高数表4

第一型积分 第二型积分

第一型积分

设 Ω 是可测的几何体，$u=f(P)$ 是定义在 Ω 上的函数，将 Ω 任意分成可测的小块 $\Delta\Omega_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，$\mu(\Delta\Omega_i)$ 表示 $\Delta\Omega_i$ 的测度。记 $\lambda=\max\{\mu(\Delta\Omega_i)\}$，任取 $P_i\in\Delta\Omega_i$，若和式极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(P_i)\cdot\mu(\Delta\Omega_i)$ 存在且与 Ω 的分割方式、取 P_i 的方式无关，则称之为 $u=f(P)$ 沿 Ω 的第一型积分，记为 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu$

即 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(P_i)\cdot\mu(\Delta\Omega_i)$

其中，Ω 称为积分区域，$f(P)$ 为被积函数，$\mathrm{d}\mu$ 为积分微元，$f(P)\mathrm{d}\mu$ 为被积表达式

1. 当 Ω 表示一维闭区间时，测度为区间长度，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x$，表示定积分
2. 当 Ω 表示二维闭区间时，测度为面积，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}\sigma$，表示二重积分
3. 当 Ω 表示三维闭区间时，测度为体积，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}V$，表示三重积分
4. 当 Ω 表示平面或空间曲线时，测度为曲线长度，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}s$，表示第一型曲线积分
5. 当 Ω 表示有界空间曲面时，测度为曲面面积，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}S$，表示第一型曲面积分

若 $f(P)\equiv 1,P\in\Omega$ 则 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathrm{d}\mu=\mu(\Omega)$

第一型积分的运算具有线性（数乘、加减）、区域可加性

第一型积分的单调性：

若在 Ω 上有 $f(P)\geq 0$，则 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu\geq 0$

第一型积分的积分不等式性：

若在 Ω 上有 $f(P)\leq g(P)$，则有 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu\leq\int_\Omega g(P)\mathrm{d}\mu$

第一型积分的绝对可积性：$|\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu|\leq\int_\Omega|f(P)|\mathrm{d}\mu$

第一型积分估值不等式：设在 Ω 上的 $f(P)$ 最大值为 M ，最小值为 m 。则 $m\cdot\mu(\Omega)\le \int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu\le M\cdot\mu(\Omega)$

第一型积分的中值定理：设函数 $f(P)$ 在闭区域 Ω 上连续，则在 Ω 上至少存在一点 P_0 使得 $\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu=f(P_0)\cdot\mu(\Omega)$

向量值函数的积分

向量函数求极限等价于其各个分量求极限，若 $\vec{A}(P)=\{A_1(P),A_2(P),A_3(P),\cdots,A_m(P)\}=\sum_{i=1}^{m}A_i(P)\cdot\vec{e}_i$

则 $\int_\Omega\vec{A}(P)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega(\sum_{i=1}^{m}A_i(P)\cdot\vec{e}_i)\mathrm{d}\mu$

利用第一型积分的线性性质，等价于 $\sum_{i=1}^{m}[\int_\Omega A_i(P)\mathrm{d}\mu]\cdot\vec{e}_i$

因此 $\int_\Omega\vec{A}(P)=\{\int_\Omega A_1(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega A_2(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega A_3(P)\mathrm{d}\mu,\cdots,\int_\Omega A_m(P)\mathrm{d}\mu\}$

二重积分的计算

平面直角坐标系条件下 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y$

极坐标系条件下 $\mathrm{d}\sigma=\rho\cdot\mathrm{d}\rho\cdot\mathrm{d}\varphi$

1. 对于积分区域 D ，若为 x 型区域：$\begin{cases}a\le x\le b\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\end{cases}$ ，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\cdot\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$
2. 对于积分区域 D ，若为 y 型区域：$\begin{cases}c\le y\le d\\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\end{cases}$ ，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\cdot\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$

