# Analysis 1

## Basics

### Intervalle

- Offenes Intervall:
  $]a, b[ = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Geschlossenes Intervall:
  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Halboffenes Intervall: $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$,
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Unendliche Intervalle: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$,
  $[b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

### Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.

#### Lösungsformel

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

#### Diskriminante

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet über die Art der Lösungen:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$: eine doppelte reelle Lösung
- $D < 0$: keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)

### Potenzregel

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\
a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

### Logarithmusregeln

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^r) &= r \cdot \log_a(x) \\
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a) &= 1 \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a, b > 0,\ a, b \neq 1)
\end{aligned}$$

### Binomische Formeln

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

### Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl $n$ ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

mit der Besonderheit $0! = 1$.

### Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, $k$ Objekte aus $n$ auszuwählen, und ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

### Summenregeln

Für endliche Summen gelten folgende Regeln:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

### Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl $x$ ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

## Funktionen

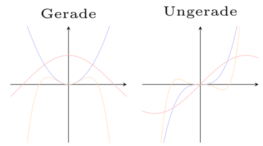
Eine Funktion $f$ ordnet jedem Element $x$ aus einem Definitionsbereich $D$ genau einen Wert $f(x)$ zu.

### Grundbegriffe

- **Definitionsbereich** $D$: alle $x$, für die $f(x)$ definiert ist.
- **Wertebereich** $W$: alle Werte $f(x)$, die tatsächlich auftreten.
- **Graph**: Menge aller Punkte $(x, f(x))$ im Koordinatensystem.

### Wichtige Eigenschaften

- **Stetigkeit**: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.*
- **Monotonie**: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt. Analog für monoton fallend. Bei *strenger* Monotonie gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Symmetrie**: Eine Funktion ist *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.




### Nullstellen

Eine Nullstelle einer Funktion $f$ ist ein Wert $x_0$ mit $f(x_0) = 0$.

### Operationen

Seien $f$ und $g$ zwei Funktionen von einer beliebigen Menge $D$ in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert:

- **Addition**: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Subtraktion**: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplikation**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Division**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

### Komposition

Die Komposition von Funktionen $f : A \to B_f$ und $g : B_g \to C$ ist definiert als

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

*Voraussetzung:* $B_f \subseteq B_g$

### Umkehrfunktionen

$f$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ genau dann, wenn $f$ **injektiv** ist.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

*Erklärung: Eine Umkehrfunktion "dreht" die Zuordnung um; ihre Steigung ist der Kehrwert der ursprünglichen.*

## Polynomfunktionen

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Der höchste Exponent $n$ heisst *Grad* des Polynoms.

### Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effiziente Methode zur Auswertung von Polynomen. Es hat die Form:

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Linearfaktorisierung eines Polynoms nach dem Horner-Schema:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -12 & 22 & -12 \\
x = 2 & & 4 & -16 & 12 \\
\hline
 & 2 & -8 & 6 & 0
\end{array}$$

$$f(x) = (2x^2 - 8x + 6)(x - 2)$$

### Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom von Grad $n$ hat höchstens $n$ reelle Nullstellen.

### $m$-fache Nullstelle

$x_0$ ist eine $m$-fache Nullstelle des Polynoms $f(x)$, wenn $f(x)$ in der Form

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $g(x)$ ein Polynom ist, das $x_0$ nicht als Nullstelle hat.

### Polynomdivision

Mit dem Horner-Schema können nur Linearfaktoren $(x - x_0)$ abgeteilt werden. Für die Division durch Polynome höheren Grades wird die Polynomdivision verwendet:

$$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

wobei $Q(x)$ der Quotient und $R(x)$ der Rest ist. Der Grad des Rests ist kleiner als der Grad des Divisors $g(x)$.

$$\begin{array}{l}
(\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6\ ) : \left(x^2 + x - 4\right) = x - 7 + \dfrac{22x - 34}{x^2 + x - 4} \\
\underline{-\,x^3 - x^2 + 4x} \\
\qquad -7x^2 + 15x - 6 \\
\qquad \underline{\ 7x^2 + 7x - 28} \\
\qquad\qquad 22x - 34
\end{array}$$

## Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x) \neq 0$.

### Eigenschaften

Rationale Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- Sie sind definiert, solange der Nenner $q(x)$ nicht null ist.
- Sie können durch Partialbruchzerlegung in einfachere Brüche zerlegt werden.
- Sie haben höchstens so viele Nullstellen wie der Grad des Zählers.

