Analysis 1

Basics

Intervalle

- Offenes Intervall: $]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Geschlossenes Intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Halboffenes Intervall: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Unendliche Intervalle: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $[b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.

Lösungsformel

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diskriminante

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet über die Art der Lösungen:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$: eine doppelte reelle Lösung
- $D < 0$: keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)

Potenzregel

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\
a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

Logarithmusregeln

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^r) &= r \cdot \log_a(x) \\
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a) &= 1 \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a, b > 0,\ a, b \neq 1)
\end{aligned}$$

Binomische Formeln

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

mit der Besonderheit $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus n auszuwählen, und ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Summenregeln

Für endliche Summen gelten folgende Regeln:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Funktionen

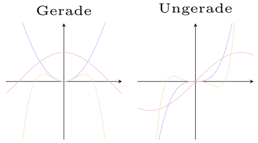
Eine Funktion f ordnet jedem Element x aus einem Definitionsbereich D genau einen Wert $f(x)$ zu.

Grundbegriffe

- **Definitionsbereich** D: alle x, für die $f(x)$ definiert ist.
- **Wertebereich** W: alle Werte $f(x)$, die tatsächlich auftreten.
- **Graph**: Menge aller Punkte $(x, f(x))$ im Koordinatensystem.

Wichtige Eigenschaften

- **Stetigkeit**: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.*
- **Monotonie**: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt. Analog für monoton fallend. Bei *strenger* Monotonie gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Symmetrie**: Eine Funktion ist *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.



Nullstellen

Eine Nullstelle einer Funktion f ist ein Wert x_0 mit $f(x_0) = 0$.

Operationen

Seien f und g zwei Funktionen von einer beliebigen Menge D in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert:

- **Addition**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Subtraktion**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplikation**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Division**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

Komposition

Die Komposition von Funktionen $f : A \to B_f$ und $g : B_g \to C$ ist definiert als

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Voraussetzung: $B_f \subseteq B_g$

Umkehrfunktionen

f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} genau dann, wenn f **injektiv** ist.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

Erklärung: Eine Umkehrfunktion "dreht" die Zuordnung um; ihre Steigung ist der Kehrwert der ursprünglichen.

Polynome

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Der höchste Exponent n heisst *Grad* des Polynoms.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effiziente Methode zur Auswertung von Polynomen. Es hat die Form:

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Linearfaktorisierung eines Polynoms nach dem Horner-Schema:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

	2	−12	22	−12
$x = 2$		4 +	−16 +	12 +
	2	−8	6	0

$$f(x) = (2x^2 - 8x + 6)(x - 2)$$

Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom von Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

m-fache Nullstelle

x_0 ist eine m-fache Nullstelle des Polynoms $f(x)$, wenn $f(x)$ in der Form

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $g(x)$ ein Polynom ist, das x_0 nicht als Nullstelle hat.

Polynomdivision

Mit dem Horner-Schema können nur Linearfaktoren $(x - x_0)$ abgeteilt werden. Für die Division durch Polynome höheren Grades wird die Polynomdivision verwendet:

$$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

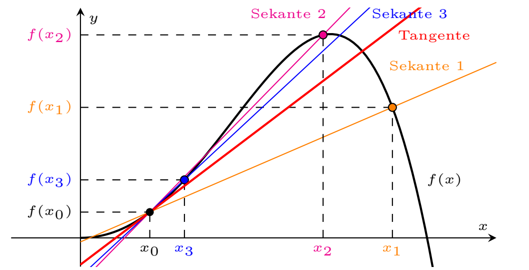
wobei $Q(x)$ der Quotient und $R(x)$ der Rest ist. Der Grad des Rests ist kleiner als der Grad des Divisors $g(x)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : \left(x^2 + x - 4\right) = x - 7 + \dfrac{22x - 34}{x^2 + x - 4} \\
\underline{-x^3 - x^2 + 4x} \\
\quad -7x^2 + 15x - 6 \\
\quad \underline{7x^2 + 7x - 28} \\
\qquad 22x - 34
\end{array}$$

Differentialrechnung

Sei $f(x) : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Ableitung $f'(x_0)$ beschreibt die Änderungsrate der Funktion an der Stelle x_0. Sie wird definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$$



Ableitungsregeln

- **Faktorregel:** $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- **Summenregel:** $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Wichtige Ableitungen

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0 \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x > 0, a > 0, a \neq 1 \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x
\end{aligned}
$$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn die links- und rechtsseitigen Ableitungen übereinstimmen. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.
Definition: Eine Funktion heisst differenzierbar, wenn die Ableitung an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs existiert.

Tangenten- und Normalengleichung

Die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 hat die Gleichung:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Die Normalenlinie, die senkrecht zur Tangente steht, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und eine Näherung x_0 für eine Nullstelle (Fixpunkt). Die Iterationsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Konvergenz des Verfahrens hängt von der Wahl der Startnäherung und den Eigenschaften der Funktion ab.

