

# Analysis 1

## Basics

### Intervalle

- Offenes Intervall:  $[a, b[ = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Geschlossenes Intervall:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Halboffenes Intervall:  $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ,  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Unendliche Intervalle:  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ,  $[b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

### Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form  $ax^2 + bx + c = 0$  mit  $a \neq 0$ .

### Lösungsformel

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### Diskriminante

Die Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$  entscheidet über die Art der Lösungen:

- $D > 0$ : zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$ : eine doppelte reelle Lösung
- $D < 0$ : keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)

### Potenzregel

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\ a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \\ (ab)^n &= a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

### Logarithmusregeln

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a(x^r) &= r \cdot \log_a(x) \\ \log_a(1) &= 0 \\ \log_a(a) &= 1 \\ \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a, b > 0, a, b \neq 1) \end{aligned}$$

### Binomische Formeln

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

### Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl  $n$  ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

mit der Besonderheit  $0! = 1$ .

### Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  gibt die Anzahl der Möglichkeiten an,  $k$  Objekte aus  $n$  auszuwählen, und ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

### Summenregeln

Für endliche Summen gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c &= n \cdot c \\ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) &= c \cdot \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

### Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl  $x$  ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### Funktionen

Eine Funktion  $f$  ordnet jedem Element  $x$  aus einem Definitionsbereich  $D$  genau einen Wert  $f(x)$  zu.

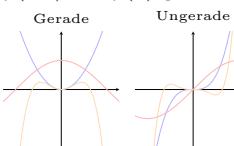
### Grundbegriffe

- Definitionsbereich  $D$ :** alle  $x$ , für die  $f(x)$  definiert ist.
- Wertebereich  $W$ :** alle Werte  $f(x)$ , die tatsächlich auftreten.
- Graph:** Menge aller Punkte  $(x, f(x))$  im Koordinatensystem.

### Wichtige Eigenschaften

- Stetigkeit:** Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.\*
- Monotonie:** Eine Funktion ist monoton steigend, wenn  $f(x_1) \leq f(x_2)$  für alle  $x_1 < x_2$  gilt. Analog für monoton fallend. Bei strenger Monotonie gilt  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- Symmetrie:** Eine Funktion ist *gerade*, wenn  $f(-x) = f(x)$  gilt, und *ungerade*, wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt.



### Nullstellen

Eine Nullstelle einer Funktion  $f$  ist ein Wert  $x_0$  mit  $f(x_0) = 0$ .

### Operationen

Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen von einer beliebigen Menge  $D$  in  $\mathbb{R}$ . Dann sind folgende Operationen definiert:

- Addition:**  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- Subtraktion:**  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- Multiplikation:**  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Division:**  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

### Komposition

Die Komposition von Funktionen  $f : A \rightarrow B_f$  und  $g : B_g \rightarrow C$  ist definiert als

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Voraussetzung:  $B_f \subseteq B_g$

### Umkehrfunktionen

$f$  besitzt eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  genau dann, wenn  $f$  **injektiv** ist.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

Erklärung: Eine Umkehrfunktion "dreht" die Zuordnung um; ihre Steigung ist der Kehrwert der ursprünglichen.

### Polynome

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$ . Der höchste Exponent  $n$  heißt *Grad* des Polynoms.

### Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effiziente Methode zur Auswertung von Polynomen. Es hat die Form:

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + \dots + a_1) x + a_0$$

Linearfaktorisierung eines Polynoms nach dem Horner-Schema:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & -12 & 22 & -12 & & \\ x = 2 & & 4 & + & -16 & + & 12 \\ & 2 & -8 & & 6 & & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (2x^2 - 8x + 6)(x - 2)$$

### Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom von Grad  $n$  hat höchstens  $n$  reelle Nullstellen.

### $m$ -fache Nullstelle

$x_0$  ist eine  $m$ -fache Nullstelle des Polynoms  $f(x)$ , wenn  $f(x)$  in der Form

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$$

geschrieben werden kann, wobei  $g(x)$  ein Polynom ist, das  $x_0$  nicht als Nullstelle hat.

### Polynomdivision

Mit dem Horner-Schema können nur Linearfaktoren  $(x - x_0)$  abgeteilt werden. Für die Division durch Polynome höheren Grades wird die Polynomdivision verwendet:

$$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

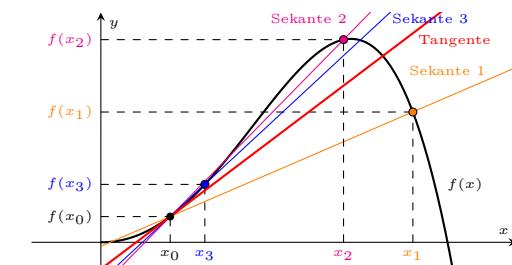
wobei  $Q(x)$  der Quotient und  $R(x)$  der Rest ist. Der Grad des Rests ist kleiner als der Grad des Divisors  $g(x)$ .

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x^2 + x - 4) = x - 7 + \frac{22x - 34}{x^2 + x - 4} \\ \underline{-x^3 - x^2 + 4x} \\ -7x^2 + 15x - 6 \\ \underline{-7x^2 - 7x + 28} \\ 22x - 34 \end{array}$$

### Differentialrechnung

Sei  $f(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Ableitung  $f'(x_0)$  beschreibt die Änderungsrate der Funktion an der Stelle  $x_0$ . Sie wird definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$$



### Ableitungsregeln

- Faktorregel:**  $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Summenregel:**  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel:**  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel:**  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- Kettenregel:**  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## Wichtige Ableitungen

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad \text{für } a > 0, a \neq 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

## Differenzierbarkeit

Eine Funktion  $f(x)$  ist an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, wenn die links- und rechtsseitigen Ableitungen übereinstimmen. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt.

