

潮汐线应变观测的地表平面应变状态^{*}

张雁滨 蒋 骏

(国家地震局地震研究所, 武汉 430071)

摘 要 提出了由潮汐线应变的组合观测资料获取地表平面应变状态和对潮汐剪切应变进行数值模拟的方法。计算了我国部分潮汐应变观测点的理论应变状态和观测应变状态, 并对结果进行了比较分析, 为深入研究地震前兆的物理力学机制和观测台网的优化提供理论依据。

关键词: 潮汐 应变 数值模拟

PLANE STRAIN OF TIDAL LINE STRAIN OBSERVATION ON THE EARTH'S SURFACE

Zhang Yangbin and Jiang Jun

(*Institute of Seismology, SSB. Wuhan 430071*)

Abstract

A method is presented, by which the plane strain state on the earth's surface can be obtained with the combination of tidal line strain data and the tidal shear strain can be simulated numerically. The theoretic strain state and the observational state of some stations in China are calculated and compared each other in order to provide a theoretic basis for studying further the physical mechanism of earthquake precursor and improving the observational network.

Key words: tide, strain, numerical simulation

1 引 言

在力学中, 应变状态是以主应变、主应变方向、最大剪切应变及最大剪切应变方向等参数来描述的。在地震科研中, 单方向的线应变难以深入分析变形状况以及和震源力学行为之间的关系。我国现有 24 个潮汐线应变观测台站, 拥有大批连续观测资料, 可观测到 10^{-10} 量级的应变变化。但由于受观测环境及条件的限制, 只有不足 1/3 的台站是按应变理论进行观测的, 即布设有 3 个不同方位的线应变观测仪, 而一般台站只布设了两个不同方位的潮汐线应变观测仪, 难以确定其应变状态, 限制了资料的利用价值。本文探讨如何由实测潮汐线应变来获取其地表平面应变状态, 并对我国部分台站潮汐观测结果进行实际计算和初步分析。

本文 1995 年 8 月 17 日收到

* 国家地震局地震科学联合基金资助课题

2 基本理论、计算方法与公式

由弹性力学理论,在球坐标系中的 $\theta - \phi$ 平面(即地表潮汐线应变的观测平面),要获得潮汐应变的观测点的平面应变状态,首先要得到测点的 3 个独立应变分量 e_{11} 、 e_{22} 及 e_{33} ,进而由这 3 个应变分量得到潮汐应变主轴、最大及最小主应变、最大剪切应变及其方向等。

2.1 由潮汐线应变观测获取地表平面应变状态的方法

若某观测点在地表平面上以方位角分别为 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 的 3 个不同方位上布设有潮汐线应变观测(e_{11} 、 e_{22} 、 e_{33}),则在球坐标系中其观测方程为:

$$e_{ii} = e \cos^2 \phi_i + e' \sin^2 \phi_i - e'' \sin 2\phi_i \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

求解(1)式,即可得到描述地表潮汐平面应变状态的 3 个应变分量^[1]:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{2}{A_0} [e_{11} \sin \phi_2 \sin \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) + e_{22} \sin \phi_1 \sin \phi_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \\ &\quad + e_{33} \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\ e' &= \frac{2}{A_0} [e_{11} \cos \phi_2 \cos \phi_3 \sin(\phi_3 - \phi_2) + e_{22} \cos \phi_1 \cos \phi_3 \sin(\phi_1 - \phi_3) \\ &\quad + e_{33} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\ e'' &= \frac{1}{A_0} [e_{11} \sin(\phi_3 + \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_2) + e_{22} \sin(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) \\ &\quad + e_{33} \sin(\phi_2 + \phi_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中

$$A_0 = -[\sin 2\phi_1 \sin(\phi_3 + \phi_2) \sin(\phi_3 - \phi_2) + \sin 2\phi_2 \sin(\phi_1 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \phi_3) + \sin 2\phi_3 \sin(\phi_2 + \phi_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \quad (3)$$

