高数表

$$a^n - b^n = \frac{a-b}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i b^{(n-1)-i}} = \frac{a-b}{a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}}$$

$$|\vec{v}| - |\vec{u}| \leq \Big||\vec{v}| - |\vec{u}|\Big| \leq |\vec{v} \pm \vec{u}| \leq |\vec{v}| + |\vec{u}|$$

$$|\alpha| - |\beta| \leq \Big||\alpha| - |\beta|\Big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f_+(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f_-(x_0)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \tan\alpha$$

$$\tan^2\alpha = \sec^2\alpha + 1$$

$$\cot^2\alpha = \csc^2\alpha + 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha}$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha + \arctan\tfrac{b}{a})$$

$$y = \arcsin x = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$$

$$y = \arccos x = \cos^{-1} x \Rightarrow x = \cos y$$

$$y = \arctan x = \tan^{-1} x \Rightarrow x = \tan y$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sinh x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2}{\tanh x + \coth x} = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

$$\sinh x \cosh y = \tfrac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$$

$$\cosh x \sinh y = \tfrac{1}{2}[\sinh(x+y) - \sinh(x-y)]$$

$$\cosh x \cosh y = \tfrac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$$

$$\sinh x \sinh y = \tfrac{1}{2}[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)]$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \tfrac{x+y}{2} \cosh \tfrac{x-y}{2}$$

$$\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \tfrac{x+y}{2} \sinh \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \tfrac{x+y}{2} \cosh \tfrac{x-y}{2}$$

$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

数列极限存在准则：

1. 夹逼定理：

若 $n > k$ 时 $c_n \le a_n \le b_n, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

2. 单调有解收敛准则：单调有界数列一定收敛

柯西归并原理证明极限不存在：

若存在不完全相同的数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ，且使得数列 $\{c_n\}$/函数 $f(x)$ 出现

$\lim\limits_{n\to\infty} c_{a_n} \ne \lim\limits_{n\to\infty} c_{b_n}$ / $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \ne \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

则数列 $\{c_n\}$ / 函数 $f(x)$ 极限不存在

若在相同变化趋势下，存在

$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$

则

$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}(B \ne 0)$

$\lim cf(x) = cA$

若 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$ 存在

则对 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\tan \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{1-\cos \alpha(x)}{\frac{1}{2}\alpha^2(x)} = 1$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\tan \alpha(x) - \sin \alpha(x)}{\alpha^3(x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to \infty} [1+\frac{1}{\alpha(x)}]^{\alpha(x)} = e$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} [1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\ln[1+\alpha(x)]}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x)\to 0} \ln[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \ln e = 1$$

> $$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x)\to 0} \left[\frac{\ln\big(1+[e^{\alpha(x)}-1]\big)}{e^{\alpha(x)}-1}\right]^{-1} = 1^{-1} = 1$$

在同一趋势下

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow \alpha = o(\beta)$$

> $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Rightarrow \beta = o(\alpha)$$

> $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0) \Rightarrow \alpha = O(\beta)$$

> $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \alpha \sim \beta$

> $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C(C \neq 0) \Rightarrow \alpha = O(\beta^k)$

> $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小

若在自变量 x 的某一过程中， $\alpha(x)$ 为非零无穷小量

$\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \ln[1+\alpha(x)] \sim [e^{\alpha(x)} - 1]$

> $\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \tan \alpha(x)$

> $\alpha(x) \sim \sin \alpha(x) \sim \arcsin \alpha(x)$

> $\alpha(x) \sim \tan \alpha(x) \sim \arctan \alpha(x)$

> $\alpha(x) \sim [e^{\alpha(x)} - 1] \Rightarrow [a^{\alpha(x)} - 1] \sim \alpha(x) \ln a$

> $\alpha(x) \sim \ln[1+\alpha(x)] \Rightarrow \log_a[1+\alpha(x)] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$

$[1 - \cos \alpha(x)] \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x)$

$[1+\alpha(x)]^\lambda \sim \lambda\alpha(x)$

函数连续定义：

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$

$f(x_0^+) = f(x_0)$ 即在 $x = x_0$ 处函数右连续

$f(x_0^-) = f(x_0)$ 即在 $x = x_0$ 处函数左连续

对 $\forall x \in (a,b), f(x)$ 连续，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续

> $f(x) \in C(a,b)$

$f(x) \in C(a,b)$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 右连续，即 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 连续

> $f(x) \in C[a,b)$

同理可表明

> $f(x) \in C(a,b]$

> $f(x) \in C[a,b]$

$$C = \bigcup_{a,b \in R} C[a,b]$$

最大值最小值定理：

若 $f(x) \in C[a,b]$ 则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ 使得对 $\forall x \in [a,b]$ 都有

$f(\xi_1) \le f(x) \le f(\xi_2)$

零点定理与介质定理：

若 $f(x) \in C[a,b], f(a)f(b) < 0$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$

若 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f(x)$ 有最小值和最大值分别为 m, M 则对 $\forall \mu \in [m,M], \exists \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$

函数可导定义：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ 存在

> $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)|_{x=x_0} = f'(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$$

对 $\forall x\in(a,b)$ 都有 $f(x)$ 可导，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导

> $f(x)\in D(a,b)$

$$D=\bigcup_{a,b\in R}D(a,b)$$

可导一定连续，连续不一定可导

若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

则 $\mathrm{d}y=A\Delta x$

由 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A$

$\therefore \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

$\therefore \Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

$\therefore y=f(x_0)+\Delta y\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

由对 $y=x$ 上述分析得 $\mathrm{d}x=\Delta x$

对 $\forall x\in R$ 都有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$$

> $$\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\alpha_i$$

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$$

> $$\mathrm{d}(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}\alpha_i(\prod_{j\neq i}\alpha_j)$$

$\mathrm{d}(\frac{1}{v})=-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$

> $\mathrm{d}(\frac{u}{v})=\mathrm{d}(u\cdot\frac{1}{v})=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdots\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$

$\mathrm{d}C=0$

> $\mathrm{d}Cu=C\mathrm{d}u$

$\mathrm{d}x^\mu=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\csc x=\csc x\cot x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\sec x=\sec x\tan x\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}e^x=e^x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\ln[\,|f(x)|\,]=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\sinh x=\cosh x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\cosh x=\sinh x\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\tanh x=(1-\tanh^2 x)\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\operatorname{arcsinh}x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

> $\mathrm{d}\operatorname{arccosh}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}\operatorname{arccot}x=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$\begin{cases}f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}y),n>1\\ \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}y=y\end{cases}$$

$\forall x\in(a,b),f(x)$ 在 (a,b) 上有连续的 n 阶导数，记为

$f\in C^n(a,b)$

> $C^n=\bigcup\limits_{a,b\in R}C^n(a,b)$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^\mu=\begin{cases}\frac{\mu!}{(\mu-n)!}x^{\mu-n},n\le\mu\\ 0,n>\mu\end{cases},\mu\ge0$$

> $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(ax+b)^\mu=\begin{cases}a^n\cdot\frac{\mu!}{(\mu-n)!}(ax+b)^{\mu-n},n\le\mu\\ 0,n>\mu\end{cases},\mu\ge0$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{x})=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

> $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\frac{1}{ax+b})=a^n\frac{(-1)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^\mu=(-1)^n\cdot\frac{(-\mu+n-1)!}{(-\mu-1)!}x^{\mu-n},\mu<0$

> $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(ab+b)^\mu=(-a)^n\cdot\frac{(-\mu+n-1)!}{(-\mu-1)!}x^{\mu-n},\mu<0$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sin(ax+b)=a^n\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos(ax+b)=a^n\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}a^x=(\ln a)^n\cdot a^x$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ln(ax+b)\\
=&\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(ax+b)]\\
=&\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(\frac{1}{ax+b}\times a)\\
=&a^n\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}&\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\\
&\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}
\end{aligned}
$$

费马定理：

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义并且在 x_0 处可导，如果对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$ 恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$

则有 $f'(x_0)=0$

罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理：

罗尔定理：

若 $f(x)\in C[a,b]\bigcap D(a,b),f(a)=f(b)$ 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理：

若 $f(x)\in C[a,b]\bigcap D(a,b)$ 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

> $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

> 有限增量公式：取 $x_0,x_0+\Delta x\in[a,b]$，则在 $x_0,x_0+\Delta x$为端点的区间上，有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x(0<\theta<1)$

柯西中值定理：

若 $f(x), g(x) \in C[a,b] \bigcap D(a,b)$ 且对 $\forall x \in (a,b)$ 都有 $g'(x) \neq 0$ 则 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

泰勒展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

其中拉格朗日余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \xi \in (x, x_0)$

当 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$ 时为佩亚诺型余项

麦克劳林展开：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + o(x^n)$$

$o(x^n) \Rightarrow o(x^{n-m})$ 高阶无穷小可以当低阶无穷小用

$o(x^n) \pm o(x^{n+m}) = o(x^n)$

$o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m})$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2m})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1} x^i}{i} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + C_\alpha^n x^n + o(x^n)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_\alpha^i x^i + o(x^n), n \le \alpha$$

