ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
846-1141

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

I

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE I

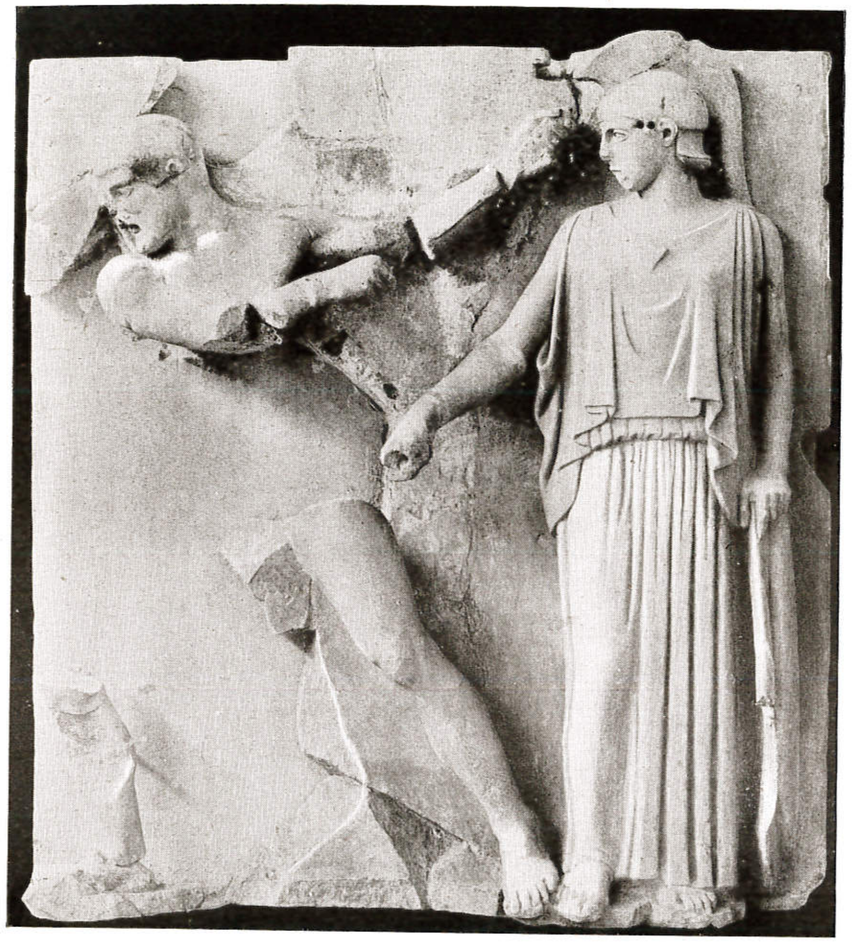
THÉORIE DES ENSEMBLES

(FASCICULE DE RÉSULTATS)

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
1951

Printed in France



MODE D'EMPLOI DE CE TRAITÉ

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction.

Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées, en France, dans les cours de mathématiques générales (à l'étranger, dans la première ou les deux premières années de l'Université), et, si possible, une certaine connaissance des parties essentielles d'un cours de calcul différentiel et intégral.

2. La première partie du traité est consacrée aux structures fondamentales de l'Analyse (sur le sens du mot « structure », cf. Livre I, chap. 4) ; dans chacun des Livres en lesquels se divise cette partie, on étudie une de ces structures, ou plusieurs structures étroitement apparentées (Livre I, Théorie des Ensembles ; Livre II, Algèbre ; Livre III, Topologie générale ; Livres suivants : Fonctions d'une variable réelle, Espaces vectoriels topologiques, Intégration, Différentielles et intégrales de différentielles, etc.).

Les principes généraux étudiés dans la première partie trouveront, dans les parties suivantes, leur application à des théories où interviennent simultanément diverses structures.

3. Le mode d'exposition suivi dans la première partie est axiomatique et abstrait ; il procède le plus souvent du général au particulier. Le choix de cette méthode était imposé par l'objet principal de cette première partie, qui est de donner des fondations solides à tout le reste du traité, et même à tout l'ensemble des mathématiques modernes. Il est indispensable pour cela d'acquérir d'emblée un assez grand nombre de notions et de principes très généraux. De plus, les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres, les livres et les parties se suivent dans

un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur que s'il possède déjà des connaissances assez étendues, ou bien s'il a la patience de suspendre son jugement jusqu'à ce qu'il ait eu l'occasion de s'en convaincre.

4. Pour obvier en quelque mesure à cet inconvénient, on a inséré assez souvent, dans le cours du texte, des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs, mais qui n'ont pas encore été exposés dans le traité ; ces exemples sont toujours placés entre deux astérisques *.....*. La plupart des lecteurs trouveront sans doute que ces exemples leur faciliteront l'intelligence du texte, et préféreront ne pas les omettre, même en première lecture ; une telle omission, néanmoins, n'aurait, bien entendu, du point de vue logique, aucun inconvénient.

5. Le lecteur voudra peut-être parfois se faire une idée sommaire de l'ensemble d'un Livre, avant d'en aborder l'étude détaillée. Cette tâche lui sera facilitée par des *fascicules de résultats*, annexés, en principe, à chaque Livre, et destinés également aux lecteurs pressés, qui désireraient arriver le plus vite possible à l'étude de problèmes spéciaux. Ces fascicules contiendront, autant que possible, l'essentiel de ce qui sera nécessaire à l'étude des parties suivantes.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre : c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »).

8. Les *exercices* sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part, à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte, mais qui ont néanmoins leur intérêt. Ils peuvent être omis en première lecture ; mais on recommande à l'étudiant de les résoudre, en tout cas, en deuxième lecture. Les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.* Non seulement chaque fascicule sera pourvu d'un *index* détaillé, mais chaque Livre sera suivi d'un *Dictionnaire*, où seront expliqués et discutés, en plus des termes employés dans ce traité, les termes correspondants employés jusqu'ici dans les langues principales. Ce dictionnaire permettra donc au lecteur du traité d'aborder l'étude de mémoires originaux dans ces diverses langues, et aussi au mathématicien accoutumé à une autre terminologie de se familiariser rapidement avec celle du traité.

10. On s'est efforcé, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, de se servir toujours d'un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage ; s'il y a lieu, ils sont mentionnés à l'index ou au dictionnaire.

11. Le texte étant consacré, en principe, à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; les références seront groupées dans un *exposé historique*, placé le plus souvent *à la fin de chaque chapitre* et où l'on trouvera, le cas échéant, des indications sur les problèmes non résolus de la théorie. On se bornera à donner les références aux livres et mémoires originaux dont l'étude peut être le plus profitable au lecteur. Les références qui servent seulement à fixer des points de priorité seront presque toujours omises ; à plus forte raison, le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver ici de bibliographie complète des sujets traités.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile, en général, d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Les renvois à une partie du traité sont donnés comme suit :

a) Si l'on se réfère à des théorèmes, axiomes ou définitions énoncés *dans le même paragraphe*, on les désigne s'il y a lieu par leur numéro.

b) S'ils sont énoncés *dans un autre paragraphe du même chapitre*, on indique en outre ce paragraphe.

c) S'ils sont énoncés *dans un autre chapitre du même Livre*, on indique le chapitre et le paragraphe correspondants.

d) S'ils se trouvent *dans un autre Livre*, on commence par indiquer en outre ce Livre par son titre.

Les *fascicules de résultats* sont désignés par la lettre R : par exemple, *Ens.* R signifie « fascicule de résultats de la Théorie des Ensembles ».

13. Chaque fois qu'il peut être utile au lecteur d'avoir présents sous les yeux, durant toute la lecture d'un fascicule, certains axiomes, certaines définitions, etc., ceux-ci sont reproduits sur un *dépliant* placé à la fin du fascicule (et mentionné dans la table des matières).

THÉORIE DES ENSEMBLES

(Fascicule de résultats).

INTRODUCTION

Le lecteur trouvera dans le présent fascicule toutes les définitions et tous les résultats de théorie des ensembles qui seront utilisés dans la suite de cet ouvrage ; il n'y trouvera aucune démonstration. En ce qui concerne les notions et termes introduits ci-dessous sans qu'il en soit donné de définition, il pourra se borner à leur attribuer leur sens usuel, ce qui n'offre aucun inconvénient pour la lecture du reste de ce traité, et rend presque immédiates la plupart des propositions énoncées dans ce fascicule. La lecture du Livre I (Théorie des Ensembles) est indispensable pour les lecteurs désireux de savoir comment on peut surmonter les difficultés logiques que crée la présence de ces termes non définis (*), et pour ceux qui veulent connaître les démonstrations des théorèmes plus difficiles énoncés aux §§ 6 et 7 de ce fascicule (théorème de Zorn et ses conséquences).

(*) Le lecteur ne manquera pas d'observer que le point de vue « naïf », auquel nous nous plaçons dans ce fascicule pour exposer les principes de la théorie des ensembles, est en opposition directe avec le point de vue « formaliste » auquel nous nous plaçons dans les fascicules du Livre I dont celui-ci est le résumé ; bien entendu, cette opposition est voulue, et correspond aux buts différents en vue desquels sont écrites ces deux parties de notre ouvrage ; nous renvoyons à l'Introduction du Livre I pour des explications plus détaillées sur ce point.

§ 1. — Eléments et parties d'un ensemble.

1. Un *ensemble* est formé d'*éléments* susceptibles de posséder certaines *propriétés* et d'avoir entre eux, ou avec des éléments d'autres ensembles, certaines *relations*.

2. Ensembles et éléments sont désignés dans les raisonnements par des symboles graphiques, qui sont en général des lettres (de divers alphabets) ou des combinaisons de lettres et d'autres signes ; les relations entre éléments d'un ou plusieurs ensembles se notent en insérant les symboles qui désignent ces éléments dans un schéma caractéristique de la relation envisagée (*) ; de même pour les propriétés.

Une lettre peut désigner, soit un élément *déterminé*, soit un élément *arbitraire* (dit aussi *variable*, *argument* ou élément *générique*) d'un ensemble. Quand, dans une relation (ou propriété), on remplace un élément arbitraire par un élément déterminé (du même ensemble), on dit qu'on lui donne pour *valeur* cet élément déterminé.

Pour indiquer les éléments qui figurent dans une relation (qu'on n'écrit pas explicitement), on représente cette relation par une notation telle que $\mathrm{R}\{x, y, z\}$ (si x, y, z sont les éléments qui interviennent dans la relation considérée).

3. On dit qu'une relation ou une propriété, dans laquelle interviennent des éléments arbitraires (**), est une *identité*, si elle devient une proposition vraie de quelque manière qu'on donne une valeur à ces éléments. Si R et S désignent deux relations (ou propriétés) on dit que R *entraîne* S lorsque S est vraie chaque fois qu'on fixe les éléments arbitraires qui entrent dans ces relations de manière que R soit vraie ; on dit que R et S sont *équivalentes* lorsque chacune de ces relations entraîne l'autre.

(*) Lorsque le symbole qui désigne un élément est une combinaison de plusieurs signes, et qu'on doit l'insérer dans une relation à la place d'une seule lettre, il y a lieu le plus souvent, pour éviter des confusions possibles, de le mettre entre parenthèses ou entre crochets.

(**) Il faut bien remarquer que, lorsqu'on parle d'une *propriété d'un élément générique* d'un ensemble E, cela ne signifie nullement que la propriété soit vraie pour *tout* élément de E, mais simplement qu'elle *a un sens* pour *tout* élément de E, est éventuellement vraie pour certains de ces éléments, et fausse pour les autres. De même pour les relations.

4. Soit $\mathrm{R}\{x,y,z\}$ une relation entre des variables x,y,z ; la phrase « quel que soit x, $\mathrm{R}\{x, y, z\}$ » (ou « pour tout x, $\mathrm{R}\{x, y, z\}$ ») est une relation *entre* y *et* z, qui sera considérée comme vraie, pour un système de valeurs données à ces dernières variables, si R est vraie pour ces valeurs de y et z et *toute* valeur donnée à x. La phrase « il existe x tel que $\mathrm{R}\{x, y, z\}$ » est également une relation entre y et z, qui sera considérée comme vraie, pour un système de valeurs données à y et z, si, ces valeurs étant ainsi fixées, on peut donner à x *au moins une* valeur pour laquelle R soit vraie. De même pour une relation entre des variables en nombre quelconque.

Si $\overline{\mathrm{R}}$ désigne la *négation* de R, la négation de « quel que soit x, R » sera « il existe x tel que $\overline{\mathrm{R}}$ » ; celle de « il existe x tel que R » sera « quel que soit x, $\overline{\mathrm{R}}$ ».

5. Si R, S, désignent deux relations, on convient que « R et S » est *une seule* relation, qu'on considère comme vraie chaque fois que R, S sont vraies *toutes deux* ; de même, « R ou S » est une relation qu'on considère comme vraie chaque fois que *l'une au moins* des relations R, S est vraie (et en particulier chaque fois qu'elles sont toutes deux vraies ; le « ou » n'a donc pas ici le sens disjonctif qu'il possède parfois dans le langage ordinaire). Désignons par $\overline{\mathrm{R}}$, $\overline{\mathrm{S}}$ les négations de R, S, respectivement ; la négation de « R et S » est « $\overline{\mathrm{R}}$ ou $\overline{\mathrm{S}}$ » ; celle de « R ou S » est « $\overline{\mathrm{R}}$ et $\overline{\mathrm{S}}$ ».

6. Lorsque deux symboles désignent des éléments d'un *même ensemble*, en les écrivant de part et d'autre du signe « $=$ » (qui se lit « égale »), on a une relation dite relation d'*égalité*, qui signifie que ces deux symboles représentent le *même* élément ; la négation de cette relation s'obtient en écrivant les mêmes symboles de part et d'autre du signe « $\neq$ » (qui se lit « différent de »).

7. Etant donné un ensemble E, et une *propriété* d'un élément générique de E, ceux des éléments de E qui possèdent cette propriété forment un nouvel ensemble, qu'on appelle *partie* ou *sous-ensemble* de E. Deux propriétés *équivalentes* définissent ainsi la *même* partie de E, et réciproquement.

Soit A une partie de E : x étant un élément générique de E, la propriété « x appartient à A » (c'est-à-dire « x est élément de A ») s'écrira « $x \in \mathrm{A}$ » ; l'ensemble des éléments qui possèdent cette propriété n'est évidemment autre que A.

La négation de cette propriété se note « $x \notin A$ » et se lit « x n'appartient pas à A » ; l'ensemble des éléments de E possédant cette propriété s'appelle *complémentaire de* A et se note $\complement A$.

8. Certaines propriétés, par exemple $x = x$, sont vraies pour *tous* les éléments de E ; deux quelconques de ces propriétés sont équivalentes ; la partie qu'elles définissent, et qu'on appelle parfois *partie pleine* de E, n'est autre que l'ensemble E lui-même.

Inversement, certaines propriétés, par exemple $x \neq x$, ne sont vraies pour *aucun* élément de E ; deux quelconques de ces propriétés sont encore équivalentes ; la partie qu'elles définissent est appelée la *partie vide* de E, et désignée par la notation $\emptyset$.

On notera que E et $\emptyset$ sont *complémentaires* l'un de l'autre.

9. Soit a un élément déterminé de E ; certaines propriétés ne sont vraies que pour le *seul* élément a, par exemple $x = a$; deux quelconques de ces propriétés sont équivalentes ; on désigne par $\{a\}$ la partie qu'elles définissent, et on dit que c'est la partie *réduite au seul élément a*.

10. On appelle *ensemble des parties* d'un ensemble E, et on désigne par $\mathfrak{P}(E)$, l'ensemble dont les éléments sont les *parties* de E. On a $\emptyset \in \mathfrak{P}(E)$, $E \in \mathfrak{P}(E)$; et, quel que soit $x \in E$, $\{x\} \in \mathfrak{P}(E)$. Si x désigne un élément générique de E, X un élément générique de $\mathfrak{P}(E)$, la relation « $x \in X$ » entre x et X est dite *relation d'appartenance.*

11. Soient x et y deux éléments de E, X un élément générique de $\mathfrak{P}(E)$; la relation d'égalité « $x = y$ » est *équivalente* à la relation « pour tout X tel que $x \in X$, on a $y \in X$ ».

