1, \quad \urcorner 1 = 0, \quad \urcorner 2 = 2, \quad \vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = 0,$$
$$\vee 11 = 1, \quad \vee 12 = \vee 21 = 1, \quad \vee 22 = 1\,;$$
$$\urcorner 0 = 1, \quad \urcorner 1 = 2, \quad \urcorner 2 = 0,$$
$$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = \vee 21 = 0,$$
$$\vee 11 = \vee 12 = 1, \quad \vee 22 = 2.)$$

d) Établir un résultat analogue pour une théorie basée sur les seuls schémas S1, S2, S3. (On utilisera quatre signes 0, 1, 2, 3, et la règle suivante :

$$\urcorner 0 = 1, \quad \urcorner 1 = 0, \quad \urcorner 2 = 3, \quad \urcorner 3 = 0,$$
$$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = \vee 03 = \vee 30 = \vee 23 = \vee 32 = 0,$$
$$\vee 11 = 1, \quad \vee 12 = \vee 21 = \vee 22 = 2, \quad \vee 13 = \vee 31 = \vee 33 = 3.)$$

CHAPITRE II

THÉORIE DES ENSEMBLES

§ 1. — Relations collectivisantes.

1. *La théorie des ensembles.*

La *théorie des ensembles* est une théorie dans laquelle figurent les signes relationnels $=$, $\in$, et le signe substantifique $\supset$ (tous ces signes étant de poids 2) ; elle comporte, outre les schémas S1 à S7, donnés au chap. I, le schéma S8 qui sera introduit au nº 6, et les axiomes explicites A1 (nº 3), A2 (nº 5), A3 (§ 2, nº 1), A4 (§ 5, nº 1) et A5 (chap. III, § 6, nº 1). Ces axiomes explicites ne contiennent pas de lettres ; autrement dit, la théorie des ensembles est une théorie *sans constantes*.

Puisque la théorie des ensembles est une théorie égalitaire, les résultats du chap. I lui sont applicables.

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous raisonnerons toujours dans une théorie plus forte (chap. I, § 2, nº 4) que la théorie des ensembles ; quand la théorie n'est pas mentionnée explicitement, c'est de la théorie des ensembles qu'il s'agit. Il sera évident dans bien des cas qu'une telle hypothèse n'est pas nécessaire, et le lecteur déterminera sans peine dans quelle théorie moins forte que la théorie des ensembles les résultats énoncés sont valables.

Si T et U sont des termes, l'assemblage $\in TU$ est une relation (dite *relation d'appartenance*) que nous noterons pratiquement de l'une quelconque des manières suivantes : $T \in U$, $(T) \in (U)$, « T appartient à U », « T est élément de U ». La relation « non $(T \in U)$ » se note $T \notin U$.

Du point de vue « naïf », beaucoup d'êtres mathématiques peuvent être considérés comme des collections ou « ensembles » d'objets. Nous ne chercherons pas à formaliser cette notion, et

dans l'interprétation formaliste de ce qui suit, le mot « ensemble » doit être considéré comme strictement synonyme de « terme » ; en particulier, des phrases telles que « soit X un ensemble » sont, en principe, totalement superflues, puisque toute lettre est un terme ; de telles phrases ne sont introduites que pour faciliter l'interprétation intuitive du texte.

2. *L'inclusion.*

DÉFINITION. 1. — *La relation désignée par* $(\forall z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$ *dans laquelle ne figurent que les lettres x et y, se note de l'une quelconque des manières suivantes :* $x \subset y$, $y \supset x$, « *x est contenu dans y* », « *y contient x* », « *x est une partie de y* », « *x est un sous-ensemble de y* ». *La relation* non$(x \subset y)$ *se note* $x \not\subset y$ *ou* $y \not\supset x$.

Conformément aux usages signalés au chap. I, § 1, nº 1, cette définition entraîne la convention métamathématique suivante : soient T et U des assemblages ; si, dans l'assemblage $x \subset y$, on substitue simultanément T à x et U à y, on obtient un assemblage qui sera désigné par $T \subset U$; si on désigne par x, y des lettres quelconques distinctes de x et de y, distinctes entre elles, et ne figurant ni dans T, ni dans U, l'assemblage $T \subset U$ est donc identique à $(T|x)(U|y)(x|x)(y|y)(x \subset y)$, donc, d'après CS8, CS9 (chap. I, § 4, nº 1) et CS5 (chap. I, § 1, nº 2), à $(\forall z)((z \in T) \Rightarrow (z \in U))$, à condition que z soit une lettre ne figurant ni dans T, ni dans U.

Désormais, quand on posera une définition mathématique, on ne signalera plus la convention métamathématique qui en résulte.

CS12. *Soient T, U, V des assemblages, et x une lettre. L'assemblage* $(V|x)(T \subset U)$ *est identique à* $(V|x)T \subset (V|x)U$.

Ceci résulte aussitôt de CS9 (chap. I, § 4, nº 1) et CS5 (chap. I, § 1, nº 2).

CF13. *Si T et U sont des termes, $T \subset U$ est une relation.*

Ceci résulte aussitôt de CF8 (chap. I, § 1, nº 4).

Toute relation de la forme $T \subset U$ (où T et U sont des termes) est dite *relation d'inclusion*.

Désormais, nous n'expliciterons plus les critères de substitution et les critères formatifs qui devraient suivre les définitions. On notera cependant que ces critères seront souvent utilisés implicitement dans les démonstrations.

Pour démontrer dans une théorie $\mathcal{T}$ la relation $x \subset y$, il suffit, d'après C27 (chap. I, § 4, n° 1), de démontrer $z \in y$ dans la théorie obtenue en adjoignant $z \in x$ aux axiomes de $\mathcal{T}$, z étant une lettre distincte de x, de y et des constantes de la théorie. En pratique on dit : « soit z un élément de x » ; et on cherche à démontrer $z \in y$.

PROPOSITION 1. — $x \subset x$.

Cette proposition est immédiate.

On dit que x est la *partie pleine de* x.

PROPOSITION 2. — $(x \subset y$ et $y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$.

Adjoignons les hypothèses $x \subset y$, $y \subset z$ et $u \in x$. Alors les relations $(u \in x) \Rightarrow (u \in y)$, $(u \in y) \Rightarrow (u \in z)$ sont vraies, donc la relation $u \in z$ est vraie.

3. *L'axiome d'extensionalité.*

On appelle *axiome d'extensionalité* l'axiome suivant :

A1. $$(\forall x)(\forall y)((x \subset y \text{ et } y \subset x) \Rightarrow (x = y)).$$

Intuitivement, cet axiome exprime que deux ensembles ayant les mêmes éléments sont égaux.

Pour démontrer $x = y$, il suffit donc de démontrer $z \in y$ dans la théorie obtenue en adjoignant l'hypothèse $z \in x$, et $z \in x$ dans la théorie obtenue en adjoignant l'hypothèse $z \in y$, z étant une lettre distincte de x, de y et des constantes.

C48. *Soient* $\mathbf{R}$ *une relation,* $\mathbf{x}$ *une lettre,* $\mathbf{y}$ *une lettre distincte de* $\mathbf{x}$ *et ne figurant pas dans* $\mathbf{R}$. *La relation* $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$ *est univoque en* $\mathbf{y}$.

En effet, soit $\mathbf{z}$ une lettre distincte de $\mathbf{x}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$. Adjoignons les hypothèses $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$ et $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{z}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$. Alors, on a successivement les théorèmes

$$(\forall \mathbf{x})(((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R}) \text{ et } ((\mathbf{x} \in \mathbf{z}) \Leftrightarrow \mathbf{R})),\ (\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{z})),$$
$$\mathbf{y} \subset \mathbf{z},\ \mathbf{z} \subset \mathbf{y}.$$

D'après A1, on a $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Ceci établit C48.

4. *Relations collectivisantes.*

Soient $\mathbf{R}$ une relation, $\mathbf{x}$ une lettre. Si $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ désignent des lettres distinctes de $\mathbf{x}$ *et ne figurant pas dans* $\mathbf{R}$, les relations

$(\exists \mathbf{y})(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$ et $(\exists \mathbf{y}')(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}') \Leftrightarrow \mathbf{R})$ sont identiques d'après CS8 (chap. I, § 4, n° 1). La relation ainsi définie (qui ne contient pas $\mathbf{x}$) se désigne par $\mathrm{Coll}_{\mathbf{x}}\mathbf{R}$.

Lorsque $\mathrm{Coll}_{\mathbf{x}}\mathbf{R}$ est un théorème d'une théorie $\mathcal{T}$, on dit que $\mathbf{R}$ est *collectivisante en* $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{T}$. S'il en est ainsi, on peut introduire une constante auxiliaire $\mathbf{a}$, distincte de $\mathbf{x}$, des constantes de $\mathcal{T}$, et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$, avec l'axiome introducteur $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$, ou, ce qui revient au même si $\mathbf{x}$ n'est pas une constante de $\mathcal{T}$, $(\mathbf{x} \in \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathbf{R}$.

Intuitivement, dire que $\mathbf{R}$ est collectivisante en $\mathbf{x}$, c'est dire qu'il existe un ensemble $\mathbf{a}$ tel que les objets $\mathbf{x}$ possédant la propriété $\mathbf{R}$ soient précisément les éléments de $\mathbf{a}$.

Exemples. — 1) La relation $x \in y$ est évidemment collectivisante en x.

2) La relation $x \notin x$ *n'est pas collectivisante* en x ; autrement dit, (non $\mathrm{Coll}_x(x \notin x)$) est un théorème. Raisonnons par l'absurde en supposant $x \notin x$ collectivisante. Soit $\mathbf{a}$ une constante auxiliaire, distincte de x et des constantes de la théorie, avec l'axiome introducteur $(\forall x)((x \notin x) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{a}))$. Alors, la relation $(\mathbf{a} \notin \mathbf{a}) \Leftrightarrow (\mathbf{a} \in \mathbf{a})$ est vraie d'après C30 (chap. I, § 4, n° 3). La méthode de disjonction des cas (chap. I, § 3, n°3) prouve d'abord que la relation $\mathbf{a} \notin \mathbf{a}$ est vraie, puis que la relation $\mathbf{a} \in \mathbf{a}$ est vraie, ce qui est absurde.

C49. *Soient* $\mathbf{R}$ *une relation et* $\mathbf{x}$ *une lettre. Si* $\mathbf{R}$ *est collectivisante en* $\mathbf{x}$, *la relation* $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$, *où* $\mathbf{y}$ *est une lettre distincte de* $\mathbf{x}$ *et ne figurant pas dans* $\mathbf{R}$, *est fonctionnelle en* $\mathbf{y}$.

Ceci résulte aussitôt de C48.

Très fréquemment, dans la suite, on disposera d'un théorème de la forme $\mathrm{Coll}_{\mathbf{x}}\mathbf{R}$. On introduira alors, pour représenter le terme $\tau_{\mathbf{y}}(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$, qui ne dépend pas du choix de la lettre $\mathbf{y}$ (distincte de $\mathbf{x}$ et ne figurant pas dans $\mathbf{R}$) un symbole fonctionnel ; dans ce qui suit, nous utiliserons le symbole $\mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{R})$; le terme correspondant ne contient pas $\mathbf{x}$. C'est de ce terme qu'il s'agira quand on parlera de « *l'ensemble des* $\mathbf{x}$ *tels que* $\mathbf{R}$ ». Il résulte de S5 (chap. I, § 4, n° 2) que $(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{R})) \Leftrightarrow \mathbf{R})$ est alors un théorème, et par suite que la relation $\mathbf{R}$ est *équivalente* à $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{R})$.

C50. *Soient R, S deux relations et x une lettre. Si R et S sont collectivisantes en x, la relation $(\forall x)(R \Rightarrow S)$ est équivalente à $\mathcal{E}_x(R) \subset \mathcal{E}_x(S)$; la relation $(\forall x)(R \Leftrightarrow S)$ est équivalente à $\mathcal{E}_x(R) = \mathcal{E}_x(S)$.*

Cela résulte aussitôt de la remarque qui précède, de la déf. 1 et de l'axiome A1.

5. *L'axiome de l'ensemble à deux éléments.*

A2. $$(\forall x)(\forall y)\operatorname{Coll}_z(z = x \text{ ou } z = y).$$

Cet axiome exprime que, si x et y sont des objets, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont x et y.

Définition 2. — *L'ensemble $\mathcal{E}_z(z = x$ ou $z = y)$, dont les seuls éléments sont x et y, se note $\{x, y\}$.*

La relation $z \in \{x, y\}$ est donc équivalente à « $z = x$ ou $z = y$ » ; il résulte de C50 que l'on a $\{y, x\} = \{x, y\}$.

Soit $R\{z\}$ une relation, x et y des lettres distinctes de z. Des critères C32, C33 (chap. I, § 4, n° 3) et C43 (chap. I, § 5, n° 1) il résulte aisément que la relation $(\exists z)((z \in \{x, y\})$ et $R\{z\})$ est équivalente à « $R\{x\}$ ou $R\{y\}$ » ; on en déduit que la relation $(\forall z)((z \in \{x, y\}) \Rightarrow R\{z\})$ est équivalente à « $R\{x\}$ et $R\{y\}$ ».

L'ensemble $\{x, x\}$, qu'on désigne simplement par $\{x\}$, s'appelle *l'ensemble dont le seul élément est x* (ou *l'ensemble réduit au seul élément x*) ; la relation $z \in \{x\}$ est équivalente à $z = x$; la relation $x \in X$ est équivalente à $\{x\} \subset X$.

6. *Le schéma de sélection et réunion.*

On appelle *schéma de sélection et réunion* le schéma suivant :

S8. *Soient R une relation, x et y des lettres distinctes, X et Y des lettres distinctes de x et y et ne figurant pas dans R. La relation*

(1) $$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y) \operatorname{Coll}_x((\exists y)((y \in Y) \text{ et } R))$$

est un axiome.

Montrons d'abord que cette règle est bien un schéma. En effet, désignons par S la relation (1), et, dans S, substituons un terme T à

une lettre z ; d'après CS8 (chap. I, § 4, n° 1), on peut supposer x, y, X, Y distincts de z et ne figurant pas dans T. Alors $(T|z)S$ est identique à

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R' \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y) \operatorname{Coll}_x((\exists y)((y \in Y) \text{ et } R'))$$

où R' est $(T|z)R$.

Intuitivement, la relation $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$ signifie que, pour tout objet y, il existe un ensemble X (qui peut dépendre de y), tel que les objets x qui sont dans la relation R avec l'objet y donné soient des éléments de X (sans constituer nécessairement tout l'ensemble X). Le schéma de sélection et réunion affirme que, s'il en est ainsi, et si Y est un ensemble quelconque, il existe un ensemble dont les éléments sont exactement tous les objets x se trouvant dans la relation R avec un objet y au moins de l'ensemble Y.

C51. *Soient P une relation, A un ensemble et x une lettre ne figurant pas dans A. La relation « P et $x \in A$ » est collectivisante en x.*

Désignons par R la relation « P et $x = y$ », où y est une lettre distincte de x et ne figurant ni dans P ni dans A. La relation $(\forall x)(R \Rightarrow (x \in \{y\}))$ est vraie d'après C27 (chap. I, § 4, n° 1). Soit X une lettre distincte de x et de y et ne figurant pas dans P. La relation précédente est identique à $(\{y\}|X)((\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)))$ (notamment parce que x est distincte de y), donc la relation $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$ est vraie en vertu de S5 et de C27 (chap. I, § 4, n°s 1 et 2). Il résulte de S8 et de C30 (chap. I, § 4, n° 3) que la relation $(A|Y) \operatorname{Coll}_x(\exists y)(y \in Y$ et $R)$ (où Y est une lettre ne figurant pas dans R) est vraie, et cette relation est identique à $\operatorname{Coll}_x(\exists y)(y \in A$ et $R)$ (notamment parce que ni x, ni y ne figurent dans A). Enfin, la relation « $y \in A$ et R » est équivalente à « $x = y$ et $x \in A$ et P » d'après C43 (chap. I, § 5, n° 1) ; comme y ne figure ni dans P ni dans A, la relation $(\exists y)(x = y$ et $x \in A$ et $P)$ est équivalente à « $((\exists y)(x = y))$ et $x \in A$ et P » d'après C33 (chap. I, § 4, n° 3) donc à « P et $x \in A$ » puisque $(\exists y)(x = y)$ est vraie.

L'ensemble $\mathcal{E}_x(P$ et $x \in A)$ est appelé *l'ensemble des $x \in A$ tels que P* * (c'est ainsi qu'on parlera de l'ensemble des nombres réels tels que P) $_*$.

C52. *Soient* R *une relation*, A *un ensemble*, x *une lettre ne figurant pas dans* A. *Si la relation* $R \Rightarrow (x \in A)$ *est un théorème*, R *est collectivisante en* x.

En effet, R est alors équivalente à « R et $x \in A$ ».

Remarque. — Soient R une relation collectivisante en x, et S une relation telle que $(\forall x)(S \Rightarrow R)$ soit un théorème. Alors S est collectivisante en x, car R est équivalente à $x \in \mathcal{E}_x(R)$, donc $S \Rightarrow (x \in \mathcal{E}_x(R))$ est un théorème, et il suffit d'appliquer C52. On notera en outre que, dans ce cas, on a $\mathcal{E}_x(S) \subset \mathcal{E}_x(R)$ d'après C50.

C53. *Soient* T *un terme*, A *un ensemble*, x *et* y *des lettres distinctes. On suppose que* x *ne figure pas dans* A, *et que* y *ne figure ni dans* T *ni dans* A. *La relation* $(\exists x)(y = T$ et $x \in A)$ *est collectivisante en* y.

Soit R la relation $y = T$. La relation $(\forall y)(R \Rightarrow (y \in \{T\}))$ est vraie, donc il en est de même de $(\forall x)(\exists X)(\forall y)(R \Rightarrow (y \in X))$, où X est une lettre distincte de y et ne figurant pas dans R. En vertu de S8, la relation $(\exists x)(x \in A$ et $R)$ est collectivisante en y, ce qui démontre C53.

La relation $(\exists x)(y = T$ et $x \in A)$ se lit souvent : « y peut se mettre sous la forme T pour un x appartenant à A ». L'ensemble $\mathcal{E}_y((\exists x)(y = T$ et $x \in A))$ est généralement appelé *l'ensemble des objets de la forme* T *pour* $x \in A$. L'assemblage ainsi désigné ne contient ni x ni y, et ne dépend pas du choix de la lettre y vérifiant les conditions de C53.

7. Complémentaire d'un ensemble. L'ensemble vide.

La relation $(x \notin A$ et $x \in X)$ est collectivisante en x d'après C51.

DÉFINITION 3. — *Soit* A *une partie d'un ensemble* X. *On appelle complémentaire de* A *par rapport à* X, *et on désigne par* $\complement_X A$ *ou* $X - A$ (ou par $\complement A$ lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre) *l'ensemble des éléments de* X *qui n'appartiennent pas à* A, *c'est-à-dire l'ensemble* $\mathcal{E}_x(x \notin A$ et $x \in X)$.

Soit A une partie d'un ensemble X ; les relations « $x \in X$ et $x \notin A$ » et $x \in \complement_X A$ sont donc équivalentes. Par suite, la relation « $x \in X$ et

$x \notin \complement_X A$ » est équivalente à « $x \in X$ et ($x \notin X$ ou $x \in A$) », donc à $x \in A$. Autrement dit, $A = \complement_X(\complement_X A)$ est une relation vraie. On voit de même que, si B est une partie de X, les relations $A \subset B$ et $\complement_X B \subset \complement_X A$ sont équivalentes.

THÉORÈME 1. — *La relation* $(\forall x)(x \notin X)$ *est fonctionnelle en* X.

En effet, la relation $(\forall x)(x \notin X)$ entraîne $(\forall Y)(X \subset Y)$; en vertu de l'axiome d'extensionalité, la relation $(\forall x)(x \notin X)$ est donc univoque en X. D'autre part, la relation $(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$ est vraie, ce qui prouve que $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$ est vraie.

Le terme $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$ correspondant à cette relation fonctionnelle se représente par le symbole fonctionnel $\varnothing$, qu'on appelle *l'ensemble vide* (*) ; la relation $(\forall x)(x \notin X)$, qui est équivalente à $X = \varnothing$, se lit : « *l'ensemble* X *est vide* ». On a les théorèmes $x \notin \varnothing$, $\varnothing \subset X$, $\complement_X X = \varnothing$, $\complement_X \varnothing = X$; la relation $X \subset \varnothing$ est équivalente à $X = \varnothing$. Si $R\{x\}$ est une relation, la relation $(\forall x)((x \in \varnothing) \Rightarrow R\{x\})$ est vraie.

Remarque. — Il n'existe pas d'ensemble dont tous les objets soient éléments ; autrement dit, « non $(\exists X)(\forall x)(x \in X)$ » est un théorème. En effet, s'il existait un tel ensemble, toute relation serait collectivisante d'après C52. Or, nous avons vu (nº 4) que la relation $x \notin x$ n'est pas collectivisante.

Exercices. — 1) Montrer que la relation

$$(x = y) \Leftrightarrow (\forall X)((x \in X) \Rightarrow (y \in X))$$

est un théorème.

2) Montrer que $\varnothing \neq \{x\}$ est un théorème ; en déduire qu'il en est de même de $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$.

3) Soient A et B deux parties d'un ensemble X. Montrer que la relation $B \subset \complement A$ est équivalente à $A \subset \complement B$ et que la relation $\complement B \subset A$ est équivalente à $\complement A \subset B$.

4) Démontrer que la relation $X \subset \{x\}$ est équivalente à « $X = \{x\}$ ou $X = \varnothing$ ».

5) Démontrer que l'on a $\varnothing = \tau_X(\tau_x(x \in X) \notin X)$.

(*) Le terme désigné par $\varnothing$ est donc $\tau \neg\neg\neg \in \tau \neg\neg \in \square\square\square$.

6) Soit $\mathcal{T}$ une théorie égalitaire dans laquelle figure le signe $\in$, et qui comporte l'axiome suivant :

A1'. $(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$

(autrement dit : « tout terme est égal à l'ensemble de ses éléments »). Montrer que l'axiome d'extensionalité A1 est un théorème de $\mathcal{T}$ (utiliser le schéma S7).