**Definition:** Eine Funktion heisst differenzierbar, wenn die Ableitung an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs existiert.

## Tangenten- und Normalengleichung

Die Tangente an die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  hat die Gleichung:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Die Normalenlinie, die senkrecht zur Tangente steht, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

## Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. Gegeben sei eine Funktion  $f(x)$  und eine Näherung  $x_0$  für eine Nullstelle (Fixpunkt). Die Iterationsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Konvergenz des Verfahrens hängt von der Wahl der Startnäherung und den Eigenschaften der Funktion ab.

## Integralrechnung

### Unbestimmte Integrale

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das **unbestimmte Integral** von  $f$  ist definiert als

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

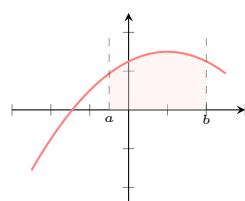
wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, also  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und  $C$  eine Konstante ist.

### Bestimmte Integrale

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das **bestimmte Integral** von  $f$  über das Intervall  $[a, b]$  ist definiert als

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

wobei  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$  ist, also  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .



### Flächeninhalt unter einer Funktion

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Der Flächeninhalt  $A$  unter der Funktion  $f$  über das Intervall  $[a, b]$  ist definiert als

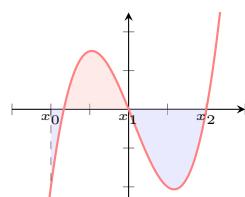
$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Für den Fall, dass  $f(x) \leq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , ist der Flächeninhalt  $A$  über der Funktion  $f$  definiert als

$$A = - \int_a^b f(x) dx.$$

*Im Allgemeinen:* Sei  $X$  die Menge aller Nullstellen von  $f$  im Intervall  $[a, b]$ , also  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mit  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Dann ist der Flächeninhalt  $A$  zwischen der Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse über das Intervall  $[a, b]$  definiert als

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right|.$$

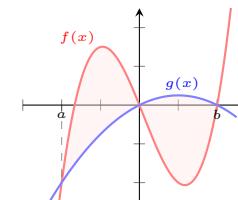


### Integral zwischen zwei Funktionen

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Das **Integral zwischen zwei Funktionen**  $f$  und  $g$  über das Intervall  $[a, b]$  ist definiert als

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = F(b) - G(a),$$

wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$  ist.



## Grenzwerte von Folgen

Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen einen Grenzwert  $L$ , wenn sich die Glieder der Folge immer näher an  $L$  annähern, wenn  $n$  gegen unendlich geht. Formal ausgedrückt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird als *divergent* bezeichnet.

## Arithmetische Folgen und Reihen

Eine arithmetische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Diese Differenz wird als *Differenz d* bezeichnet. Das  $n$ -te Glied einer arithmetischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Die Summe  $S_n$  der ersten  $n$  Glieder einer arithmetischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = n \left( 2a_1 + \frac{n-1}{2}d \right)$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Größen berechnet werden:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\frac{d}{2} - a_1 \pm \sqrt{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds_n}}{d} \\ d &= \frac{2(S_n - na_1)}{n(n-1)} \\ a_1 &= \frac{S_n - \frac{n(n-1)}{2}d}{n} \end{aligned}$$

## Geometrische Folge und Reihen

Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Dieses Verhältnis wird als *Quotient q* bezeichnet. Das  $n$ -te Glied einer geometrischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Summe  $S_n$  der ersten  $n$  Glieder einer geometrischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

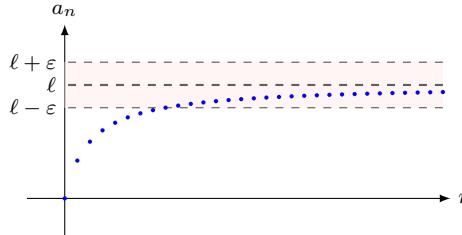
Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Größen berechnet werden:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\log \left( \frac{S_n(1-q)}{a_1} + q^n \right)}{\log(q)} + 1 \\ q &= \sqrt[n-1]{\frac{S_n(1-q)}{a_1} + q^n} \\ a_1 &= S_n \frac{1-q}{1-q^n} \end{aligned}$$

## Grenzwerte

Eine reelle Zahl  $\ell$  heisst *Grenzwert* der Folge  $(a_n)$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine natürliche Zahl  $n_0$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - \ell| < \varepsilon$ . Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$$



## Sandwich-Prinzip

Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  und  $(c_n)$  drei Folgen, so dass  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n$  ab einem gewissen Index  $n_0$ . Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$  gilt, so konvergiert auch  $(b_n)$  und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

## Rechenregeln für Grenzwerte

Seien  $a, b$  zwei konvergente Folgen und  $c$  eine Konstante, so gelten folgende Rechenregeln:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{falls } b \neq 0$$

## Grenzwerte von Polynomen

Sei  $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$  ein Polynom vom Grad  $k$  mit  $a_k \neq 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

Sei  $p(n)$  und  $q(n)$  zwei Polynome vom Grad  $g_p$  bzw.  $g_q$  mit führenden Koeffizienten  $a_k$  bzw.  $b_m$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } g_p < g_q \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{falls } g_p = g_q \\ +\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} < 0 \end{cases}$$

## Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{existiert nicht,} & q \leq -1 \end{cases}$$