Analysis 1

Basics

Intervalle

- Offenes Intervall: $]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Geschlossenes Intervall: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- Halboffenes Intervall: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- Unendliche Intervalle: $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $[b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$

Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.

Lösungsformel

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Diskriminante

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet über die Art der Lösungen:

- $D > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = 0$: eine doppelte reelle Lösung
- $D < 0$: keine reellen Lösungen (komplexe Lösungen)

Potenzregel

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\
(a^m)^n &= a^{m \cdot n} \\
a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0) \\
a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

Logarithmusregeln

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^r) &= r \cdot \log_a(x) \\
\log_a(1) &= 0 \\
\log_a(a) &= 1 \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad (a, b > 0,\ a, b \neq 1)
\end{aligned}$$

Binomische Formeln

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

Fakultät

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist definiert als:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

mit der Besonderheit $0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus n auszuwählen, und ist definiert als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n.$$

Summenregeln

Für endliche Summen gelten folgende Regeln:

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Betragsfunktion

Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Funktionen

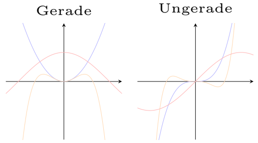
Eine Funktion f ordnet jedem Element x aus einem Definitionsbereich D genau einen Wert $f(x)$ zu.

Grundbegriffe

- **Definitionsbereich** D: alle x, für die $f(x)$ definiert ist.
- **Wertebereich** W: alle Werte $f(x)$, die tatsächlich auftreten.
- **Graph**: Menge aller Punkte $(x, f(x))$ im Koordinatensystem.

Wichtige Eigenschaften

- **Stetigkeit**: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.*
- **Monotonie**: Eine Funktion ist monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt. Analog für monoton fallend. Bei *strenger* Monotonie gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Symmetrie**: Eine Funktion ist *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ gilt, und *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.



Nullstellen

Eine Nullstelle einer Funktion f ist ein Wert x_0 mit $f(x_0) = 0$.

Operationen

Seien f und g zwei Funktionen von einer beliebigen Menge D in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert:

- **Addition**: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Subtraktion**: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplikation**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Division**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

Komposition

Die Komposition von Funktionen $f : A \to B_f$ und $g : B_g \to C$ ist definiert als

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Voraussetzung: $B_f \subseteq B_g$

Umkehrfunktionen

f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} genau dann, wenn f **injektiv** ist.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

Erklärung: Eine Umkehrfunktion "dreht" die Zuordnung um; ihre Steigung ist der Kehrwert der ursprünglichen.

Polynomfunktionen

Ein Polynom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Der höchste Exponent n heisst *Grad* des Polynoms.

Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine effiziente Methode zur Auswertung von Polynomen. Es hat die Form:

$$f(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0$$

Linearfaktorisierung eines Polynoms nach dem Horner-Schema:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

	2	−12	22	−12
$x = 2$		4	−16	12
	2	−8	6	0

$$f(x) = (2x^2 - 8x + 6)(x - 2)$$

Nullstellen von Polynomen

Ein Polynom von Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

m-fache Nullstelle

x_0 ist eine m-fache Nullstelle des Polynoms $f(x)$, wenn $f(x)$ in der Form

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $g(x)$ ein Polynom ist, das x_0 nicht als Nullstelle hat.

Polynomdivision

Mit dem Horner-Schema können nur Linearfaktoren $(x - x_0)$ abgeteilt werden. Für die Division durch Polynome höheren Grades wird die Polynomdivision verwendet:

$$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

wobei $Q(x)$ der Quotient und $R(x)$ der Rest ist. Der Grad des Rests ist kleiner als der Grad des Divisors $g(x)$.

$$\begin{array}{l}
(\ \ x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x^2 + x - 4) = x - 7 + \dfrac{22x - 34}{x^2 + x - 4} \\
\underline{-x^3 - x^2 + 4x} \\
\qquad -7x^2 + 15x - 6 \\
\qquad \underline{\ \ 7x^2 + 7x - 28} \\
\qquad\qquad\quad 22x - 34
\end{array}$$

Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $q(x) \neq 0$.

Eigenschaften

Rationale Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- Sie sind definiert, solange der Nenner $q(x)$ nicht null ist.
- Sie können durch Partialbruchzerlegung in einfachere Brüche zerlegt werden.
- Sie haben höchstens so viele Nullstellen wie der Grad des Zählers.