§ 2. — Couples.

1. *L'axiome du couple.*

Comme nous l'avons dit au § 1, nº 1, le signe $\supset$ est, dans la théorie des ensembles, un signe substantifique de poids 2. Si T, U sont des termes, l'assemblage $\supset TU$ est donc un terme, qu'on désigne pratiquement par (T, U). Ceci posé, l'*axiome du couple* est le suivant :

A3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(((x, y) = (x', y')) \Rightarrow (x = x' \text{ et } y = y'))$.

Comme la relation « $x = x'$ et $y = y'$ » entraîne $(x, y) = (x', y')$ d'après C44 (chap. I, § 5, nº 2), on voit que la relation $(x, y) = (x', y')$ est *équivalente* à « $x = x'$ et $y = y'$ ».

La relation $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$ se désigne par « *z est un couple* ». Si z est un couple, les relations $(\exists y)(z = (x, y))$ et $(\exists x)(z = (x, y))$ sont fonctionnelles par rapport à x et y respectivement, comme il résulte aussitôt de A3.

On désigne les termes $\tau_x((\exists y)(z = (x, y)))$ et $\tau_y((\exists x)(z = (x, y)))$ par $\mathrm{pr}_1\, z$ et $\mathrm{pr}_2\, z$ respectivement ; on les appelle respectivement *première coordonnée* (ou *première projection*) et *seconde coordonnée* (ou *seconde projection*) de z. Si z est un couple, la relation $(\exists y)(z = (x, y))$ est donc équivalente à $x = \mathrm{pr}_1\, z$ et la relation $(\exists x)(z = (x, y))$ à $y = \mathrm{pr}_2\, z$ (chap. I, § 5, nº 3).

La relation $z = (x, y)$ est équivalente à « z est un couple et $x = \mathrm{pr}_1\, z$ et $y = \mathrm{pr}_2\, z$ » ; en effet, cette dernière relation est équivalente à

$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(z = (x', y')$ et $z = (x, y'')$ et $z = (x'', y))$;

d'après A3, « $z = (x', y')$ et $z = (x, y'')$ et $z = (x'', y)$ » est équivalente à « $z = (x, y)$ et $x = x'$, et $x = x''$ et $y = y'$ et $y = y''$ » ; donc « z est un couple et $x = \mathrm{pr}_1\, z$ et $y = \mathrm{pr}_2\, z$ » est équivalente, d'après C33 (chap. I, § 4, nº 3), à

$z = (x, y)$ et $(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x'$ et $x = x''$ et $y = y'$ et $y = y'')$

ce qui établit notre assertion. On a évidemment $\mathrm{pr}_1\,(x, y) = x$, $\mathrm{pr}_2\,(x, y) = y$, et la relation $z = (\mathrm{pr}_1\,(z), \mathrm{pr}_2\,(z))$ est équivalente à « z est un couple ».

Soient $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ une relation, les lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ étant distinctes et figurant dans $\boldsymbol{R}$. Soit $\boldsymbol{z}$ une lettre distincte de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et ne figurant pas dans $\boldsymbol{R}$. Désignons par $\boldsymbol{S}\{\boldsymbol{z}\}$ la relation $(\exists \boldsymbol{x})(\exists \boldsymbol{y})(\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\})$; c'est une relation qui contient une lettre de moins que $\boldsymbol{R}$, et qui est *équivalente* à « $\boldsymbol{z}$ est un couple et $\boldsymbol{R}\{\mathrm{pr}_1\, \boldsymbol{z}, \mathrm{pr}_2\, \boldsymbol{z}\}$ » : cela résulte de ce que $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est équivalente à « $\boldsymbol{z}$ est un couple et $\boldsymbol{x} = \mathrm{pr}_1\, \boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{y} = \mathrm{pr}_2\, \boldsymbol{z}$ », et des critères C33 (chap. I, § 4, nº 3) et C47 (chap. I, § 5, nº 3). On en déduit aussitôt que $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ est équivalente à $\boldsymbol{S}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}$, et aussi à $(\exists \boldsymbol{z})(\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{S}\{\boldsymbol{z}\})$ d'après C47.

Cela signifie qu'on peut interpréter une relation entre les objets $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ comme une propriété du couple formé par ces objets.

2. *Produit de deux ensembles.*

THÉORÈME 1. — *La relation*

$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \text{ et } x \in X \text{ et } y \in Y))$

est vraie. Autrement dit, quels que soient X *et* Y, *la relation « z est un couple et* $\mathrm{pr}_1\, z \in X$ *et* $\mathrm{pr}_2\, z \in Y$ » *est collectivisante en z.*

En effet, désignons par A_y l'ensemble des objets de la forme (x, y) pour $x \in X$ (cf. § 1, nº 6, critère C53). Soit R la relation $z \in A_y$, qui est équivalente à $(\exists x)(z = (x, y)$ et $x \in X)$. Il est clair que la relation $(\forall y)(\exists A)(\forall z)(R \Rightarrow (z \in A))$ est vraie en vertu de S5 (chap. I, § 4, nº 2). Il résulte alors de S8 que la relation $(\exists y)(y \in Y$ et $R)$ est collectivisante en z. Or, cette relation est équivalente à $(\exists x)(\exists y)(y \in Y$ et $x \in X$ et $z = (x, y))$; d'où le théorème.

DÉFINITION 1. — *Etant donnés deux ensembles* X *et* Y, *l'ensemble* $\mathcal{E}_z((\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$ *et* $x \in X$ *et* $y \in Y))$ *s'appelle le produit de* X *et de* Y *et se désigne par* $X \times Y$.

La relation $z \in X \times Y$ est donc équivalente à « z est un couple et $\mathrm{pr}_1\, z \in X$ et $\mathrm{pr}_2\, z \in Y$ ». Les ensembles X et Y sont appelés le *premier* et le *second ensemble facteur* de $X \times Y$.

Proposition 1. — *Si* A′, B′ *sont des ensembles non vides, la relation* $A' \times B' \subset A \times B$ *est équivalente à* « $A' \subset A$ et $B' \subset B$ ».

En premier lieu, la relation $z \in A' \times B'$ est équivalente à « z est un couple et $\mathrm{pr}_1 z \in A'$ et $\mathrm{pr}_2 z \in B'$ » ; donc, sans hypothèse sur A′ et B′, la relation « $A' \subset A$ et $B' \subset B$ » entraîne $A' \times B' \subset A \times B$. Réciproquement, montrons d'abord que, si $B' \neq \emptyset$ (sans hypothèse sur A′), la relation $A' \times B' \subset A \times B$ entraîne $A' \subset A$. Soit x un élément de A′ ; puisque $B' \neq \emptyset$, il y a un objet y qui est élément de B′ ; on a $(x, y) \in A' \times B'$, d'où $(x, y) \in A \times B$ et par suite $x \in A$; cela montre que $A' \subset A$. On voit de même que si $A' \neq \emptyset$, la relation $A' \times B' \subset A \times B$ entraîne $B' \subset B$, d'où la proposition.

Proposition 2. — *Soient* A *et* B *deux ensembles. La relation* $A \times B = \emptyset$ *est équivalente à* « $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ».

En effet, la relation $z \in A \times B$ entraîne $\mathrm{pr}_1 z \in A$ et $\mathrm{pr}_2 z \in B$, donc $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$; inversement, la relation « $x \in A$ et $y \in B$ » entraîne $(x, y) \in A \times B$, donc $A \times B \neq \emptyset$. Autrement dit, la relation $A \times B \neq \emptyset$ est équivalente à « $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ » ; d'où la proposition.

Si A, B, C sont des ensembles, on pose

$$(A \times B) \times C = A \times B \times C;$$

un élément $((x, y), z)$ de $A \times B \times C$ s'écrit aussi (x, y, z) et s'appelle un *triplet*. De même, si A, B, C, D sont des ensembles, on pose $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D$. Etc.

Exercices. — 1) Soient $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ une relation, les lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ étant distinctes ; soit $\boldsymbol{z}$ une lettre distincte de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et ne figurant pas dans $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. Montrer que la relation $(\exists \boldsymbol{x})(\exists \boldsymbol{y})\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ est équivalente à

$$(\exists \boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{z} \text{ est un couple et } \boldsymbol{R}\{\mathrm{pr}_1 \boldsymbol{z}, \mathrm{pr}_2 \boldsymbol{z}\})$$

et que la relation $(\forall \boldsymbol{x})\,(\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ est équivalente à

$$(\forall \boldsymbol{z})\,((\boldsymbol{z} \text{ est un couple}) \Rightarrow \boldsymbol{R}\{\mathrm{pr}_1 \boldsymbol{z}, \mathrm{pr}_2 \boldsymbol{z}\}).$$

2) *a*) Montrer que la relation $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ est équivalente à « $x = x'$ et $y = y'$ ».

b) Soit $\mathcal{T}_0$ la théorie des ensembles, $\mathcal{T}_1$ la théorie ayant les mêmes schémas et axiomes explicites que $\mathcal{T}_0$, à l'exception de l'axiome A3. Montrer que, si $\mathcal{T}_1$ n'est pas contradictoire, il en est de même de $\mathcal{T}_0$ (utiliser *a*)).

§ 3. — Correspondances.

1. *Graphes et correspondances.*

Définition 1. — *On dit que* G *est un graphe si tout élément de* G *est un couple, autrement dit si la relation*

$$(\forall z)\,(z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple}))$$

est vraie.

Si G est un graphe, la relation $(x, y) \in G$ s'exprime encore en disant que « y correspond à x par G ».

Soit $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ une relation, $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ étant des lettres distinctes. Soit $\boldsymbol{G}$ une lettre distincte de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et ne figurant pas dans $\boldsymbol{R}$. Si la relation $(\exists \boldsymbol{G})(\boldsymbol{G}$ est un graphe et $(\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})(\boldsymbol{R} \Leftrightarrow ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{G})))$ est vraie, on dit que $\boldsymbol{R}$ *admet un graphe* (par raport aux lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$). Le graphe $\boldsymbol{G}$ est alors unique en vertu de l'axiome d'extensionalité, et s'appelle le *graphe* de $\boldsymbol{R}$ (ou l'*ensemble représentatif* de $\boldsymbol{R}$) par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.

Soit $\boldsymbol{Z}$ une lettre distincte de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ et ne figurant pas dans $\boldsymbol{R}$. Si la relation

$$(\exists \boldsymbol{Z})(\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})(\boldsymbol{R} \Rightarrow ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{Z}))$$

est vraie, $\boldsymbol{R}$ admet un graphe : il suffit en effet de prendre pour ce graphe l'ensemble des couples $\boldsymbol{z}$ tels que $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{R}\{\mathrm{pr}_1 \boldsymbol{z}, \mathrm{pr}_2 \boldsymbol{z}\}$ ($\boldsymbol{z}$ étant une lettre distincte de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{Z}$ et ne figurant pas dans $\boldsymbol{R}$). Cette condition est remplie si on connaît un terme $\boldsymbol{T}$, où ne figurent ni $\boldsymbol{x}$ ni $\boldsymbol{y}$, tel que $\boldsymbol{R} \Rightarrow ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{T})$ soit vraie.

Proposition 1. — *Soit* G *un graphe. Il existe un ensemble* A *et un seul, et un ensemble* B *et un seul, qui possèdent les propriétés suivantes* : 1) *la relation* $(\exists y)\,((x, y) \in G)$ *est équivalente à* $x \in A$; 2) *la relation* $(\exists x)\,((x, y) \in G)$ *est équivalente à* $y \in B$.

Il suffit en effet de prendre pour A (resp. B) l'ensemble des objets de la forme $\mathrm{pr}_1 z$ (resp. $\mathrm{pr}_2 z$) pour $z \in G$ (§ 1, nº 6) : de façon précise, on a $A = \mathcal{E}_x((\exists y)\,((x, y) \in G)))$ et $B = \mathcal{E}_y((\exists x)\,((x, y) \in G)))$; ces ensembles s'appellent respectivement *la première* et *la seconde projection* du graphe G, ou encore *l'ensemble de définition* et *l'ensemble des valeurs* de G ; on les désigne par $\mathrm{pr}_1\langle G\rangle$ et $\mathrm{pr}_2\langle G\rangle$ (ou $\mathrm{pr}_1 G$ et $\mathrm{pr}_2 G$ lorsqu'aucune confusion n'en résulte). On vérifie aussitôt que $G \subset (\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)$: tout ensemble de couples est donc une partie d'un produit, et réciproquement. Si l'un des deux ensembles $\mathrm{pr}_1 G$, $\mathrm{pr}_2 G$ est vide, on a donc $G = \varnothing$ (§ 2, prop. 2).

Remarque. — La relation $x = y$ n'admet pas de graphe ; car la première projection de ce graphe, s'il existait, serait l'ensemble de tous les objets (cf. § 1, nº 7, *Remarque*).

DÉFINITION 2. — *On appelle correspondance entre un ensemble* A *et un ensemble* B *un triplet* $\Gamma = (G, A, B)$ *où* G *est un graphe tel que* $\mathrm{pr}_1 G \subset A$ *et* $\mathrm{pr}_2 G \subset B$. *On dit que* G *est le graphe de* Γ, A *l'ensemble de départ et* B *l'ensemble d'arrivée de* Γ.

Si $(x, y) \in G$, on dit encore que « y correspond à x par la correspondance Γ ». Pour tout $x \in \mathrm{pr}_1 G$, on dit que la correspondance Γ est *définie pour l'objet* x, et $\mathrm{pr}_1 G$ est appelé *l'ensemble de définition de* Γ ; pour tout $y \in \mathrm{pr}_2 G$, on dit que y est *une valeur prise par* Γ et $\mathrm{pr}_2 G$ est appelé *l'ensemble des valeurs de* Γ.

Si $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ est une relation admettant un graphe $\boldsymbol{G}$ (par rapport aux lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$), et si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux ensembles tels que $\mathrm{pr}_1 \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{A}$ et $\mathrm{pr}_2 \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{B}$, on dit que $\boldsymbol{R}$ est une *relation entre un élément de* $\boldsymbol{A}$ *et un élément de* $\boldsymbol{B}$ (relativement aux lettres $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). On dit que la correspondance $\Gamma = (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ est la correspondance entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ *définie par la relation* $\boldsymbol{R}$ (par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$).

Soient G un graphe et X un ensemble. La relation « $x \in X$ et $(x, y) \in G$ » entraîne $(x, y) \in G$ et admet par suite un graphe G'. La seconde projection de G' se compose évidemment de tous les objets qui correspondent par G à des objets de X.

DÉFINITION 3. — *Soient* G *un graphe et* X *un ensemble. L'ensemble des objets qui correspondent par* G *à des éléments de* X *s'appelle l'image de* X *par* G *et se désigne par* $G\langle X \rangle$ *ou* $G(X)$.

Soient $\Gamma = (G, A, B)$ *une correspondance, et* X *une partie de* A. *L'ensemble* $G\langle X \rangle$ *se note encore* $\Gamma\langle X \rangle$ *ou* $\Gamma(X)$ *et s'appelle l'image de* X *par* Γ.

Remarques. — 1) D'une manière précise, $G\langle X \rangle$ désigne l'ensemble $\mathscr{E}_y((\exists x)(x \in X \text{ et } (x, y) \in G))$. Nous ne ferons plus que rarement désormais la traduction des définitions en langage formel.

2) Les notations $G(X)$ et $\Gamma(X)$ peuvent parfois conduire à des confusions avec des notations introduites ultérieurement (cf. nº 4, *Remarque* suivant la déf. 9).

Soit G un graphe. Comme la relation $(x, y) \in G$ entraîne $y \in \mathrm{pr}_2 G$, on a $G\langle X \rangle \subset \mathrm{pr}_2 G$ pour tout ensemble X ; comme $(x, y) \in G$ entraîne $x \in \mathrm{pr}_1 G$, on a $G\langle \mathrm{pr}_1 G \rangle = \mathrm{pr}_2 G$. On a $G\langle \varnothing \rangle = \varnothing$, puisque $x \notin \varnothing$ est un théorème. Si $X \subset \mathrm{pr}_1 G$ et $X \neq \varnothing$, on a $G\langle X \rangle \neq \varnothing$.

PROPOSITION 2. — *Soient* G *un graphe,* X *et* Y *deux ensembles ; la relation* $X \subset Y$ *entraîne* $G\langle X \rangle \subset G\langle Y \rangle$.

La proposition est évidente à partir des définitions et de C50 (§ 1, nº 4).

COROLLAIRE. — *Si* $A \supset \mathrm{pr}_1 G$, *on a* $G\langle A \rangle = \mathrm{pr}_2 G$.

DÉFINITION 4. — *Soient* G *un graphe et* x *un objet. On appelle coupe de* G *suivant* x *l'ensemble* $G\langle\{x\}\rangle$ (qu'on désigne aussi parfois par $G(x)$, par abus de langage).

Il résulte aussitôt de C43 (chap. I, § 5, nº 1) que la relation $y \in G\langle\{x\}\rangle$ est équivalente à $(x, y) \in G$. Si G et G' sont deux graphes, la relation $G \subset G'$ est donc équivalente à $(\forall x)(G\langle\{x\}\rangle \subset G'\langle\{x\}\rangle)$.

Si $\Gamma = (G, A, B)$ est une correspondance entre A et B, pour tout $x \in A$ la coupe de G suivant x s'appelle encore la *coupe* de Γ suivant x et se note également $\Gamma\langle\{x\}\rangle$ (ou $\Gamma(x)$).

2. *Correspondance réciproque d'une correspondance.*

Soient G un graphe, $A = \mathrm{pr}_1 G$, $B = \mathrm{pr}_2 G$ ses projections. La relation $(y, x) \in G$ entraîne $(x, y) \in B \times A$; cette relation admet donc un graphe qui se compose des couples (x, y) tels que $(y, x) \in G$.

DÉFINITION 5. — *Soient* G *un graphe. Le graphe dont les éléments sont les couples* (x, y) *tels que* $(y, x) \in G$ *s'appelle le graphe réciproque de* G *et se désigne par* $\overset{-1}{G}$.

Pour tout ensemble X, $\overset{-1}{G}\langle X \rangle$ s'appelle *l'image réciproque de* X *par* G.

Il est évident que le graphe réciproque de $\overset{-1}{G}$ est G, et que l'on a $\mathrm{pr}_1 \overset{-1}{G} = \mathrm{pr}_2 G$, $\mathrm{pr}_2 \overset{-1}{G} = \mathrm{pr}_1 G$. En particulier, si X et Y sont deux ensembles, on a $\overset{-1}{\widehat{X \times Y}} = Y \times X$. On dit qu'un graphe G est *symétrique* si $\overset{-1}{G} = G$.

Soit $\Gamma = (G, A, B)$ une correspondance entre A et B. Comme $\mathrm{pr}_1 \overset{-1}{G} \subset B$ et $\mathrm{pr}_2 \overset{-1}{G} \subset A$, le triplet $(\overset{-1}{G}, B, A)$ est une *correspondance entre* B *et* A, qu'on appelle la *correspondance réciproque* de Γ et qu'on note $\overset{-1}{\Gamma}$. Pour toute partie Y de B, l'image $\overset{-1}{\Gamma}\langle Y \rangle$ de Y par $\overset{-1}{\Gamma}$ s'appelle encore *l'image réciproque de* Y *par* Γ. Il est évident que la correspondance réciproque de $\overset{-1}{\Gamma}$ est Γ.

3. *Composée de deux correspondances.*

Soient G et G′ deux graphes. Désignons par A l'ensemble $\mathrm{pr}_1 G$ et par C l'ensemble $\mathrm{pr}_2 G'$. La relation $(\exists y)((x, y) \in G$ et $(y, z) \in G')$ entraîne $(x, z) \in A \times C$; elle admet donc un graphe par rapport à x et z.

DÉFINITION 6. — *Soient* G *et* G′ *des graphes. On appelle composé de* G′ *et de* G, *et on désigne par* $G' \circ G$ (ou parfois par $G'G$), *le graphe par rapport à x et z de la relation* $(\exists y)((x,y) \in G$ et $(y, z) \in G')$.

PROPOSITION 3. — *Soient* G *et* G′ *deux graphes. Le graphe réciproque de* $G' \circ G$ *est* $\overset{-1}{G} \circ \overset{-1}{G'}$.

En effet, la relation « $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in G'$ » est équivalente à « $(z, y) \in \overset{-1}{G'}$ et $(y, x) \in \overset{-1}{G}$ ».

PROPOSITION 4. — *Soient* G_1, G_2, G_3 *des graphes. On a alors* $(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$.

En effet, la relation $(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1$ est équivalente à la relation

$$(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ et } (\exists z)((y, z) \in G_2 \text{ et } (z, t) \in G_3))$$

donc (notamment d'après C33 (chap. I, § 4, n° 3)) à la relation

(1) $$(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G_1 \text{ et } (y, z) \in G_2 \text{ et } (z, t) \in G_3).$$

On voit de même que la relation $(x, t) \in G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ est équivalente à

(2) $$(\exists z)(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ et } (y, z) \in G_2 \text{ et } (z, t) \in G_3).$$

Or on sait que les relations (1) et (2) sont équivalentes, ce qui démontre la prop. 4.

Le graphe $G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ se désigne par $G_3 \circ G_2 \circ G_1$. De même, si G_1, G_2, G_3, G_4 sont des graphes, on pose

$$G_4 \circ (G_3 \circ G_2 \circ G_1) = G_4 \circ G_3 \circ G_2 \circ G_1. \quad \text{Etc.}$$

PROPOSITION 5. — *Soient* G *et* G′ *des graphes et* A *un ensemble. On a*

$$(G' \circ G)\langle A \rangle = G'\langle G\langle A \rangle\rangle.$$

En effet, en vertu de C33 (chap. I, § 4, n° 3), la relation $z \in (G' \circ G)\langle A \rangle$ est équivalente à

$$(\exists y)((\exists x)(x \in A \text{ et } (x, y) \in G) \text{ et } (y, z) \in G')$$

donc à $(\exists y)(y \in G\langle A \rangle$ et $(y, z) \in G')$, ce qui démontre la proposition.