洛必达法则：

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x_0) \neq 0$

若满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0, \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在

则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

简记为 $\frac{0}{0}$ 型

洛必达法则的变型

$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$

$0^0=e^{0\cdot\ln 0}=e^{0\cdot\infty}$

$1^\infty=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{0\cdot\infty}$

$\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$

$\infty\pm\infty=\frac{1}{0}\pm\frac{1}{0}=\frac{1\cdot 0\pm 0\cdot 1}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}$

（注意：以上的都是记号，不是算术式。使用洛必达法则满足上述条件时即可使用）

$\lim\limits_{x\to\infty/+\infty/-\infty}f(x)=A$ 则称 $y=A$ 为曲线 $f(x)$ 的水平渐近线

$\lim\limits_{x\to x_0/x_0^+/x_0^-}=\infty$ 则称 $x=x_0$ 为曲线 $f(x)$ 的铅直渐近线

$$\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to\infty/+\infty/-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ b=\lim\limits_{x\to\infty/+\infty/-\infty}[f(x)-ax]\end{cases}$$

当且仅当两个极限都存在时，称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线

曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\Rightarrow K=\frac{|\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}$

定积分的定义：

关于 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

将区间 $[a,b]$ 插入 $(n-1)$ 个分点，使得 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$， 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(1\le i\le n)$，$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\ldots\Delta x_n\}$

在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i ，设该区间面积对应为 $f(\xi_i)\Delta x_i$

累加所有对应区间的面积，记 $A\approx\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

取极限 $A=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 若极限存在，则记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

改变定积分区间上有限个点的函数值，不影响结果

极限换积分型题目：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})f(\xi_i),\xi_i\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=F(1)-F(0)$$

plus:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(b-a)(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})f(\xi_i),\xi_i\in[a+\frac{b-a}{n}\times(i-1),a+\frac{b-a}{n}\times i]$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=F(b)-F(a)$$

若 $f(x) \in C[a,b]$ 则 $f(x) \in R[a,b]$

若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有界，且间断点的集合是可数集，则 $f(x) \in R[a,b]$

> 可数集：若一个集合能够与自然数的一个子集一一对应，则称为可数集。故有限集都是可数集。

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

若 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上可积，且 $a > b$ 则有 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的线性运算性质：

$$\int_a^b [\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)]\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x$$

> $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

> $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

> $$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

定积分的区间可加性：

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的对称性：

$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$

推论：

$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$

> 对于奇函数 $f(x)$， $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

> 对于偶函数 $f(x)$， $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

定积分的单调性：

$f(x), g(x) \in R[a,b]$ 且 $\forall x \in [a,b], f(x) \le g(x)$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> 若 $f(x) \le 0(\ge 0)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le 0(\ge 0)$

> $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le |\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

定积分中值定则：

若 $f(x) \in C[a,b]$ 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

> 或写作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f[a+\theta(b-a)](b-a), 0 \le \theta \le 1$

记 $\bar{f}|_{[a,b]} = \dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$

若 $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0 (\leq 0)$ 且 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 0$

则 $f(x) \equiv 0$

积分第一中值定理：

若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，且 $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0$

则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> 或记为 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$

若 $F'(x) = f(x)$ 则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

> 有时考虑到在区间 I 上的不定积分，则记为 $\int_I f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

若 $f(x)$ 在区间 I 上的一个连续函数，则 $f(x)$ 在 I 上有原函数

若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数，则 $f(x)$ 在 I 上没有第一类间断点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$$

$$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int k\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C, \mu \neq -1 \\ \ln|x| + C, \mu = -1 \end{cases}$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C(a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\ x + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C = \mathrm{arcsinh}\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C = \mathrm{arccosh}\ x + C$$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} \mathrm{d}x = \sqrt{x^2+a} + C$$

$$\int -\frac{x}{\sqrt{a-x^2}} \mathrm{d}x = \sqrt{a-x^2} + C$$

变限积分：

变上限积分： $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\psi(x)] \cdot \psi'(x) - f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

牛顿莱布尼茨公式：

$f(x) \in C[a,b]$ 且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

不定积分的第一换元法：

设 $f(u)$ 在区间 I 上连续，且有原函数 $F(u)$ ，而 $u = \varphi(x)$ 是一个值域含于 I 中的有连续导数的可微函数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\varphi(x)=u}{=} \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C \overset{u=\varphi(x)}{=} F[\varphi(x)]+C$$

不定积分的第二换元法：

设函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 I_x 的对应区间 I_t 上单调并有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$ 。又设 $K(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 I_t 上的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = K(t)+C \overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=} K[\varphi^{-1}(x)]+C$$

> $\varphi^{-1}(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 的反函数

定积分的换元法：

设 $f(x)\in C[a,b], x=\varphi(t)$ 且

1. $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$
2. $\varphi(t)$ 在以 α 和 β 为端点的区间上有连续导数

> 即 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$

3. 当 t 在上述区间变化时， $\varphi(t)\in[a,b]$

则有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \underset{\varphi(t)=x}{\overset{x=\varphi(t)}{\rightleftarrows}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

设 $f(x)\in C[0,1]$ 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

设以 $T(\neq 0)$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $a,a+T,0,T\in I$

则 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$

分部积分法：

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x=\begin{cases}(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{2},n\text{为偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\quad ,n\text{为奇数}\end{cases}$$

几类可积函数的积分

> 此类知识点较难，建议参考着书上例题学

有理函数的不定积分：

> 有理运算：加减乘除
> 由自变量与常数经过有限次的有理运算所得到的函数称为有理函数，通常记为 $R(x)$

设 m 项多项式函数 $P_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$

设 n 次多项式函数 $Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$

即可设 $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

1. 若 $m\geq n$：

可得存在 $(m-n)$ 次多项式 $M_{m-n}(x)$ 与一个 k 次多项式 $N_k(x)(k<n)$ 使得

$P_m(x)=M_{m-n}(x)\cdot Q_n(x)+N_k(x)$

$\therefore \int R(x)\mathrm{d}x=\int[M_{m-n}(x)+\frac{N_k(x)}{Q_n(x)}]\mathrm{d}x=\int M_{m-n}(x)\mathrm{d}x+\int\frac{N_k(x)}{Q_n(x)}\mathrm{d}x$

2. 若 $m<n$：

由代数基本定理可得， $Q_n(x)$ 可被分解为若干个形如 $(x-a)^k$ 或 $(x^2+px+q)^k$ 的因式乘积 $(a,p,q\in R,k\in Z_+,x^2+px+q=0\text{无实数根})$

> 代数基本定理：一元 n 次方程一定有 n 个复数根

若 $Q_n(x)$ 可被分解为 $(x-a)^k$ ，则 $R(x)$ 可分解出如下 k 个因式之和：

$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-3)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$

其中 $A_1,A_2,A_3\ldots A_k$ 均为待定的常数

若 $Q_n(x)$ 可被分解为 $(x^2+px+q)^k$ ，则 $R(x)$ 可分解出如下 k 个因式之和：

$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^3}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$

其中 $M_1,N_1,M_2,N_2,M_3,N_3\ldots M_k,N_k$ 均为待定常数

因此可以将 $R(x)$ 分解为多个分母形如 $(x-a)^k,(x^2+px+q)^k$ 的多项式求和，利用待定系数法求出所有的待定常数

利用积分的线性运算性质分别展开求积分

$$\int\frac{A_k}{(x-a)^k}\mathrm{d}x=A_k\int\frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}(x-a)=\begin{cases}A_k\ln(x-a)+C, & k=1\\ \frac{A_k}{1-k}(x-a)^{1-k}+C,k\neq1\end{cases}$$

$$\int\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}=\frac{M_k}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x+(N_k-\frac{M_kp}{2})\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$$

故要求原积分，则需要求解 $\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$ 与 $\int\frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}=\begin{cases}\ln|x^2+px+q|+C, & k=1\\ \frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k}+C,k\neq1\end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2+(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}})^2]^k}\mathrm{d}x$$

该式为形如 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$ 类积分

设 $I_k = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$

则 $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1^2}\mathrm{d}(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$I_k(k>1)$

$$= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$$

分部积分

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x\mathrm{d}[\frac{1}{(x^2+a^2)^k}]$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x\cdot(-k)\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{k+1}}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x - 2ka^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1}$$

$\therefore 2ka^2I_{k+1} = (2k-1)I_k + \frac{x}{(x^2+a^2)^k}$

将 k 换元为 $(k-1)$ 得

$\therefore I_k = \frac{1}{a^2}[\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}}]$