对于只有两方向潮汐线应变观测的台站(观测方位角为 ϕ_1 和 ϕ_2),只具有两个独立的观测方程,无法直接确定描述地表平面应变状态的 3 个应变分量,除非能找到一个新的方程或约束条件,使其方程中的 3 个未知数减少为两个。从这个思路出发,首先注意到我们所研究的对象是潮汐应变,由潮汐应变理论,3 个应变分量为^[2]:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{g_{n=2}} [l_n \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} + h_n V_n] \\ e' &= \frac{1}{g_{n=2}} [l_n (\frac{1}{\cos^2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} - \text{tg} \frac{\partial V_n}{\partial}) + h_n V_n] \\ e'' &= \frac{1}{g_{n=2}} [l_n (\frac{1}{\cos} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \partial} + \frac{\text{tg}}{\cos} \frac{\partial V_n}{\partial})] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

而 i ($i=1,2$) 方向的潮汐线应变为:

$$e_{ii} = \frac{1}{g_{n=2}} \left\{ l_n \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} \cos^2 \phi_i + \left(\frac{1}{\cos^2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} - \text{tg} \frac{\partial V_n}{\partial} \right) \sin^2 \phi_i + \left(\frac{1}{\cos} \frac{\partial^2 V_n}{\partial \partial} + \frac{\text{tg}}{\cos} \frac{\partial V_n}{\partial} \right) \sin 2\phi_i \right] + h_n V_n \right\} \quad (5)$$

对方向 1 和方向 2 的潮汐线应变进行差组合($e_{11} - e_{22}$),由(5)式得:

$$e_{11} - e_{22} = \frac{1}{g_{n=2}} l_n \left[\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} - \frac{1}{\cos^2} \frac{\partial^2 V_n}{\partial^2} + \operatorname{tg} \frac{\partial V_n}{\partial} \right) (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\cos} \frac{\partial^2 V_n}{\partial} \frac{\partial}{\partial} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos} \frac{\partial V_n}{\partial} \right) (\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) \right] \quad (6)$$

将(6)式与(4)式中 e 的表达式进行比较,可看到它们均为勒夫数 l_n 与引潮力位的空间坐标导数的线性组合函数,具有物理共性。并且,由潮汐应变的理论及观测事实可知,它们对各自的理论潮汐的响应系数(潮汐因子)是相同的,也就是说,对地表潮汐实际的剪切应变 e 可用理论值 e^T 来进行如下模拟^[1]:

$$e = ke^T \quad (7)$$

式中的响应系数(潮汐因子) k 可由两不同方向的潮汐线应变实测资料经(6)式进行调和与分析或 Nakai 拟合获得,于是只要将求得的响应系数 k 代入(7)式,即可有效地对地表实际潮汐剪切应变 e 进行恰当模拟。

将(7)式代入 e_{11} 和 e_{22} 的观测方程中,可把式中的未知数由 3 个减为 2 个,并对其求解得:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2} [e_{11} \sin^2 \alpha_2 - e_{22} \sin^2 \alpha_1 + ke^T 2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \\ e &= \frac{1}{\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2} [-e_{11} \cos^2 \alpha_2 + e_{22} \cos^2 \alpha_1 + ke^T 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

综合(7)和(8),便可由任意两方向的潮汐线应变观测来获得确定观测点的潮汐平面应变状态所需的 3 个应变分量。

特别地,当两观测方向正交时,即 $|\alpha_2 - \alpha_1| = \pi/2$, 则(8)可式简化为:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{\cos 2\alpha_1} [e_{11} \cos^2 \alpha_1 - e_{22} \sin^2 \alpha_1 - ke^T \sin 2\alpha_1] \\ e &= \frac{1}{\cos 2\alpha_1} [-e_{11} \sin^2 \alpha_1 + e_{22} \cos^2 \alpha_1 + ke^T \sin 2\alpha_1] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

一般来说,(9)式具有确定解,但当 α_1 取 $\pm 45^\circ$ 或 $\pm 135^\circ$ 时,(9)式为 $0/0$ 形式出现奇异解。在这种情况下,可直接在该观测的正交坐标系中模拟计算剪切应变,再综合两个实际的线应变观测,就可在该正交坐标系中描述其应变状态。