Si G et G′ sont deux graphes, on a $\mathrm{pr}_1 (G' \circ G) = \overset{-1}{G}\langle \mathrm{pr}_1 G' \rangle$, et $\mathrm{pr}_2 (G' \circ G) = G'\langle \mathrm{pr}_2 G \rangle$. Pour démontrer par exemple la seconde de ces relations, il suffit de remarquer que la relation $z \in \mathrm{pr}_2 (G' \circ G)$ équivaut à $(\exists x)((x, z) \in G' \circ G)$, donc à

$$(\exists y)((\exists x)((x, y) \in G) \text{ et } (y, z) \in G') ;$$

mais cette dernière est équivalente à $z \in G'\langle \mathrm{pr}_2 G \rangle$.

Si G est un graphe, X un ensemble tel que $X \subset \mathrm{pr}_1 G$, on a $X \subset \overset{-1}{G}\langle G\langle X \rangle\rangle$. En effet, la relation $x \in X$ entraîne par hypothèse $(\exists y)((x, y) \in G)$; mais $(x, y) \in G$ est équivalente à $(y, x) \in \overset{-1}{G}$, et d'autre part $(x, y) \in G$ entraîne $(\exists z)(z \in X$ et $(z, y) \in G)$; donc $x \in X$ entraîne $(\exists y)((\exists z)(z \in X$ et $(z, y) \in G)$ et $(y, x) \in \overset{-1}{G})$, c'est-à-dire $x \in \overset{-1}{G}\langle G\langle X \rangle\rangle$.

Il est clair que si G_1, G_2, G'_1, G'_2 sont des graphes, les relations $G_1 \subset G_2$ et $G'_1 \subset G'_2$ entraînent $G'_1 \circ G_1 \subset G'_2 \circ G_2$.

Soient maintenant $\Gamma = (G, A, B)$ et $\Gamma' = (G', B, C)$ deux correspondances telles que l'ensemble d'arrivée de Γ soit identique à l'ensemble de départ de Γ'. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{pr}_1 (G' \circ G) \subset \mathrm{pr}_1 G \subset A$ et $\mathrm{pr}_2 (G' \circ G) \subset \mathrm{pr}_2 G' \subset C$; on peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 7. — *Soient* $\Gamma = (G, A, B)$ *et* $\Gamma' = (G', B, C)$ *deux correspondances telles que l'ensemble d'arrivée de* Γ *soit identique à* *l'ensemble de départ de* Γ'. *On appelle composée de* Γ' *et de* Γ, *et on note* $\Gamma' \circ \Gamma$ (ou parfois $\Gamma'\Gamma$), *la correspondance* $(G' \circ G, A, C)$.

Il résulte aussitôt de la prop. 5 que, si X est une partie de A, on a $(\Gamma' \circ \Gamma)\langle X \rangle = \Gamma' \langle \Gamma \langle X \rangle \rangle$. En outre, comme l'ensemble d'arrivée de $\overset{-1}{\Gamma'}$ est identique à l'ensemble de départ de $\overset{-1}{\Gamma}$, la correspondance réciproque de $\Gamma' \circ \Gamma$ est $\overset{-1}{\Gamma} \circ \overset{-1}{\Gamma'}$, en vertu de la prop. 3.

Définition 8. — *Si* A *est un ensemble, l'ensemble* Δ_A *des objets de la forme* (x, x), *pour* $x \in A$, *s'appelle la diagonale de* $A \times A$.

Il est clair que l'on a $\mathrm{pr}_1 \Delta_A = \mathrm{pr}_2 \Delta_A = A$. La correspondance $I_A = (\Delta_A, A, A)$ est appelée la *correspondance identique* de A ; elle est sa propre réciproque.

Si Γ est une correspondance entre A et B, I_A la correspondance identique de A, I_B la correspondance identique de B, on a $\Gamma \circ I_A = I_B \circ \Gamma = \Gamma$.

4. Fonctions.

Définition 9. — *On dit qu'un graphe* F *est un graphe fonctionnel si, pour tout* x, *il existe au plus un objet correspondant à* x *par* F (chap. I, § 5, nº 3). *On dit qu'une correspondance* $f = (F, A, B)$ *est une fonction si son graphe* F *est un graphe fonctionnel, et si son ensemble de départ* A *est égal à son ensemble de définition* $\mathrm{pr}_1 F$. *Autrement dit, une correspondance* $f = (F, A, B)$ *est une fonction si, pour tout* x *appartenant à l'ensemble de départ* A *de* f, *la relation* $(x, y) \in F$ *est fonctionnelle en* y (chap. I, § 5, nº 3) ; *l'objet unique correspondant à* x *par* f *s'appelle la valeur de* f *pour l'élément* x *de* A, *et se désigne par* $f(x)$ *ou* f_x (ou $F(x)$, ou F_x).

Si f est une fonction, F son graphe et x un élément de l'ensemble de définition de f, la relation $y = f(x)$ est donc équivalente à $(x, y) \in F$ (chap. I, § 5, nº 3, critère C46).

Remarque. — Il faut prendre garde aux confusions que risque d'entraîner l'emploi simultané de la notation $f(x)$ et de la notation $f(X)$ (synonyme de $f\langle X \rangle$) introduite dans la déf. 3 (cf. exerc. 11).

Soient A et B deux ensembles ; on appelle *application de* A *dans* B une fonction f dont l'ensemble de départ (égal à l'ensemble de définition) est égal à A et dont l'ensemble d'arrivée est égal à B ; on dit aussi qu'une telle fonction est *définie dans* A *et prend ses valeurs dans* B.

Au lieu de dire « soit f une application de A dans B », on emploiera souvent les phrases suivantes : « soit une application $f : A \to B$ » ou même « soit $f : A \to B$ ». Pour faciliter la lecture d'un raisonnement où interviennent plusieurs applications, on fera usage de *diagrammes* tels que

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & C \arrow[dr, "i"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & E \\ & & D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

où un groupe de signes tel que $A \xrightarrow{f} B$ doit s'interpréter comme signifiant que f est une application de A dans B.

On dit encore qu'une fonction f définie dans A *transforme* x *en* $f(x)$ (pour tout $x \in A$), ou que $f(x)$ est le *transformé de* x *par* f, ou (par abus de langage) l'*image* de x par f.

Dans certains cas, un graphe fonctionnel s'appelle aussi une *famille* ; l'ensemble de définition s'appelle alors l'*ensemble des indices*, et l'ensemble des valeurs s'appelle, par abus de langage, l'*ensemble des éléments* de la famille ; c'est surtout dans ce cas qu'on utilise la notation indicielle f_x pour désigner la valeur de f pour l'élément x. Lorsque l'ensemble des indices est le produit de deux ensembles, on dit souvent qu'il s'agit d'une *famille double*.

De même, une fonction dont l'ensemble d'arrivée est E, s'appelle parfois une *famille d'éléments de* E. Lorsque tout élément de E est une partie d'un ensemble F, on dit aussi qu'on a une *famille de parties de* F.

Nous emploierons souvent, dans la suite de ce Traité, le mot « fonction » à la place de « graphe fonctionnel ».

Exemples de fonctions. — 1) L'ensemble vide est un graphe fonctionnel ; toute fonction dont le graphe est vide a pour ensemble de définition et pour ensemble des valeurs l'ensemble vide ; celle de ces fonctions dont l'ensemble d'arrivée est vide (autrement dit la fonction $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$) est appelée la *fonction vide*.

2) Soit A un ensemble ; la correspondance identique de A (nº 3) est une fonction qu'on appelle l'*application identique de* A.

A tout ensemble A est ainsi associée une famille, constituée par l'application identique de A, dont A est l'ensemble des indices et l'ensemble des éléments. Par abus de langage, on désigne parfois un ensemble sous le nom de « famille » ; c'est alors de la famille ainsi associée à l'ensemble considéré qu'il est question.

On dit qu'une fonction f est *constante* si, quels que soient x et x' dans l'ensemble de définition de f, on a $f(x) = f(x')$.

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble E. On dit qu'un élément x de E est *invariant par* f si $f(x) = x$.

5. *Restrictions et prolongements de fonctions.*

On dit que deux fonction f et g *coïncident dans un ensemble* E si E est contenu dans les ensembles de définition de f et de g, et si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Deux fonctions ayant même graphe coïncident dans leur ensemble de définition. Dire que $f = g$ revient à dire que f et g ont même ensemble de définition A, même ensemble d'arrivée B, et coïncident dans A.

Soient $f = (\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ et $g = (\mathrm{G}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ deux fonctions. Dire que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ revient à dire que l'ensemble de définition A de f est contenu dans l'ensemble de définition C de g, et que g coïncide avec f dans A. Si en outre $\mathrm{B} \subset \mathrm{D}$, on dit que g est un *prolongement* de f (ou, de façon plus précise, un prolongement de f à C), ou que g prolonge f (à C). Lorsque g est appelée une famille d'éléments de D, on dit aussi que f est une *sous-famille* de g.

Soient f une fonction, A une partie de l'ensemble de définition de f. Il est immédiat que la relation « $x \in \mathrm{A}$ et $y = f(x)$ » admet un graphe G par rapport à x et y, que ce graphe est fonctionnel et que A est son ensemble de définition ; on dit que la fonction de graphe G, qui a le même ensemble d'arrivée que f, est la *restriction de* f *à* A, et on la note parfois f_{A}. Une fonction est un prolongement d'une quelconque de ses restrictions. Si deux fonctions f, g ont même ensemble d'arrivée et coïncident dans un ensemble E, leurs restrictions à E sont égales.

6. *Définition d'une fonction par un terme.*

C54. *Soient* $\boldsymbol{T}$ *et* $\boldsymbol{A}$ *deux termes,* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *des lettres distinctes. On suppose que* $\boldsymbol{x}$ *ne figure pas dans* $\boldsymbol{A}$, *et que* $\boldsymbol{y}$ *ne figure ni dans* $\boldsymbol{T}$ *ni dans* $\boldsymbol{A}$. *Soit* $\boldsymbol{R}$ *la relation* « $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}$ ». *La relation* $\boldsymbol{R}$ *admet*

un graphe $\boldsymbol{F}$ *par rapport aux lettres* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$. *Ce graphe est fonctionnel ; sa première projection est* $\boldsymbol{A}$, *sa deuxième projection est l'ensemble des objets de la forme* $\boldsymbol{T}$ *pour* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ (§ 1, nº 6). *Pour tout* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$, *on a* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}$.

En effet, soit $\boldsymbol{B}$ l'ensemble des objets de la forme $\boldsymbol{T}$ pour $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$. On a $\boldsymbol{R} \Rightarrow ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$; comme l'assemblage désigné par $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ ne contient ni $\boldsymbol{x}$, ni $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{R}$ admet un graphe $\boldsymbol{F}$ par rapport aux lettres $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ (nº 1). Il est clair que la relation « $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{F}$ et $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}') \in \boldsymbol{F}$ » entraîne $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$, donc $\boldsymbol{F}$ est un graphe fonctionnel. Le reste du critère est évident.

Si $\boldsymbol{C}$ est un ensemble contenant l'ensemble $\boldsymbol{B}$ des objets de la forme $\boldsymbol{T}$ pour $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{y}$ ne figurant pas dans $\boldsymbol{C}$), la fonction $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ se désigne aussi par la notation $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{C})$; l'assemblage correspondant de la mathématique formelle ne contient ni $\boldsymbol{x}$ ni $\boldsymbol{y}$ et ne dépend pas du choix de la lettre $\boldsymbol{y}$ vérifiant les conditions précédentes. Quand le contexte est suffisamment explicite, on se contente des notations $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})$, $(\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}}$ ou $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{T}$, et parfois simplement $\boldsymbol{T}$ ou $(\boldsymbol{T})$. * Ainsi, on peut parler de « la fonction x^3 », si le contexte indique clairement qu'il s'agit de l'application $x \to x^3$ de l'ensemble des nombres complexes dans lui-même. *

Exemples. — 1) Si f est une application de A dans B, la fonction f est égale à la fonction $x \to f(x)$ $(x \in \mathrm{A},\ f(x) \in \mathrm{B})$, qu'on écrit simplement $x \to f(x)$, ou aussi $(f_x)_{x \in \mathrm{A}}$ (c'est surtout quand on utilise la dernière notation qu'on parle de « famille d'éléments » au lieu de « fonction »).

2) Soit G un ensemble de couples. Les fonctions

$$z \to \mathrm{pr}_1\, z\ (z \in \mathrm{G},\ \mathrm{pr}_1\, z \in \mathrm{pr}_1\, \mathrm{G}) \quad \text{et} \quad z \to \mathrm{pr}_2\, z\ (z \in \mathrm{G},\ \mathrm{pr}_2\, z \in \mathrm{pr}_2\, \mathrm{G})$$

s'appellent respectivement *la première* et *la seconde fonction coordonnée* sur G ; on les désigne par pr_1 et pr_2 quand il n'en résulte pas de confusion.

7. *Composée de deux fonctions. Fonction réciproque.*

Proposition 6. — *Si* f *est une application de* A *dans* B, *et* g *une application de* B *dans* C, $g \circ f$ *est une application de* A *dans* C.

Soient F et G les graphes de f et g ; montrons que $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ est un graphe fonctionnel. Soient x, z, z' des objets tels que $(x, z) \in \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$,

$(x, z') \in G \circ F$. Il existe des objets y, y' tels que $(x, y) \in F$, $(x, y') \in F$, $(y, z) \in G$, $(y', z') \in G$. Puisque F est un graphe fonctionnel, on a $y = y'$, donc $(y, z') \in G$. Puisque G est un graphe fonctionnel, on en déduit que $z = z'$, ce qui prouve notre assertion. D'autre part, l'ensemble de définition de $g \circ f$ est évidemment A, ce qui achève la démonstration.

La fonction $g \circ f$ s'écrit aussi $x \to g(f(x))$ (nº 6), et parfois gf lorsqu'il ne peut en résulter de confusion.

Définition 10. — *Soit f une application de* A *dans* B. *On dit que f est une injection, ou que f est une application injective, si deux éléments distincts de* A *ont des images distinctes par f. On dit que f est une surjection, ou que f est une application surjective, si $f(A) = B$. On dit que f est une bijection, ou que f est une application bijective, si f est à la fois injective et surjective.*

Au lieu de dire que f est injective, on dit aussi que f est *biunivoque*. Au lieu de dire que f est surjective, on dit aussi que f est une application de A *sur* B, ou une *représentation paramétrique de* B *au moyen de* A (dans ce dernier cas, A s'appelle l'*ensemble des paramètres* de cette représentation, et ses éléments prennent le nom de *paramètres*). Si f est bijective, on dit aussi que f *met* A *et* B *en correspondance biunivoque*. Une bijection de A sur A s'appelle aussi une *permutation* de A.

Exemples. — 1) Si $A \subset B$, l'application de A dans B dont le graphe est la diagonale de A est injective et s'appelle l'*application canonique* ou l'*injection canonique* (ou simplement l'*injection*) de A dans B.

2) Soit A un ensemble. L'application $x \to (x, x)$ de A dans la diagonale Δ_A de $A \times A$ est une application bijective appelée *application diagonale* de A.

3) Soit G un ensemble de couples. L'application pr_1 (resp. pr_2) de G dans $\mathrm{pr}_1\,G$ (resp. $\mathrm{pr}_2\,G$) est surjective ; pour que pr_1 soit injective, il faut et il suffit que G soit un graphe fonctionnel.

4) Soit G un ensemble de couples. L'application $z \to (\mathrm{pr}_2\,z, \mathrm{pr}_1\,z)$ de G dans $\overset{-1}{G}$ est une bijection (dite *canonique*).

5) Soient A un ensemble, b un objet. L'application $x \to (x, b)$ de A dans $A \times \{b\}$ est une bijection.

Proposition 7. — *Soit f une application de* A *dans* B. *Pour que $\overset{-1}{f}$ soit une fonction, il faut et il suffit que f soit bijective.*

En effet, si $\overset{-1}{f}$ est une fonction, son ensemble de départ B est égal à son ensemble de définition, c'est-à-dire à $f(A)$. D'autre part, soient x et y deux éléments de A tels que $f(x) = f(y)$. Si F désigne le graphe de f, on a $(f(x), x) \in \overset{-1}{F}$ et $(f(y), y) \in \overset{-1}{F}$, donc $(f(x), y) \in \overset{-1}{F}$, donc $x = y$, de sorte que f est injective, et par suite bijective. Réciproquement, si f est bijective, il est immédiat que $\overset{-1}{F}$ est fonctionnel, et que l'ensemble de définition de $\overset{-1}{f}$ est égal à B.

Lorsque f est bijective, $\overset{-1}{f}$ est appelée l'*application réciproque* de f ; $\overset{-1}{f}$ est bijective, $\overset{-1}{f} \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ \overset{-1}{f}$ est l'application identique de B.

Si une permutation est identique à la permutation réciproque, elle est dite *involutive*.

Remarque. — Soit f une application de A dans B ; pour toute partie X de A, on a vu (nº 3) que l'on a $X \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$. En outre, pour toute partie Y de B, on a $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle \subset Y$: en effet, la relation $y \in f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$ équivaut à

$$(\exists x)((\exists z)(z \in Y \text{ et } z = f(x)) \text{ et } y = f(x))$$

et elle entraîne donc la relation $(\exists z)(z \in Y \text{ et } y = z)$, et par suite aussi la relation $y \in Y$.

Si f est une *surjection*, on a $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle = Y$ pour toute partie Y de B, car la relation $y \in Y \subset B$ entraîne par hypothèse la relation $(\exists x)(y = f(x))$, donc aussi $(\exists x)(y \in Y \text{ et } y = f(x))$; mais « $y \in Y$ et $y = f(x)$ » entraîne $(\exists z)(z \in Y \text{ et } z = f(x))$, d'où notre assertion.

Si f est une *injection*, pour toute partie X de A, on a $\overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle = X$. En effet, la relation $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ équivaut à $f(x) \in f\langle X\rangle$, donc à $(\exists z)(z \in X \text{ et } f(z) = f(x))$; mais l'hypothèse signifie que $f(z) = f(x)$ entraîne $z = x$, donc $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ entraîne $x \in X$.

8. *Rétractions et sections.*

Proposition 8. — *Soit f une application de* A *dans* B. *S'il existe une application r* (resp. s) *de* B *dans* A *telle que $r \circ f$* (resp. $f \circ s$) *soit l'application identique de* A (resp. B), *f est injective* (resp. *surjective*). *Réciproquement, si f est surjective, il existe une application s de* B *dans* A *telle que $f \circ s$ soit l'application identique de* B. *Si f est injective et si* $A \neq \emptyset$, *il existe une application r de* B *dans* A *telle que $r \circ f$ soit l'application identique de* A.

En effet, s'il existe une application r de B dans A telle que $r \circ f$ soit l'application identique de A, l'égalité $f(x) = f(y)$, où $x \in A$ et $y \in A$, entraîne $x = r(f(x)) = r(f(y)) = y$, donc f est injective. S'il existe une application s de B dans A telle que $f \circ s$ soit l'application identique de B, on a $B = f(s(B)) \subset f(A) \subset B$, donc f est surjective. Si f est surjective, désignons par T le terme $\tau_y(y \in A \text{ et } f(y) = x)$; on a $f(T) = x$ pour $x \in B$; si on désigne par s l'application $x \rightarrow T$ $(x \in B, T \in A)$, $f \circ s$ est l'application identique de B. Enfin, supposons f injective et $A \neq \emptyset$; soit a un élément de A ; la relation

$$\text{« } (y \in A \text{ et } x = f(y)) \quad \text{ou} \quad (y = a \text{ et } x \in B - f(A)) \text{ »}$$

entraîne $(x, y) \in B \times A$, donc admet un graphe R par rapport aux lettres x et y. Ce graphe est fonctionnel en raison de l'hypothèse faite sur f, et a pour ensemble de définition B ; enfin on a $R(x) = a$ si $x \in B - f(A)$ et $f(R(x)) = x$ si $x \in f(A)$. Donc la fonction $r = (R, B, A)$ est telle que $r \circ f$ soit l'application identique de A.

Corollaire. — *Soient* A *et* B *des ensembles, f une application de* A *dans* B, *g une application de* B *dans* A. *Si $g \circ f$ est l'application identique de* A *et $f \circ g$ l'application identique de* B, *f et g sont bijectives et on a* $g = \overset{-1}{f}$.

Définition 11. — *Soit f une application injective* (resp. *surjective*) *de* A *dans* B. *Toute application r* (resp. s) *de* B *dans* A *telle que $r \circ f$* (resp. $f \circ s$) *soit l'application identique de* A (*resp.* B) *est appelée une rétraction* (resp. *section*) *associée à f.*

Au lieu de rétraction (resp. section), on dit parfois *inverse à gauche* (resp. *à droite*).

Si f est injective (resp. surjective), et si r (resp. s) est une rétraction (resp. section) associée à f, f est une section (resp. rétraction)

associée à r (resp. s). Donc une rétraction est surjective, une section est injective.

Si f est surjective, et si s, s' sont deux sections associées à f, telles que $s(B) = s'(B)$, on a $s = s'$; en effet, si $x \in B$, il existe un $y \in B$ tel que $s(x) = s'(y)$, et on a $x = f(s(x)) = f(s'(y)) = y$, donc $s(x) = s'(x)$, de sorte que $s = s'$. Ainsi une section s est déterminée de manière unique par l'ensemble $s(B)$, de sorte que, par abus de langage, l'ensemble $s(B)$ lui-même s'appelle parfois une *section* associée à f.