因此证明形如 $\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$ 的函数可积

因此证明 $R(x)$ 可积

有理三角函数的积分：

> 由 $\sin x, \cos x$ 及常数经过有限次有理运算所得的函数称为有理三角函数，记为 $R(\sin x, \cos x)$

1. 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\cos x = t$
2. 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\sin x = t$
3. 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\tan x = t$
4. 利用万能代换，将原有理三角函数积分，转化为有理函数积分

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

故 $x = 2\arctan t$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\therefore \int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot \mathrm{d}t$$

简单无理函数的积分

> 由自变量 x ，唯一的根式 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(a,b,c,d\text{都是常数，且}a\text{与}c\text{、}d\text{与}c\text{不同时为}0)$ 经过有限次有理运算得到的函数，称为简单无理函数，记为 $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$

换元，令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 即可解决

定积分的应用：元素法：

若所求量 U 满足以下条件：

1. U 依赖于区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$
2. U 的可加性：当把区间 $[a,b]$ 分成若干个无公共内点的小区间的并集时，U 可分解为对应小区间所对应量的总和

3. 在典型的一个小区间 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a, b]$ 上，U 的对应量可近似表示为 $f(x)\mathrm{d}x$

则 $\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$ 称为 U 的元素

U 可用定积分表示为 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分求平面图形面积：

直角坐标系：

若所求区域为 $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

面积 $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$

若所求区域为 $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi(y) \leq x \leq \varphi(y)\}$

面积 $A = \int_c^d [\varphi(y) - \psi(y)]\mathrm{d}y$

极坐标系：

1. 极点在图形外：$D = \{(\rho, \theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta)\}$

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

2. 极点在图形边界： $D = \{(\rho, \theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \rho \leq r(\theta)\}$

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

3. 极点在图形内：$D = \{(\rho, \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho \leq r(\theta)\}$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

定积分求空间图形体积：

1. $\begin{cases} \mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x \Rightarrow V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}V = A(y)\mathrm{d}y \Rightarrow V = \int_a^b A(y)\mathrm{d}y \end{cases}$
2. 旋转体体积（以解析式为 $f(x)$ 的形式为例，解析式为 $\varphi(y)$ 的同理）

绕 x 轴旋转：

$$\mathrm{d}V_x = A(x)\mathrm{d}x = \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

绕 y 轴旋转：

$$\mathrm{d}V_y = \pi[(x+\mathrm{d}x)^2 - x^2]\cdot f(x) = 2\pi x f(x)\mathrm{d}x + \pi(\mathrm{d}x)^2 f(x) \approx 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow V_y = 2\pi\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$$

定积分求曲线弧长：

> 光滑曲线（ $f'(x)$ 存在 ）都是可求长曲线

弧长微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$

直角坐标系：

$$s = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

参数方程：

$$s = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_a^b \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$$

极坐标：

由 $\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ 得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta]^2+[r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta]^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

定积分求算数平均值：

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\bar{f}|_{[a,b]}$$

定积分求加权平均值：

设原函数为 $f(x)$ ，加权函数为 $\omega(x)$

则在 $[a,b]$ 上的加权平均值为 $\bar{f}=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x}$

反常积分（广义积分）：

1. 若对 $\forall x\in[a,+\infty),\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有意义，则称形式化的定义 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 。当且仅当 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在时，称反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称反常积分发散
2. 广义牛顿-莱布尼茨公式：若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)=F(+\infty)-F(a)$
3. 只含负无穷的无穷区间同理定义可得
4. 若对 $\forall x\in(-\infty,+\infty),\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 有意义，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

当且仅当等号右边两个反常积分都收敛时，称原反常积分收敛，否则称原反常积分发散

5. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(x)|_{-\infty}^{0}+F(x)|_{0}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

> $p>1$ 时 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}$ ，而 $p<1$ 时 $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x$ 发散

瑕积分：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对 $\forall\varepsilon>0, f(x)$ 在 $(x_0, x_0+\varepsilon)$ 内均无界，则称 x_0 为 $f(x)$ 的右瑕点。如果对于 $\forall\varepsilon>0, f(x)$ 在 $(x_0-\varepsilon, x_0)$ 内均无界，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的左瑕点。

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义，且 b 是 $f(x)$ 的一个左瑕点。如果 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 的任一子区间 $[a,x]\subset[a,b)$ 上可积，则形式上称 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的瑕积分，但仍记为 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

故 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to b^-}\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

当等号右边的极限存在时，称等号左边的瑕积分收敛，否则称瑕积分发散

2. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)=F(b^-)-F(a)$
3. 左瑕点的瑕积分同理定义可得
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,c)\bigcup(c,b]$ 有定义，且 c 是 $f(x)$ 的一个瑕点。如果 $f(x)$ 在 $(c,b]$ 的任一子区间 $[x,b]\subset(c,b]$ 上可积，在 $[a,x]\subset[a,c)$ 上也可积，则定义瑕积分

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当等号右边的两个瑕积分都收敛时，才称原瑕积分收敛，否则称原瑕积分发撒

5. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(c^+) + F(c^-) - F(a)$$

当且仅当 $F(c^+), F(c^-)$ 均收敛时，称原瑕积分收敛

> $0 < q < 1$ 时，瑕积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛于 $\frac{1}{1-q}$ ，而 $q > 1$ 时，瑕积分发散

微分方程：

含有未知函数、未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。微分方程中出现的位置函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶

只含一个自变量的微分方程为常微分方程，有两个及以上的叫偏微分方程

若定义在区间 I 上的 n 阶可导函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程 $F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$ 能使之成为恒等式 $F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x) \dots \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0, x \in I$，则称函数 $y = \varphi(x)$ 为该微分方程在 I 上的解

n 阶微分方程含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ 的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3 \dots C_n)$ 称为该 n 阶微分方程的通解

给出确定通解中任意常数值的条件，称为定解条件，常见的有初值条件

由初值条件确定所有任意常数后得到的解称为微分方程的特解

可分离变量的微分方程：

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$

一阶线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的微分方程，其中 $P(x), Q(x)$ 为某一区间上 x 的已知连续函数

一阶齐次线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的微分方程

原方程解为 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶非齐次线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程，其中 $\exists x\in I$ 使得 $Q(x)\neq 0$

$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

齐次微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(\frac{y}{x})$ 的微分方程，这里 $g(u)$ 为某一区间上 u 的已知连续函数

令 $u=\frac{y}{x}$

$\therefore g(u)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

整理得到 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}$

为可分离变量的微分方程

伯努利方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^a(a\in R且a\neq 0,1)$ 的微分方程

两边同除 y^a 得

$y^{-a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-a}=Q(x)$

令 $z=y^{1-a}$ 代入上式整理得

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-a)P(x)z=(1-a)Q(x)$ 为一阶线性微分方程

可化为齐次型的方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ 的微分方程

1. $c_1=c_2=0$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}$ ，为齐次方程
2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\neq\frac{c_1}{c_2}$ 则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

令 $u=a_2x+b_2y$ 代入上式化简得

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\cdot\frac{ku+c_1}{u+c_2}$

为可分离变量的微分方程

3. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 且 $c_1\neq 0$ 或 $c_2\neq 0$

故 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$

解得两直线交点 (α,β)

则令 $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$

原齐次方程化为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$ 等同于情况 1

$y''=f(x)$ 型微分方程：

$$y=\int[\int f(x)\mathrm{d}x]+C_1x+C_2$$

$y''=f(x,y')$ 型微分方程

设 $p=y'$ 则 $y''=p'$

故原方程化为 $p'=f(x,p)$ ，为一阶微分方程

求出通解 $p=\varphi(x,C_1)$ 后求出原方程通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

$y''=f(y,y')$ 型微分方程

设 $p=y'$ 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{dx}=\frac{\mathrm{d}p}{dy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{dx}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故原方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$ 为一阶微分方程

求出通解 $p=\varphi(y,C_1)$ 后可得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$ 为可分离变量的微分方程

二阶微分方程：

形如 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的微分方程

其中，$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的为二阶齐次微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的为二阶非齐次微分方程，$\exists x\in I$ 使得 $f(x)\neq 0$

n 阶微分方程：

形如 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}y^{(i)}P_i(x)=f(x)$ 的微分方程

若 $f(x)\equiv 0$ 则为 n 阶线性齐次微分方程，否则为 n 阶线性非齐次微分方程

若 $\forall P_i(x)\equiv C_i$ 则为 n 阶常系数微分方程

二阶/n 阶线性微分方程解的结构：

叠加原理：

若二阶线性微分方程有特解 y_1,y_2 则 $\forall y=C_1y_1+C_2y_2$ 均为特解

若 n 阶线性微分方程有特解 $y_i, i \in [1,n] \bigcap Z$ ，则 $\forall y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ 均为特解

若 y_i 间线性无关，则上述 y 为通解

> 设定义在同一区间 I 上的 n 个函数为 $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$，若存在不全为 0 的 n 个数
>
> $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n$ 使得当 $x \in I$ 时，恒有 $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i \equiv 0$ ，则称它们线性相关，否则称线性无关