3. 若积分区域 D 关于 x 轴对称且 $f(x,y)\in C(D)$，若有 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 则 $I=0$，若有 $f(x,-y)=f(x,y)$ 则 $I=2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_1 为 D 位于 x 轴上侧部分。同理可类比 y 轴。
4. 对于积分区域 D，若 $O\in\operatorname{out}D$：$\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\\rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
5. 对于积分区域 D，若 $O\in\partial D$：$\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\0\le\rho\le\rho(\varphi)\end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
6. 对于积分区域 D，若 $O\in\operatorname{int}D$：$\begin{cases}0\le\varphi\le2\pi\\0\le\rho\le\rho(\varphi)\end{cases}$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$
7. 对于积分区域 D，若可分为若干个上述区域，则可利用区间可加性进行分解 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=(\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\cdots+\iint_{D_m})f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

三重积分的计算

空间直角坐标系条件下 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$

柱坐标系条件下 $\mathrm{d}V=\rho\cdot\mathrm{d}\rho\cdot\mathrm{d}\varphi\cdot\mathrm{d}z$

球坐标系条件下 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}\varphi$

1. 坐标面投影法/先一后二法（以投影至 xOy 面为例）

设空间有界闭区域 Ω 在 xOy 面投影为 D_{xy}，Ω 的下、上曲面分别为 $\Sigma_1:z=z_1(x,y),\Sigma_2:z=z_2(x,y)$，且 $z_1(x,y),z_2(x,y)\in C(D_{xy})$，若 Ω 可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}\}$ 则称之为 xy 型空间区域

此时 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

2. 坐标轴投影法/截面法/先二后一法（以投影至 z 轴为例）

设空间有界闭区域 Ω 在 z 轴投影区间为 $[p,q]$，用 D_z 表示过点 $(0,0,z)$ 且平行于 xOy 面的平面截 Ω 所得的平面区域。若 Ω 可表示为 $\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z,p\le z\le q\}$ 则称之为 z 型空间区域

此时 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_p^q\mathrm{d}z\cdot\iint_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3. 对称性(以关于 xOy 面为例)

设空间有界闭区域 Ω 关于 xOy 面对称，若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ 则 $I=0$；若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$ 则 $I=\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}V$ ，其中 Ω_1 为 Ω 位于 xOy 面上侧部分

4. 使用三次积分（举例）

设空间有界闭区域 Ω： $\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b\mathrm{d}x\cdot\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\cdot\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

5. 使用柱面坐标

设空间有界闭区域 Ω： $\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\\ z_1(\rho,\varphi)\le z\le z_2(\rho,\varphi)\end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\mathrm{d}\rho\cdot\int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\mathrm{d}z$

6. 使用球面坐标

设空间有界闭区域 Ω： $\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\ \theta_1(\varphi)\le\theta\le\theta_2(\varphi)\\ r_1(\varphi,\theta)\le r\le r_2(\varphi,\theta)\end{cases}$ 则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\mathrm{d}\theta\cdot\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}r^2\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{d}\theta$

第一型曲线积分的计算

封闭的曲线积分记为 $\oint_L f(P)\mathrm{d}s$

直角坐标系条件下 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$

直角坐标系下，参数方程 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$

若曲线 L： $\begin{cases}a\le t\le b\\x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 则 $\int_L f(P)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]\cdot\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t$

特别的，当平面曲线 $y=y(x),a\le x\le b$ 时 $\int_L f(p)\mathrm{d}s=\int_a^b f[y(x),x]\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\mathrm{d}x$

极坐标条件下 $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$

若曲线 L： $\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta\\\rho=\rho(\varphi)\end{cases}$ 则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$

对称性(以平面曲线关于 x 轴对称为例)：设 $L=L_1+L_2$ ，且 L_1 与 L_2 关于 x 轴对称，L_1 在 x 轴上方

若 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$

若 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$

轮换对称性： 若满足 $f(x,y,z)$ 中自变量调换顺序，对函数解析式不影响，则 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L f(x,z,y)\mathrm{d}s=\int_L f(y,x,z)\mathrm{d}s=\int_L f(y,z,x)\mathrm{d}s=\int_L f(z,x,y)\mathrm{d}s=\int_L f(z,y,x)\mathrm{d}s$