Théorème 1. — *Soient f une application de* A *dans* B, *f' une application de* B *dans* C, *et $f'' = f' \circ f$. Alors :*

a) *Si f et f' sont des injections, f'' est une injection ; si r, r' sont des rétractions associées à f et f', $r \circ r'$ est une rétraction associée à f''.*

b) *Si f et f' sont des surjections, f'' est une surjection ; si s, s' sont des sections associées à f et f', $s \circ s'$ est une section associée à f''.*

c) *Si f'' est une injection, f est une injection ; si r'' est une rétraction associée à f'', $r'' \circ f'$ est une rétraction associée à f.*

d) *Si f'' est une surjection, f' est une surjection ; si s'' est une section associée à f'', $f \circ s''$ est une section associée à f'.*

e) *Si f'' est une surjection et f' une injection, f est une surjection ; si s'' est une section associée à f'', $s'' \circ f'$ est une section associée à f.*

f) *Si f'' est une injection et f une surjection, f' est une injection ; si r'' est une rétraction associée à f'', $f \circ r''$ est une rétraction associée à f'.*

Pour tout ensemble E, désignons par I_E l'application identique de E.

a) On a $r \circ f = I_A$ et $r' \circ f' = I_B$, donc

$$(r \circ r') \circ (f' \circ f) = r \circ I_B \circ f = r \circ f = I_A.$$

Si f et f' sont des injections, f'' est donc une injection, d'après la prop. 8 si $A \neq \emptyset$, et de façon évidente si $A = \emptyset$.

b) On a $f \circ s = I_B$ et $f' \circ s' = I_C$, donc

$$(f' \circ f) \circ (s \circ s') = f' \circ I_B \circ s' = f' \circ s' = I_C.$$

Si f et f' sont des surjections, f'' est donc une surjection d'après la prop. 8.

c) On a $r''\circ f'' = \mathrm{I}_A$, donc $(r''\circ f')\circ f = r''\circ f'' = \mathrm{I}_A$. Si f'' est une injection, f est donc une injection, d'après la prop. 8 si $A \neq \emptyset$, et de façon évidente si $A = \emptyset$.

d) On a $f''\circ s'' = \mathrm{I}_C$, donc $f'\circ(f\circ s'') = f''\circ s'' = \mathrm{I}_C$. Si f'' est une surjection, f' est donc une surjection d'après la prop. 8.

e) On a $f''\circ s'' = \mathrm{I}_C$, et f' est une bijection d'après *d*). Donc $f\circ(s''\circ f') = (\overset{-1}{f'}\circ f')\circ f\circ(s''\circ f') = \overset{-1}{f'}\circ(f''\circ s'')\circ f' = \overset{-1}{f'}\circ \mathrm{I}_C\circ f' = \overset{-1}{f'}\circ f' = \mathrm{I}_B$. Si f'' est une surjection et f' une injection, f est donc une surjection d'après la prop. 8.

f) On a $r''\circ f'' = \mathrm{I}_A$, et f est une bijection d'après *c*). Donc $(f\circ r'')\circ f' = (f\circ r'')\circ f'\circ(f\circ\overset{-1}{f}) = f\circ(r''\circ f'')\circ\overset{-1}{f} = f\circ \mathrm{I}_A\circ\overset{-1}{f} = f\circ\overset{-1}{f} = \mathrm{I}_B$. Si f'' est une injection et f une surjection, f' est donc une injection, d'après la prop. 8 si $A \neq \emptyset$, et de façon évidente si $A = \emptyset$ (car on a alors $B = f\langle A\rangle = \emptyset$).

Proposition 9. — a) *Soient* E, F, G *des ensembles*, g *une application de* E *sur* F, f *une application de* E *dans* G. *Pour qu'il existe une*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[drr, "f"] & & \\ F \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[rr, "h"'] & & G \end{tikzcd}$$

Fig. 1.

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d, shift right, "r"'] \\ G \arrow[urr, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & F \arrow[u, shift right, "g"'] \end{tikzcd}$$

Fig. 2.

application h *de* F *dans* G *telle que* $f = h\circ g$ (fig. 1), *il faut et il suffit que la relation* $g(x) = g(y)$ (*où* $x\in E$, $y \in E$) *entraîne la relation* $f(x) = f(y)$. *L'application* h *est uniquement déterminée par* f ; *si* s *est une section associée à* g, *on a* $h = f\circ s$.

b) *Soient* E, F, G *des ensembles*, g *une application biunivoque de* F *dans* E, f *une application de* G *dans* E. *Pour qu'il existe une application* h *de* G *dans* F *telle que* $f = g\circ h$ (fig. 2), *il faut et il suffit que* $f(G) \subset g(F)$. *L'application* h *est uniquement déterminée par* f ; *si* r *est une rétraction associée à* g, *on a* $h = r\circ f$.

a) Si $f = h\circ g$, la relation $g(x) = g(y)$ (où $x\in E$, $y\in E$) entraîne évidemment $f(x) = f(y)$. Et l'on a, pour toute section s associée à g, $h = h\circ(g\circ s) = f\circ s$, ce qui montre que h est uniquement déterminée par f. Réciproquement, supposons que la relation

$g(x) = g(y)$ entraîne $f(x) = f(y)$; soit s une section associée à g, et posons $h = f\circ s$; pour tout $x\in E$, on a $g(s(g(x))) = g(x)$, donc $f(s(g(x))) = f(x)$, c'est-à-dire $h(g(x)) = f(x)$; on a donc bien $f = h\circ g$.

b) Si $f = g\circ h$, on a évidemment $f(G)\subset g(F)$, et pour toute rétraction r associée à g, $h = (r\circ g)\circ h = r\circ f$, ce qui montre que h est uniquement déterminée par f. Réciproquement, supposons que $f(G)\subset g(F)$; soit r une rétraction associée à g, et posons $h = r\circ f$; pour tout $x\in G$, il existe un $y\in F$ tel que $f(x) = g(y)$, donc on a $g(h(x)) = g(r(f(x))) = g(r(g(y))) = g(y) = f(x)$; on a donc bien $f = g\circ h$.

9. *Fonctions de deux arguments.*

On appelle *fonction de deux arguments* une fonction dont l'ensemble de définition est un ensemble de couples (ou, ce qui revient au même, une partie d'un produit). Soit f une telle fonction ; si (x, y) est un élément de l'ensemble de définition de f, la valeur $f((x, y))$ de f au point (x, y) se désigne en général par $f(x, y)$.

Soient f une fonction de deux arguments, D son ensemble de définition, C son ensemble d'arrivée. Pour tout y, soit A_y l'ensemble des x tels que $(x, y)\in D$ (c'est-à-dire la coupe de $\overset{-1}{D}$ suivant y (n° 1)). L'application $x \to f(x, y)$ $(x\in A_y,\ f(x, y)\in C)$ s'appelle *l'application partielle déterminée par* f, *relative à la valeur* y *du second argument*, et on la désigne par $f_{.y}$, ou simplement f_y ; on a $f_{.y}(x) = f(x, y)$ pour tout x tel que $(x, y)\in D$. De même, pour tout x, soit B_x l'ensemble des y tels que $(x, y)\in D$. L'application $y \to f(x, y)$ $(y\in B_x,\ f(x, y)\in C)$ s'appelle *l'application partielle déterminée par* f, *relative à la valeur* x *du premier argument*, et on la désigne par $f_{x.}$, ou simplement f_x ; on a $f_{x.}(y) = f(x, y)$ pour tout y tel que $(x, y)\in D$.

Si, pour tout y (resp. x), l'application partielle $f_{.y}$ (resp. $f_{x.}$) est une application constante, on dit que f *ne dépend pas* de son premier (resp. second) argument ; cela signifie donc que $f(x,y) = f(x',y)$ si (x,y) et (x',y) sont dans D (resp. $f(x,y) = f(x,y')$ si (x, y) et (x, y') sont dans D). Pour tout y appartenant à la seconde projection de D, désignons par $g(y)$ la valeur commune des $f(x, y)$ pour $x\in A_y$; l'application $y\to g(y)$ est une application de $\mathrm{pr}_2 D$ dans C, telle que $g(y) = f(x, y)$, pour $(x, y)\in D$.

Réciproquement, soit g une application d'un ensemble B dans un ensemble C, et soit A un ensemble quelconque. L'application $(x, y) \to g(y)$ de $A \times B$ dans C ne dépend pas de son premier argument.

Soient u une application de A dans C, v une application de B dans D. L'application $z \to (u(\mathrm{pr}_1 z), v(\mathrm{pr}_2 z))$ de $A \times B$ dans $C \times D$ s'appelle l'*extension canonique* (ou simplement *extension*) *de u et v aux ensembles produits*, et se désigne parfois par la notation $u \times v$ ou (u, v) (si aucune confusion n'est à craindre) ; l'ensemble de ses valeurs est $u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle$. Si u et v sont des applications injectives (resp. surjectives), $u \times v$ est une application injective (resp. surjective). Si u et v sont bijectives, $u \times v$ est bijective et l'application réciproque de $u \times v$ est $\overset{-1}{u} \times \overset{-1}{v}$. Si u' est une application de C dans E, v' une application de D dans F, on a

$$(u' \times v') \circ (u \times v) = (u' \circ u) \times (v' \circ v).$$

Si U et V sont les graphes respectifs de u et v, le graphe W de $u \times v$ est l'ensemble des couples $((x, y), (z, t))$ de $(A \times B) \times (C \times D)$ tels que $(x, z) \in U$ et $(y, t) \in V$; on le met en correspondance biunivoque avec le produit $U \times V$ (partie de $(A \times C) \times (B \times D)$) par l'application $((x, y), (z, t)) \to ((x, z), (y, t))$ (cf. § 5, n° 5).

Exercices. — 1) Montrer que les relations $x \in y$, $x \subset y$, $x = \{y\}$ n'admettent pas de graphe par rapport à x et y.

2) Soit G un graphe. Montrer que la relation $X \subset \mathrm{pr}_1 G$ est équivalente à $X \subset \overset{-1}{G}\langle G\langle X\rangle\rangle$.

3) Soient G et H deux graphes. Montrer que la relation $\mathrm{pr}_1 H \subset \mathrm{pr}_1 G$ est équivalente à $H \subset H \circ \overset{-1}{G} \circ G$; en déduire qu'on a $G \subset G \circ \overset{-1}{G} \circ G$.

4) Si G est un graphe, montrer que $\varnothing \circ G = G \circ \varnothing = \varnothing$. Pour que $\overset{-1}{G} \circ G = \varnothing$, il faut et il suffit que $G = \varnothing$.

5) Soient A et B deux ensembles, G un graphe. Montrer que l'on a $(A \times B) \circ G = \overset{-1}{G}\langle A\rangle \times B$ et $G \circ (A \times B) = A \times G\langle B\rangle$.

6) Pour tout graphe G, soit G' le graphe $((\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)) - G$. Montrer qu'on a $(\overset{-1}{G})' = \overset{-1}{G'}$ et

$$G \circ (\overset{-1}{G})' \subset \Delta'_B, \qquad (\overset{-1}{G})' \circ G \subset \Delta'_A$$

si $A \supset \mathrm{pr}_1 G$ et $B \supset \mathrm{pr}_2 G$. Pour que l'on ait $G = (\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)$ il faut et il suffit que $G \circ \overset{-1}{G'} \circ G = \varnothing$.

7) Pour qu'un graphe G soit fonctionnel, il faut et il suffit que, pour tout ensemble X, $G\langle \overset{-1}{G}\langle X\rangle\rangle \subset X$.

8) Soient A et B deux ensembles, Γ une correspondance entre A et B, Γ' une correspondance entre B et A. Montrer que, si $\Gamma'(\Gamma(x)) = \{x\}$ pour tout $x \in A$ et $\Gamma(\Gamma'(y)) = \{y\}$ pour tout $y \in B$, Γ est une bijection de A sur B, et Γ' l'application réciproque.

9) Soient A, B, C, D des ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de C dans D. Montrer que, si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, f, g, h sont toutes trois des bijections.

10) Soient A, B, C des ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de C dans A. Montrer que si, parmi les applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$, deux sont des surjections et la troisième une injection, ou deux sont des injections et la troisième une surjection, alors f, g, h sont des bijections.

* 11) Déceler l'erreur dans le raisonnement suivant : Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des entiers $n > 2$ pour lesquels il existe trois entiers x, y, z strictement positifs et tels que $x^n + y^n = z^n$. L'ensemble A n'est pas vide (autrement dit, le « grand théorème de Fermat » est faux). En effet, soit $B = \{A\}$ et $C = \{\mathbf{N}\}$; comme B et C sont des ensembles à un seul élément, il existe une bijection f de B sur C. On a $f(A) = \mathbf{N}$; si A était vide, on aurait $\mathbf{N} = f(\varnothing) = \varnothing$, ce qui est absurde. *

§ 4. — Réunion et intersection d'une famille d'ensembles.

1. *Définition de la réunion et de l'intersection d'une famille d'ensembles.*

Soient X une famille (§ 3, n° 4), I son ensemble d'indices ; pour faciliter l'interprétation intuitive de ce qui suit, nous dirons que X est une *famille d'ensembles*.

Si $(X, I, \mathfrak{G})$ est une *famille de parties d'un ensemble* E (c'est-à-dire une famille d'éléments dont l'ensemble d'arrivée $\mathfrak{G}$ est tel que la relation $Y \in \mathfrak{G}$ entraîne $Y \subset E$), nous la noterons $(X_\iota)_{\iota \in I}$ $(X_\iota \in \mathfrak{G})$, ou simplement $(X_\iota)_{\iota \in I}$ (§ 3, n° 6) ; par abus de notation, nous noterons aussi $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles quelconque, ayant I pour ensemble d'indices.

Comme la relation $(\forall x)((\iota \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_\iota) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$ est vraie, il résulte de S5 (chap. I, § 4, nº 2) que la relation

$$(\forall \iota)(\exists \mathrm{Z})(\forall x)((\iota \in \mathrm{I} \text{ et } x \in \mathrm{X}_\iota) \Rightarrow (x \in \mathrm{Z}))$$

est vraie. En vertu du schéma S8 (§ 1, nº 6), la relation $(\exists \iota)(\iota \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_\iota)$ est donc *collectivisante* en x.

DÉFINITION 1. — *Soit* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille d'ensembles* (resp. *une famille de parties d'un ensemble* E). *On appelle réunion de cette famille, et on désigne par* $\bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ *l'ensemble* $\mathcal{E}_x((\exists \iota)(\iota \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_\iota))$, *c'est-à-dire l'ensemble des* x *qui appartiennent à un ensemble au moins de la famille* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$(*).

Si $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est une famille de parties d'un ensemble E, sa réunion est une partie de E ; on observera qu'elle ne dépend pas de E, ni de l'ensemble d'arrivée $\mathfrak{G}$ de l'application $\iota \rightarrow \mathrm{X}_\iota$.

Il est immédiat que si $\mathrm{I} = \varnothing$, on a $\bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota = \varnothing$, puisque la relation $(\exists \iota)(\iota \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_\iota)$ est alors fausse.

Supposons maintenant $\mathrm{I} \neq \varnothing$. Si α est un élément de I, la relation $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$ entraîne $x \in \mathrm{X}_\alpha$, donc, en vertu de C52 (§ 1, nº 6), cette relation est *collectivisante en* x.

DÉFINITION 2. — *Soit* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices* I *n'est pas vide. On appelle intersection de cette famille, et on désigne par* $\bigcap_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, *l'ensemble*

$$\mathcal{E}_x((\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))),$$

c'est-à-dire l'ensemble des x *qui appartiennent à tous les ensembles de la famille* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$.

(*) Le schéma S8 permet donc de définir la réunion d'une famille d'ensembles sans supposer à priori que ces ensembles soient des parties d'un même ensemble (hypothèse introduite dans la définition de la réunion donnée dans *Ens.* R, § 4, nº 2).

Si $\mathrm{I} = \varnothing$, la relation $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$ n'est pas collectivisante en x : en effet, c'est une relation vraie et il n'existe pas d'ensemble Y tel que $x \in \mathrm{Y}$ soit une relation vraie, car ce serait l'ensemble de tous les objets (cf. § 1, nº 7, *Remarque*).

Si $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ est une famille de parties d'un ensemble E, et si $\mathrm{I} \neq \varnothing$, la relation « $x \in \mathrm{E}$ et $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$ » est équivalente à $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$; par suite elle est collectivisante en x et l'ensemble des x vérifiant cette relation est égal à $\bigcap_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$. Lorsque $\mathrm{I} = \varnothing$, la relation « $x \in \mathrm{E}$ et $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota))$ » est équivalente à $x \in \mathrm{E}$; elle est donc encore collectivisante en x, et l'ensemble des x vérifiant cette relation est E. On pose par suite la définition suivante :

DÉFINITION 3. — *Soit* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille de parties d'un ensemble* E. *On appelle intersection de cette famille, et on désigne par* $\bigcap_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, *l'ensemble* $\mathcal{E}_x(x \in \mathrm{E}$ et $(\forall \iota)((\iota \in \mathrm{I}) \Rightarrow (x \in \mathrm{X}_\iota)))$, *autrement dit l'ensemble des* x *qui appartiennent à* E *et à tous les ensembles de la famille* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$.

Pour une famille $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \varnothing}$ de parties de E, on a donc $\bigcap_{\iota \in \varnothing} \mathrm{X}_\iota = \mathrm{E}$. Mais pour une famille $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ de parties de E dont l'ensemble d'indices n'est pas vide, l'intersection $\bigcap_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ ne dépend ni de E, ni de l'ensemble d'arrivée de $\iota \rightarrow \mathrm{X}_\iota$, ce qui justifie l'emploi de la même notation dans les déf. 2 et 3.

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ *une famille d'ensembles, et soit* f *une application d'un ensemble* K *sur* I. *On a alors* $\bigcup_{\varkappa \in \mathrm{K}} \mathrm{X}_{f(\varkappa)} = \bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, *et, si* $\mathrm{I} \neq \varnothing$, $\bigcap_{\varkappa \in \mathrm{K}} \mathrm{X}_{f(\varkappa)} = \bigcap_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$.

Soit x un élément de $\bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$. Il existe un indice $\iota \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathrm{X}_\iota$. Puisque $f\langle \mathrm{K} \rangle = \mathrm{I}$, il existe un indice $\varkappa \in \mathrm{K}$ tel que $\iota = f(\varkappa)$, d'où $x \in X_{f(\varkappa)}$, et par suite $x \in \bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Réciproquement, si $x \in \bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$, il existe un $\varkappa \in K$ tel que $x \in X_{f(\varkappa)}$, d'où, puisque $f(\varkappa) \in I$, $x \in \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. On a donc $\bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Supposons maintenant $I \neq \emptyset$, et soit x un élément de $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$. Pour tout élément $\varkappa$ de K, on a $f(\varkappa) \in I$, d'où $x \in X_{f(\varkappa)}$ et $x \in \bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Soit réciproquement x un élément de $\bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Si ι est un élément quelconque de I, il existe un élément $\varkappa$ de K tel que $\iota = f(\varkappa)$, d'où $x \in X_\iota$, et par suite $x \in \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$. On a donc $\bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Pour les familles de parties d'un ensemble donné, il est clair que la seconde partie de la prop. 1 est encore valable sans la restriction $I \neq \emptyset$.

Corollaire. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille d'ensembles telle que* $X_\iota = X_\varkappa$ *pour tout couple d'indices* $(\iota, \varkappa)$. *Alors, pour tout* $\alpha \in I$, *on a* $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha$, *et (si* $I \neq \emptyset$*)* $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha$.

Il suffit d'appliquer la prop. 1 à l'application constante $\iota \to \alpha$ de I sur $\{\alpha\}$.

Définition 4. — *Soit* $\mathfrak{F}$ *un ensemble d'ensembles, et soit* Φ *la famille d'ensembles constituée par l'application identique de* $\mathfrak{F}$. *La réunion des ensembles de* Φ, *et (si* $\mathfrak{F}$ *est non vide) l'intersection des ensembles de* Φ, *s'appellent respectivement la réunion et l'intersection des ensembles de* $\mathfrak{F}$, *et se désignent par* $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$ *et* $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X$.

Il résulte tout de suite de la prop. 1 que, si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ensembles, la réunion et (si $I \neq \emptyset$) l'intersection de cette famille sont respectivement égales à la réunion et à l'intersection des ensembles de l'ensemble des éléments de cette famille.

2. *Propriétés de la réunion et de l'intersection.*

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ sont des familles d'ensembles ayant le même ensemble d'indices I, et si on a $Y_\iota \subset X_\iota$ pour tout $\iota \in I$, il est immédiat que l'on a $\bigcup_{\iota \in I} Y_\iota \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, et (si $I \neq \emptyset$) $\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota \subset \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles. Si $J \subset I$, on a $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, et (si $J \neq \emptyset$) $\bigcap_{\iota \in J} X_\iota \supset \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Proposition 2. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices* I *est réunion d'une famille* $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ *d'ensembles. On a alors*

$$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \bigcup_{\lambda \in L} \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big)$$

et (si $L \neq \emptyset$ *et* $J_\lambda \neq \emptyset$ *pour tout* $\lambda \in L$*)*

$$\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = \bigcap_{\lambda \in L} \Big(\bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big)$$

(« associativité » de la réunion et de l'intersection).

Soit x un élément de $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. Il existe un indice $\iota \in I$ tel que $x \in X_\iota$. Puisque I est la réunion de la famille $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$, il existe un indice $\lambda \in L$ tel que $\iota \in J_\lambda$, d'où $x \in \bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota$, et par suite $x \in \bigcup_{\lambda \in L} \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big)$. Soit inversement x un élément de l'ensemble $\bigcup_{\lambda \in L} \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big)$. Il existe un indice $\lambda \in L$ tel que $x \in \bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota$, d'où il résulte qu'il existe un indice $\iota \in J_\lambda$ (donc $\iota \in I$) tel que $x \in X_\iota$; on en conclut que $x \in \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Supposons maintenant que $L \neq \emptyset$ et $J_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in L$; alors $I \neq \emptyset$. Soit x un élément de $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$. Si $\lambda \in L$, on a $x \in X_\iota$ pour tout $\iota \in J_\lambda$ (puisque $J_\lambda \subset I$), d'où $x \in \bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_\iota$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{L}$, on en conclut que x appartient à $\bigcap_{\lambda\in\mathrm{L}}\Big(\bigcap_{\iota\in\mathrm{J}_\lambda}\mathrm{X}_\iota\Big)$. Soit réciproquement x un élément de ce dernier ensemble, et soit ι un élément quelconque de I. Il existe un $\lambda \in \mathrm{L}$ tel que $\iota \in \mathrm{J}_\lambda$; puisque $x \in \bigcap_{\iota\in\mathrm{J}_\lambda}\mathrm{X}_\iota$, on a $x \in \mathrm{X}_\iota$. Ceci étant vrai pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, on a $x \in \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota$. La prop. 2 est donc démontrée.

