STNUM - TP3
Statistique ParamÃľtrique

Juste Raimbault

January 15, 2014

1 Comparaison des estimateurs du paramÃĺtre de position

Question 2 Une loi Gaussienne est symÃľtrique par rapport Ãă sa moyenne, donc $\theta = 5$ ici.

Question 3.a.1 Par dÃľfinition, $\theta_1 = (\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} u_i)_{1\leq i\leq n}$, ainsi la composante i de θ_1 est la moyenne des i premiÃĺres composantes de U.

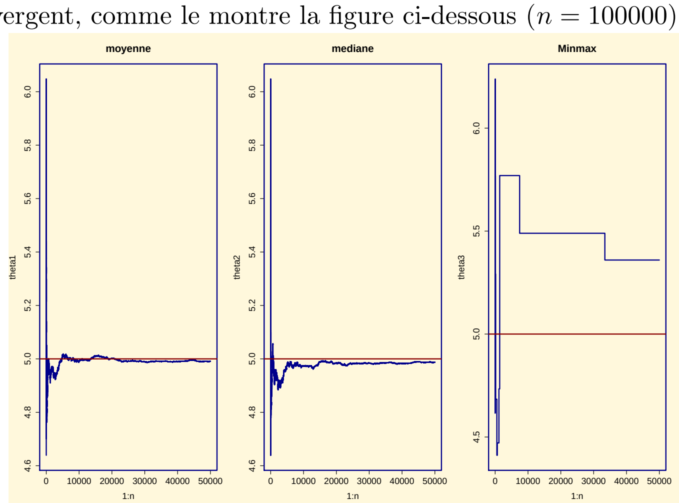
De mÃłme, $[\theta_2]_i$ est la mÃľdiane des i premiÃĺres composantes de U.

Question 3.a.2 L'instruction de type dans un plot permet de dÃľfinir le type de tracÃľ, en l'occurence ici une ligne gÃľomÃľtrique reliant les points de la courbe.

Question 3.b On remarque sur les graphes que les estimateurs convergent rapidement vers la valeur attendue du paramÃĺtre.

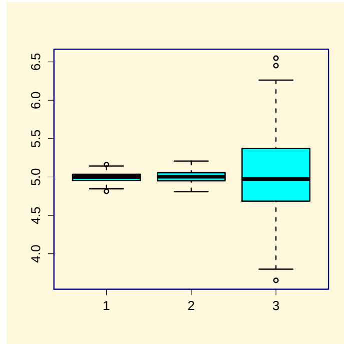
La matrice renvoyÃľe correspond aux vecteurs θ_1 et θ_2 dans deux colonnes juxtaposÃľes.

Question 3.c En lanÃğant la fonction modifiÃľe sur de trÃĺs grandes valeurs de n, on peut supposer que l'estimateur $\hat{\theta}_3$ n'est pas convergent, comme le montre la figure ci-dessous ($n = 100000$):

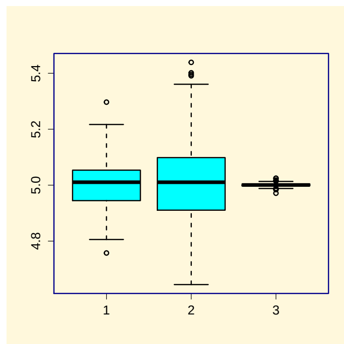


Question 4.a La commande `apply` permet d'appliquer la fonction passÃľe en troisiÃĺme argument aux sous-ÃľlÃľments de dimension le second argument du tableau passÃľ en premier argument. Dans notre cas, on applique la fonction Ãă chaque ÃľlÃľment du vecteur.

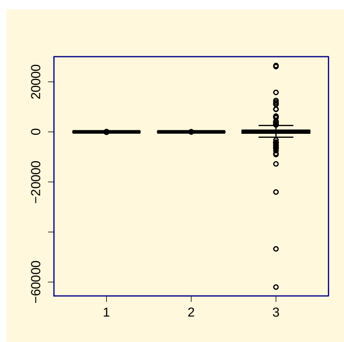
Question 4.b On va prÃľferer l'estimateur $\hat{\theta}_1$ au vu des boxplots ci-dessous, car on prÃľfÃĺre l'estimateur Ãă moindre dispersion.