设 $y_i(x), i \in [1,n] \bigcap Z$ 为 n 阶线性微分方程的 n 个解，设 $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$

若 $\sum_{i=1}^{n} C_i = 0$ 即为 n 阶线性齐次微分方程的解，$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1$ 即为 n 阶线性非齐次线性方程的解

若 y_1 为某 n 阶线性非齐次微分方程的解， y_2 为其对应的 n 阶线性齐次微分方程的解

则 $y = y_1 + y_2$ 为 n 阶线性非齐次微分方程的解

若 y_1 为方程 $\sum_{i=0}^{n} A_i y^{(i)} = f(x)$ 的解， y_2 为方程 $\sum_{i=0}^{n} B_i y^{(i)} = g(x)$ 的解

则 $y = ay_1 + by_2$ 为方程 $\sum_{i=0}^{n} (aA_i + bB_i) y^{(i)} = af(x) + bg(x)$ 的解

其中， a, b 为任意复数

二阶常系数齐次微分方程：

形如 $y'' + py' + q = 0$ 的微分方程

其对应特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

1. 若 $\Delta > 0$ 得到两不相等实根 r_1, r_2 ，则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
2. 若 $\Delta = 0$ 得到两相等实根，值均为 r ，则通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
3. 若 $\Delta < 0$ 得到两共轭虚数根，设值为 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, a, b \in R$ ，则通解为 $y = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)e^{\alpha x}$

n 阶常系数微分方程：

形如 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \cdots + p_n y = 0$ 的微分方程

其特征方程为 $r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + p_3 r^{n-3} + \cdots + p_n = 0$

解后得到 n 个复根

若含有 s 重实数根 r ，则通解中含有 s 项 $(C_1 + C_2 x + \cdots + C_s x^{s-1})e^{rx}$

若含有 s 重共轭虚数根 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \alpha, \beta \in R$ ，则通解中含有 $2s$ 项

$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_s x^{s-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_s x^{s-1})\sin\beta x]$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ ，先解出其对应二阶常系数齐次线性微分方程的通解为 Y

若能解出特解 y^* ，则该方程特解为 $y = Y + y^*$

1. 当 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 时，设 $y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$ ，其中 k 代表 λ 是特征方程的 k 重根，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式函数

代入方程得：

$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$

对比系数即可解出 $Q(x)$

> 若设 $F(x) = x^2 + px + q$ 为特征函数，则代入后所得式子为
> $Q''(x) + F'(\lambda)Q'(x) + F(\lambda)Q(x) = P_m(x)$

2. 当 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$ 时

$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}) = \frac{P_m(x)}{2}e^{(\lambda + i\omega)x} + \frac{P_m(x)}{2}e^{(\lambda - i\omega)x}$

3. 当 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$ 时

$$f(x)=P_m(x)e^{\lambda}(\frac{e^{i\omega x}-e^{i\omega x}}{2i})=-\frac{P_m(x)}{2}i\cdot e^{(\lambda+i\omega)x}+\frac{P_m(x)}{2}i\cdot e^{(\lambda-i\omega)x}$$

空间两点距离公式 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

空间点到坐标轴的距离（x 轴为例） $d=\sqrt{y^2+z^2}$

空间点到坐标面的距离（xOy 面为例） $d=\sqrt{z^2}=|z|$

空间向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

方向余弦 $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}\\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}\\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}\\ 0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi\end{cases}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\vec{a}$ 方向的单位向量 $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{a},\vec{b}$ 向量夹角 $<\vec{a},\vec{b}>=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\in[0,\pi]$

定比分点公式：

设 $A(a_1,a_2,a_3),B(b_1,b_2,b_3),\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$

则 $M(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda})$

即 $(1+\lambda)\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\vec{OB}$

令 $\lambda=1$ 得中点坐标公式 $M(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2})$

向量的数量积（内积/点积） $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$，记 $|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影(projection)，简记为 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

数量积坐标式：

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

向量垂直/正交：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

向量的向量积（外积/叉积） $\begin{cases}|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin<\vec{a},\vec{b}> \\ \\ \vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}}\perp\vec{a},\vec{e}_{\vec{a}\times\vec{b}}\perp\vec{b}\end{cases}$

其方向满足从 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的右手螺旋定则

$\lambda\vec{a}\times\mu\vec{b}=\lambda\mu(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times\vec{a}=0$

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

$\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}$

向量积的坐标形式：

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

向量积几何意义：向量积模长等于两向量为邻边的平行四边形面积，即 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$

向量的混合积

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

绝对值等于三个向量为邻边的平行六面体体积，即 $V=|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]|$

混合积的坐标形式：

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，由几何性质得 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

由行列式性质得，轮换对称性：$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

平面法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ ，平面一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

得平面点法式方程： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面一般式方程： $Ax+By+Cz+D=0$

若 $D=0$ 通过原点

若 $A=0$ 平行于 x 轴（$D=0$ 时过 x 轴）

若 $A=B=0$ 平行于 xOy 面（$D=0$ 时为 xOy 面）

平面截距式方程：

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 在 x,y,z 轴截距分别为 a,b,c

若两平面 α_1,α_2 法向量分别为 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$

则两平面夹角为 $\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}\cdot\sqrt{B_1^2+B_2^2+B_3^2}}$

$\alpha_1\perp\alpha_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

$\alpha_1 // \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

若 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ 则两平面重合

点到平面距离

已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，平面 $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A}^2 + B^2 + C^2}$

两平行平面距离

已知平面 $\alpha_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \alpha_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A}^2 + B^2 + C^2}$

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及直线的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

参数式方程：直线 $l : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

对称式方程：直线 $l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

已知直线上两点 $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$

可得直线的两点式方程 $l : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

直线的一般式方程：两平面交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

两直线 l_1, l_2 ，方向向量分别为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 夹角：$\theta = \arccos \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$

直线 l ，方向向量 $\vec{s}$，平面 Π ，法向量为 $\vec{n}$

线面角 $\theta = \arcsin \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$

线面平行则 $\vec{s} \perp \vec{n}$

线面垂直则 $\vec{s} // \vec{n}$

已知直线 l 一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

则过 l 的平面束为：

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

线线关系：

已知方向向量分别为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 的两直线 l_1, l_2

取 $M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$

若 $[\vec{M_1M_2}\ \vec{s}_1\ \vec{s}_2] = 0$ 则线线共面

若 $[\vec{M_1M_2}\ \vec{s}_1\ \vec{s}_2] \neq 0$ 则线线异面

柱面：缺少坐标的方程

如圆柱面：$x^2 + y^2 = 4$

其准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \\ z = 0 \end{cases}$ ，母线平行于 z 轴

旋转曲面：

母线为原曲线，绕轴旋转的轴为旋转轴

例如曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转，得曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

其母线为 $f(y,z)=0$，旋转轴为 z 轴

空间曲线为空间曲面的交线

空间曲线 Γ 一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

空间曲线的参数方程 $\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ \\ y=y(t) \\ \\ z=z(t) \end{cases}$

空间曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 消去变量 z 得到 $H(x,y)=0$

则 Γ 在 xOy 面的投影为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ \\ z=0 \end{cases}$

称 $H(x,y)=0$ 为投影柱面，$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ \\ z=0 \end{cases}$ 为投影曲线

常见曲面：$(a,b,c\in R_+)$

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$

双曲抛物面/鞍形面： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

圆锥面： $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

n 维空间的性质

设 R^n 表示 n 维线性空间，$P_0\in R^n$

则 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)=\{P\in R^n|\quad ||P-P_0||<\delta\}$

其中 P_0 为邻域中心，δ 为邻域半径

P_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\in R^n|\quad 0<||P-P_0||<\delta\}$

故 $n=1$ 时为线段，$n=2$ 时为圆形，$n=3$ 时为球体

对于 n 为空间点集 E 与点 P

若 $\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\subset E$，则 P 为 E 的内点。点集 E 的所有内点构成的集合记作 $\text{int } E$

若 $\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则 P 为 E 的外点。点集 E 的所有外点构成的集合记作 $\text{out } E$

若 $\forall\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)$ 中既含有 E 的点，又含有 E 外的点，则 P 为 E 的边界点。点集 E 的所有边界点构成的集合记作 ∂E

若 $\forall\delta>0$ 使得 $\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$，则 P 为 E 的聚点

若点集 E 的点都为 E 的内点，则 E 为开集

若点集 E 有 $\partial E\subset E$，则 E 为闭集

若点集 E 中，$\forall P,Q\in E,\exists$ 折线段 t 使得 t 的两端为 P,Q ，且 $t\subset E$，则 E 为连通集

连通的开集为区域，区域与其边界构成闭区域

若对于 E，$\exists r>0$ 使得 $E\subset U(O,r)$ 则 E 为有界集，否则为无界集

多元函数的极限：

设多元函数 $f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 的定义域为 D ，且 P_0 是其聚点。若 $\exists A\in R$，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，只要点 $P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(P)$ 当点 P （在 D 上） 趋于 P_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$