第一型曲面积分的计算

封闭的曲面积分记为 $\oiint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$

以投影到 xOy 面为例

设光滑曲面 Σ 满足如下方程： $z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$

若 $f(x,y,z)\in C(\Sigma)$ 则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

对称性（以曲面关于 xOy 面对称为例）：设 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ ，其中 Σ_1 与 Σ_2 关于 xOy 面对称，Σ_1 在 xOy 面上方

若 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的奇函数，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$

若 $f(x,y,z)$ 为关于 z 的偶函数，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

轮换对称性：若满足 $f(x,y,z)$ 中自变量调换顺序，对函数解析式不影响，则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(x,z,y)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(y,x,z)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(y,z,x)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(z,x,y)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma f(z,y,x)\mathrm{d}S$

第一型积分的运用举例

测度 $\mu(\Omega)=\int_\Omega \mathrm{d}\mu$

质量 $m=\int_\Omega \rho(P)\mathrm{d}\mu$

质心 $\vec{P}=\frac{1}{\int_\Omega f(P)\mathrm{d}\mu}\{\int_\Omega x\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega y\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega z\cdot f(P)\mathrm{d}\mu\}$

形心 $\vec{P}=\frac{1}{\mu(\Omega)}(\int_\Omega x\mathrm{d}\mu,\int_\Omega y\mathrm{d}\mu,\int_\Omega z\mathrm{d}\mu)$

绕轴转动惯量（以绕 z 轴为例） $J_z=\int_\Omega (x^2+y^2)\cdot f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$

绕点转动惯量（以绕 O 点为例） $J_O=\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)\cdot f(x,y,z)\mathrm{d}\mu$

对原点的引力 $\vec{F}=G\{\int_\Omega \frac{x}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega \frac{y}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu,\int_\Omega \frac{z}{r^3}\cdot f(P)\mathrm{d}\mu\},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

第二型曲线积分

带有确定走向，且曲线上每一点处都有切线，并且当切点在曲线上连续移动时，对应的切点连续地转动。该直线为定向光滑曲线

若某条定向光滑曲线为 L，则 L^- 表示与之反向的曲线

定向光滑曲线的参数表达式：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\\t:a\to b\end{cases}$，向量表达式 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},t:a\to b$

规定与 L 走向相同的切向量为正切向量 $\vec{\tau}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$，与之反向的为负切向量 $-\vec{\tau}$

设 Γ 为空间中从 A 到 B 的一条定向光滑曲线，$f(P)$ 为在 Γ 上有定义的一个有界函数，在 Γ 上顺其定向任意插入 $n-1$ 个分点 $M_1,M_2\cdots M_{n-1}$，并设 $A=M_0,B=M_n$

因此 Γ 被分为 n 个弧段 $\overparen{M_{i-1},M_i}(1\le i\le n)$，记 $M_i(x_i,y_i,z_i,\cdots),\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_i=y_i-y_{i-1},\Delta z_i=z_i-z_{i-1},\cdots$，小弧段长度最大值为 λ，在 $\overparen{M_{i-1},M_i}$ 上任取一点为 P_i

若对于 Γ 的任意分割与任意取点，极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(P_i)\Delta x_i$ 都存在，称函数 $f(P)$ 在 Γ 上关于坐标 x 可积，并称其为 $f(P)$ 在 Γ 上关于 x 的积分，记为 $\int_\Gamma f(P)\mathrm{d}x$

类似地，可定义其他坐标的积分。这些统称为第二型曲线积分

若三维空间中某向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 或简记为 $\vec{A}(P,Q,R)$，某定向光滑曲线 Γ

则沿 Γ 的第二型曲线积分 $I=\int_\Gamma\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$，其中 $\mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}x\cdot\vec{i}+\mathrm{d}y\cdot\vec{j}+\mathrm{d}z\cdot\vec{k}$