12. Soient X, Y deux parties d'un ensemble E ; si la propriété $x \in X$ entraîne la propriété $x \in Y$, autrement dit, si tout élément de X appartient aussi à Y, on dit que X *est contenu dans* Y, ou que Y *contient* X, ou que X *est une partie de* Y ; cette relation entre X et Y s'appelle relation d'*inclusion* (de X dans Y) et se note « $X \subset Y$ » ou « $Y \supset X$ » ; sa négation se note « $X \not\subset Y$ » ou « $Y \not\supset X$ ».

Quelle que soit la partie X de E, on a $\emptyset \subset X$, et $X \subset E$. La relation d'appartenance « $x \in X$ » est équivalente à « $\{x\} \subset X$ ».

La relation « $X \subset Y$ et $Y \subset Z$ » entraîne « $X \subset Z$ ».

La relation « $X \subset Y$ » n'exclut pas que l'on ait « $X = Y$ » ; la relation « $X \subset Y$ et $Y \subset X$ » est équivalente à « $X = Y$ ».

13. Soient X et Y deux parties quelconques de E ; l'ensemble

des éléments qui possèdent la propriété « $x \in X$ ou $x \in Y$ » se note $X \cup Y$ et s'appelle la *réunion* de X et Y ; l'ensemble des éléments qui possèdent la propriété « $x \in X$ et $x \in Y$ » se note $X \cap Y$ et s'appelle l'*intersection* de X et Y.

Pour se rappeler sans erreur le signe de la réunion, on peut utiliser le fait que ce signe ressemble à la voyelle « u », initiale du mot « union ».

On définit de la même façon la réunion ou l'intersection de plusieurs parties de E.

Si x, y, z sont trois éléments de E, la réunion $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ se note aussi $\{x, y, z\}$. De même pour des éléments (individuellement nommés) en nombre quelconque.

Soient X et Y deux parties de E ; suivant que $X \cap Y \neq \emptyset$ ou que $X \cap Y = \emptyset$, on dit que X et Y *se rencontrent* ou *n'ont aucun élément commun.*

14. Dans l'énoncé des propositions qui suivent, X, Y, Z désignent des parties quelconques d'un même ensemble E.

a) On a

$$\emptyset = \complement E, \qquad E = \complement \emptyset.$$

b) Quel que soit X, on a

$$\complement(\complement X) = X; \tag{1}$$
$$X \cup X = X, \qquad X \cap X = X; \tag{2}$$
$$X \cup (\complement X) = E, \qquad X \cap (\complement X) = \emptyset; \tag{3}$$
$$X \cup \emptyset = X, \qquad X \cap E = X; \tag{4}$$
$$X \cup E = E, \qquad X \cap \emptyset = \emptyset. \tag{5}$$

c) Quels que soient X, Y, on a

$$X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X \quad \text{(commutativité)}; \tag{6}$$
$$X \subset X \cup Y, \qquad X \cap Y \subset X; \tag{7}$$
$$\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y), \qquad \complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y). \tag{8}$$

d) Les relations

$$X \subset Y, \qquad \complement X \supset \complement Y, \qquad X \cup Y = Y, \qquad X \cap Y = X$$

sont *équivalentes.*

e) Les relations

$$X \cap Y = \emptyset, \qquad X \subset \complement Y, \qquad Y \subset \complement X$$

sont *équivalentes*.

f) Les relations

$$X \cup Y = E, \qquad \complement X \subset Y, \qquad \complement Y \subset X$$

sont *équivalentes*.

g) Quels que soient X, Y, Z on a (associativité et distributivité)

$$(9) \qquad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z, \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z;$$

$$(10) \qquad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

h) La relation $X \subset Y$ entraîne les relations

$$X \cup Z \subset Y \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Z \subset Y \cap Z.$$

i) La relation « $Z \subset X$ et $Z \subset Y$ » entraîne $Z \subset X \cap Y$; la relation « $X \subset Z$ et $Y \subset Z$ » entraîne « $X \cup Y \subset Z$ ».

15. D'après les identités (8), si une partie A de E se déduit d'autres parties X, Y, Z de E par application, dans n'importe quel ordre, des *seules* opérations $\complement$, $\cup$, $\cap$, on obtiendra le complémentaire $\complement A$ en remplaçant les parties X, Y, Z par leurs complémentaires, et les opérations $\cup$, $\cap$, par $\cap$, $\cup$, respectivement, l'ordre des opérations étant respecté ; c'est la *règle de dualité*. Etant donnée une égalité $A = B$ entre parties de la forme précédente, considérons l'égalité équivalente $\complement A = \complement B$; si on remplace $\complement A$ et $\complement B$ par les expressions que fournit l'application de la règle de dualité, puis si, dans ces expressions, on remplace $\complement X$, $\complement Y$, $\complement Z$ par X, Y, Z et vice-versa, on obtient une égalité dite *duale* de $A = B$; on peut opérer de même sur une relation d'inclusion $A \subset B$, mais il faut avoir soin de remplacer le signe « $\subset$ » par « $\supset$ ».

Les identités affectées ci-dessus du même numéro sont duales l'une de l'autre.

16. Dans certaines questions, il est commode de fixer son attention sur une partie déterminée A d'un ensemble E ; si X est une autre partie arbitraire de E, on appelle alors *trace* de X sur A l'ensemble $A \cap X$, qu'on note souvent aussi X_A, et qu'on considère toujours, dans ce cas, comme une partie de A. Quelles que soient les parties X, Y de E, on a

$$(X \cup Y)_A = X_A \cup Y_A\,; \qquad (X \cap Y)_A = X_A \cap Y_A$$

et

$$\complement_A X_A = (\complement_E X)_A$$

($\complement_E X$ désigne le complémentaire de X pris par rapport à E, $\complement_A X_A$ le complémentaire de X_A pris par rapport à A).

Si $\mathcal{E}$ désigne un *ensemble de parties* de E, on appelle de même *trace* de $\mathcal{E}$ sur A, l'ensemble $\mathcal{E}_A$ des traces sur A des ensembles de $\mathcal{E}$.

§ 2. — Fonctions.

1. Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite *relation fonctionnelle en* y, ou *relation fonctionnelle de* E *vers* F, si, *quel que soit* $x \in E$, *il existe un élément* y *de* F, *et un seul, qui soit dans la relation considérée avec* x.

On donne le nom de *fonction* à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$ l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la *valeur* de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est *déterminée* par la relation fonctionnelle considérée. Deux relations fonctionnelles *équivalentes* déterminent la *même* fonction.

D'une fonction déterminée par une relation fonctionnelle de E vers F, on dit qu'elle « prend ses valeurs dans F » et qu'elle est « définie dans (ou sur) E », ou encore que c'est une « fonction d'un argument (ou d'une variable) parcourant E » ; plus brièvement, on dit aussi que c'est une *application de* E *dans* F.

2. Les applications d'un ensemble E dans un ensemble F sont les *éléments* d'un nouvel ensemble, *l'ensemble des applications de* E *dans* F. Si f est un élément quelconque de cet ensemble, on désigne souvent par $f(x)$ la valeur de f pour l'élément x de E ; dans certains cas, on préfère employer la notation f_x, dite notation *indicielle* (l'ensemble E est alors appelé l'ensemble des *indices*). La relation « $y = f(x)$ » est une relation fonctionnelle en y, qui détermine f.

Lorsqu'une relation de la forme $y = \langle x \rangle$, (où $\langle x \rangle$ désigne une combinaison de signes dans laquelle figure x) est une relation fonctionnelle en y, on désignera la fonction qu'elle détermine par la notation

$$x \rightarrow \langle x \rangle$$

ou même simplement par $\langle x \rangle$, ce qui est un abus de langage très fréquent. Par exemple, si X et Y sont deux parties génériques d'un ensemble E, la relation $Y = \complement X$ est fonctionnelle en Y ; on désignera par $X \rightarrow \complement X$, ou simplement par $\complement X$, l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(E)$ qu'elle détermine.

La relation d'égalité « $f = g$ » entre applications de E dans F est équivalente à la relation « quel que soit $x \in E$, $f(x) = g(x)$ ».

3. Une fonction définie dans un ensemble E, et prenant une même valeur a pour tout élément x de E, est dite *constante* dans E ; elle est déterminée par la relation fonctionnelle $y = a$.

L'application de E dans E qui fait correspondre à tout élément x de E cet élément lui-même, est appelée application *identique* ; elle est déterminée par la relation fonctionnelle $y = x$.

Si A est une partie quelconque de E, l'application de A dans E qui, à tout élément x de A, fait correspondre x considéré comme élément de E, s'appelle application *canonique* de A dans E.

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même ; on dit qu'un élément $x \in E$ est *invariant par* f, si $f(x) = x$.

4. Soient f une application de E dans F, et X une partie quelconque de E. On appelle *image de* X *par* f, ou encore *ensemble des valeurs prises par* f *sur* X, la partie Y de F formée des éléments y qui possèdent la propriété :

« il existe $x \in E$ tel que $x \in X$ et $y = f(x)$ ».

On définit ainsi une relation entre X et Y, qui est fonctionnelle en Y, et détermine donc une application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$, qu'on appelle *extension de* f *aux ensembles de parties* ; par abus de langage on la note encore f, et on écrit $Y = f(X)$.

Quels que soient f et x, on a

$$f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

Par un abus de langage la *valeur* $f(x)$ de f pour x s'appelle aussi *image de* x *par* f.

Si y est un élément générique de F, la propriété « $y \in f(E)$ » s'énonce encore en disant que « *y est de la forme $f(x)$* ».

Si on a $f(E) = F$, c'est-à-dire si, quel que soit $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que f est une application de E *sur* F.

Soient x un élément et X une partie quelconques de E. Au lieu de dire que $f(x)$ est la valeur de f pour x, et $f(X)$ l'image de X par f, on dit parfois que f *transforme* x en $f(x)$ et X en $f(X)$; $f(x)$ et $f(X)$ sont alors appelés les *transformés* par f de x et X respectivement. On utilise surtout ce langage lorsque f est une application de E *sur* F ; dans ce cas on dit aussi que f est une *transformation de* E *en* F.

5. Soit f une application de E dans F ; on a les propositions suivantes, où X et Y désignent des parties arbitraires de E :

a) La relation $X \subset Y$ entraîne $f(X) \subset f(Y)$.

b) La propriété $X \neq \emptyset$ est équivalente à $f(X) \neq \emptyset$.

c) Quels que soient X, Y, on a

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y), \tag{11}$$

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y). \tag{12}$$

6. Soient f une application de E dans F, et Y une partie quelconque de F. On appelle *image réciproque de* Y *par* f la partie X de E formée des éléments x qui possèdent la propriété :

$$f(x) \in Y.$$

On définit ainsi une relation entre X et Y, qui est fonctionnelle en X, et détermine donc une application de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$, qu'on appelle *extension réciproque de* f *aux ensembles de parties*, et qu'on note $\overset{-1}{f}$; on écrit donc $X = \overset{-1}{f}(Y)$.

En particulier, si y est un élément de F, $\overset{-1}{f}(\{y\})$ sera l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = y$; les relations « $f(x) = y$ » et « $x \in \overset{-1}{f}(\{y\})$ » sont équivalentes. Par abus de langage on écrit aussi $\overset{-1}{f}(y)$ au lieu de $\overset{-1}{f}(\{y\})$.

La *trace* X_A d'une partie X de E sur une partie déterminée A n'est autre que l'image réciproque de X par l'application canonique de A dans E (nº 3).

7. Soit f une application de E dans F ; on a les propositions suivantes, où X et Y désignent des parties arbitraires de F :

a) La relation $X \subset Y$ entraîne $\overset{-1}{f}(X) \subset \overset{-1}{f}(Y)$.

b) Quels que soient X, Y, on a

(13) $$\overset{-1}{f}(X \cup Y) = \overset{-1}{f}(X) \cup \overset{-1}{f}(Y),$$

(14) $$\overset{-1}{f}(X \cap Y) = \overset{-1}{f}(X) \cap \overset{-1}{f}(Y),$$

(15) $$\overset{-1}{f}(\complement X) = \complement \overset{-1}{f}(X).$$

On notera la différence entre les formules (12) et (14) ; (14) ne serait pas vraie quels que soient X et Y, si on y remplaçait $\overset{-1}{f}$ par une application quelconque de F dans E. De même, il n'y a pas d'analogue à la relation (15) pour l'extension d'une application quelconque.

On a de plus $\overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset$; mais ici, on peut avoir $\overset{-1}{f}(X) = \emptyset$ pour une partie non vide X de F ; pour que $X \neq \emptyset$ entraîne $\overset{-1}{f}(X) \neq \emptyset$, il faut et il suffit que f soit une application de E *sur* F.

8. Si une application f de E dans F est telle que, pour tout $y \in F$, il existe *au plus un* $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (autrement dit, que l'ensemble $\overset{-1}{f}(\{y\})$ soit vide ou réduit à un seul élément), on dit que f est une application *biunivoque* de E *dans* F. On a alors, quelles que soient les parties X, Y de E,

(16) $$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

9. Si une application f de E dans F est telle que, pour tout $y \in F$, *il existe un* $x \in E$ *et un seul tel que* $y = f(x)$ (autrement dit, que $\overset{-1}{f}(\{y\})$ soit réduit à un seul élément), on dit que f est une application *biunivoque* de E *sur* F. Une telle application peut être caractérisée comme étant à la fois application de E sur F et application biunivoque de E dans F.

Lorsque f est une application biunivoque de E sur F, la relation $y = f(x)$ est non seulement fonctionnelle en y, mais aussi *fonctionnelle en* x : on dit que c'est une *relation biunivoque* entre x et y. En tant que relation fonctionnelle en x, elle détermine une application biunivoque de F sur E, qu'on appelle *l'application réciproque* de f.

On notera que *l'extension de l'application réciproque* de f est identique à *l'extension réciproque* de f.

Soit g l'application réciproque de f ; les relations « $y = f(x)$ » et « $x = g(y)$ » sont *équivalentes* ; l'application réciproque de g est f. Lorsque f est une application biunivoque de E sur F, on a, non seulement la relation (16), mais aussi, quelle que soit la partie X de E,

(17) $$f(\complement X) = \complement f(X).$$

De plus, l'extension de f est une application biunivoque de $\mathfrak{P}(E)$ sur $\mathfrak{P}(F)$.

On dit qu'une application biunivoque de E sur F et son application réciproque *réalisent une correspondance biunivoque* entre E et F, ou que E et F *sont mis en correspondance biunivoque* par ces applications.

Une application biunivoque d'un ensemble E sur lui-même se nomme *permutation* de E ; l'application identique est une permutation. Si une permutation est identique à son application réciproque, on dit qu'elle est *involutive* ; il en est ainsi, par exemple, de l'application $X \rightarrow \complement X$ de $\mathfrak{P}(E)$ sur lui-même.

10. Dans les propositions suivantes, X désigne une partie arbitraire de E, Y une partie arbitraire de F :

a) Si f est une application de E *dans* F, on a

(18) $$X \subset \overset{-1}{f}(f(X)),$$

(19) $$f(\overset{-1}{f}(Y)) \subset Y.$$

b) Les propriétés « quel que soit Y, $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$ » et « f est une application de E *sur* F » sont équivalentes.

c) Les propriétés « quel que soit X, $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$ » et « f est une application *biunivoque* de E *dans* F » sont équivalentes.

d) Les propriétés « quels que soient X, Y, $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$ et $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$ » et « f est une application *biunivoque* de E *sur* F » sont équivalentes.

11. Soient E, F, G, trois ensembles, distincts ou non ; soit f une application de E dans F, et g une application de F dans G. L'application de E dans G, dont la valeur, en un élément quelconque x de E, est $g(f(x))$, s'appelle *l'application composée de* g *et* f (ou fonction composée de g et f), et se note $g \circ f$, ou simplement gf lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

On observera que, si G est distinct de E, on ne peut pas parler de l'application composée *de* f *et* g, et que la notation $f \circ g$ n'a aucun sens ; si G est identique à E, $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont éléments d'un même ensemble que si F est lui aussi identique à E ; et même dans ce cas, on a en général $f \circ g \neq g \circ f$; l'*ordre* dans lequel on compose les applications f et g est donc essentiel.

