高数表5

无穷级数

级数的定义

无穷和式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots(a_i\in R)$ 称为(实)常数项无穷级数，简称（实数项）级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 。即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$

其中，第 n 项 a_n 称为级数的一般项（或通项）

$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 称为级数的前 n 项部分和

数列 $\{s_n\}$ 称为级数的部分和数列

若 $\{s_n\}$ 有极限 s ，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ （有限数），则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并称 s 为级数的和，记为 $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

若 $\{s_n\}$ 没有极限 s ，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。因此常数项级数收敛 $\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在；常数项级数发散 $\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在

当级数收敛时，称差值 $r_n=s-s_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的余项级数，即 $r_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_{n+i}$ 。显然 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$

级数的基本性质

1. 在级数前增加、删除、修改有限项，级数的敛散性不变
2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 s ，则对于任意常数 k ，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 收敛于 ks
3. 级数的每一项乘上一个非零的常数，敛散性不变

4. 设两收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 收敛，其和为 $(s \pm \sigma)$
5. 收敛级数的项任意加括号后所得的级数，仍然收敛于原来的和

   > 推论：若加括号后所形成的新级数发散，则原级数发散

级数收敛的必要条件:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

正项级数的审敛法

对于 $\forall a_n \geq 0$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，称之为正项级数

正项级数收敛的充要条件为部分和数列 $\{s_n\}$ 有界

1. 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，且存在某正整数 k ，使得 $a_n \leq b_n, n \geq k$ 恒成立，则

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

2. 比较审敛法（极限形式）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数，若极限 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ 有确定意义，则有

> 有确定意义指该极限为常数或无穷大

$0 < l < +\infty$ 时，两个级数有相同的敛散性

$l = 0$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

$l=+\infty$ 时，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

3. 比值审敛法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ 有确定意义，则有

$0\leq\rho<1$ 时，级数收敛

$1<\rho\leq+\infty$ 时，级数发散

当 $\rho=1$ 时，敛散性应另行判定

4. 根值审敛法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=\rho$ 有确定意义，则有

$0\leq\rho<1$ 时，级数收敛

$1<\rho\leq+\infty$ 时，级数发散

当 $\rho=1$ 时，敛散性应另行判定

5. 柯西积分审敛法

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若有定义在 $[1,+\infty)$ 上连续单减函数 $f(x)$ 使得 $f(n)=a_n(n=1,2,3,\cdots)$ 。则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散

常见级数的敛散性

1. 等比级数（几何级数） $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$

当 $|q|<1$ 时，级数收敛于 $\frac{a}{1-q}$

当 $|q|\geq1$ 时，级数发散

2. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

级数发散

3. p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

当 $p > 1$ 时，级数收敛；当 $p \leq 1$ 时级数发散

交错级数的审敛法

对于正、负项相间的级数称为交错级数，例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, a_n > 0$

莱布尼茨定理：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 满足如下条件：

1. $a_n \geq a_{n+1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$
2. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

则级数收敛，且级数和 $s \leq a_1$ ，余项绝对值 $|r_n| < a_{n+1}$

绝对收敛与条件收敛

一般项为任意实数的级数称为任意项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛

绝对收敛的级数必定收敛，但收敛级数未必绝对收敛

函数项级数

设 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 是定义在区间 I 上的函数列，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 称为定义在区间 I 上的函数项（无穷）级数

若 $x_0 \in I$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，否则称为发散点

收敛点全体构成的集合为收敛域，发散点全体构成的集合为发散域

在收敛域 K 上，函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$，称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数。即 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in K$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项部分和记作 $s_n(x)$，当 $x \in K$ 时，有 $\lim_{n \to \infty} s_n(x)=s(x)$

在收敛域 K 上，称 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 为函数项级数的余项，显然有 $\lim_{n \to \infty} r_n(x)=0$

幂级数的收敛性

形如 $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ 的函数项级数称为 $(x-x_0)$ 的幂级数

其中 $a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数的系数

幂级数可简记为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$。当 $x_0=0$ 时，称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为 x 的幂级数

1. Abel 定理

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0(x_0 \neq 0)$ 处收敛，则它在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛；若在 $x=x_1$ 处发散，则它在满足不等式 $|x|>|x_1|$ 的一切 x 处发散

若 $x=\pm R$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛于发散的分界点，则正数 R 称为该幂级数的收敛半径，

$(-R, R)$ 称为收敛区间；$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域

2. 系数模比值法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是不缺项的（即 $\forall a_n \neq 0$），若极限 $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$ 有确定意义，则幂级数的收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

3. 系数模根值法

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是不缺项的（即 $\forall a_n \neq 0$），若极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ 有确定意义，则幂级数的收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

幂级数的运算性质

代数性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛域分别为 R_1, R_2， $R = \min(R_1, R_2)$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, x \in (-R, R)$

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}, x \in (-R, R)$

若收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$ 则 $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

分析性质

连续性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域内连续

逐项可积性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域 K 的任一有界闭子区间上可积，且有

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-R, R)$$

逐项微分性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，并可逐项求导任意次。且有

$$s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, x \in (-R, R)$$

逐项微分时，运算前后端点处的敛散性可能改边

泰勒级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数，则幂级数

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots +$
$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \cdots$,称为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的泰勒级数或称为 $f(x)$ 关于 $(x - x_0)$ 的泰勒级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的麦克劳林级数

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0, \delta)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, x\in R$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in R$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$$

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n, x\in[-1,1]$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x\in R$$

傅里叶级数

令 $\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)\leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x, a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

狄利克雷充分定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数，如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且:

1. 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$
2. 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$
3. 当 x 为端点时 $x=\pm l$ ，级数收敛于 $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$

函数延拓

定义在 $[0,l]$ 上的函数展位正弦级数、余弦级数

设 $f(x)$ 定义在 $[0,l]$ 上，延拓成以 $2l$ 为周期的函数 $F(x)$

奇延拓： $F(x)=\begin{cases} f(x), 0<x\leq l \\ 0, x=0 \\ -f(-x), -l\leq x<0> \end{cases}$

所对应傅里叶级数 $f(x)\leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$

偶延拓 $F(x)=\begin{cases} f(x), 0\leq x\leq l \\ f(-x), -l\leq x<0 \end{cases}$

所对应的傅里叶级数 $f(x)\leftrightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x, a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$