Pour les familles de parties d'un ensemble, la seconde partie de la prop. 2 est encore valable sans les restrictions sur L et J_λ.

3. *Images d'une réunion et d'une intersection.*

PROPOSITION 3. — *Soient* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties d'un ensemble* A, *et* Γ *une correspondance entre* A *et* B. *On a alors*

$$\Gamma\Big\langle\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle = \bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle, \quad et \quad \Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle \subset \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle.$$

La relation $(\exists x)(x \in \bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota$ et $y \in \Gamma(x))$ est équivalente à $(\exists x)(\exists \iota)(\iota \in \mathrm{I}$ et $x \in \mathrm{X}_\iota$ et $y \in \Gamma(x))$, donc à $(\exists \iota)(\iota \in \mathrm{I}$ et $y \in \Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle)$, c'est-à-dire à $y \in \bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle$, ce qui démontre la première formule. D'autre part, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, on a $\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota \subset \mathrm{X}_\iota$, d'où (§ 3, prop. 2) $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle \subset \Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle$, et par suite $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle \subset \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle$.

Si Γ est une correspondance quelconque (et en particulier une fonction quelconque), la formule $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle = \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\Gamma\langle\mathrm{X}_\iota\rangle$ est en général fausse.

* Par exemple, dans le plan $\mathbf{R}^2$, les premières projections des droites $y = x$ et $y = x + 1$ sont identiques à $\mathbf{R}$, mais l'intersection de ces droites est vide, et par suite aussi la première projection de cette intersection (*). *

(*) Une erreur célèbre provenant de l'application de la formule précédente est celle commise par H. Lebesgue dans sa tentative pour démontrer que la projection sur un axe d'un ensemble borélien du plan est encore un ensemble borélien (résultat depuis reconnu inexact, et dont la discussion est à l'origine de la théorie des ensembles « analytiques ») : il écrit que la projection de l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles est égale à l'intersection de leurs projections (*Journal de Mathématiques*, (6), t. I (1905), p. 191-192).

On a cependant l'important résultat suivant :

PROPOSITION 4. — *Soient* f *une application de* A *dans* B, *et* $(\mathrm{Y}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties de* B. *On a alors* $\overset{-1}{f}\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{Y}_\iota\Big\rangle = \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\overset{-1}{f}\langle\mathrm{Y}_\iota\rangle$.

En effet, soit x un élement de $\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\overset{-1}{f}\langle\mathrm{Y}_\iota\rangle$. On a $f(x) \in \mathrm{Y}_\iota$ pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, d'où $f(x) \in \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{Y}_\iota$, et par suite $x \in \overset{-1}{f}\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{Y}_\iota\Big\rangle$. Donc $\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\overset{-1}{f}\langle\mathrm{Y}_\iota\rangle \subset \overset{-1}{f}\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{Y}_\iota\Big\rangle$, ce qui, avec la prop. 3, achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Si* f *est une injection de* A *dans* B *et si* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ *est une famille de parties de* A *dont l'ensemble d'indices n'est pas vide, on a* $f\Big\langle\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big\rangle = \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}f\langle\mathrm{X}_\iota\rangle$.

On peut en effet écrire $f = i \circ g$, où i est l'injection canonique de $f\langle\mathrm{A}\rangle$ dans B et g une bijection de A sur $f\langle\mathrm{A}\rangle$. Alors, pour toute partie X de A, on a $f\langle\mathrm{X}\rangle = \overset{-1}{h}\langle\mathrm{X}\rangle$, en désignant par h l'application réciproque de g ; on est donc ramené à la prop. 4.

4. *Complémentaire d'une réunion ou d'une intersection.*

PROPOSITION 5. — *Pour toute famille* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ *de parties d'un ensemble* E, *on a*

$$\complement_{\mathrm{E}}\Big(\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big) = \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{X}_\iota) \qquad et \qquad \complement_{\mathrm{E}}\Big(\bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big) = \bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{X}_\iota).$$

Soit $x \in \complement_{\mathrm{E}}\Big(\bigcup_{\iota\in\mathrm{I}}\mathrm{X}_\iota\Big)$. On a $x \in \mathrm{E}$, et, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, $x \notin \mathrm{X}_\iota$, donc $x \in \complement_{\mathrm{E}}\mathrm{X}_\iota$; par suite $x \in \bigcap_{\iota\in\mathrm{I}}(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{X}_\iota)$. Réciproquement, soit

$x \in \bigcap_{\iota \in I} (\complement_E X_\iota)$; par définition de l'intersection (déf. 3), on a $x \in E$. En outre, si on avait $x \in \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, il existerait $\varkappa \in I$ tel que $x \in X_\varkappa$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in \bigcap_{\iota \in I} (\complement_E X_\iota)$; donc $x \in \complement_E \left(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \right)$. Ceci achève la démonstration de la première formule. La seconde en résulte immédiatement, compte tenu de la relation $\complement_E(\complement_E X) = X$ pour toute partie X de E.

5. *Réunion et intersection de deux ensembles.*

Si A et B sont des ensembles, on pose

$$A \cup B = \bigcup_{X \in \{A,B\}} X, \qquad A \cap B = \bigcap_{X \in \{A,B\}} X.$$

Il est clair que $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent soit à A, soit à B (et éventuellement à tous deux), tandis que $A \cap B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent à la fois à A et à B. En particulier $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$.

Posons $\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\}$. L'ensemble $\{x, y, z\}$ est l'ensemble dont les seuls éléments sont x, y et z. On pose de même $\{x, y, z, t\} = \{x, y, z\} \cup \{t\}$. Etc.

Si maintenant A, B, C, D sont des ensembles, on pose

$$A \cup B \cup C = \bigcup_{X \in \{A,B,C\}} X, \qquad A \cap B \cap C = \bigcap_{X \in \{A,B,C\}} X$$

$$A \cup B \cup C \cup D = \bigcup_{X \in \{A,B,C,D\}} X, \quad A \cap B \cap C \cap D = \bigcap_{X \in \{A,B,C,D\}} X. \text{ Etc.}$$

Soient A, B, C des ensembles. Les prop. 1 et 2 entraînent les formules

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Ces formules sont d'ailleurs des conséquences immédiates de

théorèmes énoncés dans le critère C24 (chap. I, § 3, nº 5) ; on démontre de la même façon les formules

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(« distributivité » de la réunion par rapport à l'intersection et de l'intersection par rapport à la réunion ; cf. § 5, nº 6).

La relation $A \subset B$ est équivalente à $A \cup B = B$ et à $A \cap B = A$. Si A et B sont des parties d'un ensemble E, on déduit de la prop. 5 (ou du critère C24) les formules

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B), \qquad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) ;$$

on a en outre

$$A \cup (\complement_E A) = E, \qquad A \cap (\complement_E A) = \varnothing.$$

Si Γ est une correspondance entre E et F, A et B des parties de E, on déduit de la prop. 3 que

$$\Gamma\langle A \cup B \rangle = \Gamma\langle A \rangle \cup \Gamma\langle B \rangle, \qquad \Gamma\langle A \cap B \rangle \subset \Gamma\langle A \rangle \cap \Gamma\langle B \rangle$$

et si f est une application de F dans E

$$\overset{-1}{f}\langle A \cap B \rangle = \overset{-1}{f}\langle A \rangle \cap \overset{-1}{f}\langle B \rangle$$

en vertu de la prop. 4.

Notons aussi la proposition correspondante pour les complémentaires :

Proposition 6. — *Soit f une application de* A *dans* B ; *pour toute partie* Y *de* B, *on a* $\overset{-1}{f}\langle B - Y \rangle = \overset{-1}{f}\langle B \rangle - \overset{-1}{f}\langle Y \rangle$.

En effet, pour que x appartienne à $\overset{-1}{f}\langle B - Y \rangle$, il faut et il suffit que $f(x)$ appartienne à B mais non à Y, c'est-à-dire que x appartienne à $\overset{-1}{f}\langle B \rangle$, mais non à $\overset{-1}{f}\langle Y \rangle$.

Corollaire. — *Soit f une injection de* A *dans* B ; *pour toute partie* X *de* A, *on a* $f\langle A - X \rangle = f\langle A \rangle - f\langle X \rangle$.

En écrivant $f = i \circ g$, où i est l'injection canonique de $f\langle A \rangle$ dans B, on se ramène à la prop. 6 appliquée à $\overset{-1}{g}$.

L'intersection $X \cap A$ s'appelle quelquefois *trace* de X sur A. Si $\mathfrak{F}$ est une famille d'ensembles, on appelle encore *trace* de $\mathfrak{F}$ sur A l'ensemble des traces sur A des ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$.

6. Recouvrements.

DÉFINITION 5. — *On dit qu'une famille d'ensembles* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *est un recouvrement d'un ensemble* E *si* $E \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. *Si* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *et* $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ *sont des recouvrements de* E, *on dit que le second de ces recouvrements est plus fin que le premier (ou que le premier est moins fin que le second) si, pour tout* $\varkappa \in K$, *il existe un* $\iota \in I$ *tel que* $Y_\varkappa \subset X_\iota$.

Un ensemble d'ensembles $\mathfrak{R}$ est un recouvrement de E si la famille d'ensembles constituée par l'application identique de $\mathfrak{R}$ est un recouvrement de E, autrement dit si $E \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{R}} X$.

Si $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ sont trois recouvrements de E tels que $\mathfrak{R}'$ soit plus fin que $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{R}''$ plus fin que $\mathfrak{R}'$, il est clair que $\mathfrak{R}''$ est plus fin que $\mathfrak{R}$.

Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de E ; si J est une partie de I telle que $(X_\iota)_{\iota \in J}$ soit encore un recouvrement de E, ce recouvrement est évidemment plus fin que $(X_\iota)_{\iota \in I}$.

Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ des recouvrements d'un ensemble E. La famille d'ensembles $(X_\iota \cap Y_\varkappa)_{(\iota, \varkappa) \in I \times K}$ est encore un recouvrement de E. En effet, si $x \in E$, il existe des indices $\iota \in I$ et $\varkappa \in K$ tels que $x \in X_\iota$ et $x \in Y_\varkappa$, d'où $x \in X_\iota \cap Y_\varkappa$. De plus, il est clair que le recouvrement $(X_\iota \cap Y_\varkappa)_{(\iota, \varkappa) \in I \times K}$ est plus fin que chacun des recouvrements $(X_\iota)_{\iota \in I}$, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$. Soit réciproquement $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ un recouvrement de E qui est plus fin que chacun des recouvrements $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$; si $\lambda \in L$, il existe alors des indices $\iota \in I$ et $\varkappa \in K$ tels que $Z_\lambda \subset X_\iota$ et $Z_\lambda \subset Y_\varkappa$, d'où $Z_\lambda \subset X_\iota \cap Y_\varkappa$, ce qui montre que le recouvrement $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ est plus fin que le recouvrement $(X_\iota \cap Y_\varkappa)_{(\iota, \varkappa) \in I \times K}$.

Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement d'un ensemble A, et soit f une application de A *sur* un ensemble B. La famille $(f\langle X_\iota \rangle)_{\iota \in I}$ est alors un recouvrement de B (prop. 3) qui s'appelle *l'image du recouvrement* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *par* f. Si g est une application d'un ensemble C dans l'ensemble A, la famille $(\overset{-1}{g}\langle X_\iota \rangle)_{\iota \in I}$ est un recouvrement de C, qu'on appelle *l'image réciproque du recouvrement* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *par* g.

Soient E et F des ensembles, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement de E et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ un recouvrement de F. La famille $(X_\iota \times Y_\varkappa)_{(\iota, \varkappa) \in I \times K}$ est alors un recouvrement de $E \times F$ qu'on appelle le *produit* des recouvrements $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de E et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ de F.

PROPOSITION 7. — 1° *Soient* E *un ensemble et* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *un recouvrement de* E. *Si deux fonctions* f, g, *ayant* E *pour ensemble de définition, sont telles que, pour tout* $\iota \in I$, f *et* g *coïncident dans* $E \cap X_\iota$, *alors* f *et* g *coïncident dans* E.

2° *Soient* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille d'ensembles,* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de fonctions ayant même ensemble d'arrivée* F, *telle que, pour tout* $\iota \in I$, *l'ensemble de définition de* f_ι *soit* X_ι, *et que, pour tout couple* $(\iota, \varkappa) \in I \times I$, f_ι *et* $f_\varkappa$ *coïncident dans* $X_\iota \cap X_\varkappa$. *Il existe alors une fonction* f *et une seule, ayant* $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ *pour ensemble de définition et* F *pour ensemble d'arrivée, et qui prolonge toutes les fonctions* f_ι $(\iota \in I)$.

1° Soit x un élément quelconque de E ; il existe un $\iota \in I$ tel que $x \in X_\iota$, d'où $f(x) = g(x)$ par hypothèse.

2° Soit G_ι le graphe de f_ι, et $G = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$; montrons que G est un graphe fonctionnel. En effet, si $(x, y) \in G$ et $(x, y') \in G$, il existe deux indices ι, $\varkappa$ dans I tels que $(x, y) \in G_\iota$ et $(x, y') \in G_\varkappa$. Cela entraîne $x \in X_\iota$, $x \in X_\varkappa$, $y = f_\iota(x)$, $y' = f_\varkappa(x)$; mais comme $x \in X_\iota \cap X_\varkappa$, on a $f_\iota(x) = f_\varkappa(x)$, c'est-à-dire $y = y'$. Le graphe G a pour ensemble de définition $\mathrm{pr}_1 G = \bigcup_{\iota \in I} \mathrm{pr}_1 G_\iota = A$; la fonction $f = (G, A, F)$ répond donc à la question. Son unicité résulte de la première partie de la proposition.

7. Partitions.

DÉFINITION 6. — *On dit que deux ensembles* A, B *sont disjoints (ou sans élément commun) si* $A \cap B = \emptyset$; *s'il n'en est pas ainsi, on dit que* A *et* B *se rencontrent. Soit* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille d'ensembles ; on dit que les ensembles de cette famille sont mutuellement (ou deux à deux) disjoints si les conditions* $\iota \in I$, $\varkappa \in I$, $\iota \neq \varkappa$ *entraînent* $X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset$.

Soit f une application de A dans B, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de parties de B, mutuellement disjointes ; la prop. 4 montre que les ensembles de la famille $(\overset{-1}{f}\langle Y_\iota\rangle)_{\iota\in I}$ de parties de A sont mutuellement disjoints. Par contre, si $(X_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille de parties de A, mutuellement disjointes, les ensembles de la famille $(f\langle X_\iota\rangle)_{\iota\in I}$ ne sont pas en général mutuellement disjoints.

PROPOSITION 8. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles mutuellement disjoints,* $(f_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille de fonctions ayant même ensemble d'arrivée* F, *et telles que, pour tout* $\iota \in I$, *l'ensemble de définition de* f_ι *soit* X_ι. *Il existe alors une fonction* f *et une seule, ayant* $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ *pour ensemble de définition et* F *pour ensemble d'arrivée, et qui prolonge toutes les fonctions* f_ι $(\iota \in I)$.

C'est un corollaire immédiat de la prop. 7, puisque f_ι et $f_\varkappa$ coïncident évidemment dans $X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset$ lorsque $\iota \neq \varkappa$.

DÉFINITION 7. — *On appelle partition d'un ensemble* E *une famille de parties* non vides *et mutuellement disjointes de* E, *qui est un recouvrement de* E.

Exemple. — Pour tout ensemble non vide A, la famille $(\{x\})_{x\in A}$ des parties de A réduites à un seul élément, est une partition de A.

Si $(X_\iota)_{\iota\in I}$ est une partition d'un ensemble E, l'application $\iota \to X_\iota$ de I sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ des éléments X_ι de la partition est biunivoque. La donnée de $\mathfrak{F}$ définit donc la partition à une correspondance biunivoque près des ensembles d'indices. Lorsqu'on parle d'une partition, c'est de l'ensemble des éléments de la partition qu'il est question le plus souvent.

8. *Somme d'une famille d'ensembles.*

PROPOSITION 9. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles. Il existe un ensemble* X *possédant la propriété suivante :* X *est réunion d'une famille* $(X'_\iota)_{\iota\in I}$ *d'ensembles mutuellement disjoints, telle que, pour tout* $\iota \in I$, *il existe une application biunivoque de* X_ι *sur* X'_ι.

Soit $A = \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$. Si $\iota \in I$, l'application $x \to (x, \iota)$ $(x \in X_\iota)$ est

une application biunivoque de X_ι sur une partie X'_ι de $A \times I$. De plus, l'image de X'_ι par la seconde fonction coordonnée sur $A \times I$ est contenue dans l'ensemble $\{\iota\}$; il en résulte que $X'_\iota \cap X'_\varkappa = \emptyset$ si $\iota \neq \varkappa$. Il suffit alors de poser $X = \bigcup_{\iota\in I} X'_\iota$.

DÉFINITION 8. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles. On appelle somme de cette famille d'ensembles l'ensemble* $\tau_X(R)$, R *désignant la relation : « il existe une famille* $(X'_\iota)_{\iota\in I}$ *d'ensembles deux à deux disjoints telle que* $X = \bigcup_{\iota\in I} X'_\iota$ *et telle que, pour tout* $\iota \in I$, *il existe une application biunivoque de* X_ι *sur* X'_ι ».

PROPOSITION 10. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles mutuellement disjoints. Soient* A *sa réunion et* S *sa somme. Il existe une application biunivoque de* A *sur* S.

Soient $(X'_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints telle que $S = \bigcup_{\iota\in I} X'_\iota$, et pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une bijection de X_ι sur X'_ι. En vertu de la prop. 8, il existe une application f de A dans S qui prolonge toutes les applications f_ι. On vérifie aussitôt que f est une application biunivoque de A sur S.

Par abus de langage, on dit qu'un ensemble E est *somme* d'une famille d'ensembles $(X_\iota)_{\iota\in I}$ lorsqu'il existe une bijection de E sur la somme de cette famille définie par la déf. 8.

On notera que, si $(X_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille d'ensembles quelconque, le raisonnement de la prop. 10 montre qu'il existe une application de la somme S de cette famille *sur* sa réunion A.

Exercices. — 1) Soit G un graphe. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

a) G est un graphe fonctionnel ;

b) quels que soient les ensembles X, Y, $\overset{-1}{G}(X \cap Y) = \overset{-1}{G}(X) \cap \overset{-1}{G}(Y)$;

c) la relation $X \cap Y = \emptyset$ entraîne $\overset{-1}{G}(X) \cap \overset{-1}{G}(Y) = \emptyset$.

2) Soit G un graphe. Montrer que, pour tout ensemble X, on a $G(X) = pr_2(G \cap (X \times pr_2 G))$ et $G(X) = G(X \cap pr_1 G)$.

3) Soient X, Y, Y′, Z quatre ensembles. Montrer que l'on a

$$(Y' \times Z)\circ(X \times Y) = \varnothing \text{ si } Y \cap Y' = \varnothing$$

et

$$(Y' \times Z)\circ(X \times Y) = X \times Z \text{ si } Y \cap Y' \neq \varnothing$$

4) Soit $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de graphes. Montrer que, pour tout ensemble X, on a $\left(\bigcup_{\iota\in I} G_\iota\right)\langle X\rangle = \bigcup_{\iota\in I} G_\iota\langle X\rangle$, et pour tout objet x, $\left(\bigcap_{\iota\in I} G_\iota\right)\langle\{x\}\rangle = \bigcap_{\iota\in I} G_\iota\langle\{x\}\rangle$. Donner un exemple de deux graphes G, H et d'un ensemble X tels que

$$(G \cap H)\langle X\rangle \neq G\langle X\rangle \cap H\langle X\rangle.$$

5) Soient $(G_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de graphes, H un graphe. Montrer que l'on a

$$\left(\bigcup_{\iota\in I} G_\iota\right)\circ H = \bigcup_{\iota\in I} (G_\iota \circ H), \quad H\circ\left(\bigcup_{\iota\in I} G_\iota\right) = \bigcup_{\iota\in I} (H\circ G_\iota).$$

6) Pour qu'un graphe G soit fonctionnel, il faut et il suffit que, pour tout couple de graphes H, H′, on ait

$$(H \cap H')\circ G = (H\circ G) \cap (H'\circ G).$$

7) Soient G, H, K trois graphes. Démontrer la relation

$$(H\circ G)\cap K \subset (H \cap (K \circ \overset{-1}{G}))\circ(G \cap (\overset{-1}{H}\circ K)).$$

8) Soient $\mathfrak{R} = (X_\iota)_{\iota\in I}$ et $\mathfrak{S} = (Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ deux recouvrements d'un ensemble E.

a) Montrer que, si $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ sont des partitions de E, et si $\mathfrak{R}$ est plus fine que $\mathfrak{S}$, alors, pour tout $\varkappa \in K$, il existe $\iota \in I$ tel que $X_\iota \subset Y_\varkappa$.

b) Donner un exemple de deux recouvrements $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ tels que $\mathfrak{R}$ soit plus fin que $\mathfrak{S}$, mais où la propriété énoncée dans *a*) soit en défaut.

c) Donner un exemple de deux partitions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ de E telles que, pour tout $\varkappa \in K$, il existe $\iota \in I$ pour lequel $X_\iota \subset Y_\varkappa$, mais telles que $\mathfrak{R}$ ne soit pas plus fine que $\mathfrak{S}$.

§ 5. — Produit d'une famille d'ensembles.

1. *L'axiome de l'ensemble des parties.*

A4. $(\forall X)\ \mathrm{Coll}_Y\,(Y \subset X)$.