Soit φ l'application composée de g et f, X une partie quelconque de E et Z une partie quelconque de G ; on a

$$\varphi(X) = g(f(X)), \tag{20}$$

$$\overset{-1}{\varphi}(Z) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(Z)). \tag{21}$$

Si f est une application *biunivoque* de E *sur* F, et g une application *biunivoque* de F *sur* G, $g \circ f$ est une application *biunivoque* de E *sur* G.

Soit h une application de G dans un autre ensemble H ; on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; cette application de E dans H se note encore $h \circ g \circ f$, et on dit qu'elle est *composée* des trois applications h, g, f prises dans cet ordre. On définit de même la composition de plus de trois applications (voir *Algèbre*, ch. I).

12. En général, l'application composée $\overset{-1}{f} \circ f$ de l'extension réciproque et de l'extension d'une application f, n'est pas l'application identique de $\mathfrak{P}(E)$ sur lui-même ; de même, $f \circ \overset{-1}{f}$ n'est pas en général l'application identique de $\mathfrak{P}(F)$ sur lui-même. Ces deux propriétés n'ont lieu simultanément que lorsque f est une *application biunivoque de* E *sur* F.

De plus, dans ce cas, si on désigne par g l'application réciproque de f, les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont respectivement l'application identique de E sur E et l'application identique de F sur F.

Réciproquement, si f est une application de E dans F, et g une application de F dans E, telles que $g \circ f$ soit une permutation de E, et $f \circ g$ une permutation de F, f est une application biunivoque de E sur F, et g une application biunivoque de F sur E. Si en outre $g \circ f$ est l'application identique de E sur E, g est l'application réciproque de f.

13. Soit f une application de E dans F, et A une partie quelconque de E ; l'application f_A de A dans F, dont la valeur en un élément quelconque x de A est $f(x)$, s'appelle la *restriction de* f

à la partie A ; elle n'est autre que la composée de f et de l'application canonique de A dans E. Inversement, on dit que f est un *prolongement* de f_A à E.

De même, considérons $f(x)$ comme un élément de la partie $f(E)$ de F ; l'application $x \rightarrow f(x)$ de E *sur* $f(E)$ est appelée application *réduite* de f ; f est composée de l'application canonique de $f(E)$ dans F, et de l'application réduite de f. Si f est une application *biunivoque* de E *dans* F, son application réduite est une application *biunivoque* de E *sur* $f(E)$.

14. Une application d'un ensemble E *sur* un ensemble F est encore appelée *représentation paramétrique de* F *au moyen de* E ; on dit alors que E est *l'ensemble des paramètres* de cette représentation, et ses éléments prennent le nom de *paramètres*.

Une *famille d'éléments* d'un ensemble F est, par définition, une partie de F munie d'une représentation paramétrique ; autrement dit, la donnée d'une famille d'éléments de F équivaut à celle d'une application d'un ensemble quelconque E dans F. L'image de E par cette application est appelée *ensemble des éléments de la famille* ; on remarquera que deux familles distinctes d'éléments de F peuvent avoir la même partie de F comme ensemble de leurs éléments.

A toute partie A d'un ensemble F, on peut toujours faire correspondre une famille d'éléments dont l'ensemble des éléments soit A ; il suffit de considérer la famille définie par l'application *canonique* de A dans F.

Une famille d'éléments de F étant définie par une application $\iota \rightarrow x_\iota$ d'un ensemble I dans F, on la désignera par la notation $(x_\iota)_{\iota \in I}$, ou simplement (x_ι) s'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble des indices.

Si J est une partie de I, la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ prend le nom de *sous-famille* de la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ correspondant à J ; elle est définie par la restriction à J de l'application $\iota \rightarrow x_\iota$.

§ 3. — Produit de plusieurs ensembles.

1. Soient E et F deux ensembles *distincts ou non*. Les *couples* (x, y) dont le premier élément x est un élément quelconque de E, et le second y un élément quelconque de F, sont les éléments

d'un nouvel ensemble, qu'on appelle l'*ensemble produit de* E *par* F, et qu'on note $E \times F$; E et F sont dits les *ensembles facteurs* de $E \times F$. Deux couples ne sont considérés comme identiques que s'ils ont respectivement même premier et même second élément ; autrement dit, la relation « $(x,y) = (x',y')$ » est *équivalente* à la relation « $x = x'$ et $y = y'$ ». Si z est un élément quelconque de $E \times F$, la relation « x est premier élément du couple z » est une relation fonctionnelle en x ; elle détermine une application de $E \times F$ *sur* E, qu'on nomme *première coordonnée*, ou encore *première projection*, et qu'on désigne par l'une ou l'autre des notations c_1 ou pr_1 ; au lieu de dire « x est premier élément du couple z », on dit aussi « x est la première coordonnée de z », « x est la première projection de z », « $x = c_1(z)$ », « $x = pr_1(z)$ ». On définit de même la *seconde coordonnée*, ou *seconde projection*, qui est une application de $E \times F$ *sur* F, et qu'on désigne par c_2 ou pr_2.

La relation « $x = c_1(z)$ et $y = c_2(z)$ » est équivalente à « $z = (x, y)$ ».

L'extension de la fonction pr_1 aux ensembles de parties se note encore de la même manière, conformément aux conventions générales, et se nomme encore *première projection* (on n'emploie plus ici le terme « coordonnée »). De même pour l'extension de la seconde projection.

2. Une relation R entre un élément générique x de E et un élément générique y de F est une propriété du couple (x,y), et définit par suite une partie du produit $E \times F$; inversement, toute partie A de $E \times F$ est définie par la relation $(x, y) \in A$ entre x et y.

Soit A une partie de E et B une partie de F ; on note $A \times B$ la partie de $E \times F$ définie par la relation « $x \in A$ et $y \in B$ » entre x et y.

3. Dans les propositions suivantes, X, X' désignent des parties quelconques de E ; Y, Y' des parties quelconques de F ; Z une partie quelconque de $E \times F$.

a) La relation « $X \times Y = \emptyset$ » est *équivalente* à « $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$ ».

b) Si $X \times Y \neq \emptyset$, la relation « $X \times Y \subset X' \times Y'$ » est *équivalente* à « $X \subset X'$ et $Y \subset Y'$ ».

c) Quels que soient X, X', Y, on a

$$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y. \tag{22}$$

d) Quels que soient X, X', Y, Y', on a

$$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y'). \tag{23}$$

e) Quels que soient X, Y, on a

$$\overset{-1}{pr_1}(X) = X \times F, \qquad \overset{-1}{pr_2}(Y) = E \times Y. \tag{24}$$

f) Si $Y \neq \emptyset$, on a, quel que soit X,

$$pr_1(X \times Y) = X. \tag{25}$$

g) Quel que soit Z, on a

$$Z \subset pr_1(Z) \times pr_2(Z). \tag{26}$$

h) Soit a un élément de E ; l'application $(a, y) \to y$ de l'ensemble $\{a\} \times F$ *sur* F (c'est-à-dire la restriction à la partie $\{a\} \times F$ de la fonction pr_2) est *biunivoque*.

4. L'application

$$(x, y) \to (y, x) \tag{27}$$

est une application *biunivoque* de $E \times F$ *sur* $F \times E$, qu'on nomme application *canonique*. Dans le cas où E et F sont identiques, l'application (27) prend le nom de *symétrie canonique* ; elle est alors *involutive*. Les éléments (x,y) de $E \times E$ invariants par cette symétrie sont ceux qui possèdent la propriété $x = y$; l'ensemble Δ de ces éléments est appelé *diagonale* de $E \times E$. L'application

$$x \to (x, x)$$

est une application *biunivoque* de E *sur* Δ.

Si Z désigne une partie quelconque de $E \times F$, on notera $\overset{-1}{Z}$ l'image de Z par l'application canonique de $E \times F$ sur $F \times E$. Soit X une partie quelconque de E, Y une partie quelconque de F ; on a $\overset{-1}{\widehat{X \times Y}} = Y \times X$.

Si une relation R entre x et y, considérée comme propriété du couple (x, y), définit une partie A de $E \times F$, la *même* relation, considérée comme propriété du couple (y, x), définit la partie $\overset{-1}{A}$ de $F \times E$; R est équivalente à chacune des relations $(x, y) \in A$, $(y, x) \in \overset{-1}{A}$. Si E et F sont identiques, la relation R, et la partie A correspondante, sont dites *symétriques* lorsque $A = \overset{-1}{A}$. La diagonale Δ (définie par la relation d'égalité) est symétrique ; si Z est une partie quelconque de $E \times E$, $Z \cup \overset{-1}{Z}$ et $Z \cap \overset{-1}{Z}$ sont symétriques.

5. Soient A une partie d'un ensemble E, et f une application de A dans un ensemble F ; la relation entre un élément générique x de E et un élément générique y de F, qui s'énonce

$$\text{« } x \in A \quad \text{et} \quad y = f(x) \text{ »}$$

définit une partie de $E \times F$, qu'on appelle *ensemble représentatif* de la fonction f. Si B est une partie de E contenant A, et g un *prolongement* (§ 2, nº 13) de f à B, l'ensemble représentatif de f est *contenu* dans l'ensemble représentatif de g.

Réciproquement, soit C une partie de $E \times F$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe *au plus un* $y \in F$ tel que $(x, y) \in C$; la relation $(x, y) \in C$ entre un élément générique x *de l'ensemble* $pr_1(C)$, et un élément générique y de F, est une relation fonctionnelle en y, qui détermine une application de $pr_1(C)$ dans F, dont l'ensemble représentatif est C.

L'ensemble des parties C de $E \times F$ ayant la propriété « quel que soit $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x, y) \in C$ » (ensemble qui est une partie de $\mathfrak{P}(E \times F)$), peut donc être mis en correspondance biunivoque avec *l'ensemble des applications d'une partie quelconque de* E *dans* F.

Soit f une application biunivoque de E *dans* F, g l'application réciproque de l'application réduite de f (g est donc une application biunivoque de $f(E)$ sur E) ; si C est l'ensemble représentatif de f, l'ensemble représentatif de g est $\overset{-1}{C}$.

6. Lorsque f est une application de E dans F, et C son ensemble représentatif dans $E \times F$, la relation « $y = f(x)$ » est équivalente à « $(x, y) \in C$ »; la relation « $y \in f(X)$ » est équivalente à « il existe x tel que $x \in X$ et $(x, y) \in C$ ».

Soient maintenant K une partie *quelconque* de $E \times F$, et X une partie quelconque de E. Désignons par K(X) la partie de F formée des éléments y qui satisfont à la relation « il existe x tel que $x \in X$ et $(x, y) \in K$ » ; cette relation est donc équivalente à « $y \in K(X)$ ». On dit que l'application $X \rightarrow K(X)$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ est *définie par la partie* K de $E \times F$. On remarquera que K(X) n'est autre que la seconde projection de l'ensemble $K \cap (X \times F)$. Lorsque K est l'ensemble représentatif d'une application f de E dans F,

l'application $X \rightarrow K(X)$ est identique à l'extension de f aux ensembles de parties.

7. Si x est un élément générique de E, $x \rightarrow K(\{x\})$ est une application de E dans $\mathfrak{P}(F)$, dont la valeur $K(\{x\})$ (qu'on note aussi $K(x)$ par abus de langage) est appelée *coupe de* K *suivant* x. La relation $(x, y) \in K$ est équivalente à $y \in K(x)$.

Réciproquement, *toute* application $x \rightarrow \Phi(x)$ de E dans $\mathfrak{P}(F)$ peut s'obtenir de cette manière ; car la relation $y \in \Phi(x)$ définit une partie K de $E \times F$, et $\Phi(x)$ n'est autre que la coupe de K suivant x. L'ensemble $\mathfrak{P}(E \times F)$ et l'ensemble des applications de E dans $\mathfrak{P}(F)$ sont ainsi mis en correspondance biunivoque.

8. Toute application $X \rightarrow K(X)$ définie par une partie K de $E \times F$ possède les propriétés suivantes, qui généralisent celles de l'extension d'une application de E dans F (§ 2, nºs 4 et 5) :

a) $K(\varnothing) = \varnothing$;

b) « $X \subset Y$ » entraîne « $K(X) \subset K(Y)$ ».

c) Quels que soient X, Y,

$$K(X \cup Y) = K(X) \cup K(Y), \tag{28}$$

$$K(X \cap Y) \subset K(X) \cap K(Y). \tag{29}$$

Si K et K′ sont deux parties de $E \times F$ telles que $K \subset K'$, on a $K(X) \subset K'(X)$ pour tout $X \subset E$; en particulier $K(x) \subset K'(x)$ quel que soit $x \in E$. Réciproquement, si $K(x) \subset K'(x)$ quel que soit $x \in E$, on a $K \subset K'$.

9. Une relation entre un élément générique de E et un élément générique de F définit une partie K de $E \times F$ et une partie $\overset{-1}{K}$ de $F \times E$, et par suite une application $X \rightarrow K(X)$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ et une application $Y \rightarrow \overset{-1}{K}(Y)$ de $\mathfrak{P}(F)$ dans $\mathfrak{P}(E)$.

Lorsque K est l'ensemble représentatif d'une application f de E dans F, l'application $Y \rightarrow \overset{-1}{K}(Y)$ n'est autre que l'extension réciproque de f.

Il faut remarquer que les relations (18) et (19) ne se généralisent pas aux applications $X \rightarrow K(X)$ et $Y \rightarrow \overset{-1}{K}(Y)$ lorsque K est une partie quelconque de $E \times F$.

10. Soient E, F, G, trois ensembles distincts ou non, A une

partie de $E \times F$, B une partie de $F \times G$. Les éléments (x, z) de $E \times G$ qui possèdent la propriété

« il existe $y \in F$ tel que $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in B$ »

forment une partie de $E \times G$, qu'on appelle l'ensemble *composé de* B *et* A, et qu'on note $B \circ A$, ou simplement BA quand aucune confusion n'est à craindre. Ici encore, l'ordre dans lequel on compose deux ensembles est essentiel.

L'application $X \rightarrow BA(X)$ de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(G)$ est composée de $Y \rightarrow B(Y)$ et de $X \rightarrow A(X)$; autrement dit, quel que soit $X \subset E$, on a

$$\text{(30)} \qquad BA(X) = B(A(X)).$$

Soient H un ensemble distinct ou non de E, F, G, et C une partie de $G \times H$. On a $C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$; cet ensemble se note aussi $C \circ B \circ A$ (ou simplement CBA) et s'appelle le *composé* de C, B, A pris dans cet ordre.

Soit f une application de E dans F, g une application de F dans G ; si A et B sont respectivement les ensembles représentatifs de f et g, le composé BA est l'ensemble représentatif de l'application composée $g \circ f$.

11. On a

$$\text{(31)} \qquad \overset{-1}{\widehat{(B \circ A)}} = \overset{-1}{A} \circ \overset{-1}{B}.$$

Soient A, A′ deux parties de $E \times F$, B, B′ deux parties de $F \times G$; la relation « $A \subset A'$ et $B \subset B'$ » entraîne « $B \circ A \subset B' \circ A'$ ».

Soient A une partie de $E \times F$, Δ la diagonale de $E \times E$, Δ' celle de $F \times F$; on a

$$\text{(32)} \qquad A \circ \Delta = \Delta' \circ A = A.$$

12. Soient maintenant E, F, G trois ensembles distincts ou non ; leur *ensemble produit* $E \times F \times G$ est l'ensemble des *triplets* (x, y, z), où $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$; la relation $(x, y, z) = (x', y', z')$ étant équivalente à « $x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$ ». Les trois applications

$$(x, y, z) \rightarrow x, \qquad (x, y, z) \rightarrow y, \qquad (x, y, z) \rightarrow z$$

de $E \times F \times G$ sur E, F, G respectivement, sont appelées *première*, *seconde* et *troisième coordonnée* (ou *projection*) ; on appelle de même par exemple *projection d'indices* (1, 2), et on note $pr_{1,2}$, l'application

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

de $E \times F \times G$ sur $E \times F$.

