

Diskrete Mathematik

Zahlenmengen

| | |
|----------------|-------------------------|
| \mathbb{N} | natürliche Zahlen |
| \mathbb{N}_0 | natürliche Zahlen mit 0 |
| \mathbb{Z} | ganze Zahlen |
| \mathbb{Q} | rationale Zahlen |
| \mathbb{R} | reelle Zahlen |
| \mathbb{C} | komplexe Zahlen |

Aussagenlogik

| | |
|----------|--|
| Aussage | Ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. |
| Prädikat | Eine Aussage mit Variablen. n -stellige Prädikate. |

Grundidee

Aus gegebenen Prädikaten/Aussagen lassen sich durch Junktoren neue Aussagen bilden. (z. B. Kombinationen mit $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$).

Definitionen

- Negation:** $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist. (Doppelte Negation: $A \Leftrightarrow \neg\neg A$.)
- Konjunktion:** $A \wedge B$ ist wahr genau dann, wenn A und B wahr sind. (assoziativ, kommutativ, idempotent)
- Disjunktion:** $A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist. (assoziativ, kommutativ, idempotent)
- Implikation:** $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$. (Kontraposition: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.)
- Äquivalenz:** $A \Leftrightarrow B$ genau dann, wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Wichtige Regeln

- De Morgan:** $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- Distributivität:** $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Syntaktische Bindung:** \neg bindet stärker als \wedge, \vee ; diese binden stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- Modus Ponens:** Aus $A \wedge (A \Rightarrow B)$ folgt B .
- Transitivität:** Aus $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ folgt $A \Rightarrow C$.

Hinweis zur Redundanz

Jeder Ausdruck mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ lässt sich ausschliesslich mit \neg und \vee darstellen. z.B.

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Quantoren

Quantoren dienen zur Formalisierung von Aussagen wie:

- $\forall x A(x)$: Für alle x gilt $A(x)$
- $\exists x A(x)$: Es existiert ein x mit $A(x)$

Mehrere gleichartige Quantoren:

$$\forall x, y A(x, y) \quad \text{statt} \quad \forall x \forall y A(x, y)$$

Eingeschränkte Quantoren

$$\forall x \in M A(x) : \text{Für alle } x \in M \text{ gilt } A(x)$$

$$\exists x \in M A(x) : \text{Es gibt } x \in M \text{ mit } A(x)$$

Auch möglich mit Relationen:

$$\forall x < y A(x) \quad \text{oder} \quad \exists x \leq y A(x)$$

Als Junktoren

Für endliche Mengen $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ gilt:

$$\forall x \in M A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge \dots \wedge A(x_n)$$

$$\exists x \in M A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee \dots \vee A(x_n)$$

Als Makros

$$\exists x \in M A(x) \Leftrightarrow \exists x (x \in M \wedge A(x))$$

$$\forall x \in M A(x) \Leftrightarrow \forall x (x \in M \Rightarrow A(x))$$

Zusammenhang mit Junktoren

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \quad \text{und} \quad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x))$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x))$$

Leere Quantoren

Wenn x in B nicht vorkommt:

$$\forall x B \Leftrightarrow B, \quad \exists x B \Leftrightarrow B$$

Mengen

- Menge / Element:** Eine Menge fasst mathematische Objekte (Elemente) zu einem Ganzen zusammen. Für Menge X und Element y gilt $y \in X$ bzw. $y \notin X$.
- Aufzählende Schreibweise:** $\{x_1, \dots, x_n\}$ bezeichnet die Menge, die genau die genannten Elemente enthält. Die leere Menge heisst \emptyset .
- Extensionalitätsprinzip:** Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben:
$$A = B \iff \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$
- Teilmenge:** $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so ist A eine *echte* Teilmenge, geschrieben $A \subset B$.
- Folgerungen:** Mengen sind ungeordnet; Mehrfachaufzählung desselben Elements ändert die Menge nicht. Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

Eindeutigkeit der leeren Menge

Seien e_1, e_2 leere Mengen. Dann ist für alle x die Aussage $x \in e_1$ falsch, also ist die Implikation $x \in e_1 \Rightarrow x \in e_2$ wahr; somit $e_1 \subseteq e_2$. Analog $e_2 \subseteq e_1$. Nach Extensionalität folgt $e_1 = e_2$.