第二型曲线积分的性质与计算

第二型曲线积分具有线性性质与区间可加性

第二型曲线积分的反向奇性（以关于 x 坐标可积为例）：若 $f(x,y,z)$ 在定向光滑曲线 Γ 上关于 x 可积，则 $f(x,y,z)$ 在定向光滑曲线 Γ^- 上关于 x 也可积，且 $\displaystyle\int_\Gamma f(P)\mathrm{d}x=-\int_{\Gamma^-}f(P)\mathrm{d}x$

设 $f(x,y,z)$ 在定向光滑 Γ 上有定义且连续，$\Gamma:\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},t:a\to b$ 则曲线积分存在，且有：$\begin{cases}\displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\mathrm{d}t\\ \displaystyle\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$

特殊的，例如，若平面的定向曲线 $\Gamma:y=y(x),x:a\to b$

则 $\displaystyle\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)\cdot y'(x)]\}\mathrm{d}x$

两类曲线积分的关系

设空间中的有向光滑曲线 L 以弧长为参数，方程为：$\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}+\cdots$

由于 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2+\cdots}$

因此，切向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\cos\gamma=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\cdots$

$\therefore\mathrm{d}\vec{s}=\mathrm{d}x\cdot\vec{i}+\mathrm{d}y\cdot\vec{j}+\mathrm{d}z\cdot\vec{k}+\cdots=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma,\cdots)\cdot\mathrm{d}s$

所以，在空间中的某定向光滑曲线 Γ 在向量场 $\vec{A}=(P,Q,R,\cdots)$ 上的第二型积分为

$$\int_\Gamma\vec{A}\mathrm{d}\vec{s}=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma+\cdots)\mathrm{d}s$$

区域连通性与正向边界曲线

设 D 为平面区域，若 D 内任一闭合曲线所围成的区域都属于 D，则称 D 为平面单连通区域，否则称为复联通区域。

正向边界曲线：当观察者沿着 ∂D 走的时候，区域 D 总在它的左边。正向边界曲线记为 ∂D^+

格林公式

设 xOy 面上的有界闭区域 D 的边界曲线 ∂D 由有限条光滑或分段光滑的曲线所组成，函数 $P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(D)$ 则有：

$$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

当 D 内存在奇点时，可构造某 D 内不过奇点的封闭曲线 L 。而后，使得 $\oint_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=(\oint_{\partial D^++L^-}+\oint_L)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

平面曲线积分与路径无关

若在单连通区域 G 上，$P(x,y),Q(x,y)\in C^{(1)}(G)$，则以下四个命题等价：

1. 对任意封闭曲线 $C\subset G,\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$
2. $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路劲无关
3. 在 G 内存在 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$
4. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 G 内处处成立

二元函数全微分的求解

若存在 u 使得 $u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 则称 u 为 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数。若该式在 G 内存在原函数，则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路劲无关

该式的一个元函数为 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

第二型曲面积分

在双侧曲面上选定某一侧，该种曲面称为定向曲面。Σ 表示选定了该侧的定向曲面，Σ^- 表示选定了该侧相反侧的定向曲面

规定曲面的法向量总是指向曲面取定的一侧。例如当曲面方程满足 $z=z(x,y)$ 时，Σ 取定上侧，则 $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)$；Σ 取定下侧，则 $\vec{n}=(z_x,z_y,-1)$

设 Σ 是一片光滑的定向曲面，向量值函数 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 在 Σ 上有界，在点 (x,y,z) 处的单位法向量 $\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，若积分 $\iint_\Sigma P\cos\alpha\mathrm{d}S,\iint_\Sigma Q\cos\beta\mathrm{d}S,\iint_\Sigma R\cos\gamma\mathrm{d}S$ 同时存在，则称积分 $\iint_\Sigma[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\mathrm{d}S$ 为向量值函数 $\vec{F}$ 在定向曲面 Σ 上的积分或第二型曲面积分，记为 $\iint_\Sigma\vec{F}\mathrm{d}\vec{S}$