2.2 主应变、主应变方向及最大剪切应变的计算方法

前面已得到了地表潮汐平面的全部应变分量 e_x 、 e_y 、 e_{xy} , 因此求其平面应变状态的主应变值即是求解平面应变张量矩阵的本征值^[3]:

$$\begin{vmatrix} e_x - e & e_{xy} \\ e_{xy} & e_y - e \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

解(10)式便得两主应变值 e_1 、 e_2 :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{e_x + e_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{e_x - e_y}{2} \right)^2 + e_{xy}^2} \\ e_2 &= \frac{e_x + e_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{e_x - e_y}{2} \right)^2 + e_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

最大剪切应变值 e_{\max} 为:

$$\sigma_{\max} = \frac{(e_1 - e_2)}{2} = \sqrt{\left(\frac{e_1 - e_2}{2}\right)^2 + e^2} \tag{12}$$

应变主轴的方位角 α_e 为:

$$\tan 2\alpha_e = \arctg\left(\frac{-2e}{e_1 - e_2}\right) \tag{13}$$

$2\alpha_e$ 所在的象限可由 $e_1 - e_2$ 及 $-2e$ 的符号来确定,方位角 α_e 方向上的线应变 $e(\alpha_e)$ 为:

$$e(\alpha_e) = e \cos^2 \alpha_e + e_1 \sin^2 \alpha_e - e \sin 2\alpha_e \tag{14}$$

当 $e(\alpha_e) = e_1$ 时,最大应变主轴的方位角为 α_e ;当 $e(\alpha_e) = e_2$ 时,最大应变主轴的方位角为 $(\alpha_e + \frac{\pi}{2})$ 。

3 理论应变状态与观测应变状态的计算实例

根据上述理论和公式,计算了我国部分潮汐应变观测点的理论与观测应变状态。地表平面的潮汐理论应变状态可由(5)式来确定。本文选取古登堡—布伦 A 地球模型和 Farrell 模型推导的地表勒夫数: $h_2 = 0.6114$, $h_3 = 0.2913$, $k_2 = 0.3040$, $k_3 = 0.0942$, $l_2 = 0.0832$, $l_3 = 0.0145$ 。

表 1 给出了我国部分观测台站在 1992 年 11 月 10 日零时的理论潮汐应变状态值。不难看出,潮汐理论应变状态主要与测点的地理位置即经纬度有关,特别是与纬度的关系最为密切。随着测点纬度的升高,最大及最小主应变值呈减小趋势,而最大剪切应变值逐步增大。

表 1 我国部分测点的理论潮汐应变状态 (1992 11 10,0h)

台站名	经度	纬度	$e_1 (10^{-9})$	$e_2 (10^{-9})$	$e (10^{-9})$	$e_1 (10^{-9})$	$e_2 (10^{-9})$	$\sigma_{\max} (10^{-9})$	α_e
楚雄	101°32'06"	25°01'4.8"	27.568	27.722	0.323	27.977	27.313	0.332	128.296
弥渡	100°29'42"	25°20'24"	27.276	27.504	0.377	27.784	26.996	0.394	126.602
云龙	99°22'15.6"	25°53'9.6"	26.894	27.196	0.450	27.519	26.570	0.475	125.725
渡口	101°41'38.4"	26°32'27.6"	27.360	27.359	0.383	27.742	26.977	0.382	-44.962
姑咱	102°10'33.6"	30°06'54"	26.712	26.230	0.506	27.031	25.911	0.560	-32.266
徐州	117°10'1.2"	34°13'58.8"	25.440	24.333	-0.706	25.783	23.990	0.897	25.942
兰州	103°45'0"	36°04'58.8"	25.205	23.552	0.587	25.392	23.365	1.014	-17.680
涉县	113°38'49.2"	36°32'24"	25.216	23.377	-0.443	25.317	23.276	1.020	12.853
烟台	121°22'55.2"	37°31'12"	23.265	22.041	-1.272	24.065	21.242	1.411	32.146
西拨子	115°58'55.2"	40°21'0"	23.420	20.883	-0.819	23.661	20.642	1.510	16.424
怀来	115°52'1.2"	40°43'58.8"	23.279	20.638	-0.818	23.512	20.405	1.553	15.886
张家口	114°54'0"	40°49'58.8"	23.380	20.633	-0.700	23.548	20.465	1.541	13.503
呼和浩特	111°33'46.8"	40°50'56.4"	23.689	20.760	-0.274	23.714	20.734	1.490	5.298
乌加河	108°07'19.2"	41°17'20.4"	23.539	20.478	0.174	23.549	20.468	1.540	-3.243
乌鲁木齐	87°34'1.2"	43°46'58.8"	17.034	16.585	2.759	19.577	14.040	2.768	-42.674

