Lineare Algebra

Matrix Basics

Ein Matrix $(n \times m)$ ist eine rechteckige Anordnung von Elementen, die in n Zeilen und m Spalten organisiert ist.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Die Matrix $(n \times 1)$ wird als Spaltenvektor bezeichnet, während die Matrix $(1 \times m)$ als Zeilenvektor bezeichnet wird.

Matrixoperationen

Addition und Subtraktion

Zwei Matrizen A und B der gleichen Dimension $(n \times m)$ können addiert werden:

$$C = A + B \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Subtraktion erfolgt analog:

$$C = A - B \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Skalare Multiplikation

Ein Matrix A kann mit einem Skalar k multipliziert werden:

$$B = kA \quad \text{mit} \quad b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Matrixmultiplikation

Zwei Matrizen A $(n \times m)$ und B $(m \times p)$ können multipliziert werden:

$$C = AB \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$ im Allgemeinen.

Transponieren

Die Transponierte einer Matrix A $(n \times m)$ ist eine neue Matrix A^T $(m \times n)$, bei der die Zeilen und Spalten vertauscht werden:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Die Transponierte hat folgende Eigenschaften:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Gauss-(Jordan-)Algorithmus

Erweiterte Koeffizientenmatrix

LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit m Gleichungen, n Unbekannten als erweiterte Matrix:

$$(A \mid \vec{b}\,) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Elementare Zeilenoperationen

1. $Z_i \leftrightarrow Z_j$ (Vertauschen)
2. $Z_i \leftarrow \lambda \cdot Z_i$, $\lambda \neq 0$ (Skalieren)
3. $Z_i \leftarrow Z_i + \lambda \cdot Z_j$ (Addieren)

Zeilenstufenform (ZSF)

Bedingungen für ZSF:

1. Nullzeilen stehen unten
2. Erste Nichtnulleintrag (Pivot) jeder Zeile ist 1
3. Pivots liegen strikt rechts vom Pivot der Zeile darüber

Reduzierte ZSF (RZSF): Zusätzlich: Über jedem Pivot nur Nullen.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\text{ZSF}} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\text{RZSF}}$$

Algorithmen

Gauss-Algorithmus: Überführung in ZSF durch Vorwärtselimination.
Gauss-Jordan-Algorithmus: Überführung in RZSF durch Vorwärts- und Rückwärtselimination.

Lösbarkeit

Rang: $\text{rg}(A) =$ Anzahl Nicht-Nullzeilen in ZSF von A

- $\text{rg}(A) < \text{rg}(A \mid \vec{b})$: Keine Lösung (inkonsistent)
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid \vec{b}) = n$: Eindeutige Lösung
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid \vec{b}) < n$: Unendlich viele Lösungen, Parameter: $n - \text{rg}(A)$

Parameterdarstellung der Lösung

Bei unendlich vielen Lösungen ($\text{rg}(A) < n$):
Vorgehen:

1. RZSF bestimmen
2. Freie Variablen (ohne Pivot) als Parameter wählen: $t_1, t_2, \dots$
3. Gebundene Variablen (mit Pivot) durch freie Variablen ausdrücken
4. Lösung: $\vec{x} = \vec{x}_0 + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots$, mit $t_i \in \mathbb{R}$

By Justin Iven Müller (2026)
github.com/JustinIven/zhaw-cheatsheets