### Definitionslücken

Rationale Funktionen können Definitionslücken aufweisen, die auftreten, wenn der Nenner $q(x)$ an bestimmten Stellen null wird. An diesen Stellen ist die Funktion nicht definiert.
Sei $x_0$ eine Definitionslücken von $f(x)$. Der Linearfaktor $(x - x_0)$ sei aus $p(x)$ und $q(x)$ abgeteilt:

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{j_p} \cdot p_1(x)}{(x - x_0)^{j_q} \cdot q_1(x)}, \quad p_1(x_0), \quad q_1(x_0) \neq 0$$

mit $j_p, j_q \in \mathbb{N}$ und $j_q > 1$.

- Wenn $j_p \leq j_q$, dann ist $x_0$ eine *hebbare* Definitionslücke.

- Wenn $j_p < j_q$, dann ist $x_0$ eine Polstelle der Ordnung $j_q - j_p$.
  - Ordnung gerade: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.
  - Ordnung ungerade: Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

### Asymptoten

Rationale Funktionen können folgende Asymptoten haben:

- *Vertikale Asymptoten*: Treten auf, wenn $q(x) = 0$ und $p(x) \neq 0$.
- *Horizontale Asymptoten*: Bestimmen das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.

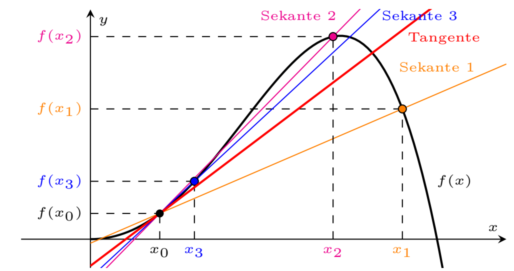
### Graphen

Der Graph einer rationalen Funktion kann durch Nullstellen und Asymptoten skizziert werden. Dabei sind die Nullstellen die Lösungen von $p(x) = 0$ und die Asymptoten die Lösungen von $q(x) = 0$.

## Differentialrechnung

Sei $f(x) : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Ableitung $f'(x_0)$ beschreibt die Änderungsrate der Funktion an der Stelle $x_0$. Sie wird definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$$




### Ableitungsregeln

- **Faktorregel:** $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- **Summenregel:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

### Wichtige Ableitungen

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{für } a > 0, a \neq 1 \\
(e^x)' &= e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0 \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x > 0, a > 0, a \neq 1 \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x
\end{aligned}$$

### Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x_0$ differenzierbar, wenn die links- und rechtsseitigen Ableitungen übereinstimmen. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. *Definition:* Eine Funktion heisst differenzierbar, wenn die Ableitung an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs existiert.

### Tangenten- und Normalengleichung

Die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$ hat die Gleichung:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Die Normalenlinie, die senkrecht zur Tangente steht, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

### Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und eine Näherung $x_0$ für eine Nullstelle (Fixpunkt). Die Iterationsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Konvergenz des Verfahrens hängt von der Wahl der Startnäherung und den Eigenschaften der Funktion ab.

## Integralrechnung

### Unbestimmte Integrale

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **unbestimmte Integral** von $f$ ist definiert als

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

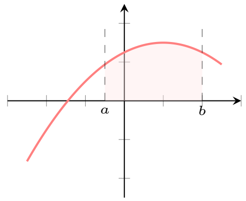
wobei $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $C$ eine Konstante ist.

### Bestimmte Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **bestimmte Integral** von $f$ über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

wobei $F$ eine beliebige Stammfunktion von $f$ ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.




### Flächeninhalt unter einer Funktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Der Flächeninhalt $A$ unter der Funktion $f$ über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

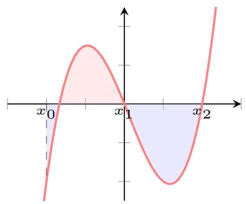
$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Für den Fall, dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist der Flächeninhalt $A$ über der Funktion $f$ definiert als

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

*Im Allgemeinen:* Sei $X$ die Menge aller Nullstellen von $f$ im Intervall $[a, b]$, also $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dann ist der Flächeninhalt $A$ zwischen der Funktion $f$ und der $x$-Achse über das Intervall $[a, b]$ definiert als

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right|.$$

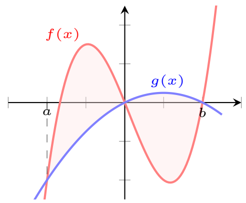



### Integral zwischen zwei Funktionen

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Das **Integral zwischen zwei Funktionen** $f$ und $g$ über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = F(b) - G(a),$$

wobei $F$ eine Stammfunktion von $f$ und $G$ eine Stammfunktion von $g$ ist.