Definitionslücken

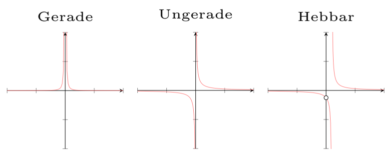
Rationale Funktionen können Definitionslücken aufweisen, die auftreten, wenn der Nenner $q(x)$ an bestimmten Stellen null wird. An diesen Stellen ist die Funktion nicht definiert.
Sei x_0 eine Definitionslücken von $f(x)$. Der Linearfaktor $(x - x_0)$ sei aus $p(x)$ und $q(x)$ abgeteilt:

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{j_p} \cdot p_1(x)}{(x - x_0)^{j_q} \cdot q_1(x)}, \quad p_1(x_0), \quad q_1(x_0) \neq 0$$

mit $j_p, j_q \in \mathbb{N}$ und $j_q > 1$.

- Wenn $j_p \leq j_q$, dann ist x_0 eine *hebbare* Definitionslücke.

- Wenn $j_p < j_q$, dann ist x_0 eine Polstelle der Ordnung $j_q - j_p$.
  - Ordnung gerade: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.
  - Ordnung ungerade: Polstelle mit Vorzeichenwechsel.



Asymptoten

Rationale Funktionen können folgende Asymptoten haben:

- *Vertikale Asymptoten*: Treten auf, wenn $q(x) = 0$ und $p(x) \neq 0$.
- *Horizontale Asymptoten*: Bestimmen das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$.
- *Polynomiale Asymptoten*: Treten auf, wenn der Grad des Zählers grösser ist als der Grad des Nenners. Sie können durch Polynomdivision gefunden werden.

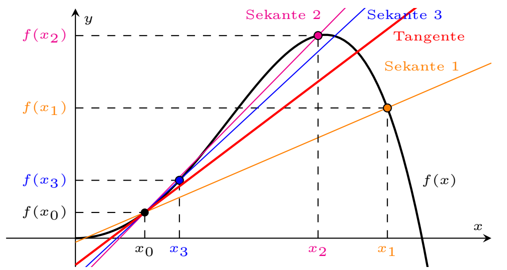
Graphen

Der Graph einer rationalen Funktion kann durch Nullstellen und Asymptoten skizziert werden. Dabei sind die Nullstellen die Lösungen von $p(x) = 0$ und die Asymptoten die Lösungen von $q(x) = 0$.

Differentialrechnung

Sei $f(x) : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Ableitung $f'(x_0)$ beschreibt die Änderungsrate der Funktion an der Stelle x_0. Sie wird definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$$



Ableitungsregeln

- **Faktorregel:** $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- **Summenregel:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Wichtige Ableitungen

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{R} \\
(a^x)' &= a^x \ln a \quad \text{für } a > 0, a \neq 1 \\
(e^x)' &= e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0 \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x > 0, a > 0, a \neq 1 \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x
\end{aligned}$$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn die links- und rechtsseitigen Ableitungen übereinstimmen. Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. *Definition:* Eine Funktion heisst differenzierbar, wenn die Ableitung an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs existiert.

Tangenten- und Normalengleichung

Die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 hat die Gleichung:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Die Normalenlinie, die senkrecht zur Tangente steht, hat die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und eine Näherung x_0 für eine Nullstelle (Fixpunkt). Die Iterationsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Konvergenz des Verfahrens hängt von der Wahl der Startnäherung und den Eigenschaften der Funktion ab.

Integralrechnung

Unbestimmte Integrale

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **unbestimmte Integral** von f ist definiert als

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

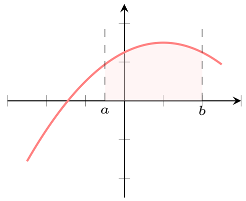
wobei F eine Stammfunktion von f ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und C eine Konstante ist.

Bestimmte Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.



Flächeninhalt unter einer Funktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Der Flächeninhalt A unter der Funktion f über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

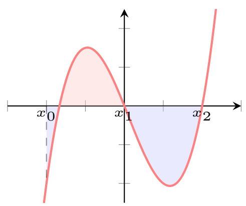
$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Für den Fall, dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist der Flächeninhalt A über der Funktion f definiert als

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Im Allgemeinen: Sei X die Menge aller Nullstellen von f im Intervall $[a, b]$, also $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Dann ist der Flächeninhalt A zwischen der Funktion f und der x-Achse über das Intervall $[a, b]$ definiert als

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right|.$$

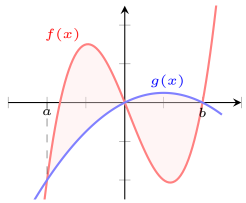


Integral zwischen zwei Funktionen

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Das **Integral zwischen zwei Funktionen** f und g über das Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = F(b) - G(a),$$

wobei F eine Stammfunktion von f und G eine Stammfunktion von g ist.



