高数表3

向量解几 多元微分

空间两点距离公式 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

空间点到坐标轴的距离（x 轴为例）$d=\sqrt{y^2+z^2}$

空间点到坐标面的距离（xOy 面为例）$d=\sqrt{z^2}=|z|$

空间向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

方向余弦 $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}\\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}\\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}\\ 0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi\end{cases}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$\vec{a}$ 方向的单位向量 $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{a},\vec{b}$ 向量夹角 $<\vec{a},\vec{b}>=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\in[0,\pi]$

定比分点公式：

设 $A(a_1,a_2,a_3),B(b_1,b_2,b_3),\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$

则 $M(\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda},\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda},\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda})$

即 $(1+\lambda)\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\vec{OB}$

令 $\lambda=1$ 得中点坐标公式 $M(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2})$

向量的数量积（内积/点积） $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos < \vec{a}, \vec{b} >$

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，记 $|\vec{b}| \cdot \cos < \vec{a}, \vec{b} >$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影(projection)，简记为 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$

数量积坐标式:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

向量垂直/正交：$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

向量的向量积（外积/叉积） $\begin{cases} |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin < \vec{a}, \vec{b} > \\ \\ \vec{e}_{\vec{a} \times \vec{b}} \perp \vec{a}, \vec{e}_{\vec{a} \times \vec{b}} \perp \vec{b} \end{cases}$

其方向满足从 $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的右手螺旋定则

$\lambda\vec{a} \times \mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$

向量积的坐标形式:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

向量积几何意义：向量积模长等于两向量为邻边的平行四边形面积，即 $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

向量的混合积

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

绝对值等于三个向量为邻边的平行六面体体积，即 $V=|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]|$

混合积的坐标形式：

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，由几何性质得 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$

由行列式性质得，轮换对称性：$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

平面法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，平面一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

得平面点法式方程： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面一般式方程： $Ax+By+Cz+D=0$

若 $D=0$ 通过原点

若 $A=0$ 平行于 x 轴（$D=0$ 时过 x 轴）

若 $A=B=0$ 平行于 xOy 面（$D=0$ 时为 xOy 面）

平面截距式方程：

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 在 x,y,z 轴截距分别为 a,b,c

若两平面 α_1,α_2 法向量分别为 $\vec{n}_1,\vec{n}_2$

则两平面夹角为 $\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}\cdot\sqrt{B_1^2+B_2^2+B_3^2}}$

$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

$\alpha_1 // \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

若 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ 则两平面重合

点到平面距离

已知点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，平面 $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A}^2 + B^2 + C^2}$

两平行平面距离

已知平面 $\alpha_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \alpha_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A}^2 + B^2 + C^2}$

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及直线的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$

参数式方程：直线 l : $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

对称式方程：直线 l : $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

已知直线上两点 $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$

可得直线的两点式方程 l : $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

直线的一般式方程：两平面交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

两直线 l_1, l_2 ，方向向量分别为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 夹角：$\theta = \arccos \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$

直线 l ，方向向量 $\vec{s}$，平面 Π ，法向量为 $\vec{n}$

线面角 $\theta = \arcsin \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$

线面平行则 $\vec{s} \perp \vec{n}$

线面垂直则 $\vec{s} // \vec{n}$

已知直线 l 一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

则过 l 的平面束为：

$\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

线线关系：

已知方向向量分别为 $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ 的两直线 l_1, l_2

取 $M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$

若 $[M_1 \vec{M}_2\ \vec{s}_1\ \vec{s}_2] = 0$ 则线线共面

若 $[M_1 \vec{M}_2\ \vec{s}_1\ \vec{s}_2] \neq 0$ 则线线异面

柱面：缺少坐标的方程

如圆柱面：$x^2 + y^2 = 4$

其准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \\ z = 0 \end{cases}$ ，母线平行于 z 轴

旋转曲面:

母线为原曲线，绕轴旋转的轴为旋转轴

例如曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转，得曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

其母线为 $f(y,z)=0$ ，旋转轴为 z 轴

空间曲线为空间曲面的交线

空间曲线 Γ 一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

空间曲线的参数方程 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 消去变量 z 得到 $H(x,y)=0$