Cet axiome signifie que, pour tout ensemble X, il existe un ensemble dont les éléments sont toutes les parties de X, savoir

l'ensemble $\mathcal{E}_Y(Y \subset X)$ (§ 1, n° 4) ; on le désigne par $\mathfrak{P}(X)$, et on l'appelle l'*ensemble des parties de* X. Il est clair que, si $X \subset X'$, on a $\mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(X')$.

Soient A et B deux ensembles, Γ une correspondance entre A et B. La *fonction* $X \to \Gamma\langle X\rangle$ $(X \in \mathfrak{P}(A),\ \Gamma\langle X\rangle \in \mathfrak{P}(B))$ s'appelle l'*extension canonique* (ou simplement *extension*) de Γ *aux ensembles de parties*, et se note $\hat{\Gamma}$; c'est une application de $\mathfrak{P}(A)$ dans $\mathfrak{P}(B)$. Si Γ′ est une correspondance entre B et un ensemble C, la formule $(\Gamma'\circ\Gamma)\langle X\rangle = \Gamma'\langle\Gamma\langle X\rangle\rangle$ montre que l'extension de $\Gamma'\circ\Gamma$ aux ensembles de parties est l'application $\hat{\Gamma}'\circ\hat{\Gamma}$.

Proposition 1. — 1° *Si f est une surjection d'un ensemble* E *sur un ensemble* F, *l'extension canonique $\hat{f}$ est une surjection de* $\mathfrak{P}(E)$ *sur* $\mathfrak{P}(F)$.

2° *Si f est une injection de* E *dans* F, *l'extension canonique $\hat{f}$ est une injection de* $\mathfrak{P}(E)$ *dans* $\mathfrak{P}(F)$.

1° Si s est une section associée à f, $f\circ s$ est l'application identique de F, donc $\hat{f}\circ\hat{s}$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(F)$, ce qui montre que $\hat{f}$ est une surjection et $\hat{s}$ une section associée (§ 3, n° 8).

2° La proposition est immédiate si $E = \varnothing$, puisqu'alors $\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing\}$. Si $E \neq \varnothing$ et si r est une rétraction associée à f, $r\circ f$ est l'application identique de E, donc $\hat{r}\circ\hat{f}$ est l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$, ce qui montre que $\hat{f}$ est une injection et $\hat{r}$ une rétraction associée (§ 3, n° 8).

2. *Ensemble des applications d'un ensemble dans un ensemble.*

Soient E et F des ensembles. Le graphe d'une application de E dans F est une partie de $E \times F$. L'ensemble des éléments de $\mathfrak{P}(E \times F)$ qui possèdent la propriété d'être des graphes d'applications de E dans F est donc une partie de $\mathfrak{P}(E \times F)$ que l'on désigne par F^E. L'ensemble des triplets $f = (G, E, F)$, pour $G \in F^E$ est donc l'*ensemble des applications* de E dans F ; on le désigne par $\mathcal{F}(E, F)$. Il est clair que $G \to (G, E, F)$ est une bijection (dite *canonique*) de F^E sur $\mathcal{F}(E, F)$. L'existence de cette bijection permet de traduire aussitôt toute proposition relative à l'ensemble F^E en une proposition relative à $\mathcal{F}(E, F)$, et vice-versa.

Soient E, E′, F, F′ des ensembles. Soient u une application de E′ dans E, et v une application de F dans F′. La fonction $f \to v \circ f \circ u$ ($f \in \mathcal{F}(E, F)$) est une application de $\mathcal{F}(E, F)$ dans $\mathcal{F}(E', F')$.

PROPOSITION 2. — 1° *Si u est une surjection de E′ sur E, et v une injection de F dans F′, l'application $f \to v \circ f \circ u$ est injective.*

2° *Si u est une injection de E′ dans E, et v une surjection de F sur F′, l'application $f \to v \circ f \circ u$ est surjective.*

Bornons-nous au cas où les ensembles E, E′, F, F′ sont non vides, la proposition se vérifiant trivialement dans les autres cas.

1° Soient s une section associée à u, r une rétraction associée à v (§ 3, déf. 11). On a $r \circ (v \circ f \circ u) \circ s = I_F \circ f \circ I_E = f$, ce qui montre que $f \to v \circ f \circ u$ est injective.

2° Soient r' une rétraction associée à u, s' une section associée à v. Pour toute application $f' : E' \to F'$, on a $v \circ (s' \circ f' \circ r') \circ u = f'$, ce qui montre que $f \to v \circ f \circ u$ est surjective.

COROLLAIRE. — *Si u est une bijection de E′ sur E et v une bijection de F sur F′, $f \to v \circ f \circ u$ est bijective.*

Soient A, B, C trois ensembles, et f une application de $B \times C$ dans A. Pour tout $y \in C$, soit f_y l'application partielle $x \to f(x, y)$ de B dans A (§ 3, n° 9) ; la fonction $y \to f_y$ est une application de C dans $\mathcal{F}(B,A)$. Inversement, pour toute application g de C dans $\mathcal{F}(B, A)$, il existe une application et une seule f de $B \times C$ dans A telle que $g(y) = f_y$ pour tout $y \in C$, savoir l'application $(x, y) \to (g(y))(x)$. Donc :

PROPOSITION 3. — *Si, pour toute application f de $B \times C$ dans A, on désigne par $\tilde{f}$ l'application $y \to f_y$ de C dans $\mathcal{F}(B, A)$, la fonction $f \to \tilde{f}$ est une bijection* (dite *canonique*) *de $\mathcal{F}(B \times C, A)$ sur $\mathcal{F}(C, \mathcal{F}(B, A))$.*

On définit de la même manière une bijection (dite canonique) de $\mathcal{F}(B \times C, A)$ sur $\mathcal{F}(B, \mathcal{F}(C, A))$. En raison de la correspondance biunivoque entre applications et graphes fonctionnels, les bijections précédentes fournissent des bijections (dites canoniques) de $A^{B \times C}$ sur $(A^B)^C$ (resp. $(A^C)^B$).

3. Définition du produit d'une famille d'ensembles.

Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, F un graphe fonctionnel ayant I pour ensemble de définition, et tel que, pour tout $\iota \in I$, on ait $F(\iota) \in X_\iota$; on en déduit que, pour tout $\iota \in I$, on a $F(\iota) \in A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, et par suite que F est un élément de $\mathfrak{P}(I \times A)$. Les graphes fonctionnels ayant la propriété précédente forment donc une partie de $\mathfrak{P}(I \times A)$.

DÉFINITION 1. — *Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles. L'ensemble des graphes fonctionnels F, ayant I pour ensemble de définition, et tels que $F(\iota) \in X_\iota$ pour tout $\iota \in I$, s'appelle le produit de la famille d'ensembles $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et se désigne par $\prod_{\iota \in I} X_\iota$. Pour tout $\iota \in I$, X_ι s'appelle le facteur d'indice ι du produit $\prod_{\iota \in I} X_\iota$; l'application $F \to F(\iota)$ ($F \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, $F(\iota) \in X_\iota$) s'appelle la fonction coordonnée* (ou *projection*) *d'indice ι, et se note pr_ι.*

On dit que $F(\iota)$ est la *coordonnée d'indice ι* (ou *projection d'indice ι*) de F ; l'image $pr_\iota\langle A \rangle$ d'une partie A de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ par la fonction coordonnée d'indice ι s'appelle la *projection d'indice ι* de A ; on vérifie aisément que $A \subset \prod_{\iota \in I} pr_\iota\langle A \rangle$.

On utilise souvent la notation $(x_\iota)_{\iota \in I}$ pour désigner les élements de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ (§ 3, n° 6).

Si $I = \varnothing$, l'ensemble $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ ne possède qu'un seul élément, savoir l'ensemble vide (§ 3, n° 4, *Exemple* 1).

Lorsque tous les facteurs X_ι du produit $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sont égaux à un même ensemble E, on a $\prod_{\iota \in I} X_\iota = E^I$, comme il résulte aussitôt des définitions.

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'ensembles quelconque, E un ensemble tel que $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \subset E$, la déf. 1 montre que $\prod_{\iota \in I} X_\iota \subset E^I$; il y a donc correspondance biunivoque entre $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ et un ensemble d'applications de I dans E (partie de $\mathfrak{F}(I, E)$).

Si $I = \{\alpha\}$ est un ensemble à un seul élément, on a $\prod_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha^{\{\alpha\}}$; l'application $F \to F(\alpha)$ est alors une application bijective de $\prod_{\iota \in \{\alpha\}} X_\iota$ sur X_α (dite *canonique*, ainsi que l'application réciproque).

Soient A et B des ensembles, et soient α, β deux objets distincts (il en existe, par exemple $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$). Considérons le graphe $\{(\alpha, A), (\beta, B)\}$, qui est évidemment fonctionnel, et n'est autre que la famille $(X_\iota)_{\iota \in \{\alpha, \beta\}}$ telle que $X_\alpha = A$, $X_\beta = B$. Pour tout couple $(x, y) \in A \times B$, soit $f_{x,y}$ le graphe fonctionnel $\{(\alpha, x), (\beta, y)\}$. Il est immédiat que la fonction $(x, y) \to f_{x,y}$ est une application bijective de $A \times B$ sur $\prod_{\iota \in \{\alpha, \beta\}} X_\iota$, dont l'application réciproque est $g \to (g(\alpha), g(\beta))$; ces deux applications sont dites *canoniques*. Nous utiliserons dans la suite cette correspondance biunivoque pour démontrer des propriétés du produit de deux ensembles à partir de propriétés du produit d'une famille d'ensembles.

Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles dont chacun est un ensemble à un seul élément, soit $X_\iota = \{a_\iota\}$; alors le produit $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ est un ensemble réduit au seul élément $(a_\iota)_{\iota \in I}$.

Soit E un ensemble ; les graphes des applications *constantes* $\iota \to x$ de I dans E forment une partie Δ du produit E^I appelée *diagonale* ; si $\bar{x}$ désigne le graphe de l'application $\iota \to x$ (pour $x \in E$), l'application $x \to \bar{x}$ est une bijection de E sur Δ dite *application diagonale*.

Proposition 4. — *Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, u une bijection d'un ensemble K sur l'ensemble I, U son graphe. L'application $F \to F \circ U$ de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ dans $\prod_{\varkappa \in K} X_{u(\varkappa)}$ est bijective.*

Soit $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \bigcup_{\varkappa \in K} X_{u(\varkappa)}$ (§ 4, prop. 1). L'application $F \to F \circ U$ ($F \in A^I$) est une application bijective de A^I sur A^K (prop. 2). Il est évident que la condition « pour tout $\iota \in I$, $F(\iota) \in X_\iota$ » est équivalente à « pour tout $\varkappa \in K$, $(F \circ U)(\varkappa) \in X_{u(\varkappa)}$ », ce qui démontre la proposition.

4. *Produits partiels.*

Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et J une partie de I ; on dit que $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ est un *produit partiel* de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$. Si f est une fonction de graphe $F \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, $F \circ \Delta_J$ (où Δ_J est la diagonale de $J \times J$) est le graphe de la *restriction* de f à J. On a évidemment $F \circ \Delta_J \in \prod_{\iota \in J} X_\iota$; l'application $F \to F \circ \Delta_J$ de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ dans $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ s'appelle la *projection d'indice* J et se note pr_J.

Proposition 5. — *Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles, et J une partie de I. Si, pour tout $\iota \in I$, on a $X_\iota \neq \varnothing$, la projection pr_J est une application de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur $\prod_{\iota \in J} X_\iota$.*

D'après les remarques faites ci-dessus, il revient au même de démontrer la proposition suivante :

Proposition 6. — *Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles telle que $X_\iota \neq \varnothing$ pour tout $\iota \in I$. Etant donnée une application g de $J \subset I$ dans $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, telle que $g(\iota) \in X_\iota$ pour tout $\iota \in J$, il existe un prolongement f de g à I, tel que $f(\iota) \in X_\iota$ pour tout $\iota \in I$.*

En effet, pour tout $\iota \in I - J$, désignons par T_ι le terme $\tau_y(y \in X_\iota)$. Comme $X_\iota \neq \varnothing$ par hypothèse, on a $T_\iota \in X_\iota$ pour tout $\iota \in I - J$ (chap. I, § 4, n° 1). Si G est le graphe de g, le graphe $G \cup \left(\bigcup_{\iota \in I - J} \{(\iota, T_\iota)\} \right)$ est le graphe d'une fonction f répondant à la question, comme on le vérifie aussitôt.

Corollaire 1. — *Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'ensembles telle que, pour tout $\iota \in I$, on ait $X_\iota \neq \varnothing$. Alors, pour tout $\alpha \in I$, la projection pr_α est une application de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur X_α.*

Il suffit d'appliquer la prop. 5 à la partie $J = \{\alpha\}$ de I, et de remarquer que pr_α est composée de l'application canonique de $X_\alpha^{\{\alpha\}}$ sur X_α et de l'application $pr_{\{\alpha\}}$.

Corollaire 2. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles. Pour que* $\prod_{\iota\in I} X_\iota = \emptyset$, *il faut et il suffit qu'il existe un* $\iota \in I$ *tel que* $X_\iota = \emptyset$.

En effet, si, pour tout $\iota \in I$, on a $X_\iota \neq \emptyset$, on a aussi $\prod_{\iota\in I} X_\iota \neq \emptyset$ comme il résulte du cor. 1 ; inversement, si $\prod_{\iota\in I} X_\iota \neq \emptyset$, la relation $\mathrm{pr}_\alpha\left(\prod_{\iota\in I} X_\iota\right) \subset X_\alpha$ montre que l'on a $X_\alpha \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in I$.

On voit donc que, si on a une famille $(X_\iota)_{\iota\in I}$ d'ensembles non vides, on peut introduire (à titre de constante auxiliaire) une fonction f dont I est l'ensemble de définition, et qui est telle que $f(\iota) \in X_\iota$ pour tout $\iota \in I$. On dira en pratique : « Prenons dans chaque ensemble X_ι un élément x_ι ». Intuitivement, on a donc « choisi » un élément x_ι dans chacun des X_ι ; l'introduction du signe logique τ et des critères qui en gouvernent l'emploi nous a dispensé d'avoir à formuler ici un « axiome de choix » pour légitimer cette opération (cf. *Ens.* R, § 4, n° 10).

Corollaire 3. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *et* $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ *deux familles d'ensembles ayant le même ensemble d'indices* I. *Si, pour tout* $\iota \in I$, *on a* $X_\iota \subset Y_\iota$, *on a aussi* $\prod_{\iota\in I} X_\iota \subset \prod_{\iota\in I} Y_\iota$. *Réciproquement, si* $\prod_{\iota\in I} X_\iota \subset \prod_{\iota\in I} Y$ *et si, pour tout* $\iota \in I$, *on a* $X_\iota \neq \emptyset$, *on a* $X_\iota \subset Y_\iota$ *pour tout* $\iota \in I$.

La première assertion est évidente, et la seconde résulte du cor. 1 de la prop. 5, car on a alors pour tout $\alpha \in I$,

$$X_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha\left(\prod_{\iota\in I} X_\iota\right) \subset \mathrm{pr}_\alpha\left(\prod_{\iota\in I} Y_\iota\right) = Y_\alpha.$$

5. *Associativité des produits d'ensembles.*

Proposition 7. — *Soit* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices* I *n'est pas vide. Soit* $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une partition de* I ; *l'application* $f \to (\mathrm{pr}_{J_\lambda} f)_{\lambda\in L}$ *de* $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ *dans l'ensemble produit* $\prod_{\lambda\in L}\left(\prod_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right)$ *est bijective* (« associativité » des produits d'ensembles).

D'après l'interprétation de $\mathrm{pr}_{J_\lambda} f$ comme graphe de la restriction d'une fonction de graphe f (n° 4), dire que l'application $f \to (\mathrm{pr}_{J_\lambda} f)_{\lambda\in L}$ est bijective signifie que, pour toute famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in L}$, où φ_λ est une application de J_λ dans $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$, il existe une application et une seule u de I dans $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ telle que, pour tout $\lambda \in L$, φ_λ soit la restriction de u à J_λ ; or, cela résulte de ce que $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ est une partition de I (§ 4, prop. 8).

L'application définie dans la prop. 7 et sa réciproque sont dites *canoniques*.

Remarques. — 1) Soient α, β deux objets distincts, et $(J_\lambda)_{\lambda\in\{\alpha,\beta\}}$ une partition de I en deux ensembles J_α, J_β. On obtient une application biunivoque (dite encore *canonique*) du produit $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ sur $\left(\prod_{\iota\in J_\alpha} X_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in J_\beta} X_\iota\right)$ en composant l'application canonique de $\prod_{\lambda\in\{\alpha,\beta\}}\left(\prod_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right)$ sur $\left(\prod_{\iota\in J_\alpha} X_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in J_\beta} X_\iota\right)$ et l'application canonique de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ sur $\prod_{\lambda\in\{\alpha,\beta\}}\left(\prod_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right)$. Lorsque, pour tout $\iota \in J_\beta$, X_ι est un ensemble à *un seul élément*, on en déduit que pr_{J_α} est une application biunivoque de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ sur $\prod_{\iota\in J_\alpha} X_\iota$.

2) Soient α, β, γ des objets deux à deux distincts (il en existe, par exemple $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ et $\{\{\emptyset\}\}$), et soient A, B, C des ensembles. Considérons le graphe fonctionnel $\{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)\}$, c'est-à-dire la famille d'ensembles $(X_\iota)_{\iota\in\{\alpha,\beta,\gamma\}}$ telle que $X_\alpha = A$, $X_\beta = B$, $X_\gamma = C$. A la partition de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ formée des deux ensembles $\{\alpha, \beta\}$ et $\{\gamma\}$ correspond une bijection canonique de $\prod_{\iota\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} X_\iota$ sur le produit $\left(\prod_{\iota\in\{\alpha,\beta\}} X_\iota\right) \times X_\gamma^{\{\gamma\}}$, et par suite une bijection (qu'on appelle encore *canonique*) de $\prod_{\iota\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} X_\iota$ sur $A \times B \times C$ (§ 2, n° 2), faisant correspondre à tout graphe $f \in \prod_{\iota\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} X_\iota$ l'élément $(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$ de $A \times B \times C$. Tenant compte de la prop. 4, on peut ainsi mettre en correspondance biunivoque deux quelconques des ensembles $A \times B \times C$, $B \times C \times A$, $C \times A \times B$, $B \times A \times C$, $A \times C \times B$, $C \times B \times A$.

6. *Formules de distributivité.*

Proposition 8. — *Soit* $((X_{\lambda,\iota})_{\iota\in J_\lambda})_{\lambda\in L}$ *une famille* (*admettant* L *pour ensemble d'indices*) *de familles d'ensembles. On suppose*

$L \neq \emptyset$ et $J_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in L$. Soit $I = \prod_{\lambda\in L} J_\lambda \neq \emptyset$. On a

$$\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big) = \bigcap_{f\in I}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$$

et

$$\bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big) = \bigcup_{f\in I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$$

(« distributivité » de la réunion par rapport à l'intersection et de l'intersection par rapport à la réunion).

Soit x un élément de $\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big)$. Soit f un élément quelconque de I. Il existe un indice λ tel que $x \in \bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}$; on a par suite $x \in X_{\lambda,f(\lambda)}$, d'où $x \in \bigcup_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in I$, on a $x \in \bigcap_{f\in I}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$. Soit maintenant x un objet qui n'appartient pas à l'ensemble $\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big)$. Il en résulte que, pour tout $\lambda\in L$, on a $x \notin \bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}$, ce qui signifie que, pour tout $\lambda \in L$, l'ensemble J'_λ des $\iota \in J_\lambda$ tels que $x \notin X_{\lambda,\iota}$ est non vide. D'après le cor. 2 de la prop. 5, il existe un graphe fonctionnel f dont l'ensemble de définition est L et qui est tel que, pour tout $\lambda \in L$, $f(\lambda) \in J'_\lambda$. On a donc $f \in I$ et, pour tout $\lambda \in L$, $x \notin X_{\lambda,f(\lambda)}$. On en déduit que $x \notin \bigcup_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}$, et par suite $x \notin \bigcap_{f\in I}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$.

La première formule est donc démontrée. La seconde s'en déduit, en appliquant la première formule à la famille $((\complement_A X_{\lambda,\iota})_{\iota\in J_\lambda})_{\lambda\in L}$, où A désigne la réunion $\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big)$.

Corollaire. — *Soient $(X_\iota)_{\iota\in I}$ et $(Y_\kappa)_{\kappa\in K}$ deux familles d'ensembles dont les ensembles d'indices sont non vides. On a*

$$\Big(\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\Big)\cup\Big(\bigcap_{\kappa\in K} Y_\kappa\Big) = \bigcap_{(\iota,\kappa)\in I\times K}(X_\iota \cup Y_\kappa)$$

et

$$\Big(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\Big)\cap\Big(\bigcup_{\kappa\in K} Y_\kappa\Big) = \bigcup_{(\iota,\kappa)\in I\times K}(X_\iota \cap Y_\kappa).$$

Soient α et β deux objets distincts ; il suffit d'appliquer les formules de la prop. 8 au cas où $L = \{\alpha, \beta\}$, $J_\alpha = I$, $J_\beta = K$, et à la famille $((Z_{\lambda,\mu})_{\mu\in J_\lambda})_{\lambda\in L}$ telle que $Z_{\alpha,\iota} = X_\iota$ pour tout $\iota \in I$ et $Z_{\beta,\kappa} = Y_\kappa$ pour tout $\kappa \in K$; tenant compte de l'existence de la bijection canonique de $\prod_{\lambda\in L} J_\lambda$ sur $I \times K$ (n° 3) et de la prop. 1 du § 4, on obtient les formules énoncées.

Proposition 9. — *Soit $((X_{\lambda,\iota})_{\iota\in J_\lambda})_{\lambda\in L}$ une famille (admettant L comme ensemble d'indices) de familles d'ensembles. Soit $I = \prod_{\lambda\in L} J_\lambda$. On a*

$$\prod_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big) = \bigcup_{f\in I}\Big(\prod_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$$

et (si $L \neq \emptyset$ et $J_\lambda \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in L$)

$$\prod_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big) = \bigcap_{f\in I}\Big(\prod_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big).$$

(« distributivité » du produit par rapport à la réunion et à l'intersection).