Les définitions et propositions des n^os 2, 3, 4 se généralisent aisément au produit de trois ensembles.

En outre, on peut substituer à la considération du produit $E \times F \times G$ de trois ensembles, celle du produit $(E \times F) \times G$, obtenu par double application de l'opération « produit de deux ensembles ». En effet,

$$(x, y, z) \rightarrow ((x, y), z)$$

est une application *biunivoque* de $E \times F \times G$ *sur* $(E \times F) \times G$, qu'on nomme encore application *canonique* ; on définit de même des applications biunivoques (dites aussi *canoniques*) de $E \times F \times G$ sur l'ensemble $E \times (F \times G)$, et tous les ensembles qu'on déduit de $E \times F \times G$, $(E \times F) \times G$, $E \times (F \times G)$ par permutation des trois lettres E, F, G.

On a des définitions et propriétés analogues pour le produit de plus de trois ensembles.

13. Lorsqu'une fonction f, prenant ses valeurs dans un ensemble quelconque E′, est définie dans un produit de trois ensembles E, F, G, on dit aussi que c'est une fonction de *trois arguments*, dont chacun parcourt l'un des ensembles E, F, G ; la valeur de f pour l'élément (x, y, z) de $E \times F \times G$ se note $f(x, y, z)$.

Soit a un élément quelconque de E ; $(y, z) \rightarrow f(a, y, z)$ est une application de $F \times G$ dans E′ ; on dit que c'est une *application* (ou *fonction*) *partielle engendrée par* f, et correspondant à la valeur a de x ; c'est aussi l'application composée de f et de l'application $(y, z) \rightarrow (a, y, z)$ de $F \times G$ dans $E \times F \times G$.

De même, si b est un élément de F,

$$z \rightarrow f(a, b, z)$$

est une application de G dans E′, qui prend encore le nom d'application partielle engendrée par f, et correspondant aux valeurs a, b de x, y.

Inversement, soit g une application de E dans E′ ;

$$(x, y, z) \rightarrow g(x)$$

est une application h de $E \times F \times G$ dans E', telle que toute application partielle de E dans E' engendrée par h pour des valeurs quelconques de y et z, soit identique à g ; on exprime souvent ce fait en disant qu'on peut toujours envisager une fonction d'un argument x comme fonction de tous les arguments qu'on a besoin de considérer à un moment donné, et parmi lesquels figure naturellement x.

14. Soient f, g, h trois applications, respectivement de E dans E', de F dans F', de G dans G' ; l'application

$$(x, y, z) \rightarrow (f(x), g(y), h(z))$$

de $E \times F \times G$ dans $E' \times F' \times G'$ se note (f, g, h) et s'appelle *extension de f, g, h aux ensembles produits*. Si f, g, h, sont *toutes trois* des applications « sur », ou « biunivoques dans », ou « biunivoques sur », leur extension (f, g, h) possède la même propriété.

On n'a envisagé, dans ce numéro et le précédent, que le cas de *trois* ensembles, uniquement pour fixer les idées ; des considérations analogues valent pour plusieurs ensembles individuellement et explicitement désignés, en nombre quelconque.

§ 4. — Réunion, intersection, produit d'une famille d'ensembles.

1. Dans ce paragraphe, nous considérons une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de *parties* d'un ensemble E, où l'ensemble d'indices I est quelconque ; on désignera par $\mathfrak{F}$ *l'ensemble des parties de* E *appartenant à la famille* (partie de $\mathfrak{P}(E)$).

Lorsque les éléments de I sont *individuellement et explicitement désignés* (et par suite en nombre fini), la considération de la famille (X_ι) revient à celle de plusieurs parties de E, distinctes ou non, en nombre égal à celui des éléments de I ; par exemple, trois parties quelconques X_1, X_2, X_3 de E forment une famille de parties de E, l'ensemble I étant ici formé des nombres 1, 2, 3.

2. Soit J une partie quelconque de I, et considérons l'ensemble des éléments x ayant la propriété :

« il existe $\iota \in J$ tel que $x \in X_\iota$ ».

Cet ensemble s'appelle *réunion de la famille d'ensembles* $(X_\iota)_{\iota \in J}$, et se note $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$.

On peut encore formuler cette définition de la manière suivante : à l'application $\iota \rightarrow X_\iota$ de I dans $\mathfrak{P}(E)$ correspond une partie C bien déterminée de $I \times E$ telle que $X_\iota = C(\iota)$ (§ 3, nº 7) ; on a $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota = C(J)$.

En particulier

$$\bigcup_{\iota \in \emptyset} X_\iota = C(\emptyset) = \emptyset. \tag{33}$$

Lorsque $J = I$, on écrit souvent $\bigcup_\iota X_\iota$, ou simplement $\bigcup X_\iota$, au lieu de $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

La réunion $\bigcup_\iota X_\iota$ *ne dépend que de l'ensemble* $\mathfrak{F}$; autrement dit, elle est la même pour deux familles correspondant à la même partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$; en particulier, elle est égale à la réunion de la famille définie par l'application canonique de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{P}(E)$, et on peut donc l'écrire $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$; on dit aussi que c'est la *réunion des ensembles appartenant à* $\mathfrak{F}$.

Lorsque I est un ensemble dont les éléments sont explicitement désignés, par exemple les nombres 1, 2, 3, on a $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, ce qui justifie le nom de réunion, donné en général à l'ensemble $\bigcup_\iota X_\iota$.

3. Quel que soit $J \subset I$, on a $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. En particulier, quel que soit $\varkappa \in I$, $X_\varkappa \subset \bigcup_\iota X_\iota$; inversement, si Y est une partie de E telle que $X_\iota \subset Y$ quel que soit $\iota \in I$, on a $\bigcup_\iota X_\iota \subset Y$. Plus généralement, si (Y_ι) est une seconde famille de parties de E correspondant au même ensemble d'indices I, et si $X_\iota \subset Y_\iota$ quel que soit ι, on a $\bigcup_\iota X_\iota \subset \bigcup_\iota Y_\iota$.

Soit F un second ensemble, et $X \rightarrow K(X)$ l'application de $\mathfrak{P}(E)$ dans $\mathfrak{P}(F)$ définie par une partie K de $E \times F$; on a

$$K\left(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in J} K(X_\iota). \tag{34}$$

Soit maintenant L un autre ensemble d'indices, et $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties de I ; on a

$$\bigcup_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcup_{\lambda \in L} \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \Big). \tag{35}$$

C'est la formule générale dite d'*associativité* de la réunion ; quand I et L sont des ensembles à éléments explicitement désignés, on retrouve des relations connues (voir § 1, nº 14) ; si L seul est dans ce cas, et est formé, par exemple, des nombres 1 et 2,

$$\bigcup_{\iota \in J_1 \cup J_2} X_\iota = \Big(\bigcup_{\iota \in J_1} X_\iota \Big) \cup \Big(\bigcup_{\iota \in J_2} X_\iota \Big). \tag{36}$$

Soient $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ deux familles quelconques de parties de E ; on a

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \Big) \cap \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \Big) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cap Y_\varkappa), \tag{37}$$

formule dite de *distributivité* ; elle comprend la seconde formule (10) comme cas particulier.

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties de E, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ une famille de parties de F, on a

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \Big) \times \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \Big) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa). \tag{38}$$

4. Une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties de E constitue un *recouvrement* d'une partie A de E, si $A \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$; en particulier, si (X_ι) est un recouvrement de E, on a $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = E$.

On appelle *partition* de E un recouvrement (X_ι) de E tel que :

a) $X_\iota \neq \emptyset$ quel que soit $\iota \in I$;

b) $X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset$ pour tout couple d'indices *différents* $(\iota, \varkappa)$ de I (on exprime encore cette dernière condition en disant que les X_ι sont *deux à deux sans élément commun*).

Ces conditions entraînent que $\iota \to X_\iota$ est une application *biunivoque* de I *sur* l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties de la partition. La donnée de $\mathfrak{F}$ détermine donc la famille, à une correspondance biunivoque près des ensembles d'indices ; en particulier, on peut parler indifféremment d'une partition comme d'un *ensemble* ou comme d'une *famille* de parties.

5. Soient E, F, G trois ensembles : on appelle *somme* de E, F, G un ensemble E′ tel qu'il existe une partition de E′ en trois ensembles E_1, F_1, G_1, respectivement en correspondance biunivoque avec E, F, G ; la somme n'est donc définie qu'à une correspondance biunivoque près et n'a rien de commun avec la réunion, sauf dans le cas particulier où E, F, G sont trois parties non vides, deux à deux sans élément commun, d'un même ensemble. Dans ce dernier cas, la réunion de E, F, G, peut aussi être considérée comme leur somme. Lorsque E, F, G sont quelconques, on pourra former leur somme en désignant par I l'ensemble formé des signes 1, 2, 3, et considérant le produit $I \times E \times F \times G$; si $a \in E$, $b \in F$, $c \in G$, les sous-ensembles E_1, F_1, G_1 de ce produit définis par

$$E_1 = \{1\} \times E \times \{b\} \times \{c\}, \quad F_1 = \{2\} \times \{a\} \times F \times \{c\}, \quad G_1 = \{3\} \times \{a\} \times \{b\} \times G$$

peuvent être mis respectivement en correspondance biunivoque avec E, F, G (§ 3, nº 3 *h*)), et sont deux à deux sans point commun, de sorte que leur réunion répond à la question.

Définition analogue pour des ensembles en nombre fini quelconque. On dit souvent qu'un ensemble somme de deux ensembles E et F est obtenu par *adjonction* à E de l'ensemble F.

Soit maintenant $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque de parties non vides d'un ensemble E ; on appellera *somme* de ces ensembles tout ensemble E′ tel qu'il existe une partition $(X'_\iota)_{\iota \in I}$ de E′ en ensembles X'_ι dont chacun soit en correspondance biunivoque avec l'ensemble X_ι de même indice. Ici encore, la réunion des X_ι sera aussi leur somme s'ils sont deux à deux sans élément commun ; dans le cas général, on pourra considérer le produit $I \times E$, et prendre $X'_\iota = \{\iota\} \times X_\iota$: la réunion des X'_ι répond à la question.

6. Avec les notations du nº 2, l'ensemble des éléments x de E ayant la propriété

« quel que soit $\iota \in J$, $x \in X_\iota$ »

s'appelle l'*intersection de la famille d'ensembles* $(X_\iota)_{\iota \in J}$, et se note

$\bigcap_{\iota \in J} X_\iota$; lorsque $J = I$, on écrit souvent $\bigcap_\iota X_\iota$, ou simplement $\bigcap X_\iota$, au lieu de $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

On a

$$\complement\Big(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\Big) = \bigcap_{\iota \in J}(\complement X_\iota). \tag{39}$$

En particulier, si $J = \emptyset$,

$$\bigcap_{\iota \in \emptyset} X_\iota = E. \tag{40}$$

L'intersection $\bigcap_\iota X_\iota$ ne dépend que de l'ensemble $\mathfrak{F}$, et peut s'écrire $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X$; lorsque I est, par exemple, formé des nombres 1, 2, 3, on a $\bigcap_\iota X_\iota = X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

7. La formule (39) permet de généraliser la *règle de dualité* : si une partie A de E se déduit d'autres parties X, Y, Z, et de familles (X_ι), $(Y_\varkappa)$, (Z_λ) de parties de E, par application, dans n'importe quel ordre, des *seules* opérations $\complement$, $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, on obtiendra le complémentaire $\complement A$ en remplaçant les parties X, Y, Z, X_ι, $Y_\varkappa$, Z_λ par leurs complémentaires, et les opérations $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$ par $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$ respectivement, l'ordre des opérations étant respecté ; bien entendu, on ne modifiera rien aux opérations d'intersection et de réunion appliquées à des parties des ensembles d'*indices*, qui peuvent se trouver souscrites aux signes $\bigcup$ et $\bigcap$.

On définit comme au § 1, n° 15, la *duale* d'une relation $A = B$ ou $A \subset B$, A et B étant des parties de E de la forme précédente.

8. Quel que soit $J \subset I$, on a $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \subset \bigcap_{\iota \in J} X_\iota$. En particulier, quel que soit $\varkappa \in I$, $\bigcap_\iota X_\iota \subset X_\varkappa$; inversement, si $Y \subset X_\iota$ quel que soit ι, $Y \subset \bigcap_\iota X_\iota$.

Plus généralement si (Y_ι) est une seconde famille de parties de E correspondant au même ensemble d'indices I, et si $X_\iota \subset Y_\iota$ quel que soit ι, on a $\bigcap_\iota X_\iota \subset \bigcap_\iota Y_\iota$.

La *réunion* des ensembles X_ι est l'*intersection* des ensembles Y tels que $X_\iota \subset Y$ quel que soit ι ; et l'*intersection* des X_ι est la *réunion* des Z tels que $X_\iota \supset Z$ quel que soit ι.

Les formules suivantes sont duales de (35) et (37) respectivement :

$$\bigcap_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcap_{\lambda \in L}\Big(\bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_\iota\Big) \quad \text{(associativité)} \tag{41}$$

$$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota\Big) \cup \Big(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\Big) = \bigcap_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cup Y_\varkappa) \quad \text{(distributivité)} \tag{42}$$

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de parties de E, $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ une famille de parties de F,

$$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota\Big) \times \Big(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\Big) = \bigcap_{(\iota,\varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa). \tag{43}$$

De plus, si (X_ι) et (Y_ι) sont respectivement une famille de parties de E et une famille de parties de F correspondant au *même* ensemble d'indices I,

$$\Big(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota\Big) \times \Big(\bigcap_{\iota \in I} Y_\iota\Big) = \bigcap_{\iota \in I} (X_\iota \times Y_\iota). \tag{44}$$

La formule (34) n'a pas de duale ; on a seulement en général

$$K\Big(\bigcap_{\iota \in J} X_\iota\Big) \subset \bigcap_{\iota \in J} K(X_\iota). \tag{45}$$

L'égalité n'a lieu pour toute famille (X_ι) que lorsque $X \to K(X)$ est l'*extension réciproque* d'une application ; autrement dit, si f est une *application de* F *dans* E, on a

$$\overset{-1}{f}\Big(\bigcap_{\iota \in J} X_\iota\Big) = \bigcap_{\iota \in J} \overset{-1}{f}(X_\iota), \tag{46}$$

formule qui généralise (14).

9. Soient E un ensemble quelconque, I un ensemble d'indices quelconque ; l'ensemble des *familles* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *d'éléments* de E, qui ont pour ensemble d'indices I, se note E^I, et l'opération qui fait passer de E à E^I s'appelle *exponentiation* ; E^I est donc en correspondance biunivoque avec l'ensemble des applications de I dans E (qu'on note souvent, pour cette raison, E^I, par un abus de langage), et aussi, en considérant les ensembles représentatifs de ces applications, avec une partie de $\mathfrak{P}(I \times E)$. Les ensembles E^J correspondant aux parties J de l'ensemble I, peuvent donc être considérés comme des parties d'un même ensemble, en correspondance biunivoque avec une partie de $\mathfrak{P}(I \times E)$.

Soit maintenant $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une *famille de parties* de E, correspondant au même ensemble d'indices I, et soit J une partie quelconque de I ; la propriété

$$\text{« quel que soit } \iota \in J,\ x_\iota \in X_\iota \text{ »}$$

de la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$, définit une partie de E^J, qu'on appelle *produit de la famille d'ensembles* $(X_\iota)_{\iota \in J}$, et qu'on note $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ (ou simplement $\prod_\iota X_\iota$ lorsque $J = I$). Les ensembles X_ι sont dits *ensembles facteurs*. On notera que $\prod_{\iota \in \emptyset} X_\iota$ est un ensemble à un seul élément (correspondant à la partie vide de $I \times E$). Si $X_\iota = E$ quel que soit $\iota \in J$, $\prod_{\iota \in J} X_\iota = E^J$.

Lorsque I est, par exemple, formé des trois nombres 1, 2, 3, $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $X_1 \times X_2 \times X_3$.