其中 $P\to P_0$ 的方式、路径是任意的

二元函数的极限：

$n=2,P_0(x_0,y_0)$ 时称为二重极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$

多元函数的连续：

设多元函数 $f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在点 $P_0=(p_1,p_2\cdots p_n)$ 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$

则称多元函数 $f(P)$ 在点 P 处连续

多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零处）仍然连续

多元连续函数的复合函数也是连续函数

一切多元初等函数在其定义区域内连续，定义区域指包含在定义域内的区域或闭区域

若多元函数在点 P_0 不连续，则称 P_0 为其间断点

多元函数连续的性质：

对于多元函数 $f(P)=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 R^n 的有界闭区域 D 上连续，则

$f(P)$ 在 D 上有界

$f(P)$ 在 D 上能取得最大值和最小值

$f(P)$ 在 D 上能取得最大值和最小值之间的所有值（介值定理）

偏导数

设多元函数 $u=f(P)=(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在点 $P_0(p_1,p_2\cdots p_n)$ 的某邻域内有定义，当 $x_j(1\le j\le n,j\neq i)$ 固定在 p_j 而 x_i 在 p_i 处有增量 Δx_i 时，相应的函数有偏增量

$\Delta_{x_i}u=f(p_1\cdots p_{i-1},p_i+\Delta x_i,p_{i+1}\cdots p_n)-f(P)$

若 $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}$ 存在，则称该极限为 $u=f(P)$ 在 P_0 处关于 x_i 的偏导数

记为 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}|_P,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}|_P,u_{x_i}|_P,f_{x_i}|_P,f_i'|_P$

高阶偏导数

对于多元函数 $u=f(P)=(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在区域 D 内存在偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ，且该函数的偏导数也存在，则称为二次偏导数

如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$ 或记为 $u_{x_ix_j},f_{x_ix_j},f_{ij}''$

对于高阶偏导数，若只对一个自变量求偏导，则为纯偏导，如 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_i^n}$

否则为混合偏导，如 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_i^{n-1}\partial x_j}$

当偏导数连续时，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

偏导数的几何意义

二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\ )$ 在该点处切线对 x 轴的斜率

$f_x(x_0,y_0)$ 存在 $\Rightarrow$ 一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 连续

偏导数连续和二元函数连续互为无关条件

全微分

对于多元函数 $u=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 P 点附近有定义，若全增量 $\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2\cdots x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 可表示为 $\Delta u=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n+o(\rho),\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$

其中，A_i 仅与 u 的 n 个自变量有关，与自变量增量无关，则称多元函数 $f(P)$ 在 P 可微

全微分记作 $\mathrm{d}u=A_1\mathrm{d}x_1+A_2\mathrm{d}_2+\cdots A_n\mathrm{d}_n$

函数在一点连续，各个偏导数均存在，是可微的必要非充分条件

偏导数连续是可微的充分非必要条件

$\therefore$ 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续/偏导数存在，连续与偏导数存在互为无关条件

全微分的计算：

$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$

全微分的应用

$\Delta u\approx\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n$

复合函数求导法则

对于下述偏导数/导函数连续的各个函数

1.若中间变量全为一元函数，则全微分后分别求导。例如 $u=\varphi(t),v=\psi(t),z=f(u,v)$

则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v}{dt}=f_1'\varphi'+f_2'\psi'$

2.若中间变量含有多元函数，则对应多元函数求对应偏导。例如 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),w=\mu(x),z=f(u,v,w)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=f_1'\varphi_1'+f_2'\psi_1'+f_3'\mu'$

3.若中间变量为一个多元函数。例如

$u=\varphi(x,y),z=f(u)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=f'\varphi_1'$

多元函数的高阶偏导数

每个相关函数都要求偏导。例如，设 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),f,\varphi,\psi\in C^{(2)}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\
&=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})\\
&=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})\\
&=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'\varphi_1'+f_2'\psi_1')\\
&=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\varphi_1'+\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y}f_1'+\frac{\partial f_2'}{\partial y}\psi_1'+\frac{\partial \psi_1'}{\partial y}f_2'\\
&=(f_{11}''\varphi_2'+f_{12}''\psi_2')\varphi_1'+\varphi_{12}''f_1'+(f_{21}''\varphi_2'+f_{22}''\psi_2')\psi_1'+\psi_{12}''f_2'
\end{aligned}$$

隐函数求导

$F(x_1,x_2\cdots x_n)=0$ 若 $F\in C^{(1)}$，且在点 $P(p_1,p_2\cdots p_n)$ 处 $F(p_1,p_2\cdots p_n)=0,F_i'(p_1,p_2\cdots p_n)\neq 0$

则可在 P 的某邻域内唯一确定一个 $x_i=f(x_1,x_2\cdots x_{i-1},x_{i+1}\cdots x_n)$ 使得 $p_i=f(p_1,p_2\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)$，且 $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=-\frac{F_j'}{F_i'}(i\neq j)$

其中，求解 F_i',F_j' 均要把 n 个自变量看为独立变量

高阶导数：

$\frac{\partial^m x_i}{\partial x_{j1}\partial x_{j2}\cdots\partial x_{jm}}=\frac{\partial}{\partial x_{jm}}(\frac{\partial^{m-1}x_i}{\partial x_{j1}\partial x_{j2}\cdots\partial x_{j(m-1)}}),\forall x_{jk}\neq x_i$

方程组形式的隐函数求导

设 $C^{(1)}$ 类函数 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内满足 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}|_P\neq 0$

则 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ \\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在 P 的某一邻域内唯一确定二元函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ \\v=v(x,y)\end{cases}$

且满足 $\begin{cases}u_0=u(x_0,y_0)\\ \\v_0=v(x_0,y_0)\end{cases}$

其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ \\G_u & G_v\end{vmatrix}$ 称为 F,G 的雅可比行列式

方向导数

以二元函数为例

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，设直线 l 是 xOy 面上过点 P，单位方向向量为 $\vec{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的直线

则关于直线上任意一点 $Q(x,y)$ 的向量 $\vec{PQ}=t\vec{e}$ 称为 P 到 Q 的有向距离，且 $|\vec{PQ}|=|t|$

当 $\vec{l}\neq\vec{0},\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta),\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$ 存在时，称为函数 z 在 P 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向向量，记为 $\frac{\partial z}{\partial l}|_P$

函数可微是任意方向的方向向量存在的充分非必要条件

当函数可微时，$\frac{\partial f}{\partial l}|_P=f_x|_P\cdot\cos\alpha+f_y|_P\cdot\cos\beta$

梯度

若多元函数 $u=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 P 点可微，称向量 $(f_1'|_P,f_2'|_P\cdots f_n'|_P)$ 为函数 f 在 P 点处的梯度，记为 $\mathrm{grad}\,u$ 或 ∇u

其中，$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n})$

因此，函数在点 P 处方向导数最大值为 $|\operatorname{grad} u|$ ，最小值为 $-|\operatorname{grad} u|$ ，与梯度垂直方向方向导数为 0

方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{e}_l=\frac{1}{|\vec{l}|}\cdot\operatorname{grad} u\cdot\vec{l}$

空间曲线的切线与法平面

若对于空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ ，有 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 连续且不全为 0 ，则称 Γ 为光滑曲线

其在 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 点切线的方向向量称为切向量 $\vec{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

法平面 Π 为过 M_0 ，垂直于切线的平面

故其法向量 $\vec{n}=\vec{\tau}$

$\therefore\Pi:x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0$

设空间曲线为 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

若 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处不全为 0

则有 $\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ F_x&F_y&F_z\\ G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=[(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)]|_{(x_0,y_0,z_0)}$

空间曲面的切平面与法线

设曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ ，若 F 的偏导数 F_x, F_y, F_z 连续且不全为 0

则 $\vec{n}=(F_x, F_y, F_z)$ 为 Σ 在 M_0 处的法向量

垂直于法向量，过 M 的平面为 M 的切平面

$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$

过点 M 且与切平面垂直（与法向量平行）的直线为 M 的法线

$$\begin{cases} x=F_x t+x_0 \\ \\ y=F_y t+y_0 \quad (t\text{ 为参数}) \\ \\ z=F_z t+z_0 \end{cases}$$

特殊地，若一坐标固定（以 z 为例），可简化法向量为：

$(F_x, F_y, F_z)=-F_z(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1)=-F_z(z_x, z_y, -1)$

从而取法向量为 $\vec{n}=(z_x, z_y, -1)$

等高线与等量面

多元函数 $F=C$ 处称为等高线或等量线

若 $F\in C^{(1)}, P, \nabla F(P)\neq\vec{0}$ 则 $\nabla F(P)$ 为等高线 $F=F(P)$ 在 P 的法向量，方向指向高值方向