La première formule est immédiate si $L = \emptyset$ ou si $J_\lambda = \emptyset$ pour un indice $\lambda \in L$. Sinon, soit g un élément de $\prod_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}\Big)$; pour tout $\lambda \in L$, il existe donc un $\iota \in J_\lambda$ tel que $g(\lambda) \in X_{\lambda,\iota}$; autrement dit, l'ensemble H_λ des $\iota \in J_\lambda$ tels que $g(\lambda) \in X_{\lambda,\iota}$ n'est pas vide. D'après le cor. 2 de la prop. 5, il existe donc un graphe fonctionnel f dont l'ensemble de définition est L et qui est tel que, pour tout $\lambda \in L$, $f(\lambda) \in H_\lambda$, ce qui signifie que $g(\lambda) \in X_{\lambda,f(\lambda)}$. On a donc $g \in \prod_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}$, et par suite $g \in \bigcup_{f\in I}\Big(\prod_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$. Inversement, si $g \in \bigcup_{f\in I}\Big(\prod_{\lambda\in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\Big)$, il existe un graphe fonctionnel $f \in I$ tel que, pour tout $\lambda \in L$, on ait $g(\lambda) \in X_{\lambda,f(\lambda)}$ et à fortiori $g(\lambda) \in \bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}$, ce qui achève de démontrer la première formule. La seconde se démontre de façon analogue mais plus simple encore, comme nous laissons au lecteur le soin de le vérifier.

Corollaire 1. — *On suppose* $L \neq \emptyset$ *et* $J_\lambda \neq \emptyset$ *pour tout* $\lambda \in L$. *Si, pour chaque indice* $\lambda \in L$, *la famille* $(X_{\lambda,\iota})_{\iota \in J_\lambda}$ *est une partition de* $X_\lambda = \bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda,\iota}$, *la famille* $\left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda,f(\lambda)}\right)_{f \in I}$ *est une partition de* $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$.

Si on pose $P_f = \prod_{\lambda \in L} X_{\lambda,f(\lambda)}$, il suffit, en vertu de la première des formules de la prop. 9, de démontrer que, pour tout $f \in I$, on a $P_f \neq \emptyset$, et que, si f et g sont des éléments distincts de I, $P_f \cap P_g = \emptyset$. Le premier point résulte du cor. 2 de la prop. 5. D'autre part, si $f \neq g$, il existe un $\lambda \in L$ tel que $f(\lambda) \neq g(\lambda)$, d'où, en vertu de l'hypothèse, $X_{\lambda,f(\lambda)} \cap X_{\lambda,g(\lambda)} = \emptyset$. Il en résulte qu'il n'y a aucun graphe appartenant à $P_f \cap P_g$; en effet, pour un tel graphe G, on devrait avoir $G(\lambda) \in X_{\lambda,f(\lambda)} \cap X_{\lambda,g(\lambda)} = \emptyset$, ce qui est absurde.

Corollaire 2. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *et* $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ *deux familles d'ensembles. On a*

$$\left(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota\right) \times \left(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\right) = \bigcup_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa)$$

et (si I *et* K *sont non vides)*

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota\right) \times \left(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\right) = \bigcap_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa).$$

Il suffit de raisonner comme dans la démonstration du corollaire de la prop. 8.

Proposition 10. — *Soit* $(X_{\iota,\varkappa})_{(\iota,\varkappa) \in I \times K}$ *une famille d'ensembles dont l'ensemble d'indices est le produit de deux ensembles* I *et* K. *Si* $K \neq \emptyset$, *on a*

$$\bigcap_{\varkappa \in K} \left(\prod_{\iota \in I} X_{\iota,\varkappa}\right) = \prod_{\iota \in I} \left(\bigcap_{\varkappa \in K} X_{\iota,\varkappa}\right).$$

Les deux membres de l'égalité qu'il s'agit de démontrer sont des ensembles de graphes fonctionnels. Pour qu'un tel graphe f appartienne au premier membre, il faut et il suffit que, pour tout $\varkappa \in K$, $f \in \prod_{\iota \in I} X_{\iota,\varkappa}$, c'est-à-dire que, pour tout $(\iota, \varkappa) \in I \times K$, $f(\iota)$ appartienne à $X_{\iota,\varkappa}$. Pour que f appartienne au second membre, il faut et il suffit que, pour tout $\iota \in I$, on ait $f(\iota) \in \bigcap_{\varkappa \in K} X_{\iota,\varkappa}$, c'est-à-dire encore que, pour tout $(\iota, \varkappa) \in I \times K$, $f(\iota)$ appartienne à $X_{\iota,\varkappa}$. La proposition est donc démontrée.

Corollaire. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *et* $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ *deux familles d'ensembles ayant même ensemble d'indices* $I \neq \emptyset$. *On a*

$$\left(\prod_{\iota \in I} X_\iota\right) \cap \left(\prod_{\iota \in I} Y_\iota\right) = \prod_{\iota \in I} (X_\iota \cap Y_\iota)$$

et

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota\right) \times \left(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in I} (X_\iota \times Y_\iota).$$

Il suffit d'appliquer la prop. 10 au cas où K (resp. I) est un ensemble à deux éléments distincts.

7. *Extension d'applications aux produits.*

Définition 2. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota \in I}$, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ *deux familles d'ensembles, et* $(g_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de fonctions admettant le même ensemble d'indices, et telle que, pour tout* $\iota \in I$, g_ι *soit une application de* X_ι *dans* Y_ι. *Pour tout* $f \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, *soit* u_f *le graphe de la fonction* $\iota \to g_\iota(f(\iota))$ $(\iota \in I)$, *qui est un élément de* $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$. *On appelle extension canonique* (ou simplement *extension*) *de la famille d'applications* $(g_\iota)_{\iota \in I}$ *aux produits, l'application* $f \to u_f$ *de* $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ *dans* $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$.

Quand on utilise la notation indicielle, l'extension aux produits de la famille d'applications $(g_\iota)_{\iota \in I}$ est donc la fonction $(x_\iota)_{\iota \in I} \to (g_\iota(x_\iota))_{\iota \in I}$. On la désigne par $(g_\iota)_{\iota \in I}$ lorsqu'il n'y a pas de danger de confusion.

Si $I = \{\alpha, \beta\}$, où α et β sont distincts, l'extension aux produits de la famille d'applications $(g_\iota)_{\iota \in I}$ n'est autre que $\psi \circ (g_\alpha \times g_\beta) \circ \varphi$, où φ désigne l'application canonique de $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ sur $X_\alpha \times X_\beta$ (n° 3) et ψ l'application canonique de $Y_\alpha \times Y_\beta$ sur $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$.

PROPOSITION 11. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$, $(Z_\iota)_{\iota\in I}$ *trois familles d'ensembles,* $(g_\iota)_{\iota\in I}$, $(g'_\iota)_{\iota\in I}$ *deux familles de fonctions, admettant le même ensemble d'indices, et telles que, pour tout* $\iota \in I$, g_ι *soit une application de* X_ι *dans* Y_ι *et* g'_ι *une application de* Y_ι *dans* Z_ι. *Soient* g *et* g' *les extensions des familles* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *et* $(g'_\iota)_{\iota\in I}$ *aux produits ; alors l'extension aux produits de la famille* $(g'_\iota \circ g_\iota)_{\iota\in I}$ *est égale à* $g' \circ g$.

La proposition découle immédiatement de la déf. 2.

COROLLAIRE. — *Soient* $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ *deux familles d'ensembles,* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *une famille de fonctions. Si, pour tout* $\iota \in I$, g_ι *est une injection* (resp. *surjection*) *de* X_ι *dans* Y_ι, *alors l'extension* g *de* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *aux ensembles produits est une injection* (resp. *une surjection*) *de* $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ *dans* $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$.

1° Bornons-nous au cas où $X_\iota \neq \varnothing$ pour tout $\iota \in I$, le résultat étant trivial dans le cas contraire. Supposons que, pour tout $\iota \in I$, g_ι soit une injection, et soit r_ι une rétraction associée à g_ι (§ 3, n° 8, déf. 11), de sorte que $r_\iota \circ g_\iota$ est l'application identique de X_ι. Soit r l'extension aux produits de la famille $(r_\iota)_{\iota\in I}$; comme $r \circ g$ est l'extension aux produits de la famille des applications identiques I_{X_ι}, $r \circ g$ est l'application identique de $\prod_{\iota\in I} X_\iota$, donc g est une injection (§ 3, prop. 8).

2° Supposons que, pour tout $\iota \in I$, g_ι soit une surjection de X_ι sur Y_ι, et soit s_ι une section associée à g_ι (§ 3, n° 8, déf. 11), de sorte que $g_\iota \circ s_\iota$ est l'application identique de Y_ι. Si s est l'extension aux produits de la famille $(s_\iota)_{\iota\in I}$, $g \circ s$ est l'extension aux produits de la famille des applications identiques I_{Y_ι}, donc est l'application identique de $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$, ce qui prouve que g est une surjection (§ 3, prop. 8).

Soit $(X_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles, et soit E un ensemble. Pour toute application f de E dans $\prod_{\iota\in I} X_\iota$, $\mathrm{pr}_\iota \circ f$ est une application de E dans X_ι ; si $\bar{f}$ est l'extension aux produits de cette famille d'applications, et d l'application diagonale (n° 3) de E dans E^I, on voit aussitôt que l'on a $f = \bar{f} \circ d$. Inversement, soit $(f_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de fonctions telle que, pour tout $\iota \in I$, f_ι soit une application de E dans X_ι, et soit $\bar{f}$ l'extension aux produits de cette famille ;

on a alors, pour tout $\iota \in I$, $\mathrm{pr}_\iota \circ (\bar{f} \circ d) = f_\iota$. Par abus de langage, l'application $\bar{f} \circ d$ se note encore $(f_\iota)_{\iota\in I}$. On définit ainsi une application biunivoque (dite *canonique*, ainsi que son application réciproque) de l'ensemble $\prod_{\iota\in I} X_\iota^E$ sur l'ensemble $\left(\prod_{\iota\in I} X_\iota\right)^E$.

Exercices. — 1) Soit $(X_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles. Montrer que, si $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille d'ensembles telle que $Y_\iota \subset X_\iota$ pour tout $\iota \in I$, on a $\prod_{\iota\in I} Y_\iota = \bigcap_{\iota\in I} \overset{-1}{\mathrm{pr}_\iota}(Y_\iota)$.

2) Soient A et B deux ensembles. Pour toute partie G de $A \times B$, soit $\tilde{G}$ l'application $x \to G\langle\{x\}\rangle$ de A dans $\mathfrak{P}(B)$. Montrer que l'application $G \to \tilde{G}$ est une bijection de $\mathfrak{P}(A \times B)$ sur $(\mathfrak{P}(B))^A$.

* 3) Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles. Pour toute partie H de l'ensemble d'indices $[1, n]$, soit $P_H = \bigcup_{i\in H} X_i$ et $Q_H = \bigcap_{i\in H} X_i$. Soit $\mathfrak{F}_k$ l'ensemble des parties de $[1, n]$ ayant k éléments : montrer que l'on a

$$\bigcup_{H\in\mathfrak{F}_k} Q_H \supset \bigcap_{H\in\mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{si} \quad k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

et

$$\bigcup_{H\in\mathfrak{F}_k} Q_H \subset \bigcap_{H\in\mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{si} \quad k \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right].$$ *

§ 6. — Relations d'équivalence.

En principe, nous cesserons désormais d'utiliser des lettres italiques grasses pour désigner des assemblages indéterminés ; le contexte permettra au lecteur de discerner sans peine les assertions qui s'appliquent à des lettres ou des relations indéterminées.

1. *Définition d'une relation d'équivalence.*

Soit $R\{x, y\}$ une relation, x et y étant des lettres distinctes. On dit que la relation R est *symétrique* (par rapport aux lettres x et y) si l'on a $R\{x, y\} \Rightarrow R\{y, x\}$. S'il en est ainsi, en substituant à x et y deux lettres x', y', distinctes entre elles et distinctes de toutes les lettres figurant dans R, puis en substituant y et x à x' et y' respectivement, on voit que l'on a $R\{y, x\} \Rightarrow R\{x, y\}$; donc $R\{x, y\}$ et $R\{y, x\}$ sont équivalentes.

Soit z une lettre ne figurant pas dans R. On dit que la relation R est *transitive* (par rapport aux lettres x et y) si l'on a $(R\{x, y\}$ et $R\{y, z\}) \Rightarrow R\{x, z\}$.

Exemples. — La relation $x = y$ est symétrique et transitive. La relation $X \subset Y$ est transitive, mais non symétrique. La relation $X \cap Y = \emptyset$ est symétrique, mais non transitive.

Si $R\{x, y\}$ est à la fois symétrique et transitive, on dit que $R\{x, y\}$ est une *relation d'équivalence* (par rapport aux lettres x et y). Dans ce cas, la notation $x \equiv y \pmod{R}$ est parfois employée comme synonyme de $R\{x, y\}$; elle se lit « *x est équivalent à y modulo* R (ou *suivant* R) ». Si R est une relation d'équivalence, on a $R\{x, y\} \Rightarrow (R\{x, x\}$ et $R\{y, y\})$, car $R\{x, y\}$ entraîne $R\{y, x\}$, et $(R\{x, y\}$ et $R\{y, x\})$ entraîne $(R\{x, x\}$ et $R\{y, y\})$, en vertu des définitions.

Soit $R\{x, y\}$ une relation. On dit que la relation est *réflexive dans* E (par rapport aux lettres x et y) si la relation $R\{x, x\}$ est équivalente à $x \in E$. S'il n'y a pas de confusion possible sur E, on dit simplement, par abus de langage, que R est réflexive.

On appelle *relation d'équivalence dans* E une relation d'équivalence réflexive dans E. Si $R\{x, y\}$ est une relation d'équivalence dans E, on a $R\{x, y\} \Rightarrow ((x, y) \in E \times E)$, donc R admet un graphe (par rapport aux lettres x et y). Réciproquement, supposons que la relation d'équivalence $R\{x, y\}$ admette un graphe G ; remarquons que la relation $R\{x, x\}$ est équivalente à la relation $(\exists y)R\{x, y\}$; en effet, elle entraîne cette dernière (chap. I, § 4, n° 2, schéma S5), et d'autre part, comme $R\{x, y\}$ entraîne $R\{x, x\}$, $(\exists y)R\{x, y\}$ entraîne $(\exists y)R\{x, x\}$, donc aussi $R\{x, x\}$. On voit donc que $R\{x, x\}$ est équivalente à $x \in \mathrm{pr}_1 G$, de sorte que R est une relation d'équivalence dans $\mathrm{pr}_1 G$.

On appelle *équivalence* dans un ensemble E une correspondance admettant E pour ensemble d'arrivée et pour ensemble de départ, et dont le graphe F est tel que la relation $(x, y) \in F$ soit une relation d'équivalence dans E.

Exemples. — 1) La relation $x = y$ est une relation d'équivalence qui n'admet pas de graphe, car la première projection de ce graphe serait l'ensemble de tous les objets.

2) La relation « $x = y$ et $x \in E$ » est une relation d'équivalence dans E dont le graphe est la diagonale de $E \times E$.

3) La relation « il existe une bijection de X sur Y » est une relation d'équivalence qui n'admet pas de graphe (cf. chap. III, § 3).

4) La relation « $x \in E$ et $y \in E$ » est une relation d'équivalence dans E dont le graphe est $E \times E$.

5) Supposons $A \subset E$. La relation

$$(x \in E - A \text{ et } y = x) \quad \text{ou} \quad (x \in A \text{ et } y \in A)$$

est une relation d'équivalence dans E.

6) * La relation « $x \in \mathbf{Z}$ et $y \in \mathbf{Z}$ et $x - y$ est divisible par 4 » est une relation d'équivalence dans $\mathbf{Z}$. *

PROPOSITION 1. — *Pour qu'une correspondance* Γ *entre* X *et* X *soit une équivalence dans* X, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées* : a) X *est l'ensemble de définition de* Γ ; b) *on a* $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$; c) *on a* $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma$.

Soient Γ une correspondance entre X et X, et G son graphe. Si Γ est une équivalence dans X, on a $(x, x) \in G$ pour tout $x \in X$, donc X est l'ensemble de définition de Γ. La relation $(x, y) \in G$ est équivalente à $(y, x) \in G$, donc à $(x, y) \in \overset{-1}{G}$, de sorte que $G = \overset{-1}{G}$, donc $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$. Les relations $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in G$ entraînent $(x, z) \in G$, ce qui montre que $G \circ G \subset G$; par ailleurs, la relation $(x, y) \in G$ entraîne $(x, x) \in G$, donc $(x, y) \in G \circ G$, de sorte que $G \subset G \circ G$; on a donc $G = G \circ G$, et par suite $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma$.

Réciproquement, supposons les conditions *a*), *b*), *c*) satisfaites. La relation $(x, y) \in G$ est symétrique en vertu de *b*) et transitive en vertu de *c*) ; c'est donc une relation d'équivalence, et il résulte de *a*) que c'est une relation d'équivalence dans X.

2. *Classes d'équivalence ; ensemble quotient.*

Soient f une fonction, E son ensemble de définition, F son graphe. La relation « $x \in E$ et $y \in E$ et $f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence dans E ; nous dirons que cette relation est la relation d'équivalence *associée* à f. Elle est équivalente à la relation

$(\exists z)((x, z) \in F$ et $(y, z) \in F)$, c'est-à-dire à $(\exists z)((x, z) \in F$ et $(z, y) \in \overset{-1}{F})$; son graphe est donc $\overset{-1}{F} \circ F$.

Nous allons maintenant montrer que toute relation d'équivalence R dans un ensemble E est du type précédent. Soit en effet G le graphe de R. Pour tout $x \in E$, l'ensemble (non vide) $G(x) \subset E$ s'appelle la *classe d'équivalence de x suivant* R : c'est donc l'ensemble des $y \in E$ tels que $R\{x, y\}$; tout ensemble qui peut se mettre sous la forme $G(x)$ pour un $x \in E$ est appelé une classe d'équivalence (suivant R). Un élément d'une classe d'équivalence est encore appelé un *représentant* de cette classe. L'ensemble des classes d'équivalence suivant R (c'est-à-dire l'ensemble des objets de la forme $G(x)$, pour $x \in E$) s'appelle *l'ensemble quotient* de E par R et se désigne par E/R ; l'application $x \to G(x)$ $(x \in E)$ dont l'ensemble de définition est E et l'ensemble d'arrivée E/R, s'appelle l'*application canonique* de E sur E/R. On a alors le critère suivant :

C55. *Soient* R *une relation d'équivalence dans un ensemble* E, *et* p *l'application canonique de* E *sur* E/R. *On a*

$$R\{x, y\} \Leftrightarrow (p(x) = p(y)).$$

En effet (avec les notations précédentes), soient x et y des éléments de E tels que $(x, y) \in G$. On a d'abord $x \in E$ et $y \in E$; montrons que $G(x) = G(y)$. Puisque $y \in G(x)$, on a (prop. 1) $G(y) \subset (G \circ G)(x) = G(x)$. Par ailleurs, on a aussi $(y, x) \in G$, d'où $G(x) \subset G(y)$ et par suite $G(x) = G(y)$, c'est-à-dire $p(x) = p(y)$. Réciproquement, si $G(x) = G(y)$, on a $y \in G(y) = G(x)$, d'où $(x, y) \in G$, ce qui démontre le critère.

Une section associée à l'application canonique p de E sur E/R (§ 3, nº 8, déf. 11) s'appelle plus brièvement une *section* de E (pour la relation R).

Exemples. — 1) Soit R la relation d'équivalence « $x \in E$ et $y \in E$ et $x = y$ » dans un ensemble E ; la classe d'équivalence de $x \in E$ est alors l'ensemble $\{x\}$, et l'application canonique $x \to \{x\}$ de E sur E/R est bijective.

2) Soient E et F deux ensembles, et R la relation d'équivalence dans $E \times F$ associée à l'application pr_1 de $E \times F$ sur E. Les classes d'équivalence pour R sont les ensembles de la forme

$\{x\} \times F$, où $x \in E$; l'application $x \to \{x\} \times F$ est une bijection de E sur $(E \times F)/R$.

Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E. L'ensemble quotient E/R est une partie de $\mathfrak{P}(E)$, et l'application identique de E/R est une *partition de* E (§ 4, nº 7) ; en effet, si G est le graphe de R, on a $x \in G(x)$ pour tout $x \in E$, et si deux classes d'équivalence $G(x)$ et $G(y)$ ont un élément commun z, on a $R\{x, z\}$ et $R\{z, y\}$, donc $R\{x, y\}$, et par suite $G(x) = G(y)$. En outre, la relation

$$(\exists X)(X \in E/R \text{ et } x \in X \text{ et } y \in X)$$

est équivalente à $R\{x, y\}$.

Réciproquement, soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une partition d'un ensemble E ; on vérifie aussitôt que la relation $(\exists \iota)(\iota \in I$ et $x \in X_\iota$ et $y \in X_\iota)$ est une relation d'équivalence R dans E ; les classes d'équivalence suivant R ne sont autres que les ensembles X_ι de la partition, et l'application $\iota \to X_\iota$ est une bijection de I sur E/R. Toute partie S de E telle que, pour tout $\iota \in I$, l'ensemble $S \cap X_\iota$ soit réduit à un élément, s'appelle un *système de représentants* des classes d'équivalence suivant R. On désigne aussi sous ce nom toute injection d'un ensemble K dans E, telle que l'image de K par cette injection soit un système de représentants des classes d'équivalence suivant R ; il en est ainsi, en particulier, de toute *section* de E pour la relation R.

3. *Relations compatibles avec une relation d'équivalence.*

Soient $R\{x, x'\}$ une relation d'équivalence, et $P\{x\}$ une relation. On dit que $P\{x\}$ est *compatible avec la relation d'équivalence* $R\{x, x'\}$ (par rapport à x) si, y désignant une lettre qui ne figure ni dans P, ni dans R, on a

$$(P\{x\} \text{ et } R\{x, y\}) \Rightarrow P\{y\}.$$

Par exemple, il résulte de C43 (chap. I, § 5, nº 1) que n'importe quelle relation $P\{x\}$ est compatible avec la relation d'équivalence $x = x'$.