10. $R\{x, y\}$ étant une relation entre un élément générique x d'un ensemble E et un élément générique y d'un ensemble F, il y a *équivalence* entre les propositions suivantes :

$$\text{« quel que soit } x, \text{ il existe } y \text{ tel que } R\{x, y\} \text{ »}$$

et « il existe une application f de E dans F telle que, pour tout x, on ait $R\{x, f(x)\}$ ».

L'affirmation de cette équivalence est désignée sous le nom d'*axiome de choix* (ou *axiome de Zermelo*). Nous signalerons parfois que la démonstration de tel théorème en dépend ou non.

L'axiome de choix est une proposition *équivalente* à la proposition suivante :

$$\text{« Si, pour tout } \iota \in I,\ X_\iota \neq \emptyset, \text{ on a } \prod_{\iota \in I} X_\iota \neq \emptyset \text{ ».}$$

11. Dans ce numéro et le suivant, on fixe son attention sur un ensemble produit non vide $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, (A_ι) étant une famille quelconque de parties (non vides) de E.

Soit J une partie de I ; l'application

$$(x_\iota)_{\iota \in I} \to (x_\iota)_{\iota \in J}$$

de $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ *sur* $\prod_{\iota \in J} A_\iota$ s'appelle *projection* de $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ sur $\prod_{\iota \in J} A_\iota$, et se note pr_J ; en particulier, on note $pr_\varkappa$ et on appelle aussi *coordonnée d'indice* $\varkappa$ l'application $(x_\iota)_{\iota \in I} \to x_\varkappa$ de $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ sur $A_\varkappa$.

Si z est un élément de $\prod_\iota A_\iota$, on a donc $z = (pr_\iota(z))_{\iota \in I}$.

Soient J_1, J_2 deux ensembles formant une *partition* de I ;

$$z \to (pr_{J_1}(z),\ pr_{J_2}(z))$$

est une application *biunivoque* de $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ *sur* $\prod_{\iota \in J_1} A_\iota \times \prod_{\iota \in J_2} A_\iota$.

Plus généralement, si $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une *partition* quelconque de l'ensemble I, l'application $z \to (pr_{J_\lambda}(z))_{\lambda \in L}$ est une application biunivoque (dite *canonique*) de $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ sur le produit $\prod_{\lambda \in L}\left(\prod_{\iota \in J_\lambda} A_\iota\right)$; on exprime encore ce fait en disant que le produit d'une famille d'ensembles est *associatif*.

12. Les propositions suivantes généralisent celles du § 3, nº 3 ; (X_ι), (Y_ι) désignent des familles de parties de E telles que $X_\iota \subset A_\iota$ et $Y_\iota \subset A_\iota$ quel que soit $\iota \in I$; Z désigne une partie quelconque de $\prod_\iota A_\iota$.

a) Si $\prod_\iota X_\iota \neq \emptyset$, la relation « $\prod_\iota X_\iota \subset \prod_\iota Y_\iota$ » est *équivalente* à « quel que soit $\iota \in I$, $X_\iota \subset Y_\iota$ ».

b) On a $\overset{-1}{pr_\varkappa}(X_\varkappa) = \prod_\iota Y_\iota$, où $Y_\varkappa = X_\varkappa$, et $Y_\iota = A_\iota$ pour $\iota \neq \varkappa$. D'où

$$\prod_{\iota \in I} X_\iota = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{pr_\iota}(X_\iota). \tag{47}$$

c) Si $\prod_\iota X_\iota \neq \emptyset$,

$$pr_\varkappa\left(\prod_\iota X_\iota\right) = X_\varkappa. \tag{48}$$

d) Quel que soit Z, on a

$$Z \subset \prod_\iota pr_\iota(Z). \tag{49}$$

e) Soit (J_1, J_2) une partition de I en deux ensembles ; $(a_\iota)_{\iota \in J_1}$ une famille d'éléments de E, $(X_\iota)_{\iota \in J_2}$ une famille de parties de E, telles que $a_\iota \in A_\iota$ quel que soit $\iota \in J_1$, $X_\iota \subset A_\iota$ quel que soit $\iota \in J_2$; le produit $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$, où $Y_\iota = \{ a_\iota \}$ si $\iota \in J_1$, et $Y_\iota = X_\iota$ si $\iota \in J_2$, peut être mis en correspondance biunivoque avec $\prod_{\iota \in J_2} X_\iota$ par projection sur ce dernier ensemble.

13. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble F, et soit f une application d'un ensemble E dans le produit $\prod_{\iota \in I} A_\iota$. Si on pose $f_\iota(x) = pr_\iota(f(x))$, f_ι est une application de E dans A_ι, et f n'est autre que l'application $x \rightarrow (f_\iota(x))$. Inversement, si, pour chaque indice ι, f_ι est une application de E dans A_ι, $x \rightarrow (f_\iota(x))$ est une application de E dans $\prod_\iota A_\iota$, qu'on note (f_ι) (par un abus de langage, puisque cette notation désigne aussi la famille des applications f_ι).

§ 5. — Relations d'équivalence ; ensemble quotient.

1. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une *partition* d'un ensemble E ; la relation $R \{ x, y \}$ entre deux éléments génériques x, y de E

« il existe $\iota \in I$ tel que $x \in A_\iota$ et $y \in A_\iota$ »

satisfait aux conditions suivantes :

a) $R \{ x, x \}$ est une *identité* (*réflexivité* de la relation R).

b) $R \{ x, y \}$ et $R \{ y, x \}$ sont *équivalentes* (*symétrie* de la relation R).

c) La relation « $R \{ x, y \}$ et $R \{ y, z \}$ » *entraîne* $R \{ x, z \}$ (*transitivité* de la relation R).

Si C désigne la partie de $E \times E$ définie par la relation R, les conditions *a*), *b*), *c*) sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes : *a'*) $\Delta \subset C$; *b'*) $\overset{-1}{C} = C$; *c'*) $C \circ C \subset C$. De *a'*) et *c'*) résulte $C \circ C = C$.

2. Réciproquement, soit $R \{ x, y \}$ une relation *réflexive*, *symétrique* et *transitive*, et C la partie de $E \times E$ qu'elle définit. L'image $\mathfrak{F}$ de E par l'application $x \rightarrow C(x)$ de E dans $\mathfrak{P}(E)$, est une *partition* de E, et la relation « il existe une partie $X \in \mathfrak{F}$ telle que $x \in X$ et $y \in X$ » est *équivalente* à $R \{ x, y \}$.

Toute relation R satisfaisant aux conditions *a*), *b*), *c*) est dite *relation d'équivalence* dans E ; la partition $\mathfrak{F}$ qu'elle définit, considérée comme sous-ensemble de $\mathfrak{P}(E)$, est appelée *ensemble quotient de* E *par la relation* R, et se note E/R ; ses éléments sont appelés *classes d'équivalence suivant* R. L'application $x \rightarrow C(x)$ de E *sur* E/R qui, à tout élément x de E, fait correspondre la classe d'équivalence à laquelle appartient x, est dite *application canonique* de E sur E/R.

La relation d'*égalité* $x = y$ est une relation d'équivalence ; l'application canonique de E sur l'ensemble quotient correspondant n'est autre que $x \rightarrow \{ x \}$; elle est *biunivoque*.

Lorsque R est une relation d'équivalence, la notation

« $x \equiv y$ (mod. R) »

est parfois employée comme synonyme de $R \{ x, y \}$. Elle se lit « *x équivalent à y modulo* R (ou *suivant* R) ».

3. Dans un ensemble produit $E \times F$, la relation « $c_1(z) = c_1(z')$ » est une relation d'équivalence R, et l'ensemble quotient $(E \times F)/R$ peut être mis en correspondance biunivoque avec E (ce qui est à l'origine de la dénomination d'*ensemble quotient*).

Plus généralement, soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F ; la relation « $f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence dans E ; si on la désigne par R, l'application $z \rightarrow \overset{-1}{f}(z)$ (où $\overset{-1}{f}(z)$ est considéré comme un élément de E/R), est une *application biunivoque* de $f(E)$ *sur* E/R.

On en déduit que f peut être considérée comme *composée* des trois applications suivantes, la composition ayant lieu dans l'ordre indiqué :

1° l'application *canonique* dans F de la partie $f(E)$ de cet ensemble ;

2° l'application *biunivoque* de E/R sur $f(E)$, dont l'application réciproque est définie ci-dessus ;

3° l'application *canonique* de E sur E/R.

Cette décomposition d'une application est dite *décomposition canonique*.

4. Toute relation d'équivalence R dans un ensemble E peut être définie à l'aide d'une application comme au n° précédent : car, si C est la partie de $E \times E$ définie par R, la relation « $C(x) = C(y)$ » est équivalente à $R \{ x, y \}$.

5. Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et A une partie de E ; la relation $R \{ x, y \}$ entre deux éléments génériques x, y *de* A, est une relation d'équivalence dans A ; on dit qu'elle est *induite* par R dans A, et on la note R_A. Soient f l'application canonique de E sur E/R, g celle de A sur A/R_A. En faisant correspondre l'un à l'autre un élément de E/R et un élément de A/R_A s'ils sont images, par f et g respectivement, d'un même élément de E, on définit une correspondance *biunivoque* entre l'image $f(A)$ de A par f et le quotient A/R_A. En désignant par φ l'application canonique de A dans E, cette correspondance est réalisée par l'application

$$z \to f(\varphi(\overset{-1}{g}(z)))$$

et son application réciproque, dites, elles aussi, *canoniques*.

6. On dit qu'une partie A de E est *saturée* pour la relation d'équivalence R, si, pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence de x suivant R est contenue dans A ; autrement dit, les ensembles saturés pour R sont les *réunions de classes d'équivalence suivant* R. Si f est l'application canonique de E sur E/R, on peut encore dire qu'un ensemble est saturé s'il est de la forme $\overset{-1}{f}(X)$, où X est une partie de E/R.

Soit A un ensemble *non saturé* ; l'intersection des ensembles saturés contenant A est l'ensemble $\overset{-1}{f}(f(A))$, qu'on peut aussi définir

comme la réunion des classes d'équivalence des éléments de A ; on dit qu'on passe de A à cet ensemble en *saturant* A (pour R).

7. Soit $P \{ x, y, z \}$ une relation où intervient un élément générique x de E. On dit que P est *compatible* (en x) *avec la relation d'équivalence* R, si la relation « $P \{ x, y, z \}$ et $x \equiv x'$ (mod. R) » *entraîne* $P \{ x', y, z \}$.

Soit f l'application canonique de E sur E/R et t un élément générique de E/R ; la relation « il existe $x \in \overset{-1}{f}(t)$ tel que $P \{ x, y, z \}$ » est alors équivalente à « quel que soit $x \in \overset{-1}{f}(t)$, $P \{ x, y, z \}$ » ; c'est une relation entre t, y, z, qu'on dit *déduite* de P par *passage au quotient* (pour x) ; en la désignant par $P' \{ t, y, z \}$, $P \{ x, y, z \}$ est équivalente à $P' \{ f(x), y, z \}$.

Définitions analogues pour une relation où interviennent des arguments en nombre quelconque, et pour le cas où cette relation est compatible avec R pour *plusieurs* de ses arguments. Par exemple, A étant une partie de E, dire que « $x \in A$ » est compatible (en x) avec R, équivaut à dire que A est saturé pour R ; φ étant une application de E dans un ensemble F, dire que la relation fonctionnelle « $y = \varphi(x)$ » est compatible (en x) avec R, c'est dire que la fonction φ reste constante sur chaque classe d'équivalence suivant R ; par passage au quotient, on en déduit alors une relation entre y et un élément générique t de E/R, relation qui est fonctionnelle en y et détermine donc une application φ' de E/R dans F, satisfaisant à l'identité

$$\varphi(x) = \varphi'(f(x)).$$

8. Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E, S une relation d'équivalence dans un ensemble F, et f une application de E dans F. On dit que f est *compatible avec* R *et* S, si la relation $x \equiv x'$ (mod. R) *entraîne* $f(x) \equiv f(x')$ (mod. S) ; si g est l'application canonique de F sur F/S, la fonction composée $g \circ f$ a la même valeur pour tous les éléments x d'une classe d'équivalence z suivant R ; si on désigne cette valeur par $h(z)$, h est une application de E/R dans F/S ; on dit qu'elle est *déduite* de f par *passage aux quotients*.

9. Soient R une relation d'équivalence dans E, S une relation d'équivalence dans E/R : si f est l'application canonique de E sur E/R, « $f(x) \equiv f(y)$ (mod. S) » est une relation d'équivalence

T dans E ; une classe d'équivalence suivant T est donc la réunion, dans E, des classes d'équivalence suivant R, équivalentes entre elles suivant S ; et « $x \equiv y$ (mod. R) » entraîne « $x \equiv y$ (mod. T) ». Si g et φ sont les applications canoniques de E/R sur $(E/R)/S$ et de E sur E/T, respectivement, on obtient une correspondance biunivoque (dite *canonique*) entre $(E/R)/S$ et E/T, en faisant correspondre l'un à l'autre un élément de $(E/R)/S$ et un élément de E/T s'ils sont images, par $g \circ f$ et par φ respectivement, d'un même élément de E.

Réciproquement, soient R et T deux relations d'équivalence dans E, telles que « $x \equiv y$ (mod. R) » entraîne « $x \equiv y$ (mod. T) ». Alors T est compatible (au sens du nº 7) avec R, à la fois en x et en y ; et, par passage au quotient E/R (pour x et y), on déduit de T une relation d'équivalence S dans E/R. f étant encore l'application canonique de E sur E/R, la relation « $f(x) \equiv f(y)$ (mod. S) » est équivalente à « $x \equiv y$ (mod. T) ». S est appelée relation *quotient* de T par R, et se note T/R. D'après ce qui précède, il existe une correspondance biunivoque (la correspondance canonique) entre $(E/R)/(T/R)$ et E/T.

10. Soient maintenant E, F deux ensembles quelconques (distincts ou non), $R\{x, y\}$ une relation d'équivalence dans E, $S\{z, t\}$ une relation d'équivalence dans F. La relation « $R\{x, y\}$ et $S\{z, t\}$ » entre les éléments (x, z) et (y, t) de l'ensemble produit $E \times F$, est une relation d'équivalence dans $E \times F$, qu'on appelle *produit de* R *par* S et qu'on désigne par la notation $R \times S$; toute classe d'équivalence suivant $R \times S$ est le produit d'une classe d'équivalence suivant R par une classe d'équivalence suivant S. Si u désigne un élément générique de E/R, et v un élément générique de F/S,

$$(u, v) \to u \times v$$

est une *application biunivoque* (dite *canonique*) de $(E/R) \times (F/S)$ *sur* $(E \times F)/(R \times S)$.

§ 6. — Ensembles ordonnés.

1. On dit qu'une relation $\omega\{x, y\}$ entre deux éléments génériques d'un ensemble E est une *relation d'ordre* dans E, si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

a) La relation « $\omega\{x, y\}$ et $\omega\{y, z\}$ » *entraîne* $\omega\{x, z\}$ (transitivité).

b) La relation « $\omega\{x, y\}$ et $\omega\{y, x\}$ » est *équivalente* à « $x = y$ ».

La condition *b*) entraîne la réflexivité de la relation ω.

Soit C la partie de $E \times E$ définie par la relation $\omega\{x, y\}$, en tant que propriété du couple (x, y) ; les conditions *a*) et *b*) sont respectivement équivalentes aux suivantes :

a') $C \circ C \subset C$; *b'*) $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$. Ces propriétés entraînent d'ailleurs $C \circ C = C$.

Lorsqu'on fixe son attention sur une relation d'ordre particulière dans un ensemble E, on dit que E est *ordonné* par cette relation, et que cette relation définit sur E une *structure d'ensemble ordonné* (cf. § 8) ou *structure d'ordre* (ou simplement un *ordre*).

Si $\omega\{x, y\}$ est une relation d'ordre dans E, il en est de même de $\omega\{y, x\}$; ces deux relations d'ordre sont dites *opposées*, ainsi que les structures d'ordre qu'elles définissent.

