高数表2

积分 微分方程

定积分的定义：

关于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

将区间 $[a,b]$ 插入 $(n-1)$ 个分点，使得 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ ， 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(1\le i\le n)$，$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_3\ldots\Delta x_n\}$

在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一点 ξ_i ，设该区间面积对应为 $f(\xi_i)\Delta x_i$

累加所有对应区间的面积，记 $A\approx\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

取极限 $A=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 若极限存在，则记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=0}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

增加、减少、改变定积分区间上有限个点的函数值，不影响结果

证：

增加点 x 的函数值 y 可视为对定积分的贡献由 0 改变为 y

减少点 x 的函数值 y 可视为对定积分的贡献由 y 改变为 0

设改变了 m 个点的函数值，且第 i 个点 x_i 的函数值由 y_i 修改为 z_i 。使得 $[a,b]$ 上的原函数 $f(x)$ 变为新函数 $g(x)$

$\therefore\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=0}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda \to 0^+} [\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i)\Delta x_i]$$

$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i) \cdot \lim_{\Delta x_i \to 0^+} \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i) \cdot 0$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

故原命题成立

极限换积分型题目:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) f(\xi_i), \xi_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$$

$$= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= F(1) - F(0)$$

plus:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (b-a)(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) f(\xi_i), \xi_i \in [a + \frac{b-a}{n} \times (i-1), a + \frac{b-a}{n} \times i]$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$= F(b) - F(a)$

若 $f(x) \in C[a,b]$ 则 $f(x) \in R[a,b]$

若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有界，且间断点的集合是可数集，则 $f(x) \in R[a,b]$

> 可数集：若一个集合能够与自然数的一个子集一一对应，则称为可数集。故有限集都是可数集。

$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

若 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上可积，且 $a > b$ 则有 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的线性运算性质：

$\int_a^b [\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)]\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x)\mathrm{d}x$

> $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的区间可加性：

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分的对称性：

$$f(x) \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

推论：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$

> 对于奇函数 $f(x)$， $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

> 对于偶函数 $f(x)$， $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

定积分的单调性：

$f(x), g(x) \in R[a,b]$ 且 $\forall x \in [a,b], f(x) \le g(x)$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> 若 $f(x) \le 0 (\ge 0)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le 0 (\ge 0)$

> $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le |\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

定积分中值定则：

若 $f(x) \in C[a,b]$ 则 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

> 或写作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f[a+\theta(b-a)](b-a), 0 \le \theta \le 1$

记 $\bar{f}|_{[a,b]}=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$

若 $\forall x\in[a,b],f(x)\ge 0(\le 0)$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$

则 $f(x)\equiv 0$

积分第一中值定理:

若 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，且 $\forall x\in[a,b],g(x)\ge 0$

则 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

> 或记为 $f(\xi)=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$

若 $F'(x)=f(x)$ 则 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

> 有时考虑到在区间 I 上的不定积分，则记为 $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

若 $f(x)$ 在区间 I 上的一个连续函数，则 $f(x)$ 在 I 上有原函数

若 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数，则 $f(x)$ 在 I 上没有第一类间断点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$$

$$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$$

$$\int k\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^\mu \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C, \mu \neq -1 \\ \ln|x| + C, \mu = -1 \end{cases}$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C(a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\ x + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C = \operatorname{arcsinh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+C = \operatorname{arccosh} x + C$$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a})+C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2\pm a}+C$$

$$\int -\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{a-x^2}+C$$

变限积分：

变上限积分： $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\psi(x)]\cdot\psi'(x) - f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

牛顿莱布尼茨公式：

$f(x)\in C[a,b]$ 且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

不定积分的第一换元法：

设 $f(u)$ 在区间 I 上连续，且有原函数 $F(u)$ ，而 $u=\varphi(x)$ 是一个值域含于 I 中的有连续导数的可微函数，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \overset{\varphi(x)=u}{=} \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C \overset{u=\varphi(x)}{=} F[\varphi(x)]+C$$

不定积分的第二换元法：

设函数 $f(x)$ 在区间 I_x 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 I_x 的对应区间 I_t 上单调并有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$ 。又设 $K(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 在区间 I_t 上的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t)}{=} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = K(t)+C \overset{t=\varphi^{-1}(x)}{=} K[\varphi^{-1}(x)]+C$$