C56. *Soient* $R\{x, x'\}$ *une relation d'équivalence dans un ensemble* E, $P\{x\}$ *une relation où ne figure pas la lettre* x', *compatible (par rapport à* x*) avec la relation d'équivalence* $R\{x, x'\}$; *alors, si* t *ne* *figure pas dans* P $\{x\}$, *la relation* « $t \in E/R$ et $(\exists x)(x \in t$ et P $\{x\})$ » *est équivalente à la relation* « $t \in E/R$ et $(\forall x)((x \in t) \Rightarrow$ P $\{x\})$ ».

En effet, soit $t \in E/R$. S'il existe un $a \in t$ tel que P $\{a\}$, alors, pour tout $x \in t$, on a R $\{a, x\}$, donc P $\{x\}$. Donc $(\exists x)(x \in t$ et P $\{x\})$ entraîne $(\forall x)((x \in t) \Rightarrow$ P $\{x\})$. La réciproque est évidente, puisque $t \in E/R$ implique $t \neq \emptyset$.

On dit que la relation

$$t \in E/R \text{ et } (\exists x)(x \in t \text{ et } P\,\{x\})$$

est la relation *déduite de* P $\{x\}$ *par passage au quotient* (par rapport à x) pour la relation R. Si on désigne cette relation par P' $\{t\}$, et si f est l'application canonique de E sur E/R, la relation $(y \in E$ et P' $\{f(y)\})$ (où y ne figure pas dans P $\{x\}$) est *équivalente* à $(y \in E$ et P $\{y\})$ comme on le vérifie aussitôt.

4. *Parties saturées.*

Soient R $\{x, y\}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E, et A une partie de E. On dit que A est *saturée pour* R si la relation $x \in A$ est compatible (par rapport à x) avec R $\{x, y\}$; il revient au même de dire que, *pour tout* $x \in A$, *la classe d'équivalence de* x *est contenue dans* A. En d'autres termes, pour qu'un ensemble soit saturé pour R, il faut et il suffit qu'il soit *réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant* R.

Soit f l'application canonique de E sur E/R ; si A est saturé pour R, la classe d'équivalence de tout élément $x \in A$, qui n'est autre que $\overset{-1}{f}\langle\{f(x)\}\rangle$, est contenue dans A, donc on a $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A$; comme par ailleurs $A \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, on a $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. Réciproquement, si $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, alors pour tout $x \in A$ la classe d'équivalence $K = f(x)$ de x pour R est un élément de $f\langle A\rangle$, et comme $K = \overset{-1}{f}\langle\{K\}\rangle$, on a $K \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$. On voit donc que les parties de E saturées pour R sont les parties A de E telles que $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. On peut dire aussi que ce sont les parties de E de la forme $\overset{-1}{f}\langle B\rangle$, où $B \subset E/R$; en effet, la relation $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$ entraîne $B = f\langle A\rangle$, d'où $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$.

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties saturées de E, les ensembles

$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ et $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$ sont saturés (§ 4, prop. 3 et 4). Si A est une partie saturée de E, il en est de même de $\complement_E A$ (§ 4, prop. 6).

Soit maintenant A une partie quelconque de E. L'ensemble $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ contient A et est saturé. Réciproquement, si une partie saturée A' de E contient A, on a $f\langle A'\rangle \supset f\langle A\rangle$, d'où $A' = \overset{-1}{f}\langle f\langle A'\rangle\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. On peut donc dire que $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ est « la plus petite » partie saturée de E contenant A (cf. chap. III) ; cet ensemble est appelé le *saturé* de A pour la relation R ; il est immédiat que c'est la réunion des classes d'équivalence des éléments de A. Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties de E, A_ι le saturé de X_ι pour R, alors le saturé de $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ est $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ (§ 4, prop. 3).

5. *Applications compatibles avec des relations d'équivalence.*

Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et f une fonction dont l'ensemble de définition est E. On dit que f est *compatible avec la relation* R si la relation $y = f(x)$ est compatible (par rapport à x) avec la relation R $\{x, x'\}$.

Il revient au même, comme on le voit aussitôt, de dire que la restriction de f à toute classe d'équivalence est une application constante ; on dit encore dans ce cas que *f est constante sur toute classe d'équivalence suivant* R. Si g est l'application canonique de E sur E/R, cela signifie aussi que la relation $g(x) = g(x')$ entraîne $f(x) = f(x')$; par suite (§ 3, prop. 9), on a le critère suivant :

C57. *Soient* R *une relation d'équivalence dans un ensemble* E, *et* g *l'application canonique de* E *sur* E/R. *Pour qu'une application* f *de* E *dans* F *soit compatible avec* R, *il faut et il suffit que* f *puisse se mettre sous la forme* $h \circ g$, h *étant une application de* E/R *dans* F. *L'application* h *est uniquement déterminée par* f ; *si* s *est une section associée à* g, *on a* $h = f \circ s$.

On dit que h est *l'application déduite de f par passage au quotient* suivant R.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et soit $A = f\langle E \rangle \subset F$. Soit R la relation d'équivalence associée à f (n° 2) ; il est clair que f est compatible avec R. En outre, l'application h déduite de f par passage au quotient est une application *injective* de E/R dans F : en effet, si t et t' sont des classes d'équivalence suivant R, telles que $h(t) = h(t')$, on a $f(x) = f(x')$ pour $x \in t$ et $x' \in t'$, ce qui entraîne $t = t'$ par définition de R. Soit k l'application de E sur A qui a même graphe que h ; k est donc *bijective*. Si j est l'injection canonique de A dans F et g l'application canonique de E sur E/R, on peut écrire $f = j \circ k \circ g$; cette relation est appelée *décomposition canonique de* f.

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, R une relation d'équivalence dans E, S une relation d'équivalence dans F. Soient u l'application canonique de E sur E/R, v l'application canonique de F sur F/S. On dit que f est *compatible avec les relations d'équivalence* R *et* S si $v \circ f$ est compatible avec R ; cela signifie que la relation $x \equiv x'$ (mod. R) *entraîne* $f(x) \equiv f(x')$ (mod. S). L'application h de E/R dans F/S déduite de $v \circ f$ par passage au quotient suivant R s'appelle alors *l'application déduite de f par passage aux quotients suivant* R *et* S ; elle est caractérisée par la relation $v \circ f = h \circ u$ (fig. 3).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\ E/R \arrow[r, "h"'] & F/S \end{tikzcd}$$

Fig. 3.

6. *Image réciproque d'une relation d'équivalence ; relation d'équivalence induite.*

Soient φ une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et S une relation d'équivalence dans F. Si u est l'application canonique de F sur F/S, la relation d'équivalence associée à l'application $u \circ \varphi$ de E dans F/S s'appelle *l'image réciproque* de S par φ ; si R est cette relation, $R\{x, y\}$ est équivalente à $S\{\varphi(x), \varphi(y)\}$; les classes d'équivalence suivant R sont les images réciproques par φ des classes d'équivalence suivant S qui rencontrent $\varphi\langle E \rangle$.

En particulier, considérons une relation d'équivalence R dans un ensemble E, et soit A une partie de E ; l'image réciproque de R par l'injection j de A dans E s'appelle la relation d'équivalence *induite* par R dans A, et se note R_A.

Les classes d'équivalence suivant R_A sont les *traces* sur A des classes d'équivalence suivant R qui rencontrent A. L'injection j est évidemment compatible avec les relations R_A et R ; l'application h de A/R_A dans E/R déduite de j par passage aux quotients suivant R_A et R est une application *injective* de A/R_A dans E/R : en effet, si f est l'application canonique de E sur E/R, g celle de A sur A/R_A, la relation $h(g(x)) = h(g(x'))$, pour $x \in A$ et $x' \in A$, équivaut à $f(x) = f(x')$, donc à $g(x) = g(x')$. L'image $h\langle A/R_A \rangle$ est égale à $f\langle A \rangle$; si k est l'application bijective de A/R_A sur $f\langle A \rangle$ qui a même graphe que h, k et son application réciproque sont dites *canoniques*.

7. *Quotients de relations d'équivalence.*

Soient R et S deux relations d'équivalence, par rapport à deux lettres x, y. Nous dirons que S est *plus fine* que R (ou que R est *moins fine* que S) si la relation $S \Rightarrow R$ est vraie. Si R et S sont des relations d'équivalence dans un même ensemble E, dire que S est plus fine que R signifie que le graphe de S est contenu dans celui de R, ou encore que toute classe d'équivalence suivant S est contenue dans une classe d'équivalence suivant R ; il revient au même de dire que toute classe d'équivalence suivant R est saturée pour S.

Exemples. — 1) La relation « $x \in E$ et $y \in E$ et $x = y$ » est plus fine que toute relation d'équivalence dans E ; la relation « $x \in E$ et $y \in E$ » est moins fine que toute relation d'équivalence dans E.

2) * La relation d'équivalence « $x \in \mathbf{Z}$ et $y \in \mathbf{Z}$ et $x - y$ est divisible par 4 » est plus fine que la relation d'équivalence « $x \in \mathbf{Z}$ et $y \in \mathbf{Z}$ et $x - y$ est divisible par 2 ». *

Soient R et S deux relations d'équivalence dans un même ensemble E, telles que S soit plus fine que R. Soient f et g les applications canoniques de E sur E/R et de E sur E/S. La fonction f est compatible avec S ; soit h la fonction déduite de f par passage au quotient suivant S ; c'est une application de E/S sur E/R. La relation d'équivalence associée à h dans E/S s'appelle le *quotient de* R *par* S et se désigne par R/S ; la relation $x \equiv y$ (mod. R) est équivalente à $g(x) \equiv g(y)$ (mod. R/S) ; les classes d'équivalence suivant R/S sont les images par g des classes d'équivalence suivant R. Soit $h = j \circ h_2 \circ h_1$ la décomposition canonique (nº 5) de l'application h ; h_1 est donc l'application canonique de E/S sur (E/S)/(R/S), j est l'application identique de E/R, et h_2 est une application biunivoque de (E/S)/(R/S) sur E/R. L'application h_2 et son application réciproque sont dites *canoniques*.

Considérons inversement une relation d'équivalence quelconque T dans l'ensemble E/S, et soit R la relation d'équivalence dans E, image réciproque par g de la relation T (nº 6) ; comme la relation $x \equiv y$ (mod. R) est équivalente à $g(x) \equiv g(y)$ (mod. T), on voit que T est équivalente à R/S.

8. *Produit de deux relations d'équivalence.*

Soient $R\{x, y\}$ et $R'\{x', y'\}$ deux relations d'équivalence. Désignons par $S\{u, v\}$ la relation

$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x')$ et $v = (y, y')$ et $R\{x, y\}$ et $R'\{x', y'\})$;

on vérifie aisément que $S\{u, v\}$ est une relation d'équivalence, que l'on appelle *produit* de R et R′ et qu'on désigne par R × R′. Supposons que R soit une relation d'équivalence dans un ensemble E, et R′ une relation d'équivalence dans un ensemble E′. La relation $S\{u, u\}$ est alors équivalente à

$$(\exists x)(\exists x')(u = (x, x') \text{ et } R\{x, x\} \text{ et } R'\{x', x'\})$$

c'est-à-dire à $(\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$ et $x \in E$ et $x' \in E')$, donc à $u \in E \times E'$; il en résulte que R × R′ est une relation d'équivalence dans E × E′. Si $u = (x, x')$ est un élément de E × E′, la relation $S\{u, v\}$ est équivalente à

$$(\exists y)(\exists y')(v = (y, y') \text{ et } R\{x, y\} \text{ et } R'\{x', y'\}) ;$$

si G et G′ sont les graphes de R et R′, cette relation est encore équivalente à $v \in G(x) \times G'(x')$. *Toute classe d'équivalence suivant* R × R′ *est donc le produit d'une classe d'équivalence suivant* R *et d'une classe d'équivalence suivant* R′, *et réciproquement.*

Soient f et f' les applications canoniques de E sur E/R et de E′ sur E′/R′, et soit $f \times f'$ l'extension canonique de f et f' aux ensembles produits (§ 3, nº 9) ; on a donc $(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x'))$ pour $(x, x') \in E \times E'$. L'image réciproque par $f \times f'$ d'un élément (u, u') de (E/R) × (E′/R′) n'est autre que le produit $u \times u'$ de

la classe d'équivalence u suivant R et de la classe d'équivalence u' suivant R′ ; il en résulte que la relation d'équivalence associée à $f \times f'$ est équivalente à R × R′. L'application $f \times f'$ peut donc se mettre sous la forme $h \circ g$, où g est l'application canonique de E × E′ sur (E × E′)/(R × R′) et où h est une application biunivoque de (E × E′)/(R × R′) sur (E/R) × (E′/R′) ; cette application et son application réciproque sont dites *canoniques*.

Remarque. — Soit $P\{x, x'\}$ une relation où ne figurent pas les lettres y et y' ; on dit que P est *compatible* avec les relations d'équivalence $R\{x, y\}$ et $R'\{x', y'\}$ (par rapport à x et x') si la relation ($P\{x, x'\}$ et $R\{x, y\}$ et $R'\{x', y'\}$) entraîne $P\{y, y'\}$. Soit $Q\{u\}$ la relation $(\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$ et $P\{x, x'\})$; il revient au même de dire que $Q\{u\}$ est compatible (par rapport à u) avec la relation d'équivalence $S\{u, v\}$, produit de R et de R′.

Exercices. — 1) Pour qu'un graphe G soit le graphe d'une équivalence dans un ensemble E, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{pr}_1 G = E$, $G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$ et $\Delta_E \subset G$ (Δ_E étant la diagonale de E).

2) Si G est un graphe tel que $G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$, montrer que $\overset{-1}{G} \circ G$ et $G \circ \overset{-1}{G}$ sont les graphes d'équivalences dans $\mathrm{pr}_1 G$ et $\mathrm{pr}_2 G$ respectivement.

3) Soient E un ensemble, A une partie de E, R la relation d'équivalence associée à l'application $X \to X \cap A$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$. Montrer qu'il existe une bijection de $\mathfrak{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathfrak{P}(E)/R$.

4) Soit G le graphe d'une équivalence dans un ensemble E. Montrer que, si A est un graphe tel que $A \subset G$ et $\mathrm{pr}_1 A = E$ (resp. $\mathrm{pr}_2 A = E$), on a $G \circ A = G$ (resp. $A \circ G = G$) ; en outre, si B est un graphe quelconque, on a $(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$ (resp. $A \circ (G \cap B) = G \cap (A \circ B)$).

5) Montrer que toute intersection de graphes d'équivalence dans un ensemble E est le graphe d'une équivalence dans E. Donner un exemple de deux équivalences dans E telles que la réunion de leurs graphes ne soit pas le graphe d'une équivalence dans E.

6) Soient G et H les graphes de deux équivalences dans E. Pour que $G \circ H$ soit le graphe d'une équivalence dans E, il faut et il suffit que $G \circ H = H \circ G$; le graphe $G \circ H$ est alors l'intersection de tous les graphes d'équivalences dans E qui contiennent G et H.

7) Soient G_0, G_1, H_0, H_1 les graphes de quatre équivalences dans un ensemble E, telles que l'on ait $G_1 \cap H_0 = G_0 \cap H_1$ et $G_1 \circ H_0 = G_0 \circ H_1$. Pour tout $x \in E$, soit R_0 (resp. S_0) la relation

induite sur $G_1(x)$ (resp. $H_1(x)$) par la relation d'équivalence $(x, y) \in G_0$ (resp. $(x, y) \in H_0$). Montrer qu'il existe une bijection de l'ensemble quotient $G_1(x)/R_0$ sur l'ensemble quotient $H_1(x)/S_0$ (si $A = G_1(x) \cap H_1(x)$, montrer que ces deux ensembles quotients sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble quotient de A par la relation d'équivalence induite sur A par R_0, cette dernière étant équivalente à la relation d'équivalence induite sur A par S_0).

8) Soient E et F deux ensembles, R une relation d'équivalence dans F, f une application de E dans F. Si S est la relation d'équivalence image réciproque de R par f, et $A = f\langle E \rangle$, définir une bijection canonique de E/S sur A/R_A.

9) Soient F, G deux ensembles, R une relation d'équivalence dans F, p l'application canonique de F sur F/R, f une surjection de G sur F/R. Montrer qu'il existe un ensemble E, une surjection g de E sur F, et une surjection h de E sur G, tel que l'on ait $p \circ g = f \circ h$.

10) *a*) Si $R\{x, y\}$ est une relation quelconque, « $R\{x, y\}$ et $R\{y, x\}$ » est une relation symétrique. A quelle condition est-elle réflexive dans un ensemble E ?

* *b*) Soit $R\{x, y\}$ une relation symétrique et réflexive dans un ensemble E. Soit $S\{x, y\}$ la relation « il existe un entier $n > 0$ et une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de E telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et, pour tout indice i tel que $0 \leqslant i < n$, $R\{x_i, x_{i+1}\}$ ». Montrer que $S\{x, y\}$ est une relation d'équivalence dans E, et que son graphe est le plus petit des graphes d'équivalences dans E contenant le graphe de R. Les classes d'équivalence suivant S sont appelées les *composantes connexes* de E pour la relation R.

c) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties A de E telles que, pour tout couple d'éléments (y, z) tels que $y \in A$, $z \in E - A$, on ait « non $R\{y, z\}$ ». Pour tout $x \in E$, montrer que l'intersection des ensembles $A \in \mathfrak{F}$ tels que $x \in A$ est la composante connexe de x pour la relation R. *

11) *a*) Soit $R\{x, y\}$ une relation symétrique et réflexive dans un ensemble E. On dit que R est *intransitive d'ordre* 1 si, pour quatre éléments *distincts* x, y, z, t de E, les relations $R\{x, y\}$, $R\{x, z\}$, $R\{x, t\}$, $R\{y, z\}$ et $R\{y, t\}$ entraînent $R\{z, t\}$. On dit qu'une partie A de E est *stable* pour la relation R si, quels que soient x et y dans A, on a $R\{x, y\}$. Si a et b sont deux éléments distincts de E, tels que $R\{a, b\}$, montrer que l'ensemble $C(a, b)$ des $x \in E$ tels que $R\{a, x\}$ et $R\{b, x\}$ est stable, et que pour tout couple d'éléments distincts x, y de $C(a, b)$, on a $C(x, y) = C(a, b)$. On appelle *constituants* de E pour la relation R les ensembles $C(a, b)$ (pour tout couple (a, b) tel que $R\{a, b\}$), et les composantes connexes (exerc. 10) pour R réduites à un seul élément. Montrer que l'intersection de deux constituants distincts de E ne peut

avoir plus d'un élément, et que, pour trois constituants A, B, C distincts deux à deux, l'un au moins des ensembles $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ est vide.

b) Réciproquement, soit $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ un recouvrement d'un ensemble E, formé de parties non vides de E, et ayant les propriétés suivantes : 1° pour deux indices distincts λ, μ, $X_\lambda \cap X_\mu$ a au plus un élément ; 2° pour trois indices distincts, λ, μ, ν, un au moins des trois ensembles $X_\lambda \cap X_\mu$, $X_\mu \cap X_\nu$, $X_\nu \cap X_\lambda$ est vide. Soit $R\{x, y\}$ la relation « il existe $\lambda \in L$ tel que $x \in X_\lambda$ et $y \in X_\lambda$ » ; montrer que R est une relation réflexive dans E, symétrique et intransitive d'ordre 1, et que les X_λ sont les constituants de E pour R.

c) * On dit de même qu'une relation $R\{x, y\}$, symétrique et réflexive dans E, est *intransitive d'ordre* $n - 3$ si, pour toute famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments distincts de E, les relations $R\{x_i, x_j\}$ pour tout couple $(i, j) \neq (n - 1, n)$ entraînent $R\{x_{n-1}, x_n\}$. Généraliser les propriétés *a*) et *b*) aux relations intransitives d'ordre quelconque. Montrer qu'une relation intransitive d'ordre p est aussi intransitive d'ordre q pour tout $q > p$. *

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Imprimerie BUSSIÈRE à Saint-Amand (Cher), France. — 14-5-1954.

Dépôt légal : 1er trimestre 1954.
N° d'édition : 418. N° d'impression : 209.

AXIOMES ET SCHÉMAS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

S1. Si A est une relation, la relation $(A \text{ ou } A) \Rightarrow A$ est un axiome.
S2. Si A et B sont des relations, la relation $A \Rightarrow (A \text{ ou } B)$ est un axiome.
S3. Si A et B sont des relations, la relation $(A \text{ ou } B) \Rightarrow (B \text{ ou } A)$ est un axiome.
S4. Si A, B et C sont des relations, la relation

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ ou } A) \Rightarrow (C \text{ ou } B))$$

est un axiome.
S5. Si R est une relation, T un terme et x une lettre, la relation $(T | x)R \Rightarrow (\exists x)R$ est un axiome.
S6. Soient x une lettre, T et U des termes et $R\{x\}$ une relation; la relation

$$(T = U) \Rightarrow (R\{T\} \Leftrightarrow R\{U\})$$

est un axiome.
S7. Soient R et S des relations et x une lettre; la relation

$$((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$$

est un axiome.
S8. Soient R une relation, x et y des lettres distinctes, X et Y des lettres distinctes de x et y et ne figurant pas dans R; la relation

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)\ \mathrm{Coll}_x\ ((\exists y)((y \in Y) \text{ et } R))$$

est un axiome.
A1. $(\forall x)(\forall y)((x \subset y \text{ et } y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.
A2. $(\forall x)(\forall y)\ \mathrm{Coll}_z\ (z = x \text{ ou } z = y)$.
A3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(((x, y) = (x' y')) \Rightarrow (x = x' \text{ et } y = y'))$.
A4. $(\forall \mathrm{X})\ \mathrm{Coll}_{\mathrm{Y}}\ (\mathrm{Y} \subset \mathrm{X})$.
A5. Il existe un ensemble infini.