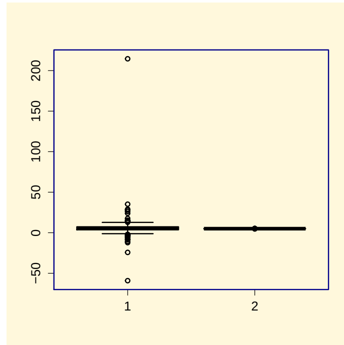
Question 4.c Dans le cas de la loi uniforme, l'estimateur de loin le plus efficace est $\hat{\theta}_3$ comme le montre le boxplot suivant. En effet, une loi uniforme fournira intuitivement beaucoup plus rapidement le min et le max plutÃťt qu'une moyenne ou une mediane stable.



Question 4.d.i Enfin pour la loi de Cauchy, on s'aperÃğoit que $\hat{\theta}_3$ prÃľsente de trÃĺs larges outliers et apparait assez inefficace (graphe ci-dessous):



Question 4.d.ii On relance sans le calcul de $\hat{\theta}_3$ our pouvoir comparer $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. On peut conclure que la mÃľdiane est bien meilleure car la distribution ne prÃľsente pas d'outliers en comparaison avec la moyenne.



En conclusion, la loi normale a pour meilleur estimateur la moyenne, la loi uniforme le min-max et la loi de Cauchy la mÃľdiane.

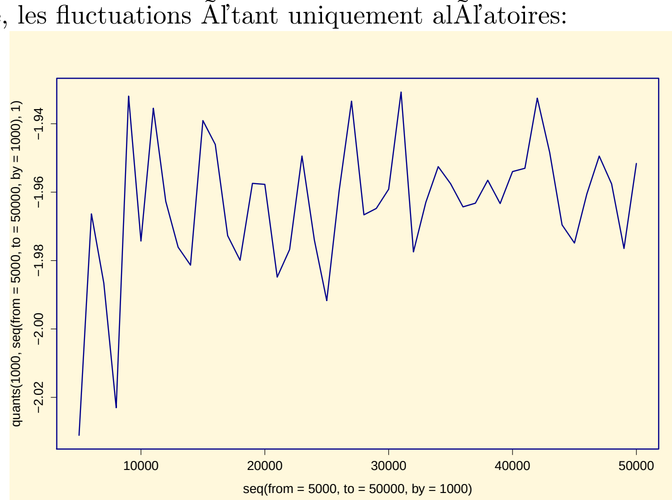
Question 5 Comme on ne peut savoir a priori le type de loi, il faudrait lancer chacun de ces trois estimateurs et supprimer incrÃľmentalement le plus mauvais jusqu'Ãă obtenir un seul estimateur, qui correspondra a priori Ãă la loi de la distribution comme montrÃľ en 4 si cette loi existe.

2 Intervalles de confiance (IC)

Question 2.a On passe en argument Ãă la fonction `quantile` les probabilitÃľs 0.025 et 0.975 pour avoir les quantiles voulus, qui sont de -1.897374 et 1.966214.

Question 2.b La distribution thÃľorique attendue est "normalisÃľe", i. e. ne dÃľpend pas de μ ni de σ, on s'attend Ãă obtenir les mÃłmes rÃľsultats, ce qu'on constate numÃľriquement (avec des oscillations qui ne dÃľpassent pas celles observÃľes Ãă moyenne et Ãľcart-type fixÃľs).

Question 2.c Augmenter N ne change pas les rÃľsultats obtenus comme le montre la courbe suivante pour le premier quantile par exemple, les fluctuations Ãľtant uniquement alÃľatoires:



Question 2.d Par dÃľfinition de a et b, on a $\mathbb{P}(T < a) = 0.025$ et $\mathbb{P}(T > b) = 1 - 0.975 = 0.025$ donc $\mathbb{P}(T \in [a, b]) = 95\%$.

Question 2.e On a $T_n \in [a, b] \iff \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_n} \in [a, b] \iff \bar{X} - \mu \in [\frac{S_n}{\sqrt{n}}a, \frac{S_n}{\sqrt{n}}b] \iff \mu \in [\bar{X} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}b, \bar{X} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}a]$, d'oÃź le rÃľsultat.

Par dÃľfinition de l'intervalle de confiance, on a 95% des Ãľchantillons qui vÃľrifient cette contrainte sur la moyenne.

Question 3.b On a $n = 10$, et on obtient en utilisant la mÃľthode prÃľcÃľdente (quantiles de la loi de student, avec μ moyenne de la sÃľrie), $(a, b) = (-2.21, 2.23)$.

Question 3.c On obtient l'intervalle de confiance pour la moyenne: $\mu \in [19.13, 20.29]$.