> $\varphi^{-1}(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 的反函数

定积分的换元法：

设 $f(x)\in C[a,b], x=\varphi(t)$ 且

1. $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$
2. $\varphi(t)$ 在以 α 和 β 为端点的区间上有连续导数

> 即 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$

3. 当 t 在上述区间变化时， $\varphi(t)\in[a,b]$

则有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \underset{\varphi(t)=x}{\overset{x=\varphi(t)}{\rightleftarrows}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

设 $f(x)\in C[0,1]$ 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

> $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} (\pi - x)f(\sin x)\mathrm{d}(\pi - x) = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$
> $\therefore 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

设以 $T(\neq 0)$ 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $a, a+T, 0, T \in I$

则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x$

分部积分法：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x = \begin{cases} (\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \quad, n\text{为奇数} \end{cases}$$

几类可积函数的积分

> 此类知识点较难，建议参考着书上例题学

有理函数的不定积分：

> 有理运算：加减乘除
> 由自变量与常数经过有限次的有理运算所得到的函数称为有理函数，通常记为 $R(x)$

设 m 项多项式函数 $P_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$

设 n 次多项式函数 $Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$

即可设 $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

1. 若 $m\geq n$：

可得存在 $(m-n)$ 次多项式 $M_{m-n}(x)$ 与一个 k 次多项式 $N_k(x)(k<n)$ 使得

$P_m(x)=M_{m-n}(x)\cdot Q_n(x)+N_k(x)$

$$\therefore\int R(x)\mathrm{d}x=\int[M_{m-n}(x)+\frac{N_k(x)}{Q_n(x)}]\mathrm{d}x=\int M_{m-n}(x)\mathrm{d}x+\int\frac{N_k(x)}{Q_n(x)}\mathrm{d}x$$

2. 若 $m<n$：

由代数基本定理可得， $Q_n(x)$ 可被分解为若干个形如 $(x-a)^k$ 或 $(x^2+px+q)^k$ 的因式乘积 $(a,p,q\in R,k\in Z_+,x^2+px+q=0\text{无实数根})$

> 代数基本定理：一元 n 次方程一定有 n 个复数根

若 $Q_n(x)$ 可被分解为 $(x-a)^k$ ，则 $R(x)$ 可分解出如下 k 个因式之和：

$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-3)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$

其中 $A_1,A_2,A_3\ldots A_k$ 均为待定的常数

若 $Q_n(x)$ 可被分解为 $(x^2+px+q)^k$ ，则 $R(x)$ 可分解出如下 k 个因式之和：

$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^3}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$

其中 $M_1,N_1,M_2,N_2,M_3,N_3\ldots M_k,N_k$ 均为待定常数

因此可以将 $R(x)$ 分解为多个分母形如 $(x-a)^k,(x^2+px+q)^k$ 的多项式求和，利用待定系数法求出所有的待定常数

利用积分的线性运算性质分别展开求积分

$$\int \frac{A_k}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A_k \int \frac{1}{(x-a)^k}\mathrm{d}(x-a) = \begin{cases} A_k \ln(x-a) + C, & k=1 \\ \frac{A_k}{1-k}(x-a)^{1-k} + C, k \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M_k}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x + (N_k - \frac{M_k p}{2})\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k}$$

故要求原积分，则需要求解 $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$ 与 $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} = \begin{cases} \ln|x^2+px+q| + C, & k=1 \\ \frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k} + C, k \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{p}{2})^2 + (\sqrt{q-\frac{p^2}{4}})^2]^k}\mathrm{d}x$$

该式为形如 $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$ 类积分

设 $I_k = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$

则 $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1^2}\mathrm{d}(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$I_k (k>1)$

$$= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x$$

分部积分

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x\mathrm{d}[\frac{1}{(x^2+a^2)^k}]$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} - \int x \cdot (-k) \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^{k+1}} \cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(x^2+a^2)^k}\mathrm{d}x - 2ka^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{k+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1}$$

$\therefore 2ka^2 I_{k+1} = (2k-1)I_k + \frac{x}{(x^2+a^2)^k}$

将 k 换元为 $(k-1)$ 得

$\therefore I_k = \frac{1}{a^2}[\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{k-1}}]$