Integralrechnung

Unbestimmte Integrale

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **unbestimmte Integral** von f ist definiert als

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

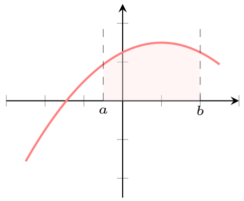
wobei F eine Stammfunktion von f ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und C eine Konstante ist.

Bestimmte Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.



Flächeninhalt unter einer Funktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Der Flächeninhalt A unter der Funktion f über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

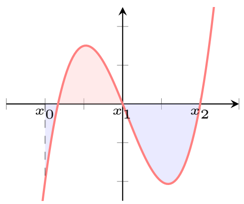
$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Für den Fall, dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist der Flächeninhalt A über der Funktion f definiert als

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Im Allgemeinen: Sei X die Menge aller Nullstellen von f im Intervall $[a, b]$, also $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dann ist der Flächeninhalt A zwischen der Funktion f und der x-Achse über das Intervall $[a, b]$ definiert als

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right|.$$

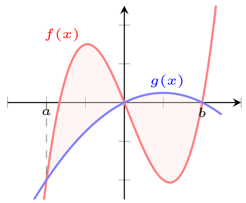


Integral zwischen zwei Funktionen

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Das **Integral zwischen zwei Funktionen** f und g über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = F(b) - G(a),$$

wobei F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g ist.



Integrationsregeln

Konstantenregel

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt für das Integral einer konstanten Funktion

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a).$$

Summenregel

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt für das Integral der Summe von zwei Funktionen

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Polynomregel

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für das Integral einer Potenzfunktion

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Integrale von ausgewählten Funktionen

Potentz- und Logarithmusfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \\
\int \ln(x)\,dx &= x\ln(x) - x + C \quad (x > 0) \\
\int \log_a(x)\,dx &= \frac{x\ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Funktionen:

$$
\begin{aligned}
\int \sin(x)\,dx &= -\cos(x) + C \\
\int \cos(x)\,dx &= \sin(x) + C \\
\int \tan(x)\,dx &= -\ln|\cos(x)| + C
\end{aligned}
$$

Folgen und Reihen

Eine *Folge* ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n ein Element a_n aus einer Menge M zuordnet. Man schreibt eine Folge als $a = (a_n)$.
Eine *Reihe* ist die Summe der Glieder einer Folge, dargestellt als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Darstellung von Folgen

Jedes Glied der Folge wird in der...

- **Explizite Darstellung**: durch eine Formel in Abhängigkeit von n definiert, z.B. $a_n = 2n + 1$.
- **Implizite Darstellung**: durch das vorherige Glied definiert, z.B. $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ für $n > 1$.

Grenzwerte von Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen einen Grenzwert L, wenn sich die Glieder der Folge immer näher an L annähern, wenn n gegen unendlich geht. Formal ausgedrückt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird als *divergent* bezeichnet.

Arithmetische Folgen und Reihen

Eine arithmetische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Diese Differenz wird als *Differenz d* bezeichnet. Das n-te Glied einer arithmetischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Die Summe S_n der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = n\left(2a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{\frac{d}{2} - a_1 \pm \sqrt{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2dS_n}}{d} \\
d &= \frac{2(S_n - na_1)}{n(n-1)} \\
a_1 &= \frac{S_n - \frac{n(n-1)}{2}d}{n}
\end{aligned}
$$

Geometrische Folge und Reihen

Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Dieses Verhältnis wird als *Quotient q* bezeichnet. Das n-te Glied einer geometrischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Summe S_n der ersten n Glieder einer geometrischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

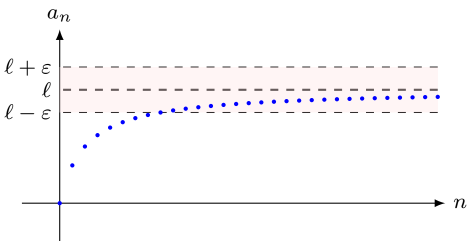
Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{\log\left(\frac{S_n(1-q)}{a_1} + q^n\right)}{\log(q)} + 1 \\
q &= \sqrt[n-1]{\frac{S_n(1-q)}{a_1} + q^n} \\
a_1 &= S_n \frac{1-q}{1-q^n}
\end{aligned}
$$

Grenzwerte

Eine reelle Zahl ℓ heisst *Grenzwert* der Folge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$



Rechenregeln für Grenzwerte

Seien a, b zwei konvergente Folgen und c eine Konstante, so gelten folgende Rechenregeln:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \qquad \text{falls } b \neq 0$$

Grenzwerte von Polynomen

Sei $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ ein Polynom vom Grad k mit $a_k \neq 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

Sei $p(n)$ und $q(n)$ zwei Polynome vom Grad g_p bzw. g_q mit führenden Koeffizienten a_k bzw. b_m. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } g_p < g_q \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{falls } g_p = g_q \\ +\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} < 0 \end{cases}$$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{existiert nicht}, & q \leq -1 \end{cases}$$

Sandwich-Prinzip

Seien (a_n), (b_n) und (c_n) drei Folgen, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n ab einem gewissen Index n_0. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ gilt, so konvergiert auch (b_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

By Justin Iven Müller (2025)
github.com/JustinIven/zhaw-cheatsheets