Soit $\omega\{x, y\}$ une relation d'ordre dans E, et A une partie quelconque de E ; la relation $\omega\{x, y\}$, entre deux éléments génériques x, y *de* A, est une relation d'ordre dans A ; l'ordre qu'elle définit sur A est dit *induit* par l'ordre défini par $\omega\{x, y\}$ sur E.

Si $\varpi\{x, y\}$ est une relation *réflexive* et *transitive* entre deux éléments génériques de E, la relation « $\varpi\{x, y\}$ et $\varpi\{y, x\}$ » est une *relation d'équivalence* R dans E, et $\varpi\{x, y\}$ est *compatible*, en x et en y, avec cette relation ; par passage (pour x et y) à l'ensemble quotient E/R, $\varpi\{x, y\}$ donne, dans cet ensemble, une *relation d'ordre* qui est dite *associée* à $\varpi\{x, y\}$.

2. La relation d'inclusion « $X \subset Y$ » est une relation d'ordre dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ d'un ensemble quelconque.

Si E et F sont deux ensembles, distincts ou non, la relation « g est un prolongement de f » est une relation d'ordre dans l'ensemble des applications d'une partie quelconque de E dans F.

L'ensemble N des entiers positifs (*) est ordonné par la relation « $x \leqslant y$ ».

(*) Conformément à l'esprit de ce fascicule, nous y supposons connue la théorie des entiers. Mais il ne faudrait pas croire que cette théorie soit nécessaire à l'édification de la théorie des ensembles ; en se reportant au Livre I, le lecteur verra au contraire qu'on peut, à partir des résultats de la théorie des ensembles, définir les entiers et en démontrer toutes les propriétés connues.

Dans notre terminologie, 0 appartient à N, et est donc considéré comme positif ; les entiers positifs et $\neq 0$ sont dits *strictement positifs*.

3. Par analogie avec ce dernier exemple, on convient souvent, lorsqu'un ensemble E est ordonné par une relation $\omega\{x, y\}$, de considérer les relations « $x \leqslant y$ » et « $y \geqslant x$ » (qu'on lit « x est *inférieur* à y » ou « y est *supérieur* à x ») comme *équivalentes* à $\omega\{x, y\}$. Dans ce cas, les relations « $x < y$ » et « $y > x$ » (qui se lisent « x est *strictement inférieur* à y » ou « y est *strictement supérieur* à x ») sont considérées comme équivalentes à « $x \leqslant y$ et $x \neq y$ ».

La relation « $x \leqslant y$ » est *équivalente* à « $x < y$ ou $x = y$ ». La relation « $x \leqslant y$ et $y < z$ » *entraîne* « $x < z$ »; de même, « $x < y$ et $y \leqslant z$ » *entraîne* « $x < z$ ».

4. Une partie X d'un ensemble E, ordonné par une relation « $x \leqslant y$ », est dite *totalement ordonnée* par cette relation si, quels que soient $x \in X$ et $y \in X$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (ou encore si on a, soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$, ces trois relations s'excluant mutuellement).

La partie vide d'un ensemble ordonné est toujours totalement ordonnée. L'ensemble E tout entier peut être lui-même totalement ordonné ; c'est le cas de l'ensemble **N** pour la relation $x \leqslant y$.

Toute partie d'un ensemble totalement ordonné est aussi totalement ordonnée par l'ordre induit.

Dans un ensemble *totalement ordonné* E, si a et b sont deux éléments tels que $a \leqslant b$, on appelle *intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b*, et on note $[a, b]$, la partie de E formée des éléments x tels que $a \leqslant x \leqslant b$; si $a < b$, on appelle intervalle *semi-ouvert à droite* (resp. *à gauche*) d'origine a et d'extrémité b, et on note $[a, b[$ (resp. $]a, b]$), l'ensemble des éléments x tels que $a \leqslant x < b$ (resp. $a < x \leqslant b$) ; enfin, si $a < b$, on appelle intervalle *ouvert* d'origine a et d'extrémité b, et on note $]a, b[$, l'ensemble des x tels que $a < x < b$.

L'ensemble des x tels que $x \leqslant a$ (resp. $x < a$) s'appelle intervalle *fermé* (resp. *ouvert*) *illimité à gauche* et d'extrémité a, et se note $]\leftarrow, a]$ (resp. $]\leftarrow, a[$) ; de même, l'ensemble des x tels que $x \geqslant a$ (resp. $x > a$) se nomme intervalle *fermé* (resp. *ouvert*) *illimité à droite* et d'origine a, et se note $[a, \rightarrow[$ (resp. $]a, \rightarrow[$). Enfin,

on considère E lui-même comme un intervalle *illimité dans les deux sens*, et on le note $]\leftarrow, \rightarrow[$.

5. Si X est une partie d'un ensemble ordonné E, il existe au plus un élément a de X tel que pour tout $x \in X$, on ait $a \leqslant x$; lorsqu'il existe un élément a ayant cette propriété, on dit que c'est *le plus petit élément de* X. De même, il existe au plus un élément $b \in X$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $x \leqslant b$; si un tel élément existe, on dit que c'est *le plus grand élément de* X.

Dans un ensemble *totalement ordonné* E, tout ensemble *fini* non vide possède un plus grand et un plus petit élément ; pour une partie de E composée, par exemple, de trois éléments x, y, z, on appelle encore ce plus grand (resp. plus petit) élément *maximum* (resp. *minimum*) de x, y, z, et on le désigne par la notation Max (x, y, z) (resp. Min (x, y, z)) ; de même, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille *finie* d'éléments de E, on désigne par Max $((x_i)_{i \in I})$ (resp. Min $((x_i)_{i \in I})$) le plus grand (resp. plus petit) élément de l'ensemble des éléments de cette famille.

Toute partie non vide de l'ensemble **N** des entiers positifs a un plus petit élément ; pour qu'une partie de **N** ait un plus grand élément, il faut et il suffit qu'elle soit finie.

Dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ d'un ensemble quelconque, ordonné par la relation d'inclusion, pour qu'une partie $\mathfrak{F}$ (ensemble de parties de E) possède un plus petit élément, il faut et il suffit que l'intersection des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$, dont cette intersection est alors le plus petit élément ; de même, pour que $\mathfrak{F}$ ait un plus grand élément, il faut et il suffit que la réunion des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartienne à $\mathfrak{F}$, dont cette réunion est alors le plus grand élément.

6. Soit X une partie d'un ensemble ordonné E ; tout élément $x \in X$, pour lequel il n'existe aucun élément $z \in X$ tel que $z < x$, est appelé élément *minimal* de X ; tout $y \in X$ pour lequel il n'existe aucun élément $z \in X$ tel que $z > y$, est appelé élément *maximal* de X. L'ensemble des éléments maximaux (ou l'ensemble des éléments minimaux) peut être vide ; il peut aussi être infini ; si X a un plus petit élément a, c'est le *seul* élément minimal de X ; de même, si X a un plus grand élément b, c'est le *seul* élément maximal de X.

7. Soit X une partie d'un ensemble ordonné E ; si un élément $x \in E$ est tel que, pour tout $z \in X$, on ait $z \leqslant x$, on dit que x *majore*

X, ou que x est un *majorant* de X ; si $y \in$ E est tel que, pour tout $z \in$ X, on ait $z \geqslant y$, on dit que y *minore* X, ou que y est un *minorant* de X.

L'ensemble des majorants (ou l'ensemble des minorants) d'une partie X, peut être vide. Une partie X dont l'ensemble des majorants (resp. minorants) n'est pas vide, est dite *majorée* (resp. *minorée*). Un ensemble à la fois majoré et minoré, est dit *borné*. Tout élément supérieur à un majorant de X est encore un majorant de X ; tout élément inférieur à un minorant de X est un minorant de X.

Si l'ensemble des majorants d'une partie X a un plus petit élément a, on dit que a est *la borne supérieure* de X ; de même, si l'ensemble des minorants de X a un plus grand élément b, on l'appelle *la borne inférieure* de X ; si ces bornes existent, elles sont uniques d'après leur définition. Si X a un plus grand élément, c'est sa borne supérieure ; s'il a un plus petit élément, c'est sa borne inférieure. Réciproquement, si la borne supérieure (resp. inférieure) de X existe et appartient à X, c'est le plus grand (resp. le plus petit) élément de cet ensemble.

8. Un ensemble ordonné E tel que toute partie *finie* non vide de E soit *majorée* (resp. *minorée*) est appelé ensemble *filtrant à droite* (resp. *filtrant à gauche*).

Un ensemble ordonné E tel que toute partie *finie* non vide de E possède une borne supérieure et une borne inférieure, est dit ensemble *réticulé*, ou *réseau ordonné* (ou simplement *réseau*).

L'ensemble des parties d'un ensemble quelconque, ordonné par inclusion, est un réseau ; tout ensemble totalement ordonné est un réseau.

9. Un ensemble ordonné E est dit *inductif* s'il vérifie la condition suivante : *toute partie totalement ordonnée de* E *possède une borne supérieure.*

L'ensemble $\mathfrak{P}$(E), ordonné par inclusion, est un ensemble inductif ; il en est de même de l'ensemble des applications d'une partie quelconque d'un ensemble E dans un ensemble F, quand on l'ordonne par la relation « g est un prolongement de f ».

Une partie quelconque d'un ensemble inductif n'est pas en général un ensemble inductif ; mais, si a est un élément quelconque d'un ensemble inductif E, la partie de E formée des éléments x tels que $x \geqslant a$ est encore un ensemble inductif.

10. On démontre le lemme fondamental suivant (la démonstration ne faisant d'ailleurs pas usage de l'axiome de choix) :

Soit E *un ensemble ordonné inductif, et f une application de* E *dans* E, *telle que, pour tout $x \in$* E, *on ait $f(x) \geqslant x$; il existe au moins un élément $x \in$* E *tel que $f(x) = x$.*

De ce lemme, et de l'axiome de choix, on déduit la proposition suivante, qui sera désignée sous le nom de *théorème de Zorn* :

Tout ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal.

11. Dans l'ensemble des parties $\mathfrak{P}$(E) d'un ensemble quelconque E, ordonné par inclusion, la borne supérieure d'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties de E est la *réunion* des ensembles de $\mathfrak{F}$. L'application du théorème de Zorn donne le résultat suivant :

Si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de parties d'un ensemble E, *tel que, pour tout sous-ensemble $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$, totalement ordonné par la relation d'inclusion, la réunion des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartienne à $\mathfrak{F}$, alors $\mathfrak{F}$ possède au moins un élément maximal* (c'est-à-dire ici une partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$, et qui n'est contenue dans aucune autre partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$).

On dit qu'un ensemble $\mathfrak{F}$ de parties d'un ensemble E est *de caractère fini* si la propriété « X $\in \mathfrak{F}$ » est *équivalente* à la propriété « toute partie *finie* de X appartient à $\mathfrak{F}$ ». Cette définition permet d'énoncer le théorème suivant :

Tout ensemble de parties de E *de caractère fini possède au moins un élément maximal.*

12. Une application f d'une partie A d'un ensemble ordonné E, dans un ensemble ordonné F, est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si la relation $x \leqslant y$ entre éléments génériques de A, entraîne $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$) ; toute fonction constante dans A est donc à la fois croissante et décroissante, et réciproquement.

L'application f est dite *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si la relation $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

Si E est *totalement ordonné*, toute application *strictement croissante* (ou *strictement décroissante*) d'une partie A de E dans un ensemble ordonné F, est *biunivoque*.

Si I est un ensemble d'indices *ordonné*, une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties d'un ensemble E est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si

$\iota \rightarrow X_\iota$ est une application croissante (resp. décroissante) de I dans $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion.

§ 7. — Puissances. Ensembles dénombrables.

1. Deux ensembles E, F sont dits *équipotents* s'ils peuvent être mis en correspondance biunivoque.

Deux ensembles équipotents à un même troisième sont équipotents.

Si E et F sont équipotents, $\mathfrak{P}(E)$ et $\mathfrak{P}(F)$ sont équipotents.

Si E et F, E′ et F′, E″ et F″ sont respectivement équipotents, $E \times E' \times E''$ et $F \times F' \times F''$ sont équipotents ; cette proposition s'étend à un produit d'un nombre quelconque d'ensembles.

2. Soient X et Y deux parties génériques d'un ensemble E ; la relation « X et Y sont équipotents » est une *relation d'équivalence* dans $\mathfrak{P}(E)$; la classe d'équivalence (suivant cette relation) à laquelle appartient X s'appelle la *puissance* de X, et l'ensemble de ces classes (ensemble quotient de $\mathfrak{P}(E)$ par la relation précédente) l'*ensemble des puissances* des parties de E.

Si E et F sont deux ensembles distincts, la relation « X et Y sont équipotents » entre une partie X de E et une partie Y de F, s'exprime encore en disant que la puissance de X et la puissance de Y sont *équivalentes* ; on définit ainsi une relation *biunivoque* entre une partie de l'ensemble des puissances des parties de E, et une partie de l'ensemble des puissances des parties de F.

3. Soient E, F deux ensembles quelconques, distincts ou non ; soit $\mathfrak{a}$ un élément de l'ensemble des puissances des parties de E, $\mathfrak{b}$ un élément de l'ensemble des puissances des parties de F ; on dit que $\mathfrak{a}$ est *inférieure* à $\mathfrak{b}$, ou que $\mathfrak{b}$ est *supérieure* à $\mathfrak{a}$, s'il existe une application biunivoque d'une partie $X \subset E$ de puissance $\mathfrak{a}$ *dans* une partie $Y \subset F$ de puissance $\mathfrak{b}$; on dit que $\mathfrak{a}$ est *strictement inférieure* à $\mathfrak{b}$, ou que $\mathfrak{b}$ est *strictement supérieure* à $\mathfrak{a}$, si en outre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas des puissances équivalentes.

Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont équivalentes, $\mathfrak{a}$ est à la fois supérieure et inférieure à $\mathfrak{b}$; réciproquement, on démontre (sans utiliser l'axiome de choix) que *si $\mathfrak{a}$ est à la fois supérieure et inférieure à $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont équivalentes.* Il en résulte en particulier que l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble E est *ordonné* par la relation « $\mathfrak{a}$ inférieure à $\mathfrak{b}$ » ; quand on parle de cet ensemble comme d'un ensemble ordonné, c'est toujours de l'ordre défini par cette relation qu'il est question.

En outre, en utilisant le théorème de Zorn (et par suite l'axiome de choix), on démontre que *l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble* E *est totalement ordonné*, et que *toute partie non vide de cet ensemble possède un plus petit élément.*

4. La puissance d'un ensemble E est *strictement inférieure* à celle de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$.

Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, la puissance de l'image $f(X)$ d'une partie quelconque X de E, est *inférieure* à la puissance de X.

5. Soit $(X_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E, telle que $\iota \neq \varkappa$ entraîne $X_\iota \cap X_\varkappa = \emptyset$; soit $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble F, correspondant au même ensemble d'indices I, et telle que la puissance de Y_ι soit *inférieure* à celle de X_ι, quel que soit $\iota \in I$; alors, la puissance de la réunion $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$ est *inférieure* à celle de $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$, quelle que soit la partie J de I.

Si en outre $\iota \neq \varkappa$ entraîne $Y_\iota \cap Y_\varkappa = \emptyset$, et si X_ι et Y_ι sont *équipotents* quel que soit ι, alors $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$ est *équipotent* à $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$.

En particulier, si F est identique à E, on voit que la puissance de la réunion d'un ensemble de parties de E *sans élément commun deux à deux*, ne dépend que des puissances de ces parties ; on dit que c'est la *somme* de ces puissances (fonction qui n'est donc définie pour une famille $(\mathfrak{a}_\iota)$ d'éléments de l'ensemble des puissances que lorsqu'on peut trouver une famille (X_ι) de parties de E deux à deux sans élément commun et telle que X_ι ait pour puissance $\mathfrak{a}_\iota$).