3 Calcul de l'EMV Ãă l'aide de la commande `mle`

Question 2.a La commande `dgamma` calcule la valeur de la densitÃľ p_X aux points du vecteur donnÃľ en argument, l'option `log=true` permet d'obtenir $log(p_X)$

Question 2.b Avec $a, \sigma > 0$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a $ll(a, \sigma) = -\sum_{i=1}^{n} log(p_X(x_i, a, \sigma)) = -log(\prod_{i=1}^{n} p_X(x_i, a, \sigma))$

Question 2.c L'estimateur du maximum de vraissemblance est obtenu en minimisant la fonction ll.

Question 3 On obtient $a = 8.39 \pm 1.64$ et $\sigma = 6.19 \pm 1.25$.

Question 4 L'IC de niveau 95% pour a est $[5.57, 12.05]$. Celui de niveau 85% pour σ est $[4.27, 9.48]$.

Question 5 La surface a ÃľtÃľ transformÃľe par la fonction $f(z) = log(0.001 + \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}})$ (on normalise pour avoir des valeurs entre 0.001 et 1.001 et on prend le log). Sans la transormation, la surface est en majoritÃľ quasi-plate et on ne peut visualiser correctement la position du minimum sur la partie plate.

Question 6 On obtient $a = 5.14$ et $\sigma = 2.88$ avec pour intervalles de confiance Ãă 95% respectifs $[4.71, 5.59]$ et $[2.64, 3.16]$ ce qui est assez proches des vraies valeurs.

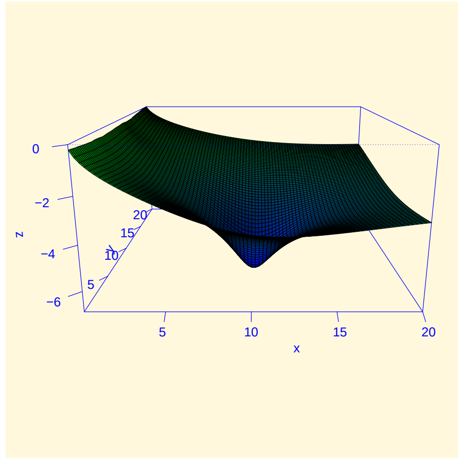
Question 7 On s'apercoit que le point obtenu est relativement constant lorsqu'on fait varier les conditions initiales $(a = 1, 2, 3, 4; \sigma = 1, 2, 3, 4)$, par contre on obtient des points singuliers comme pour $\sigma = 0.5$ pour lequel le rÃľsultat diverge.

Question 8.a On minimise la log-vraisemblance comme pour l'estimation des paramÃĺtres de la loi gamma; la fonction est une adaptation de la fonction pour la loi gamma.

Question 8.b Les estimations obtenues sont $a = 6.53$ (IC $[3.65, 9.39]$) et $s = 10.14$ (IC $[7.68, 13.41]$).

Question 8.c Pour $a > 0, s > 1$, le rÃľsultat obtenu semble Ãłtre constant. Cela est rendu possible car la fonction de log-vraissemblance est convexe pour une loi de Cauchy, l'optimisation donne donc toujours le mÃłme point sur cet ensemble.