### Integrationsregeln

#### Konstantenregel

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt für das Integral einer konstanten Funktion

$$\int_a^b c\, dx = c \cdot (b - a).$$

#### Summenregel

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt für das Integral der Summe von zwei Funktionen

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

#### Polynomregel

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für das Integral einer Potenzfunktion

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.$$

### Integrale von ausgewählten Funktionen

Potentz- und Logarithmusfunktionen:

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - x + C \quad (x > 0)$$

$$\int \log_a(x)\, dx = \frac{x \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

## Folgen und Reihen

Eine *Folge* ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl $n$ ein Element $a_n$ aus einer Menge $M$ zuordnet. Man schreibt eine Folge als $a = (a_n)$.
Eine *Reihe* ist die Summe der Glieder einer Folge, dargestellt als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

### Darstellung von Folgen

Jedes Glied der Folge wird in der...

- **Explizite Darstellung**: durch eine Formel in Abhängigkeit von $n$ definiert, z.B. $a_n = 2n + 1$.
- **Implizite Darstellung**: durch das vorherige Glied definiert, z.B. $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ für $n > 1$.

## Grenzwerte von Folgen

Eine Folge $(a_n)$ konvergiert gegen einen Grenzwert $L$, wenn sich die Glieder der Folge immer näher an $L$ annähern, wenn $n$ gegen unendlich geht. Formal ausgedrückt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird als *divergent* bezeichnet.

## Arithmetische Folgen und Reihen

Eine arithmetische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Diese Differenz wird als *Differenz* $d$ bezeichnet. Das $n$-te Glied einer arithmetischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Die Summe $S_n$ der ersten $n$ Glieder einer arithmetischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = n\left(2a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

$$n = \frac{\frac{d}{2} - a_1 \pm \sqrt{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds_n}}{d}$$

$$d = \frac{2(S_n - na_1)}{n(n-1)}$$

$$a_1 = \frac{S_n - \frac{n(n-1)}{2}d}{n}$$

## Geometrische Folge und Reihen

Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Dieses Verhältnis wird als *Quotient* $q$ bezeichnet. Das $n$-te Glied einer geometrischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Summe $S_n$ der ersten $n$ Glieder einer geometrischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

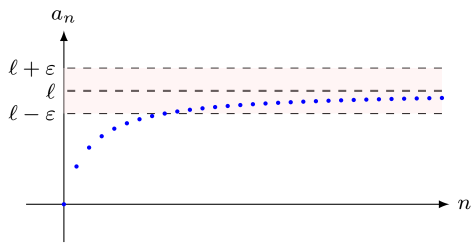
$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{S_n(1-q)}{a_1}\right)}{\ln(q)}$$

$$a_1 = S_n \frac{1-q}{1-q^n}$$

# Grenzwerte

Eine reelle Zahl $\ell$ heisst *Grenzwert* der Folge $(a_n)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$




## Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $a, b$ zwei konvergente Folgen und $c$ eine Konstante, so gelten folgende Rechenregeln:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{falls } b \neq 0$$

## Grenzwerte von Polynomen

Sei $p(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ ein Polynom vom Grad $k$ mit $a_k \neq 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

Sei $p(n)$ und $q(n)$ zwei Polynome vom Grad $g_p$ bzw. $g_q$ mit führenden Koeffizienten $a_k$ bzw. $b_m$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } g_p < g_q \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{falls } g_p = g_q \\ +\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} < 0 \end{cases}$$

## Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{existiert nicht}, & q \leq -1 \end{cases}$$

## Sandwich-Prinzip

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ und $(c_n)$ drei Folgen, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n$ ab einem gewissen Index $n_0$. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ gilt, so konvergiert auch $(b_n)$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

# Kurvendiskussion

- Definitionsbereich
- Symmetrieeigenschaften (gerade, ungerade, periodisch)
- Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen
- Randpunkte (Verhalten für $x \to \pm\infty$)
- Extrempunkte
- Wendepunkte/Sattelpunkte
- Monotonieverhalten


By Justin Iven Müller (2025)
github.com/JustinIven/zhaw-cheatsheets