则 Γ 在 xOy 面的投影为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$

称 $H(x,y)=0$ 为投影柱面，$\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$ 为投影曲线

常见曲面：$(a,b,c\in R_+)$

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$

双曲抛物面/鞍形面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

圆锥面：$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

n 维空间的性质

设 R^n 表示 n 维线性空间，$P_0\in R^n$

则 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)=\{P\in R^n|\quad ||P-P_0||<\delta\}$

其中 P_0 为邻域中心，δ 为邻域半径

P_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\in R^n|\quad 0<||P-P_0||<\delta\}$

故 $n=1$ 时为线段，$n=2$ 时为圆形，$n=3$ 时为球体

对于 n 为空间点集 E 与点 P

若 $\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\subset E$，则 P 为 E 的内点。点集 E 的所有内点构成的集合记作 $\text{int } E$

若 $\exists\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则 P 为 E 的外点。点集 E 的所有外点构成的集合记作 $\text{out } E$

若 $\forall\delta>0$ 使得 $U(P,\delta)$ 中既含有 E 的点，又含有 E 外的点，则 P 为 E 的边界点。点集 E 的所有边界点构成的集合记作 ∂E

若 $\forall\delta>0$ 使得 $\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$，则 P 为 E 的聚点

若点集 E 的点都为 E 的内点，则 E 为开集

若点集 E 有 $\partial E \subset E$，则 E 为闭集

若点集 E 中，$\forall P, Q \in E, \exists$ 折线段 t 使得 t 的两端为 P, Q，且 $t \subset E$，则 E 为连通集

连通的开集为区域，区域与其边界构成闭区域

若对于 E，$\exists r > 0$ 使得 $E \subset U(O, r)$ 则 E 为有界集，否则为无界集

多元函数的极限：

设多元函数 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 的定义域为 D，且 P_0 是其聚点。若 $\exists A \in R$，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，只要点 $P \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有 $|f(P) - A| < \varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(P)$ 当点 P （在 D 上）趋于 P_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$

其中 $P \to P_0$ 的方式、路径是任意的

二元函数的极限：

$n = 2, P_0(x_0, y_0)$ 时称为二重极限，记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x, y) = A$ 或 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$

多元函数的连续：

设多元函数 $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 在点 $P_0 = (p_1, p_2 \cdots p_n)$ 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

则称多元函数 $f(P)$ 在点 P 处连续

多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零处）仍然连续

多元连续函数的复合函数也是连续函数

一切多元初等函数在其定义区域内连续，定义区域指包含在定义域内的区域或闭区域

若多元函数在点 P_0 不连续，则称 P_0 为其间断点

多元函数连续的性质：

对于多元函数 $f(P)=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 R^n 的有界闭区域 D 上连续，则

$f(P)$ 在 D 上有界

$f(P)$ 在 D 上能取得最大值和最小值

$f(P)$ 在 D 上能取得最大值和最小值之间的所有值（介值定理）

偏导数

设多元函数 $u=f(P)=(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在点 $P_0(p_1,p_2\cdots p_n)$ 的某邻域内有定义，当 $x_j(1\le j\le n,j\ne i)$ 固定在 p_j 而 x_i 在 p_i 处有增量 Δx_i 时，相应的函数有偏增量

$\Delta_{x_i}u=f(p_1\cdots p_{i-1},p_i+\Delta x_i,p_{i+1}\cdots p_n)-f(P)$

若 $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta_{x_i}u}{\Delta x_i}$ 存在，则称该极限为 $u=f(P)$ 在 P_0 处关于 x_i 的偏导数

记为 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}|_P,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}|_P,u_{x_i}|_P,f_{x_i}|_P,f_i'|_P$

高阶偏导数

对于多元函数 $u=f(P)=(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在区域 D 内存在偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ，且该函数的偏导数也存在，则称为二次偏导数

如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$ 或记为 $u_{x_ix_j},f_{x_ix_j},f_{ij}''$

对于高阶偏导数，若只对一个自变量求偏导，则为纯偏导，如 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_i^n}$

否则为混合偏导，如 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_i^{n-1}\partial x_j}$

当偏导数连续时，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

偏导数的几何意义

二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 在该点处切线对 x 轴的斜率

$f_x(x_0,y_0)$ 存在 $\Rightarrow$ 一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 连续