多元函数的极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，对于在该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)

若恒有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ ，称函数在点 (x_0,y_0) 有极大值

若恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ ，称函数在点 (x_0,y_0) 有极小值

若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 有极值，则这点偏导数为 0 （必要条件）

推广：任意多元函数，若在点 P 取极值，且该点处有偏导数，则任意一元的偏导数均为 0 （必要条件）

使一阶偏导数为 0 的点为驻点，驻点与一阶偏导数不存在的点为可疑极值点

（充分条件）若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内是 $C^{(2)}$ 类函数，点 $P(x_0,y_0)$ 为函数的驻点，记：

$A=f_{xx}|_P,B=f_{xy}|_P,C=f_{yy}|_P$

若 $AC-B^2>0$ 是极值，其中当 $A>0$ 是极小值，$A<0$ 是极大值
若 $AC-B^2<0$ 则不是极值
若 $AC-B^2=0$ 则还需另外判断

多元函数的最值

（多元函数的最值定理）若函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则函数在 D 上必定有最大值和最小值

最值可能在 $\operatorname{int} D$ 上，也可能在 ∂D 上

若多元函数在 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续、可微，且只有有限个极值点，若最值在 D 内取得，则最值点必定是极值点

条件极值拉格朗日乘数法

求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值

引入辅助函数(拉格朗日函数) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$

则极值点满足 $\begin{cases}F_x=0\\ \\ F_y=0\\ \\ F_\lambda=0\end{cases}$

推广：求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 与条件 $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值

则引入辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\cdot\varphi(x,y,z)+\mu\cdot\psi(x,y,z)$

则极值点满足 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \\ F_\mu = 0 \end{cases}$

第一型积分

设 Ω 是可测的几何体，$u = f(P)$ 是定义在 Ω 上的函数，将 Ω 任意分成可测的小块 $\Delta\Omega_i(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ ，$\mu(\Delta\Omega_i)$ 表示 $\Delta\Omega_i$ 的测度。记 $\lambda = \max\{\mu(\Delta\Omega_i)\}$ ，任取 $P_i \in \Delta\Omega_i$ ，若和式极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\mu(\Delta\Omega_i)$ 存在且与 Ω 的分割方式、取 P_i 的方式无关，则称之为 $u = f(P)$ 沿 Ω 的第一型积分，记为 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu$

即 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\mu(\Delta\Omega_i)$

其中，Ω 称为积分区域，$f(P)$ 为被积函数，$\mathrm{d}\mu$ 为积分微元，$f(P)\mathrm{d}\mu$ 为被积表达式

1. 当 Ω 表示一维闭区间时，测度为区间长度，$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}x$ ，表示定积分
2. 当 Ω 表示二维闭区间时，测度为面积，$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\sigma$，表示二重积分
3. 当 Ω 表示三维闭区间时，测度为体积，$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}V$，表示三重积分
4. 当 Ω 表示平面或空间曲线时，测度为曲线长度，$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}s$，表示第一型曲线积分
5. 当 Ω 表示有界空间曲面时，测度为曲面面积，$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}S$，表示第一型曲面积分

若 $f(P) \equiv 1, P \in \Omega$ 则 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathrm{d}\mu = \mu(\Omega)$

第一型积分的运算具有线性（数乘、加减）、区域可加性

第一型积分的单调性：

若在 Ω 上有 $f(P) \geq 0$ ，则 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu \geq 0$

第一型积分的积分不等式性：

若在 Ω 上有 $f(P) \le g(P)$，则有 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega g(P)\mathrm{d}\mu$

第一型积分的绝对可积性：$|\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu| \le \int_\Omega |f(P)|\mathrm{d}\mu$

第一型积分估值不等式：设在 Ω 上的 $f(P)$ 最大值为 M，最小值为 m。则 $m \cdot \mu(\Omega) \le \int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu \le M \cdot \mu(\Omega)$

第一型积分的中值定理：设函数 $f(P)$ 在闭区域 Ω 上连续，则在 Ω 上至少存在一点 P_0 使得 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu = f(P_0) \cdot \mu(\Omega)$

向量值函数的积分

向量函数求极限等价于其各个分量求极限，若 $\vec{A}(P) = \{A_1(P), A_2(P), A_3(P), \cdots, A_m(P)\} = \sum_{i=1}^{m} A_i(P) \cdot \vec{e}_i$

则 $\int_\Omega \vec{A}(P)\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{m} A_i(P) \cdot \vec{e}_i)\mathrm{d}\mu$

利用第一型积分的线性性质，等价于 $\sum_{i=1}^{m} [\int_\Omega A_i(P)\mathrm{d}\mu] \cdot \vec{e}_i$

因此 $\int_\Omega \vec{A}(P) = \{\int_\Omega A_1(P)\mathrm{d}\mu, \int_\Omega A_2(P)\mathrm{d}\mu, \int_\Omega A_3(P)\mathrm{d}\mu, \cdots, \int_\Omega A_m(P)\mathrm{d}\mu\}$

二重积分的计算

平面直角坐标系条件下 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$

极坐标系条件下 $\mathrm{d}\sigma = \rho \cdot \mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}\varphi$

1. 对于积分区域 D，若为 x 型区域：$\begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
2. 对于积分区域 D，若为 y 型区域：$\begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$
3. 若积分区域 D 关于 x 轴对称且 $f(x,y) \in C(D)$，若有 $f(x,-y) = -f(x,y)$ 则 $I = 0$，若有 $f(x,-y) = f(x,y)$ 则 $I = 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 为 D 位于 x 轴上侧部分。同理可类比 y 轴。
4. 对于积分区域 D，若 $O \in \mathrm{out}\ D$：$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi) \end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
5. 对于积分区域 D，若 $O \in \partial D$：$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi) \end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
6. 对于积分区域 D，若 $O \in \mathrm{int}\ D$：$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \rho(\varphi) \end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
7. 对于积分区域 D，若可分为若干个上述区域，则可利用区间可加性进行分解 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = (\iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \cdots + \iint_{D_m})f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

三重积分的计算

空间直角坐标系条件下 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$

柱坐标系条件下 $\mathrm{d}V = \rho \cdot \mathrm{d}\rho \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$

球坐标系条件下 $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi$

1. 坐标面投影法/先一后二法（以投影至 xOy 面为例）

设空间有界闭区域 Ω 在 xOy 面投影为 D_{xy} ，Ω 的下、上曲面分别为 $\Sigma_1: z=z_1(x,y), \Sigma_2: z=z_2(x,y)$ ，且 $z_1(x,y), z_2(x,y) \in C(D_{xy})$ ，若 Ω 可表示为 $\Omega=\{(x,y,z) | z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$ 则称之为 xy 型空间区域

此时 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

2. 坐标轴投影法/截面法/先二后一法（以投影至 z 轴为例）

设空间有界闭区域 Ω 在 z 轴投影区间为 $[p,q]$，用 D_z 表示过点 $(0,0,z)$ 且平行于 xOy 面的平面截 Ω 所得的平面区域。若 Ω 可表示为 $\Omega=\{(x,y,z) | (x,y) \in D_z, p \leq z \leq q\}$ 则称之为 z 型空间区域

此时 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_p^q \mathrm{d}z \cdot \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3. 对称性(以关于 xOy 面为例)

设空间有界闭区域 Ω 关于 xOy 面对称，若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 则 $I=0$；若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 则 $I=\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ ，其中 Ω_1 为 Ω 位于 xOy 面上侧部分

4. 使用三次积分（举例）

设空间有界闭区域 Ω : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}x \cdot \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \cdot \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

5. 使用柱面坐标

设空间有界闭区域 Ω : $\begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi) \\ z_1(\rho,\varphi) \leq z \leq z_2(\rho,\varphi) \end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\mathrm{d}\rho \cdot \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\mathrm{d}z$

6. 使用球面坐标

设空间有界闭区域 Ω ： $\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi) \\ r_1(\varphi,\theta) \le r \le r_2(\varphi,\theta) \end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \mathrm{d}\theta \cdot \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} r^2 \cdot \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta$

第一型曲线积分的计算

封闭的曲线积分记为 $\oint_L f(P)\mathrm{d}s$

直角坐标系条件下 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$

直角坐标系下，参数方程 $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$

若曲线 L ： $\begin{cases} a \le t \le b \\ x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 则 $\int_L f(P)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t),y(t),z(t)] \cdot \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$

特别的，当平面曲线 $y = y(x), a \le x \le b$ 时 $\int_L f(p)\mathrm{d}s = \int_a^b f[y(x),x]\sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x$

极坐标条件下 $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$

若曲线 L ： $\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho = \rho(\varphi) \end{cases}$ 则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$