Si $(X_\iota)_{\iota \in I}$ et $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ sont des familles de parties de E et F respectivement, correspondant au même ensemble d'indices, et telles que X_ι et Y_ι soient *équipotents* quel que soit ι, les produits $\prod_\iota X_\iota$ et $\prod_\iota Y_\iota$ sont *équipotents.*

6. L'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers positifs peut être considéré comme l'ensemble des puissances des *parties finies* d'un ensemble *infini* ; la relation d'ordre « $x \leqslant y$ » dans $\mathbf{N}$ n'est autre que la relation ordonnant cet ensemble de puissances ; et la *somme*

de deux entiers positifs est une fonction identique à la somme de deux puissances telle qu'elle vient d'être définie.

7. On dit qu'un ensemble est *dénombrable* s'il est équipotent à une partie de l'ensemble **N** des entiers positifs. Tout ensemble *fini* est donc dénombrable ; si n est le nombre de ses éléments, il est équipotent à l'intervalle $[0, n-1]$ de l'ensemble **N**. Tout ensemble *infini dénombrable* est *équipotent* à **N** ; en particulier, toute partie infinie de **N** a même puissance que **N**.

Si E est un ensemble *infini*, il existe une *partition* de E formée d'ensembles *infinis dénombrables* ; en particulier, tout ensemble infini a une puissance *supérieure* à celle de **N**.

Si E est un ensemble *infini*, l'ensemble $E \times \mathbf{N}$ est *équipotent* à E. En particulier, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est un ensemble *infini dénombrable*.

8. On appelle *suite d'éléments* d'un ensemble E une famille d'éléments de E dont l'ensemble d'indices est l'ensemble **N** des entiers positifs ou une partie de **N** ; une suite dont l'ensemble des indices est **N** se note donc $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, ou plus simplement (x_n) quand aucune confusion n'est à craindre ; lorsque n désigne un entier générique, on dit que x_n est le *terme général* de la suite, ou encore *terme de rang n* (cette dernière dénomination s'employant aussi quand on remplace n par un entier explicité). L'ensemble des éléments d'une suite est dénombrable.

Une suite est dite *infinie* ou *finie* suivant que l'ensemble des indices est une partie infinie ou finie de **N**. L'ensemble des éléments d'une suite finie est fini.

Toute sous-famille d'une suite est une suite, qu'on dit *extraite* de la suite donnée ; toute suite extraite d'une suite finie est une suite finie.

On appelle *suite double* (ou suite *à deux indices*) une famille d'éléments dont l'ensemble d'indices est $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, ou une partie de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; une suite double dont l'ensemble d'indices est $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ se note $(x_{m,n})$, ou plus simplement (x_{mn}) si cela ne prête pas à confusion. On définit de même des suites à plus de deux indices.

On dit que deux suites (x_n), (y_n) *ne diffèrent que par l'ordre des termes* s'il existe une permutation f de l'ensemble des indices telle que $y_n = x_{f(n)}$ quel que soit n.

A une famille d'éléments $(x_\iota)_{\iota \in I}$ dont l'ensemble d'indices I est infini dénombrable, on peut associer une suite infinie de la manière suivante : il existe une application biunivoque $n \to f(n)$ de **N** sur I ; en appelant y_n la valeur pour n de l'application composée $n \to x_{f(n)}$ de **N** dans E, on dit que la suite (y_n) s'obtient en *rangeant dans un certain ordre* la famille (x_ι). Les suites correspondant ainsi à deux applications biunivoques distinctes de **N** sur I ne diffèrent que par l'ordre des termes.

En opérant de même lorsque I est un ensemble *fini*, on obtient une *suite finie* associée à la famille (x_ι).

9. La réunion, l'intersection ou le produit d'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties d'un ensemble E, sont dits *dénombrables* si I est un ensemble dénombrable, *finis* si I est fini.

Si I est *dénombrable*, et si la puissance de X_ι est *inférieure* à une puissance infinie donnée $\mathfrak{a}$, quel que soit ι, la puissance de la réunion $\bigcup_\iota X_\iota$ est *inférieure* à $\mathfrak{a}$; si en outre un des X_ι au moins est de puissance $\mathfrak{a}$, $\bigcup_\iota X_\iota$ est aussi de puissance $\mathfrak{a}$. En particulier, toute réunion dénombrable d'ensembles de puissance $\mathfrak{a}$ est de puissance $\mathfrak{a}$; toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

§ 8. — Echelles d'ensembles et structures.

1. Etant donnés, par exemple, trois ensembles *distincts* E, F, G, on peut en former d'autres en prenant leurs ensembles des parties, ou en faisant le produit d'un de ces ensembles par lui-même, ou enfin en faisant le produit de deux de ces ensembles, pris dans un certain ordre. On obtient ainsi *douze* nouveaux ensembles ; si on les joint aux trois ensembles E, F, G, on peut recommencer sur ces quinze ensembles les mêmes opérations, en écartant celles qui donnent des ensembles déjà obtenus ; et ainsi de suite, autant de fois qu'on le désire. D'une façon générale, on dit d'un quelconque des ensembles obtenu par ce procédé (suivant un schéma explicite) qu'il fait partie de *l'échelle des ensembles ayant pour base* E, F, G.

Soient, par exemple, M, N, P trois des ensembles de cette échelle, et $R \{ x, y, z \}$ une relation entre des éléments génériques appartenant respectivement à chacun de ces ensembles ; R définit une partie de $M \times N \times P$, donc (par une correspondance canonique) une partie de $(M \times N) \times P$, et enfin un élément de $\mathfrak{P}((M \times N) \times P)$; ainsi la donnée d'une *relation* entre éléments de plusieurs ensembles d'une même échelle, revient à celle d'un *élément* d'un autre ensemble de cette échelle. De même, la donnée d'une application de M dans N, par exemple, revient (en considérant l'ensemble représentatif de cette application) à celle d'une partie de $M \times N$, c'est-à-dire à celle d'un élément de l'ensemble $\mathfrak{P}(M \times N)$, qui est encore dans l'échelle. Enfin, la donnée de deux éléments (par exemple) de M, revient à celle d'un seul élément de l'ensemble produit $M \times M$.

Ainsi, la donnée d'un certain nombre d'éléments d'ensembles d'une échelle, de relations entre des éléments génériques de ces ensembles, d'applications de parties de certains de ces ensembles dans d'autres, revient en dernière analyse à la donnée d'*un seul élément* d'un des ensembles de l'échelle.

2. On a dit ci-dessus (§ 6) que la donnée d'un élément C de l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times E)$ définit une *structure d'ensemble ordonné* sur E si on a les propriétés :

$$a) \quad C \circ C \subset C\,; \qquad b) \quad C \cap \overset{-1}{C} = \Delta.$$

D'une façon générale, considérons un ensemble M d'une échelle, dont la base est formée, par exemple, de trois ensembles E, F, G ; donnons-nous un certain nombre de propriétés explicitement énoncées d'un élément générique de M, et soit T l'intersection des parties de M définies par ces propriétés ; on dit qu'un élément σ de T définit sur E, F, G une *structure* de l'*espèce* T ; les structures d'espèce T sont donc caractérisées par le schéma de formation de M à partir de E, F, G, et par les propriétés définissant T, qu'on appelle les *axiomes* de ces structures ; on donne un nom spécifique à toutes les structures de même espèce. Toute proposition qui est une conséquence de la proposition « $\sigma \in T$ » (c'est-à-dire des axiomes définissant T) est dite appartenir à la *théorie* des structures d'espèce T ; par exemple, les propositions énoncées au § 6 appartiennent à la théorie des structures d'ensemble ordonné.

On remarquera que, dans ce dernier exemple, les axiomes peuvent s'énoncer pour un ensemble de base E absolument quelconque ; aussi donne-t-on le même nom aux structures satisfaisant à ces axiomes, indépendamment de l'ensemble sur lequel elles sont définies ; et les propositions déduites de ces axiomes sont valables

dans un ensemble quelconque, puisque pour les formuler, il n'est pas besoin de faire intervenir les particularités (par exemple la puissance) de l'ensemble E. Ces remarques s'appliquent chaque fois qu'on énonce des axiomes de cette nature.

Le plus souvent, quand on utilise une échelle ayant une base composée de plusieurs ensembles E, F, G, l'un de ces ensembles, E par exemple, joue dans les structures qu'on considère un rôle prépondérant ; aussi dit-on, par abus de langage, que ces structures sont définies sur l'ensemble E, les ensembles F et G étant considérés comme ensembles auxiliaires.

Enfin, pour faciliter le langage, on donne souvent un nom particulier à un ensemble qu'on a muni d'une structure d'une espèce déterminée ; c'est ainsi qu'on parle d'*ensemble ordonné*, et qu'on définit dans la suite de ce Traité, les notions de *groupe*, *anneau*, *corps*, *espace topologique*, *espace uniforme*, etc..., mots qui désignent tous des ensembles munis de certaines structures.

3. Considérons des structures d'une même espèce T, où T est une partie d'un ensemble M d'une échelle d'ensembles ; si on ajoute de nouveaux « axiomes » à ceux qui définissent T, le système d'axiomes obtenu définit une partie U de M, contenue dans T ; on dit que les structures d'espèce U sont *plus riches* que les structures d'espèce T. Par exemple, les structures d'ensemble *totalement ordonné* sont plus riches que les structures d'ensemble ordonné, l'élément C de $\mathfrak{P}(E \times E)$ qui définit une telle structure satisfaisant à l'axiome supplémentaire $C \cup \overset{-1}{C} = E \times E$.

4. Soient M, M′ deux ensembles d'une même échelle, de base E, F, G par exemple ; soient T une partie de M, T′ une partie de M′, définies respectivement par certains axiomes explicitement énoncés. Chaque fois qu'on aura défini explicitement une *application biunivoque de* T *sur* T′, on considèrera que deux éléments $\sigma \in T$, $\sigma' \in T'$, qui se correspondent par cette application, définissent la *même* structure sur E, F, G ; et on dit que les systèmes d'axiomes qui définissent T et T′ sont *équivalents*.

Un exemple de cette circonstance est fourni par les structures *topologiques*, qui peuvent être définies par plusieurs systèmes d'axiomes équivalents, dont deux sont particulièrement utiles (voir Topologie générale, ch. I, § 1).

5. Soient E, F, G trois ensembles, et supposons données des

applications *biunivoques* de E, F, G respectivement *sur* trois autres ensembles E′, F′, G′. Comme on sait définir les *extensions* d'applications biunivoques aux ensembles de parties (§ 2, n° 9) et aux ensembles produits (§ 3, n° 14), on définira de proche en proche l'*extension* des applications biunivoques données à deux ensembles M, M′ construits respectivement suivant le *même* schéma, dans l'échelle d'ensembles ayant pour base E, F, G, et dans celle ayant pour base E′, F′, G′. Soit f l'application biunivoque de M sur M′ ainsi obtenue. Si σ est une structure sur E, F, G, élément d'une partie T de M, on dira que $f(\sigma)$ est la structure obtenue en *transportant* la structure σ sur E′, F′, G′, au moyen des applications biunivoques de E sur E′, de F sur F′ et de G sur G′. Toute proposition relative à la structure σ sur E, F, G donne de même (en utilisant des extensions convenables) une proposition relative à la structure $f(\sigma)$ sur E′, F′, G′.

Inversement, étant données une structure σ sur E, F, G, et une structure σ' sur E′, F′, G′, on dira qu'elles sont *isomorphes* (ou qu'il y a *isomorphie* entre ces structures) si σ' peut être obtenue en *transportant* σ par des applications biunivoques de E sur E′, de F sur F′ et de G sur G′ respectivement ; ces applications sont alors dites constituer un *isomorphisme* de σ sur σ'.

Lorsqu'il s'agit de structures sur un seul ensemble E, l'application biunivoque de E sur E′ qui transporte σ sur σ' est encore appelée un *isomorphisme de l'ensemble* E, *muni de la structure* σ, *sur l'ensemble* E′, *muni de la structure* σ'.

C'est aussi à cette application qu'on donne le nom d'isomorphisme lorsque F et G sont deux ensembles auxiliaires, et que les applications biunivoques concernant ces deux ensembles sont les applications *identiques* de F et G sur eux-mêmes ; on dit alors que cet isomorphisme conserve les ensembles auxiliaires.

Un isomorphisme d'un ensemble E, muni d'une structure σ, sur lui-même, prend le nom d'*automorphisme*.

Il est souvent commode, lorsqu'il existe un isomorphisme f d'un ensemble E, muni d'une structure σ, sur un ensemble E′, muni d'une structure σ', *d'identifier* E et E′, c'est-à-dire de donner le *même nom* à un élément d'un ensemble M de l'échelle de base E, et à l'élément qui en est l'image par l'extension convenable de f à l'ensemble M.

6. Lorsqu'on énonce un système d'axiomes définissant une partie T d'un ensemble M d'une échelle d'ensembles, il convient, avant de parler des structures qui satisfont à ces axiomes, de s'assurer que l'ensemble T *n'est pas nécessairement vide* ; s'il l'était, on dirait que les axiomes sont *contradictoires*.

7. Il peut arriver qu'un système d'axiomes définissant une structure sur un ensemble puisse s'énoncer pour un ensemble quelconque, mais que si on considère deux structures satisfaisant à ces axiomes, et définies sur deux ensembles distincts E, F, il résulte des axiomes que ces structures (si elles existent) sont nécessairement *isomorphes* (ce qui entraîne en particulier que E et F sont *équipotents*). On dit dans ce cas que la théorie des structures satisfaisant à ces axiomes est *univalente* ; lorsqu'on n'est pas dans ce cas, on dit qu'elle est *multivalente.*

La théorie des nombres entiers, celle des nombres réels, la géométrie euclidienne classique, sont des théories univalentes ; la théorie des ensembles ordonnés, la théorie des groupes, la topologie, sont des théories multivalentes. L'étude des théories multivalentes est le trait le plus frappant qui distingue la mathématique moderne de la mathématique classique.

INDEX DES NOTATIONS

	§	n°
R $\{ x, y, z \}$	1	2
$=,\ \neq$	1	6
$\in,\ \notin$	1	7
$\complement$ A	1	7
$\emptyset$	1	8
$\{ a \}$	1	9
$\mathfrak{P}$(E)	1	10
$\subset, \supset, \not\subset, \not\supset$	1	12
$\cup, \cap$	1	13
$\{ x, y, z \}$	1	13
X_A (X partie)	1	16
$\mathfrak{E}_A$ ($\mathfrak{E}$ ensemble de parties)	1	16
$f(x)$, f_x, $x \rightarrow f(x)$ (f application, x élément)	2	2
f(X) (X partie)	2	4
$\overset{-1}{f}$ (f application)	2	6
$g \circ f$, $h \circ g \circ f$ (f, g, h applications)	2	11
f_A (f application)	2	13
$(x_\iota)_{\iota \in I}$, (x_ι)	2	14
(x, y)	3	1
E $\times$ F (E, F ensembles)	3	1
c_1, c_2, pr_1, pr_2	3	1
Δ	3	4
$\overset{-1}{Z}$ (Z partie d'un produit)	3	4
K(X) (K partie de E $\times$ F, X partie de E)	3	6
K(x) (K partie de E $\times$ F, x élément de E)	3	9
B $\circ$ A, BA, C $\circ$ B $\circ$ A, CBA (A partie de E $\times$ F, B partie de F $\times$ G, C partie de G $\times$ H)	3	10
(x, y, z)	3	12
E $\times$ F $\times$ G	3	12
$pr_{1,2}$	3	12
(f, g, h) (f, g, h applications).	3	14
$\bigcup\limits_{\iota \in I} X_\iota$, $\bigcup\limits_{\iota} X_\iota$, $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{F}} X$	4	2
$\bigcap\limits_{\iota \in I} X_\iota$, $\bigcap\limits_{\iota} X_\iota$, $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{F}} X$	4	6
$\prod\limits_{\iota \in I} X_\iota$, $\prod\limits_{\iota} X_\iota$	4	9
E^I(E, I, ensembles)	4	9
pr_J, pr_K	4	11
(f_ι) (f_ι applications)	4	13
E/R (E ensemble, R relation d'équivalence)	5	2
R_A (R relation d'équivalence, A partie)	5	5
T/R (T, R relations d'équivalence)	5	9
R $\times$ S (R, S relations d'équivalence)	5	10
N	6	2
$\leqslant, \geqslant, <, >$	6	3
$[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$		
$]a, b[$, $]\leftarrow, a]$, $]\leftarrow, a[$		
$[a, \rightarrow[$, $]a, \rightarrow[$, $]\leftarrow, \rightarrow[$	6	4
(x_n), $(x_{m,n})$ (m, n entiers positifs)	7	8

