

# Lineare Algebra

## Matrix Basics

Ein Matrix ( $n \times m$ ) ist eine rechteckige Anordnung von Elementen, die in  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten organisiert ist.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Die Matrix ( $n \times 1$ ) wird als Spaltenvektor bezeichnet, während die Matrix ( $1 \times m$ ) als Zeilenvektor bezeichnet wird.

## Matrixoperationen

### Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  der gleichen Dimension ( $n \times m$ ) können addiert werden:

$$C = A + B \quad \text{mit } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Subtraktion erfolgt analog:

$$C = A - B \quad \text{mit } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

### Skalare Multiplikation

Eine Matrix  $A$  kann mit einem Skalar  $k$  multipliziert werden:

$$B = kA \quad \text{mit } b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

### Matrixmultiplikation

Zwei Matrizen  $A$  ( $n \times m$ ) und  $B$  ( $m \times p$ ) können multipliziert werden:

$$C = AB \quad \text{mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h.  $AB \neq BA$  im Allgemeinen.

### Transponieren

Die Transponierte einer Matrix  $A$  ( $n \times m$ ) ist eine neue Matrix  $A^T$  ( $m \times n$ ), bei der die Zeilen und Spalten vertauscht werden:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Die Transponierte hat folgende Eigenschaften:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

## Gauss- und Gauss-Jordan-Algorithmus

### Erweiterte Koeffizientenmatrix

LGS  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit  $m$  Gleichungen,  $n$  Unbekannten als erweiterte Matrix:

$$(A \mid \vec{b}) = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

### Elementare Zeilenoperationen

1.  $Z_i \leftrightarrow Z_j$  (Vertauschen)
2.  $Z_i \leftarrow \lambda \cdot Z_i, \lambda \neq 0$  (Skalieren)
3.  $Z_i \leftarrow Z_i + \lambda \cdot Z_j$  (Addieren)

### Zeilenstufenform (ZSF)

Bedingungen für ZSF:

1. Nullzeilen stehen unten
2. Erste Nichtnulleintrag (Pivot) jeder Zeile ist 1
3. Pivots liegen strikt rechts vom Pivot der Zeile darüber

**Reduzierte ZSF (RZSF):** Zusätzlich: Über jedem Pivot nur Nullen.

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{ZSF}} \quad \underbrace{\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{\text{RZSF}}$$

### Algorithmen

**Gauss-Algorithmus:** Überführung in ZSF durch Vorwärtsselimation.

**Gauss-Jordan-Algorithmus:** Überführung in RZSF durch Vorwärts- und Rückwärtsselimation.

### Lösbarkeit

Rang:  $\text{rg}(A) = \text{Anzahl Nicht-Nullzeilen in ZSF von } A$

- $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|\vec{b})$ : Keine Lösung (inkonsistent)
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = n$ : Eindeutige Lösung
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) < n$ : Unendlich viele Lösungen, Parameter:  $n - \text{rg}(A)$