Integrationsregeln

Konstantenregel

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann gilt für das Integral einer konstanten Funktion

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a).$$

Summenregel

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt für das Integral der Summe von zwei Funktionen

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Polynomregel

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für das Integral einer Potenzfunktion

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Integrale von ausgewählten Funktionen

Potentz- und Logarithmusfunktionen:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C \quad (x > 0)$$

$$\int \log_a(x)\,dx = \frac{x\ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

Trigonometrische Funktionen:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

Folgen und Reihen

Eine *Folge* ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n ein Element a_n aus einer Menge M zuordnet. Man schreibt eine Folge als $a = (a_n)$.
Eine *Reihe* ist die Summe der Glieder einer Folge, dargestellt als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Darstellung von Folgen

Jedes Glied der Folge wird in der...

- **Explizite Darstellung**: durch eine Formel in Abhängigkeit von n definiert, z.B. $a_n = 2n + 1$.
- **Implizite Darstellung**: durch das vorherige Glied definiert, z.B. $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$ für $n > 1$.

Grenzwerte von Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen einen Grenzwert L, wenn sich die Glieder der Folge immer näher an L annähern, wenn n gegen unendlich geht. Formal ausgedrückt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, wird als *divergent* bezeichnet.

Arithmetische Folgen und Reihen

Eine arithmetische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Diese Differenz wird als *Differenz* d bezeichnet. Das n-te Glied einer arithmetischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Die Summe S_n der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = n\left(2a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

$$n = \frac{\frac{d}{2} - a_1 \pm \sqrt{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds_n}}{d}$$

$$d = \frac{2(S_n - na_1)}{n(n-1)}$$

$$a_1 = \frac{S_n - \frac{n(n-1)}{2}d}{n}$$

Geometrische Folge und Reihen

Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, bei der das Verhältnis zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist. Dieses Verhältnis wird als *Quotient* q bezeichnet. Das n-te Glied einer geometrischen Folge kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Summe S_n der ersten n Glieder einer geometrischen Reihe wird durch die folgende Formel gegeben:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Durch Umstellen der obigen Formeln können auch die folgenden Grössen berechnet werden:

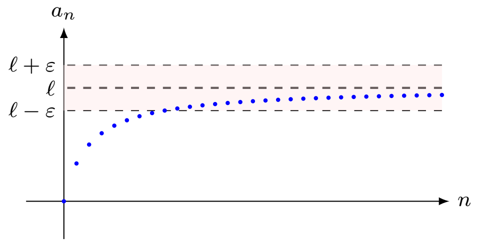
$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{S_n(1-q)}{a_1}\right)}{\ln(q)}$$

$$a_1 = S_n \frac{1-q}{1-q^n}$$

Grenzwerte

Eine reelle Zahl ℓ heisst *Grenzwert* der Folge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$



Rechenregeln für Grenzwerte

Seien a, b zwei konvergente Folgen und c eine Konstante, so gelten folgende Rechenregeln:

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \quad \text{falls } b \neq 0$$

Grenzwerte von Polynomen

Sei $p(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ ein Polynom vom Grad k mit $a_k \neq 0$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{falls } a_k < 0 \end{cases}$$

Sei $p(n)$ und $q(n)$ zwei Polynome vom Grad g_p bzw. g_q mit führenden Koeffizienten a_k bzw. b_m. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } g_p < g_q \\ \frac{a_k}{b_m}, & \text{falls } g_p = g_q \\ +\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{falls } g_p > g_q \text{ und } \frac{a_k}{b_m} < 0 \end{cases}$$

Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{existiert nicht}, & q \leq -1 \end{cases}$$

Sandwich-Prinzip

Seien (a_n), (b_n) und (c_n) drei Folgen, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle n ab einem gewissen Index n_0. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ gilt, so konvergiert auch (b_n) und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Kurvendiskussion

- Definitionsbereich
- Symmetrieeigenschaften (gerade, ungerade, periodisch)
- Schnittpunkte mit Achsen, Polstellen
- Randpunkte (Verhalten für $x \to \pm\infty$)
- Extrempunkte
- Wendepunkte/Sattelpunkte
- Monotonieverhalten

Optimierungsprobleme

1. Problem analysieren und Zielgröße festlegen
2. Variablen und Nebenbedingungen definieren
3. Zielfunktion aufstellen und ggf. auf eine Variable reduzieren
4. Ableitung berechnen und kritische Punkte bestimmen
5. Mit zweiter Ableitung bzw. Randwerten Optimum prüfen
6. Ergebnis interpretieren

By Justin Iven Müller (2025)
github.com/JustinIven/zhaw-cheatsheets