对称性(以平面曲线关于 x 轴对称为例)：设 $L = L_1 + L_2$ ，且 L_1 与 L_2 关于 x 轴对称，L_1 在 x 轴上方

若 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$

若 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$

轮换对称性：若满足 $f(x,y,z)$ 中自变量调换顺序，对函数解析式不影响，则 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_L f(x,z,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x,z)\mathrm{d}s = \int_L f(y,z,x)\mathrm{d}s = \int_L f(z,x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(z,y,x)\mathrm{d}s$

第一型曲面积分的计算

封闭的曲面积分记为 $\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$

以投影到 xOy 面为例

设光滑曲面 Σ 满足如下方程： $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$

若 $f(x,y,z)\in C(\Sigma)$ 则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

对称性（以曲面关于 xOy 面对称为例）：设 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中 Σ_1 与 Σ_2 关于 xOy 面对称，Σ_1 在 xOy 面上方

若 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的奇函数，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$

若 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的偶函数，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

轮换对称性：若满足 $f(x,y,z)$ 中自变量调换顺序，对函数解析式不影响，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(x,z,y)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(y,x,z)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(y,z,x)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(z,x,y)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma f(z,y,x)\mathrm{d}S$

第一型积分的运用举例

测度 $\mu(\Omega)=\int_\Omega \mathrm{d}\mu$

质量 $m=\int_\Omega \rho(P)\mathrm{d}\mu$

质心 $\vec{P}=\dfrac{1}{\int_{\Omega}f(P)\mathrm{d}\mu}\{\int_{\Omega}x\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}y\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}z\cdot f(P)\mathrm{d}\mu\}$

形心 $\vec{P}=\dfrac{1}{\mu(\Omega)}(\int_{\Omega}x\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}y\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}z\mathrm{d}\mu)$

绕轴转动惯量（以绕 z 轴为例） $J_z=\int_{\Omega}(x^2+y^2)\cdot f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$

绕点转动惯量（以绕 O 点为例） $J_O=\int_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\cdot f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$

对原点的引力 $\vec{F}=G\{\int_{\Omega}\frac{x}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}\frac{y}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_{\Omega}\frac{z}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu\},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

第二型曲线积分

带有确定走向，且曲线上每一点处都有切线，并且当切点在曲线上连续移动时，对应的切点连续地转动。该直线为定向光滑曲线

若某条定向光滑曲线为 L ，则 L^- 表示与之反向的曲线

定向光滑曲线的参数表达式：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\\t:a\to b\end{cases}$ ， 向量表达式 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},t:a\to b$

规定与 L 走向相同的切向量为正切向量 $\vec{\tau}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$ ，与之反向的为负切向量 $-\vec{\tau}$

设 Γ 为空间中从 A 到 B 的一条定向光滑曲线，$f(P)$ 为在 Γ 上有定义的一个有界函数，在 Γ 上顺其定向任意插入 $n-1$ 个分点 $M_1,M_2\cdots M_{n-1}$ ，并设 $A=M_0,B=M_n$

因此 Γ 被分为 n 个弧段 $\overparen{M_{i-1},M_i}(1\leq i\leq n)$，记 $M_i(x_i,y_i,z_i,\cdots),\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_i=y_i-y_{i-1},\Delta z_i=z_i-z_{i-1},\cdots$，小弧段长度最大值为 λ ，在 $\overparen{M_{i-1},M_i}$ 上任取一点为 P_i

若对于 Γ 的任意分割与任意取点，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i$ 都存在，称函数 $f(P)$ 在 Γ 上关于坐标 x 可积，并称其为 $f(P)$ 在 Γ 上关于 x 的积分，记为 $\displaystyle\int_\Gamma f(P)\mathrm{d}x$

类似地，可定义其他坐标的积分。这些统称为第二型曲线积分

若三维空间中某向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 或简记为 $\vec{A}(P,Q,R)$，某定向光滑曲线 Γ

则沿 Γ 的第二型曲线积分 $I=\displaystyle\int_\Gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$，其中 $\mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}x\cdot\vec{i}+\mathrm{d}y\cdot\vec{j}+\mathrm{d}z\cdot\vec{k}$

第二型曲线积分的性质与计算

第二型曲线积分具有线性性质与区间可加性

第二型曲线积分的反向奇性（以关于 x 坐标可积为例）：若 $f(x,y,z)$ 在定向光滑曲线 Γ 上关于 x 可积，则 $f(x,y,z)$ 在定向光滑曲线 Γ^- 上关于 x 也可积，且 $\displaystyle\int_\Gamma f(P)\mathrm{d}x=-\int_{\Gamma^-}f(P)\mathrm{d}x$

设 $f(x,y,z)$ 在定向光滑 Γ 上有定义且连续，$\Gamma:\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},t:a\to b$ 则曲线积分存在，且有：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$$

特殊的，例如，若平面的定向曲线 $\Gamma:y=y(x),x:a\to b$

则 $\displaystyle\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)\cdot y'(x)]\}\mathrm{d}x$

两类曲线积分的关系

设空间中的有向光滑曲线 L 以弧长为参数，方程为：$\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}+\cdots$

由于 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2+\cdots}$

因此，切向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\cos\gamma=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\cdots$

$\therefore \mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}x\cdot\vec{i}+\mathrm{d}y\cdot\vec{j}+\mathrm{d}z\cdot\vec{k}+\cdots=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma,\cdots)\cdot\mathrm{d}s$

所以，在空间中的某定向光滑曲线 Γ 在向量场 $\vec{A}=(P,Q,R,\cdots)$ 上的第二型积分为

$$\int_\Gamma \vec{A}\mathrm{d}\vec{s}=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma+\cdots)\mathrm{d}s$$

区域连通性与正向边界曲线

设 D 为平面区域，若 D 内任一闭合曲线所围成的区域都属于 D ，则称 D 为平面单连通区域，否则称为复联通区域。

正向边界曲线：当观察者沿着 ∂D 走的时候，区域 D 总在它的左边。正向边界曲线记为 ∂D^+

格林公式

设 xOy 面上的有界闭区域 D 的边界曲线 ∂D 由有限条光滑或分段光滑的曲线所组成，函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(D)$ 则有：

$$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

当 D 内存在奇点时，可构造某 D 内不过奇点的封闭曲线 L 。而后，使得 $\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=(\oint_{\partial D^++L^-}+\oint_L)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

平面曲线积分与路径无关

若在单连通区域 G 上，$P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(G)$，则以下四个命题等价：

1. 对任意封闭曲线 $C\subset G,\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$
2. $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路劲无关
3. 在 G 内存在 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

4. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内处处成立

二元函数全微分的求解

若存在 u 使得 $u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 则称 u 为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数。若该式在 G 内存在原函数，则 $\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路劲无关

该式的一个元函数为 $u(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

第二型曲面积分

在双侧曲面上选定某一侧，该种曲面称为定向曲面。Σ 表示选定了该侧的定向曲面，Σ^- 表示选定了该侧相反侧的定向曲面

规定曲面的法向量总是指向曲面取定的一侧。例如当曲面方程满足 $z=z(x,y)$ 时，Σ 取定上侧，则 $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)$；Σ 取定下侧，则 $\vec{n}=(z_x,z_y,-1)$

设 Σ 是一片光滑的定向曲面，向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 在 Σ 上有界，在点 (x,y,z) 处的单位法向量 $\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，若积分 $\displaystyle\iint_\Sigma P\cos\alpha\mathrm{d}S,\iint_\Sigma Q\cos\beta\mathrm{d}S,\iint_\Sigma R\cos\gamma\mathrm{d}S$ 同时存在，则称积分 $\displaystyle\iint_\Sigma[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\mathrm{d}S$ 为向量值函数 $\vec{F}$ 在定向曲面 Σ 上的积分或第二型曲面积分，记为 $\displaystyle\iint_\Sigma\vec{F}\mathrm{d}\vec{S}$

其中，$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{e}_n\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot\vec{i}+\mathrm{d}z\mathrm{d}x\cdot\vec{j}+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\vec{k}$

$\therefore\displaystyle\iint_\Sigma\vec{F}\mathrm{d}\vec{S}=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

第二型曲面积分同样具有线性性质、区间可加性与反向奇性

两类曲面积分的联系

$\displaystyle\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma(P,Q,R)\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$

第二型曲面积分的计算

1. 分面投影法

将 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 看成三个积分，分别计算后求和

以计算 $\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为例：

设 Σ 可写为 $z = z(x,y) \in C^{(1)}(D_{xy}), (x,y) \in D_{xy}$ 且被积函数 $R \in C(\Sigma)$

若 Σ 为上侧，则 $\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

若 Σ 为下侧，则 $\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. 合一投影法（以投影到 xOy 面为例）

当曲面 Σ 可写为 $z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$ 时，法向量 $\vec{n} = \pm(z_x, z_y, -1)$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \{P[x,y,z(x,y)], Q[x,y,z(x,y)], R[x,y,z(x,y)]\} \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

设 Ω 为空间有界闭区域，其边界曲面 $\partial\Omega$ 由有限块光滑或分片光滑的曲面围成，若函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续的偏导数，则有 $\oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$