其中，$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{e}_n\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot\vec{i}+\mathrm{d}z\mathrm{d}x\cdot\vec{j}+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot\vec{k}$

$\therefore\iint_\Sigma\vec{F}\mathrm{d}\vec{S}=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

第二型曲面积分同样具有线性性质、区间可加性与反向奇性

两类曲面积分的联系

$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma(P,Q,R)\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$

第二型曲面积分的计算

1. 分面投影法

将 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 看成三个积分，分别计算后求和

以计算 $\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为例:

设 Σ 可写为 $z=z(x,y)\in C^{(1)}(D_{xy}),(x,y)\in D_{xy}$ 且被积函数 $R\in C(\Sigma)$

若 Σ 为上侧，则 $\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

若 Σ 为下侧，则 $\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. 合一投影法（以投影到 xOy 面为例）

当曲面 Σ 可写为 $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 时，法向量 $\vec{n} = \pm(z_x, z_y, -1)$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\iint_{D_{xy}} \{P[x, y, z(x, y)], Q[x, y, z(x, y)], R[x, y, z(x, y)]\} \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式

设 Ω 为空间有界闭区域，其边界曲面 $\partial\Omega$ 由有限块光滑或分片光滑的曲面围成，若函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续的偏导数，则有 $\oiint_{\partial\Omega^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$

当 Σ 不封闭时，可以添加曲面 Σ_1 使得曲面封闭，然后 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_1^-})P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

当 Ω 内存在奇点时，可以选择添加包含奇点的曲面 Σ_1 ，然后 $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\iint_{\Sigma+\Sigma_1^-} + \iint_{\Sigma_1})P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

通量与散度

设 $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \in C^{(1)}$ 的向量场，沿场中某曲面 Σ 的通量/流量为其第二类曲面积分

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}\mathrm{d}\vec{S}$$

在场内，做包围点 M 的闭曲面 Σ ，设 Σ 所围区域的为 V ，体积为 $\mu(V)$ 。若当 V 收缩成点 M 时，极限 $\lim\limits_{V\to M}\dfrac{\oiint \vec{A}\mathrm{d}\vec{S}}{\mu(V)}$ 存在，则称该极限值为 $\vec{A}$ 在 M 的散度，记为 $\operatorname{div}\vec{A}$

利用积分中值定理可证明，$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$

故高斯公式可简写为 $\oiint_{\partial\Omega^+}\vec{A}\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V$

斯托克斯公式

定向曲面的正向边界曲线，即为绕该定向曲面边界线，且按照右手定则，方向指向曲面正向的方向。

设 Σ 是一张光滑或分片光滑的定向曲面，Σ 的正向边界 $\partial\Sigma^+$ 为光滑或分段光滑的闭曲线。若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 上具有一阶连续偏导数，则有 $\iint_{\Sigma}(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial\Sigma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

可以见得，格林公式为斯托克斯公式在平面上的特殊情况

斯托克斯公式的其他表示方法：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\partial\Sigma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_{\partial\Sigma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

又或者是用 ∇ 算符来表示：

若在场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 中

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{\Sigma}\nabla\times\vec{A}\mathrm{d}\vec{S}$$

故可表示为 $\iint_{\Sigma}\nabla\times\vec{A}\mathrm{d}\vec{S}=\oint_{\partial\Sigma^{+}}\vec{A}\mathrm{d}\vec{s}$

环流量与旋度

设 $C^{(1)}$ 的向量场 $\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 则沿 $\vec{A}$ 中某一封闭的定向曲线 Γ 上的曲线积分 $\oint_{\Gamma}\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 称为向量场 $\vec{A}$ 沿曲线 Γ 所取方向的环流量

称向量 $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})$ 为 $\vec{A}$ 在该点的旋度，记为 $\mathrm{rot}\ \vec{A}=\nabla\times\vec{A}$