INDEX TERMINOLOGIQUE

	§	n°
Appartenance (relation d')	1	10
Application d'un ensemble *dans* un autre	2	1
— d'un ensemble *sur* un autre	2	4
— *biunivoque* d'un ensemble *dans* un autre	2	8
— *biunivoque* d'un ensemble *sur* un autre	2	9
— *compatible* avec une relation d'équivalence	5	8
— *composée* de plusieurs applications	2	11
— *constante*	2	3
— *croissante*	6	12
— *décroissante*	6	12
— *identique*	2	3
— *partielle*	3	13
— *réciproque* d'une application biunivoque	2	9
— *réduite*	2	13
— *strictement croissante*	6	12
— *strictement décroissante*	6	12
Applications canoniques :		
— d'une partie de E dans E	2	3
— de E $\times$ F sur F $\times$ E	3	4
— de E $\times$ F $\times$ G sur (E $\times$ F) $\times$ G, etc	3	12
— de $\prod\limits_{\iota \in I} X_\iota$ sur $\prod\limits_{\lambda \in L} \left(\prod\limits_{\iota \in J_\lambda} X_\iota \right)$	4	11
— de E sur E/R	5	2
— de A/R_A sur f(A)	5	5
— de E/T sur (E/R)/(T/R)	5	9
— de (E/R) $\times$ (F/S) sur (E $\times$ F)/(R $\times$ S)	5	10
Argument	1	2
Associativité :		
— de la réunion et de l'intersection de deux ensembles	1	14
— de la réunion d'une famille d'ensembles	4	3
— de l'intersection d'une famille d'ensembles	4	8
— du produit d'une famille d'ensembles	4	11
Automorphisme	8	6
Axiomes des structures de même espèce	8	2
— *équivalents*	8	4
Axiome de choix (ou *axiome de Zermelo*)	4	10
Base d'une échelle d'ensembles	8	1
Biunivoque (application) : voir *Application*.		
Biunivoque (relation)	2	9
Biunivoque (correspondance)	2	9
Borne inférieure (*borne supérieure*) d'un ensemble ordonné	6	7
Borné (ensemble)	6	7
Canonique (application) : voir *Applications canoniques*.		
Canonique (décomposition)	5	3
Classes d'équivalence	5	2
Compatible (*relation*) avec une relation d'équivalence	5	7
— (*fonction*) avec une relation d'équivalence	5	8

Complémentaire d'un ensemble . . . 1 7
Composé (ensemble) . . . 3 10
Composée (application) . . . 2 11
Constante (fonction ou application) . . . 2 3
Coordonnées :
— dans un produit de deux ensembles . . . 3 1
— dans un produit de plusieurs ensembles . . . 3 12
— dans un produit d'une famille d'ensembles . . . 4 11
Correspondance biunivoque . . . 2 9
Coupe d'une partie d'un produit . . . 3 9
Croissante (fonction ou application) . . . 6 12
Décomposition canonique . . . 5 3
Décroissante (fonction ou application) . . . 6 8
Dénombrable (ensemble) . . . 7 7
— (réunion, intersection, produit) . . . 7 9
Diagonale du produit E × E . . . 3 4
Distributivité :
— de la réunion et de l'intersection de deux ensembles . . . 1 14
— de la réunion et de l'intersection d'une famille d'ensembles . . . 4 3
et 4 8
Double (suite) . . . 7 8
Duales (formules) . . . 1 15
et 4 7
Dualité (règle de) . . . 1 15
et 4 7
Echelle d'ensembles . . . 8 1
Egalité (relation d') . . . 1 6
Elément générique d'un ensemble . . . 1 2
— *majorant* (*minorant*) . . . 6 7
— *maximal* (*minimal*) . . . 6 6
Elément (*plus petit* ou *plus grand*) . . . 6 5
Ensemble borné . . . 6 7
— de *caractère fini* . . . 6 11
— *composé* de plusieurs ensembles . . . 3 10
— *dénombrable* . . . 7 7
— *équipotent* à un autre ensemble . . . 7 1
— *majoré* (*minoré*) . . . 6 7
— *ordonné* . . . 6 1
— *ordonné inductif* . . . 6 9
— des *parties* . . . 1 10
— *produit* de deux ensembles . . . 3 1
— *produit* de plusieurs ensembles . . . 3 12
— *produit* d'une famille d'ensembles . . . 4 9
— *quotient* . . . 5 2
— *représentatif* d'une application . . . 3 5
— *réticulé* . . . 6 8
— *totalement ordonné* . . . 6 4
— *filtrant à droite* (*à gauche*) . . . 6 8
— *vide* . . . 1 8
Entraîner . . . 1 3
Equipotents (ensembles) . . . 7 1
Equivalence (*relation* d') . . . 5 2
— (*classes* d') . . . 5 2
Equivalentes (*relations*) . . . 1 3
— (*puissances*) . . . 7 2
Equivalents (*axiomes*) . . . 8 4
Espèce de structures . . . 8 2
Exponentiation . . . 4 9
Extension d'une application aux ensembles de parties . . . 2 4
— *réciproque* d'une application . . . 2 6
Extension de plusieurs applications aux ensembles produits . . . 3 14
Extraite (suite) . . . 7 8
Facteurs (ensembles) . . . 3 1
et 4 9
Famille d'éléments d'un ensemble . . . 2 14
Filtrant (*ensemble*) . . . 6 8
Fini (ensemble de caractère) . . . 6 11
Finie (suite) . . . 7 8
Fonction d'un argument (*composée, compatible, constante, croissante, décroissante, partielle, strictement croissante, strictement décroissante*) : voir *Application.*
Fonction de plusieurs arguments . . . 3 13
Fonctionnelle (relation) . . . 2 1
Générique (élément) . . . 1 2
Identique (application) . . . 2 3
Identité . . . 1 3
Image d'un élément ou d'un ensemble par une application . . . 2 4
— *réciproque* d'un ensemble par une application . . . 2 6
Inclusion (relation d') . . . 1 12
Indices (ensemble d') . . . 2 2
Inductif (ensemble ordonné) . . . 6 9
Induite (*relation d'équivalence*) . . . 5 5
— (*structure d'ordre*) . . . 6 1
Inférieur (élément) . . . 6 3
Inférieure (puissance) . . . 7 3
— (*borne*) . . . 6 7
Intersection de plusieurs ensembles . . . 1 13
— d'une famille d'ensembles . . . 4 6
— dénombrable . . . 7 9
Intervalles . . . 6 4
Invariant (élément) . . . 2 3
Involutive (permutation) . . . 2 9
Isomorphes (structures) . . . 8 6
Isomorphie (structures en) . . . 8 6
Isomorphisme (d'une structure sur une autre) . . . 8 6
Majorant . . . 6 7
Majoré (ensemble) . . . 6 7
Maximal (élément) . . . 6 6
Maximum . . . 6 5
Minimal (élément) . . . 6 6
Minimum . . . 6 5
Minorant . . . 6 7
Minoré (ensemble) . . . 6 7
Multivalente (théorie) . . . 8 7
Opposées (relations d'ordre) . . . 6 1
Ordonné (ensemble) . . . 6 1
Ordre (relation d') . . . 6 1
Ordre (structure d') . . . 6 1
Paramètres (ensemble des) . . . 2 14
Paramétrique (représentation) . . . 2 14
Partie d'un ensemble . . . 1 7
— *pleine* . . . 1 8
— *symétrique* de E × E . . . 3 4
— *vide* . . . 1 8
Partielle (application ou fonction) . . . 3 13
Parties (ensemble des) . . . 1 10
Partition d'un ensemble . . . 4 4
Passage aux ensembles quotients . . . 5 7
et 5 8
Permutation . . . 2 9
— *involutive* . . . 2 9
Pleine (partie) . . . 1 8
Plus petit (*plus grand*) élément d'un ensemble . . . 6 5
Plus riche (structure) . . . 8 3
Produit (voir *ensemble produit*).
— de deux relations d'équivalence . . . 5 10
— dénombrable . . . 7 9
Projections . . . 3 1
3 12
et 4 11
Prolongement (d'une application ou fonction) . . . 2 13
Puissance d'un ensemble . . . 7 2
— inférieure (supérieure, strictement inférieure, strictement supérieure) à une autre . . . 7 3
Puissances équivalentes . . . 7 2
— (*somme* de) . . . 7 5
Quotient (ensemble) . . . 5 2
— (relation d'équivalence) . . . 5 9
Réciproque (*image*) . . . 2 6
— (*extension*) . . . 2 6
— (*applications*) . . . 2 9
Recouvrement d'un ensemble . . . 4 4
Réflexive (relation) . . . 5 1
Règle de dualité . . . 1 15
et 4 7
Relation d'appartenance . . . 1 10

Relation biunivoque	2	9
— *compatible* avec une relation d'équivalence	5	7
— *d'égalité*	1	6
— *d'équivalence*	5	2
— *d'équivalence induite*	5	5
— *fonctionnelle*	2	1
— *d'inclusion*	1	12
— *d'ordre*	6	1
— *produit* de deux relation d'équivalence	5	10
— *quotient* de deux relations d'équivalence	5	9
— *réflexive*	5	1
— *symétrique*	3	4
— *transitive*	5	1
Relations équivalentes	1	3
— *d'ordre opposées*	6	1
Représentatif (ensemble)	3	5
Représentation paramétrique	2	14
Réseau ordonné	6	8
Restriction d'une application	2	13
Réticulé (ensemble)	6	8
Réunion de plusieurs ensembles	1	13
— d'une famille d'ensembles	4	2
— dénombrable	7	9
Riche (structure plus)	8	3
Rencontrent (ensembles qui se)	1	13
Réduite (application)	2	13
Saturé (ensemble)	5	6
Somme d'ensembles	4	5
— *de puissances*	7	5
Sous-ensemble	1	7
Sous-famille	2	14
Strictement croissante (application)	6	12
— décroissante (application)	6	12
— inférieur (élément)	6	3
Strictement inférieure (puissance)	7	3
— supérieur (élément)	6	3
— supérieure (puissance)	7	3
Structure sur un ensemble	8	2
— plus riche qu'une autre	8	3
Structures isomorphes	8	6
Structure d'ordre	6	1
— — *induite*	6	1
Suite d'éléments	7	8
— *double*	7	8
— *extraite*	7	8
— *finie*	7	8
Suites ne différant que par l'ordre des termes	7	8
Supérieur (élément)	6	3
Supérieure (*borne*)	6	7
— (*puissance*)	7	3
Symétrie canonique	3	4
Symétrique (partie ou relation)	3	4
Terme général d'une suite	7	8
Théorème de Zorn	6	10
Théorie des structures d'espèce donnée	8	2
— *multivalente*	8	7
— *univalente*	8	7
Totalement ordonné (ensemble)	6	4
Trace d'une partie	1	16
— d'un ensemble de parties	1	16
Transformation d'un ensemble en un autre	2	4
Transformé (élément)	2	4
— (partie)	2	4
Transitive (relation)	5	1
Transport d'une structure	8	5
Univalente (théorie)	8	7
Valeur d'une variable	1	2
— d'une fonction	2	1
Variable	1	2
Vide (partie)	1	8
Zermelo (axiome de)	4	9
Zorn (théorème de)	6	10

RECTIFICATIONS AU FASCICULE I

P. 8, ligne 2 du haut, au lieu de : dans laquelle figure x, lire : dans laquelle figure éventuellement x.

P. 12, ligne 14 du haut, au lieu de : dans un autre ensemble , lire : dans un ensemble.

P. 12, après la ligne 18 du haut, ajouter : Si f est une application de E dans lui-même, on appelle *itérées* de f les applications f_n (n entier $\geqslant 1$) de E dans lui-même définies par récurrence sur n au moyen des relations $f_1 = f$, $f_n = f_{n-1} \circ f$; on dit que f_n est la *n-ème itérée* de f. On a $f_m \circ f_n = f_{m+n}$.

P. 25, ligne 4 du bas, au lieu de : .. d'une application ; autrement dit, lire : d'une application d'une partie de F dans E ; par suite,..

P. 28, avant la ligne 5 du bas, ajouter :

On définit ainsi une application biunivoque (dite *canonique*) de l'ensemble $\left(\prod_{\iota \in I} A_\iota\right)^E$ sur l'ensemble $\prod_{\iota \in I}(A_\iota^E)$.

14. Soient E, F, G trois ensembles. Pour toute application f de $F \times G$ dans E, et pour tout $y \in G$, désignons par f_y l'application partielle (§ 3, nº 13) $x \to f(x, y)$ de F dans E ; $y \to f_y$ est une application de G dans E^F. Inversement, pour toute application g de G dans E^F, il existe une application f de $F \times G$ dans E et une seule telle que $f_y = g(y)$ pour tout $y \in G$. On définit ainsi une application biunivoque (dite *canonique*) de l'ensemble $E^{F \times G}$ sur l'ensemble $(E^F)^G$.

15. Soit $(A_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties non vides d'un ensemble E. Pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une application de A_ι dans un ensemble F, telle que, pour tout couple d'indices ι, $\varkappa$ tels que $A_\iota \cap A_\varkappa \neq \emptyset$, on ait $f_\iota(x) = f_\varkappa(x)$ pour tout $x \in A_\iota \cap A_\varkappa$. Dans ces conditions, si $A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, il existe une application et une seule f de A dans F telle que la *restriction* de f à chacun des A_ι soit égale à f_ι. En particulier, si $A_\iota \cap A_\varkappa = \emptyset$ pour tout couple d'indices distincts, on voit que les ensembles F^A et $\prod_{\iota \in I} F^{A_\iota}$ sont ainsi mis en correspondance biunivoque (dite *canonique*).

P. 33, après la ligne 18 du haut, ajouter : On dit que l'ordre considéré sur E est un *prolongement* de l'ordre qu'il induit sur A.

P. 35, ligne 1 du haut, au lieu de : un intervalle, lire : un intervalle *ouvert*.

P. 35, après la ligne 20 du haut, ajouter :
On dit qu'un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide admet un plus petit élément est un ensemble *bien ordonné*.

P. 37, lignes 9 et 10 du bas, au lieu de : et réciproquement, lire : la réciproque est vraie si A est un ensemble *filtrant*.

P. 39, remplacer les lignes 6 et 7 par : *d'un ensemble* E *est bien ordonné* (§ 6, n° 5).

P. 40, ligne 20 du haut, au lieu de : *terme de rang n*, lire : *terme d'indice n*.

P. 47, première colonne, avant la ligne 1 du haut, ajouter : *Adjonction* 4 5.

P. 47, première colonne, avant la ligne 6 du bas, ajouter :

— de $(\prod_{\iota\in I} A_\iota)^E$ sur $\prod_{\iota\in I}(A_\iota^E)$ 4 13

— de $E^{F\times G}$ sur $(E^F)^G$ 4 14

— de F^A sur $\prod_{\iota\in I} F^{A_\iota}$ lorsque $A = \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$
et $A_\iota \cap A_\varkappa = \emptyset$ pour $\iota \neq \varkappa$........... 4 15

P. 47, deuxième colonne, lignes 1 et 2 du bas, au lieu de : avec une relation d'équivalence, lire : avec deux relations d'équivalence.

P. 49, deuxième colonne, ligne 7 du bas, au lieu de : *applications*, lire : *application*.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Introduction 1

§ 1. Éléments et parties d'un ensemble 2
§ 2. Fonctions.. 7
§ 3. Produit de plusieurs ensembles........................ 13
§ 4. Réunion, intersection, produit d'une famille d'ensembles....... 20
§ 5. Relations d'équivalence ; ensemble quotient 28
§ 6. Ensembles ordonnés 32
§ 7. Puissances. Ensembles dénombrables 38
§ 8. Echelles d'ensembles et structures 41

Index des notations 46
Index terminologique 47

RÉIMPRESSION PHOTOMÉCANIQUE, LES PROCÉDÉS DOREL, PARIS