当 Σ 不封闭时，可以添加曲面 Σ_1 使得曲面封闭，然后 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_1^-}) P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

当 Ω 内存在奇点时，可以选择添加包含奇点的曲面 Σ_1 ，然后 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\iint_{\Sigma+\Sigma_1^-}+\iint_{\Sigma_1})P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

通量与散度

设 $\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\in C^{(1)}$ 的向量场，沿场中某曲面 Σ 的通量/流量为其第二类曲面积分

$\Phi=\iint_\Sigma \vec{A}\mathrm{d}\vec{S}$

在场内，做包围点 M 的闭曲面 Σ ，设 Σ 所围区域的为 V ，体积为 $\mu(V)$ 。若当 V 收缩成点 M 时，极限 $\lim\limits_{V\to M}\dfrac{\oiint \vec{A}\mathrm{d}\vec{S}}{\mu(V)}$ 存在，则称该极限值为 $\vec{A}$ 在 M 的散度，记为 $\mathbf{div}\ \vec{A}$

利用积分中值定理可证明，$\mathbf{div}\ \vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$

故高斯公式可简写为 $\oiint_{\partial\Omega^+}\vec{A}\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_\Omega\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V$

斯托克斯公式

定向曲面的正向边界曲线，即为绕该定向曲面边界线，且按照右手定则，方向指向曲面正向的方向。

设 Σ 是一张光滑或分片光滑的定向曲面，Σ 的正向边界 $\partial\Sigma^+$ 为光滑或分段光滑的闭曲线。若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 上具有一阶连续偏导数，则有 $\iint_\Sigma(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial\Sigma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

可以见得，格林公式为斯托克斯公式在平面上的特殊情况

斯托克斯公式的其他表示方法：

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示：

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \oint_{\partial\Sigma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

又或者是用 ∇ 算符来表示：

若在场 $\vec{A} = (P, Q, R)$ 中

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{A}\mathrm{d}\vec{S}$$

故可表示为 $\iint_\Sigma \nabla \times \vec{A}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial\Sigma^+} \vec{A}\mathrm{d}\vec{s}$

环流量与旋度

设 $C^{(1)}$ 的向量场 $\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ 则沿 $\vec{A}$ 中某一封闭的定向曲线 Γ 上的曲线积分 $\oint_\Gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 称为向量场 $\vec{A}$ 沿曲线 Γ 所取方向的环流量

称向量 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ 为 $\vec{A}$ 在该点的旋度，记为 $\mathrm{rot}\ \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$

级数的定义

无穷和式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots(a_i\in R)$ 称为(实)常数项无穷级数，简称（实数项）级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 。即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

其中，第 n 项 a_n 称为级数的一般项（或通项）

$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 称为级数的前 n 项部分和

数列 $\{s_n\}$ 称为级数的部分和数列

若 $\{s_n\}$ 有极限 s ，即 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ （有限数），则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并称 s 为级数的和，记为 $s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

若 $\{s_n\}$ 没有极限 s ，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。因此常数项级数收敛 $\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}s_n$ 存在；常数项级数发散 $\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}s_n$ 不存在

当级数收敛时，称差值 $r_n=s-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的余项级数，即 $r_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_{n+i}$ 。显然 $\lim_{n\to\infty}r_n=0$

级数的基本性质

1. 在级数前增加、删除、修改有限项，级数的敛散性不变
2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 s ，则对于任意常数 k ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$ 收敛于 ks
3. 级数的每一项乘上一个非零的常数，敛散性不变
4. 设两收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s,\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sigma$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 收敛，其和为 $(s\pm\sigma)$
5. 收敛级数的项任意加括号后所得的级数，仍然收敛于原来的和

   > 推论：若加括号后所形成的新级数发散，则原级数发散

级数收敛的必要条件:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

正项级数的审敛法

对于 $\forall a_n \geq 0$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，称之为正项级数

正项级数收敛的充要条件为部分和数列 $\{s_n\}$ 有界

1. 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，且存在某正整数 k ，使得 $a_n \leq b_n, n \geq k$ 恒成立，则

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

2. 比较审敛法（极限形式）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，若极限 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ 有确定意义，则有

> 有确定意义指该极限为常数或无穷大

$0 < l < +\infty$ 时，两个级数有相同的敛散性

$l = 0$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$l = +\infty$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

3. 比值审敛法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若极限 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ 有确定意义，则有

$0 \leq \rho < 1$ 时，级数收敛

$1 < \rho \leq +\infty$ 时，级数发散

当 $\rho = 1$ 时，敛散性应另行判定

4. 根值审敛法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若极限 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ 有确定意义，则有

$0 \leq \rho < 1$ 时，级数收敛

$1 < \rho \leq +\infty$ 时，级数发散

当 $\rho = 1$ 时，敛散性应另行判定

5. 柯西积分审敛法

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若有定义在 $[1, +\infty)$ 上连续单减函数 $f(x)$ 使得 $f(n) = a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 。则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 同敛散

常见级数的敛散性

1. 等比级数（几何级数） $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$

当 $|q| < 1$ 时，级数收敛于 $\frac{a}{1-q}$

当 $|q| \geq 1$ 时，级数发散

2. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

级数发散

3. p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $p\leq 1$ 时级数发散

交错级数的审敛法

对于正、负项相间的级数称为交错级数，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n, a_n>0$

莱布尼茨定理：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足如下条件：

1. $a_n\geq a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

则级数收敛，且级数和 $s\leq a_1$ ，余项绝对值 $|r_n|<a_{n+1}$

绝对收敛与条件收敛

一般项为任意实数的级数称为任意项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛

绝对收敛的级数必定收敛，但收敛级数未必绝对收敛

函数项级数

设 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 是定义在区间 I 上的函数列，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 称为定义在区间 I 上的函数项（无穷）级数

若 $x_0\in I$ ，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点，否则称为发散点

收敛点全体构成的集合为收敛域，发散点全体构成的集合为发散域

在收敛域 K 上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$ ，称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数。即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),x\in K$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和记作 $s_n(x)$ ，当 $x\in K$ 时，有 $\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$

在收敛域 K 上，称 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 为函数项级数的余项，显然有 $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

幂级数的收敛性

形如 $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ 的函数项级数称为 $(x-x_0)$ 的幂级数

其中 $a_0,a_1,a_2\cdots,a_n,\cdots$ 称为幂级数的系数

幂级数可简记为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 。当 $x_0=0$ 时，称 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为 x 的幂级数

1. Abel 定理

若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛，则它在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛；若在 $x=x_1$ 处发散，则它在满足不等式 $|x|>|x_1|$ 的一切 x 处发散

若 $x=\pm R$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛于发散的分界点，则正数 R 称为该幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 称为收敛区间；$(-R,R)$ 加上收敛的端点称为收敛域

2. 系数模比值法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是不缺项的（即 $\forall a_n\neq 0$），若极限 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$ 有确定意义，则幂级数的收敛半径 $R=\begin{cases}\frac{1}{\rho},0<\rho<+\infty\\+\infty,\rho=0\\0,\rho=+\infty\end{cases}$

3. 系数模根值法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是不缺项的（即 $\forall a_n \neq 0$），若极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ 有确定意义，则幂级数的收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

幂级数的运算性质

代数性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛域分别为 R_1, R_2， $R = \min(R_1, R_2)$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, x \in (-R, R)$

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}, x \in (-R, R)$

若收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$ 则 $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

分析性质

连续性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域内连续

逐项可积性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域 K 的任一有界闭子区间上可积，且有

$$\int_0^x s(x) \mathrm{d}x = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R)$$

逐项微分性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，并可逐项求导任意次。且有

$$s'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, x\in(-R,R)$$

逐项微分时，运算前后端点处的敛散性可能改边

泰勒级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数，则幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+$$

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\cdots$,称为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的泰勒级数或称为 $f(x)$ 关于 $(x-x_0)$ 的泰勒级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的麦克劳林级数

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0,\delta)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, x\in R$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in R$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$$

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^n, x\in[-1,1]$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}, x\in R$$

傅里叶级数

$$令\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}x)$$

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)\leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x, a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

狄利克雷充分定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且:

1. 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$
2. 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$
3. 当 x 为端点时 $x=\pm l$ ，级数收敛于 $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$

函数延拓

定义在 $[0,l]$ 上的函数展位正弦级数、余弦级数

设 $f(x)$ 定义在 $[0,l]$ 上，延拓成以 $2l$ 为周期的函数 $F(x)$

奇延拓： $F(x)=\begin{cases} f(x),0<x\le l \\ 0,x=0 \\ -f(-x),-l\le x<0> \end{cases}$

所对应傅里叶级数 $f(x)\leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$

偶延拓 $F(x)=\begin{cases} f(x),0\le x\le l \\ f(-x),-l\le x<0 \end{cases}$

所对应的傅里叶级数 $f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x,a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$