

Diskrete Mathematik

Zahlenmengen

\mathbb{N}	natürliche Zahlen
\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen mit 0
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{Q}	rationale Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{C}	komplexe Zahlen

Aussagenlogik

Aussage	Ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.
Prädikat	Eine Aussage mit Variablen. n -stellige Prädikate.

Grundidee

Aus gegebenen Prädikaten/Aussagen lassen sich durch Junktoren neue Aussagen bilden. (z. B. Kombinationen mit $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$).

Definitionen

- Negation:** $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist. (Doppelte Negation: $A \Leftrightarrow \neg \neg A$.)
- Konjunktion:** $A \wedge B$ ist wahr genau dann, wenn A und B wahr sind. (assoziativ, kommutativ, idempotent)
- Disjunktion:** $A \vee B$ ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist. (assoziativ, kommutativ, idempotent)
- Implikation:** $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$. (Kontraposition: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.)
- Äquivalenz:** $A \Leftrightarrow B$ genau dann, wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Wichtige Regeln

- De Morgan:** $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- Distributivität:** $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Syntaktische Bindung:** \neg bindet stärker als \wedge, \vee ; diese binden stärker als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- Modus Ponens:** Aus $A \wedge (A \Rightarrow B)$ folgt B .
- Transitivität:** Aus $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ folgt $A \Rightarrow C$.

Hinweis zur Redundanz

Jeder Ausdruck mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ lässt sich ausschliesslich mit \neg und \vee darstellen. z.B.

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

Quantoren

Quantoren dienen zur Formalisierung von Aussagen wie:

- $\forall x A(x)$: Für alle x gilt $A(x)$
- $\exists x A(x)$: Es existiert ein x mit $A(x)$

Mehrere gleichartige Quantoren:

$$\forall x, y A(x, y) \quad \text{statt} \quad \forall x \forall y A(x, y)$$

Eingeschränkte Quantoren

$$\forall x \in M A(x) : \text{Für alle } x \in M \text{ gilt } A(x)$$
$$\exists x \in M A(x) : \text{Es gibt } x \in M \text{ mit } A(x)$$

Auch möglich mit Relationen:

$$\forall x < y A(x) \quad \text{oder} \quad \exists x \leq y A(x)$$

Als Junktoren

Für endliche Mengen $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ gilt:

$$\forall x \in M A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge \dots \wedge A(x_n)$$
$$\exists x \in M A(x) \Leftrightarrow A(x_1) \vee \dots \vee A(x_n)$$

Als Makros

$$\exists x \in M A(x) \Leftrightarrow \exists x (x \in M \wedge A(x))$$
$$\forall x \in M A(x) \Leftrightarrow \forall x (x \in M \Rightarrow A(x))$$

Zusammenhang mit Junktoren

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \quad \text{und} \quad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$
$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x))$$
$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x))$$

Leere Quantoren

Wenn x in B nicht vorkommt:

$$\forall x B \Leftrightarrow B, \quad \exists x B \Leftrightarrow B$$

Mengen

- Menge / Element:** Eine Menge fasst mathematische Objekte (Elemente) zu einem Ganzen zusammen. Für Menge X und Element y gilt $y \in X$ bzw. $y \notin X$.
- Aufzählende Schreibweise:** $\{x_1, \dots, x_n\}$ bezeichnet die Menge, die genau die genannten Elemente enthält. Die leere Menge heisst \emptyset .
- Extensionalitätsprinzip:** Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben:

$$A = B \iff \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

- Teilmenge:** $A \subseteq B$ genau dann, wenn $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Ist $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so ist A eine *echte* Teilmenge, geschrieben $A \subset B$.
- Folgerungen:** Mengen sind ungeordnet; Mehrfachaufzählung desselben Elements ändert die Menge nicht. Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

Eindeutigkeit der leeren Menge

Seien e_1, e_2 leere Mengen. Dann ist für alle x die Aussage $x \in e_1$ falsch, also ist die Implikation $x \in e_1 \Rightarrow x \in e_2$ wahr; somit $e_1 \subseteq e_2$. Analog $e_2 \subseteq e_1$. Nach Extensionalität folgt $e_1 = e_2$.

Aussonierungsprinzip

Ist A eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft, dann gilt:

$$\{x \in A \mid E(x)\} = \text{Menge aller } x \in A \text{ mit Eigenschaft } E(x).$$

$$a \in \{x \in A \mid E(x)\} \iff a \in A \wedge E(a)$$

Beispiele:

- Gerade Zahlen: $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = 2y)\}$
- Zahlen > 17 : $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 17\}$
- Alle ausser 22: $\{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 22\}$

Ersetzungsprinzip

Ist A eine Menge und $t(x)$ ein Ausdruck, so gilt:

$$\{t(x) \mid x \in A\} = \text{Menge aller Werte von } t(x) \text{ mit } x \in A.$$

$$a \in \{t(x) \mid x \in A\} \iff \exists x \in A (a = t(x))$$

Beispiele:

- Quadratzahlen: $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- Ungerade Zahlen: $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
- Rationale Zahlen: $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- Anfangsabschnitte von \mathbb{N} : $\{\{x \in \mathbb{N} \mid x < y\} \mid y \in \mathbb{N}\}$

Vereinigung

Die Vereinigung von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Schnitt

Die Schnittmenge von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Allgemeine Vereinigung / Schnitt

Sei I eine beliebige Indexmenge (z. B. $I = \{1, 2, \dots, n\}$ oder $I = \mathbb{N}$). Für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge.

Allgemeine Vereinigung

x gehört zur Vereinigung genau dann, wenn es in *mindestens einer* der Mengen A_i enthalten ist.

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Allgemeiner Schnitt

x gehört zum Schnitt genau dann, wenn es in *allen* Mengen A_i enthalten ist.

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Differenz

Die Differenz von zwei Mengen beinhaltet genau die Elemente, die in der ersten Menge, aber nicht in der zweiten Menge enthalten sind:

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Disjunkte Mengen

Zwei Mengen A und B heissen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen.

$$A \cap B = \emptyset.$$

Paarweise disjunkt

Eine Familie von Mengen $(A_i)_{i \in I}$ heisst paarweise disjunkt, wenn keine zwei verschiedenen Mengen ein gemeinsames Element haben. Es gilt:

$$\forall i, j \in I (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

Wichtige Eigenschaften

Für beliebige Mengen A, B, C gelten:

- Idempotenz: $A \cup A = A, A \cap A = A$.
- Kommutativität: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- Assoziativität: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ und analog für \cap .
- Teilmengen: $A \subseteq A \cup B$ und $A \cap B \subseteq A$.
- Distributivität:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

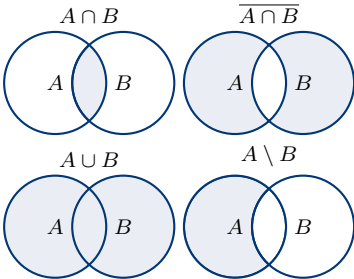
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- De Morgansche Regeln:

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B),$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Venn-Diagramm



Potenzmenge

Für eine Menge A bezeichnet die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A :

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

Beispiele:

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$\mathcal{P}(\{\{a\}\}) = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}.$$

Eigenschaften:

- $A \in \mathcal{P}(A)$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
- Aus $A \subseteq B$ folgt $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- Für die leere Menge gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$