Question 8.d On obtient la surface:




```r

#comparison of estimators for position parameter

n=10000;
X=rnorm(n,mean=5,sd=2);
par(bg="cornsilk",lwd=2,col="darkblue")
hist(X,breaks=40,freq=F,col="cyan")
curve(dnorm(x,mean=5,sd=2),add=T)

location_estimator=function(U,theta){
  n=length(U)
  theta1=cumsum(U)/(1:n)
  theta2=1:n;theta3=1:n;
  for (i in 1:n){
    theta2[i]=median(U[1:i])
    theta3[i]=(min(U[1:i])+max(U[1:i]))/2
  }
  par(mfrow=c(1,3),bg="cornsilk",lwd=2,col="darkblue")
  plot(1:n,theta1,type="l",main="moyenne")
  abline(h=theta,col="darkred")
  plot(1:n,theta2,type="l",main="mediane")
  abline(h=theta,col="darkred")
  plot(1:n,theta3,type="l",main="Minmax")
  abline(h=theta,col="darkred")
  #return(matrix(c(theta1,theta2,theta3),n,3))
}

location_estimator(rnorm(100000,mean=5,sd=2),5)

compare_estimators=function(N,n){
  par(mfrow=c(1,1))
  X=matrix(rcauchy(N*n,location=5,scale=2),N,n)
  theta1=apply(X,1,mean)
  theta2=apply(X,1,median)
  #theta3=(apply(X,1,min)+apply(X,1,max))/2
  par(bg="cornsilk",lwd=2,col="darkblue")
  boxplot(theta1,theta2,col="cyan")
}

compare_estimators(200,1000)




check_student=function(N,n,mu,sigma)
{
  X=matrix(rnorm(N*n,mean=mu,sd=sigma),N,n)
  t=sqrt(n)*(apply(X,1,mean)-mu)/apply(X,1,sd)
  return(t)
}

N=20000; n=1000;
t=check_student(N,n,100,50)
par(bg="cornsilk",lwd=2,col="darkblue")
hist(t,breaks=100,freq=F,col="cyan")
curve(dt(x,n-1),add=T,lwd=2)

quantile(x=t,probs=c(0.025,0.975))

quants = function(n,Nrange,ind){
  res=c()
  for(N in Nrange){
    res = append(res,quantile(x=check_student(N,n,100,50),probs=c(0.025,0.975))[[1]])
  }
  return(res)
}

plot(x=seq(from=5000,to=50000,by=1000),y=quants(1000,seq(from=5000,to=50000,by=1000),1),type="l")

X=c(19.6, 19.9, 20.4, 19.8, 20.5, 21.0, 18.5, 19.7, 18.4, 19.4)
n=10

mean(X) - quantile(x=check_student(20000,10,mean(X),sd(X)),probs=c(0.025,0.975)) * sd(X)/sqrt(10)


#X=c(77.551, 45.195, 50.626, 39.878, 29.137, 57.321, 39.140, 66.776, 48.028, 42.325, 31.200, 38.632, 42.914, 60.969, 22.076, 52.446, 45.2
```

```
X = c(-7.54, 82.51, 14.27, 3.96, 189.98, 17.20, -20.07, 52.66, 93.47,
-33.57, 13.13, -1.26, 12.69, 53.33, 2.85, -7.25, 13.30, -5.67,
-38.99, 24.24, 4.17, 12.30, 21.59, -6.70, 1.24, 13.91, 30.24,
3.35, 6.45, -26.22, 72.65, 10.12, -1.64, 21.49, 391.11, 26.53,
146.60, 2.11, 5.84, 14.25, 7.17, 4.96, -9.55, 7.89, -2.31,
91.11, 8.39, 6.23, 25.45, 9.36, 102.44, -7.28, -40.02, -8.86,
14.11, 6.84, -11.15, -6.67, -84.82, -241.41, -0.14, -72.95, 21.09,
53.47, -3.80, -10.64, 19.71, 45.89, -124.30, -2.02, -1.67, 7.81,
-9.76, 6.25, 16.68, 8.88, 32.14, 1.29, -10.00, -5.03, -66.77,
12.85, 15.32, 31.27, 6.59, 3.92, 8.61, 15.38, -1.34, 14.11,
10.53, 2.35, -94.19, 16.45, 2.97, 12.26, 4.15, 10.63, 5.47)

ll=function(a=0.5, sigma=1.5)
{
  if(a > 0 && sigma > 0)
    -sum(dcauchy(X, location=a, scale=sigma, log=TRUE))
  else
    NA
}

library(stats4)
fit = mle(ll)
summary(fit)

vcov(fit)
par(mfrow=c(2,1),bg="cornsilk",col="blue",lwd=2)
plot(profile(fit), absVal=FALSE)
confint(fit,level=0.95)


# Calcul des valeurs de la log-vraisemblance
K=80
x=(1:K)/4;  y=(1:K)/4;  z=c();
for (i in 1:length(x))
  for (j in 1:length(y))
    z=c(z,ll(x[i],y[j]))
# Transformation des valeurs calculeÌĄes
z=matrix(z,length(x),length(y))
z=log(0.001+((z-min(z))/(max(z)-min(z))))
# Le contenu des 7 lignes suivantes peut etre utiliseÌĄ comme une
# boiÌĆte noire
nrz <- nrow(z)
ncz <- ncol(z)
jet.colors <- colorRampPalette( c("blue", "green") )
nbcol <- 100
color <- jet.colors(nbcol)
zfacet <- z[-1, -1] + z[-1, -ncz] + z[-nrz, -1] + z[-nrz, -ncz]
facetcol <- cut(zfacet, nbcol)
# Visualisation des reÌĄsultats
par(bg="cornsilk",lwd=1,mfrow=c(1,1))
#image(x,y,z,col = cm.colors(50))
#contour(x,y,z,add=T,col="darkred")
persp(x, y, z,ticktype="detailed",expand=0.5,col=color[facetcol],shade=0.4)

X = rgamma(1000,shape=5,scale=3)
fit = mle(ll)
summary(fit)
confint(fit,level=0.95)
```