偏导数连续和二元函数连续互为无关条件

全微分

对于多元函数 $u=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 P 点附近有定义，若全增量 $\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2\cdots x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 可表示为 $\Delta u=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\cdots+A_n\Delta x_n+o(\rho),\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}$

其中，A_i 仅与 u 的 n 个自变量有关，与自变量增量无关，则称多元函数 $f(P)$ 在 P 可微

全微分记作 $\mathrm{d}u=A_1\mathrm{d}x_1+A_2\mathrm{d}_2+\cdots A_n\mathrm{d}_n$

函数在一点连续，各个偏导数均存在，是可微的必要非充分条件

偏导数连续是可微的充分非必要条件

$\therefore$ 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续/偏导数存在，连续与偏导数存在互为无关条件

全微分的计算：

$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$

全微分的应用

$\Delta u\approx\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n$

复合函数求导法则

对于下述偏导数/导函数连续的各个函数

1.若中间变量全为一元函数，则全微分后分别求导。例如 $u=\varphi(t),v=\psi(t),z=f(u,v)$

则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v}{dt}=f_1'\varphi'+f_2'\psi'$

2.若中间变量含有多元函数，则对应多元函数求对应偏导。例如 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),w=\mu(x),z=f(u,v,w)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=f_1'\varphi_1'+f_2'\psi_1'+f_3'\mu'$

3.若中间变量为一个多元函数。例如

$u=\varphi(x,y),z=f(u)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=f'\varphi_1'$

多元函数的高阶偏导数

每个相关函数都要求偏导。例如，设 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y),f,\varphi,\psi\in C^{(2)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'\varphi_1'+f_2'\psi_1')$$
$$=\frac{\partial f_1'}{\partial y}\varphi_1'+\frac{\partial \varphi_1'}{\partial y}f_1'+\frac{\partial f_2'}{\partial y}\psi_1'+\frac{\partial \psi_1'}{\partial y}f_2'$$
$$=(f_{11}''\varphi_2'+f_{12}''\psi_2')\varphi_1'+\varphi_{12}''f_1'+(f_{21}''\varphi_2'+f_{22}''\psi_2')\psi_1'+\psi_{12}''f_2'$$

隐函数求导

$F(x_1,x_2\cdots x_n)=0$ 若 $F\in C^{(1)}$，且在点 $P(p_1,p_2\cdots p_n)$ 处 $F(p_1,p_2\cdots p_n)=0,F_i'(p_1,p_2\cdots p_n)\neq 0$

则可在 P 的某邻域内唯一确定一个 $x_i=f(x_1,x_2\cdots x_{i-1},x_{i+1}\cdots x_n)$ 使得 $p_i=f(p_1,p_2\cdots p_{i-1},p_{i+1}\cdots p_n)$，且 $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=-\frac{F_j'}{F_i'}(i\neq j)$

其中，求解 F_i',F_j' 均要把 n 个自变量看为独立变量

高阶导数：

$$\frac{\partial^m x_i}{\partial x_{j1}\partial x_{j2}\cdots\partial x_{jm}}=\frac{\partial}{\partial x_{jm}}(\frac{\partial^{m-1}x_i}{\partial x_{j1}\partial x_{j2}\cdots\partial x_{j(m-1)}}),\forall x_{jk}\neq x_i$$

方程组形式的隐函数求导

设 $C^{(1)}$ 类函数 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内满足
$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}|_P\neq 0$

则 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ \\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在 P 的某一邻域内唯一确定二元函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ \\v=v(x,y)\end{cases}$

且满足 $\begin{cases}u_0=u(x_0,y_0)\\ \\v_0=v(x_0,y_0)\end{cases}$

其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ \\G_u & G_v\end{vmatrix}$ 称为 F,G 的雅可比行列式

方向导数

以二元函数为例

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，设直线 l 是 xOy 面上过点 P ，单位方向向量为 $\vec{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的直线

则关于直线上任意一点 $Q(x,y)$ 的向量 $\vec{PQ}=t\vec{e}$ 称为 P 到 Q 的有向距离，且 $|\vec{PQ}|=|t|$

当 $\vec{l}\neq\vec{0},\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta),\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$ 存在时，称为函数 z 在 P 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向向量，记为 $\frac{\partial z}{\partial l}|_P$

