Analysis 1

Basics

Intervalle

- Offenes Intervall: $]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Geschlossenes Intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Halboffenes Intervall: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Unendliche Intervalle: $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $[b,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.

Lösungsformel

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diskriminante

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet über die Art der Lösungen:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$: eine doppelte reelle Lösung
- $D < 0$: keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)

Potenzregel

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (n \neq 0)$$

Logarithmusregeln

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$$
$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a(a) = 1$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a, b > 0,\ a, b \neq 1)$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

mit der Besonderheit $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus n auszuwählen, und ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Summenregeln

Für endliche Summen gelten folgende Regeln:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Funktionen

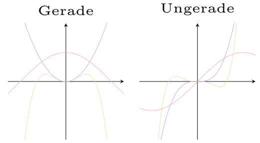
Eine Funktion f ordnet jedem Element x aus einem Definitionsbereich D genau einen Wert $f(x)$ zu.

Grundbegriffe

- **Definitionsbereich** D: alle x, für die $f(x)$ definiert ist.
- **Wertebereich** W: alle Werte $f(x)$, die tatsächlich auftreten.
- **Graph**: Menge aller Punkte $(x, f(x))$ im Koordinatensystem.

Wichtige Eigenschaften

- **Stetigkeit**: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.*
- **Monotonie**: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt. Analog für monoton fallend. Bei *strenger* Monotonie gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Symmetrie**: Eine Funktion ist *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.



Nullstellen

Eine Nullstelle einer Funktion f ist ein Wert x_0 mit $f(x_0) = 0$.

Operationen

Seien f und g zwei Funktionen von einer beliebigen Menge D in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert:

- **Addition**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Subtraktion**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplikation**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Division**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

Komposition

Die Komposition von Funktionen $f : A \to B_f$ und $g : B_g \to C$ ist definiert als

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Voraussetzung: $B_f \subseteq B_g$

Umkehrfunktionen

f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} genau dann, wenn f **injektiv** ist.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

Erklärung: Eine Umkehrfunktion "dreht" die Zuordnung um; ihre Steigung ist der Kehrwert der ursprünglichen.

Polynome

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Der höchste Exponent n heisst *Grad* des Polynoms.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effiziente Methode zur Auswertung von Polynomen. Es hat die Form:

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

...

Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom von Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen. ...

Polynomdivision

...

Ableitungen

Eine Ableitung beschreibt die Änderung (Steigung in der Ebene) einer Funktion. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ wird als $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}$ notiert.

Regeln der Differentiation

Es gibt einige grundlegende Regeln zur Ableitung von Funktionen:

- **Konstantenregel:** $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$, wobei c eine Konstante ist.
- **Potenzregel:** $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- **Summenregel:** $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
- **Produktregel:** $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$.
- **Quotientenregel:** $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$.

Höhere Ableitungen

Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist die Ableitung der ersten Ableitung und beschreibt die Krümmung der Funktion. Höhere Ableitungen können ebenfalls gebildet werden und liefern Informationen über das Verhalten der Funktion.

Anwendungen der Ableitung

Ableitungen finden in vielen Bereichen Anwendung, z.B. in der Physik zur Beschreibung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen oder in der Wirtschaft zur Analyse von Kosten- und Erlösfunktionen.