地表平面的潮汐观测应变状态可由对我国潮汐线应变观测资料的计算来获得。在计算中,为消除观测系统的零漂以及不同观测值的坐标差,首先对各观测值做了预处理。表2中给出了我国部分潮汐线应变观测台站在同一时刻的观测应变状态。从中可看出,观测应变状态与理论情况大不一样,其结果比较杂乱,与测点的地理分布没有明显关系,这表明实际观测中包含大量来自观测点周围地区的非潮汐应变量,观测应变状态反映的是观测点所能接受到的包括潮汐应变以及局部构造应变迭加在一起的一种应变状态。

表2 我国部分测点的观测应变状态(1992 11 10,0h)

台站名	经度	纬度	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e_1(10^{-9})$	$e_2(10^{-9})$	$\max(10^{-9})$	e_1
楚雄	101°32'06.0	25°01'4.8	21.5	17.3	0.3224	21.525	17.275	2.125	-4.364°
云龙	99°22'15.6	25°53'9.6	19.30	46.43	0.169	46.435	19.299	13.568	90.358°
			*19.45	46.87	-7.592	48.837	17.495	15.671	75.512°
渡口	101°41'38.4	26°32'27.6	15.7	15.0	0.234	15.77	14.929	0.421	-16.869°
姑咱	102°10'33.6	30°06'54.0	26.7	46.4	0.349	46.406	26.694	9.586	91.013°
徐州	117°10'1.2	34°13'58.8	31.24	7.05	-0.9293	31.272	7.017	12.218	2.198°
兰州	103°38'49.2	36°32'24.0	11.02	5.57	0.2243	11.027	5.562	2.733	-2.355°
涉县	113°38'49.2	36°32'24.0	39.79	23.74	-0.8109	39.830	23.695	8.067	2.885°
烟台	121°22'55.2	37°31'12.0	9.30	2.51	-1.5925	9.645	1.908	3.868	12.157°
西拨子	115°58'55.2	40°21'0	15.50	33.0	-0.411	33.010	15.490	8.760	88.654°
			*15.50	33.0	-8.055	36.139	12.356	11.892	68.676°
怀来	115°52'1.2	40°43'58.8	25.30	-5.8	0.890	25.328	-5.826	15.576	-1.637°
			*25.31	-5.8	-8.291	27.796	-8.291	18.044	15.218°
张家口	114°54'0	40°49'58.8	15.7	3.2	-0.3312	15.709	3.191	6.259	1.517°
呼和浩特	111°53'46.8	40°50'56.4	14.06	41.24	-0.224	41.242	14.062	13.59	89.527°
乌加河	108°7'19.2	41°17'20.4	7.46	20.96	0.086	20.963	7.45	6.753	90.365°

* 为两方向线应变所得结果

为了解同一地点的潮汐应变状态在不同时刻的变化情况,我们还计算了云南省楚雄台1992年11月1日到30日这一时段中几个时刻的理论潮汐应变状态值(表3)和观测潮汐应变状态值(表4)。虽然观测的潮汐应变状态与理论的情况有差别,但不论是理论值还是观测值,都随时间呈相同的周期性变化,这说明观测应变状态的变化主要是由潮汐引起的。