因此证明形如 $\frac{M_k x+N_k}{(x^2+px+q)^k}$ 的函数可积

因此证明 $R(x)$ 可积

有理三角函数的积分：

> 由 $\sin x, \cos x$ 及常数经过有限次有理运算所得的函数称为有理三角函数，记为 $R(\sin x, \cos x)$

1. 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\cos x = t$
2. 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\sin x = t$
3. 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$，则换元 $\tan x = t$
4. 利用万能代换，将原有理三角函数积分，转化为有理函数积分

令 $t = \tan\frac{x}{2}$

故 $x = 2\arctan t$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\therefore \int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot\mathrm{d}t$$

简单无理函数的积分

> 由自变量 x，唯一的根式 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(a,b,c,d\text{都是常数，且}a\text{与}c\text{、}d\text{与}c\text{不同时为}0)$ 经过有限次有理运算得到的函数，称为简单无理函数，记为 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$

换元，令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 即可解决

定积分的应用：元素法：

若所求量 U 满足以下条件：

1. U 依赖于区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$
2. U 的可加性：当把区间 $[a,b]$ 分成若干个无公共内点的小区间的并集时，U 可分解为对应小区间所对应量的总和
3. 在典型的一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$ 上，U 的对应量可近似表示为 $f(x)\mathrm{d}x$

则 $\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$ 称为 U 的元素

U 可用定积分表示为 $U=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定积分求平面图形面积：

直角坐标系：

若所求区域为 $D=\{(x,y):a\le x\le b,g(x)\le y\le f(x)\}$

面积 $A=\displaystyle\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

若所求区域为 $D=\{(x,y):c\le y\le d,\psi(y)\le x\le\varphi(y)\}$

面积 $A=\displaystyle\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$

极坐标系：

1. 极点在图形外：$D=\{(\rho,\theta),\alpha\le\theta\le\beta,\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\}$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

2. 极点在图形边界：$D=\{(\rho,\theta),\alpha\le\theta\le\beta,\rho\le r(\theta)\}$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

3. 极点在图形内：$D=\{(\rho,\theta),0\le\theta\le 2\pi,\rho\le r(\theta)\}$

$$A=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

定积分求空间图形体积：

1. $\begin{cases}\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x\Rightarrow V=\displaystyle\int_a^b A(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}V=A(y)\mathrm{d}y\Rightarrow V=\displaystyle\int_a^b A(y)\mathrm{d}y\end{cases}$
2. 旋转体体积（以解析式为 $f(x)$ 的形式为例，解析式为 $\varphi(y)$ 的同理）

绕 x 轴旋转：

$$\mathrm{d}V_x=A(x)\mathrm{d}x=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

绕 y 轴旋转：

$$\mathrm{d}V_y=\pi[(x+\mathrm{d}x)^2-x^2]\cdot f(x)=2\pi xf(x)\mathrm{d}x+\pi(\mathrm{d}x)^2f(x)\approx 2\pi xf(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

定积分求曲线弧长：

> 光滑曲线（ $f'(x)$ 存在 ）都是可求长曲线

弧长微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

直角坐标系:

$$s=\int_a^b\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

参数方程:

$$s=\int_a^b\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\int_a^b\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$$

极坐标:

由 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ 得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta]^2+[r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta]^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

定积分求算数平均值:

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\bar{f}|_{[a,b]}$$

定积分求加权平均值:

设原函数为 $f(x)$，加权函数为 $\omega(x)$

则在 $[a,b]$ 上的加权平均值为 $\bar{f}=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\omega(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b\omega(x)\mathrm{d}x}$

反常积分（广义积分）：

1. 若对 $\forall x \in [a,+\infty), \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 有意义，则称形式化的定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 。当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在时，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称反常积分发散
2. 广义牛顿-莱布尼茨公式：若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$
3. 只含负无穷的无穷区间同理定义可得
4. 若对 $\forall x \in (-\infty,+\infty), \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 有意义，则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

当且仅当等号右边两个反常积分都收敛时，称原反常积分收敛，否则称原反常积分发散

5. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{0} + F(x)|_{0}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

> $p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}$ ，而 $p<1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散

瑕积分：

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对 $\forall\varepsilon>0, f(x)$ 在 $(x_0, x_0+\varepsilon)$ 内均无界，则称 x_0 为 $f(x)$ 的右瑕点。如果对于 $\forall\varepsilon>0, f(x)$ 在 $(x_0-\varepsilon, x_0)$ 内均无界，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的左瑕点。