函数可微是任意方向的方向向量存在的充分非必要条件

当函数可微时，$\frac{\partial f}{\partial l}|_P=f_x|_P\cdot\cos\alpha+f_y|_P\cdot\cos\beta$

梯度

若多元函数 $u=f(x_1,x_2\cdots x_n)$ 在 P 点可微，称向量 $(f_1'|_P,f_2'|_P\cdots f_n'|_P)$ 为函数 f 在 P 点处的梯度，记为 $\mathrm{grad}\ u$ 或 ∇u

其中， $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n})$

因此，函数在点 P 处方向导数最大值为 $|\text{grad }u|$ ，最小值为 $-|\text{grad }u|$ ，与梯度垂直方向方向导数为 0

方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad }u\cdot\vec{e}_l=\frac{1}{|\vec{l}|}\cdot\text{grad }u\cdot\vec{l}$

空间曲线的切线与法平面

若对于空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ ，有 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 连续且不全为 0 ，则称 Γ 为光滑曲线

其在 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 点切线的方向向量称为切向量 $\vec{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

法平面 Π 为过 M_0 ，垂直于切线的平面

故其法向量 $\vec{n}=\vec{\tau}$

$\therefore\Pi:x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0$

设空间曲线为 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

若 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处不全为 0

则有 $\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ F_x&F_y&F_z\\ G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}=[(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)]|_{(x_0,y_0,z_0)}$

空间曲面的切平面与法线

设曲面 $\Sigma : F(x,y,z)=0$，若 F 的偏导数 F_x,F_y,F_z 连续且不全为 0

则 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$ 为 Σ 在 M_0 处的法向量

垂直于法向量，过 M 的平面为 M 的切平面

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

过点 M 且与切平面垂直（与法向量平行）的直线为 M 的法线

$$\begin{cases} x=F_xt+x_0 \\ \\ y=F_yt+y_0 \ \ (t\text{ 为参数}) \\ \\ z=F_zt+z_0 \end{cases}$$

特殊地，若一坐标固定（以 z 为例），可简化法向量为：

$$(F_x,F_y,F_z)=-F_z(-\frac{F_x}{F_z},-\frac{F_y}{F_z},-1)=-F_z(z_x,z_y,-1)$$

从而取法向量为 $\vec{n}=(z_x,z_y,-1)$

等高线与等量面

多元函数 $F=C$ 处称为等高线或等量线

若 $F\in C^{(1)},P,\nabla F(P)\neq\vec{0}$ 则 $\nabla F(P)$ 为等高线 $F=F(P)$ 在 P 的法向量，方向指向高值方向

多元函数的极值

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，对于在该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)

若恒有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，称函数在点 (x_0,y_0) 有极大值

若恒有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，称函数在点 (x_0,y_0) 有极小值

若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 有极值，则这点偏导数为 0 （必要条件）

推广：任意多元函数，若在点 P 取极值，且该点处有偏导数，则任意一元的偏导数均为 0 （必要条件）

使一阶偏导数为 0 的点为驻点，驻点与一阶偏导数不存在的点为可疑极值点

（充分条件）若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内是 $C^{(2)}$ 类函数，点 $P(x_0,y_0)$ 为函数的驻点，记：

$A=f_{xx}|_P,B=f_{xy}|_P,C=f_{yy}|_P$

若 $AC-B^2>0$ 是极值，其中当 $A>0$ 是极小值，$A<0$ 是极大值
若 $AC-B^2<0$ 则不是极值
若 $AC-B^2=0$ 则还需另外判断

多元函数的最值

（多元函数的最值定理）若函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则函数在 D 上必定有最大值和最小值

最值可能在 $\operatorname{int} D$ 上，也可能在 ∂D 上

若多元函数在 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续、可微，且只有有限个极值点，若最值在 D 内取得，则最值点必定是极值点

条件极值拉格朗日乘数法

求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值

引入辅助函数(拉格朗日函数) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$

则极值点满足 $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases}$

推广：求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 与条件 $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值

则引入辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\cdot\varphi(x,y,z)+\mu\cdot\psi(x,y,z)$

则极值点满足 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \\ F_\mu = 0 \end{cases}$