表3 楚雄台1992年11月1~30日的理论潮汐应变状态

时间	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e_1(10^{-9})$	$e_2(10^{-9})$	$\max(10^{-9})$	e_1
1d 0h	-5.303	4.976	-3.280	5.935	-6.260	6.098	73.727
5d 0h	5.290	10.890	-2.901	12.122	4.058	4.032	66.992
10d 0h	27.568	27.722	0.323	27.977	27.313	0.332	128.296
15d 0h	-2.596	9.246	-2.422	9.722	-3.072	6.397	78.876
20d 0h	8.354	15.814	-2.552	16.603	7.565	4.519	72.810
25d 0h	25.988	27.581	0.168	27.608	25.970	0.819	95.936
30d 0h	-4.080	7.262	-1.728	7.519	-4.337	5.928	81.527

表 4 楚雄台观测潮汐应变状态(1992 11)

时间	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e(10^{-9})$	$e_1(10^{-9})$	$e_2(10^{-9})$	$\max(10^{-9})$	e_1
1d 0h	- 3.8	- 1.4	- 3.274	0.887	- 6.089	3.488	55.064°
5d 0h	5.7	8.2	- 2.895	10.104	3.794	3.155	56.677°
10d 0h	21.5	17.3	0.322	21.525	17.275	2.125	- 4.364°
15d 0h	- 1.5	- 0.1	- 2.417	1.717	- 3.318	2.517	53.076°
20d 0h	8.9	11.6	- 2.547	13.133	7.365	2.884	58.962°
25d 0h	20.1	17.8	0.168	20.112	17.788	1.162	- 4.156°
30d 0h	- 1.6	- 1.2	- 1.725	0.336	- 3.137	1.736	48.307°

此外,在理论计算中,对某点的剪切应变值 e 来说,不论是用 3 个方向的线应变值直接解算,还是用两方向的线应变值通过模拟而得,其结果完全一致,即 $k = 1$ 。而在实际计算中,由两方向的线应变观测模拟得到的剪切应变和由 3 方向的线应变值计算的剪切应变值之间有些差距(见表 2),其差的大小取决于各单方向潮汐线应变观测的准确、可靠程度和一致性。此外,理论情况与实际情况的差别(如实际介质的非均匀性等)也是造成两个结果存在差异的原因之一。

4 结论与讨论

(1)对具有 3 个不同观测方位的潮汐线应变观测台站,在球坐标系中直接对由坐标转换公式所表示的潮汐应变观测方程求解,便可确定地表潮汐的平面应变状态。只有两个不同观测方位的台站,可根据潮汐应变理论及潮汐线应变的观测结果,利用两线应变之差与剪切应变具有共同的物理与几何的本质特征,对地表潮汐剪切应变进行模拟,从而使观测方程中的 3 个未知数减为两个,由此可模拟计算潮汐的平面应变状态。

(2)观测应变状态反映的是观测点所能接受到的包括潮汐应变以及局部构造应变等迭加在一起的一种应变状态,因此对其进行连续观测与分析,对地震学及动力学研究都很有价值。

(3)通过对由 3 方向线应变与由两方向线应变确定平面潮汐应变状态的结果进行比较可知:对于潮汐应变理论值,两种方法得到的结果完全相同;对潮汐应变观测值,两种结果基本一致,其差异程度取决于各单方向潮汐线应变观测的可靠性。

(4)由两方向潮汐线应变观测确定平面应变状态这一方法的提出,使观测资料得到了充分利用,为潮汐应变观测资料更好地用于地震研究打开了一个新的窗口,特别是能在不改变和增加现有台站的仪器布局的条件下,发挥现有台网的潜力,为观测台网的优化提供了理论依据。

参 考 文 献

1 蒋骏,张雁滨.地表潮汐线应变组合观测的信息提取方法.中国地震,1993,9(1),74~81.
2 郗钦文,候天航.固体潮汐与引潮常数.中国地震,1986,2(2),30~41.
3 尹祥础.固体力学.北京:地震出版社,1985,36~45.