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上有定义，且 b 是 $f(x)$ 的一个左瑕点。如果 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 的任一子区间 $[a,x]\subset[a,b)$ 上可积，则形式上称 $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的瑕积分，但仍记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

当等号右边的极限存在时，称等号左边的瑕积分收敛，否则称瑕积分发散

2. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = F(b^-) - F(a)$$
3. 左瑕点的瑕积分同理定义可得
4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 有定义，且 c 是 $f(x)$ 的一个瑕点。如果 $f(x)$ 在 $(c,b]$ 的任一子区间 $[x,b]\subset(c,b]$ 上可积，在 $[a,x]\subset[a,c)$ 上也可积，则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当等号右边的两个瑕积分都收敛时，才称原瑕积分收敛，否则称原瑕积分发撒

5. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则满足上述条件时，形式上有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(c^+) + F(c^-) - F(a)$$

当且仅当 $F(c^+), F(c^-)$ 均收敛时，称原瑕积分收敛

> $0<q<1$ 时，瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x$ 收敛于 $\frac{1}{1-q}$ ，而 $q>1$ 时，瑕积分发散

微分方程：

含有未知函数、未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。微分方程中出现的位置函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶

只含一个自变量的微分方程为常微分方程，有两个及以上的叫偏微分方程

若定义在区间 I 上的 n 阶可导函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程 $F(x,y,y',y''\ldots y^{(n)})=0$ 能使之成为恒等式 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)\ldots\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0, x\in I$，则称函数 $y=\varphi(x)$ 为该微分方程在 I 上的解

n 阶微分方程含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1,C_2,C_3\ldots C_n$ 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,C_3\ldots C_n)$ 称为该 n 阶微分方程的通解

给出确定通解中任意常数值的条件，称为定解条件，常见的有初值条件

由初值条件确定所有任意常数后得到的解称为微分方程的特解

可分离变量的微分方程：

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$

$$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C$$

一阶线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程，其中 $P(x),Q(x)$ 为某一区间上 x 的已知连续函数

一阶齐次线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的微分方程

原方程解为 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

> $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$
> $$\ln|y|=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int-P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$
> $$y=|y|=Ce^{\int-P(x)\mathrm{d}x}$$

一阶非齐次线性微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程，其中 $\exists x\in I$ 使得 $Q(x)\neq0$

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$$

> 令 $y=ue^{\int-P(x)\mathrm{d}x}$
> $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{\int-P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)e^{\int-P(x)\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{\int-P(x)\mathrm{d}x}-P(x)y$$
> $$\therefore Q(x)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{\int-P(x)\mathrm{d}x}\Rightarrow u=\int\mathrm{d}u+C=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

齐次微分方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(\frac{y}{x})$ 的微分方程，这里 $g(u)$ 为某一区间上 u 的已知连续函数

令 $u=\frac{y}{x}$

$\therefore g(u)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

整理得到 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}$

为可分离变量的微分方程

伯努利方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^a(a\in R\text{且}a\neq 0,1)$ 的微分方程

两边同除 y^a 得

$y^{-a}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-a}=Q(x)$

令 $z=y^{1-a}$ 代入上式整理得

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-a)P(x)z=(1-a)Q(x)$ 为一阶线性微分方程

可化为齐次型的方程：

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ 的微分方程

1. $c_1=c_2=0$ 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}$ ，为齐次方程
2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\neq\frac{c_1}{c_2}$ 则

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$

令 $u=a_2x+b_2y$ 代入上式化简得

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\cdot\frac{ku+c_1}{u+c_2}$

为可分离变量的微分方程

3. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 且 $c_1\neq 0$ 或 $c_2\neq 0$

故 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

解得两直线交点 (α,β)

则令 $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$

原齐次方程化为 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$ 等同于情况 1

$y''=f(x)$ 型微分方程:

$$y=\int[\int f(x)\mathrm{d}x]+C_1x+C_2$$

$y''=f(x,y')$ 型微分方程

设 $p=y'$ 则 $y''=p'$

故原方程化为 $p'=f(x,p)$，为一阶微分方程

求出通解 $p=\varphi(x,C_1)$ 后求出原方程通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$$

$y''=f(y,y')$ 型微分方程

设 $p=y'$ 则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故原方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$ 为一阶微分方程

求出通解 $p=\varphi(y,C_1)$ 后可得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$ 为可分离变量的微分方程

二阶微分方程:

形如 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的微分方程

其中，$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的为二阶齐次微分方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的为二阶非齐次微分方程，$\exists x\in I$ 使得 $f(x)\neq 0$

n 阶微分方程:

形如 $\sum\limits_{i=0}^{n}y^{(i)}P_i(x)=f(x)$ 的微分方程

若 $f(x)\equiv 0$ 则为 n 阶线性齐次微分方程，否则为 n 阶线性非齐次微分方程

若 $\forall P_i(x)\equiv C_i$ 则为 n 阶常系数微分方程

二阶/n 阶线性微分方程解的结构:

叠加原理:

若二阶线性微分方程有特解 y_1,y_2 则 $\forall y=C_1y_1+C_2y_2$ 均为特解

若 n 阶线性微分方程有特解 $y_i,i\in[1,n]\cap Z$ ，则 $\forall y=\sum\limits_{i=1}^{n}C_iy_i$ 均为特解

若 y_i 间线性无关，则上述 y 为通解

> 设定义在同一区间 I 上的 n 个函数为 $y_1,y_2,y_3\ldots y_n$，若存在不全为 0 的 n 个数 $k_1,k_2,k_3\ldots k_n$ 使得当 $x\in I$ 时，恒有 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_iy_i\equiv 0$ ，则称它们线性相关，否则称线性无关

设 $y_i(x),i\in[1,n]\cap Z$ 为 n 阶线性微分方程的 n 个解，设 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}C_iy_i$

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i=0$ 即为 n 阶线性齐次微分方程的解，$\sum\limits_{i=1}^{n}C_i=1$ 即为 n 阶线性非齐次线性方程的解

若 y_1 为某 n 阶线性非齐次微分方程的解， y_2 为其对应的 n 阶线性齐次微分方程的解

则 $y=y_1+y_2$ 为 n 阶线性非齐次微分方程的解

若 y_1 为方程 $\sum\limits_{i=0}^{n} A_i y^{(i)}=f(x)$ 的解， y_2 为方程 $\sum\limits_{i=0}^{n} B_i y^{(i)}=g(x)$ 的解

则 $y=ay_1+by_2$ 为方程 $\sum\limits_{i=0}^{n}(aA_i+bB_i)y^{(i)}=af(x)+bg(x)$ 的解

其中， a,b 为任意复数

二阶常系数齐次微分方程：

形如 $y''+py'+q=0$ 的微分方程

其对应特征方程为 $r^2+pr+q=0$

1. 若 $\Delta>0$ 得到两不相等实根 r_1,r_2 ，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
2. 若 $\Delta=0$ 得到两相等实根，值均为 r ，则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
3. 若 $\Delta<0$ 得到两共轭虚数根，设值为 $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta, a,b\in R$ ，则通解为 $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

n 阶常系数微分方程：

形如 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+p_3y^{(n-3)}+\cdots+p_ny=0$ 的微分方程

其特征方程为 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+p_3r^{n-3}+\cdots+p_n=0$

解后得到 n 个复根

若含有 s 重实数根 r ，则通解中含有 s 项 $(C_1+C_2x+\cdots+C_sx^{s-1})e^{rx}$

若含有 s 重共轭虚数根 $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta, \alpha,\beta\in R$ ，则通解中含有 $2s$ 项

$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_sx^{s-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_sx^{s-1})\sin\beta x]$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ ，先解出其对应二阶常系数齐次线性微分方程的通解为 Y

若能解出特解 y^* ，则该方程通解为 $y = Y + y^*$

1. 当 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 时，设 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$ ，其中 k 代表 λ 是特征方程的 k 重根，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式函数

代入方程得：

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

对比系数即可解出 $Q(x)$

> 若设 $F(x) = x^2 + px + q$ 为特征函数，则代入后所得式子为 $Q''(x) + F'(\lambda)Q'(x) + F(\lambda)Q(x) = P_m(x)$

2. 当 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$ 时

$$f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}) = \frac{P_m(x)}{2}e^{(\lambda + i\omega)x} + \frac{P_m(x)}{2}e^{(\lambda - i\omega)x}$$

3. 当 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$ 时

$$f(x) = P_m(x)e^{\lambda}(\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}) = -\frac{P_m(x)}{2}i \cdot e^{(\lambda + i\omega)x} + \frac{P_m(x)}{2}i \cdot e^{(\lambda - i\omega)x}$$